

UCH-FC
MAG-M
S 112
C.1



Cálculos explícitos de la imagen espinorial local relativa para órdenes cíclicos.

Tesis

entregada a la

Universidad de Chile

en cumplimiento parcial de los requisitos

para optar al grado de

Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Ignacio Saavedra Briceño.

Enero 2014

Director de Tesis: **Dr. Luis Arenas-Carmona.**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS MAGÍSTER

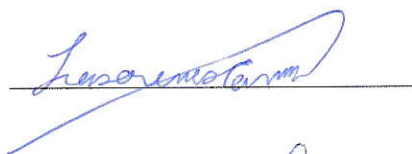
Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

Ignacio Eduardo Saavedra Briceño

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 16 de Enero del 2014.

Director de Tesis

Dr. Luis Arenas

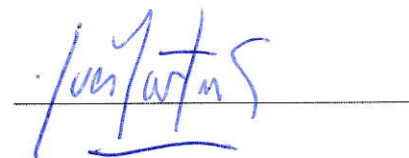


Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Eduardo Friedman



Dr. Yves Martin



Dedicado a mi familia...

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia, especialmente a mis padres Guillermina y Guillermo por el incansable apoyo durante todos estos años para lograr este objetivo. Agradecer también, a mis compañeros más cercanos en Matemáticas, en particular, a Patricio Quiroz, Jaime Contreras y Alan Chavez por su ayuda, disposición y buena onda. Recalcar mi agradecimiento a los profesores con los cuales tuve clases y en especial al profesor Luis Arenas, director de esta tesis, por su infinita paciencia y buena disposición conmigo. Por último, pero no menos importante, quiero agradecer el apoyo de un grupo de personas simplemente maravilloso, la Rama de Natación de la Facultad de Ciencias, son unos grandes amigos, que quisiera tener toda la vida. Sin lugar a dudas, agradecer al profesor Oscar Muñoz por su incansable labor docente, psicológica y deportiva en la facultad, que influyó en la vida de muchos, haciéndonos mejores personas y por supuesto grandes nadadores de Ciencias. Gracias Totales!

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	6
2.1. Álgebras de cuaterniones	6
2.2. Cuerpos locales	8
2.3. Símbolo de Hilbert	10
2.4. Órdenes y Reticulados	10
2.5. Árbol de Bruhat-Tits local para $M_2(K)$	11
2.5.1. Ramas	13
2.6. Género e imagen espinorial local relativa	14
3. K no diádico	18
3.1. α, β libres de cuadrados	18
3.2. Caso general	26
4. K/\mathbb{Q}_2 no ramificada	34
4.1. α, β libres de cuadrados	34
4.2. Caso general	41
5. Ejemplos y Aplicaciones	47
5.1. Número de órdenes maximales que contienen a \mathfrak{f}	47
5.2. Cálculo de la imagen Espinorial local relativa	49
5.3. Ejemplos:	50
A. Apéndice	53

B. $K = \mathbb{Q}_2$	55
B.1. α, β libres de cuadrados	55
B.2. Caso general	66

RESUMEN

Esta tesis se enmarca dentro de la teoría de números, específicamente, en el contexto de órdenes maximales en un álgebra de cuaterniones global, la cual se sabe que es localmente isomorfa al álgebra de matrices sobre un cuerpo local. El objetivo principal es determinar como se incrusta un orden cíclico \mathfrak{H} en las clases de conjugación del género de un orden de *Eichler* \mathfrak{D} . Para esto, se caracteriza para cada lugar \mathfrak{p} un subgrafo llamado la *0-rama* de $\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}$, el cual se obtiene conociendo las *0-ramas* de órdenes conmutativos contenidos en $\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}$, las que tienen una descripción más simple y conocida. Dicha caracterización se da en términos de tres *invariantes* que determinan a este subgrafo. El cálculo de los invariantes es el eje central en el desarrollo de la tesis y se dan, primero para un cuerpo local no diádico $K_{\mathfrak{p}}$ y luego para una extensión cualquiera de \mathbb{Q}_2 no ramificada. Se dan ejemplos en los cuales se puede describir explícitamente como se incrusta \mathfrak{H} en las clases del género de \mathfrak{D} .

ABSTRACT

This thesis fits into number theory, specifically, in the context of maximal orders in a global quaternion algebra, which is known to be locally isomorphic to a matrix algebra over a local field. The main goal is state how a cyclic order \mathfrak{H} embeds into the conjugacy classes in the genus of an *Eichler* order \mathfrak{D} . For this, we characterize for each spot \mathfrak{p} a subgraph called *0-branch* of $\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}$, which is computed from the *0-branch* of commutative orders contained in $\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}$, which have a simple and known description. We make these computations explicit in terms of three *invariants* which define the subgraph. The computation of these invariants is the central work in this thesis and we provide them, first for a non-dyadic local field $K_{\mathfrak{p}}$ and then for any unramified extension of \mathbb{Q}_2 .

Capítulo 1

Introducción

El problema de incrustar cuerpos dentro de un álgebra central simple B sobre un cuerpo de números F fue un problema importante en la teoría de cuerpos de clases. Posteriormente, la investigación apuntó a buscar incrustaciones de órdenes, contenidos en el anillo de enteros de un subcuerpo maximal L de un álgebra central simple B , dentro de órdenes en dicha álgebra. Chevalley [6] estudió la siguiente pregunta: Sea D un álgebra central simple sobre un cuerpo de números K , sea L una subálgebra maximal abeliana de D , y sea \mathfrak{L} un orden en L . ¿Contiene todo orden maximal de D una copia isomorfa de \mathfrak{L} ? Chevalley resolvió el problema cuando D es un álgebra de matrices y \mathfrak{L} es el anillo de enteros de un cuerpo de números. Chinburg y Friedman [7] respondieron la pregunta de Chevalley cuando D es un álgebra de cuaterniones y \mathfrak{L} es un orden arbitrario en L . Los dos resultados anteriores sugirieron que un teorema similar se cumplía para un álgebra central simple cualquiera. Arenas-Carmona [3] probó dicho teorema para álgebras que son localmente un álgebra de matrices o de división. Distintos autores como X. GUO y H Qin [8], B. Linowitz y T.R Shemanske [9],[10] y Arenas-Carmona [4] han investigado en los últimos años los casos de incrustación de órdenes en álgebras centrales simples en general, y en álgebras de cuaterniones en particular.

El problema de incrustar órdenes globalmente se resuelve mediante cálculos locales. En ese sentido el problema nos lleva a considerar la teoría de géneros y géneros espinoriales. Esta teoría depende fundamentalmente del cálculo de la imagen espinorial local relativa (§2.6), ya que conocer en cuántos géneros espinoriales en un género dado se incrusta un orden dado, es equivalente a conocer dicha imagen espinorial local relativa en nuestro caso.

En esta tesis consideraremos siempre un cuerpo de números F , mientras que K será el completado de F en un lugar no arquimediano \mathfrak{p} , es decir $K = F_{\mathfrak{p}}$ será un cuerpo local de característica 0 asociado al lugar \mathfrak{p} . Además, siempre consideraremos un álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} sobre el cuerpo F . Tal álgebra es localmente

isomorfa a $\mathbb{M}_2(K)$, salvo en un cierto conjunto finito de lugares ramificados, es decir, lugares donde el álgebra de cuaterniones local es de división.

Específicamente, consideramos un orden cíclico \mathfrak{H} de la forma $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_F[i, j]$, donde i y j son generadores canónicos del álgebra de cuaterniones sobre F . En otras palabras, para ciertos enteros α y β libres de cuadrados se tiene $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ y $ij = -ji$. Notamos que si α y β no son libres de cuadrados, a saber, $\alpha = \omega^2 a$ y $\beta = \eta^2 b$, con $\alpha, \beta, \omega, \eta \in F^*$, entonces

$$\mathfrak{H} = \mathcal{O}_F[i, j] = \mathcal{O}_F[\omega i_0, \eta j_0],$$

donde $i_0^2 = a$ y $j_0^2 = b$ (i_0 y j_0 generan el mismo álgebra de cuaterniones que i y j). En cada capítulo se desarrollará el caso libre de cuadrados y posteriormente el caso general en el cual el orden \mathfrak{H} será descrito localmente por $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i_0, \pi^s j_0]$, con $r = \text{ord}_{\mathfrak{p}} \omega$, $s = \text{ord}_{\mathfrak{p}} \eta$, más adelante omitiremos los subíndices para i y j .

El objetivo final es poder calcular la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$, en ciertos casos, para el orden $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$, donde \mathfrak{D} es un orden de Eichler de nivel $d = d(\mathfrak{p})$ localmente [5, §1.2.2]. Dicho cálculo se realiza utilizando el árbol de *Bruhat-Tits* local (ver §2.5), específicamente un subgrafo de éste, llamado la *0-rama* de \mathfrak{H} el cual es denotado por $S_0(\mathfrak{H})$ (§2.5.1). Esta rama se identifica con un conjunto de órdenes maximales locales en el álgebra de cuaterniones que contienen a \mathfrak{H} . La ventaja de considerar la 0-rama de \mathfrak{H} , es que su descripción se reduce a detallar la 0-rama para órdenes conmutativos de la forma $\mathcal{O}_K[x]$, donde x recorre un conjunto de generadores del orden \mathfrak{H} sobre \mathcal{O}_K [1, §4]. Estas 0-ramas tienen una forma muy sencilla, que depende del cuerpo local K y del tipo de extensión $K(x)/K$.

La descripción de la 0-rama de \mathfrak{H} es la labor central en esta tesis. Dicha descripción se da en términos de tres invariantes que determinan este subgrafo, los cuales son: *profundidad*, *largo del tallo* y *diámetro* (ver Def. 3.2.1). Hecho esto, es posible calcular, en términos de los invariantes de $S_0(\mathfrak{H})$, la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H})$.

Para efectos de ejemplificar de mejor manera las posiciones relativas de las 0-ramas y como se intersectan, graficamos cada rama denotándolas con color plomo y en negro la intersección resultante. Se dan las formas gráficas en cada caso, resumidas en las tablas 3.2 y 4.1.

Una breve descripción del desarrollo de cada capítulo es la siguiente:

- **Capítulo 2:** Contiene material preliminar del problema a desarrollar en cada capítulo.

Los siguientes dos capítulos están dedicados a la descripción de las 0-ramas para $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$ para i, j libres de cuadrados, y posteriormente para el caso general, donde $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$ con $r, s \geq 0$.

- **Capítulo 3:** K no diádico. Se establece el Teorema 3.2.1 que describe los invariantes para un cuerpo local K no diádico.
- **Capítulo 4:** K/\mathbb{Q}_2 no ramificada. Se establece el teorema 4.2.1 que describe los invariantes para un cuerpo local diádico K con K/\mathbb{Q}_2 no ramificada. Como caso explícito se detalla el caso $K = \mathbb{Q}_2$ en el apéndice.
- **Capítulo 5:** Se demuestra la siguiente aplicación:

Proposición 5.1.1. Sean K un cuerpo local, \mathcal{O}_K su anillo de enteros, \mathfrak{A} un álgebra de cuaterniones localmente isomorfa al álgebra de matrices $\mathbb{M}_2(K)$ y sea el orden local $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j] \subseteq \mathbb{M}_2(K)$, donde π es un parámetro uniformizante en K . Sean $S = S_0(\mathfrak{H})$, $q = |\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K|$, $p(S)$ y $l_t(S)$ la profundidad y el largo respectivamente del tallo de S . Definimos $\aleph(S) = \#S_0(\mathfrak{H})$. Entonces la 0-rama $S_0(\mathfrak{H})$ se obtiene engrosando en $p(S)$ un camino de largo $l_t(S)$, se tiene

$$\aleph(S) = [l_t(S) + 1]q^{p(S)} + 2\frac{q^{p(S)} - 1}{q - 1}.$$

Por engrosar en $p(S)$ se entiende agregar al camino de largo $l_t(S)$ (tallo) todos los vértices en el árbol de Bruhat-Tits cuya distancia sea menor igual que $p(S)$ a dicho camino.

Como resultados nuevos más significativos, culminados en ejemplos explícitos en el capítulo 5, esta tesis aporta una descripción completa de las 0-ramas de órdenes cíclicos en un álgebra de cuaterniones localmente isomorfa al álgebra de matrices con coeficientes en un cuerpo local no diádico o diádico no ramificado sobre \mathbb{Q}_2 . Estos cálculos no parecen existir previamente en la literatura, con la excepción del Caso 1 en la sección 3.1 [1, Ex. §5].

La descripción de las 0-ramas significa dar en detalle sus invariantes (ver def. 3.2.1) los que están dispuestos en las tablas 3.8 y 4.2 para cada caso. El cálculo de dichos invariantes se basa en la descripción de las 0-ramas para órdenes conmutativos presentada en [1, §4]. Adicionalmente, se establece el lema 4.2.1 como herramienta para la demostración del teorema 4.2.1, y la aplicación descrita en la Proposición 5.1.1. Por último, utilizando los resultados establecidos en [1, §3], se calculó explícitamente la imagen espinorial local para ejemplos específicos de órdenes \mathfrak{H} y \mathfrak{D} , determinando el conjunto de géneros espinoriales en $gen(\mathfrak{D})$ que contienen una copia de \mathfrak{H} .

El cálculo de la imagen espinorial local relativa para dichos ejemplos, en base a los invariantes calculados en los capítulos 3 y 4, se muestran a continuación y se detallan en el capítulo 5:

▪ **Ejemplos:**

Consideremos el cuerpo $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ y la extensión finita no ramificada Σ/F , con $\Sigma = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$. Notar que Σ es el *cuerpo de clase de Hilbert* de F [19, pág. 262]. Notemos que los primos racionales 3 y 5 ramifican en F/\mathbb{Q} . Sean $\mathfrak{3}_0$ y $\mathfrak{5}_0$ los lugares (ideales) en F sobre 3 y 5 respectivamente. Se observa que $\mathfrak{3}_0$ y $\mathfrak{5}_0$ son inertes en Σ/F . Por otra parte, el primo racional 2 se descompone en F/\mathbb{Q} , a saber, existen lugares (ideales) $\mathfrak{2}_1$ y $\mathfrak{2}_2$ de F sobre 2, tales que $\mathfrak{2}_1 \cdot \mathfrak{2}_2 = (2)$. Se observa que $\mathfrak{2}_1$ y $\mathfrak{2}_2$ son inertes en Σ/F . Notamos que los lugares $\mathfrak{2}_1$ y $\mathfrak{2}_2$ determinan cuerpos residuales isomorfos. Luego, por la Obs. 2.5.1 el cálculo del diámetro es el mismo para cada uno de estos lugares.

Sean \mathfrak{p} lugar en F y el orden $\mathfrak{H} := \mathcal{O}_F[i, j]$ con $i^2 = \alpha$ y $j^2 = \beta$ tal que $ij = -ji$. Veamos los siguientes ejemplos del cálculo de la imagen espinorial y del número de clases de órdenes maximales que admiten una incrustación de \mathfrak{H} :

- 1) Sean $\alpha = (-3)^a \alpha_0$ y $\beta = 5^b \beta_0$, con enteros, tales que $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2} \cup \Delta \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2}$ si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2$ y $ord_{\mathfrak{p}}(\alpha_0) = ord_{\mathfrak{p}}(\beta_0) = z$, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2$.

En virtud de los teoremas 3.2.1 y 4.2.1, podemos calcular el diámetro de la 0-rama $S = S_0(\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$, el cual está descrito como sigue:

$$diam(S) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2, \mathfrak{3}_0, \mathfrak{5}_0. \\ \lambda & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2. \\ 2q(a) & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathfrak{3}_0. \\ 2w(b) & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathfrak{5}_0. \end{cases}$$

Donde $\lambda = 2 \left[\frac{z+1}{2} \right] - 1$, $[x]$ es la función parte entera y $q(a)$ y $w(b)$ se obtienen mediante las siguientes tablas:

		$\alpha_0 \in$	
	$q(a)$	\mathcal{O}_K^{*2}	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$
$\beta \in$	\mathcal{O}_K^{*2}	a	a
	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$	0	0

		$\alpha \in$	
	$w(b)$	\mathcal{O}_K^{*2}	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$
$\beta_0 \in$	\mathcal{O}_K^{*2}	b	0
	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$	b	0

Tabla 1.1: Valores de $q(a)$ y $w(b)$

Consideremos un orden de Eichler \mathfrak{D} de nivel $d = diam(S)$ localmente. Se sigue del lema 5.2.1 que la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$ para cada lugar \mathfrak{p} es:

$$H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* F_{\mathfrak{p}}^{*2} & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2, \mathbf{3}_0, \mathbf{5}_0. \\ F_{\mathfrak{p}}^* & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2. \\ \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* F_{\mathfrak{p}}^{*2} & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{3}_0, \mathbf{5}_0. \end{cases}$$

Se concluye que en los lugares $\mathfrak{p} = \mathbf{2}_1$ o $\mathfrak{p} = \mathbf{2}_2$ se tiene $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = F_{\mathfrak{p}}^*$ y $F_{\mathfrak{p}}^* \not\subseteq H_{\Sigma}$ (\mathfrak{p} inerte en Σ/F). Se sigue que

$$F^*H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = J_F.$$

En conclusión, el correspondiente cuerpo de clase espinorial y de representación es F (ver Def. 2.6.7), y por lo tanto el orden \mathfrak{H} se incrusta en todos los órdenes maximales en \mathfrak{A} (de hecho, hay una única clase).

