COMPORTAMIENTO DE LA INVARIANTE ν DE UN CUERPO DE CARACTERISTICA 2 BAJO EXTENSIONES FINITAS

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

ROBERTO ARTURO ARAVIRE FLORES

Enero, 1987

Patrocinante: Dr. Ricardo Baeza R.

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

ROBERTO ARTURO ARAVIRE FLORES

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Dr. Ricardo Baeza R. Ricardo Baeza

Comisión Informante de Tesis

Jorge Soto Andrade

Oscar Barriga Bravo

José Pantoja Macari

I N D I C E

Pág.

Apéndices.

I N T R O D U C C I O N

En el estudio de las formas cuadráticas sobre un cuerpo F , han apa recido invariantes que miden algunas características particulares del cuerpo F . Una de ellas es la u-invariante, que es la dimensión máxima de una forma cuadrática anisótropa de torsión sobre F . Sin embargo el comportamiento de u bajo extensiones algebraicas finitas no es conoci - do, aún en los casos más simples.

Por lo anterior se propuso el estudio de un concepto similar conside rando los ideales $I^n(F)$, definiendo:

$$\nu(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n(F) \text{ es libre de torsión}\}$$

o ∞ si tal mínimo no existe. Cuando F es un cuerpo no real e.d. toda forma es de torsión, resulta

$$\nu(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n(F) = 0\} .$$

Esta invariante fué introducida por Elman y Lam [E-L] en 1976. En aquella publicación los autores lograron algunos resultados relativos al comportamiento de ν bajo extensiones finitas L de F.

En particular demostraron:

$$\nu(L) \leq \nu(F) + [L : F] - 1 ,$$

que dá una cota superior a $\nu(L)$; esta cota depende del grado de la extensión.

Recientemente D. Leep, 1985 (no publicado aún) encontró una mejor cota:

$$\nu(L) \leq \nu(F) + \left[\log_2 \left(\frac{[L : F]}{3}\right)\right] + 1 ,$$

que aún es dependiente del grado de la extensión.

En el trabajo [E-L] los autores conjeturan la existencia de una cota uniforme para $\nu(L)$

$$\nu(L) \leq \nu(F) + 1$$

para F cuerpo no real, de característica distinta de 2 y L extensión finita de F.

Esta conjetura sigue aún en tal estado y su eventual demostración abriría el paso a estudios de ν para extensiones trascendentes de F, usando la relación debida a Milnor

$$I^m(E) \cong I^m F \oplus \bigoplus_{\pi} I^{m-1}\left(F[x]/\pi(x)\right) \qquad \pi(x) \in F[x]$$

donde $\pi(x)$ recorre todos los polinomios mónicos irreducibles. De modo que si la conjetura es verdadera se tendría $\nu(F(x)) \leq \nu(F) + 2$ para cuerpos no reales.

Se incluye el Apéndice A con los resultados alcanzados por Elman-Lam y Leep.

Considerando lo anterior nos planteamos el siguiente problema:

"Definir el concepto correspondiente para cuerpos de característica 2, demostrar la validez de las cotas de Elman, Lam y de Leep para este tipo de cuerpos y eventualmente demostrar la conjetura equivalente o encontrar contraejemplos que la refuten".

La definición de ν para cuerpos de característica 2 puede hacerse a partir de formas bilineales o de formas cuadráticas, ya que en característica 2 ambos conceptos son distintos, pero como se verá es más general hacerlo sobre formas cuadráticas (Capítulo II, § 1), en todo caso se incluye el análisis correspondiente para la ν-bilineal en el Apéndice B.

En relación a las cotas, se logró demostrar que la conjetura correspondiente es verdadera, es decir:

"Si L es extensión finita de F y $ChF = 2$ entonces:

$$\nu(F) \leq \nu(L) \leq \nu(F) + 1 \text{ ".}$$

Este resultado incluye una cota inferior para $\nu(L)$.

La demostración de este resultado se divide en tres casos:

i) Caso L extensión separable de F ,

ii) Caso L extensión puramente inseparable de F , y

iii) Caso general (Capítulo II, § 2, § 3, § 4). Además se presentan ejemplos que evidencian que las cotas de $\nu(L)$ son óptimas.

Se incluye el Capítulo I con definiciones y resultados fundamentales acerca de formas bilineales y cuadráticas sobre cuerpos de característica 2.

Los resultados del presente trabajo refuerzan la confianza en la validez de la conjetura de Elman y Lam, aunque las herramientas usadas y los resultados intermedios aquí alcanzados no son aptos para esa posible demostración.

C A P I T U L O   I

§ 1. Introducción.

En este Capítulo se exponen los elementos fundamentales sobre formas cuadráticas en cuerpos con $Ch = 2$, con el objeto de uniformizar la notación y hacer entendibles las demostraciones desarrolladas en el Capítulo II.

Se asumen conocidos los principales resultados sobre formas bilineales simétricas, la generación del anillo de Witt y sus propiedades más importantes, éstas pueden ser consultadas en [L] y [Sch].

Sobre cuerpos de característica 2 las formas cuadráticas y las formas bilineales no son equivalentes, por lo que deben ser consideradas en forma especial. Un tratamiento detallado sobre formas cuadráticas se encuentra en $[\mathrm{Ba}]_1$.

En § 1, § 2 se presentan definiciones y se enuncian teoremas y proposiciones cuyas demostraciones se encuentran en las referencias que allí se indican; en algunos casos se efectúan breves demostraciones con el objeto de ilustrar la técnica usada.

En adelante se supone que los cuerpos son de característica 2.

§ 2. Formas Cuadráticas.

2.1. Definiciones. Sea V espacio vectorial de dimensión finita sobre F $(\mathrm{Ch}\, F = 2)$.

2.1.1. Se dice que (V,q) es forma cuadrática sobre F si $q : V \to F$ es tal que:

i) $$q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) \qquad \forall\, \alpha \in F\,,\ \forall\, x \in V$$

ii) la aplicación $b_q : V \times V \to F$ definida por $b_q(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ es tal que (V,b_q) es forma bilineal simétrica.

La forma cuadrática se dice no singular si (V,b_q) es no singular e.d. el radical de (V,b_q) es $\{0\}$.

Un vector no nulo $x \in V$ se dice isótropo si $q(x) = 0$. (V,q) es anisótropo si no contiene vectores isótropos.

2.1.2. Si (V_1,q_1) y (V_2,q_2) son formas cuadráticas no singulares se puede definir q sobre $V_1 \oplus V_2$ mediante:

$$q : V_1 \oplus V_2 \to F \quad \text{con}$$

$$q(x_1 \oplus x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2) \qquad \forall\, x_1 \in V_1\ ,\ x_2 \in V_2\ .$$

Se tiene que $(V_1 \oplus V_2, q)$ es también forma cuadrática no singular y se escribe $q = q_1 + q_2$.

Además, si (U,b) es forma bilineal simétrica no singular y (V,q) es forma cuadrática no singular se define: q' sobre $U \otimes V$ como:

$$q' : U \otimes V \to F \quad \text{con} \quad q'(x \otimes y) = b(x,x)q(y) \qquad \forall\, x \in U,\ y \in V\ .$$

Se tiene que q' es también forma cuadrática no singular y se escribe $q' = b \cdot q$.

2.1.3. Sean (V,q) y (V',q') formas cuadráticas no singulares. Se dice que:

$$\sigma : (V,q) \to (V',q')$$

es isomorfismo si:

a) σ es isomorfismo F-lineal entre los espacios vectoriales.

b) $q(x) = q'(\sigma(x)) \qquad \forall\, x \in V$

Cuando q y q' son isométricos se escribe $q \cong q'$ y σ se denomina isometría.

2.1.4. Se define $D_F(q) := \{q(x) \,/\, x \in V \;,\; x \neq 0\}$ como el conjunto de los elementos de F representables por la forma cuadrática q .

2.2. Bases Simplécticas.

2.2.1. Sea (V,q) forma cuadrática no singular de dimensión n sobre F (e.d. $\dim_F V = n$) . Como $b_q(x,x) = q(x+x) - q(x) - q(x) = 2q(x) = 0$ entonces b_q es una forma alternante simétrica no singular, luego la dimensión de (V,b_q) es par.

Se tiene que, dado que $ChF = 2$, no existen bases ortogonales que permitan diagonalizar las formas cuadráticas, pero sí existen las llamadas Bases Simplécticas, que son del tipo:

2.2.2. $\{e_1,f_1,e_2,f_2, \ldots, e_m,f_m\}$ base de V , $n = 2m$ con $b_q(e_i,f_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, m$; $b_q(e_i,f_j) = b_q(e_i,e_j) = b_q(f_i,f_j) = 0$ para

$i \neq j$ y $q(e_i) = a_i$, $q(f_i) = b_i$ $i = 1, \ldots, m$.

Mediante esta base q , se puede escribir como:

$$q \cong [a_1, b_1] + \ldots + [a_m, b_m] .$$

Si $X = X_1 e_1 + Y_1 f_1 + \ldots + X_m e_m + Y_m f_m \in V$

entonces

$$q(X) = \sum_{i=1}^{m} \left(a_i X_i^2 + X_i Y_i + b_i Y_i^2 \right) .$$

2.3. Espacios Hiperbólicos.

Una forma cuadrática (V,q) de dimensión 2 tal que $q \cong [0,0]$ se llama Plano Hiperbólico y se denota por $\mathbb{H}$.

Más general, una forma cuadrática q se dice que es hiperbólica si es suma de planos hiperbólicos, e.d.

$$q \cong \mathbb{H} + \mathbb{H} + \ldots + \mathbb{H} = s \times \mathbb{H} \qquad \text{para algún } s \in \mathbb{N} .$$

2.4. Algunas Propiedades.

2.4.1. Proposición. Toda forma cuadrática no singular (V,q) isótropa contiene un plano hiperbólico.

Demostración: (V,q) isótropo significa que existe $x \in V$, no nulo, tal que $q(x) = 0$; como q es no singular existe $y \in V$ tal que $b_q(x,y) \neq$ $\neq 0$. Sin restricción podemos asumir que $b_q(x,y) = 1$. Formemos $z = y + q(y)x$, entonces:

$$q(z) = q(y + q(y)x) = b_q(y,q(y)x) - q(y) - q(q(y)x) =$$

$$= q(y) - q(y) - q(y)^2 q(x) = 0$$

y $$b_q(x,z) = b_q(x,y + q(y)x) = b_q(x,y) = 1$$

luego $q \cong [0,0] + q'$, q' forma cuadrática, por lo tanto q contiene un plano hiperbólico. □

2.4.2. Teorema (Witt). Si (V,q) es forma cuadrática no singular (respectivamente forma bilineal simétrica) entonces (V,q) tiene una descomposición única como:

$$(V,q) \cong s \times \mathbb{H} + (V_a,q_a) \quad \text{con} \quad s \geq 0$$

y (V_a,q_a) forma cuadrática anisótropa (resp. f bilineal simétrica anisótropa).

s se denomina Indice de Witt y (V_a,q_a) parte anisótropa o núcleo de q .

