Coeficientes de Fourier para series de Poincaré de segundo orden

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
En cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

María Verónica Angel Cerda

Septiembre, 2006

Director de Tesis Dr. Yves Martin

Co-Director de Tesis Dr. Eduardo Friedman

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato.

MARIA VERONICA ANGEL CERDA

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 4 de septiembre de 2006.

Director de Tesis:

Dr. Yves Martin ....

Co-Director de Tesis:

Dr. Eduardo Friedman Eduardo Friedman ....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Anita Rojas ....

Dr. Luis Arenas ....

A mi madre Raquel Verónica

Nací hace 25 años, dentro de una familia muy alegre y solidaria. Crecí en Ñuñoa, junto a mi madre, mi tía Enriqueta y mi primo Rodrigo, debo decir que con ellos he pasado los momentos más felices de los que tengo memoria hasta ahora. Me recuerdo como una niña muy alegre y despierta, la que gustaba de contar chistes a sus compañeros de colegio, jugar y aprender cosas nuevas. Mi gusto por el estudio claramente se cultivó en ésta etapa de mi vida, gracias a los consejos y motivaciones entregados por mi madre y mi tía los cuales fueron muy importantes para llegar hasta donde estoy en éste instante.

En mi adolescencia viví el momento más duro de mi vida, la muerte de mi madre. Creo que pasé por instantes muy difíciles, sin embargo el apoyo de mi tía y la exigencia de mi padre hicieron que tuviera la valentía de salir adelante. Siempre con mamá en mente fuí logrando de a poco las metas que me iba proponiendo, que en el fondo eran metas que ambas nos habíamos propuesto implícitamente.

Desde niña tuve claro que cuando terminara el colegio seguiría estudiando, la pregunta era ¿qué?. Creo que mientras crecía pensé en varias alternativas, entre ellas enfermera, militar, cantante, actriz, hasta que surgió en mi, poco tiempo antes de salir del colegio, el gusto por las matemáticas. Con el tiempo los puntajes de la vida me llevarían a la Facultad de Ciencias, lugar del que me siento muy feliz y orgullosa de haber estado.

Mi paso por la Facultad de Ciencias es algo que definitivamente no me es indiferente, ahora que aún sigo en mi carrera del estudio en otra universidad, puedo decir que la formación recibida allí y las personas que conocí y que aún frecuento son parte muy importante de mi biografía inconclusa.

Dero.

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi profesor guía Yves Martin, por los consejos y la paciencia, sobre todo ésta última y a mi co-director de tesis Eduardo Friedman por el necesario apoyo.

Me gustaría agradecer a Rodrigo Bamón por su manera de ser y por todos aquellos buenos cursos que me dictó.

Agradezco también a mi familia, a mi padre, a Makarena, Leslie, Fernanda y todos mis amigas(os) que me apoyaron en los momentos de duda y en especial a Mike Portnoy por darme inspiración y buena música, la que acompañó tantas noches de estudio.

Finalmente quisiera agradecer a todas aquellas personas que hicieron posible de algún modo que culminara éste trabajo y que debido a mi mala memoria no aparecen en estas líneas.

Índice general

Introducción

La teoría de formas modulares es un pilar importante en la teoría moderna de números y tiene conexión con diversas áreas de las matemáticas. R. Langlands, por ejemplo, conecta la teoría de formas modulares con la aritmética de cuerpos numéricos vía representaciones de grupos algebraicos. La conjetura de Taniyama–Weil, por otro lado, relaciona formas modulares de peso 2 y curvas elípticas. Es precisamente en este tema donde aparecen ciertas funciones llamadas *formas modulares de segundo orden*. Esta tesis es un trabajo sobre algunos aspectos de tales funciones.

Para motivar el estudio de las formas modulares de segundo orden revisemos primero algunos conceptos de la teoría de formas modulares y curvas elípticas.

Sea $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\tau > 0\}$ y $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. El grupo $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\pm 1$ actúa sobre $\overline{\mathbb{H}}$ mediante la transformación:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \tag{0.1}$$

Sea $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,:\, c \equiv 0 \,(\mathrm{mod} N) \right\}$ para $N \in \mathbb{N}$ fijo y denotemos por $X_{\Gamma_0(N)}$ al espacio cociente $\Gamma_0(N)\backslash\overline{\mathbb{H}}$. Este conjunto tiene la estructura de una superficie de Riemann compacta.

El espacio de las formas cuspidales de peso 2 para $\Gamma_0(N)$ es denotado por $S_2(\Gamma_0(N))$ (ver definición en sección 1.1). Las funciones de este espacio se pueden identificar con diferenciales holomorfos sobre $\Gamma_0(N)\backslash\overline{\mathbb{H}}$.

Sean α y β dos puntos equivalentes en $\overline{\mathbb{H}}$ bajo la acción de $\Gamma_0(N)$. Entonces $\beta = M(\alpha)$ para algún $M \in \Gamma_0(N)$. Cualquier camino suave desde α a β en $\overline{\mathbb{H}}$ se proyecta a un camino cerrado en el espacio cociente $X_{\Gamma_0(N)}$ lo que determina una clase de homología en $H_1(X_{\Gamma_0(N)}, \mathbb{Z})$. Esta clase depende sólo de α y β y no del camino escogido, ya que $\overline{\mathbb{H}}$ es simplemente conexo. Denotamos esta clase de homología por $\{\alpha, \beta\}$.

Recíprocamente, toda clase de homología $\gamma \in H_1(X_{\Gamma_0(N)}, \mathbb{Z})$ puede ser expresado por $\{\alpha, \beta\}$ para ciertos α, $\beta \in \overline{\mathbb{H}}$. Si $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ entonces $f(z)$ es una función holomorfa y la integral

$$\langle \gamma, f \rangle = \int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)dz$$

está bien definida. Cualquier función $\gamma \mapsto \langle \gamma, f \rangle$ definida sobre $\Gamma_0(N)$ para una $f(z) \in S_2(\Gamma_0(N))$ dada es llamada un símbolo modular.

En [4] y [5] D. Goldfeld estudia la distribución de los valores del símbolo modular $\langle \gamma, f \rangle$ como una forma de atacar la conjetura de Szpiro. De hecho en [6] Goldfeld establece una conjetura equivalente que trata sobre el símbolo modular. Aunque no es necesario para lo que sigue, recordamos que la conjetura de Szpiro afirma lo siguiente: Para una curva elíptica E sobre $\mathbb{Q}$,

$$E : y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

con discriminante minimal $\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6$, donde

$$\begin{aligned} b_2 &= a_1^2 + 4a_2, \\ b_4 &= a_1a_3 + 2a_4, \\ b_6 &= a_3^2 + 4a_6, \\ b_8 &= a_1^2a_6 - a_1a_3a_4 + 4a_2a_6 + a_2a_3^3 - a_4^2 \end{aligned}$$

y conductor N, definido por el producto finito $N = \Delta \prod_p p^{f_p}$ donde p varia sobre los primos y f_p varia sobre los enteros $0, 1$ y $2+\delta$, con $\delta = 0$ si $p \neq 2, 3$, existe una constante absoluta k tal que $\Delta \ll N^k$.

Para estudiar la distribución de los valores del símbolo modular $\langle \gamma, f \rangle$ con $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ Goldfeld introduce la serie

$$E_f^*(\tau, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \langle \gamma, f \rangle \mathrm{Im}(\gamma\tau)^s, \tag{0.2}$$

donde $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : l \in \mathbb{Z} \right\}$ es el subgrupo de $\Gamma_0(N)$ que estabiliza a infinito y

$$\langle \gamma, f \rangle = \int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)} f(z)dz.$$

Esta serie es un primer ejemplo de forma modular de segundo orden y es un caso especial de un tipo de funciones que fueron introducidas con el fin de que su estudio en profundidad abriera un camino hacia la teoría analítica del símbolo modular.

Es fácil demostrar que $E_f^*(\tau, s)$ satisface la relación

$$E_f^*(\gamma\tau, s) = E_f^*(\tau, s) - \langle\gamma, f\rangle E(\tau, s),$$

donde

$$E(\tau, s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)} (\mathrm{Im}\gamma\tau)^s$$

es la serie de Eisenstein no-holomorfa clásica para $\Gamma_0(N)$, la cual converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) > 1$ y tiene el siguiente desarrollo de Fourier en infinito

$$E(\tau, s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s} + \sum_{n\neq 0} \varphi(n, s)W_s(n\tau)$$

donde

$$\varphi(s) = \pi^{1/2}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \cdot \sum_{c>0} c^{-2s}S(0, 0; c), \tag{0.3}$$

$$\varphi(n, s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}|n|^{s-1}\sum_{c>0} c^{-2s}S(0, n; c), \tag{0.4}$$

$\Gamma(s)$ es la función gamma de Euler, $W_s(\tau)$ es una función relacionada con la función de Bessel para $\tau \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ y $S(m, n; c)$ es la suma de Kloosterman definida por

$$S(m, n; c) = \sum_{\gamma=\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)/\Gamma_\infty} e^{2\pi i\left(\frac{ma+nd}{c}\right)}$$

En el trabajo de Ph.D. tesis de C. O'Sullivan [12], encontramos el desarrollo de Fourier en infinito de $E_f^*(\tau, s)$. A saber

$$E_f^*(\tau, s) = \varphi^*(s)y^{1-s} + \sum_{n\neq 0} \varphi^*(n, s)W_s(n\tau)$$

donde

$$\varphi^*(s) = \pi^{1/2}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \cdot \sum_{c>0} c^{-2s} S^*(0,0,f;c), \tag{0.5}$$

$$\varphi^*(n,s) = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)}|n|^{s-1} \sum_{c>0} c^{-2s} S^*(0,n,f;c), \tag{0.6}$$

y $S^*(m,n,f;c)$ es la suma de Kloosterman generalizada

$$S^*(m,n,f;c) = \sum_{\gamma=\begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)/\Gamma_\infty} \langle \gamma, f \rangle e^{2\pi i\left(\frac{ma+nd}{c}\right)}$$

Al observar las ecuaciones (0.3), (0.4), (0.5) y (0.6) notamos que la diferencia entre los desarrollos de Fourier radica principalmente en la presencia del símbolo modular dentro de las sumas de Kloosterman.