- 2) Sean $0 \leq r < s$ enteros, $\alpha = 2^{2r}\alpha_0$ y $\beta = 2^{2s}\beta_0$, tales que α_0 y β_0 son unidades globales y $F_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\alpha_0})/F_{\mathfrak{p}}$ es una extensión no ramificada. Entonces localmente el diámetro es:

$$\text{diam}(S) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2. \\ 2q(r, s) & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2. \end{cases}$$

Donde

$$q(r, s) = \begin{cases} s & , \text{ si } \alpha_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2}, \beta_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*. \\ r + 1 & , \text{ si } \alpha_0 \in \Delta\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2}, \beta_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*. \end{cases}$$

De aquí, la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$, con \mathfrak{D} de nivel $\text{diam}(S)$ localmente para cada lugar \mathfrak{p} es:

$$H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* F_{\mathfrak{p}}^{*2}, \text{ para todo lugar no arquimediano } \mathfrak{p} \text{ en } F.$$

Luego, como no hay lugares inertes en Σ/F tales que $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = F_{\mathfrak{p}}^*$, se concluye que

$$F^*H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = H_{\Sigma}.$$

Se comprueba que el cuerpo de representación (ver 2.6.8) es $E(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \Sigma$. En este caso se dice que el orden \mathfrak{H} es selectivo en $\text{gen}(\mathfrak{D})$, es decir, el orden \mathfrak{H} se incrusta sólo en una de las dos clases de conjugación de órdenes maximales.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se incluyen tópicos importantes para el desarrollo del problema en cuestión, así como ejemplos y observaciones. En las secciones 2.1, 2.2 y 2.3 se exponen los resultados más significativos que se utilizarán acerca de álgebras de cuaterniones sobre cuerpos locales. La principal referencia será [13]. En las secciones 2.4, 2.5 y 2.5.1 se describe la herramienta principal sobre la cual trabajaremos en esta tesis, el árbol de *Bruhat-Tits* local. En particular, en la sección 2.5.1 se describe la rama de un orden, el cual es un conjunto de órdenes que nos permitirá calcular la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\quad)$. Las referencias principales son [16, §2] y [1]. Finalmente la sección 2.6 describe brevemente el género y la imagen espinorial local relativa, la cual puede ser obtenida por medio de los invariantes. En lo que sigue F denotará un cuerpo de números, llamaremos $K = F_{\mathfrak{p}}$ al completado de F en un lugar no arquimediano \mathfrak{p} y $\mathcal{O}_F, \mathcal{O}_K$ sus anillos de enteros respectivos.

2.1. Álgebras de cuaterniones

Sea F un cuerpo de números y sean $\alpha, \beta \in F^*$. Consideremos un F -espacio vectorial V de dimensión 4 sobre F y una base $\{1, i, j, k\}$ de V , con $ij = k$. Entonces $V = F \cdot 1 + F \cdot i + F \cdot j + F \cdot k$. Definimos una multiplicación sobre los elementos de la base mediante la tabla:

\cdot	$\mathbf{1}$	i	j	k
$\mathbf{1}$	1	i	j	k
i	i	α	k	αj
j	j	$-k$	β	$-\beta i$
k	k	$-\alpha j$	βi	$-\alpha \beta$

Tabla 2.1: Multiplicación de cuaterniones

Por ejemplo, $ij = k = -ji$. Extendemos esta multiplicación por linealidad a una multiplicación sobre V . Identificamos F con $F \cdot 1 \subset V$. Se comprueba que V es un álgebra asociativa con identidad. Diremos que un álgebra construida de esa manera es un **álgebra de cuaterniones** y la denotaremos por el símbolo

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right).$$

Llamaremos a sus elementos *cuaterniones*.

Si $x = a + bi + cj + dk$ es un cuaternión, donde $a, b, c, d \in F$, definimos el conjugado de x como $\bar{x} = a - bi - cj - dk$. Se verifica que $\overline{\overline{xy}} = \overline{yx}$.

Definición 2.1.1. Sea $x \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$. Definimos la norma N y la traza T de x mediante:

$$N(x) = x\bar{x}, \quad T(x) = x + \bar{x}.$$

Si $x = a + bi + cj + dk \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$, entonces un cálculo directo prueba que:

- $N(x) = a^2 - b^2\alpha - c^2\beta + d^2\alpha\beta \in F$.
- $T(x) = 2a \in F$.
- $N(xy) = N(x)N(y)$.
- $T(x+y) = T(x) + T(y)$.

Ejemplo 2.1.1. Considerando las matrices $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, con $u \neq 0$, es fácil ver que

$$X^2 = 1, \quad Y^2 = -1, \quad XY = -YX.$$

Así, como toda álgebra de cuaterniones es simple [13, §63], se tiene que la función $\phi : \left(\frac{1, -1}{F}\right) \rightarrow \mathbb{M}_2(F)$ definida por $\phi(1) = I$, $\phi(i) = X$, $\phi(j) = Y$ y $\phi(k) = XY$, es un isomorfismo de álgebras.

Observación 2.1.1. Si $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right) \cong \mathbb{M}_2(F)$ entonces la norma N corresponde al determinante en $\mathbb{M}_2(F)$. Además, la conjugación viene dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{M}_2(K) &\longrightarrow \mathbb{M}_2(K) \\ A &\longmapsto SA^tS^{-1}, \end{aligned}$$

donde $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, explícitamente

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2.2. Cuerpos locales

Aquí \mathfrak{p} es un lugar en el cuerpo de números F .

- Un *cuerpo local no-arquimediano* K es un cuerpo completo respecto de un valor absoluto discreto $|\cdot|_K$ tal que el cuerpo residual $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ es finito; donde $\mathcal{O}_K = \{a \in K \mid |a|_K \leq 1\}$ es el anillo de enteros del cuerpo K , y $\mathfrak{m}_K = \{a \in K \mid |a|_K < 1\}$ es el único ideal maximal de \mathcal{O}_K .
- Los *cuerpos locales arquimedianos* son: \mathbb{R} y \mathbb{C} .

Un *cuerpo local*, es uno de los cuerpos descritos anteriormente.

Ejemplo 2.2.1. El cuerpo \mathbb{Q}_p de los números p -ádicos es un cuerpo local. Aquí $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ es denotado por \mathbb{Z}_p , su ideal maximal es $p\mathbb{Z}_p$, y el cuerpo residual es $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En esta tesis consideraremos cuerpos locales no-arquimedianos de característica 0 que denotaremos $K = F_{\mathfrak{p}}$. Específicamente estas son extensiones finitas de \mathbb{Q}_p , para p primo.

En un cuerpo local K , el anillo de enteros \mathcal{O}_K es un dominio de ideales principales. Si $\mathfrak{m}_K = (\pi) = \pi\mathcal{O}_K$, decimos que π es un *parámetro uniformizante* en K . Todo $a \in K^*$ se escribe de la forma $a = u\pi^t$, donde $u \in \mathcal{O}_K^*$ y $t \in \mathbb{Z}$. Diremos que $v(a) = t$ es la valuación de a en K . Se define un valor absoluto en K mediante $|a|_K = (1/N\pi)^t$, donde $N\pi$ es el número de elementos del cuerpo residual $\mathfrak{k} = \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$.

Es evidente que el hecho de conocer los cuadrados en el anillo de enteros de un cuerpo local simplifica de sobremanera el estudio de los generadores del álgebra de cuaterniones. El siguiente teorema dice que si un entero en un cuerpo local está suficientemente cerca de 1 con respecto al valor absoluto $|\cdot|_K$, entonces es un cuadrado.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Cuadrados Locales). [13, 63:1] Sea α un entero en un cuerpo local K . Entonces existe un entero β tal que

$$1 + 4\pi\alpha = (1 + 2\pi\beta)^2.$$

Usando el *Teorema de Cuadrados Locales* podemos estudiar qué tan lejos está un elemento en un cuerpo local de ser un cuadrado. En efecto, consideremos un elemento ξ en un cuerpo local K . Entonces ξ tiene al

menos una expresión de la forma $\xi = \eta^2 + \alpha$, con $\eta, \alpha \in K$. Tomando la intersección sobre todas esas posibles escrituras de ξ definimos

$$\mathfrak{d}(\xi) = \bigcap_{\alpha} \alpha \mathcal{O}_K.$$

Con esta definición, $\mathfrak{d}(\xi)$ es un ideal fraccional o 0. Diremos que $\mathfrak{d}(\xi)$ es el **defecto cuadrático** de ξ . Se tienen los siguientes hechos acerca del defecto cuadrático $\mathfrak{d}(\xi)$:

1. $\mathfrak{d}(a^2\xi) = a^2\mathfrak{d}(\xi) \quad \forall a, \xi \in K$.
2. $\mathfrak{d}(\xi) = \xi \mathcal{O}_K$ si $v(\xi)$ es impar, donde $\xi \in \pi^{v(\xi)} \mathcal{O}_K^*$.

Por otra parte, si $v(\xi)$ es par, podemos escribir $\xi = \pi^{2t}\epsilon$ con ϵ una unidad y por lo tanto $\mathfrak{d}(\xi) = \pi^{2t}\mathfrak{d}(\epsilon)$. Así, basta estudiar el defecto cuadrático para el grupo de unidades \mathcal{O}_K^* módulo cuadrados, es decir, para representantes del grupo $\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K^{*2}$.

Usando el Teorema de Cuadrados Locales se pueden probar los siguientes resultados:

1. $\xi \in K^{*2} \Leftrightarrow \mathfrak{d}(\xi) = 0$.
2. Sea Δ una unidad en un cuerpo local K . Si K es no diádico, entonces $\mathfrak{d}(\Delta)$ es 0 u \mathcal{O}_K ; si K es diádico, entonces $\mathfrak{d}(\Delta)$ es uno de los ideales de la cadena finita

$$0 \subset 4\mathcal{O}_K \subset 4\mathfrak{p}^{-1} \subset 4\mathfrak{p}^{-3} \subset \dots \subset \mathfrak{p}^3 \subset \mathfrak{p}.$$

Notar que si K es diádico, entonces 4 tiene valuación $v(4) = t + 1$ par y la cadena de ideales llega hasta que $4\mathfrak{p}^{-t} = \mathfrak{p}$, con t entero positivo impar, es decir, cuando $v(4) - v(\pi)t = v(4) - t = 1$. Por ejemplo, si K es un cuerpo local diádico, con parámetro uniformizante π , tal que $|2|_{\mathfrak{p}} = |\pi|_{\mathfrak{p}}^e$, con $e \geq 3$, de donde $v(4) = 2e$, entonces se tiene que $4\mathfrak{p}^{-3} \subseteq \mathfrak{p}^3$ y el defecto cuadrático de una unidad Δ , $\mathfrak{d}(\Delta)$ es uno de los ideales:

$$0 \subset 4\mathcal{O}_K \subset 4\mathfrak{p}^{-1} \subset 4\mathfrak{p}^{-3} \subset \dots \subset 4\mathfrak{p}^{-2e+1},$$

o lo que es lo mismo

$$0 \subset \mathfrak{p}^{2e} \subset \mathfrak{p}^{2e-1} \subset \mathfrak{p}^{2e-3} \subset \dots \subset \mathfrak{p}.$$

De otro modo, si $e < 3$ la cadena es más corta. De hecho, si $e = 2$, entonces $4\mathfrak{p}^{-3} = \mathfrak{p}$. Si $e = 1$, entonces $0 \subset 4\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{p}$.

Considerando el resultado anterior, si $\mathfrak{d}(\xi) = 4\mathcal{O}_K$ diremos que ξ es una unidad de *defecto cuadrático minimal* en K .

Ejemplo 2.2.2. $-3 = -7 + 4$ es una unidad de defecto cuadrático minimal en \mathbb{Q}_2 .

Se puede probar que una unidad Δ tiene defecto cuadrático minimal si y sólo si la extensión $K(\sqrt{\Delta})/K$ es cuadrática no ramificada [13, 63:3]. De este hecho se deduce que siempre existen unidades de defecto cuadrático minimal, y que dos de ellas siempre están en la misma clase de cuadrados [13, 63:4].

2.3. Símbolo de Hilbert

Para un lugar \mathfrak{p} en el cuerpo de números F y $\alpha, \beta \in K^*$, se define el **símbolo de Hilbert** mediante:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \text{ tiene solución } x, y \in K. \\ -1 & , \text{ si no.} \end{cases}$$

Observación 2.3.1. De [13, 63:10] obtenemos que, si $F = K(\sqrt{\beta})$, entonces

$$\alpha \in N_{E/K}E^* \text{ si y sólo si } \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Observación 2.3.2. Usando la observación anterior y los resultados en [13, §63A], obtenemos la siguiente definición alternativa del símbolo de Hilbert:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K). \\ -1 & , \text{ si no.} \end{cases}$$

2.4. Órdenes y Reticulados

Definición 2.4.1. Sea V un F -espacio vectorial de dimensión n sobre F . Diremos que $\Lambda \subset V$ es un *reticulado* en V , si Λ es un \mathcal{O}_F -módulo tal que existe una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V con

$$\Lambda \subset \mathcal{O}_F x_1 + \dots + \mathcal{O}_F x_n.$$

Si un reticulado Λ satisface $F\Lambda = V$ diremos que Λ es un *reticulado sobre V* . Un reticulado es *libre* si lo es como \mathcal{O}_F -módulo.

Ejemplo 2.4.1. $\mathcal{O}_F x_1 + \dots + \mathcal{O}_F x_n$ es un reticulado libre sobre V .

Observación 2.4.1. Todo reticulado sobre el cuerpo local $K = F_{\mathfrak{p}}$ es libre.

Definición 2.4.2. Sea \mathfrak{A} una F -álgebra. Diremos que $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$ es un *orden* si \mathfrak{D} es un reticulado en \mathfrak{A} tal que $1 \in \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$. Es decir, un orden es un reticulado que a su vez es un subanillo. Un orden es maximal si lo es respecto a la contención de conjuntos.

Ejemplo 2.4.2. $M_2(\mathcal{O}_F)$ es un orden maximal en la F -álgebra $M_2(F)$.

2.5. Árbol de Bruhat-Tits local para $M_2(K)$

Sean F un cuerpo de números, $K = F_{\mathfrak{p}}$ y un álgebra \mathfrak{A} de cuaterniones sobre F , a saber, $\mathfrak{A} \cong \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$.

Definición 2.5.1. Para cada lugar \mathfrak{p} en F , definimos el álgebra de cuaterniones local $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ como:

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} := \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) = \mathfrak{A} \otimes_F K.$$

Para efectos de esta tesis suponemos que el álgebra local $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ es descompuesta, es decir, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)$ es isomorfa al álgebra de matrices $M_2(K)$. Nótese que un orden de Eichler es trivial (maximal) en los lugares ramificados para \mathfrak{A} (ver Observación 2.5.4).

Sea L un reticulado en V de rango 2. Identificamos V con K^2 . Sea $\lambda \in K^*$. Entonces λL es también un reticulado de V . Se sigue que el grupo K^* actúa en el conjunto de reticulados. Llamamos a la órbita de L bajo esta acción su *clase*, la que denotamos por $[L]$. Dos reticulados en la misma clase se dicen *equivalentes*. Llamaremos \mathfrak{T} al conjunto de clases.

Sean L y L' dos \mathcal{O}_K -reticulados de rango 2 en K^2 . Por el teorema de factores invariantes existe una \mathcal{O}_K -base $\{e_1, e_2\}$ de L y enteros a, b tales que $\{\epsilon_1 \pi^a, \epsilon_2 \pi^b\}$ es una \mathcal{O}_K -base para L' . El conjunto $\{a, b\}$ no depende de la elección de las bases para L, L' . De este modo, se tiene $L' \subset L$ si y sólo si $a, b \geq 0$, en cuyo caso L/L' es isomorfo a $(\mathcal{O}_K/\pi^a \mathcal{O}_K) \oplus (\mathcal{O}_K/\pi^b \mathcal{O}_K)$.

Reemplazar L y L' por xL e yL' (con $x, y \in K^*$) cambia el conjunto $\{a, b\}$ por $\{a+c, b+c\}$, donde $c = \nu(y/x)$. El entero $|a-b|$ depende sólo de las clases $[L]$ y $[L']$ de L y L' . Supongamos que $L' \subseteq L$ y $L' \not\subseteq \pi L$. Se define la distancia $\delta([L], [L'])$ entre $[L]$ y $[L']$ como:

$$\delta([L], [L']) = n, \text{ donde } L/L' \cong \mathcal{O}_K/\pi^n \mathcal{O}_K.$$

Más generalmente, $\delta([L], [L']) = |a-b|$. Sin cambiar las clases de L y L' se puede asumir que $\min\{a, b\} = 0$. En particular, $\delta([L], [L']) = 0 \Leftrightarrow [L] = [L']$.

Dos reticulados L, L' se dicen *vecinos* si $\delta([L], [L']) = 1$.

Definición 2.5.2. Utilizando la noción anterior se define una estructura de grafo en \mathfrak{T} como sigue: Dos reticulados Λ, Λ' están unidos por una arista si y sólo si son vecinos. Se sigue de [16, cap. 2 §1] que \mathfrak{T} , con esta estructura de grafo, es un árbol.

Observación 2.5.1. Sea el reticulado $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$. Cada vecino de $[\Lambda]$ tiene la forma $[\Lambda']$, donde $\Lambda' = \pi \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix} + \mathcal{O}_K \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donde α y β no están ambos en $\pi\mathcal{O}_K$. Se concluye que los vecinos de $[\Lambda]$ están en correspondencia con los subespacios de dimensión 1 en $(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^2$. Si suponemos que $|\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K| = q$, entonces hay $q+1$ subespacios de dimensión 1, que en el grafo corresponden a $q+1$ vecinos de $[\Lambda]$, es decir, $q+1$ vértices unidos por aristas al vértice correspondiente a $[\Lambda]$. En conclusión, el árbol \mathfrak{T} depende sólo de la cardinalidad del cuerpo residual.

Observación 2.5.2. Para cada orden maximal $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ existe un reticulado $L \subseteq K^2$, tal que $\mathfrak{D} = \text{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$. Esto induce una biyección entre órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$ y las clases $[L]$ de reticulados L en \mathfrak{T} . [16, Ch.II, §1.3].