La demostración de este Teorema se puede encontrar en [Ba]$_1$ Capítulo III, § 4.3 y en [Sch] Capítulo I, § 5.8. □

Como $ChF = 2$, en F existe el conjunto $\wp F := \{a^2 + a \,/\, a \in F\}$ que es subgrupo aditivo de F , y tiene la siguiente propiedad:

2.4.3. Proposición. Si $c \in \wp F$ entonces $[1,a] \cong [1,a + c]$

Demostración: Sea $\{e,f\}$ base simpléctica de $q \cong [1,a]$ entonces $q(e) = 1$, $q(f) = a$ y $b_q(e,f) = 1$. Como $c \in \wp F$ entonces $c = u^2 + u$ para algún $u \in F$.

Consideremos $\{e, f + ue\}$, claramente es base de q y $q(e) = 1$,

$q(f + ue) = b_q(f,ue) + q(f) + q(ue) = u + a + u^2 = a + c$

$$b_q(e,f + ue) = b_q(e,f) + b_q(e,ue) = 1$$

luego $q \cong [1, a + c]$. $\square$

Más aún, se puede demostrar de igual manera que:

2.4.4. Proposición. Sean $q_1 = [a,b]$ y $q_2 = [c,d]$ formas cuadráticas no singulares, entonces:

$$q_1 \cong q_2 \quad \text{sí y sólo si} \quad ab \equiv cd(\wp F)$$

y $$D^*(q_1) \cap D^*(q_2) \neq \phi \ .$$

§ 3. El grupo de Witt $W_q(F)$.

3.1. Definiciones. Sean (V,q) y (V',q') formas cuadráticas no singulares, por el Teorema de Witt tenemos:

$$(V,q) \cong s \times \mathbb{H} + (V_a, q_a)$$

y $$(V',q') \cong r \times \mathbb{H} + (V'_a, q'_a) \ .$$

3.1.1. Definición. Sean $(V,q),(V',q')$ formas cuadráticas no singulares. Se dice que q es equivalente a q' (se denota $q \sim q'$) si q_a es isométrica a q'_a e.d.

$$q \sim q' \iff q_a \cong q'_a \ .$$

Claramente la relación así definida es de equivalencia y se puede formar $W_q(F)$ el conjunto de las clases de equivalencia de formas cuadráticas sobre F.

Similarmente se puede formar $W(F)$ el conjunto de las clases de equivalencia de formas bilineales simétricas sobre F.

3.1.2. <u>Proposición</u>. Sean (V_1,q_1), (V_1',q_1'), (V_2,q_2), (V_2',q_2') formas cuadráticas sobre F, se tiene:

i) Si $q_1 \sim q_1'$ y $q_2 \sim q_2'$ entonces $q_1 + q_2 \sim q_1' + q_2'$,

ii) $q + q \sim 0$ clase de formas hiperbólicas.

<u>Demostración</u>: Es obvio usando el Teorema de Witt y la definición 3.1.1. □

Esta proposición permite definir en $W_q(F)$ la operación $+$.

$$[q] + [q'] := [q + q'] \quad \forall [q], [q'] \in W_q(F)$$

y se tiene que $W_q(F)$ con la operación $+$ es grupo abeliano; $W_q(F)$ se llama Grupo de Witt.

3.1.3. <u>Proposición</u>. Sean (V_1,b_1), (V_2,b_2), (V_1',b_1'), (V_2',b_2') formas bilineales simétricas:

i) Si $b_1 \sim b_1'$ y $b_2 \sim b_2'$ entonces

$$b_1 + b_2 \sim b_1' + b_2'$$

$$\text{y} \quad b_1 \otimes b_2 \sim b_1' \otimes b_2'$$

ii) $b_1 + b_1 \sim 0$ clase de las formas hiperbólicas

iii) Sean (U,q) , (U',q') formas cuadráticas no singulares. Si $b_1 \sim b_1'$ y $q \sim q'$ entonces $b_1 q \sim b_1' q'$.

Esto define en $W(F)$ las siguientes operaciones:

$$[b] + [b'] := [b + b']$$

$$[b][b'] := [b \otimes b'] \qquad \forall\, [b] , [b'] \in W(F)$$

y se tiene que $W(F)$ es anillo conmutativo con unidad. $W(F)$ se denomina Anillo de Witt.

Más aún, por iii) de 3.1.3. se tiene que $W_q(F)$ es $W(F)$-módulo.

En adelante se escribirá b (resp. q) en lugar de $[b]$ (resp. $[q]$) para referirse a los elementos de $W(F)$ (resp. $W_q(F)$) .

3.1.4. Algunas propiedades básicas en $W(F)$ y $W_q(F)$ son:

a) $\langle a,bc^2 \rangle \cong \langle a,b \rangle \qquad \forall\, c \neq 0 \quad a,b \in F$

b) $\langle a,b \rangle = \langle a \rangle \langle 1,ab \rangle$

c) Si $a + b \neq 0$ $\langle a,b \rangle = \langle a + b \rangle \langle 1,ab(a + b) \rangle$

d) $[a,b] = \langle a \rangle [1,ab] = \langle b \rangle [1,ab]$

e) $[1,a + b] = [1,a] + [1,b]$.

Se demuestran las dos últimas relaciones.

<u>Demostración</u>: d) $q = \langle a \rangle [1,ab]$ es el producto de la forma bilineal $\phi = \langle a \rangle$ y la forma cuadrática $\sigma = [1,ab]$. Sea $\{u\}$ la base de ϕ e.d. $\phi(u,u) = a$ y $\{e,f\}$ la base simpléctica de σ e.d. $\sigma(e) = 1$,

$\sigma(f) = ab$, $b_\sigma(e,f) = 1$.

Entonces $\{u \otimes e , u \otimes f\}$ es base de q pero no es simpléctica. Consideremos entonces $e' = u \otimes e$ y $f' = a^{-1}(u \otimes f)$ entonces

$$q(e') = q(u \otimes e) = \phi(u,u)\sigma(e) = a \cdot 1 = a \quad , \quad b_q(e',f') = 1$$

y $$q(f') = q(a^{-1}(u \otimes f)) = a^{-2}\phi(u,u)\sigma(f) = a^{-2} \cdot a \cdot ab = b$$

$$q = [a,b]$$

luego $\langle a \rangle [1,ab] = [a,b]$.

Demostración: e) Sea $q = [1,a] + [1,b]$ con $\{e_1,f_1,e_2,f_2\}$ base simpléctica correspondiente e.d. $q(e_1) = q(e_2) = 1$, $q(f_1) = a$, $q(f_2) = b$ y $b_q(e_1,f_1) = b_q(e_2,f_2) = 1$.

Se tiene que $\{e_1,f_1 + f_2,e_1 + e_2,f_2\}$ es evidentemente una base de q y además $q(e_1) = 1$, $q(f_1 + f_2) = a + b$, $b_q(e_1,f_1 + f_2) = 1$; $q(e_1 + e_2) = 0$, $q(f_2) = b$, $b_q(e_1 + e_2,f_2) = 1$ y $b_q(f_1 + f_2,e_1 + e_2) = 0$, luego es base simpléctica. Por lo tanto $q = [1,a + b] + [0,b]$ y como $[0,b]$ es isótropa de dimensión 2 es hiperbólica, entonces

$$[1,a] + [1,b] = [1,a + b] \quad \text{en } W_q(F) .$$

$\square$

3.2. Propiedades funtoriales de $W(F)$ y $W_q(F)$.

3.2.1. Veamos el comportamiento de $W(F)$ y $W_q(F)$ bajo extensiones de cuerpos.

Sea K extensión de F . Si V es un F-espacio vectorial se puede formar: $V \otimes_F K = \{\Sigma\, x \otimes \lambda \,/\, x \in V\ ,\ \lambda \in K\}$ con $\delta(x \otimes \lambda) = x \otimes (\delta\lambda)$ $\forall\ \delta,\lambda \in K$, $x \in V$. Luego si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es F-base de V se tiene que $\{e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1\}$ es K-base de V .

Si (V,b) es forma bilineal simétrica sobre F se define $(V,b) \otimes_F K := (V \otimes_F K\ ,\ b \otimes K)$ mediante

$$b \otimes K(x \otimes \lambda\ ,\ y \otimes \delta) = \lambda\delta b(x,y) \qquad \forall\ x,y \in \forall,\ \lambda,\delta \in K\ .$$

Así $b \otimes K$ es una forma bilineal sobre K y $b \otimes K$ es no singular sí y sólo si b también lo es.

Similarmente, si (V,q) es forma cuadrática sobre F , se define $(V,q) \otimes_F K = (V \otimes_F K\ ,\ q \otimes K)$ con $q \otimes K(x \otimes \lambda) = \lambda^2 q(x)$ $\forall\ x \in V$, $\lambda \in K$ y se tiene que $q \otimes K$ es forma cuadrática sobre K .

3.2.2. Algunas propiedades.

Sea $K = F(\alpha)$ con $\alpha^2 + \alpha = a \in F \setminus \wp F$ una extensión cuadrática separable de F , entonces se cumple:

1.- $[1,a] \otimes K = [0,0]$

2.- Sea (V,q) forma cuadrática sobre F . Si $q \otimes K$ es isótropa sobre K entonces $q = \langle b \rangle [1,a] + q_1$ con $b \in F^*$, q_1 forma cuadrática sobre F .

3.- Si (V,q) es anisótropa sobre F y $q \otimes K$ es hiperbólica entonces $q \cong b[1,a]$ donde b es forma bilineal sobre F .

Las demostraciones se encuentran en $[\mathrm{Ba}]_1$ Capítulo V, § 4.2, § 4.8.

Particularmente existe el siguiente resultado:

3.2.3. Teorema (Springer). Sea K una extensión finita de F de grado impar. Si (V,b) (resp. (V,q)) es anisótropa sobre F entonces $(V,b) \otimes_F K$ (resp. $(V,q) \otimes_F K$) es anisótropa también.

Demostración: [L], Capítulo VII 2.3. □

3.2.4. Sea K extensión finita de F. Una traza es una aplicación $s : K \to F$ F-lineal no trivial.

Una propiedad importante es que si s y t son dos trazas de K en F existe $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ tal que $t(\alpha) = s(\lambda\alpha)$ $\forall\, \alpha \in K$. (Ver [Sch] Capítulo 2, § 5.1. ... § 5.7.)