Motivados por estos resultados desarrollaremos un trabajo análogo en una generalización holomorfa de la serie (0.2). Más precisamente, consideraremos las series de Poincaré clásica (ver sección 1.3) y estudiaremos su modificación bajo el símbolo modular $\langle \gamma, f \rangle$. Los objetivos principales de esta tesis son:

a) demostrar que tal generalización es una forma modular de segundo orden (sección (2.3)) y

b) calcular su desarrollo de Fourier en las cúspides (sección (2.4)).

En [4] Goldfeld exhibe el desarrollo de Fourier de tales formas sin demostración.

Este trabajo está organizado como sigue:

En el capítulo 1 se introduce el concepto de forma modular y forma cuspidal sobre $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Después se dan ejemplos clásicos como las series de Eisenstein y las series de Poincaré. Estas últimas se definen para cada par de enteros $m \geq 0$ y $k > 2$ por

$$P_m(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, \tau)^{-k} e^{2\pi i m \gamma \tau},$$

donde $j(\gamma,\tau) = (c\tau + d)$ y $\gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Terminamos el capitulo con una generalización de los conceptos anteriores para ciertos subgrupos de $SL_2(\mathbb{Z})$.

El capítulo 2 contiene cuatro secciones. En la primera se define el concepto de símbolo modular $\langle\gamma, f\rangle$ y se prueban algunas de sus propiedades, principalmente las que utilizaremos en el desarrollo de las secciones siguientes. En (2.2) se define lo que es una forma modular de segundo orden. En (2.3) asociamos a cada par de enteros $m \geq 0$, $k > 3$ y cada forma cuspidal $f(\tau)$ de peso 2 sobre el grupo $\Gamma' = \Gamma_0(N)$ la serie

$$P^*_{f,m}(\tau) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'} \langle\gamma, f\rangle j(\gamma,\tau)^{-k} e^{2\pi i m\gamma\tau}.$$

Luego probamos que $P^*_{f,m}(\tau)$ es una forma modular de segundo orden. Finalmente en (2.4) damos explicitamente los coeficiente del desarrollo de Fourier de estas series de Poincaré de segundo orden.

Capítulo 1

Formas modulares

1.1. Formas modulares y formas cuspidales

Sea $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{i\infty\}$ (i.e. el plano complejo con un punto en infinito). Dado un elemento $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ y un punto $\tau \in \mathbb{C}$, definimos

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \gamma(i\infty) := \frac{a}{c} = \lim_{\tau \to i\infty} \gamma\tau \tag{1.1}$$

Observación 1.1. Entonces $\gamma(\frac{-d}{c}) = i\infty$ y si $c = 0, \gamma(i\infty) = i\infty$

Se comprueba fácilmente que (1.1) define una acción de grupo sobre el conjunto $\widehat{\mathbb{C}}$.

Sea $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\tau > 0\}$ el semiplano superior complejo. Notamos que si $\mathrm{Im}\tau > 0$ entonces $\mathrm{Im}\gamma\tau > 0$ para todo $\gamma \in SL_2(\mathbb{R})$, es decir, $SL_2(\mathbb{R})$ preserva a $\mathbb{H}$. De hecho

$$\mathrm{Im}\gamma\tau = \mathrm{Im}\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \mathrm{Im}\frac{(a\tau + b)(c\overline{\tau} + d)}{|c\tau + d|^2} = \frac{\mathrm{Im}(ad\tau + bc\overline{\tau})}{|c\tau + d|^2}.$$

Pero $\mathrm{Im}(ad\tau + bc\overline{\tau}) = (ad - bc)\mathrm{Im}\tau = \mathrm{Im}\tau$, pues $\det\gamma = 1$. Entonces

$$\mathrm{Im}\gamma\tau = \frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}. \tag{1.2}$$

Luego el grupo $SL_2(\mathbb{R})$ actúa sobre el conjunto $\mathbb{H}$ mediante la trasformación (1.1). Cuando un grupo actúa sobre un conjunto lo divide en clases de equivalencia, se dice que dos puntos están en la misma clase de equivalencia si existe un elemento del grupo el cual lleva a uno en el otro. En particular, si G es un subgrupo de $SL_2(\mathbb{Z})$, diremos que dos puntos son τ_1, $\tau_2 \in \mathbb{H}$ son $G-$equivalentes si existe $g \in G$ tal que $\tau_2 = g\tau_1$.

En adelante $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Sea N un entero positivo. Definimos

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : a \equiv d \equiv 1(\mathrm{mod} N), b \equiv c \equiv 0(\mathrm{mod} N) \right\}.$$

Un subgrupo de Γ es llamado un *subgrupo de congruencia de nivel* N si contiene a $\Gamma(N)$.

Para nuestros propósitos el subgrupo de congruencia de nivel N más importante es

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0\,(\mathrm{mod} N) \right\}.$$

Sea $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Notar que los puntos $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ son permutados por Γ transitivamente. Entonces todos los números racionales están en la misma clase de $\Gamma-$equivalencia que $\{i\infty\}$.

Si Γ' es un subgrupo de Γ, entonces Γ' permuta los elementos de $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$, pero en general no transitivamente. Es decir, existe usualmente más de una clase de $\Gamma'-$equivalencia entre $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Por una *cúspide de* Γ' entendemos una clase de $\Gamma'-$equivalencia en $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$. Por abuso de lenguaje llamamos también cúspide a cualquier representante de una orbita.

Definición 1.1. *La topología de* $\overline{\mathbb{H}}$ *se define como sigue. Para* $\tau \in \mathbb{H}$, *tomamos las vecindades abiertas usuales de* τ *contenido en* $\mathbb{H}$. *Para la cúspide* $i\infty$, *tomamos como una base de vecindades abiertas los conjuntos*

$$N_C = \{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}\tau > C\} \cup \{i\infty\} \qquad \text{algún } C > 0.$$

Para una cúspide $\tau \neq i\infty$, *tomamos como una base de vecindades abiertas los conjuntos*

$$\{\text{el interior de un círculo en } \mathbb{H} \text{ tangente al eje real en } \tau\} \cup \{\tau\}.$$

Observación 1.2. Si enviamos $\mathbb{H}$ al disco unitario menos el origen mediante

$$\tau \mapsto q := e^{2\pi i\tau} \tag{1.3}$$

y el punto $i\infty \in \overline{\mathbb{H}}$ al origen, entonces N_C es la imagen inversa del disco abierto de radio $e^{-2\pi C}$ centrado en el origen.

En lo que sigue $e(w) = e^{2\pi i w}$ para cualquier $w \in \mathbb{C}$.

Usamos el cambio de variable (1.3) de τ a q para definir lo siguiente. Dada una función $f(\tau)$ sobre $\mathbb{H}$ de periodo 1, decimos que es meromorfa en $i\infty$ si puede ser expresada como una serie de potencias en la variable q teniendo a lo más una cantidad finita de términos con potencia negativa, i.e., tiene una expansión de Fourier de la forma

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e(n\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n,$$

donde $a_n = 0$ para $n \ll 0$. Decimos que $f(\tau)$ es holomorfa en $i\infty$ si $a_n = 0$ para todo $n < 0$; y decimos que $f(\tau)$ se anula en $i\infty$ si $f(\tau)$ es holomorfa en $i\infty$ y $a_0 = 0$. Si $f(\tau)$ tiene período N, entonces usamos la función $\tau \mapsto q_N := e(\tau/N)$ para enviar $\mathbb{H} \cup \{i\infty\}$ al disco unitario abierto. Entonces expresamos $f(\tau)$ como una serie en q_N.

Sea $\gamma \in \Gamma$, sea $f(\tau)$ una función sobre $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ con valores en $\widehat{\mathbb{C}}$, y sea $k \in \mathbb{Z}$. Introducimos la notación $f|_k[\gamma]$ para denotar la función cuyo valor en τ es

$$f(\tau)|_k[\gamma] := j(\gamma, \tau)^{-k} f(\gamma\tau)$$

donde $j(\gamma, \tau) = (c\tau + d)$ para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$

Observación 1.3. Notamos que $j(\gamma\delta, \tau) = j(\gamma, \delta\tau) j(\delta, \tau)$, para todo γ, $\delta \in \Gamma$. De esto se deduce que $f|_k[\gamma\delta] = (f|_k[\gamma])|_k[\delta]$

Definición 1.2. *Sea $f(\tau)$ una función holomorfa sobre el semiplano $\mathbb{H}$ y sea k un entero. Diremos que $f(\tau)$ es una* forma modular de peso k sobre Γ *si*

(i) $f|_k[\gamma] = f$ *para todo* $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

(ii) $f(\tau)$ *es holomorfa en infinito. Es decir, la serie de Fourier*

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n \qquad \text{donde } q = e(\tau) \tag{1.4}$$

es tal que $a_n = 0$ *para todo* $n < 0$

El conjunto de tales funciones es denotado por $M_k(\Gamma)$.

Si además $a_0 = 0$, es decir, la forma modular se anula en infinito, entonces $f(\tau)$ es llamada forma cuspidal de peso k para Γ. *El conjunto de tales* *funciones es denotado por* $S_k(\Gamma)$.