Definición 2.5.3. El árbol de *Bruhat-Tits* para $\mathbb{M}_2(K)$ es el grafo cuyos vértices son los órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$, donde dos de ellos están unidos por una arista si las correspondientes clases de reticulados son vecinos, es decir, están a distancia 1. El árbol de *Bruhat-Tits* es efectivamente un árbol por Obs. 2.5.2. y por abuso de lenguaje diremos que \mathfrak{T} es el árbol de *Bruhat-Tits* para $\mathbb{M}_2(K)$.

Observación 2.5.3. Dos órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' están unidos por una arista si bajo conjugación se tiene

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \pi\mathcal{O}_K \\ \pi^{-1}\mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}.$$

Aquí los órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' corresponden a las clases $[\Lambda]$ y $[\Lambda']$ respectivamente, donde $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$ y

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \pi\mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.5.1. Sea $\mathbb{k} = \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ y supongamos que $|\mathbb{k}| = 2$. En particular, esto ocurre, por ejemplo, cuando $K = \mathbb{Q}_2$. Entonces el árbol de *Bruhat-Tits* para $\mathbb{M}_2(K)$ tiene la forma siguiente:

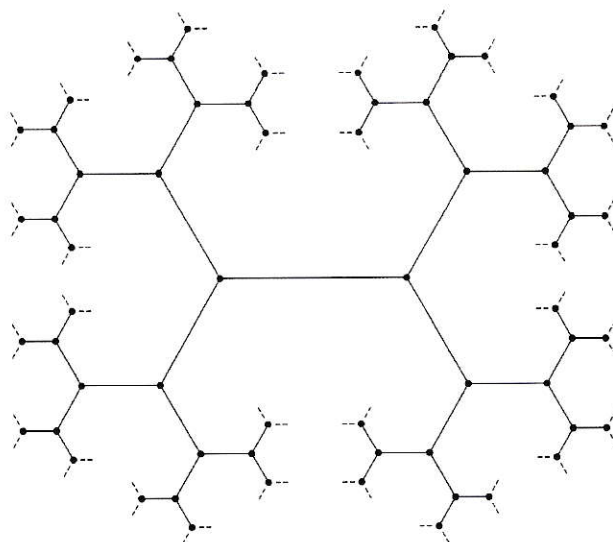


Figura 2.1: Árbol de Bruhat-Tits para un cuerpo local cuyo cuerpo residual tiene 2 elementos.

Observación 2.5.4. Supongamos que el álgebra \mathfrak{A} localmente es un álgebra de división $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = D$, entonces D tiene un único orden maximal. Se sigue que localmente el árbol de *Bruhat-Tits* para D es un punto, correspondiente al único orden maximal. Por esta razón, sólo consideramos aquellos lugares donde \mathfrak{A} es descompuesta.

2.5.1. Ramas

Sea $\mathfrak{h} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ un orden. Consideremos \mathfrak{T} el árbol de *Bruhat-Tits* para $\mathbb{M}_2(K)$ y sea $V(\mathfrak{T})$ el conjunto de vértices en \mathfrak{T} , es decir, órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$.

Definición 2.5.4. Para cada entero $t \geq 0$, se define el orden “contraído”¹:

$$\mathfrak{h}^{[t]} := \mathcal{O}_K + \pi^t \mathfrak{h}.$$

Definición 2.5.5. Para cada entero $r \geq 0$, la r -rama de \mathfrak{h} es el conjunto:

$$S_r(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{D} \in V(\mathfrak{T}) \mid \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}\}.$$

En particular, $S_0(\mathfrak{h})$ consiste de los órdenes maximales que contienen a \mathfrak{h} .

¹ \mathcal{O}_K se incrusta diagonalmente en $\mathbb{M}_2(K)$, es decir, $\mathcal{O}_K \cdot \mathbb{I} \subset \mathbb{M}_2(K)$.



Observación 2.5.5. Notar que $S_r(\mathfrak{H}) \subseteq V(\mathfrak{T})$, es decir, $S_r(\mathfrak{H})$ es un conjunto de vértices del árbol de *Bruhat-Tits*. Se sigue de [1, §2] que $S_r(\mathfrak{H})$ es conexo y $S_0(\mathfrak{H})$ es no vacía.

Proposición 2.5.1. [1, Prop 2.4] Para cada orden \mathfrak{H} y entero $t \geq 0$, la rama $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$ contiene exactamente a los órdenes a distancia $\leq t$ de algún orden maximal en $S_0(\mathfrak{H})$.

Lema 2.5.1. [1, Lem 2.1] Para cada orden maximal $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$, el orden contraído $\mathfrak{D}^{[t]}$ es la intersección de todos los órdenes maximales de $\mathbb{M}_2(K)$ a distancia a lo más t de \mathfrak{D} .

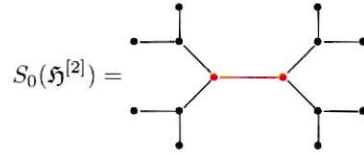
Definición 2.5.6. Un orden maximal $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que todo orden maximal a distancia a lo más t de \mathfrak{D} está en $S_0(\mathfrak{H})$ se dice *t-profundo* en $S_0(\mathfrak{H})$. Equivalentemente, \mathfrak{D} es *t-profundo* en $S_0(\mathfrak{H})$ si y sólo si²

$$B[\mathfrak{D}; t] := \{\mathcal{O} \in V(\mathfrak{T}) / \delta(\mathfrak{D}, \mathcal{O}) \leq t\} \subseteq S_0(\mathfrak{H}).$$

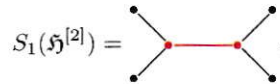
Corolario 2.5.1.1. $S_r(\mathfrak{H})$ es el conjunto de órdenes maximales *r-profundos* en $S_0(\mathfrak{H})$.

Se concluye que para calcular $S_r(\mathfrak{H}^{[t]})$, basta con calcular $S_0(\mathfrak{H})$.

Ejemplo 2.5.2. Se quiere calcular $S_1(\mathfrak{H}^{[2]})$. Supongamos que $|\mathbb{k}| = 2$ y $S_0(\mathfrak{H}) = \bullet \text{---} \bullet$. Entonces



Luego,



2.6. Género e imagen espinorial local relativa

Sea \mathfrak{A} un álgebra sobre un cuerpo de números F , \mathcal{O}_F su anillo de enteros y $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{A}$ un orden de rango maximal.

Definición 2.6.1. Definimos el orden local $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ como:

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} := \begin{cases} \mathcal{O} \otimes_F \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}} & , \text{ si } \mathfrak{p} \text{ es no arquimediano.} \\ \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} & , \text{ si } \mathfrak{p} \text{ es arquimediano.} \end{cases}$$

² $\delta(\mathfrak{D}, \mathcal{O}) := \delta([L], [L'])$, donde $[L]$ y $[L']$ son las respectivas clases de reticulados correspondientes a \mathfrak{D} y \mathcal{O} .

Definición 2.6.2. Definimos el género de \mathcal{O} como el conjunto³:

$$\text{gen}(\mathcal{O}) := \{\mathcal{O}' \text{ orden en } \mathfrak{A} \mid \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} \ \forall \mathfrak{p} \text{ lugar no arquimediano en } F\}.$$

Observación 2.6.1. Supongamos que $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{M}_2(K)$. Nótese que, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$, es equivalente a que exista $a_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{M}_2(K)^*$, tal que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} a_{\mathfrak{p}}^{-1}$. De hecho, se tiene que para casi todo \mathfrak{p} , $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$.

Definición 2.6.3. Sea $\Pi(F)$ el conjunto de lugares (arquimedianos o no) de F . Se definen los siguientes conjuntos que simplifican la notación:

1. *Adeles de F* : Diremos que un elemento $a = (a_{\mathfrak{p}}) \in \prod_{\mathfrak{p} \in \Pi(F)} F_{\mathfrak{p}}$ es un *adele* si $a_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ para casi todo \mathfrak{p} . El conjunto de adeles forma un anillo, respecto de la suma y producto por coordenadas, denotado \mathbb{A}_F .
2. *Grupo de ideles de F* : Llamaremos *grupo de ideles* de F al grupo de elementos invertibles del anillo de adeles de F , es decir, $J_F := \mathbb{A}_F^*$. En otras palabras, un idcle a está definido en términos de sus \mathfrak{p} -coordenadas $a_{\mathfrak{p}}$, satisfaciendo las condiciones:

$$\text{i) } |a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} \neq 0, \quad \text{para todo } \mathfrak{p} \text{ en } \Pi(F).$$

$$\text{ii) } |a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1, \quad \text{para casi todo } \mathfrak{p} \text{ en } \Pi(F).$$

3. *Adelización*: Sea el orden \mathcal{O} de rango maximal y el álgebra \mathfrak{A} como antes. Se define $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}$, la adelización de \mathfrak{A} , como sigue:

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{A}} := \mathfrak{A} \otimes_F \mathbb{A}_F \cong \{(a_{\mathfrak{p}}) \mid a_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} \ \forall \mathfrak{p}, \ a_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \text{ para casi todo } \mathfrak{p}\}.$$

Análogamente, se puede definir la *adelización* del orden $\mathcal{O} \subset \mathfrak{A}$ como:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}} := \prod_{\mathfrak{p} \in \Pi(F)} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}.$$

Definición 2.6.4. Sea $a \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^*$ un elemento adélico y $\mathcal{O} \subset \mathfrak{A}$ un orden de rango maximal. Definimos

$$\mathcal{O} = a \mathcal{O}' a^{-1} \quad \iff \quad \mathcal{O}_{\mathbb{A}} = a \mathcal{O}'_{\mathbb{A}} a^{-1}.$$

Observación 2.6.2. Podemos concluir por la observación 2.6.1 y la definición 2.6.4, que $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^*$ actúa en el conjunto de órdenes de rango maximal por conjugación, ya que es sabido que todo conjugado del anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ es de este tipo.[18, Ch.V]

³Aquí $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}}$, significa que existe un elemento $a \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^*$, tal que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = a \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}} a^{-1}$.

Sea $\mathcal{N}(\mathcal{O}) = \{a \in \mathfrak{A}_\mathbb{A}^* \mid a\mathcal{O}a^{-1} = \mathcal{O}\}$ el estabilizador de \mathcal{O} en $\mathfrak{A}_\mathbb{A}^*$. Así, $gen(\mathcal{O})$ es la órbita $\mathfrak{A}_\mathbb{A}^* \cdot \mathcal{O}$, luego los órdenes en $gen(\mathcal{O})$ están en correspondencia con $\mathfrak{A}_\mathbb{A}^*/\mathcal{N}(\mathcal{O})$ y las clases de conjugación (globales) contenidas en $gen(\mathcal{O})$ con $\mathfrak{A}^* \setminus \mathfrak{A}_\mathbb{A}^*/\mathcal{N}(\mathcal{O})$. Esto es, existe la biyección:

$$\{\text{órdenes } \mathcal{O}' \text{ en } gen(\mathcal{O})\} / \text{módulo conjugación} \quad \longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}^* \setminus \mathfrak{A}_\mathbb{A}^*/\mathcal{N}(\mathcal{O}), \quad (2.1)$$

definida como sigue: A cada clase de órdenes $\bar{\mathcal{O}}'$, con \mathcal{O}' en $gen(\mathcal{O})$, se le asocia el elemento $\bar{a} \in \mathfrak{A}^* \setminus \mathfrak{A}_\mathbb{A}^*/\mathcal{N}(\mathcal{O})$, representado por $a \in \mathfrak{A}_\mathbb{A}^*$, tal que $a\mathcal{O}a^{-1} = \mathcal{O}'$.

Por otra parte, la norma reducida N puede ser extendida a una función $N_\mathbb{A} : \mathfrak{A}_\mathbb{A}^* \rightarrow J_F$ [3], la cual induce una función:

$$\bar{N}_\mathbb{A} : \mathfrak{A}^* \setminus \mathfrak{A}_\mathbb{A}^*/\mathcal{N}(\mathcal{O}) \rightarrow N(\mathfrak{A}^*) \setminus N_\mathbb{A}(\mathfrak{A}_\mathbb{A}^*)/H(\mathcal{O}) \cong N_\mathbb{A}(\mathfrak{A}_\mathbb{A}^*)/N(\mathfrak{A}^*)H(\mathcal{O}), \quad (2.2)$$

donde $H(\mathcal{O}) := N_\mathbb{A}(\mathcal{N}(\mathcal{O}))$.

Definición 2.6.5. Sea \mathcal{O}' en $gen(\mathcal{O})$. Definimos el género espinorial $spin(\mathcal{O}')$ en $gen(\mathcal{O})$ como el conjunto de órdenes que tienen la misma imagen que \mathcal{O}' bajo la correspondencia (2.2).

Conocer $H(\mathcal{O})$ proporciona información sobre el grupo abeliano $N_\mathbb{A}(\mathfrak{A}_\mathbb{A}^*)/N(\mathfrak{A}^*)H(\mathcal{O})$ y por la correspondencia (2.2) permite conocer los géneros espinoriales $spin(\mathcal{O}')$ en el género de \mathcal{O} .

Observación 2.6.3. Se sabe que $J_F/H(\mathcal{O})F^* \cong N_\mathbb{A}(\mathfrak{A}_\mathbb{A}^*)/N(\mathfrak{A}^*)H(\mathcal{O})$. (Ver demostración en [3, §2]).

Definición 2.6.6. Sean $\mathfrak{h}, \mathfrak{D}$ órdenes en $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$, tales que $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$. Definimos el conjunto:

$$H_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) := \{N(a) \in K^* \mid a^{-1}\mathfrak{h}a \subseteq \mathfrak{D}, \text{ con } a \in \mathfrak{A}_\mathfrak{p}^*\}.$$

Llamaremos a $H_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h})$ *imagen espinorial local relativa*.

Para órdenes globales \mathfrak{h} y \mathcal{O} , con \mathcal{O} de rango maximal, la *imagen espinorial relativa* (global), se define por:

$$H(\mathcal{O}|\mathfrak{h}) := \left[\prod_{\mathfrak{p} \in \Pi(F)} H_\mathfrak{p}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}|\mathfrak{h}_\mathfrak{p}) \right] \cap J_F.$$

Recordar que los órdenes locales $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ se definen como $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ en los lugares arquimedianos.

Proposición 2.6.1. [3] Sea $\mathcal{O}' \in gen(\mathcal{O})$, entonces \mathfrak{h} está contenido en algún orden en $spin(\mathcal{O}')$ si y sólo si

$$\mathcal{O}' = a\mathcal{O}a^{-1} \quad \text{con } N_\mathbb{A}(a) \in H(\mathcal{O}|\mathfrak{h})F^*.$$

Definición 2.6.7. Sea L/F una extensión finita. Se define

$$H_L := N_{L/F}(J_L)F^* \subseteq J_F.$$

Se tienen los siguientes hechos [11, pág. 20]:

- 1) Si L' es la mayor extensión abeliana sobre F contenida en L , entonces $H_L = H_{L'}$.
- 2) $J_F/H_{L'} \cong \text{Gal}(L'/F)$.
- 3) La correspondencia $L' \mapsto H_{L'}$ da una biyección entre extensiones abelianas finitas de F y subgrupos de J_F de índice finito que contienen a F^* .

El cuerpo de clase espinorial Σ es la extensión abeliana Σ/F tal que $H_\Sigma = H(\mathcal{O})F^*$ y $\text{Gal}(\Sigma/F) \cong J_F/H(\mathcal{O})F^*$ [3].

Observación 2.6.4. Nótese que $\frac{H(\mathcal{O}|\mathfrak{h})F^*}{H(\mathcal{O})F^*} \subseteq \frac{J_F}{H(\mathcal{O})F^*} \cong \text{Gal}(\Sigma/F)$, donde Σ es el cuerpo de clase espinorial.

Definición 2.6.8. Si $\frac{H(\mathcal{O}|\mathfrak{h})F^*}{H(\mathcal{O})F^*}$ es un subgrupo de $\frac{J_F}{H(\mathcal{O})F^*}$, entonces corresponde a una extensión E de F , con $F \subseteq E \subseteq \Sigma$. Este cuerpo se llama el *cuerpo de representación* $E = E(\mathcal{O}|\mathfrak{h})$.

Capítulo 3

K no diádico

En este capítulo siempre consideraremos un lugar no arquimediano \mathfrak{p} de F , el cuerpo local no diádico $K = F_{\mathfrak{p}}$, el álgebra de cuaterniones $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$, el cuerpo residual \mathbb{k} de K y un orden cíclico $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, donde i, j satisfacen $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ y $ij = -ji$. Se busca describir las 0 -ramas para \mathfrak{H} y posteriormente para una variante del orden \mathfrak{H} a partir de las ramas ya conocidas.

Para efectos de ejemplificar de mejor manera las posiciones relativas de las ramas y como intersectan, graficamos cada rama denotándolas con color plomo y en negro la intersección resultante, es decir, la 0 -rama del orden \mathfrak{H} .

3.1. α, β libres de cuadrados

Notemos que $\mathcal{O}_K[i] \subseteq K(i) \cong \frac{K[x]}{(x^2 - \alpha)}$, y que j tiene la propiedad análoga. Para describir $S_0(\mathfrak{H})$ (ver §2.5.1) es necesario conocer el tipo de extensión $K(i)/K$ y para eso es imprescindible conocer α y β módulo cuadrados, es decir, en que clase del grupo K^*/K^{*2} están. En este capítulo, como K es no diádico, el grupo de clases de cuadrados es $K^*/K^{*2} = \{\bar{1}, \bar{\pi}, \bar{\Delta}, \bar{\Delta\pi}\}$, por [13, §63:2] y [13, §63:4], donde Δ es una unidad no cuadrado en K .

Por hipótesis, se debe cumplir que $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Las tablas 3.1 describen las posibles alternativas para α y β , donde posteriormente, sólo consideraremos los casos que cumplen $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Recuérdese que esto equivale a que el álgebra de cuaterniones es descompuesta, es decir, isomorfa a un álgebra de matrices.