Si (V,b) es forma bilineal sobre K se define $s_*(b)$ como $s_*(b) = s \circ b : V \times V \to F$ que dá origen a una forma bilineal sobre F. $s_*(V,b) = (V, s_*(b))$ se llama TRANSFER de (V,b) según s. Se cumple que si (V,b) es no singular entonces $s_*(V,b)$ es no singular también.

Similarmente $s_*(q) = s \circ q$ define una forma cuadrática sobre F.

3.2.5. Algunas propiedades básicas:

Sean b,b' formas bilineales sobre K

1) $s_*(b + b') \cong s_*(b) + s_*(b')$

2) $s_*(n \times \mathbb{H}) \cong n \cdot [K : F] \times \mathbb{H}$

3) Si $b \cong b'$ entonces $s_*(b) \cong s_*(b')$

Sean q,q' formas cuadráticas sobre K.

4) $s_*(q + q') \cong s_*(q) + s_*(q')$

5) Si $q \cong q'$ entonces $s_*(q) \cong s_*(q')$

Demostración: Ver [Ba]$_1$ Capítulo I, § 2.11. □

Un resultado importante es:

3.2.6. Teorema (Ley de Reciprocidad de Frobenius). Sea (V,b) forma bilineal sobre F y ϕ una forma bilineal (resp. f. cuadrática) sobre K. Si $s : K \to F$ es una traza entonces:

$$s_*((b \otimes_F K) \otimes \phi) = b \otimes s_*(\phi) .$$

Particularmente

$$s_*(b \otimes K) = b \otimes s_*(\langle 1 \rangle) .$$

Demostración: Ver [Ba]$_1$, Capítulo I, § 2.12. □

Usando el Teorema anterior es posible demostrar la siguiente:

3.2.7. Proposición (Scharlau). Sea $F(\alpha)$ extensión de grado n sobre F. $s : F(\alpha) \to F$ traza definida por $s(1) = 1$, $s(\alpha) = s(\alpha^2) = \ldots = s(\alpha^{n-1}) = 0$, entonces

$$s_*(\langle 1 \rangle) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \mathbb{H} + \langle 1, N(\alpha) \rangle & \text{para } n \equiv 0(2) \\ \\ \left(\frac{n-1}{2}\right) \times \mathbb{H} + \langle 1 \rangle & \text{para } n \equiv 1(2) \end{cases}$$

$$s_*(\langle \alpha \rangle) = \begin{cases} \frac{n}{2} \times \mathbb{H} & \text{para } n \equiv 0(2) \\ \\ \frac{n-1}{2} \times \mathbb{H} + \langle N(\alpha) \rangle & \text{para } n \equiv 1(2) . \end{cases}$$

Demostración: Ver [L], Capítulo VII, § 1.6. □

3.2.8. La tensorización permite definir:

$$\begin{aligned} i_{K/F} : W(F) &\longrightarrow W(K) \\ b &\longrightarrow b \otimes K \end{aligned}$$

que es homomorfismo de anillos, e.d.

$$i_{K/F}(b_1 + b_2) = i_{K/F}(b_1) + i_{K/F}(b_2)$$

$$i_{K/F}(b_1 \otimes b_2) = i_{K/F}(b_1) \cdot i_{K/F}(b_2) \qquad \forall\, b_1, b_2 \in W(F)\ .$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} i_{K/F} : W_q(F) &\longrightarrow W_q(K) \\ q &\longrightarrow q \otimes K \end{aligned}$$

es homomorfismo de grupos

$$i_{K/F}(q_1 + q_2) = i_{K/F}(q_1) + i_{K/F}(q_2) \qquad \forall\, q_1, q_2 \in W_q(F)\ .$$

Nota: a) Si K es extensión de grado impar entonces $\operatorname{Ker}(i_{K/F}) = \{0\}$ (Teorema de Springer).

b) Si $K = F(\alpha)$, con $\alpha^2 + \alpha = a$ entonces

$$\operatorname{Ker}(i_{K/F}) = W(F)\cdot[1,a] \qquad \text{(Prop. 3.2.2).}$$

3.2.9. También se tiene la aplicación s_*.

Sea $s : K \to F$ traza

$$s_* : W(K) \longrightarrow W(F)$$

con $$b \longrightarrow s_*(b) = s \circ b \qquad \forall\, b \in W(K)$$

s_* es homomorfismo de grupos, e.d.

$$s_*(b_1 + b_2) = s_*(b_1) + s_*(b_2) \qquad \forall\, b_1, b_2 \in W(F) .$$

Nota: En general s_* no es multiplicativa y

$$s_*(\langle 1 \rangle) \neq \langle 1 \rangle .$$

Para formas cuadráticas se tiene:

$$s_* : W_q(K) \longrightarrow W_q(F)$$

$$q \longrightarrow s_*(q) = s \circ q \qquad \forall\, q \in W_q(K)$$

y s_* es homomorfismo de grupos, e.d.

$$s_*(q_1 + q_2) = s_*(q_1) + s_*(q_2) \qquad \forall\, q_1, q_2 \in W_q(F) .$$

Por la Ley de Reciprocidad de Frobenius si $L = F(\alpha)$ extensión simple de grado n impar y $s : K \to F$ es traza tal que $s(1) = 1$, $s(\alpha) = \ldots = s(\alpha^{n-1}) = 0$ entonces

$$s_* \circ i_{L/F} = id ,$$

luego s_* es epiyectiva e $i_{L/F}$ es inyectiva.

Además se cumple:

3.2.10. Proposición. Sea $L = F(\alpha)$ extensión cuadrática separable de F con $\alpha^2 + \alpha = a$ y $s : L \to F$ traza definida por $s(1) = 0$, $s(\alpha) = 1$.

Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow W(F)\cdot[1,a] \longrightarrow W_q(F) \xrightarrow{i_{L/F}} W_q(L) \xrightarrow{s_*} W_q(F) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración: Ver $[Ba]_1$, Capítulo V, § 5.9.

□

§ 4. Formas de Pfister.

4.1. Definiciones.

4.1.1. En $W(F)$ al elemento $\langle 1,b\rangle$ se le denomina 1-forma de Pfister y en general el producto $\langle 1,a_1\rangle\langle 1,a_2\rangle \ldots \langle 1,a_m\rangle$ se llama m-forma de Pfister y se denota por $\langle\langle a_1, \ldots, a_m\rangle\rangle$.

El conjunto $I(F) = \{b \in W(F) \,/\, \dim(b)$ es par$\}$ forma claramente un ideal de $W(F)$, más aún es un ideal maximal y se verifica fácilmente que $W(F)/I(F) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. $I(F)$ se llama Ideal Fundamental de $W(F)$.

A partir de $I(F)$ se puede construir la siguiente cadena de ideales

$$W(F) \supset I(F) \supset I^2(F) \supset \ldots \supset I^n(F) \supset \ldots$$

y el estudio de los cuocientes $I^i(F)/I^{i+1}(F)$ constituye uno de los grandes problemas de la Teoría de Formas Cuadráticas.

4.1.2. Proposición. El ideal $I(F)$ está generado aditivamente por las 1-formas de Pfister.

Demostración: Como toda forma de $I(F)$ es de dimensión par entonces $I(F)$ está generado por las formas $\langle a,b\rangle$ con $a,b \in F^*$, pero

$\langle a,b \rangle = \langle 1,a \rangle + \langle 1,b \rangle$ porque $\langle 1,1 \rangle = \langle 1,-1 \rangle = 0$ luego se cumple la Proposición. $\square$

4.1.3. Corolario. $I^n(F)$ está generado aditivamente por las n-formas de Pfister.

En $W_q(F)$ se define la invariante de Arf de la siguiente manera

$$\mathrm{Arf}(q) = \mathrm{Arf}\left(\sum_{i=1}^{m} [a_i, b_i]\right) := \sum_{i=1}^{m} a_i b_i (\wp F)$$

y se cumple:

4.1.4. Proposición. $\mathrm{Arf} : W_q(F) \to F/\wp F$ es epimorfismo de grupos.

Demostración: Ver [Sch], Capítulo IX, § 4.2, 4.3, 4.4.

4.1.5. Como $I(F)$ es ideal de $W(F)$ y $W_q(F)$ es $W(F)$-módulo entonces $IW_q(F)$ se define de manera obvia y se tiene:

$$IW_q(F) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \langle 1,a_i \rangle [1,b_i] \,/\, a_i \in F^*\ ,\ \ b_i \in F\right\}$$

Las formas del tipo $\langle 1,a_1 \rangle \ldots \langle 1,a_n \rangle [1,b]$ en $W_q(F)$ se llaman n-formas de Pfister y se denotan por $\langle\langle a_1, \ldots, a_n ; b]]$.

Claramente tenemos entonces que $I^n W_q(F)$ es el subgrupo generado por las n-formas de Pfister en $W_q(F)$. Además se tiene la siguiente cadena de subgrupos

$$W_q(F) \supset IW_q(F) \supset I^2 W_q(F) \supset \ldots \supset I^n W_q(F) \supset \ldots$$

y los cuocientes $I^n W_q(F) \big/ I^{n+1} W_q(F)$ son objetos de estudio en la Teoría de Formas Cuadráticas (en cuerpos de característica 2).

4.1.6. Proposición. $\mathrm{Ker}(\mathrm{Arf}) = IW_q(F)$.

Demostración:

$$\langle 1,a \rangle [1,b] = [1,b] + \langle a \rangle [1,b] = [1,b] + [a,b/a]$$

luego $\mathrm{Arf}(\langle 1,a \rangle [1,b]) = b + b = 0$

por lo tanto $IW_q(F) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Arf})$.

Sea $q \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Arf})$ entonces $q = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i \rangle [1,b_i]$ y $\mathrm{Arf}(q) = \sum_{i=1}^{m} b_i = 0$, luego $b_1 = b_2 + \ldots + b_n (\wp F)$, entonces

$$q = \langle a_1 \rangle [1,b_1] + \ldots + \langle a_m \rangle [1,b_m] =$$

$$= \langle a_1 \rangle [1,b_2 + \ldots + b_m] + \langle a_2 \rangle [1,b_2] + \ldots + \langle a_m \rangle [1,b_m] =$$

pero $[1,x+y] = [1,x] + [1,y]$; entonces

$$q = \langle a_1,a_2 \rangle [1,b_2] + \ldots + \langle a_1,a_m \rangle [1,b_m] \in IW_q(F)$$

luego $\mathrm{Ker}(\mathrm{Arf}) = IW_q(F)$. $\square$

4.1.7. Corolario.

$$W_q(F) \big/ IW_q(F) \simeq F \big/ \wp F \ .$$

En particular si F es perfecto (e.d. $F = F^2$) entonces $I(F) = \{0\}$, luego $IW_q(F) = \{0\}$ por lo tanto $W_q(F) = F \big/ \wp F$.