Finalmente, la expansión (1.4) *para una forma modular* $f(\tau)$ *es llamada una* $q-$*expansión.*

Observación 1.4. Notar que en el punto (i) las ecuaciones para los elementos $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de Γ son $f(\tau+1) = f(\tau)$ y $f\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-\tau)^k f(\tau)$ respectivamente. Estas ecuaciones son equivalentes a la condición (i) de la definición pues T y S generan Γ (ver [10] pág. 102)

Observación 1.5. Claramente $M_k(\Gamma)$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial (con la suma y el producto usual) y $S_k(\Gamma)$ es un subespacio. Un teorema importante de la teoría muestra que la dimensión de $M_k(\Gamma)$ es finita. Y tanto ésta como la de $S_k(\Gamma)$ son conocidas (ver por ejemplo [10] pág. 117).

1.2. Series de Eisenstein

Un ejemplo clásico de forma modular de peso k para Γ es la serie de Eisenstein definida como sigue.

Definición 1.3. *Sea* k *un entero mayor a* 2. *Para* $\tau \in \mathbb{H}$ *definimos*

$$G_k(\tau) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\tau+n)^k} \tag{1.5}$$

donde la suma es sobre todos los pares de enteros (m,n) *distintos a* $(0,0)$.

Observación 1.6. La condición $k > 2$ se necesita para asegurar la convergencia absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{H}$ y por lo tanto asegura la holomorficidad de la serie en (1.5).

Se tiene que $G_k(\tau) \in M_k(\Gamma)$ para $k > 2$ y su $q-$expansión viene dada esencialmente por la función aritmética $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$. De hecho se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Sea* k *un entero par mayor a* 2, *y sea* $\tau \in \mathbb{H}$. *Entonces la forma modular* $G_k(\tau)$ *definida en* (1.5) tiene $q-$expansión

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k)\Big(1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n\Big)$$

donde $\zeta(s)$ es la función zeta de Riemann y los números B_k (llamados números de Bernoulli) están definidos por

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

Demostración. [10] pág 110. □

A partir de la proposición 1.1, es útil definir la *serie de Eisentein normalizada*, que se obtiene al dividir $G_k(\tau)$ por la constante $2\zeta(k)$ en (1.5),

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n. \tag{1.6}$$

Observación 1.7. Una manera alternativa de definir la serie de Eisenstein normalizada es

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n)=1}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}. \tag{1.7}$$

1.3. Series de Poincaré

Otra construcción de formas modulares en $M_k(\Gamma)$ son las series de Poincaré (que de hecho es una generalización de la anterior). Estas series son un ejemplo importante ya que ellas generan el espacio de las formas modulares.

Definición 1.4. *Sea* $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma : l \in \mathbb{Z} \right\}$, *$k$ un entero mayor a 2 y m un entero no negativo. La m-ésima serie de Poincaré es*

$$P_{m,k}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} j(\gamma, \tau)^{-k} e(m\gamma\tau)$$

Observación 1.8. Notamos que esta función es una suma sobre representantes de clases laterales derechas del grupo cociente $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$.
La clase lateral derecha en $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ que contiene al elemento $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es

$$\overline{\gamma} = \Gamma_\infty \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a + lc & b + ld \\ c & d \end{pmatrix} : l \in \mathbb{Z} \right\}$$

Luego $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \overline{\gamma}$ si y sólo si $c = c'$ y $d = d'$ o bien $c = -c'$ y $d = -d'$.

Notar que si $m = 0$ se tiene

$$P_{0,k}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} = E_k(\tau).$$

Se sabe (ver [9] pág. 51) que la expansión de Fourier en infinito para la serie de Poincaré es

$$P_{m,k}(\tau) = e(m\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} e(n\tau) \sum_{c>0} \sum_{\substack{a,\, d\,(\mathrm{mod}\ c) \\ (c,d)=1 \\ ad\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ c)}} e\left(\frac{ma + nd}{c}\right) \mathcal{J}_c(m, n) \quad (1.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_c(m,n) &= \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cz)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0, m \geq 0 \\ \left(\dfrac{2\pi}{ic}\right)^k \dfrac{n^{k-1}}{\Gamma(k)} & \text{si } n > 0, m = 0 \\ \dfrac{2\pi}{i^k c} \left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) & \text{si } n > 0, m > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(ver [3] 8.315.1 y 8.412.2) y $J_\nu(x)$ es la función de Bessel de orden ν definida por

$$J_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l + 1 + \nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2l}.$$

1.4. Formas modulares para subgrupos de congruencias

La definición de formas modulares dada en la sección anterior se puede extender a ciertos subgrupos de Γ. En lo que sigue damos tal definición y exhibimos algunos ejemplos.

Definición 1.5. *Sea $f(\tau)$ una función holomorfa sobre $\mathbb{H}$ y sea $\Gamma' \subset \Gamma$ un subgrupo de congruencia de nivel N (i.e., $\Gamma(N) \subset \Gamma'$). Sea $k \in \mathbb{Z}$. Decimos que $f(\tau)$ es una forma modular de peso k sobre Γ' si*

(i) *$f|_k[\gamma] = f$ para todo $\gamma \in \Gamma'$,*

(ii) *Para cualquier $\gamma_0 \in \Gamma$ existen $a_n = a_n(\gamma_0) \in \mathbb{C}$ tal que $f(\tau)|_k[\gamma_0] = \sum a_n q_N^n$ con $a_n = 0$ para todo $n < 0$, donde $q_N = e\left(\frac{\tau}{N}\right)$*

Una tal forma modular se dice forma cuspidal *si además* $a_0 = 0$ *para todo* $\gamma_0 \in \Gamma$

Proposición 1.2. *La condición (ii) en la definición anterior depende sólo de las clases de* Γ'*−equivalencia de* $s = \gamma_0(i\infty)$. *Más precisamente, si* $\gamma_1(i\infty) = \gamma'\gamma_2(i\infty)$ *para algún* $\gamma' \in \Gamma'$ *entonces la potencia más pequeña de* q_N *que ocurre en la expansión de Fourier de* $f|_k[\gamma_1]$ *y de* $f|_k[\gamma_2]$ *es la misma. Más aún, si ésta potencia más pequeña es el término constante, entonces el valor en* $q_N = 0$ *es el mismo para* $f|_k[\gamma_1]$ *y* $f|_k[\gamma_2]$ *si* k *es par; si* k *es impar éste valor puede cambiar a lo más de signo.*

Demostración. [10] pág. 126 □

Si f es una función holomorfa sobre $\mathbb{H}$ invariante bajo $|_k[\gamma']$ para todo $\gamma' \in \Gamma'$, y si $s \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ con $s = \gamma_0(i\infty)$, $\gamma_0 \in \Gamma$, entonces decimos que f es holomorfa en la cúspide s si $f|_k[\gamma_0]$ tiene una expansión de Fourier sin potencias negativas. La proposición anterior dice que la holomorficidad en s no depende de la elección de γ_0 para el cual $s = \gamma_0(i\infty)$, y de hecho sólo depende de la clase de Γ'−equivalencia de s.

Denotamos por $M_k(\Gamma')$ al conjunto de formas modulares de peso k sobre Γ' y por $S_k(\Gamma')$ al conjunto de formas cuspidales de peso k sobre Γ'. Como en el caso $\Gamma' = \Gamma$, se puede comprobar que $M_k(\Gamma')$ es un $\mathbb{C}$−espacio vectorial, tal que si $f \in M_{k_1}(\Gamma')$ y $g \in M_{k_2}(\Gamma')$ entonces $fg \in M_{k_1+k_2}(\Gamma')$, y que el espacio vectorial de las formas modulares de peso cero para Γ' es un cuerpo. Notamos además que si $-1 \in \Gamma'$, entonces no existen formas modulares para Γ' de peso impar k, pues entonces $f|_k[-1] = -f$. También en este caso se sabe que la dimensión de $M_k(\Gamma')$ sobre $\mathbb{C}$ es finita.

Ejemplo 1.1. Sea $\Gamma' = \Gamma_0(N)$ entonces

$$G_{k,N}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma'} j(\gamma, \tau)^{-k} \tag{1.9}$$

es un ejemplo de forma modular para el subgrupo de congruencia Γ'.
([9] pág. 51, 55).

Notamos que sumar sobre $\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma'$ es equivalente a sumar sobre los pares de enteros c, d relativamente primos tal que $c \equiv 0 (\text{mod } N)$. Es decir

$$G_{k,N}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma'} j(\gamma, \tau)^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1 \\ c \equiv 0 (\text{mod } N)}} (c\tau + d)^{-k} \tag{1.10}$$

Ejemplo 1.2. Otro ejemplo de forma modular para un subgrupo de congruencia es la serie
$$P_{N,m,k}(\tau) = \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma'} j(\gamma, \tau)^{-k} e(m\gamma\tau)$$
donde $\Gamma' = \Gamma_0(N)$.

La $q-$expansión para esta serie es

$$P_{N,m,k}(\tau) = e(m\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} e(n\tau) \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0(\text{mod } N)}} \sum_{\substack{a,\, d(\text{mod } c) \\ (c,d)=1 \\ ad\equiv 1(\text{mod } c)}} e\left(\frac{ma+nd}{c}\right) \mathcal{J}_c(m,n)$$

donde $\mathcal{J}_c(m,n)$ está definido como en (1.8). ([9] pág. 51, 55).

Capítulo 2

Formas modulares de segundo orden

2.1. Símbolo modular

El principal objetivo de estudio en esta tesis es la serie de Poincaré de segundo orden. Para definirla se necesita conocer primero el concepto de símbolo modular.

Definición 2.1. *Sea $f(\tau)$ una forma cuspidal de peso 2 sobre $\Gamma_0(N)$ y sea $\gamma \in \Gamma_0(N)$. Se define el símbolo modular $\langle \gamma, f \rangle$ como la integral de línea*

$$\langle \gamma, f \rangle = \int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz$$

donde $\omega_0 \in \overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$.