$-1 \in K^{*2}$				
$\left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}}\right)$	1	Δ	π	$\Delta\pi$
1	1	1	1	1
Δ	1	1	-1	-1
π	1	-1	1	-1
$\Delta\pi$	1	-1	-1	1

$-1 \notin K^{*2}$				
$\left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}}\right)$	1	Δ	π	$\Delta\pi$
1	1	1	1	1
Δ	1	1	-1	-1
π	1	-1	-1	1
$\Delta\pi$	1	-1	1	-1

Tabla 3.1: Cálculos de símbolo de Hilbert para clases de cuadrados en K (ver apéndice).

Observación 3.1.1. Podemos suponer que ninguna potencia par de π divide a α ni a β , ya que si $\alpha = \pi^{2k}u$, con $\pi^2 \nmid u$, se tiene $\mathcal{O}_K[i] \subseteq \mathcal{O}_K[i_0]$, donde $i_0^2 = u$, e i_0 genera el orden maximal de $K(i)$. Se sigue que, $\mathcal{O}_K[i] = \mathcal{O}_K[\pi^k i_0] = \mathcal{O}_K[i_0]^{[k]}$. Esto sigue de las propiedades del orden contraído en [1, §2]. Así, $S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[i_0]^{[k]})$. Se sigue de [1, Prop. 2.4] que $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ puede calcularse a partir de $\mathcal{O}_K[i_0]$ y de k (análogamente con β). Hay que tener en cuenta que las posiciones relativas de las 0-ramas para α y β también son de importancia para la descripción de la 0-rama de \mathfrak{h} . En conclusión, podemos suponer que π^2 no divide a α ni a β . En este contexto, tenemos los siguientes casos:

- **Caso 1.** (Tomado del ejemplo 2 en [1, §4]): α, β pertenecen a \mathcal{O}_K^{*2} . Podemos suponer que $\alpha = \beta = 1$. Así

$$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[i] \subseteq K(i) = L \cong K \times K.$$

Para j se tiene la propiedad análoga. Luego por [1, Prop. 4.1], $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ son caminos maximales en el árbol, esto es:

$$\begin{array}{l} S_0(\mathcal{O}_K[i]) = \cdots \bullet \xrightarrow{S_0(\mathcal{O}_K[i])} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \cdots \\ S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \cdots \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \xrightarrow{S_0(\mathcal{O}_K[j])} \circ \cdots \end{array}$$

Se sigue de [1, §4, Ex.] que $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[i, j]$ es maximal. Concluimos que los caminos $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ se intersecan en un único punto $\mathfrak{D} = \mathfrak{h}$. Por lo tanto, la posición relativa de las ramas es como indica la siguiente figura:

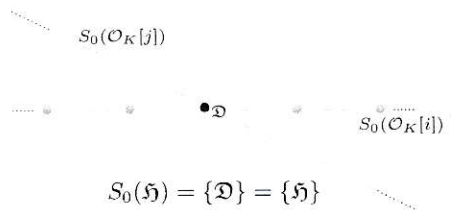


Figura 3.1: Intersección de 0-ramas $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$.

- **Caso 2.** $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}$ y $\beta \notin K^{*2}$. Se prueba como en el **Caso 1** que $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ es un camino maximal en el árbol. Para β notamos que: $L \cong \frac{K[x]}{(x^2 - \beta)}$ es cuerpo. Como L/K es una extensión cuadrática y $e(L/K)f(L/K) = [L : K]$, tenemos los casos siguientes:

- i) L/K es no ramificada. Podemos suponer que $\beta \in \Delta K^{*2}$, de modo que $L \cong K(\sqrt{\Delta})$ (por [13, §63:3] y [13, §63:4]). Luego por [1, Prop. 4.1] tenemos que $S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \{\bullet_{\mathfrak{D}}\}$ es un punto. Se sigue de [1, Prop.2.4] que $S_0(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Se concluye que $S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i])$, y por lo tanto,

$$S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[i]) \cap S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \{\bullet_{\mathfrak{D}}\}.$$

- ii) L/K es ramificada. Entonces $\beta \in \pi K^{*2} \cup (\Delta\pi)K^{*2}$, es decir, β tiene valuación impar en K .

Así, por [1, §4, Prop. 4.1] $S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \bullet \text{ --- } \bullet$, y la 0-rama $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ es como en el **Caso 1**.

Observación 3.1.2. [1, §3] Para determinar la intersección, y por lo tanto la posición relativa de las ramas, utilizamos la descripción del álgebra residual $\mathbb{H} = \mathfrak{H}/\pi\mathfrak{H}$ definida en [2, §3]. Específicamente, en el caso cuaterniónico las representaciones irreducibles de \mathbb{H} tienen dimensión 1 o 2, en este último caso la representación es única. Si la dimensión de alguna representación es 1, entonces \mathfrak{H} está contenido en más de un orden maximal. Por otra parte, si la dimensión es 2 entonces \mathfrak{H} está contenido en un único orden maximal. En concreto, se debe conocer la dimensión de las representaciones irreducibles de \mathbb{H} .

Recordemos que el álgebra $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$ y que tanto i como j son cuaterniones puros, es decir, de trazas $T(i) = T(j) = 0$, por lo que podemos identificar i y j con elementos de $\mathbb{M}_2(K)$ que bajo conjugación son:

$$i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} -b & c \\ d & b \end{pmatrix},$$

con $\alpha, b, c, d \in K$. Considerando que $ij = -ji$ y $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & c \\ d & b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -b & c \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha d & b\alpha \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & b\alpha \\ -b & -\alpha d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $c = -\alpha d$. Así, $j = \begin{pmatrix} -b & -\alpha d \\ d & b \end{pmatrix} \Rightarrow j^2 = b^2 - \alpha d^2 = \beta$.

Observación 3.1.3. Afirmamos que la identificación puede escogerse de modo que i y j tengan coeficientes enteros. En caso contrario, sin pérdida de generalidad, asumimos que $i \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_K)^*$, $b \notin \mathcal{O}_K$ o $d \notin \mathcal{O}_K$. Primero notemos que

$$b^2 - \alpha d^2 = b^2 - \lambda^2 d^2 = (b + \lambda d)(b - \lambda d) = N_{L/K}(b + id) = \beta \in \mathcal{O}_K,$$

donde $L = K(i) \cong K \times K$. Como $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}$ y $\pi^2 \nmid \alpha$, entonces $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}$, además $\text{ord}(\beta)$ es impar. Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{O}_K^*$ tales que $\alpha = \lambda^2$ y $\beta = \pi\mu$. Por el Teorema de cuadrados locales (ver Tco. 2.2.1) existe $\delta \in \mathcal{O}_K^*$ tal que

$$1 + \beta = 1 + \pi\mu = (1 + \pi\delta)^2.$$

Luego existe un elemento $b' + id' \in \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[i]$, tal que $b'^2 - \lambda^2 d'^2 = \beta$, a saber, tomando $b' = \sqrt{1 + \beta}$ y $d' = \lambda^{-1}$.

Se concluye por los comentarios precedentes que siempre existe una elección de i y j con coeficientes enteros. Se sigue del Teorema de *Skolem - Noether* que todas las elecciones para i y j que cumplen las relaciones para ser generadores del álgebra determinan órdenes conjugados.

Sea $\mathbb{H} = \mathfrak{H}/\pi\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]/\pi\mathcal{O}_K[i, j] \cong \left(\frac{\mathcal{O}_K}{\pi\mathcal{O}_K}\right)[\bar{i}, \bar{j}] = \mathbb{k}[\bar{i}, \bar{j}]$ como en [2, §3], donde \bar{i}, \bar{j} son las imágenes de i, j en $\mathbb{M}_2(\mathbb{k})$ y \mathbb{k} es el cuerpo residual de K . Obtenemos:

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{\alpha} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \bar{j} = \begin{pmatrix} -\bar{b} & -\bar{\alpha d} \\ \bar{d} & \bar{b} \end{pmatrix}.$$

Notamos que estos generadores determinan el álgebra \mathbb{H} . Ahora bien, \bar{i} y \bar{j} actúan en \mathbb{k}^2 , por lo que podemos buscar subespacios de \mathbb{k}^2 invariantes bajo la acción de los generadores. Esto es, buscamos vectores propios de las matrices asociadas a \bar{i} y \bar{j} .

Para \bar{i} tenemos,

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & \bar{\alpha} \\ \bar{1} & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \bar{0} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\bar{\alpha}}.$$

Notemos que α es el cuadrado de una unidad, a saber: $\alpha = \omega^2$. Así, $\lambda = \pm\sqrt{\alpha} = \pm\bar{\omega}$. De aquí se obtienen dos vectores propios diferentes ya que $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \bar{\omega} & \bar{1} \end{pmatrix}^T \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} -\bar{\omega} & \bar{1} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{k}^2.$$

Análogamente, para \bar{j} tenemos,

$$\left| \begin{pmatrix} -\bar{b} - \lambda & -\bar{\alpha}\bar{d} \\ \bar{d} & \bar{b} - \lambda \end{pmatrix} \right| = \bar{0} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{\alpha}\bar{d}^2} = \pm\sqrt{\bar{\beta}} = \bar{0}.$$

Notar que como $\beta \notin K^{*2}$ y $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$, entonces $\bar{d} \neq 0$. De lo anterior se obtiene sólo un vector propio, a saber,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{b}}{\bar{d}} & \bar{1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\bar{\omega} & \bar{1} \end{pmatrix}^T.$$

Esto significa que la matriz asociada a \bar{j} tiene un subespacio invariante de dimensión 1, el cual también es invariante bajo la acción de la matriz \bar{i} . Por lo tanto, \mathbb{H} tiene una (no necesariamente única) representación irreducible de dimensión 1. Concluimos que \mathfrak{H} está contenido en más de un orden maximal. Por lo que $S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y por lo tanto $S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[j])$. Las figuras 3.2 y 3.3 muestran la posición relativa de las 0-rama:

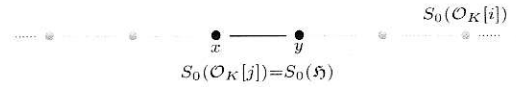


Figura 3.2:

Se sigue de [1, §3], [2, §3] y [2, Lema 3.1] que

$$S_0(\mathfrak{H}) = \underset{x}{\bullet} \text{ --- } \underset{y}{\bullet}.$$

Figura 3.3:

- **Caso 3.** α y β son no cuadrados. Necesitamos ver dos casos, teniendo en cuenta que por hipótesis tenemos $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) = 1$. Usando la Tabla 3.1 tenemos:

a) Sí -1 es un cuadrado en K , entonces α y β pueden ser los siguientes (módulo cuadrados):

a1) $\alpha = \beta = \pi$.

a2) $\alpha = \beta = \Delta\pi$.

a3) $\alpha = \beta = \Delta$.

b) Sí -1 no es un cuadrado en K , i.e $-1 \in \Delta K^{*2}$, entonces α y β pueden ser los siguientes (módulo cuadrados):

b1) $\alpha = \pi$ y $\beta = \Delta\pi$. (al revés, $\alpha = \Delta\pi$ y $\beta = \pi$ es el mismo caso).

b2) $\alpha = \beta = \Delta$.

Primero observemos que en los **Casos (b2), (a3)** $K(i)/K$ y $K(j)/K$ son extensiones no ramificadas, de lo cual, se obtiene por [1, Prop. 4.1] que:

$$S_0(\mathcal{O}_K[i]) = \{\bullet\}, S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \{\bullet\},$$

luego, $S_0(\mathfrak{f})$ es un punto. Notemos que para los casos que restan, las extensiones cuadráticas asociadas a α y β son ramificadas, por lo que se puede resumir en un sólo caso: α y β tienen orden impar. Se desprende, a priori, que:

$$\begin{aligned} S_0(\mathcal{O}_K[i]) &= \bullet \text{-----} \bullet \\ S_0(\mathcal{O}_K[j]) &= \circ \text{-----} \circ \end{aligned}$$

Análogamente a lo anterior, resolvemos para el **Caso 3**, donde las extensiones cuadráticas que contienen tanto a i como a j son ramificadas, con $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$. Luego, después de conjugar,

$$i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} -b & -\alpha d \\ d & b \end{pmatrix},$$

de donde se tiene que $j^2 = b^2 - \alpha d^2 = \beta$ y

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \bar{j} = \begin{pmatrix} -\bar{0} & \bar{0} \\ \bar{d} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

Notemos que las ecuaciones para b y d tienen solución entera ya que $K(i)$ es cuerpo e $\bar{i}^2, \bar{j}^2 = \bar{0}$, lo que implica que sus valores propios son $\bar{0}$.

Veamos a continuación, los espacios invariantes (generados por los vectores propios) bajo la acción tanto de \bar{i}, \bar{j} :

Para \bar{i} tenemos la ecuación para el vector propio:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

Así, el vector propio asociado, es $v = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}^T$. Análogamente, con \bar{j} encontramos el vector propio $u = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}^T$ ya que $\bar{b} = \bar{0}$. De estos cálculos se desprende que tanto \bar{i} como \bar{j} tienen el subespacio invariante $\langle v \rangle$, esto dice que \mathbb{H} tiene representación irreducible de dimensión 1. Se sigue de [1, §3], [2, §3] y [2, Lema 3.1] que \mathfrak{H} está contenido en más de un orden maximal, por lo tanto,

$$S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{H}) = \bullet \text{---} \bullet.$$

En resumen, la siguiente tabla describe las posibles intersecciones de $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y $S_0(\mathcal{O}_K[j])$:














$S_0(\mathcal{O}_K[i]) \backslash S_0(\mathcal{O}_K[j])$	 $\beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	 $\beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$	 $\beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$
 $\alpha \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{h})$  Caso 3 (a3,b2)	Caso no posible $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$	$S_0(\mathcal{O}_K[i]) \subset S_0(\mathcal{O}_K[j])$ $\Rightarrow S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathfrak{h})$  $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ Caso 2(i)
 $\alpha \in \pi\mathcal{O}_K^*$	Caso no posible $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$	$S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{h})$  Caso 3(a1,a2,b1)	$S_0(\mathcal{O}_K[i]) \subset S_0(\mathcal{O}_K[j])$ $\Rightarrow S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathfrak{h})$  $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ Caso 2(ii)
 $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}$	$S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subset S_0(\mathcal{O}_K[i])$ $\Rightarrow S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{h})$  $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ Caso 2(i)	$S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subset S_0(\mathcal{O}_K[i])$ $\Rightarrow S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{h})$  $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ Caso 2(ii)	$S_0(\mathcal{O}_K[j])$  $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ Caso 1

Tabla 3.2: $S_0(\mathfrak{h})$.

3.2. Caso general

Consideremos $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$ con i, j como en la sección 3.1. Definamos $\mathfrak{D} = \mathcal{O}_K[i]$ y consideremos el orden contraído $\mathfrak{D}^{[r]} = \mathcal{O}_K + \pi^r \mathfrak{D} = \mathcal{O}_K[\pi^r i]$. Análogamente, si $\mathfrak{D}' = \mathcal{O}_K[j]$, entonces $\mathfrak{D}'^{[s]} = \mathcal{O}_K[\pi^s j]$. Asumimos que $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ son órdenes maximales como en la sección 3.1. Así, por [1, Prop. 2.4, Cor. 2.5], se tiene que $S_0(\mathfrak{D}^{[r]})$ es el conjunto de órdenes a distancia a lo más r a $S_0(\mathfrak{D})$. Análogamente, $S_0(\mathfrak{D}'^{[s]})$ es el conjunto de órdenes a distancia a lo más s a $S_0(\mathfrak{D}')$. De [1, §4] sabemos que:

$$S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[\pi^r i]) \cap S_0(\mathcal{O}_K[\pi^s j]) = S_0(\mathfrak{D}^{[r]}) \cap S_0(\mathfrak{D}'^{[s]}).$$

A continuación se detallan algunos ejemplos para valores de r y s cuando α y β recorren el conjunto de representantes libres de cuadrados descritos en la sección 3.1.

Por simplicidad, en los diagramas suponemos $|\mathbb{k}| = p = 3$. Nótese que cada orden maximal tiene 4 vecinos en el árbol.

▪ **Caso 1:**

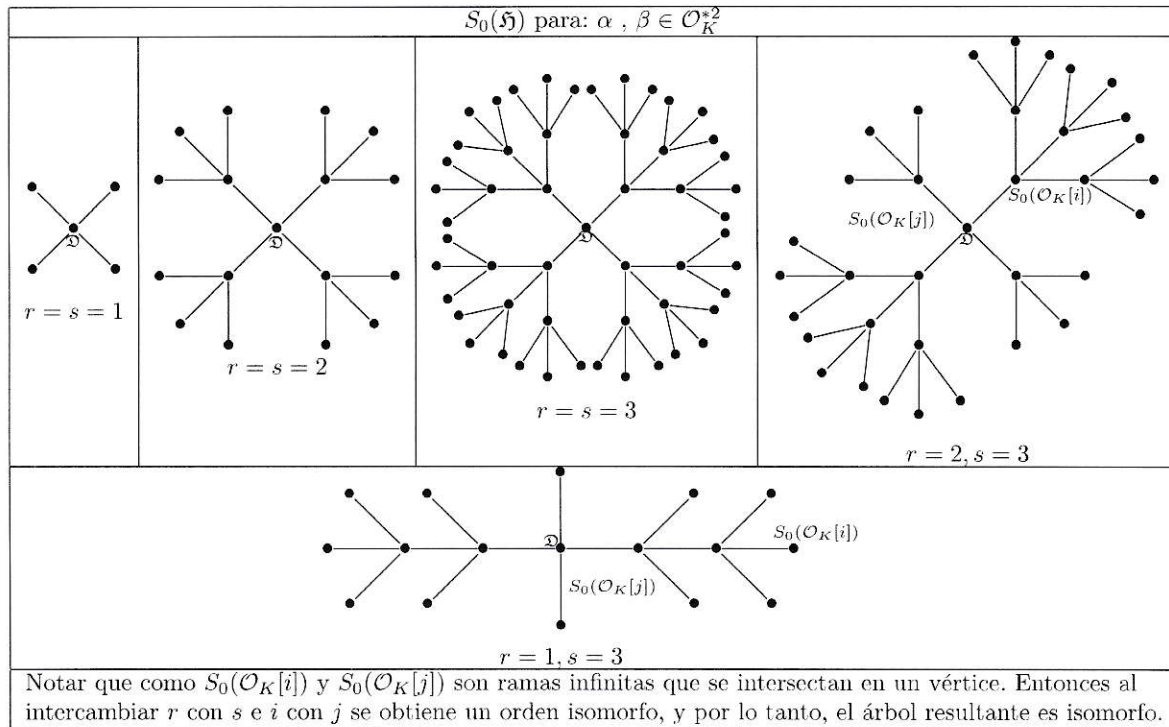


Tabla 3.3: Ejemplos de 0-ramas para el **Caso 1**.