4.2. <u>Formas Multiplicativas</u>.

4.2.1. Sea (V,q) forma cuadrática (resp. f. bilineal) sobre F .

Un elemento $a \in F^*$ se llama Norma de Similitud de (V,q) si $\langle a \rangle q \cong q$.

Claramente $N_F(q) = \{a \in F^* / a$ es norma de similitud de $q\}$ es un subgrupo multiplicativo de F^* .

Además si $1 \in D_F(q)$ entonces $N_F(q) \subseteq D_F(q)$.

Se demuestra que $D_F(\langle\langle 1,a \rangle\rangle)^* = N_F(\langle\langle 1,a \rangle\rangle)$ y que $D_F([1,a])^* = N_F([1,a])^*$, $a \in F^*$.

4.2.2. <u>Definición</u>. Una forma cuadrática (V,q) (resp. forma bilineal) se llama multiplicativa sobre F si $D_F^*(q) = N_F(q)$.

Según esta definición $\langle 1,a \rangle$ y $[1,a]$ son formas multiplicativas.

Más aún, se tienen los siguientes hechos:

4.2.3. <u>Teorema</u>. Si (V,q) es forma cuadrática (resp. f. bilineal) multiplicativa y $a \in F^*$ entonces $\langle 1,a \rangle \cdot q$ es multiplicativa.

4.2.4. <u>Corolario 1</u>. Si $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ entonces $\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ es forma multiplicativa.

4.2.5. <u>Corolario 2</u>. Si $a_1, \ldots, a_n \in F^*$ y $b \in F$ entonces $\langle\langle a_1, \ldots, a_n ; b]]$ es forma multiplicativa.

Las demostraciones del Teorema 4.2.3. y sus Corolarios se pueden consultar en [Sch], Capítulo II, § 10.4.

□

Además se tiene el siguiente resultado:

4.2.6. Teorema. Sea q forma cuadrática (resp. f. bilineal) multiplicativa anisótropa, $a \in F^*$ y $q' = \langle 1,a\rangle q$.

Si q' es isótropa entonces es hiperbólica.

Demostración: Ver [L], Capítulo X § 2.8.

4.2.7. Corolario. Sea q una n-forma de Pfister sobre F , si q es isótropa entonces es hiperbólica.

□

C A P I T U L O   II

§ 1. Definición de la invariante ν .

Elman y Lam [E-L] definieron, para un cuerpo F con $ChF \neq 2$, no real,

$$\nu(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n(F) = 0\} ,$$

y $\nu(F) = \infty$ cuando $I^n(F) \neq 0$ para todo n .

La conjetura planteada por los autores [E-L] es que si L es extensión finita de F entonces

$$\nu(L) \leq \nu(F) + 1 .$$

Lo primero que debemos hacer entonces es definir adecuadamente el concepto para formas cuadráticas sobre cuerpos de característica 2.

1.1. Definición. Sea F cuerpo con $ChF = 2$. Se define

$$\nu(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n W_q(F) = 0\}$$

cuando existe y $\nu(F) = \infty$ cuando $I^n W_q(F) \neq 0$ para todo n .

Nota: Se puede definir un concepto similar para formas bilineales que pierde bastante información al ignorar las formas cuadráticas, de todas maneras se incluyen algunos resultados en el Apéndice B.

El resultado principal de nuestro trabajo es el siguiente:

1.2. Teorema. Si F cuerpo de característica 2. Entonces para cualquier L extensión finita de F se tiene:

$$\nu(F) \leq \nu(L) \leq \nu(F) + 1$$

y estas cotas son óptimas.

La demostración se ha dividido en tres secciones:

1) Para L extensión finita separable de F.

2) Para L extensión finita puramente inseparable de F.

3) Para L extensión finita cualquiera de F.

En esta parte además se dan ejemplos que realizan las cotas de la desigualdad.

§ 2. L extensión finita separable de F.

El primer resultado es un Lema de gran utilidad, que permite distribuir las sumas de un componente bilineal como suma de cuadráticas.

2.1. Lema. Para $a,b,c \in F$ con $a,b,a+b \neq 0$ se cumple en $W_q(F)$

$$\langle 1,a+b\rangle [1,c] = \langle 1,a\rangle \left[1, \frac{ac}{b+c}\right] + \langle 1,b\rangle \left[1, \frac{bc}{b+c}\right] .$$

Demostración: Usando propiedades del Capítulo I, § 2.4., desarrollemos

$$\langle 1,a+b\rangle [1,c] = [1,c] + \langle a+b\rangle [1,c]$$

$$= [1,c] + \left[a+b, \frac{c}{a+b}\right] = [1,c] + \left[a, \frac{c}{a+b}\right] + \left[b, \frac{c}{a+b}\right] . \qquad (*)$$

Pero $$[1,c] = \left[1, \frac{(a+b)c}{a+b}\right] = \left[1, \frac{ac}{a+b}\right] + \left[1, \frac{bc}{a+b}\right]$$

$$\left[a, \frac{c}{a+b}\right] = \langle a\rangle \left[1, \frac{ac}{a+b}\right]$$

y $$\left[b, \frac{c}{a+b}\right] = \langle b\rangle \left[1, \frac{bc}{a+b}\right] .$$

Luego, reemplazando en (*) tenemos

$$\langle 1,a+b\rangle [1,c] = \left[1, \frac{ac}{a+b}\right] + \left[1, \frac{bc}{a+b}\right] + \langle a\rangle \left[1, \frac{ac}{a+b}\right] + \langle b\rangle \left[1, \frac{bc}{a+b}\right]$$

$$= \langle 1,a\rangle \left[1, \frac{ac}{a+b}\right] + \langle 1,b\rangle \left[1, \frac{bc}{a+b}\right] .$$

□

Observación: Notemos que si L es extensión finita separable de F entonces $L = F(\alpha)$ para algún $\alpha \in L$; sea $n = [L : F]$ y $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ F-base de L .

Más aún, como $ChF = 2$ se sabe que: Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ es F-ℓ.i. en L entonces $\{\alpha_1^2, \ldots, \alpha_m^2\}$ es también F-ℓ.i. en L (esto proviene de un hecho más general aún: Si $\{\alpha_i\}$ es F-ℓ.i. y $ChF = p$ entonces $\{\alpha_i^p\}$ es F-ℓ.i.) .

Por lo tanto $\{1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2(n-1)}\}$ es base de L sobre F e.d. $L = F(\alpha^2)$.

Luego todo elemento $\beta \in L$ se escribe como $\beta = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \alpha^{2i}$ con $b_i \in F$, por lo tanto

2.2. Corolario. Sea $L = F(\alpha)$ y $\beta = b_o + b_1\alpha^2 + \ldots + b_{n-1}\alpha^{2(n-1)}$ con $b_o, \ldots, b_{n-1} \in F$ entonces para cualquier $\gamma \in L$ tenemos

$$\langle 1, \beta \rangle [1, \gamma] = \sum_{i=0}^{n-1} \langle 1, b_i \rangle [1, \gamma_i]$$

con ciertos $\gamma_i \in L$. La suma se hace para aquellos $b_i \neq 0$.

Demostración: Aplicando el Lema 2.1 reiteradamente $\langle 1, \beta \rangle [1, \gamma]$ se puede descomponer en sumandos del tipo $\langle 1, b_i \alpha^{2i} \rangle [1, \gamma_i]$ con ciertos $\gamma_i \in L$ pero $\langle 1, b_i \alpha^{2i} \rangle = \langle 1, b_i \rangle$, luego vale el Corolario.

$\square$

Este resultado nos permite encontrar una familia de generadores de $I^n W_q(L)$.

2.3. Corolario. Sea L extensión finita separable de F . Entonces para cualquier $m \geq 0$ $I^m W_q(L)$ está generado por formas de Pfister del tipo $\langle 1,a_1\rangle \langle 1,a_2\rangle \dots \langle 1,a_m\rangle [1,\gamma]$ con $a_i \in F^*$, $\gamma \in L$.

Demostración: Por inducción sobre m .

Para $m = 1$ se aplica el Corolario anterior. Supongamos que $I^{m-1}W_q(F)$ es generado por $(m-1)$-formas de Pfister del tipo indicado, entonces $I^m W_q(F) = I(F)\cdot I^{m-1}W_q(F)$ e.d. $I^m W_q(F)$ estará generado por formas del tipo

$$\langle 1,a_1\rangle \langle 1,a_2\rangle \dots \langle 1,a_{m-1}\rangle \langle 1,\beta\rangle [1,\gamma] \qquad \text{con } \beta,\gamma \in L$$

pero a $\langle 1,\beta\rangle [1,\gamma]$ se le aplica el Corolario anterior y se llega a las formas buscadas.

□

Este último resultado puede ser mejorado aún usando el transfer S_* .

2.4. Corolario. Sea L extensión finita separable de F y $S : L \to F$ una traza, entonces para cualquier $n \geq 0$

$$S_*(I^n W_q(L)) \subseteq I^n W_q(F) .$$

Demostración: S_* es homomorfismo de grupos, luego basta analizar su comportamiento en los generadores de $I^n W_q(L)$ pero por el Corolario anterior los generadores son las formas del tipo $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle[1,\gamma]$ y por Ley de Reciprocidad de Frobenius, tenemos

$$S_*(\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle[1,\gamma]) = \langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle S_*([1,\gamma]) \in I^n W_q(F) .$$

□

Nota: Este último resultado es conocido para cuerpos de característica distinta de 2. Su demostración se debe a Arason y usa herramientas de gran poderío. En nuestro caso tenemos el resultado por medios simples. Sin embargo, este resultado puede ser mejorado notablemente. En efecto:

2.5. Teorema. Sea L extensión finita separable y $s : L \to F$ una traza. Para cualquier $n \geq 0$ tenemos

$$s_*(I^n W_q(L)) = I^n W_q(F) .$$

Demostración: Por el Corolario anterior sólo falta demostrar la epiyectividad. Debemos destacar que este resultado no depende de la traza particular elegida (ver Capítulo I, § 2.2.2.)

Consideraremos los siguientes casos:

a) Si $[L : F] = 2$ e.d. $L = F(\alpha)$ con $\alpha^2 + \alpha = a$, $a \in F$. Debemos demostrar que $[1,b] \in \mathrm{Im}(s_*)$ para todo $b \in F$.