Observación 2.1. Notar que el hecho que $f(\tau)$ sea holomorfa en $\overline{\mathbb{H}}$ implica que la integral es independiente de la curva que une a ω_0 con $\gamma\omega_0$. Luego $\gamma \mapsto \langle \gamma, f \rangle$ es una función bien definida de $\Gamma_0(N)$ en $\mathbb{C}$.

Lema 2.1. *$\langle \gamma, f \rangle$ es independiente de $\omega_o \in \overline{\mathbb{H}}$, es decir, $\int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz = \int_{\omega_1}^{\gamma\omega_1} f(z)dz$ para todo $\omega_0, \omega_1 \in \overline{\mathbb{H}}$.*

Demostración. Sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz &= \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\gamma\omega_1} f(z)dz + \int_{\gamma\omega_1}^{\gamma\omega_0} f(z)dz \\
&= \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\gamma\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\omega_0} f(\gamma z)d\gamma z \\
&= \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\gamma\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\omega_0} (cz+d)^2 f(z)\frac{dz}{(cz+d)^2} \\
&= \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\gamma\omega_1} f(z)dz + \int_{\omega_1}^{\omega_0} f(z)dz \\
&= \int_{\omega_1}^{\gamma\omega_1} f(z)dz.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *$\langle \gamma\delta, f\rangle = \langle \gamma, f\rangle + \langle \delta, f\rangle$ para todo $\gamma, \delta \in \Gamma_0(N)$. En particular si $\delta \in \Gamma_\infty$ entonces $\langle \gamma\delta, f\rangle = \langle \gamma, f\rangle$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz + \int_{\omega_0}^{\delta\omega_0} f(z)dz \\
&= \int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz + \int_{\omega_0}^{\delta\omega_0} f(z)dz + \int_{\omega_0}^{(\gamma\delta)\omega_0} f(z)dz - \int_{\omega_0}^{(\gamma\delta)\omega_0} f(z)dz \\
&= \int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz + \int_{\omega_0}^{(\gamma\delta)\omega_0} f(z)dz + \int_{\gamma(\delta\omega_0)}^{\delta\omega_0} f(z)dz \\
&= \int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz + \int_{\omega_0}^{(\gamma\delta)\omega_0} f(z)dz + \int_{\gamma\omega_0}^{\omega_0} f(z)dz \\
&= \int_{\omega_0}^{(\gamma\delta)\omega_0} f(z)dz.
\end{aligned}$$

□

Para lo que sigue necesitamos estimar el tamaño de $\langle \gamma, f\rangle$ en términos de γ

Teorema 2.1. *Sea Γ' un subgrupo de congruencia de nivel N y sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ una forma cuspidal de peso k sobre Γ'. Entonces*

$$|a_n| \leq L n^{\frac{k}{2}}$$

para alguna constante L independiente de n.

Demostración. Defina $\Phi(\tau) = |f(\tau)|(\mathrm{Im}\tau)^{\frac{k}{2}}$. Notamos que Φ es Γ'−periódica, es decir

$$\Phi(\gamma\tau) = |f(\gamma\tau)|(\mathrm{Im}\gamma\tau)^{\frac{k}{2}} = |c\tau + d|^k |f(\tau)| \frac{(\mathrm{Im}\tau)^{\frac{k}{2}}}{|c\tau + d|^k} = \Phi(\tau)$$

para todo $\gamma \in \Gamma'$.

Además Φ tiene decaimiento exponencial en cada cúspide. Por ejemplo en ∞

$$\Phi(\tau) = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n\right| y^{\frac{k}{2}} \leq e^{-2\pi y} y^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi(n-1)y}$$

donde $\tau = x + iy$. En la última expresión el factor $e^{-2\pi y} y^{\frac{k}{2}}$ tiende a cero cuando $y \to \infty$ y la suma $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi(n-1)y}$ tiende a $|a_1|$ cuando $y \to \infty$. En particular $\Phi(\tau)$ tiende a cero cuando $y = \mathrm{Im}(\tau) \to \infty$.

Entonces Φ es una función bien definida en $\Gamma' \backslash \mathbb{H}$ acotada sobre todo $\Gamma' \backslash \mathbb{H}$ y por lo tanto acotada en $\mathbb{H}$. Esto es, existe M tal que $|\Phi(\tau)| \leq M$, para todo $\tau \in \mathbb{H}$. Por lo tanto $|f(\tau)| \leq M y^{-\frac{k}{2}}$.

La serie $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$, $q = e(\tau)$, es la expansión de Fourier de f en $\mathbb{H}$ entonces para todo punto $d \in \mathbb{H}$ tenemos

$$a_n = \int_{[d,d+1]} f(z) e(-nz) dz,$$

donde $[d, d+1]$ es segmento de recta que une d con $d+1$, definido por $\gamma(t) = t + d$, donde $0 \leq t \leq 1$.(ver [15] pág. 363)

Entonces tomando $d = iy$, $y > 0$ se tiene $\gamma(t) = t + iy$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{0+iy}^{1+iy} f(z) e(-nz) dz \\ &= \int_0^1 f(t+iy) e(-n(t+iy)) dt \\ &= e^{2\pi ny} \int_0^1 f(t+iy) e(-nt) dt \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|a_n| &= e^{2\pi n y}\left|\int_0^1 f(t+iy)e(-nt)dt\right| \\
&\leq e^{2\pi n y}\int_0^1 |f(t+iy)|\,dx \\
&\leq e^{2\pi n y} M y^{-\frac{k}{2}}
\end{aligned}$$

Escogiendo $y = \frac{1}{n}$ tenemos $|a_n| \leq e^{2\pi} M n^{\frac{k}{2}} = L n^{\frac{k}{2}}$ donde L es una constante independiente de n. □

Lema 2.3. *Sea $f(\tau)$ una forma cuspidal de peso 2 para $\Gamma_0(N)$. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|\langle \gamma, f\rangle| \leq \frac{L|c|}{2\pi^2}$$

para cualquier elemento $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\Gamma_0(N)$.

Demostración. Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\langle \gamma, f\rangle| &= \left|\int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} f(z)dz\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\omega_0}^{\gamma\omega_0} e(nz)dz\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i n}\left(e(n\gamma\omega_0) - e(n\omega_0)\right)\right| \\
&\leq \frac{L}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} |e(n\gamma\omega_0) - e(n\omega_0)|,
\end{aligned}$$

usando la desigualdad del teorema (2.1) y el que $k = 2$.

Luego

$$\begin{aligned}
|\langle\gamma, f\rangle| &\leq \frac{L}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n \mathrm{Im}\gamma\omega_0} + e^{-2\pi n \mathrm{Im}\omega_0} \\
&= \frac{L}{2\pi}\left(\frac{e^{-2\pi\mathrm{Im}\gamma\omega_0}}{1-e^{-2\pi\mathrm{Im}\gamma\omega_0}} + \frac{e^{-2\pi\mathrm{Im}\omega_0}}{1-e^{-2\pi\mathrm{Im}\omega_0}}\right) \\
&\leq \frac{L}{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{Im}\gamma\omega_0} + \frac{1}{2\pi\mathrm{Im}\omega_0}\right) \\
&= \frac{L}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\mathrm{Im}\gamma\omega_0} + \frac{1}{\mathrm{Im}\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene gracias a que $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \leq \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 0$.

De (1.2) obtenemos que $\dfrac{1}{\mathrm{Im}\gamma\omega_0} = \dfrac{|j(\gamma,\omega_0)|^2}{\mathrm{Im}\omega_0}$. Por lo tanto, si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no pertenece a Γ_∞ escogemos $\omega_0 = -\frac{d}{c} + \frac{i}{|c|}$ y obtenemos

$$|j(\gamma,\omega_0)|^2 = |i|^2 = 1.$$

Usando la desigualdad anterior concluimos

$$|\langle\gamma, f\rangle| \leq \frac{L|c|}{2\pi^2}.$$

Si $\gamma \in \Gamma_\infty$ entonces $c = 0$ y $\langle\gamma, f\rangle = 0$. □

2.2. Formas modulares de segundo orden

Ahora definimos el concepto de forma modular de segundo orden. Estas funciones son una generalización de las formas modulares clásicas y contienen a las series de Poincaré que nos interesan.

En el capítulo anterior definimos una acción de $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ sobre el conjunto de funciones $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ a saber $f \mapsto f|_k[\gamma]$. Esta acción se extiende linealmente a una acción de $\mathbb{Z}[\Gamma]$. En otras palabras $f|_k[m\gamma+n\delta] = mf|_k[\gamma] + nf|_k[\delta]$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ y todo $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Definición 2.2. *Sea Γ' un subgrupo de congruencia de nivel N de Γ. Sea $f(\tau)$ una función holomorfa sobre el semiplano $\mathbb{H}$ y k un entero. Decimos que $f(\tau)$ es una forma modular de segundo orden de peso k sobre Γ' si*

(i) $f|_k[(\gamma-1)(\delta-1)] = 0$ *para todo* γ, δ *en* Γ'

(ii) *Para cada* $\gamma \in \Gamma'$ $f(\tau)|_k[\gamma]$ *tiene a lo más un crecimiento polinomial en las cúspides.*

(iii) $f|_k[\pi - 1] = 0$ *para todo* $\pi \in \Gamma'$ *tal que* $|\text{traza}(\pi)| = 2$.

Denotamos al conjunto de tales funciones por $M_k^2(\Gamma')$.

Por (iii) sabemos que $f|_k[\gamma] = f$ para todo γ con traza igual a 2. Particularmente para todo $\gamma \in \Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : l \in \mathbb{Z} \right\}$. Luego $f(\tau)$ es una función periódica de periodo uno y se puede representar por una serie de Fourier. Por (ii) se entiende que $f(\tau)|_k[\gamma] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ para ciertos $c_n \in \mathbb{C}$.