■ **Caso 2(i):**


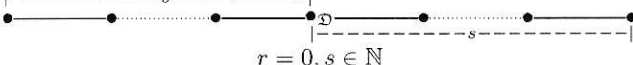
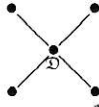
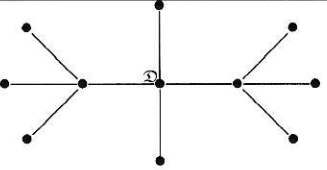
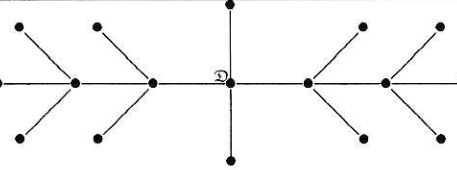
$S_0(\mathfrak{H})$ para: $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$.		
 $r \in \mathbb{N}, s = 0$	 $r = 0, s \in \mathbb{N}$	
 $r = s = 1$	 $r = 1, s = 2$	 $r = 1, s = 3$
<p>Sí $r \geq s$, entonces $S_0(\mathfrak{H})$ contiene sólo a los órdenes a distancia s del único orden maximal que contiene a $\mathcal{O}_K[j]$.</p>		

Tabla 3.4: Ejemplos de 0-ramas para el **Caso 2(i)**.

■ **Caso 2(ii):**

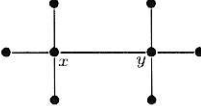
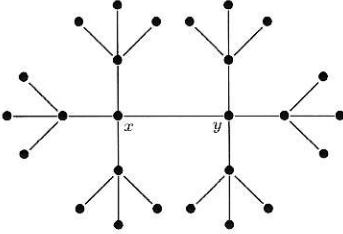
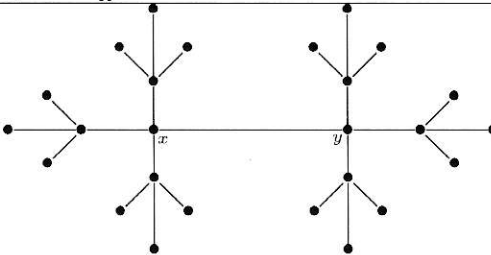
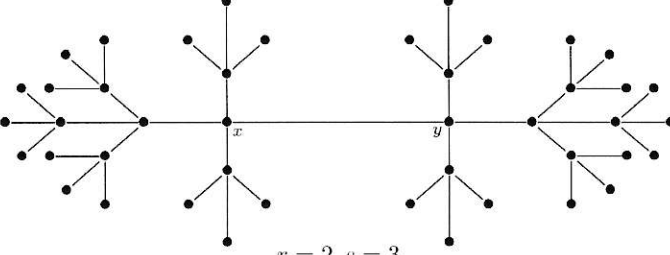
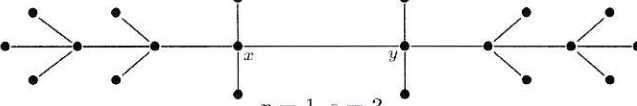
$S_0(\mathfrak{H})$ para: $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$.		
 $r = s = 1$	 $r = s = 2$	 $r = 3, s = 2$
 $r = 2, s = 3$		
 $r = 1, s = 3$		
<p>En general, en este caso, no existe simetría por lo que los árboles difieren según la elección de r, s. Además, si $r \geq s$, entonces $S_0(\mathfrak{H})$ contiene sólo a los órdenes a distancia s de alguno de los órdenes x, y.</p>		

Tabla 3.5: Ejemplos de 0-ramas para el **Caso 2(ii)**.

■ **Caso 3(a3,b2):**



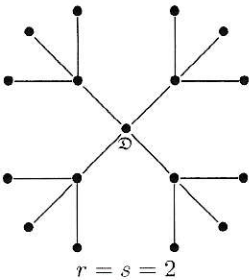
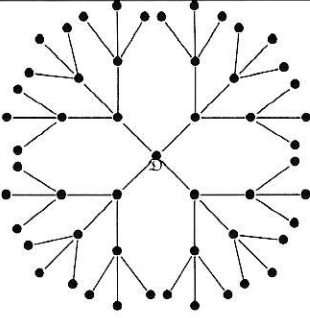
$S_0(\mathfrak{H})$ para: $\alpha, \beta \in \Delta \mathcal{O}_K^{*2}$.			
 $r = 0$ ó $s = 0$	 $r = s = 1$	 $r = s = 2$	 $r = s = 3$
<p>En general, la elección de r, s es simétrica, de hecho para cualquier r y s, $S_0(\mathfrak{H})$ consta sólo de los órdenes a distancia $d = \min\{r, s\}$ del único orden maximal que contiene a $\mathcal{O}_K[i] = \mathcal{O}_K[j]$.</p>			

Tabla 3.6: Ejemplos de 0-ramas para el **Caso 3(a3, b2)**.

■ **Caso 3(a1, a2, b1):**


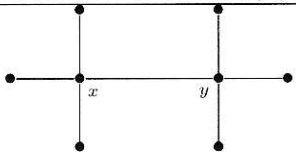
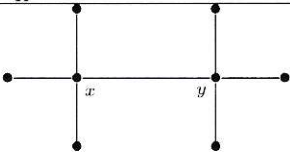
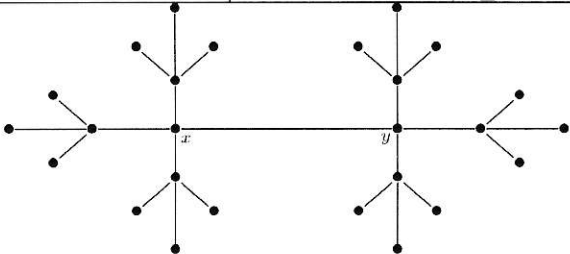
$S_0(\mathfrak{H})$ para: $\alpha, \beta \in \pi \mathcal{O}_K^*$.		
 $r = 0$ ó $s = 0$	 $r = s = 1$	 $r = 1, s \geq 1$ ó $s = 1, r \geq 1$
 $r = 2, s \geq 3$ ó $s = 2, r \geq 3$		
<p>En general, como en este caso tenemos $S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j])$, si suponemos $r \leq s$, entonces $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$ y por lo tanto $S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$. Se concluye que el árbol resultante depende sólo del mínimo valor entre r y s.</p>		

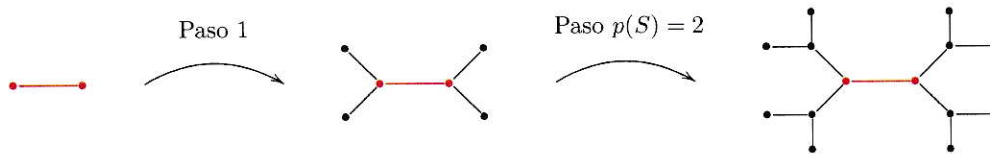
Tabla 3.7: Ejemplos de 0-ramas para el **Caso 3(a1, a2, b1)**.

Definición 3.2.1. Para cada orden \mathfrak{h} sea $S = S_0(\mathfrak{h})$. Definimos los siguientes invariantes de S , los cuales se calculan a partir la función distancia $\delta(\cdot, \cdot)$ definida en el árbol:

- **Diámetro:** Es la mayor distancia entre los vértices de S , denotado $diam(S)$.
- **Profundidad:** Es el máximo $\rho \in \mathbb{Z}^+$, tal que, para algún $\mathfrak{D} \in S$ la bola $B(\mathfrak{D}, \rho) := \{\mathfrak{D}' \in V(\mathfrak{T}) \mid \delta(\mathfrak{D}', \mathfrak{D}) \leq \rho\} \subseteq S$. Lo denotamos $p(S)$.
- **Largo del tallo:** Diámetro del *tallo* (conjunto de vértices a profundidad máxima), denotado $l_t(S)$,

Observación 3.2.1. Se sigue de [1] que los invariantes descritos determinan completamente al conjunto S . Esto es, supongamos que conocemos los invariantes $p(S)$ y $l_t(S)$. Entonces S tiene la forma de un camino de largo $l_t(S)$ ($l_t(S) + 1$ vértices unidos por aristas) y agregando vecinos a cada vértice de tal manera que cada vértice tenga $q + 1$ vecinos e iterando $p(S)$ veces este paso en los nuevos vértices.

Ejemplo: Supongamos que $l_t(S) = 1$, $p(S) = 2$ y $|k| = 2$. Entonces S se obtiene de la siguiente manera:



Observación 3.2.2. Sea el orden $\mathfrak{D}_0 = \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_K)$. Supongamos que un orden \mathfrak{D} está en S , entonces existe un elemento $a \in \mathbb{M}_2(K)^*$, tal que $\mathfrak{D} = a\mathfrak{D}_0a^{-1}$. Por definición, $\mathfrak{D} \in S$ si y sólo si $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$, equivalentemente $\mathfrak{h} \subseteq a\mathfrak{D}_0a^{-1}$ si y sólo si $a^{-1}\mathfrak{h}a \subseteq \mathfrak{D}_0$.

En conclusión, en nuestro caso si $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[x, y]$ entonces los órdenes $\mathfrak{D} \in S$ se pueden obtener conociendo los elementos $a \in \mathbb{M}_2(K)^*$ tales que $a^{-1}xa \in \mathfrak{D}_0$ y $a^{-1}ya \in \mathfrak{D}_0$.

Con la definición 3.2.1 se puede establecer explícitamente expresiones para estos invariantes en cada caso, lo cual se resume en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. *Sea K cuerpo local no diádico y sean $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ libres de cuadrados, tales que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$. Sean i, j tales que, $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, con $ij = -ji$. Sea $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$, donde π es un parámetro uniformizante de K . Entonces los invariantes de $S = S_0(\mathfrak{H})$ están descritos como sigue:*

Casos	α, β	$\text{diam}(S)$	$l_t(S)$	$p(S)$
Caso 1	$\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$	$2\max\{r, s\}$	$2 r - s $	$\min\{r, s\}$
Caso2(i)	$\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$2s$	$= \begin{cases} 2(s-r), & r < s \\ 0, & r \geq s \end{cases}$	$\min\{r, s\}$
Caso2(ii)	$\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$	$2s + 1$	$= \begin{cases} 2(s-r) + 1, & r < s \\ 1, & r \geq s \end{cases}$	$\min\{r, s\}$
Casos3(a3,b2)	$\alpha, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$2\min\{r, s\}$	0	$\min\{r, s\}$
Casos3(a1,a2,b1)	$\alpha, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$	$2\min\{r, s\} + 1$	1	$\min\{r, s\}$

Tabla 3.8: Invariantes de S cuando K es no diádico.

Demostración: Primero demostraremos en general que:

(i) $p(S) = \min\{r, s\}$.

(ii) $\text{diam}(S) = l_t(S) + 2 \cdot p(S)$.

Demostración de (i): Definamos $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{O}_K[i, j]$ y sea $\rho := \min\{r, s\}$, notemos que:

$$S = S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \cap S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) \quad , \quad S_0(\mathfrak{H}_0) = S_0(\mathcal{O}_K[i]) \cap S_0(\mathcal{O}_K[j]) \neq \emptyset.$$

Por otra parte, se sigue de [1, Prop.2.4] que:

a) $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) = \{\mathfrak{D} \mid d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') \leq r, \text{ para algún } \mathfrak{D}' \in S_0(\mathcal{O}_K[i])\}$.

b) $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) = \{\mathfrak{D} \mid d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'') \leq s, \text{ para algún } \mathfrak{D}'' \in S_0(\mathcal{O}_K[j])\}$.

Se desprende que existe $\mathfrak{D} \in S$ tal que la bola $B(\mathfrak{D}, \rho)$ está contenida en S . Es más, basta tomar $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H}_0)$ arbitrario.

Ahora bien, supongamos que para algún $\tilde{\mathfrak{D}} \in S$. Se tiene,

$$B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \cap S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}),$$

de modo que

$$B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \quad \text{y} \quad B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}),$$

lo cual es imposible por definición de ρ . Por lo tanto, $p(S) = \min\{r, s\}$.

Demostración de (ii): Sea T el conjunto de órdenes en el tallo de S . Primero, notamos que la distancia está bien definida, pues no hay ciclos, por lo que existen órdenes $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in S$ (en particular, dos órdenes 0-profundos, ver def.2.5.6) ver figura 3.4 y órdenes $T_1, T_2 \in T$ (extremos en el tallo), tales que se cumple

$$d(\mathfrak{D}_1, T_1) = d(\mathfrak{D}_2, T_2) = \rho \text{ y } d(T_1, T_2) = l_t(S).$$

Se sigue que:

$$d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = d(\mathfrak{D}_1, T_1) + d(T_1, T_2) + d(\mathfrak{D}_2, T_2) = l_t(S) + 2\rho = l_t(S) + 2 \cdot p(S).$$

La figura 3.4 ejemplifica las posiciones relativas de los órdenes,

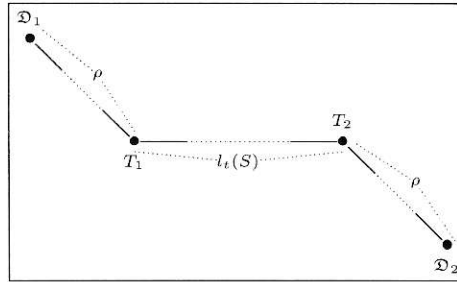


Figura 3.4: Posición relativa

Supongamos que existen órdenes $\widetilde{\mathfrak{D}}_1, \widetilde{\mathfrak{D}}_2 \in S$, tales que, $d(\widetilde{\mathfrak{D}}_1, \widetilde{\mathfrak{D}}_2) = l_t(S) + 2 \cdot p(S) + 1$. Notemos que por definición de T se cumple que $d(\widetilde{\mathfrak{D}}_k, T) \leq \rho$, para cada k por la descripción explícita de S en [1]. Por otra parte, se sabe que

$$\begin{aligned} d(\widetilde{\mathfrak{D}}_1, \widetilde{\mathfrak{D}}_2) &\leq d(\widetilde{\mathfrak{D}}_1, T) + \text{diam}(T) + d(T, \widetilde{\mathfrak{D}}_2) \text{ (desigualdad triangular)} \\ &= d(\widetilde{\mathfrak{D}}_1, T) + l_t(S) + d(T, \widetilde{\mathfrak{D}}_2) \\ &\leq \rho + l_t(S) + \rho \\ &= l_t(S) + 2 \cdot \rho, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\text{diam}(S) = l_t(S) + 2 \cdot p(S)$.

En lo que sigue, demostramos en cada caso las expresiones para $p(S)$ y $l_t(S)$, descritas en la tabla precedente.

- (1) **Caso1:** Como existe simetría en la elección de r y s , sin pérdida de generalidad suponemos $r \leq s$.

Recordemos que los órdenes que están en el tallo se encuentran a profundidad $p(S) = \min\{r, s\} = r$, y que

están en la rama $S_0(\mathcal{O}_K[i])$. Para cada orden $\tilde{\mathfrak{D}}$ en el tallo de S se debe cumplir que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, r) \subseteq S$ y por lo tanto, como $S_0(\mathfrak{H}_0) = \{\mathfrak{D}\}$, entonces $d(\mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}}) \leq (s - r)$, ya que, si suponemos $d(\mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}}) \geq (s - r + 1)$, se tiene que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, r) \not\subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$, pues la bola tiene un punto \mathfrak{D}_0 a distancia mayor a s de \mathfrak{D} , a saber, $d(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) = d(\mathfrak{D}_0, \tilde{\mathfrak{D}}) + d(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}) = r + s - r + 1 = s + 1$. Pero $S \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$, lo cual es imposible. La figura 3.5 ejemplifica la situación:

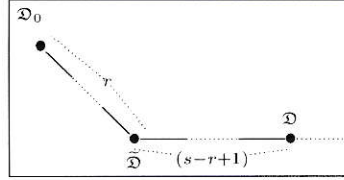


Figura 3.5:

Se concluye del mismo modo que existen órdenes r -profundos $\tilde{\mathfrak{D}}_1, \tilde{\mathfrak{D}}_2 \in S_0(\mathcal{O}_K[i])$ tales que, $d(\mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}}_1) = d(\mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}}_2) = (s - r)$, de donde $d(\tilde{\mathfrak{D}}_1, \tilde{\mathfrak{D}}_2) = 2(s - r) = 2|r - s|$.

- (2) **Caso 2(i):** Notar que si $r \geq s$ entonces, como $S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y $S_0(\mathfrak{H}_0) = \{\mathfrak{D}\}$ para algún orden $\mathfrak{D} \in V(\mathfrak{T})$, se sigue que $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$. Si $r \geq s$, entonces $S = S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$, es decir, $S_0(\mathfrak{H})$ contiene a los órdenes a distancia $\leq s$, a \mathfrak{D} , y por lo tanto, \mathfrak{D} es el único orden a profundidad $p(S) = s$. Se sigue que $l_t(S) = 0$.