Usando $s : L \to F$ con $s(\alpha) = 1$, $s(1) = 0$ y calculando $s_*([1,(1+\alpha)^2 b])$ se tiene que:

$$s_*([1,(1+\alpha)^2 b]) = [1,b]$$

e.d. s_* es sobre.

b) Si $[L : F]$ es impar. Sea $L = F(\alpha)$ y definamos $s : L \to F$ con $s(1) = 1$, $s(\alpha) = s(\alpha^2) = \ldots = s(\alpha^{n-1}) = 0$ donde $n = [L : F]$.

Por la Ley de Reciprocidad de Frobenius si $q = [1,b]$ entonces $q \otimes L \in W_q(L)$ y $s_*(q \otimes L) = s_*([1,b] \otimes L) = s_*(\langle 1 \rangle)[1,b]$.

Pero se sabe que $s_*(\langle 1 \rangle) = \langle 1 \rangle$ en $W(F)$. (Ver Capítulo I, 3.2.7)

Luego

$$s_*(q \otimes L) = q \qquad \forall\, q \in W_q(F)$$

e.d. s_* es sobre.

c) Sea L extensión galoisiana de F , entonces si $[L : F]$ es impar por b) s_* es sobre , luego asumamos que $[L : F]$ es par.

Sea H el 2-subgrupo de Sylow de $G = Gal(L/F)$ y K el cuerpo fijo de H . Tenemos entonces

$$L \xrightarrow{s_1} K \xrightarrow{s_2} F \ .$$

Sean $s_1 : L \to K$ y $s_2 : K \to F$ aplicaciones trazas con $s_2 \circ s_1 \neq 0$, entonces $s = s_2 \circ s_1 : L \to F$ es traza. Dado que $s_* = s_{2*} \circ s_{1*}$ y como $[K : F]$ es impar e.d. s_{2*} es epiyectiva, entonces basta demostrar que s_{1*} es epiyectiva.

Como $H = Gal(L/K)$ es un 2-grupo entonces existe una cadena de subgrupos normales $H_o = H \subset H_1 \subset \ldots \subset H_r = L$ con $[H_i : H_{i-1}] = 2$ e.d. existe una cadena de subcuerpos $K_o = K \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_r = L$ tales que $[K_i : K_{i-1}] = 2$ y $K_i = Fix(H_i)$.

Elijamos trazas $t_i : K_i \to K_{i-1}$ tales que $t = t_1 \circ t_2 \circ \ldots \circ t_r \neq 0$ e.d. t es traza de $L \to K$.

Como $t_* = t_{1*} \circ t_{2*} \circ \ldots \circ t_{r*}$ y todos los t_i son epiyectivos por a), entonces t_* es también epiyectivo, pero si t_* es epiyectivo entonces s_{1*} también lo es. Luego s_* es sobre.

d) Sea L extensión finita separable. Elegimos una extensión finita N de L tal que N es galoisiana sobre F y $s_1 : N \to L$, $s : L \to F$ trazas tales que $s \circ s_1 \neq 0$. Por (c) $(s \circ s_1)_* = s_* \circ s_{1*}$ es epiyectiva, luego s_* debe ser epiyectiva.

Este último caso concluye la demostración del Teorema.

$\square$

Este resultado induce el siguiente:

2.6. Corolario. Sea L extensión finita separable sobre F. Entonces $\nu(F) \leq \nu(L)$.

Demostración: De la igualdad $s_*(I^m W_q(L)) = I^m W_q(F)$ se concluye que si $\nu(L) = m$ e.d. $I^m W_q(L) = 0$ entonces $I^m W_q(F) = 0$ e.d. $\nu(F) \leq m$, luego

$$\nu(F) \leq \nu(L) .$$

$\square$

Con el análisis anterior hemos conseguido una cota inferior para $\nu(L)$ lo cual no está contemplado en la conjetura para $\mathrm{Ch}F \neq 2$.

Procedemos ahora a encontrar la cota superior de la desigualdad.

Sea L extensión finita separable de F entonces $L = F(\alpha^2)$ para algún $\alpha \in L$. Como $IW_q(F)$ está generado por las 1-formas de Pfister del tipo

$$\langle 1,a\rangle [1,\gamma] \quad \text{con} \quad a \in F^*/F^{*2} , \quad \gamma \in F$$

entonces reescribamos:

$$\langle 1,a\rangle\,[1,\gamma] = \langle 1,a\rangle \left[1,\ \frac{\gamma(\alpha^2+a)\ \ldots\ (\alpha^2+a^{2n-3})}{(\alpha^2+a)\ \ldots\ (\alpha^2+a^{2n-3})}\right].$$

Sea $\gamma(\alpha^2+a)\ \ldots\ (\alpha^2+a^{2n-3}) = b_o + b_1\alpha^2 + \ldots + b_{n-1}\alpha^{2(n-1)}$ con $b_o, \ldots, b_{n-1} \in F$. Luego estamos en la siguiente situación:

$$(*)\quad \frac{b_o + b_1\alpha^2 + \ldots + b_{n-1}\alpha^{2(n-1)}}{(\alpha^2+a)\ \ldots\ (\alpha^2+a^{2n-3})} = b_{n-1} + \frac{d_o + d_1\alpha^2 + \ldots + d_{n-2}\alpha^{2(n-2)}}{(\alpha^2+a)\ \ldots\ (\alpha^2+a^{2n-3})}$$

por división euclidiana con $d_o, d_1, \ldots, d_{n-2} \in F$, los polinomios del numerador y denominador tienen grado $2(n-2)$ y $2(n-1)$ respectivamente, luego a esta fracción se le puede aplicar el procedimiento de descomposición en fracciones parciales e.d.

$$(*)\qquad = b_{n-1} + \frac{c_1}{\alpha^2+a} + \frac{c_2}{\alpha^2+a^3} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{\alpha^2+a^{2n-3}}$$

con $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in F$. En efecto esto puede realizarse porque el procedimiento de descomposición en fracciones parciales conduce a un sistema de $n-1$ ecuaciones lineales con $n-1$ incógnitas cuyo determinante es del tipo Vandermonde por lo que su valor es $a^r(1+a)^s$ donde r,s son valores positivos dependientes de n , luego es distinto de 0 porque $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Haciendo $c_o = b_{n-1}$ tenemos entonces

$$\langle 1,a\rangle\,[1,\gamma] = \langle 1,a\rangle\,[1,c_o] + \sum_{i=1}^{n-1} \langle 1,a\rangle \left[1, \frac{c_i}{\alpha^2 + a^{2i-1}}\right] .$$

Pero por Lema 2.1. tenemos

$$\langle 1,\alpha^2 + a^{2i-1}\rangle \left[1, \frac{c_i}{a^{2i-1}}\right] = \langle 1,\alpha^2\rangle \left[1, \frac{c_i\alpha^2}{a^{2i-1}(\alpha^2 + a^{2i-1})}\right] +$$

$$+ \langle 1,a^{2i-1}\rangle \left[1, \frac{c_i a^{2i-1}}{a^{2i-1}(\alpha^2 + a^{2i-1})}\right]$$

$$= \langle 1,a\rangle \left[1, \frac{c_i}{\alpha^2 + a^{2i-1}}\right]$$

dado que

$$\langle 1,\alpha^2\rangle = \langle 1,1\rangle = \langle 1,-1\rangle = 0$$

y

$$\langle 1,a^{2i-1}\rangle = \langle 1,a^{2(i-1)}a\rangle = \langle 1,a\rangle .$$

Por lo tanto

$$\langle 1,a\rangle\,[1,\gamma] = \langle 1,a\rangle\,[1,c_o] + \sum_{i=1}^{n-1} \langle 1,\alpha^2 + a^{2i-1}\rangle \left[1, \frac{c_i}{a^{2i-1}}\right]$$

e.d. $\langle 1,a\rangle\,[1,\gamma]$ está generado por formas que están en $I(L)(W_q(F) \otimes K)$.

Por lo anterior los generadores de $I^n W_q(L)$ se pueden considerar n-formas de Pfister del tipo $\langle\langle a_1, \ldots, a_n, \gamma_n, c_o]]$ donde $a_i \in F$, $\gamma_n \in L$, $c_o \in F$.

Con esto se ha demostrado el siguiente:

2.7. <u>Teorema</u>. Sea L extensión finita separable de F entonces

$$I^{m+1}W_q(L) = I(L)(I^m W_q(F)) \otimes L .$$

$\square$

Además: Si $\nu(F) = m$ e.d. $I^m W_q(F) = 0$ se tiene que $I^{m+1}W_q(L) = 0$ lo que permite obtener el siguiente resultado

2.8. <u>Teorema</u>. Sea L extensión finita separable de F. Entonces

$$\nu(F) \leq \nu(L) \leq \nu(F) + 1$$

$\square$

2.9. <u>Nota</u>: Por otra parte es fácil probar que si $[L : F] = 2$ entonces $\nu(L) = \nu(F)$. Sólo hay que demostrar que $\nu(L) \leq \nu(F)$.

Supongamos que $I^m(F) = 0$, que $L = F(\alpha)$ extensión cuadrática separable de F y $s : L \to F$ traza con $s(1) = 0$ y $s(\alpha) = 1$, entonces para cualquier q m-formas de Pfister sobre L tenemos $s_*(q) \in I^m W_q(F) = 0$ e.d. $q \in \mathrm{Ker}(s_*)$ luego $q \cong q_o \otimes L$ (Capítulo I, § 3.2.8). Usando un resultado de $[\mathrm{Ba}]_1$ (V, 4.14) que permite encontrar q_1 m-forma de Pfister sobre F tal que $q = q_1 \times L$ se tiene que $q = 0$ dado que $I^m W_q(F) = 0$ esto muestra que $I^m W_q(L) = 0$. Por lo tanto

$$\nu(L) \leq \nu(F) .$$

$\square$

§ 3. Caso: L extensión puramente inseparable.

En esta sección demostraremos:

3.1. Teorema. Sea L extensión finita puramente inseparable de F . Entonces:

$$\nu(F) = \nu(L) .$$

Como L es extensión finita puramente inseparable entonces L admite una cadena finita de subcuerpos $F = F_o \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_m = L$ con $F_i = F_{i-1}(\sqrt{a_i})$, $a_i \in F^*_{i-1} - F^{*2}_{i-1}$. Luego para demostrar el Teorema basta considerar el caso $m = 1$ e.d. podemos suponer que $L = F(\sqrt{\ell})$, $\ell \in F^* \setminus F^{*2}$. Escribamos $\alpha = \sqrt{\ell}$. Entonces tenemos:

3.2. Lema. Toda n-forma de Pfister $q = \langle\langle a_1, \ldots, a_n;\beta]]$ sobre L es una combinación lineal en $W_q(L)$ de n-formas de Pfister del tipo:

(i) $\langle\langle a_1, \ldots, a_n;b]]$ con $a_1, \ldots, a_n, b \in F^*$

(ii) $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1},\alpha;b]]$ con $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in F^*$

Demostración: Por inducción sobre n .

a) Para $n = 1$ e.d. $q = \langle 1,\beta\rangle [1,\gamma]$ sobre L .