Observación 2.2. De la definiciones 2.2 y 1.5 notamos que $M_k(\Gamma') \subseteq M_k^2(\Gamma')$. En algunos casos puede ocurrir que $M_k(\Gamma') = M_k^2(\Gamma')$ (por ejemplo $\Gamma' = \Gamma$). Sin embargo existen grupos Γ' para los cuales $M_k^2(\Gamma')$ contiene funciones que no pertenecen a $M_k(\Gamma')$, es decir $M_k(\Gamma') \subsetneqq M_k^2(\Gamma')$, como veremos en lo que sigue.

Ejemplo 2.1. Sea $\Gamma' = \Gamma_0(N)$. Sea k entero positivo mayor a 3 y $f \in S_2(\Gamma')$, tal que $\langle \gamma, f \rangle \neq 0$ para algún $\gamma \in \Gamma'$. Consideremos la siguiente función definida sobre $\mathbb{H}$

$$E_{f,k}^*(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma'} \langle \gamma, f \rangle j(\gamma, \tau)^{-k}$$

Se puede probar que $E_{f,k}^*(\tau)$ es un ejemplo de forma modular de segundo orden para Γ' que no pertenece al espacio $M_k(\Gamma')$.
De hecho si usamos que para $\delta \in \Gamma'$,

$$\langle \gamma, f \rangle = \langle \gamma\delta, f \rangle - \langle \delta, f \rangle$$

y

$$j(\gamma, \delta\tau) = j(\delta, \tau)^{-1} j(\gamma\delta, \tau),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} E_{f,k}^*(\tau)|_k[\delta] &= j(\delta,\tau)^{-k} E_{f,k}^*(\delta\tau) \\ &= j(\delta,\tau)^{-k} \left\{ j(\delta,\tau)^k E_{f,k}^*(\tau) - j(\delta,\tau)^k \langle \delta, f \rangle E_k(\tau) \right\} \\ &= E_{f,k}^*(\tau) - \langle \delta, f \rangle E_k(\tau) \end{aligned}$$

donde $E_k(\tau)$ es la serie de Eisentein definida en (1.5). De esta igualdad y del hecho que $\langle \delta, f \rangle$ no siempre es cero es fácil ver que $E_{f,k}^*$ no pertenece a

$M_k(\Gamma')$ (pues la condición (i) de la definición 1.5 no se cumple). Para ver que $E^*_{f,k}(\tau)$ es una forma modular de segundo orden se requiere más trabajo, pero como $E^*_{f,k}(\tau)$ es un caso especial de las series de Poincaré que estudiamos a continuación dejamos pendiente tal demostración por ahora.

2.3. Series de Poincaré de segundo orden

En esta sección introducimos el objeto central de este estudio y obtenemos algunas de sus propiedades básicas

Definición 2.3. *Sea f una forma cuspidal de peso 2 sobre $\Gamma_0(N)$. Sea m entero no negativo y k entero mayor a 3. Para $\tau \in \mathbb{H}$ definimos la serie de Poincaré de segundo orden de f con respecto a m en τ como*

$$P^*_{f,m}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma'} \langle \gamma, f \rangle j(\gamma, \tau)^{-k} e(m\gamma\tau)$$

donde $\Gamma' = \Gamma_0(N)$.

Observación 2.3. Si $m = 0$ entonces $P^*_{f,m}(\tau) = E^*_{k,f}(\tau)$.

Notar que la función $P^*_{f,m}(\tau)$ está bien definida. Si γ pertenece a la misma clase lateral que δ modulo Γ_∞ entonces $\gamma = \eta\delta$, con algún $\eta \in \Gamma_\infty$. Luego para $\eta = \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \gamma, f \rangle &= \langle \eta\delta, f \rangle = \langle \eta, f \rangle + \langle \delta, f \rangle = \langle \delta, f \rangle, \\ j(\gamma, \tau)^{-k} &= j(\eta\delta, \tau)^{-k} = j(\eta, \delta\tau)^{-k} j(\delta, \tau)^{-k} = j(\delta, \tau)^{-k}, \\ e(m\gamma\tau) &= e(m\eta\delta\tau) = e(m(\delta\tau + l)) = e(m\delta\tau). \end{aligned}$$

Juntando estas tres condiciones se concluye que $\langle \gamma, f \rangle j(\gamma, \tau)^{-k} e(m\gamma\tau) = \langle \delta, f \rangle j(\delta, \tau)^{-k} e(m\delta\tau)$ y por lo tanto no hay ambigüedad en definir $P^*_{f,m}(\tau)$.

En lo que sigue de esta sección probaremos que $P^*_{f,m}(\tau)$ es una función holomorfa en $\mathbb{H}$ que satisface las condiciones (i) y (iii) de la definición de formas modulares de segundo orden.

En la próxima sección calcularemos los coeficientes de Fourier de $P^*_{f,m}(\tau)$ en las diferentes cúspides de $\Gamma_0(N)$ y con ello veremos que también satisface la condición (ii) de la definición 2.2.

Observación 2.4. En adelante usaremos la notación * para las entradas de una matriz cuando éstas no intervienen en el contexto donde se utilizan.

Proposición 2.1. *La serie $P^*_{f,m}(\tau)$ converge absoluta y uniformemente sobre todo subconjunto compacto de $\mathbb{H}$. Por lo tanto $P^*_{f,m}(\tau)$ define una función holomorfa sobre $\mathbb{H}$.*

Demostración. Usando el Lema 2.3 y que $|e(m\gamma\tau)| \leq 1$ para todo $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\tau \in \mathbb{H}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|P^*_{f,m}(\tau)| &\leq \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'} |\langle\gamma, f\rangle j(\gamma,\tau)^{-k} e(m\gamma\tau)| \\
&\leq \frac{L}{2\pi^2} \sum_{\gamma=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'} |c|\cdot|j(\gamma,\tau)^{-k}e(m\gamma\tau)| \\
&\leq \frac{L}{2\pi^2} \sum_{\gamma=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'} \frac{|c|}{|c\tau+d|}\cdot|j(\gamma,\tau)|^{-(k-1)} \\
&\leq \frac{L}{2\pi^2} \sum_{\gamma=\begin{pmatrix} * & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'} \frac{1}{|\tau+\frac{d}{c}|}\cdot|j(\gamma,\tau)|^{-(k-1)},
\end{aligned}$$

ahora usamos $\dfrac{1}{|\tau+\frac{d}{c}|} \leq \dfrac{1}{\mathrm{Im}\tau}$ para concluir de la desigualdad anterior que

$$|P^*_{f,m}(\tau)| \leq \frac{L}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{Im}\tau}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}|j(\gamma,\tau)|^{-(k-1)}$$

Sabemos que esta última suma converge uniformemente sobre cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{H}$ para $(k-1) > 2$ ([1] pág. 7). Por lo tanto $P^*_{f,m}(\tau)$ es función holomorfa sobre $\mathbb{H}$ para $k > 3$. □

Proposición 2.2.

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\lambda] + P^*_{f,m}(\tau)|_k[\delta] - P^*_{f,m}(\tau)|_k[\lambda\delta] = P^*_{f,m}(\tau)$$

o equivalentemente $P^*_{f,m}(\tau)|_k[(\lambda-1)(\delta-1)] = 0$, para todo $\lambda, \delta \in \Gamma'$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
P^*_{f,m}(\tau)|_k[\lambda\delta] &= j(\lambda\delta,\tau)^{-k}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma,f\rangle j(\gamma,\lambda\delta\tau)^{-k}e(m\gamma\lambda\delta\tau)\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma,f\rangle j(\lambda\delta,\tau)^{-k}j(\gamma,\lambda\delta\tau)^{-k}e(m\gamma\lambda\delta\tau)\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma,f\rangle j(\gamma\lambda\delta,\tau)^{-k}e(m\gamma\lambda\delta\tau)\\
&= \sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma'(\lambda\delta)^{-1},f\rangle j(\gamma',\tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)\\
&= \sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma',f\rangle j(\gamma',\tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)+\\
&\quad+\sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\delta^{-1}\lambda^{-1},f\rangle j(\gamma',\tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)\\
&= \sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma',f\rangle j(\gamma',\tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)+\\
&\quad+\langle\delta^{-1},f\rangle\sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}j(\gamma',\tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)+\\
&\quad+\langle\lambda^{-1},f\rangle\sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}j(\gamma',\tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)\\
&= P^*_{f,m}(\tau)-\langle\delta,f\rangle P_m(\tau)-\langle\lambda,f\rangle P_m(\tau) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

donde $P_m(\tau)$ es la serie de Poincaré clásica definida en la sección 1.3.

Si en (2.1) tomamos $\lambda = 1$ (matriz identidad), entonces

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\delta] = P^*_{f,m}(\tau) - \langle\delta,f\rangle P_m(\tau) \qquad (2.2)$$

Luego juntando (2.1) y (2.2) obtenemos

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\lambda] + P^*_{f,m}(\tau)|_k[\delta] - P^*_{f,m}(\tau)|_k[\lambda\delta] = P^*_{f,m}(\tau)$$

□

Proposición 2.3. *$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\pi] = P^*_{f,m}(\tau)$ para todo elemento $\pi\in\Gamma'$ tal que $|\mathrm{traza}(\pi)| = 2$. Es decir, $\langle\pi,f\rangle = 0$ para todo $\pi\in\Gamma'$ tal que $|\mathrm{traza}(\pi)| = 2$.*

Demostración. Sea $\pi = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma'$ tal que $|a+d| = 2$.
Si $c = 0$ entonces $\pi = \begin{pmatrix} 1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $l\in\mathbb{Z}$. Luego π fija a $i\infty$ y $\langle\pi,f\rangle = 0$ con lo

que $P^*_{f,m}(\tau)|_k[\pi] = P^*_{f,m}(\tau)$.
Si $c \neq 0$ entonces π fija un elemento en $\mathbb{Q}$. De hecho si $\dfrac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d} = \tau_0$ entonces tenemos una ecuación cuadrática para τ_0 dada por

$$c\tau_0^2 + (d-a)\tau_0 - b = 0. \tag{2.3}$$

Como $|a+d| = 2$ se obtiene que el discriminante de (2.3) es cero. Luego $\tau_0 \in \mathbb{Q}$.