Si $r < s$, el tallo T está contenido en $S_0(\mathcal{O}_K[i])$. Luego, para cada $\tilde{\mathfrak{D}} \in T$, se cumple que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, r) \subseteq S$. Sea $\tilde{\mathfrak{D}}_0 \in T$ tal que $d(\tilde{\mathfrak{D}}_0, \mathfrak{D}) = \max_{\tilde{\mathfrak{D}} \in T} \{d(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D})\}$. Nótese que $B(\tilde{\mathfrak{D}}_0, r) \subseteq S$, por lo que $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ debe estar a profundidad r , es decir, debe existir un orden \mathfrak{D}' a distancia r de $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ en $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ en la dirección opuesta a \mathfrak{D} , mientras que la distancia de \mathfrak{D} a $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ es menor o igual a s . La figura 3.6 muestra las posiciones relativas de los órdenes mencionados:

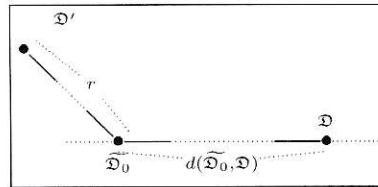


Figura 3.6:

Notar que $r + d(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq s$, y por lo tanto, $d(\tilde{\mathfrak{D}}_0, \mathfrak{D}) = (s - r)$. Se sigue de la simetría respecto a \mathfrak{D} que $\text{diam}(T) = l_t(S) = 2(s - r)$, por un argumento similar al caso precedente.

- (3) **Caso 2(ii):** Notar que $S_0(\mathfrak{H}_0)$ consta de dos órdenes, a saber, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in V(\mathfrak{T})$. Se sigue análogamente al **Caso 2(i)** que $l_t(S) = 2(s-r) + d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 2(s-r) + 1$, si $r < s$, y $l_t(S) = d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 1$, si $r \geq s$.
- (4) **Caso 3(a3,b2):** Sin pérdida de generalidad, suponemos $r \leq s$. Se sigue de [1, Prop.2.4] que $S = S_0(\mathfrak{H})$ contiene exactamente a los órdenes a distancia $\leq r$ de \mathfrak{D} , y se desprende que \mathfrak{D} es el único orden a profundidad $p(S) = r$. En conclusión, se tiene que $l_t(S) = 0$.
- (5) **Caso 3(a1,a2,b1):** Sin pérdida de generalidad, suponemos $r \leq s$. Basta notar que en este caso tenemos $S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{H}_0) = \{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}$, para ciertos órdenes $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in V(\mathfrak{T})$. Se sigue de [1, Prop.2.4] que S contiene exactamente a los órdenes a distancia $\leq r$, de algún \mathfrak{D}_i , $i = 1, 2$, y se desprende que \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 son los únicos órdenes a profundidad $p(S) = r$. En conclusión, $l_t(S) = d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 1$.

Por último, reemplazando las fórmulas obtenidas para $l_t(S)$ en la relación $diam(S) = l_t(S) + 2 \cdot p(S)$, se obtienen las expresiones descritas por el teorema. ■

Capítulo 4

K/\mathbb{Q}_2 no ramificada

4.1. α, β libres de cuadrados

Sea $K = F_{\mathfrak{p}}$ el completado de un cuerpo global F en un lugar diádico \mathfrak{p} como antes. Sean \mathcal{O}_K su anillo de enteros, π un parámetro uniformizante en K , Δ una unidad con defecto cuadrático minimal en K y $\alpha, \beta \in K^*$ libres de cuadrados. Sea $\mathbb{k} := \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ el cuerpo residual de K . Suponemos que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Como antes, buscamos $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$, donde $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$. Basta conocer α y β , módulo cuadrados. En un principio, sólo nos concentramos en $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^* \cup \pi\mathcal{O}_K^{*2}$. Se sabe de [13, 63:9] que $|K^*/K^{*2}| = 4(N\mathfrak{p})^{ord_{\mathfrak{p}}2}$, donde $N\mathfrak{p} = |\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K|$.

Definición 4.1.1. Por simplicidad de notación definimos $\mathcal{U} := \mathcal{O}_K^* \setminus (\mathcal{O}_K^{*2} \cup \Delta\mathcal{O}_K^{*2})$, que es el conjunto de unidades u tales que $K(\sqrt{u})/K$ es ramificada.

Para nuestro interés basta con saber que,

$$\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K^{*2} = \{1, \Delta, u_1, u_2, \dots, u_l, p_1 = \pi, p_2, \dots, p_m\},$$

donde Δ es una unidad de defecto cuadrático minimal, $u_1, \dots, u_l \in \mathcal{U}$ y p_1, \dots, p_m son parámetros uniformizantes.

La descripción obtenida primero para \mathbb{Q}_2 y descrita en el Apéndice B de los árboles e invariantes, puede ser generalizada fácilmente a un cuerpo local diádico K , cuando 2 no ramifica en K . Por esta razón no incluimos ese caso particular en el texto, pero hemos decidido conservar los cálculos originales en un apéndice. En este sentido, es posible reducir el cálculo a los siguientes casos para α y β (módulo permutar α y β),

- 1) $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}$,

- i) $\beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$.
 - ii) $\beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$, donde Δ es una unidad de defecto cuadrático minimal.
 - iii) $\beta \in \mathbb{U}$.
 - iv) $\beta \in p_i\mathcal{O}_K^{*2}$. De hecho como el cálculo es independiente de π puede suponerse $p_i = \pi$.
- 2) $\alpha, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$.
 - 3) $\alpha \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \mathbb{U}$.
 - 4) $\alpha, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^* \cup \mathbb{U}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que α, β son los representantes en la clase de cuadrados, es decir, $\alpha, \beta \in \{1, \Delta, \pi, u_i\}$, donde $u_i \in \mathbb{U}$, pues el cálculo es igual para cada una de dichas unidades, más aún, el cálculo para $\alpha = u_i, \beta = u_j$ es idéntico al cálculo para $\alpha = \beta = u_i$. Además como \mathbb{k} es finito, y por lo tanto perfecto, se sigue que $\mathbb{k}^2 = \mathbb{k}$. En particular, toda unidad es un cuadrado módulo π . En los dibujos se asume que $|\mathbb{k}| = 4$.

- 1) $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}$:

1(i) $\beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$. En lo que sigue, sea $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\eta = \frac{i+1}{2}$. Podemos asumir que $\beta = 1$, y más

aún, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces observamos la imagen de i y j en $\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K) = \mathbb{M}_2(\mathbb{k})$, es decir,

$\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$. Se sigue que el subespacio de \mathbb{k}^2 generado por

el vector $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$, es un subespacio invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Se concluye de [1, §3], [2,

§3] y [2, Lema 3.1] que $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ está contenido en más de un orden maximal. Ahora bien, sea

$\eta = \frac{i+1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notar que $\mathcal{O}_K[i] = \mathcal{O}_K[\eta]^{[1]}$, y que $S_0(\mathcal{O}_K[\eta])$ es un camino infinito. Por

otra parte, $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$, de donde \mathbb{k}^2 es el unico espacio invariante no nulo bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} . Se concluye que, $S_0(\mathcal{O}_K[\eta, j])$ está contenido en un único orden maximal \mathfrak{D} , es decir, $S_0(\mathcal{O}_K[\eta])$ y $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ se intersectan en sólo un punto, como indica la figura 4.1:



Figura 4.1:

Por lo tanto, se tiene que $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ consta sólo de dos puntos, y su posición relativa esta descrita por la siguiente figura 4.2:

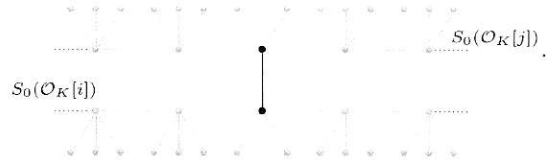


Figura 4.2:

1(ii) $\beta \in \Delta \mathcal{O}_K^{*2}$. Sea $j = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notar que podemos suponer $\Delta = 1 + 4t$, con $|t|_p \leq 1$. Entonces $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$ es un subespacio invariante bajo la acción de \bar{i}, \bar{j} . Concluimos que, $\mathcal{O}_K[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal. Ahora bien, consideremos $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y notemos que \mathbb{k}^2 es el único espacio no nulo invariante bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} . Se concluye que $\mathcal{O}_K[\eta, j]$ está contenido en un único orden maximal, como indica la figura 4.3:



Figura 4.3:

En conclusión $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ consta de dos órdenes como indica la figura 4.4:

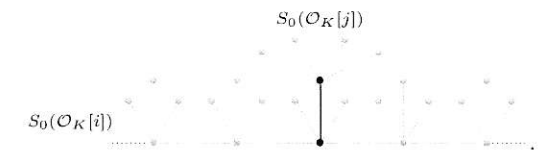


Figura 4.4:

1(iii) $\beta \in \mathcal{U}$. Sea $j = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sabemos que $\beta \equiv v^2 \pmod{\pi}$, donde $v \in \mathcal{O}_K^*$. Entonces $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{v}^2 \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{v} \ \bar{1})^T \rangle$ es un espacio invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Ahora bien, como antes, \mathbb{k}^2 es el único espacio invariante bajo $\bar{\eta}$ y \bar{j} , es decir, $S_0(\mathcal{O}_K[\eta, j])$ consta de un único orden maximal \mathfrak{D} , como indica la figura 4.5:

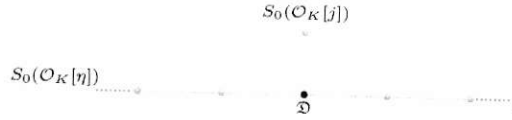


Figura 4.5:

Se concluye que $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ consta de dos órdenes y que su posición relativa es como indica la siguiente figura 4.6:

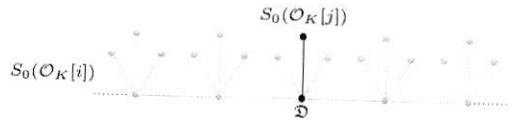


Figura 4.6:

1(iv) $\beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$. Sea $j = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} , es decir, $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ contiene dos órdenes maximales. Ahora bien, considerando η y j , notamos que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} , es decir, $S_0(\mathcal{O}_K[\eta, j])$ consta de dos órdenes maximales, como indica la figura 4.7:

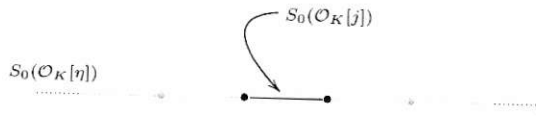


Figura 4.7:

Se concluye que $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ consta de dos órdenes y su posición relativa es como indica la figura 4.8:

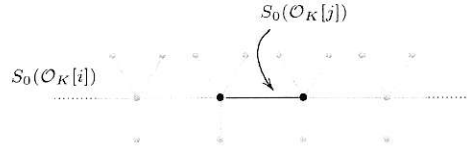


Figura 4.8:

2) $\alpha, \beta \in \Delta \mathcal{O}_K^{*2}$. Sin pérdida de generalidad, consideramos $\alpha = 1 + 4t$, con $t \in \mathcal{O}_K^*$. Sea $i = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

De la ecuación $ij = -ji$, se obtiene $j = \begin{pmatrix} -a & a - ct \\ c & a \end{pmatrix}$, donde $a, c \in \mathcal{O}_K$ y $a^2 + ac - c^2t = \beta$. Tales a, c existen ya que $\beta \in N_{K(\sqrt{\alpha})/K}(K(\sqrt{\alpha})^*)$. Es decir, β es una norma y necesariamente de un elemento entero. Así, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{a} + \bar{c}\bar{t} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$. De aquí, notamos que \bar{j} tiene valor propio $\lambda = \bar{v}$, donde

$v \in \mathcal{O}_K^*$ y $v^2 = \bar{\beta}$. Se sigue entonces, que el vector propio $\langle (\frac{\bar{a} + \bar{v}}{\bar{c}} \quad \bar{1})^T \rangle = \langle (\bar{a} + \bar{c}\bar{t} \quad \bar{1})^T \rangle$ es el único subespacio de dimensión 1 invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} , es decir, $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ consta al menos de dos órdenes maximales. Ahora bien, por un razonamiento similar al de la observación 4.1.3, si $\eta = \frac{i+1}{2}$ y $\omega = \frac{j+1}{2}$, entonces no existe un orden que contenga a η y a ω , más aún, como $S_0(\mathcal{O}[\eta]^{[1]}) = S_0(\mathcal{O}[i])$, $S_0(\mathcal{O}[\omega]^{[1]}) = S_0(\mathcal{O}[j])$ y las 0-ramas de η y ω son puntos, se concluye que $S_0(\mathcal{O}_K[i, j])$ consta sólo de dos órdenes maximales y su posición relativa es como indica la figura 4.9:



Figura 4.9:

3) $\alpha \in \Delta \mathcal{O}_K^*, \beta \in \mathcal{U}$. Podemos asumir que $\alpha = \Delta$. Sean $i = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $j = \begin{pmatrix} -a & -c\Delta \\ c & a \end{pmatrix}$, donde

$a, c \in \mathcal{O}_K$ y $a^2 - \Delta c^2 = \beta$. Las soluciones a y c se obtienen como en el caso anterior. Así, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{v}^2 \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$,

$\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c}\bar{v}^2 \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$, donde $v \in \mathcal{O}_K^*$. Se sigue que $\langle (\bar{v} \ \bar{1})^T \rangle$ es un espacio invariante bajo la acción de \bar{i} . Por otra parte, $\bar{\beta} = \bar{\mu}^2$, donde $\mu \in \mathcal{O}_K^*$, luego \bar{j} tiene valor propio $\lambda = \bar{\mu}$ y vector propio

$\langle (\frac{\bar{a}+\bar{\mu}}{\bar{c}} \ \bar{1})^T \rangle = \langle (\bar{v} \ \bar{1})^T \rangle$. Se concluye que $S_0(\mathcal{O}_K[i, j]) = S_0(\mathcal{O}_K[j])$, es decir, consta de dos órdenes maximales y su posición relativa es como indica la figura 4.10:

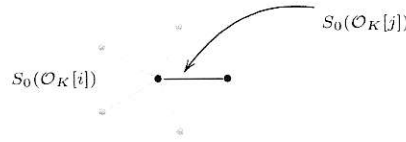


Figura 4.10:

4) $\alpha, \beta \in \pi \mathcal{O}_K^* \cup \mathcal{U}$. Sean $i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $j = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix}$. Como queremos que $ij = -ji$, se sigue que

$j = \begin{pmatrix} -a & -\alpha c \\ c & a \end{pmatrix}$, donde $a, c \in \mathcal{O}_K$ y $a^2 - \alpha c^2 = \beta$. Tales a y c existen ya que β es una norma de $K(i)$ y necesariamente de un entero [13, §63B]. Aquí suponemos que el defecto cuadrático de α es

$\mathfrak{d}(\alpha) = \mathfrak{p} = (\pi)$, luego $\mathcal{O}_{K(i)} = \mathcal{O}[i]$ y $\mathcal{O}_{K(j)} = \mathcal{O}[j]$, lo cual es inmediato si K/\mathbb{Q}_2 es no ramificada. Entonces, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{\alpha} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{\alpha}\bar{c} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Para \bar{i} se tiene un valor propio $\lambda = \bar{\epsilon}$, donde $\bar{\epsilon}^2 = \bar{\alpha}$. De

aquí se obtiene el subespacio invariante $\langle (\bar{\epsilon} \ \bar{1})^T \rangle$. Análogamente, para \bar{j} se obtiene el valor propio $\lambda = \bar{\gamma}$,

donde $\bar{\gamma}^2 = \bar{\beta}$. De aquí se obtiene el subespacio invariante $\langle (\bar{a} + \bar{\gamma} \ \bar{c})^T \rangle$, pero como, $\bar{\beta} = a^2 + \alpha c^2 = \bar{\gamma}^2$,

entonces $\frac{\bar{a}+\bar{\gamma}}{\bar{c}} = \bar{\epsilon}$. Se sigue que el subespacio $\langle (\bar{\epsilon} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Concluimos

que

$$S_0(\mathcal{O}_K[i, j]) = S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \bullet \xrightarrow{S_0(\mathcal{O}_K[i, j])} \bullet.$$

La siguiente tabla resume la forma del árbol $S_0(\mathfrak{H}_0)$, donde $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{O}_K[i, j]$ y su posición relativa respecto a $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y $S_0(\mathcal{O}_K[j])$, suponiendo por simplicidad que $|\mathbb{k}| = 4$:

$\alpha \in$	$\beta \in$	$S_0(\mathfrak{H}_0)$
\mathcal{O}_K^{*2}	\mathcal{O}_K^{*2}	
	$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	
	\mathfrak{U}	
	$\pi\mathcal{O}_K^*$	
$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	
	\mathfrak{U}	
$\pi\mathcal{O}_K^* \cup \mathfrak{U}$		

Tabla 4.1: $S_0(\mathfrak{H}_0)$, para K cuerpo local diádico, donde 2 no ramifica.