Como $\gamma^2 + \gamma \in \wp L$ e.d. $\gamma^2 = \gamma + \delta$ para algún $\delta \in \wp L$ se tiene $q = \langle 1,\beta\rangle [1,\gamma] = \langle 1,\beta\rangle [1,\gamma^2]$ (Capítulo I, 2.4.3) . Además si

$\gamma = u + v\alpha$ con $u,v \in F$ entonces $\gamma^2 = u^2 + v^2\alpha^2 = u^2 + v^2\ell \in F$ luego podemos considerar $q = \langle 1,\beta\rangle [1,c]$ con $c \in F$.

Sea $\beta = a + b\alpha$. Por Lema (2.1) tenemos

$$q = \langle 1,a + b\alpha\rangle [1,c] = \langle 1,a\rangle \left[1, \frac{ac}{\beta}\right] + \langle 1,b\alpha\rangle \left[1, \frac{cb\alpha}{\beta}\right] =$$

$$= \langle 1,a\rangle [1,c_1] + \langle 1,b\alpha\rangle [1,c_2]$$

para ciertos $c_1,c_2 \in F$. Como

$$\langle 1,b\alpha\rangle = \langle 1,b,b,b\alpha\rangle = \langle 1,b\rangle + \langle b\rangle \langle 1,\alpha\rangle$$

entonces

$$q = \langle 1,a\rangle [1,c_1] + \langle 1,b\rangle [1,c_2] + \langle b\rangle \langle 1,\alpha\rangle [1,c_2] ,$$

luego para $n = 1$ se cumple el Lema.

b) Supongamos que el Lema es verdadero para (n-1)-formas de Pfister. Entonces consideremos $q = \langle\langle \beta_1, \ldots, \beta_n;\gamma]] = \langle\langle \beta_n \rangle\rangle\langle\langle \beta_1, \ldots, \beta_{n-1};\gamma]]$. Como $q' = \langle\langle \beta_1, \ldots, \beta_{n-1};\gamma]]$ es (n-1)-forma de Pfister entonces es combinación lineal del tipo (i) ó (ii).

Luego q está generado por formas del tipo

(i) $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1},\beta_n;b]]$

(ii) $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-2},\alpha,\beta_n;b]]$

Pero a su vez $\langle\langle \beta_n,b]]$ es combinación lineal de 1-formas de Pfister del tipo $\langle 1,a_n\rangle [1,c]$ ó $\langle 1,\alpha\rangle [1,c]$. Reemplazando tenemos lo afirmado por el Lema ya que

$$\langle 1,\alpha\rangle\langle 1,\alpha\rangle = \langle 1,\alpha,\alpha,\alpha^2\rangle = 2\times\langle 1,\alpha\rangle = 0\ .$$

Demostración (Teorema 3.1). A) Supongamos que $I^nW_q(F) = 0$. Demostraremos que $I^nW_q(L) = 0$ también. De acuerdo al Lema 3.2. sólo necesitamos considerar las formas del tipo (i), (ii) pero como $I^nW_q(F) = 0$ entonces todas las formas del tipo (i) son 0.

Consideremos entonces una forma $q = \langle\!\langle \alpha,a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};b]]$ del tipo (ii). Como $q = \langle\!\langle a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};b]] + \langle\alpha\rangle \langle\!\langle a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};b]]$ es suficiente demostrar que cualquier forma $\langle\!\langle a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};b]]$ representa α sobre L , entonces q sería isótropa y por ello hiperbólica sobre F .

El hecho que $I^nW_q(F) = 0$ implica que $p = \langle\!\langle a_1,\ \ldots,\ a_{n-1};b]]$ representa cualquier elemento de F^* . Sea $\phi = \langle\!\langle a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}\rangle\!\rangle$ y $q_o = [1,b] = Fe + Ff$ con $\{e,f\}$ base simpléctica, luego $p = \phi[1,b] = \phi\otimes e \oplus \phi\otimes f$. Un vector de p tiene la forma $z = x\otimes e + y\otimes f$ con $x,y\in\phi\otimes L$ y $p(z) = p(x\otimes e + y\otimes f) = b_p(x\otimes e, y\otimes f) + p(x\otimes e) + p(y\otimes f) = \phi(x,y)b_{q_o}(e,f) + \phi(x,x)q_o(e) + \phi(y,y)q_o(f) = \phi(x,y) + \phi(x,x) + b\phi(y,y)$.

Como $x,y\in\phi\otimes L$ entonces escribimos

$$x = x_o + x_1\alpha\ \ ,\qquad y = y_o + y_1\alpha$$

con $x_o,x_1,y_o,y_1\in\phi$ sobre F .

Luego $\phi(x,x) = \phi(x_o + x_1\alpha, x_o + x_1\alpha) = \phi(x_o,x_o) + \alpha^2\phi(x_1,x_1) = \phi(x_o,x_o) + \ell\cdot\phi(x_1,x_1)$. Igualmente $\phi(y,y) = \phi(y_o,y_o) + \ell\cdot\phi(y_1,y_1)$.

Por lo tanto

$$p(z) = \phi(x_o,x_o) + \ell\phi(x_1,x_1) + \phi(x_o,y_o) + \alpha[\phi(x_o,y_1) + \phi(x_1,y_o)] +$$

$$+ b[\phi(y_o,y_o) + \ell\phi(y_1,y_1)]$$

$$= p(x_o \otimes e + y_o \otimes f) + p(x_1 \otimes e + y_1 \otimes f)\cdot\ell +$$

$$+ \alpha[\phi(x_o,y_1) + \phi(x_1,y_o)] .$$

Elijamos $x_1 = (1,0, \dots, 0)$, $y_1 = (0, \dots, 0)$ e.d. $p(x_1 \otimes e + y_1 \otimes f) = 1$. Como p representa todos los elementos de F^* , podemos encontrar $x_o, y_o \in \phi$ tales que $p(x_o \otimes e + y_o \otimes f) = \ell$. Dado que $x = x_o + x_1\alpha$, $y = y_o + y_1\alpha = y_o$ tenemos para $z = x \otimes e + y \otimes f \in$ $\in p \times L$ $(z \neq 0)$

$$p(z) = \alpha y_{o,1}$$

donde $y_{o,1}$ es la primera componente de y_o . Si $y_{o,1} = 0$ se tiene que p es isótropo, luego representa α sobre L . Si $y_{o,1} \neq 0$ entonces $y_{o,1}$ es representado por p sobre F y como p es forma de Pfister se tiene que p representa a α sobre L (porque toda forma de Pfister es multiplicativa (Capítulo I, § 3), luego si $y_{o,1} \in D_L(p)$ entonces $y_{o,1}^{-1} \in D_L(p)$.

Por lo tanto $I^n W_q(L) = 0$ e.d. $\nu(L) \leq \nu(F)$.

B) Supongamos que $I^n W_q(L) = 0$.

Usaremos el siguiente Lema cuya demostración se encuentra en el Apéndice C.

3.4. Lema. Sea $L = F(\alpha)$, $\alpha^2 = \ell \in F^*$.

Supongamos que $I^n W_q(L) = 0$. Entonces

(i) Toda n-forma de Pfister sobre F es del tipo $\langle\langle \ell, a_1, \ldots, a_{n-1}; b]]$ con $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in F^*$.

(ii) Toda (n-1)-forma de Pfister sobre F es del tipo $\langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}; \ell c^2]]$ con $b_1, \ldots, b_{n-1}, c \in F^*$.

Consideremos una n-forma de Pfister sobre F , por Lema 3.4.(i) esta n-forma es del tipo $q = \langle\langle \ell, a_1, \ldots, a_{n-1}; b]]$. Usando 3.4.(ii) podemos escribir $q = \langle\langle \ell, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ell c^2]]$.

Analicemos $q' = \langle\langle \ell; \ell c^2]] = [1, \ell c^2] + \langle \ell \rangle [1, \ell c^2]$ sea $\{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ la base simpléctica entonces basta considerar $x = f_1 + c^2 e_2 \in q'$ y se tiene $q'(x) = \ell c^2 + \ell c^2 = 0$; e.d. q' es isótropa y por ello hiperbólica. Como $q = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle\rangle q'$ entonces $q = 0$ en $W_q(F)$. Por lo tanto $I^n W_q(F) = 0$ e.d. $\nu(F) \leq \nu(L)$.

Esto demuestra el Teorema 3.1.

□

§ 4. Caso: L extensión finita de F .

Finalmente consideremos el caso general e.d. L extensión finita de F .

Sea F_s la clausura separable de F en L ; e.d. $F \subset F_s \subset L$, donde ahora F_s es extensión separable de F y L es extensión puramente inseparable de F_s .

Por el Teorema 2.8. $\nu(F) \leq \nu(F_s) \leq \nu(F) + 1$ y por el Teorema 3.1. $\nu(L) = \nu(F_s)$.

Luego $\nu(F) \leq \nu(L) = \nu(F_s) \leq \nu(F) + 1$

Esto completa la demostración del Teorema 1.2.

□

Ejemplos:

a) Si consideramos un cuerpo F de característica 2 y L una extensión cuadrática, por la Nota 2.9. el ν se mantiene invariante, luego la cota inferior de la desigualdad del Teorema 1.2. se realiza trivialmente.

b) Construiremos un cuerpo F y una extensión separable L de F con $[L : F] = 3$ y $\nu(L) = \nu(F) + 1$.

Sea F la 2-clausura separable de $\mathbb{F}_2(X)$ e.d. F no admite extensiones separables cuadráticas, claramente entonces $\wp(F) = F$ y $W_q(F) = \{0\}$ e.d. $\nu(F) = 0$.

Como el polinomio $X^3 + X + 1 \in F[X]$ es irreducible, sea $L = F(\beta)$ con $\beta^3 = \beta + 1$ e.d. $[L : F] = 3$. Demostraremos que $\nu(L) = 1$, e.d. $W_q(L) \neq 0$, lo cual es equivalente a $L \neq \wp L$.