Con esto

$$\langle \pi, f\rangle = \int_{\tau_0}^{\pi\tau_0} f(z)dz = 0.$$

Por lo tanto

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k(\pi) = P^*_{f,m}(\tau) - \langle \pi, f\rangle P_m(\tau) = P^*_{f,m}(\tau).$$

□

2.4. Expansión de Fourier de $P^*_{f,m}(\tau)$

2.4.1. Expansión de Fourier en infinito

En esta sección presentamos el resultado principal de nuestro trabajo, que es el cálculo de los coeficientes de Fourier de las series de Poincaré $P^*_{f,m}(\tau)$ en las distintas cúspides de $\Gamma_0(N)$. Una consecuencia particular de estos cálculos y los resultados en la sección 2.3 es que $P^*_{f,m}(\tau)$ es una forma modular de segundo orden de peso k sobre $\Gamma_0(N)$.

Para empezar necesitamos cierta descomposición de $\Gamma_0(N)$ como unión de clases laterales dobles.

Proposición 2.4. *Sea N entero positivo fijo, entonces*

$$\Gamma_0(N) = \Gamma_\infty \cup \bigcup_{c>0} \bigcup_{d\,(\mathrm{mod}\,c)} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$$

donde $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : l \in \mathbb{Z} \right\}$ *y* $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$.

Demostración. Sea $\gamma \in \Gamma_\infty \cup \bigcup_{c>0} \bigcup_{d\,(\mathrm{mod}c)} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$.

Si $\gamma \in \Gamma_\infty$ entonces $\gamma = \pm \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para algún $l \in \mathbb{Z}$, luego $\gamma \in \Gamma_0(N)$.

Si $\gamma \in \bigcup_{c>0} \bigcup_{d\,(\mathrm{mod}c)} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$; como $\Gamma_\infty \subset \Gamma_0(N)$ y $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ entonces $\gamma \in \Gamma_0(N)$.

Para la inclusión en el otro sentido, sea $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_a & \gamma_b \\ c & \gamma_d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$.

Si $c = 0$ entonces $\gamma \in \Gamma_\infty$ claramente.

Si $c > 0$. Entonces existe $0 \leq d \leq c - 1$ tal que $\gamma_d = d + mc$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_a & \gamma_b \\ c & d + mc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para cierto $l \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\gamma \in \bigcup_{c>0} \bigcup_{d\,(\mathrm{mod}c)} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$.

Si $c < 0$. Entonces existe $0 \leq d \leq |c| - 1$ tal que $\gamma_d = -d - mc$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_a & \gamma_b \\ c & -d - mc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\gamma \in \bigcup_{c>0} \bigcup_{d\,(\mathrm{mod}c)} \Gamma_\infty \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma_\infty$. □

Observación 2.5. Para calcular la expansión de Fourier de $P^*_{f,m}(\tau)$ en la cúspide infinito utilizamos la siguiente igualdad

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau + d)}.$$

Sea $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Entonces $j(T, \tau) = 1$ y se tiene

$$P^*_{f,m}(T\tau) = P^*_{f,m}(\tau + 1) = P^*_{f,m}(\tau).$$

Como además $P^*_{f,m}(\tau)$ es una función holomorfa tiene una expansión de Fourier de la forma

$$P^*_{f,m}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$$

con $a_n \in \mathbb{C}$.

Luego para todo $w \in \mathbb{H}$ tenemos

$$a_n = \int_{[w,w+1]} P^*_{f,m}(z)e(-nz)dz, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

donde $[w, w+1]$ es el segmento desde w a $w+1$ definido por $\gamma(t) = w + t$, para $0 \leq t \leq 1$. ([15], pág 363)

Sea $y > 0$ y $\gamma(t) = t + iy$ para $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{0+iy}^{1+iy} P^*_{f,m}(z)e(-nz)dz \\ &= \int_0^1 P^*_{f,m}(t+iy)e(-n(t+iy))dt \\ &= e^{2\pi ny}\int_0^1 P^*_{f,m}(t+iy)e(-nt)dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por otra parte notamos que $P^*_{f,m}(\tau)$ se puede escribir de la siguiente manera, recordando que Γ' denota al subgrupo $\Gamma_0(N)$

$$\begin{aligned} P^*_{f,m}(\tau) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'/\Gamma_\infty} \sum_{\sigma\in\Gamma_\infty} \langle\gamma\sigma, f\rangle j(\gamma\sigma,\tau)^{-k}e(m\gamma\sigma\tau) \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'/\Gamma_\infty} \langle\gamma, f\rangle \sum_{\sigma\in\Gamma_\infty} j(\gamma\sigma,\tau)^{-k}e(m\gamma\sigma\tau), \end{aligned}$$

usando que $\langle\gamma\sigma, f\rangle = \langle\gamma, f\rangle + \langle\sigma, f\rangle = \langle\gamma, f\rangle$ para todo $\sigma \in \Gamma_\infty$.

Observación 2.6. Recordamos que las matrices $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} * & * \\ -c & -d \end{pmatrix}$ pertenecen a la misma clase en el grupo cociente $\Gamma_\infty\backslash\Gamma'$, entonces podemos considerar el representante para $c > 0$. Por lo tanto todos los elementos de la forma $\pm\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertenecen a la misma clase en $\Gamma_\infty\backslash\Gamma'/\Gamma_\infty$.

Observación 2.7. Si $c = 0$ para la matriz $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ entonces $c = 0$ para todos los elementos en la clase de γ en $\Gamma_\infty\backslash\Gamma'/\Gamma_\infty$, ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+lc & * \\ c & cm+d \end{pmatrix},$$

luego si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es un representante de alguna clase en $\Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty$ tal que $c = 0$ entonces $\langle \gamma, f \rangle = 0$ para cualquier representante de esa clase.

Sea $\gamma = \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty$ con $c > 0$, entonces

$$\sum_{\sigma \in \Gamma_\infty} j(\gamma\sigma, \tau)^{-k} e(m\gamma\sigma\tau) =$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l \in \mathbb{Z}} j\left(\begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau \right)^{-k} e\left(m \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tau \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} j\left(\begin{pmatrix} a & * \\ c & cl + d \end{pmatrix}, \tau \right)^{-k} e\left(m \begin{pmatrix} a & * \\ c & cl + d \end{pmatrix} \tau \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} (c(\tau + l) + d)^{-k} e\left(m \frac{a\tau + *}{c(\tau + l) + d} \right) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} (c(\tau + l) + d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c(\tau + l) + d)} \right), \quad (2.5)
\end{aligned}$$

esta última igualdad la obtenemos usando la observación 2.5.

Por lo tanto tenemos

$$P^*_{f,m}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty} \langle \gamma, f \rangle \sum_{l \in \mathbb{Z}} (c(\tau + l) + d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c(\tau + l) + d)} \right).$$

Sea $t = \operatorname{Re} \tau$. Si usamos (2.4) y el cambio de variables $u = t + l$ (con el cambio respectivo para τ) tenemos

$$\begin{aligned}
&a_n = \\
&e^{2\pi ny} \int_0^1 \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty} \langle \gamma, f \rangle \sum_{l \in \mathbb{Z}} (c(\tau{+}l){+}d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c(\tau + l) + d)} \right) e(-nt)dt \\
&= e^{2\pi ny} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty} \langle \gamma, f \rangle \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^1 (c(\tau{+}l){+}d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c(\tau + l) + d)} - nt \right) dt \\
&= e^{2\pi ny} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty} \langle \gamma, f \rangle \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_l^{1+l} (c\tau{+}d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c\tau + d)} - nu + nl \right) du \\
&= e^{2\pi ny} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty} \langle \gamma, f \rangle \int_{-\infty}^{\infty} (c\tau + d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c\tau + d)} - nu \right) du. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Es decir

$$a_n = e^{2\pi n y} \sum_{\begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' / \Gamma_\infty} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c\tau + d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c\tau + d)} - nu \right) du =$$

$$e^{2\pi n y} \sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 0 \,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{a,\, d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1 \\ ad \equiv 1 (\mathrm{mod}\ c)}} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c\tau + d)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} - \frac{m}{c(c\tau + d)} - nu \right) du =$$

$$e^{2\pi n y} \sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 0 \,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{a,\, d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1 \\ ad \equiv 1 (\mathrm{mod}\ c)}} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^{-k} \left(\tau + \frac{d}{c} \right)^{-k} e\left(\frac{ma}{c} \right) e\left(\frac{-m}{c^2(\tau + \frac{d}{c})} - nu \right) du$$

Usando ahora el cambio de variables $v = u + \frac{d}{c}$ tenemos

$$a_n = e^{2\pi n y} \sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 0 \,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{a,\, d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1 \\ ad \equiv 1 (\mathrm{mod}\ c)}} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle e\left(\frac{ma}{c} \right) .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c\tau)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2\tau} - n\left(v - \frac{d}{c} \right) \right) dv =$$

$$e^{2\pi n y} \sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 0 \,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{a,\, d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1 \\ ad \equiv 1 (\mathrm{mod}\ c)}} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle e\left(\frac{ma + nd}{c} \right) .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c\tau)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2\tau} - nv \right) dv.$$

es decir

$$\sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{a,d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1 \\ ad\equiv 1(\mathrm{mod}\ c)}} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle e\left(\frac{ma+nd}{c}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^{-k}(v+iy)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2(v+iy)} - n(v+iy)\right) dv.$$

De la misma manera que en (2.4) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^{-k}(v+iy)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2(v+iy)} - n(v+iy)\right) dv = \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} c^{-k} z^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz.$$

En resumen, el cálculo anterior muestra que

$$P^*_{f,m}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$$

donde

$$a_n = \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1}} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix}, f \right\rangle e\left(\frac{ma+nd}{c}\right) \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cz)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz \tag{2.7}$$

Observación 2.8. Sabemos por (1.8) que

$$\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cz)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \le 0, m \ge 0 \\ \left(\frac{2\pi}{ic}\right)^k \frac{n^{k-1}}{\Gamma(k)} & \text{si } n > 0, m = 0 \\ \frac{2\pi}{i^k c}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) & \text{si } n > 0, m > 0, \end{cases}$$

donde J_ν es la función de Bessel de orden ν, luego $a_n = 0$ para todo $n \le 0$.