4.2. Caso general

Considerando el orden $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$, se puede generalizar la descripción realizada en la sección 4.1, la cual, está resumida en el siguiente teorema que describe los invariantes para cada caso:

Teorema 4.2.1. *Sea K un cuerpo local diádico en donde 2 no ramifica. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$, libres de cuadrados, tales que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$. Sean i, j tales que, $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, con $ij = -ji$. Sea $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$, con $r, s \geq 0$. Entonces los invariantes de $S = S_0(\mathfrak{H})$ están descritos como sigue:*

Casos	$\alpha \in$	$\beta \in$	$p(S)$	$l_t(S)$	$diam(S)$
1(i)	\mathcal{O}_K^{*2}	\mathcal{O}_K^{*2}	$\begin{cases} \min\{r, s\} + 1 & \text{si, } r \neq s \\ r & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2(r-s -1) & \text{si, } r \neq s \\ 1 & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2\max\{r, s\} & \text{si, } r \neq s \\ 2r+1 & \text{si, } r = s \end{cases}$
1(ii)		$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\begin{cases} \min\{r, s\} + 1 & \text{si, } r \neq s \\ r & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2(s-r-1) & \text{si, } r < s \\ 1 & \text{si, } r = s \\ 0 & \text{si, } s < r \end{cases}$	$\begin{cases} 2s & \text{si, } r < s \\ 2r+1 & \text{si, } r = s \\ 2(s+1) & \text{si, } s < r \end{cases}$
1(iii)		\mathcal{U}	$\begin{cases} r+1 & \text{si, } r < s \\ s & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2(s-r-1) & \text{si, } r < s \\ 0 & \text{si, } r = s \\ 1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2s & \text{si, } r < s \\ 2s+1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
1(iv)		$\pi\mathcal{O}_K^*$	$\begin{cases} r+1 & \text{si, } r < s \\ s & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2(s-r)-1 & \text{si, } r < s \\ 1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$2s+1$
2	$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\begin{cases} \min\{r, s\} + 1 & \text{si, } r \neq s \\ r & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si, } r \neq s \\ 1 & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2(\min\{r, s\} + 1) & \text{si, } r \neq s \\ 2r+1 & \text{si, } r = s \end{cases}$
3		\mathcal{U}	$\begin{cases} r+1 & \text{si, } r < s \\ s & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si, } r < s \\ 1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2(r+1) & \text{si, } r < s \\ 2s+1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
4	$\pi\mathcal{O}_K^* \cup \mathcal{U}$		$\min\{r, s\}$	1	$2\min\{r, s\} + 1$

Tabla 4.2: Invariantes para $S_0(\mathfrak{H})$ cuando K es cuerpo local diádico y 2 no ramifica.

El siguiente lema será útil para la demostración del teorema precedente:

Lema 4.2.1. *Sea $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$, $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{O}_K[i, j]$ donde j e i son como en la sección 4.1, con α y β libres de cuadrados, entonces $S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]})$ y el tallo de $S_0(\mathfrak{H})$ es $S_0(\mathfrak{H}_0)$.*

Demostración: Notamos que $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_0^{[r]}$, de modo que $S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]}) \subseteq S_0(\mathfrak{H})$, por lo que basta probar la otra contención. Además, se sabe que

$$S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \cap S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[r]}) \quad \text{y} \quad S_0(\mathfrak{H}_0) = \{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}.$$

Sea \mathfrak{D}_0 un orden a distancia $r+1$ de $\tilde{\mathfrak{D}} \in S_0(\mathfrak{H}_0)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}_1$ en tal caso $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1) = r+1$ y $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_2) = r+2$. Hay que considerar dos casos:

- (1) Asumimos que $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ no se extiende a la izquierda de \mathfrak{D}_1 . Supongamos que existe un orden $\mathfrak{D}_0 \in S_0(\mathfrak{H})$, pero $\mathfrak{D}_0 \notin S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]})$. Es decir, \mathfrak{D}_0 está a distancia $r+1$ de $S_0(\mathfrak{H}_0)$. Entonces los caminos que unen \mathfrak{D}_0 y

\mathfrak{D}_1 tiene un tramo único (ya que es un árbol) como muestra el lado izquierdo de la figura 4.11:



Figura 4.11:

Como $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in S_0(\mathcal{O}_K[j])$, se sigue que, como $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ no se extiende a la izquierda de \mathfrak{D}_1 , entonces $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[r]})$ sólo contiene órdenes a la izquierda de \mathfrak{D}_1 o en el camino hacia \mathfrak{D}_0 que están a distancia menor que r .

Por otra parte, $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1) = r + 1$, es decir, $\mathfrak{D}_0 \notin S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[r]})$ y por lo tanto $\mathfrak{D}_0 \notin S_0(\mathfrak{H})$, lo que es una contradicción.

- (2) Supongamos que $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ se extiende a la izquierda de \mathfrak{D}_1 , notamos que $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathcal{O}_K[j])$ y está a distancia 1 de \mathfrak{D}_1 , como muestra la figura 4.12:

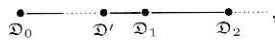


Figura 4.12:

así, $\mathfrak{D}' \in S_0(\mathcal{O}_K[j])$. Pero esto implica que $\mathfrak{D}' \notin S_0(\mathcal{O}_K[i])$, por lo que intercambiando i por j en el razonamiento anterior, se sigue de igual manera que $\mathfrak{D}_0 \notin S_0(\mathfrak{H})$.

Concluimos que $S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]})$.

Demostración: (Teorema 4.2.1) En lo que sigue, sean $S = S_0(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{O}_K[i, j]$ y $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ órdenes maximales identificados con los dos vertices de $S_0(\mathfrak{H}_0)$. Se demostrarán en cada caso las expresiones encontradas correspondientes a la *profundidad* $p(S)$ y *largo del tallo* $l_t(S)$.

- 1(i) $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$: Supongamos $r \neq s$. Dado que $S_0(\mathcal{O}_K[i])$ y $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ son isomorfos, podemos asumir que $r < s$. Sea $\rho = \min\{r, s\} + 1 = r + 1$. La siguiente figura muestra las posiciones relativas

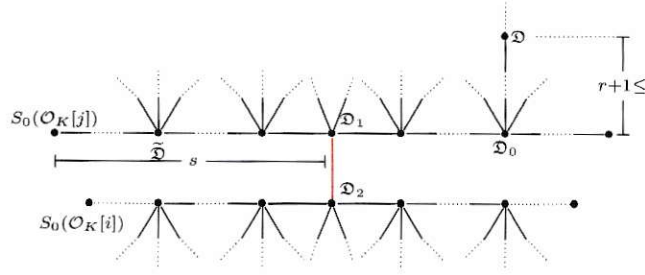


Figura 4.13:

Es claro de la figura 4.13 que $B(\mathfrak{D}_1, \rho) \subseteq S$ ya que $\rho \leq s$. Supongamos que existe $\tilde{\mathfrak{D}} \in S$, tal que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S$. Notamos que $\tilde{\mathfrak{D}}$ está a distancia ≥ 0 a \mathfrak{D}_1 en la línea central como muestra la figura, módulo intercambiar \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 , ya que si está en otra posición tiene sólo vértices a distancia menor a $\rho + 1$ hacia arriba, como indica la figura 4.13. Entonces $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$, pero $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$ es un camino infinito engrosado en una distancia $\rho = r + 1$, lo que es una contradicción. Se concluye que $p(S) = \rho = \min\{r, s\} + 1$.

Por otra parte, llamemos $T \subseteq S$ al conjunto de órdenes que están en el tallo de S . Como asumimos $r < s$, entonces al intersectar $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$ con $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$ se obtienen puntos a mayor profundidad en el tallo de $S_0(\mathcal{O}_K[i])$, es decir, $T \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[\eta]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i])$. Notamos que $\mathfrak{D}_1 \in T$.

Afirmación: Para cada orden $\mathfrak{D}_0 \in S_0(\mathcal{O}_K[\eta])$, tal que $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1) \leq (s - r - 1)$, se tiene $\mathfrak{D}_0 \in T$.

Sea $\mathfrak{D} \in B(\mathfrak{D}_0, \rho)$. Basta probar que, para cada $\mathfrak{D} \in B(\mathfrak{D}_0, \rho)$, se cumple que $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$.

Notamos que $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}) \leq \rho = r + 1$, es decir, $\mathfrak{D} \in S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$. Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1) &\leq \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_0) + \delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1) \\ &\leq \rho + (s - r - 1) \\ &= s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_2) &\leq \delta(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1) + \delta(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \\ &\leq s + 1. \end{aligned}$$

Luego $\mathfrak{D} \in S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$, es decir, $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$ y, por lo tanto, $\mathfrak{D}_0 \in T$. Un argumento similar prueba que la condición $\delta(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1) \leq (s - r - 1)$ es necesaria. Por simetría se sigue que $\text{diam}(T) = l_t(S) = 2(s - r - 1) = 2(|r - s| - 1)$.

Si suponemos que $r = s$, entonces por el Lema 4.2.1 se tiene que $S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]}) = S_0(\mathfrak{H})$.

Se concluye que $p(S) = r$ y $l_t(S) = 1$.

- 1(ii)** $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$: Supongamos que $r < s$. Sea $\rho = \min\{r, s\} + 1 = r + 1$. Notar que $B(\mathfrak{D}_2, \rho) \subseteq S$, como se muestra en la figura 4.14:

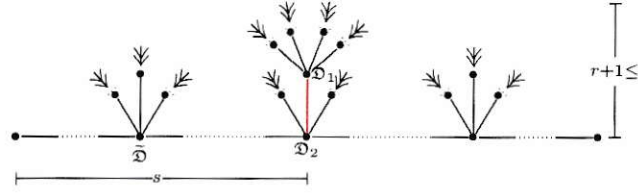


Figura 4.14:

Supongamos que existe $\tilde{\mathfrak{D}} \in S$, tal que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S$. Notar que sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\tilde{\mathfrak{D}} \in S_0(\mathcal{O}_K[\eta])$, de donde $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$. Pero $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$ es un camino infinito engrosado en una distancia ρ , es decir, $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \not\subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$, lo que es una contradicción. Se sigue que $p(S) = \rho = r + 1$ y análogamente al caso anterior se concluye que $l_t(S) = 2(|r - s| - 1)$.

Ahora bien, si $s < r$, entonces se tiene

$$S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[1]}),$$

de lo cual se sigue que,

$$\begin{aligned} S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) &\subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \\ \Rightarrow S_0(\mathfrak{H}) &= S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) \\ &= S_0(\mathcal{O}_K[\omega]^{[s+1]}), \end{aligned}$$

donde $\omega = \frac{j+1}{2}$. Se concluye que como $S_0(\mathcal{O}_K[\omega])$ es un punto, $p(S) = s + 1 = \min\{r, s\} + 1$ y $l_t(S) = 0$. Por último, si $r = s$, análogamente al caso anterior, se sigue por el lema precedente que $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_0^{[r]}$, y $S = S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]})$. Es decir, $S_0(\mathfrak{H})$ se obtiene al engrosar en r el árbol $S_0(\mathfrak{H}_0) = \bullet \text{---} \bullet$. Se concluye que $p(S) = r$ y $l_t(S) = 1$.

- 1(iii)** $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \tilde{\mathcal{U}}$: Notar que en este caso se tiene que $S_0(\mathcal{O}_K[j])$ está contenido en $S_0(\mathcal{O}_K[i])$. Entonces si $s \leq r$, se cumple que $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$, por lo tanto, $S = S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$. Concluimos que $p(S) = s$ y $l_t(S) = 1$.

Ahora bien, el caso $r < s$ es análogo a **1(ii)**. Se sigue que $p(S) = \min\{r, s\} + 1$ y $l_t(S) = 2(|s - r| - 1)$.

- 1(iv)** $\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$: Supongamos que $r < s$. Sea $\rho = r + 1$. Notar que para cada $\mathfrak{D}_i \in S_0(\mathfrak{H}_0)$, $i = 1, 2$ la bola $B(\mathfrak{D}_i, \rho)$ está contenida en S , como muestra la figura 4.15:

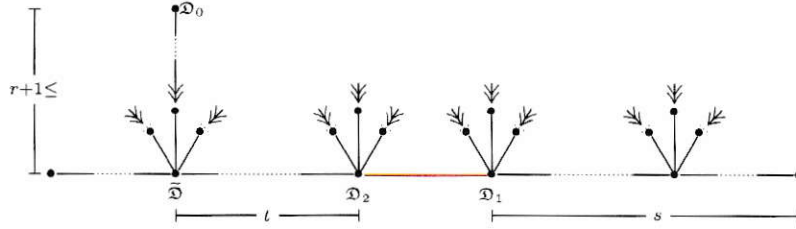


Figura 4.15:

Supongamos que existe $\tilde{\mathfrak{D}} \in S$, tal que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \subseteq S$. Notar que $\tilde{\mathfrak{D}} \in S_0(\mathcal{O}_K[\eta])$, con $\delta(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}_i) = t \geq 0$, pero existe un orden $\mathfrak{D}_0 \in S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$ cuya distancia $\delta(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}_0) = r + 1 = \rho$ es máxima (ver Fig. 4.15), lo cual dice que $B(\tilde{\mathfrak{D}}, \rho + 1) \not\subseteq S$, lo que es una contradicción. Se sigue que $p(S) = r + 1$. Ahora bien, si $\tilde{\mathfrak{D}}$ está en el tallo T de S , entonces está en la rama $S_0(\mathcal{O}_K[\eta])$ y sabiendo que $\delta(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}_i) = t \geq 0$, se debe cumplir que

$$\rho + t \leq s.$$

Se sigue que $t \leq s - r - 1$ y por lo tanto, $\text{diam}(T) = l_t(S) = 2\delta(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D}_i) + 1 = 2(s - r - 1) + 1 = 2(s - r) - 1$.

Supongamos ahora que $s \leq r$. Basta notar que $S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i])$, de donde $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$, por lo que $S = S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$. Se concluye que $p(S) = s$ y $l_t(S) = 1$.

- 2) $\alpha, \beta \in \Delta \mathcal{O}_K^{*2}$: Supongamos que $r \neq s$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $r < s$. Basta notar que $S_0(\mathcal{O}_K[i]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[1]})$, de donde $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$. Se sigue que $S = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$. Concluimos que $p(S) = r + 1 = \min\{r, s\} + 1$ y $l_t(S) = 0$.

Ahora suponemos que $r = s$. Basta notar que por Lema 4.2.1, $S = S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathfrak{H}_0^{[r]})$. Como $S_0(\mathfrak{H}_0) = \bullet \text{---} \bullet$, concluimos que $p(S) = r$, y $l_t(S) = 1$.

- 3) $\alpha \in \Delta \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \mathcal{U}$: Supongamos que $r < s$. Sabemos en este caso que $S_0(\mathcal{O}_K[i]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[1]})$. Se sigue que $S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$, por lo tanto $S = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$, lo cual indica que $p(S) = r + 1$ y $l_t(S) = 0$.

Ahora bien, si $s \leq r$, entonces basta notar que $S_0(\mathcal{O}_K[j]) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i])$, de donde $S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]}) \subseteq S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]})$. Se sigue que $S = S_0(\mathcal{O}_K[j]^{[s]})$. Luego, como $S_0(\mathcal{O}_K[j]) = \bullet \text{---} \bullet$, se concluye que $p(S) = s$ y $l_t(S) = 1$.

- 4) $\alpha, \beta \in \pi \mathcal{O}_K^* \cup \mathcal{U}$: Basta notar que $S_0(\mathcal{O}_K[i]) = S_0(\mathcal{O}_K[j]) = S_0(\mathfrak{H}_0) = \bullet \text{---} \bullet$. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $r \leq s$. Se sigue que

$$S = S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathcal{O}_K[\pi^r i]) = S_0(\mathcal{O}_K[i]^{[r]}),$$



de donde se concluye que $p(S) = r = \min\{r, s\}$ y $l_t(S) = 1$.

Por último, como en el caso en que K es no diádico, se sigue que $diam(S) = 2p(S) + l_t(S)$. Reemplazando por $p(S)$ y $l_t(S)$ las expresiones correspondientes en la tabla se obtienen las descritas para $diam(S)$. ■

Los cálculos descritos en este teorema se realizaron primero para \mathbb{Q}_2 , dichos cálculos están expuestos en el Apéndice B.

Capítulo 5

Ejemplos y Aplicaciones

5.1. Número de órdenes maximales que contienen a \mathfrak{H}

En términos de los invariantes, la siguiente proposición nos dice cuantos órdenes maximales contienen localmente al orden \mathfrak{H} :

Proposición 5.1.1. *Sean K un cuerpo local, \mathcal{O}_K su anillo de enteros, \mathfrak{A} un álgebra de cuaterniones localmente isomorfa al álgebra de matrices $\mathbb{M}_2(K)$ y sea el orden local $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$, donde π es un parámetro uniformizante en K . Sean $S = S_0(\mathfrak{H})$, $q = |\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K|$, $p(S)$ y $l_t(S)$ la profundidad y el largo respectivamente del tallo de S . Definimos $\aleph(S) = \#\mathcal{O}_K(\mathfrak{H})$. Entonces el árbol $S_0(\mathfrak{H})$ se obtiene engrosando en $p(S)$ un camino de largo $l_t(S)$, se tiene*

$$\aleph(S) = [l_t(S) + 1]q^{p(S)} + 2\frac{q^{p(S)} - 1}{q - 1}.$$

Demostración: La cantidad de vértices en el tallo es $l_t(S) + 1$. A cada vértice en el tallo, que no es extremo, se le agregan $(q - 1)$ vecinos. Los vértices en el tallo están a profundidad $p(S)$, los que siguen a profundidad $p(S) - 1$, así sucesivamente iterando $p(S)$ veces hasta llegar a los vértices a profundidad 0 (0-profundos). A los vértices extremos en el tallo, que son dos, se le agregan q vecinos y así sucesivamente, es decir,

$$\begin{aligned}
\aleph(S) &= (l_t(S) - 1)[1 + (q - 1) + (q - 1)q + (q - 1)q^2 + \dots + (q - 1)q^{p(S)-1}] + 2[1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{p(S)}] \\
&= (l_t(S) - 1) \left[1 + (q - 1) \sum_{k=0}^{p(S)-1} q^k \right] + 2 \left[\sum_{k=0}^{p(S)} q^k \right] \\
&= (l_t(S) - 1) \left[1 + (q - 1) \frac{q^{p(S)} - 1}{q - 1} \right] + 2 \frac{q^{p(S)+1} - 1}{q - 1} \\
&= (l_t(S) - 1)q^{p(S)} + 2 \frac{q^{p(S)+1} - 1}{q - 1} \\
&= \frac{(l_t(S) - 1)q^{p(S)+1} - (l_t(S) - 1)q^{p(S)} + 2q^{p(S)+1} - 2}{q - 1} \\
&= \frac{(l_t(S) + 1)q^{p(S)+1} - (l_t(S) - 1)q^{p(S)} - 2 + 2q^{p(S)} - 2q^{p(S)}}{q - 1} \\
&= \frac{(l_t(S) + 1)q^{p(S)+1} - (l_t(S) + 1)q^{p(S)} - 2 + 2q^{p(S)}}{q - 1} \\
&= \frac{[l_t(S) + 1]q^{p(S)}(q - 1) + 2(q^{p(S)} - 1)}{q - 1} \\
&= [l_t(S) + 1]q^{p(S)} + 2 \frac{q^{p(S)} - 1}{q - 1}.
\end{aligned}$$

En particular, se obtienen las siguientes tablas para $\aleph(S)$ en cada caso:

- K no diádico:

Casos	α, β	$\aleph(S)$
Caso 1	$\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^{*2}$	$[2 r - s + 1]q^{\min\{r,s\}} + 2 \frac{q^{\min\{r,s\}} - 1}{q - 1}$
Caso2(i)	$\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^*$	$\begin{cases} [2(s - r) + 1]q^r + 2 \frac{q^r - 1}{q - 1} & \text{si, } r < s \\ \frac{q^{s+1}(q + 1) - 2}{q - 1} & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
Caso2(ii)	$\alpha \in \mathcal{O}_K^{*2}, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$	$\begin{cases} 2(s - r + 1)q^r + 2 \frac{q^r - 1}{q - 1} & \text{si, } r < s \\ \frac{2q^s - 1}{q - 1} & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
Casos3(a3,b2)	$\alpha, \beta \in \Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\frac{q^{\min\{r,s\}}(q + 1) - 2}{q - 1}$
Casos3(a1,a2,b1)	$\alpha, \beta \in \pi\mathcal{O}_K^*$	$2 \frac{q^{\min\{r,s\}+1} - 1}{q - 1}$

Tabla 5.1: Número de órdenes maximales que contienen localmente a \mathfrak{f} cuando K es no diádico.