Afirmamos que $X\beta^2 \notin \wp L$. De otra manera existirían $y_o, y_1, y_2 \in F$ con

$$(y_o + y_1\beta + y_2\beta^2)^2 + (y_o + y_1\beta + y_2\beta^2) = X\beta^2 \quad \text{e.d.}$$

$$y_o + y_o^2 = 0 \quad , \quad y_1 + y_2^2 = 0 \quad , \quad y_1^2 + y_2 + y_2^2 = X \ .$$

Esto nos conduce a que $Y^4 + Y^2 + Y = X$ (*) tiene solución en F. Demostremos que esto es imposible. Por comparación de grado * no tiene solución en $\mathbb{F}_2(X)$.

Asumamos que $\mathbb{F}_2(X) \subset E \subset F$ es un subcuerpo tal que * no tiene solución en E. Consideremos $E(\alpha)$ una extensión cuadrática separable de E; $\alpha^2 + \alpha = t \in E$. Si * tuviera solución en $E(\alpha)$ tendría que ser de la forma $u + v\alpha$, $u,v \in E$. Luego reemplazando en * tenemos

$$u^4 + u^2 + u + v^4t^2 + v^4t + v^2t = X$$

y $$v^4 + v^2 + v = 0$$

Pero $v^3 + v + 1 = 0$ no tiene solución en F (luego tampoco tiene solución en $E \subset F$). Por lo tanto $v = 0$. De ahí sigue entonces $u^4 + u^2 + u = X$ en E, lo cual es una contradicción.

Por lo anterior $Y^4 + Y^2 + Y = X$ no tiene solución en F, por lo tanto $X\beta^2 \notin \wp L$. Luego $\nu(L) \geq 1$. Por Teorema 2.8. entonces

$\nu(L) = 1$.

$\square$

A P E N D I C E   A

Estado de la conjetura para cuerpos con $Ch \neq 2$.

El problema aparece tratado en un artículo de R. Elman y T.Y. Lam [E-L] en 1976.

Definen el concepto como:

(A1) $\nu(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n(F)$ es libre de torsión$\}$ ó ∞ si tal mínimo no existe.

Para cuerpos no reales se tiene que toda forma es de torsión por lo que se puede decir que:

(A2) $\qquad \nu(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n(F) = 0\}$.

Los resultados alcanzados por Elman y Lam son:

(A3) Teorema. Si K es extensión cuadrática sobre un cuerpo no real F entonces $\nu(K) = \nu(F)$ ([E-L], Teorema 4.3, Corolarios 4.4, 4.5).

(A4) Teorema. Si K es extensión finita sobre un cuerpo F no real entonces $\nu(K) < \infty$ sí y sólo si $\nu(F) < \infty$. Además si K es normal sobre

F entonces $\nu(F) \leq \nu(K)$ ([E-L], Teorema 6.4).

En el transcurso de la demostración los autores logran establecer la cota:

(A5) $\nu(K) \leq \nu(F) + [K : F] - 1$.

A raíz de estos resultados los autores se preguntan por la existencia de una cota uniforme para $\nu(K)$ y conjeturan:

(A6) $\nu(K) \leq \nu(F) + 1$ para F no real, K extensión finita de F .

D. Leep en 1985 (trabajo no publicado aún) plantea la siguiente línea:

Sea $K = F(\alpha)$ extensión finita separable de F , $[K : F] = r$ y $p(x) = irr_F(\alpha, x)$.

Una m-forma de Pfister tiene la forma:

$$\langle\langle -f_1(\alpha), -f_2(\alpha), \ldots, -f_m(\alpha) \rangle\rangle , \quad \text{con} \quad f_i(x) \in F[x]$$

además sean

$$q_1 = \langle\langle -f_1(\alpha), \ldots, -f_m(\alpha) \rangle\rangle$$

$$q_2 = \langle\langle -g_1(\alpha), \ldots, -g_m(\alpha) \rangle\rangle$$

decimos que $q_1 < q_2$ si al considerar las formas q_1, q_2 con sus componentes ordenados por el grado en forma creciente, se cumple que existe algún $i = 1, \ldots, m$ con $\deg f_i < \deg g_i$. Claramente esto define un orden entre las m-formas de Pfister y también existe una m-forma de Pfister anisótropa minimal.

El siguiente resultado es fundamental:

(A6) Lema (Leep). Sea q una forma minimal entre todas las m-formas de Pfister anisótropas sobre K entonces

$$2 \deg f_i \leq \deg f_{i+1} \qquad i = 1, \dots, m-1 .$$

Demostración: Supongamos que existe i tal que

$$2 \deg f_i > \deg f_{i+1} \geq \deg f_i ,$$

entonces, por división euclidiana, existen $h, r \in F[x]$ tales que $hf_i + f_{i+1} = r$ y $\deg r < \deg f_i$. Como $\deg f_{i+1} < 2 \deg f_i$.

Sea

$$\phi = \langle\langle -f_1, \dots, -f_{i-1}, -f_{i+2}, \dots, -f_m \rangle\rangle$$

entonces se tiene que $\phi\langle\langle -h, -f_{i+1} \rangle\rangle < q$. Por minimalidad de q se cumple que $\phi\langle\langle -h, -f_{i+1} \rangle\rangle$ es hiperbólica luego

$$h \in D_K(\phi\langle\langle -f_{i+1} \rangle\rangle)$$

Además como $f_i \notin D_k(\phi\langle\langle -f_{i+1} \rangle\rangle)$ entonces

$$hf_i \notin D_K(\phi\langle\langle -f_{i+1} \rangle\rangle)$$

e.d. $\phi\langle\langle -hf_i, f_{i+1} \rangle\rangle$ es anisótropa.

Como

$$\phi\langle\langle -hf_i, -f_{i+1} \rangle\rangle \cong \phi\langle\langle -hf_i - f_{i+1}, hf_i f_{i+1} \rangle\rangle$$

(usando la propiedad $\langle\langle a,b\rangle\rangle \cong \langle\langle a+b, ab\rangle\rangle$) entonces $\phi\langle\langle -r, hf_i\, f_{i+1}\rangle\rangle$ es anisótropa pero como $\deg r < \deg f_i$ se tiene

$$\phi\langle\langle -r, hf_i f_{i+1}\rangle\rangle < q$$

lo que es contradictorio a la minimalidad de q entre las formas anisótropas.

Luego vale el Lema.

□

Además Leep realiza las siguientes observaciones, asumiendo que q es anisótropa minimal como antes:

a) Toda f_i es irreducible.

b) $\deg f_m \leq [^r/2]$

c) Si los primeros $s - 1$ lugares de q son elementos de F y si $\deg f_s = 1$ entonces $\deg f_{s+1} \geq 3$.

Con el Lema y las observaciones anteriores podemos estimar lo siguiente: Sea

$$q = \langle\langle a_1, \ldots, a_s, f_1, \ldots, f_t\rangle\rangle$$

(s+t)-forma de Pfister anisótropa minimal con $a_i \in F$ y f_i polinomio en α de grado mayor o igual que 1 entonces:

a) $s \leq \nu(F) - 1$

b) $\deg f_2 \geq 3$, luego, por el Lema

$$\deg f_t \geq 3\cdot 2^{t-2} \qquad (t \geq 2)$$

pero $\deg f_t < \left[\frac{r}{2}\right]$

luego $3\ 2^{t-2} < \left[\frac{r}{2}\right]$ e.d. $2^{t-1} < [{}^r/3]$

$$t < \log_2[{}^r/3] + 1$$

Como

$$\nu(K) \leq s + t + 1 \leq \nu(F) - 1 + \log[{}^r/3] + 2 =$$

$$= \nu(F) + \log\left[\frac{[K : F]}{3}\right] + 1$$

Se tiene entonces:

(A7) Teorema (Leep). Sea F cuerpo no real, $ChF \neq 2$. Si K es extensión finita de F entonces:

$$\nu(K) \leq \nu(F) + \log_2\left[\frac{[K : F]}{3}\right] + 1$$

□

Este resultado demuestra la validez de la conjetura hasta $[K : F] \leq 5$.

A P E N D I C E   B

ν-bilineal de un cuerpo de característica 2.

Como se indicó en la introducción al Capítulo II, podemos definir también la ν-bilineal de F .

(B.1) Definición. Sea F cuerpo de característica 2 entonces

$$\nu_b(F) = \text{Mín}\{n \,/\, I^n(F) = 0\}$$

ó ∞ si tal n no existe.

Naturalmente podemos preguntarnos por el comportamiento de ν_b bajo extensiones del cuerpo. Además cabe la posibilidad de que ambos ν y ν_b sean iguales, aclararemos esta posibilidad y daremos algunos ejemplos.

J. Milnor [Mi] demostró que:

(B.2) Teorema. (5 en [Mi]). Si el grado de F sobre F^2 es $d = 2^k < \infty$ entonces $I^k(F) \neq 0$ y $I^{k+1}(F) = 0$.

Claramente entonces $\nu_b(F) = k + 1$, donde $2^k = [F : F^2]$. Por lo tanto debemos estudiar $[L : L^2]$ cuando L es extensión de F .

(B.3) Lema. Si L es extensión finita de F ($\mathrm{Ch}F = 2$) entonces

$$[L : L^2] = [F : F^2] \; .$$

Demostración: Sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ base de L sobre F entonces: $\{u_1^2, \ldots, u_m^2\}$ es generador de L^2 sobre F^2 porque si $w^2 \in L^2$ entonces $w \in L$, y

$$w = \sum_{i=1}^{m} x_i u_i \qquad \text{con } x_i \in F$$

por lo tanto

$$w^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 u_i^2 \qquad \text{es } F^2\text{-combinación de } \{u_1^2, \ldots, u_m^2\} \; .$$

Supongamos que

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 u_i^2 = 0 \; , \qquad x_i \in F$$

entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i u_i\right)^2 = 0 \; , \quad \text{e.d.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i u_i = 0$$

pero $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es F-ℓ.i. entonces $x_i = 0$ $i = 1, \ldots, m$ por lo tanto $\{u_1^2, \ldots, u_m^2\}$ es F^2- ℓ.i. y por ello base de L^2 sobre F^2.

Por lo anterior $[L : F] = [L^2 : F^2]$ pero

$$[L : F^2] = [L : L^2][L^2 : F^2] = [L : F][F : F^2]$$

así $\quad [L : L^2] = [F : F^2]$

Por otra parte en $[Ba]_2$ se demuestra:

(B.4) Lema (Baeza). Sea L una extensión algebraica separable de F, cuerpo de característica 2. Entonces:

$$[L : L^2] = [F : F^2] .$$

Este resultado incluye el caso $[L : F] = \infty$, L extensión separable de F.

Por lo anterior podemos enunciar:

(B.5) Teorema. Sea F cuerpo de característica 2.