Proposición 2.5. *La serie que calcula a_n en* (2.7) es convergente.

Demostración. Usando observación 2.8 y lema 2.3 tenemos
Si $n > 0$, $m = 0$

$$|a_n| \le \frac{L}{2\pi^2} \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod} N)}} \sum_{\substack{d\,(\mathrm{mod} c) \\ (d,c)=1}} c\left(\frac{2\pi}{c}\right)^k \frac{n^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

para alguna constante $L > 0$. Luego

$$|a_n| \leq \frac{L(2n)^{k-1}\pi^{k-2}}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod}N)}} \frac{\varphi(c)}{c^{k-1}},$$

donde $\varphi(c)$ es la función φ de Euler en c. Por lo tanto

$$|a_n| \leq M \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod}N)}} \frac{1}{c^k}.$$

Como $k > 3$ concluimos que la serie que calcula a_n es convergente para $n > 0$, $m = 0$.

Si $n > 0$, $m > 0$

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{L}{\pi}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod}N)}} \sum_{\substack{d\,(\mathrm{mod}c) \\ (d,c)=1}} \left|J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right| \\ &= \frac{L}{\pi}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod}N)}} \varphi(c)\left|J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right|, \end{aligned}$$

donde J_ν es la función de Bessel de orden ν.
Usando que $J_\nu(x) \sim \dfrac{x^\nu}{2^\nu \nu!}$ para x tendiendo a cero (ver [8], pág. 245), tenemos

$$|a_n| \leq \frac{L}{\pi}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c=M_0 \\ c\equiv 0\,(\mathrm{mod}N)}}^{\infty} c\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)^{k-1} \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!},$$

para una constante M_0 suficientemente grande. Luego

$$|a_n| \leq M \sum_{c=0}^{\infty} c^{k-2}$$

Como $k > 3$ concluimos que la serie que calcula a_n es convergente para $n > 0$, $m > 0$. $\square$

Observación 2.9. En el ejemplo (1.2) consideramos

$$P_{N,m,k}(\tau) = \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} j(\gamma,\tau)^{-k} e(m\gamma\tau)$$

con $q-$expansión dada por

$$P_{N,m,k}(\tau) = e(m\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} e(n\tau) \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ N)}} \sum_{\substack{ad\equiv 1(\mathrm{mod}\ c) \\ d\,(\mathrm{mod}\ c) \\ (d,c)=1}} e\left(\frac{ma+nd}{c}\right) \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cz)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz.$$

Los cálculos anteriores nos permiten hacer una comparación de éste desarrollo y el obtenido para $P^*_{f,m}(\tau)$ en (2.7). Notamos que la diferencia entre ambos radica principalmente en la presencia del símbolo modular en el desarrollo de $P^*_{f,m}(\tau)$.

2.4.2. Expansión de Fourier en otras cúspides

En esta sección buscaremos la expansión de Fourier en cualquier cúspide b distinta de infinito. Es decir calcularemos la expansión de Fourier de $P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b]$, donde $\sigma_b \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $\sigma_b(i\infty) = b$.

Sea $b = \dfrac{u}{v}$ una cúspide para $\Gamma_0(N)$, sabemos que bajo la acción de $SL_2(\mathbb{Z})$ ésta es equivalente a $i\infty$. Escogemos

$$\delta_b = \begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \qquad \text{tal que} \quad \delta_b(i\infty) = b.$$

Definimos $\sigma_b = \delta_b \rho_b$, donde

$$\rho_b = \begin{pmatrix} \sqrt{m_b} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_b} \end{pmatrix}, \qquad m_b = \frac{N}{(N, v^2)} \tag{2.8}$$

el entero m_b es llamado el ancho de la cúspide b.

Proposición 2.6. *Sea σ_b definido como antes, entonces Γ_∞ actúa por multiplicación por la derecha en $\Gamma_0(N)\sigma_b$.*

Demostración. Sea $\sigma_b = \delta_b \rho_b$ como en (2.8).
Basta demostrar que $\sigma_b \alpha \sigma_b^{-1} \in \Gamma_0(N)$, para $\alpha \in \Gamma_\infty$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_b} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{m_b} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_b} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \in \Gamma_0(N)$$

para algún $l \in \mathbb{Z}$.

De hecho se tiene

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{m_b} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} u & p \\ v & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{m_b} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m_b} \end{pmatrix}\right\}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} u\sqrt{m_b} & p/\sqrt{m_b} \\ v\sqrt{m_b} & q/\sqrt{m_b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q/\sqrt{m_b} & -p/\sqrt{m_b} \\ -v\sqrt{m_b} & u\sqrt{m_b} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - uvm_bl & u^2m_bl \\ -v^2m_bl & 1 + vum_bl \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De (2.8) se tiene que $m_b = \dfrac{N}{(v^2, N)}$, por lo cual $\dfrac{v^2N}{(v^2, N)} = N\dfrac{v^2}{(v^2, N)}$. Como (v^2, N) es el máximo común divisor entre v^2 y N, resulta que $\dfrac{v^2}{(v^2, N)}$ es un entero. Luego N divide a v^2m_bl, es decir $v^2m_bl \equiv 0 \,(\mathrm{mod} N)$.

Por lo tanto $\sigma_b\alpha\sigma_b^{-1} \in \Gamma_0(N)$ para $\alpha \in \Gamma_\infty$ □

En consecuencia

$$\begin{aligned}
P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b] &= j(\sigma_b, \tau)^{-k}P^*_{m,f}(\sigma_b\tau) \\
&= j(\sigma_b, \tau)^{-k}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma, f\rangle j(\gamma, \sigma_b\tau)^{-k}e(m\gamma\sigma_b\tau) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'}\langle\gamma, f\rangle j(\gamma\sigma_b, \tau)^{-k}e(m\gamma\sigma_b\tau) \\
&= \sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b}\langle\gamma'\sigma_b^{-1}, f\rangle j(\gamma', \tau)^{-k}e(m\gamma'\tau)
\end{aligned}$$

Aplicando descomposición en clases laterales dobles se tiene

$$\begin{aligned}
P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b] &= \sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\sum_{\lambda\in\Gamma_\infty}\langle\gamma'\sigma_b^{-1}\lambda, f\rangle j(\gamma'\lambda, \tau)^{-k}e(m\gamma'\lambda\tau) \\
&= \sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\langle\gamma'\sigma_b^{-1}, f\rangle\sum_{\lambda\in\Gamma_\infty}j(\gamma'\lambda, \tau)^{-k}e(m\gamma'\lambda\tau),
\end{aligned}$$

además por (2.5) tenemos

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_\infty} j(\gamma'\lambda,\tau)^{-k}e(m\gamma'\lambda\tau)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}(c(\tau+l)+d)^{-k}e\left(\frac{ma}{c}-\frac{m}{c(c(\tau+l)+d)}\right),$$

para todo $\gamma'=\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty$ con $c>0$.

Luego

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b]=$$
$$\sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\langle\gamma'\sigma_b^{-1},f\rangle\sum_{l\in\mathbb{Z}}(c(\tau+l)+d)^{-k}e\left(\frac{ma}{c}-\frac{m}{c(c(\tau+l)+d)}\right)$$

Para calcular los coeficientes de Fourier de $P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b]$ usaremos nuevamente el método clásico del análisis de Fourier. Es decir, si $P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b]=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nq^n$, entonces para $y\in\mathbb{R}$, $y>0$ fijo,

$$a_n=e^{2\pi ny}\int_0^1 P^*_{f,m}(\tau)e(-nx)dx,\qquad \tau=x+iy$$

Luego para $\gamma'=\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty$ con $c>0$ y usando los cálculos efectuados para (2.6) y (2.7) se tiene

$$\begin{aligned}
a_n&=e^{2\pi ny}\int_0^1\sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\langle\gamma'\sigma_b^{-1},f\rangle\sum_{l\in\mathbb{Z}}(c(\tau+l)+d)^{-k}e\left(\frac{ma}{c}-\frac{m}{c(c(\tau+l)+d)}\right)\\
&=e^{2\pi ny}\sum_{\gamma'\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\langle\gamma'\sigma_b^{-1},f\rangle\int_{-\infty}^{\infty}(c\tau+d)^{-k}e\left(\frac{ma}{c}-\frac{m}{c(c\tau+d)}-nu\right)du\\
&=e^{2\pi ny}\sum_{\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\left\langle\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\sigma_b^{-1},f\right\rangle\int_{-\infty}^{\infty}(c\tau+d)^{-k}e\left(\frac{ma}{c}-\frac{m}{c(c\tau+d)}-nu\right)du\\
&=\sum_{\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty}\left\langle\begin{pmatrix} a & * \\ c & d\end{pmatrix}\sigma_b^{-1},f\right\rangle e\left(\frac{ma+nd}{c}\right)\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy}(cz)^{-k}e\left(\frac{-m}{c^2z}-nz\right)dz,
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

donde

$$a_n = \sum_{\begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma' \sigma_b / \Gamma_\infty} \left\langle \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \sigma_b^{-1}, f \right\rangle e\left(\frac{ma+nd}{c}\right) \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cz)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz \tag{2.9}$$

Observación 2.10. Sea $\gamma \in \Gamma'\sigma_b$, la suma que calcula a_n es independiente del representante que escojamos en la clase de γ en $\Gamma_\infty \backslash \Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty$. Si γ' es un elemento en la clase de γ en $\Gamma_\infty \backslash \Gamma'\sigma_b/\Gamma_\infty$ entonces

$$\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \beta\sigma_b \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde l, r son enteros y $\beta\sigma_b = \gamma$, para $\beta \in \Gamma'$.