Si L es extensión finita o extensión algebraica separable de F entonces:

$$\nu_b(L) = \nu_b(F) .$$

□

Además como $I^n W_q(F)$ es $I^n(F)$-módulo entonces $\nu_b(F) \geq \nu(F)$.

De manera que podemos hacer las siguientes observaciones:

a) Si $\nu_b(F) = \nu(F)$ y L es extensión finita de F entonces $\nu(L) = \nu(F)$. Esto se debe a que ν_b permanece invariante y como $\nu(L) \leq \nu_b(L)$ entonces

$$\nu(L) = \nu_b(L) = \nu(F) .$$

b) Si F es cuerpo con $\nu_b(F) = m$ y L es la 2-clausura separable de F entonces claramente $\nu(L) = 0$ y $\nu_b(L) = m$.

c) Se verifica que $\mathbb{F}_2$ es perfecto e.d. $\mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2^2$ luego $\nu(\mathbb{F}_2) = 1$. Por lo tanto $L = \mathbb{F}_2((X_1, X_2, \ldots))$ tiene $\nu(L) = \infty$; sea K la 2-clausura separable de L entonces tenemos el caso:

$$\nu_b(K) = \infty \qquad y \qquad \nu(K) = 0 .$$

Como se ve entonces la diferencia $\nu_b(F) - \nu(F)$ puede ser tan grande como se desee.

A P E N D I C E C

Lemas técnicos.

A continuación se efectúa la demostración del Lema 3.4. mencionado en el Capítulo II, § 3.

(C.1) Lema. Sea $L = F(\alpha)$, $\alpha^2 = \ell \in F^*$. Si $I^n W_q(L) = 0$ entonces:

i) Toda n-forma de Pfister sobre F es del tipo $\langle\langle \ell, a_1, \ldots, a_{n-1}; b]]$ con $a_1, \ldots, a_{n-1}, b \in F^*$.

ii) Toda (n-1)-forma de Pfister sobre F es del tipo $\langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}; \ell c^2]]$ con $b_1, \ldots, b_{n-1} \in F^*$.

Para demostrar esto necesitamos demostrar el siguiente resultado general acerca de formas de Pfister sobre cuerpos de característica 2.

(C.2) Proposición. Sea q una n-forma de Pfister sobre F .

i) Si q contiene una subforma $[1,a]$, $a \in F$, entonces $q \simeq \langle\langle a_1, \ldots, a_n; a]]$ para ciertos $a_1, \ldots, a_n \in F^*$.

ii) Escribamos $q = \phi[1,b]$ con $\phi = \langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle = \langle 1\rangle + \phi'$ e.d. $q = [1,b] + \phi'[1,b]$. Si $\ell \in F^*$ es representado por $\phi'[1,b]$ entonces $q \cong \langle\langle \ell, a_1, \ldots, a_{n-1}; c]]$ con ciertos $c, a_1, \ldots, a_{n-1} \in F^*$.

<u>Demostración</u>: La parte (i) ha sido demostrada en $[Ba]_1$ Capítulo V en un contexto mucho más general aún, así que omitimos la demostración.

Para (ii). Asumamos que $n = 1$. $q = \langle 1,b_1\rangle [1,b] = [1,b] + \langle b_1\rangle [1,b]$. Si ℓ es representado por $\langle b_1\rangle [1,b]$ entonces $\ell = b_1(x^2 + xy + by^2)$ y como $\langle x^2 + xy + by^2\rangle [1,b] \simeq [1,b]$ tenemos que

$$q \simeq [1,b] + \langle b_1(x^2 + xy + by^2)\rangle [1,b] = [1,b] + \langle \ell\rangle [1,b]$$

$$= \langle 1,\ell\rangle [1,b] .$$

Asumamos ahora que $n > 1$. Usaremos inducción respecto a n . Escribimos $\phi = \langle 1,b_1\rangle \psi$ con $\psi = \langle\langle b_2, \ldots, b_n\rangle\rangle$. Luego $\phi' = \psi' + \langle b_1\rangle \psi$

$$q = [1,b] + \psi'[1,b] + \langle b_1\rangle \psi[1,b] \quad \text{e.d.}$$

$$\phi'[1,b] = \psi'[1,b] + \langle b_1\rangle \psi[1,b] .$$

Si $\ell \in F^*$ es representado por $\phi'[1,b]$, podemos escribir $\ell = c + b_1 d$ con c representado por $\psi'[1,b]$ y d representado por $\psi[1,b]$ (podemos asumir que $c,d \neq 0$) . Por inducción tenemos

$$\psi[1,b] \cong \langle 1,c\rangle \tau[1,b']$$

con alguna (n-2)-forma bilineal de Pfister τ , $b' \in F$. Más aún $\langle d\rangle \psi[1,b] \simeq \psi[1,b]$. Luego:

$$q = \langle 1,b_1\rangle\, \psi[1,b] = \psi[1,b] + \langle b_1\rangle\, \psi[1,b]$$

$$q \cong \langle 1,c\rangle\, \tau[1,b'] + \langle b_1 d\rangle \langle 1,c\rangle\, \tau[1,b']$$

$$q \simeq \langle 1,c\rangle \langle 1,b_1 d\rangle\, \tau[1,b'] \ .$$

Pero $\quad \langle 1,c\rangle \langle 1,b_1\, d\rangle = \langle 1,c,b_1 d,cb_1 d\rangle \simeq \langle 1,c + b_1 d,x,x(c + b_1 d)\rangle \cong$

$$\cong \langle 1,\ell\rangle \langle 1,x\rangle$$

es decir

$$q = \langle 1,\ell\rangle \langle 1,x\rangle\, \tau[1,b'] \ .$$

Esto demuestra (C.2).

Demostración de (C.1): Asumamos que $I^n W_q(L) = 0$.

Sea $q = \langle\langle a_1, \ldots, a_n ; b]] = \phi\cdot[1,b]$ cualquier n-forma de Pfister sobre F . Como $q \otimes L = 0$, podemos encontrar vectores no nulos $x = x_o + x_1\alpha$, $y = y_o + y_1\alpha \in \phi \otimes L$ tales que:

$$q(x \otimes e + y \otimes f) = 0 \qquad \text{(ver notación en Capítulo II § 3)}$$

e.d. $\quad q(x_o \otimes e + y_o \otimes f) + \ell q(x_1 \otimes e + y_1 \otimes f) = 0$

$$b_q(x_o \otimes e + y_o \otimes f, x_1 \otimes e + y_1 \otimes f) = 0$$

Sea $u = x_o \otimes e + y_1 \otimes f$, $v = x_1 \otimes e + y_1 \otimes f \in q$. Entonces $q(u) + \ell q(v) = 0$, $b_q(u,v) = 0$. Naturalmente podemos asumir que $q(u),q(v) \neq 0$ porque en caso contrario q sería isótropo sobre F y por ello $q = 0$. Como $2 = 0$, se pueden encontrar vectores $u_1,v_1 \in q$

con $b_q(u,u_1) = 1$, $b_q(v,v_1) = 1$ y $\langle u,u_1\rangle \perp \langle v,v_1\rangle$. Así se tiene que: $\langle u,u_1\rangle + \langle v,v_1\rangle \subseteq q$. Sea $a = q(v)$, $a' = q(v_1)$, $a'' = q(u_1)$. Entonces

$$[a,a'] + [a\ell,a''] \subseteq q$$

e.d. $\quad \langle a\rangle [1,a_1] + \langle a\ell\rangle [1,a_2] \subseteq q$

para algunos $a_1,a_2 \in F$. Pero $a = q(v)$ es representado por q luego $\langle a\rangle q \cong q$ y de ahí $[1,a_1] + \langle \ell\rangle [1,a_2] \subseteq q$. En particular $[1,a_1] \subseteq q$ luego por el Lema (C.2)(i) se tiene $q = \psi[1,a_1]$ con ψ n-forma bilineal de Pfister. Como $q = [1,a_1] + \psi'[1,a_1]$ se tiene por cancelación $\langle \ell\rangle [1,a_2] \subseteq \psi'[1,a_1]$, por lo tanto ℓ es representado por $\psi'[1,a_1]$. Usando el Lema (C.2)(ii) concluimos que $q \cong \langle\langle \ell,b_1, \ldots, b_{n-1};b']]$ para algunos $b_1, \ldots, b_{n-1},b' \in F$. Esto demuestra (C.1)(i).

Consideremos una (n-1)-forma de Pfister sobre F , $q \cong \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1};b]] = \phi[1,b]$, $\phi = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle$. Como $I^nW_q(L) = 0$, se tiene que $\langle 1,\alpha\rangle q = 0$ sobre L e.d. q representa a α sobre L . Luego existen $x = x_o + x_1\alpha$, $y = y_o + y_1\alpha \in q \otimes L$ tales que $q(x \otimes e + y \otimes f) = \alpha$. Esto significa

$$q(x_o \otimes e + y_o \otimes f) + \ell q(x_1 \otimes e + y_1 \otimes f) = 0 ,$$

$$b_q(x_o \otimes e + y_o \otimes f,\ x_1 \otimes e + y_1 \otimes f) = 1 .$$

Con esto se tienen $u,v \in q$ tales que $q(u) + \ell q(v) = 0$, $b_q(u,v) = 1$. Así entonces $\langle u,v\rangle \subseteq q$ y

$$\langle u,v\rangle = [q(v),\ell q(v)] = \langle q(v)\rangle [1,\ell q(v)^2].$$

Pero $\langle q(v)\rangle q \cong q$ luego $[1,\ell c^2] \subseteq q$ donde $c = q(v)$. Aplicando ahora (C.2)(i) concluimos que

$$q \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}; \ell c^2]]$$

esto concluye la demostración de (C.1)(ii).

$\square$

B I B L I O G R A F I A

[Ba]$_1$ Baeza, R., Quadratic forms over semilocal rings. Springer Lecture Notes Vol. 655. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1978).

[Ba]$_2$ Baeza, R., Comparing u-invariant of field of characteristic 2. Boletín de la Sociedad Brasilera de Matemática, Vol. 13 N° 1 (1982), 105-114.

[E-L] Elman, R., Lam, T.Y., Quadratic forms under algebraic extensions. Math. Ann. 219, 21-42 (1976).

[L] Lam, T.Y., The algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.

[Mi] Milnor, J., Symmetric inner products in characteristic 2. In: Prospects in Mathematics, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, pp. 59-75 (1971).

[Sa] Sah, C.H., Symmetric bilinear forms and quadratic forms. J. of Algebra 20, 144-160 (1972).

[Sch] Scharlau, W., Quadratic and Hermitian forms. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, Tokyo, 1985.