Sea $\Gamma_b = \{\gamma \in \Gamma' : \gamma(b) = b\}$, donde b es una cúspide para Γ'. Notamos que $\sigma_b^{-1}\Gamma_b\sigma_b = \Gamma_\infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \gamma'\sigma_b^{-1}, f\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \sigma_b^{-1}, f \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \beta\sigma_b \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma_b^{-1}, f \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \beta\delta, f \right\rangle, \end{aligned}$$

algún $\delta \in \Gamma_b$. Luego por lema 2.2 se tiene

$$\langle \gamma'\sigma_b^{-1}, f\rangle = \langle \beta, f\rangle = \langle \gamma\sigma_b^{-1}, f\rangle.$$

Para ver la independencia del factor exponencial con respecto a Γ' hacemos lo siguiente. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'\sigma_b$, entonces $\gamma' = \begin{pmatrix} a+lc & * \\ c & cr+d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty\gamma\Gamma_\infty$, para l y r enteros. Por lo tanto

$$\begin{aligned} e\left(\frac{ma'+nd'}{c'}\right) &= e\left(\frac{m(a+lc)+n(cr+d)}{c}\right) \\ &= e\left(\frac{ma+nd}{c}\right) e(ml+nr) \\ &= e\left(\frac{ma+nd}{c}\right). \end{aligned}$$

Para dos matrices en la misma clase en $\Gamma_\infty \backslash \Gamma' \sigma_b / \Gamma_\infty$ hemos observado que su entrada inferior izquierda permanece invariante. Como la integral en 2.9 sólo depende de éste parámetro, su valor es el mismo,independiente del representante que escojamos.

Por lo tanto hemos probado que la serie que calcula a_n definido en 2.9 es independiente del representante de la clase.

Observación 2.11. Notamos que $a_n = 0$ para $n \leq 0$ en la expansión de Fourier en cualquier cúspide, pues $\int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} (cz)^{-k} e\left(\frac{-m}{c^2 z} - nz\right) dz = 0$ para $n \leq 0$.

Proposición 2.7. *La serie que calcula a_n en* (2.9) es convergente.

Demostración. En observación 2.10 hemos demostrado que la suma que calcula a_n está bien definida, por cual podemos considerar la suma sobre aquellos representantes que son de la forma $\gamma = \begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma' \sigma_b$, entonces $\gamma \sigma_b^{-1} \in \Gamma'$. Luego usando observación 2.8 y lema 2.3 tenemos
Si $n > 0$, $m = 0$

$$|a_n| \leq \frac{L}{2\pi^2} \sum_{\substack{c>0 \\ (c,d)=1 \\ d(\mathrm{mod}\ c)}} c' \left(\frac{2\pi}{c}\right)^k \frac{n^{k-1}}{\Gamma(k)},$$

donde c' es la entrada inferior izquierda de la matriz $\begin{pmatrix} a & * \\ c & d \end{pmatrix} \sigma_b^{-1}$, por tanto es de la forma $c' = cr + dt$ para r y t constantes reales fijas que pertenecen a la primera columna de la matriz σ_b^{-1}. Entonces

$$|a_n| \leq \frac{L\pi^{k-2}(2n)^{k-1}}{\Gamma(k)} \sum_{\substack{c>0 \\ (c,d)=1 \\ d(\mathrm{mod}\ c)}} \frac{cr + dt}{c^k},$$

como $1 \leq d \leq c$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq M \sum_{\substack{c>0 \\ (c,d)=1}} \sum_{d=1}^{c-1} \frac{1}{c^{k-1}} \\ &= M \sum_{c>0} \frac{\varphi(c)}{c^{k-1}}, \end{aligned}$$

donde $\varphi(c)$ es la función φ de Euler en c. Por lo tanto

$$|a_n| \leq M \sum_{c>0} \frac{1}{c^{k-2}}.$$

Como $k > 3$ concluimos que la serie que calcula a_n es convergente para $n > 0$, $m = 0$.

Si $n > 0$, $m > 0$

$$|a_n| \leq \frac{L}{\pi}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c>0 \\ (c,d)=1 \\ d(\mathrm{mod}\ c)}} \frac{c'}{c} \left| J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right|,$$

usando que $J_\nu(x) \sim \dfrac{x^\nu}{2^\nu \nu!}$ para x tendiendo a cero, tenemos

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leq M \sum_{\substack{c>0 \\ (c,d)=1 \\ d(\mathrm{mod}\ c)}} \frac{cr+dt}{c}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)^{k-1} \\
&\leq M \sum_{\substack{c>0 \\ (c,d)=1}} \sum_{d=1}^{c-1} c^{k-1} \\
&= \sum_{c>0} \frac{\varphi(c)}{c^{k-1}} \\
&\leq \sum_{c>0} \frac{1}{c^{k-2}}.
\end{aligned}$$

Como $k > 3$ concluimos que la serie que calcula a_n converge para $n > 0$, $m > 0$. $\square$

Por último veremos que para cada $\gamma \in \Gamma'$ $P^*_{f,m}(\tau)|_k[\gamma]$ tiene a lo más crecimiento polinomial en las cúspides. De manera precisa significa, para toda cúspide b

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\gamma]\big|_k[\sigma_b] \ll (\mathrm{Im}\tau)^\mu$$

para alguna constante entera $\mu > 0$ y $\tau \in F_\infty = \{\tau \in \mathbb{H} : -1/2 \leq \mathrm{Re}\,\tau \leq 1/2\}$.

Observación 2.12. Si $f(\tau)|_k[\sigma_b] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, es decir $f(\tau)|_k[\sigma_b]$ tiene desarrollo de Fourier tal que $a_n = 0$ para todo $n < 0$ entonces f tiene a lo más crecimiento polinomial en las cúspides. De hecho, si $y = \mathrm{Im}\tau$ tenemos

$$\left|y^{-\mu} f(\tau)|_k[\sigma_b]\right| \leq y^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n| = y^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-2\pi n y}.$$

Luego para y suficientemente grande existe $\epsilon > 0$ tal que $|y^{-\mu} f(\tau)|_k[\sigma_b]| < \epsilon$. Es decir

$$f(\tau)|_k[\sigma_b] \ll (\mathrm{Im}\tau)^{\mu}.$$

Usando esta última observación y la ecuación 2.2, tenemos

$$P^*_{f,m}(\tau)|_k[\gamma]|_k[\sigma_b] = P^*_{f,m}(\tau)|_k[\sigma_b] - \langle \gamma, f \rangle P_m(\tau)|_k[\sigma_b],$$

como ambos sumando en el lado izquierdo de la igualdad tienen expansión de Fourier tal que sus coeficientes para $n < 0$ son cero, concluimos que $P^*_{f,m}(\tau)|_k[\gamma]$ tiene a lo más crecimiento polinomial en las cúspides.

Observación 2.11 y los resultados de la sección 2.3 muestran que cada $P^*_{f,m}(\tau)$ es una forma cuspidal de segundo orden de peso k para $\Gamma_0(N)$.

Bibliografía

[1] T. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory.* Series: Undergraduate Texts in Mathematics. Second edition. 1976.

[2] G. Chinta; N. Diamantis; C. O'Sullivan, *Second order modular forms.* Acta Arithmetica 103 (3), 209-223 (2002)

[3] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Product.* Academic Press, London, 1965.

[4] D. Goldfeld, *Zeta functions formed with modular symbols.* Automorphic forms, automorphic representations, and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996), 111–121, Proc. Sympos. Pure Math., 66, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[5] D.Goldfeld, *The distribution of modular symbols.* Number Theory in Progress, (Proceedings of the International Conference organized by the S. Banach Intern. Math. Center in honor of Schinzel in Zakopane, Poland, June 30 – July 9, 1997), 1999.

[6] D. Goldfeld, *Modular elliptic curves and diophantine problems.* Proc. of the First Canadian Number Theory Assoc., Banff, Canada (1990), 157–175.

[7] R.C. Gunning (notes by A. Brumer), *Lectures on Modular Forms.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1962).

[8] H. Hochstadt, *The functions of matematical physics.* Pure and Applied Mathematics, volume XXIII, Wiley-Interscience, 1971.

[9] H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms.* Series: Graduate Studies in Mathematics. Volume 17. Amer. Math. Soc. 1997.

[10] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic curves and modular formas.* Series: Graduate Texts in Mathematics, Vol. 97 2nd ed., 1993.

[11] T. Miyake, *Modular Forms.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989

[12] C. O'Sullivan, *Properties of Eisenstein series formed with modular symbols.* J. Reine Angew. Math. **518** (2000), 163–186.

[13] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

[14] J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves.* Springer-Verlag, New York, Inc. 1994.

[15] R. Remmert, *Theory of complex functions.* Springer-Verlarg, New York, Inc. 1991.