- K/\mathbb{Q}_2 no ramificado:

Casos	$\alpha \in$	$\beta \in$	$N(S)$
1(i)	\mathcal{O}_K^{*2}	\mathcal{O}_K^{*2}	$\begin{cases} [2 s-r -1]q^{\min\{r,s\}+1} + 2\frac{q^{\min\{r,s\}+1}-1}{q-1} & \text{si, } r \neq s \\ 2\frac{q^{r+1}-1}{q-1} & \text{si, } r = s \end{cases}$
1(ii)		$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\begin{cases} [2(s-r)-1]q^{r+1} + 2\frac{q^{r+1}-1}{q-1} & \text{si, } r < s \\ 2\frac{q^{r+1}-1}{q-1} & \text{si, } r = s \\ \frac{q^{s+1}(q+1)-2}{q-1} & \text{si, } s < r \end{cases}$
1(iii)		\mathfrak{U}	$\begin{cases} [2(s-r)-1]q^{r+1} + 2\frac{q^{r+1}-1}{q-1} & \text{si, } r < s \\ 2\frac{q^{s+1}-1}{q-1} & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
1(iv)		$\pi\mathcal{O}_K^*$	$\begin{cases} 2(s-r)q^{r+1} + 2\frac{q^{r+1}-1}{q-1} & \text{si, } r < s \\ 2\frac{q^{s+1}-1}{q-1} & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
2	$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\Delta\mathcal{O}_K^{*2}$	$\begin{cases} \frac{q^{\min\{r,s\}+1}(q+1)-2}{q-1}, & \text{si } r \neq s. \\ 2\frac{q^{r+1}-1}{q-1}, & \text{si } r = s. \end{cases}$
3		\mathfrak{U}	$\begin{cases} \frac{q^{r+1}(q+1)-2}{q-1}, & \text{si } r < s. \\ 2\frac{q^{s+1}-1}{q-1}, & \text{si } s \leq r. \end{cases}$
4	$\pi\mathcal{O}_K^* \cup \mathfrak{U}$		$2\frac{q^{\min\{r,s\}+1}-1}{q-1}$

 Tabla 5.2: Número de órdenes maximales que contienen localmente a \mathfrak{h} cuando K/\mathbb{Q}_2 no es ramificada.

5.2. Cálculo de la imagen Espinorial local relativa

En toda esta sección F es un cuerpo de números, $K = F_{\mathfrak{p}}$ es un cuerpo local con orden maximal \mathcal{O}_K y parámetro uniformizante π , \mathfrak{p} es un lugar en F . Sea \mathfrak{A} una F -álgebra de cuaterniones tal que $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{M}_2(K)$, y sea $N : \mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow K^*$ la norma reducida. Para cada par de órdenes $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}$ en $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ recordemos que la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) \subseteq K^*$ viene dada por:

$$H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{h}) = \{N(u)|u\mathfrak{h}u^{-1} \subseteq \mathfrak{D}\}.$$

Sea $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ un orden de Eichler de nivel d , es decir, $[\mathfrak{D}_i : \mathfrak{D}] = |\pi|_K^d$ para $i = 1, 2$. Notar que d es la distancia entre \mathfrak{D}_1 y \mathfrak{D}_2 en el árbol de Bruhat-Tits \mathfrak{T} de $\mathbb{M}_2(K)$. Se sigue de [1, §3] que para cada $r \geq 0$, si

$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}$, entonces $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}^{[r]}|\mathfrak{H}) \in \{\mathcal{O}_K^* K^{*2}, K^*\}$.

Consideremos el orden $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[\pi^r i, \pi^s j]$ y $S = S_0(\mathfrak{H})$. Notemos que, si $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$, entonces $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}_i$, para $i = 1, 2$, es decir, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in S$. Se sigue que $d \leq \text{diam}(S)$, es decir, $d \leq 2p(S) + l_t(S)$.

Lema 5.2.1. *Sea $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ un orden de Eichler de nivel d , \mathfrak{H} como antes, tal que $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}$, entonces,*

(1) *Si $d < \text{diam}(S)$ o $d = \text{diam}(S)$ y $\text{diam}(S)$ impar, entonces $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K^*$.*

(2) *Si $d = \text{diam}(S)$ y $\text{diam}(S)$ es par, entonces $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$.*

Demostración: *Se sigue de [1, Cor. 3.3] que $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = K^*$, si $d < \text{diam}(S)$ o $d = \text{diam}(S)$ es impar y por [1, Prop. 3.6] se concluye que $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \mathcal{O}_K^* K^{*2}$, si $d = \text{diam}(S)$ es par.*

5.3. Ejemplos:

Consideremos el cuerpo $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ y la extensión finita no ramificada Σ/F , con $\Sigma = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$. Notar que Σ es el *cuerpo de clase de Hilbert* de F [19, pág. 262]. Notemos que los primos racionales 3 y 5 ramifican en F/\mathbb{Q} . Sean $\mathfrak{3}_0$ y $\mathfrak{5}_0$ los lugares (ideales) en F sobre 3 y 5 respectivamente. Se observa que $\mathfrak{3}_0$ y $\mathfrak{5}_0$ son inertes en Σ/F . Por otra parte, el primo racional 2 se descompone en F/\mathbb{Q} , a saber, existen lugares (ideales) $\mathfrak{2}_1$ y $\mathfrak{2}_2$ de F sobre 2, tales que $\mathfrak{2}_1 \cdot \mathfrak{2}_2 = (2)$. Se observa que $\mathfrak{2}_1$ y $\mathfrak{2}_2$ son inertes en Σ/F . Notamos que los lugares $\mathfrak{2}_1$ y $\mathfrak{2}_2$ determinan cuerpos residuales isomorfos. Luego, por la Obs. 2.5.1 el cálculo del diámetro es el mismo para cada uno de estos lugares.

Sean \mathfrak{p} lugar en F y el orden $\mathfrak{H} := \mathcal{O}_F[i, j]$ con $i^2 = \alpha$ y $j^2 = \beta$ tal que $ij = -ji$. Veamos los siguientes ejemplos del cálculo de la imagen espinorial y del número de clases de órdenes maximales que admiten una incrustación de \mathfrak{H} :

- 1) Sean $\alpha = (-3)^a \alpha_0$ y $\beta = 5^b \beta_0$, con enteros, tales que $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2} \cup \Delta \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2}$ si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2$ y $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha_0) = \text{ord}_{\mathfrak{p}}(\beta_0) = z$, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2$.

Podemos calcular \mathfrak{H} localmente, el cual denotamos $\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}$, sabiendo que:

- a) α y β son unidades en $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$, si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2, \mathfrak{3}_0, \mathfrak{5}_0$.
- b) α y β están en $\pi^z \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*$, con π parámetro uniformizante, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{2}_1, \mathfrak{2}_2$.
- c) $\alpha = \pi^{2a} \alpha_0$ y β es unidad, con π parámetro uniformizante, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{3}_0$.
- d) α es unidad y $\beta = \pi^{2b} \beta_0$, con π parámetro uniformizante, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{5}_0$.

De aquí se deduce que:

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}[i, j], & \text{si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2, \mathbf{3}_0, \mathbf{5}_0, \text{ con } i^2, j^2 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*. \\ \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}[\pi^\lambda i_0, \pi^\lambda j_0], & \text{si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2 \text{ con } i_0^2, j_0^2 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}. \\ \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}[\pi^a i_0, j], & \text{si } \mathfrak{p} = \mathbf{3}_0, \text{ con } i_0^2, j^2 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*. \\ \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}[i, \pi^b j_0], & \text{si } \mathfrak{p} = \mathbf{5}_0, \text{ con } i^2, j_0^2 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^*. \end{cases}$$

donde $i_0^2 = \alpha_0$, $j_0^2 = \beta_0$, $\lambda = 2 \left[\frac{z+1}{2} \right] - 1$ y $[x]$ es la función parte entera.

En virtud de los teoremas 3.2.1 y 4.2.1, podemos calcular el diámetro de la 0-rama $S = S_0(\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$, el cual está descrito como sigue:

$$\text{diam}(S) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2, \mathbf{3}_0, \mathbf{5}_0. \\ \lambda & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2. \\ 2q(a) & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{3}_0. \\ 2w(b) & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{5}_0. \end{cases}$$

Donde $q(a)$ y $w(b)$ se obtienen mediante las siguientes tablas:

		$\alpha_0 \in$	
	$q(a)$	\mathcal{O}_K^{*2}	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$
$\beta \in$	\mathcal{O}_K^{*2}	a	a
	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$	0	0

		$\alpha \in$	
	$w(b)$	\mathcal{O}_K^{*2}	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$
$\beta_0 \in$	\mathcal{O}_K^{*2}	b	0
	$\Delta \mathcal{O}_K^{*2}$	b	0

Tabla 5.3: Valores de $q(a)$ y $w(b)$

Consideremos un orden de Eichler \mathfrak{D} de nivel $d = \text{diam}(S)$ localmente. Se sigue del lema 5.2.1 que la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$ para cada lugar \mathfrak{p} es:

$$H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = \begin{cases} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* F_{\mathfrak{p}}^{*2} & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2, \mathbf{3}_0, \mathbf{5}_0. \\ F_{\mathfrak{p}}^* & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2. \\ \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* F_{\mathfrak{p}}^{*2} & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{3}_0, \mathbf{5}_0. \end{cases}$$

Se concluye que en los lugares $\mathfrak{p} = \mathbf{2}_1$ o $\mathfrak{p} = \mathbf{2}_2$ se tiene $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = F_{\mathfrak{p}}^*$ y $F_{\mathfrak{p}}^* \not\subseteq H_{\Sigma}(\mathfrak{p} \text{ inerte en } \Sigma/F)$.

Se sigue que

$$F^* H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = J_F.$$

En conclusión, el correspondiente cuerpo de clase espinorial y de representación es F (ver Def. 2.6.7), y por lo tanto el orden \mathfrak{H} se incrusta en todos los órdenes maximales en \mathfrak{A} (de hecho, hay una única clase).

2) Sean $0 \leq r < s$ enteros, $\alpha = 2^{2r}\alpha_0$ y $\beta = 2^{2s}\beta_0$, tales que α_0 y β_0 son unidades globales y $F_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\alpha_0})/F_{\mathfrak{p}}$ es una extensión no ramificada. Entonces localmente para α y β se cumple que:

- a) α y β son unidades, si $\mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2$.
- b) $\alpha = \pi^{2r}u$ y $\beta = \pi^{2s}v$, con u, v unidades y π un parámetro uniformizante, si $\mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2$

Se sigue que localmente el orden \mathfrak{H} es de la forma:

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}[i, j] & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2, \text{ con } i^2, j^2 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* . \\ \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}[\pi^r i_0, \pi^s j_0] & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2, \text{ con } i_0^2, j_0^2 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* . \end{cases}$$

Se sigue que el diámetro del árbol $S = S_0(\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$ es:

$$\text{diam}(S) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \mathfrak{p} \neq \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2 . \\ 2q(r, s) & , \text{ si } \mathfrak{p} = \mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2 . \end{cases}$$

Donde

$$q(r, s) = \begin{cases} s & , \text{ si } \alpha_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2}, \beta_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* . \\ r + 1 & , \text{ si } \alpha_0 \in \Delta\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^{*2}, \beta_0 \in \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* . \end{cases}$$

De aquí, la imagen espinorial local relativa $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}})$, con \mathfrak{D} de nivel $\text{diam}(S)$ localmente para cada lugar \mathfrak{p} es:

$$H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}^* F_{\mathfrak{p}}^{*2}, \text{ para todo lugar no arquimediano } \mathfrak{p} \text{ en } F.$$

Luego, como no hay lugares inertes en Σ/F tales que $H_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}|\mathfrak{H}_{\mathfrak{p}}) = F_{\mathfrak{p}}^*$, se concluye que

$$F^*H(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = H_{\Sigma}.$$

Se comprueba que el cuerpo de representación (ver 2.6.8) es $E(\mathfrak{D}|\mathfrak{H}) = \Sigma$. En este caso se dice que el orden \mathfrak{H} es selectivo en $\text{gen}(\mathfrak{D})$, es decir, el orden \mathfrak{H} se incrusta sólo en una de las dos clases de conjugación de órdenes maximales.

Apéndice A

Tabla de símbolos de Hilbert $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$

Consideramos $K = F_{\mathfrak{p}}$ un cuerpo local no diádico en todo lo que sigue. Como $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\eta^2, \beta\lambda^2}{\mathfrak{p}}\right)$, $\forall \eta, \lambda \in K^*$, basta calcular $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ para $\alpha, \beta \in \{1, \Delta, \pi, \Delta\pi\}$ pues $K^*/K^{*2} = \{\bar{1}, \bar{\Delta}, \bar{\pi}, \bar{\Delta\pi}\}$. Los cálculos se encuentran en las siguientes tablas y son justificadas posteriormente:

$-1 \in K^{*2}$				
$\left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}}\right)$	1	Δ	π	$\Delta\pi$
1	1	1	1	1
Δ	1	1	-1	-1
π	1	-1	1	-1
$\Delta\pi$	1	-1	-1	1

Tabla A.1: Cálculos de símbolo de Hilbert para clases de cuadrados en K , con $-1 \in K^{*2}$.

$-1 \notin K^{*2}$				
$\left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}}\right)$	1	Δ	π	$\Delta\pi$
1	1	1	1	1
Δ	1	1	-1	-1
π	1	-1	-1	1
$\Delta\pi$	1	-1	1	-1

Tabla A.2: Cálculos de símbolo de Hilbert para clases de cuadrados en K , con $-1 \notin K^{*2}$.

Es claro que $\left(\frac{1, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \forall \beta \in K^*$. Usando el hecho de que $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\beta, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ y en virtud de [13, 63:11a] se obtiene:

$$\left(\frac{\Delta, \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi, \Delta}{\mathfrak{p}}\right) = -1, \quad \left(\frac{\Delta, \Delta\pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\Delta\pi, \Delta}{\mathfrak{p}}\right) = -1, \quad \left(\frac{\Delta, \Delta}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

De la Proposición 57:10 en [13] se desprenden particularmente las siguientes propiedades:

$$\text{i) } \left(\frac{\alpha, 1-\alpha}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\alpha, -\alpha}{\mathfrak{p}} \right) = 1.$$

$$\text{ii) } \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}} \right) \left(\frac{\alpha, \gamma}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\alpha, \beta\gamma}{\mathfrak{p}} \right)$$

$$\text{iii) } \left(\frac{\alpha, \alpha\beta}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\alpha, -\beta}{\mathfrak{p}} \right).$$

Resta calcular $\left(\frac{\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right)$, $\left(\frac{\pi, \Delta\pi}{\mathfrak{p}} \right)$ y $\left(\frac{\Delta\pi, \Delta\pi}{\mathfrak{p}} \right)$.

1) **Cálculo para la Tabla A.1:**

Supongamos que $-1 \in K^{*2}$, a saber, existe $a \in K^*$ tal que $a^2 = -1$. Se sigue por las propiedades descritas anteriormente que:

$$\left(\frac{\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, a^2\pi}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, -\pi}{\mathfrak{p}} \right) = 1.$$

$$\left(\frac{\pi, \Delta\pi}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, \Delta}{\mathfrak{p}} \right) \left(\frac{\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right) = (-1)(1) = -1.$$

$$\left(\frac{\Delta\pi, \Delta\pi}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\Delta\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right) \left(\frac{\Delta\pi, \Delta}{\mathfrak{p}} \right) = (-1)(-1) = 1.$$

2) **Cálculo para la Tabla A.2:**

Supongamos que $-1 \notin K^{*2}$, de donde existe $a \in K^*$ tal que $-1 = \Delta a^2$. Se sigue por las propiedades descritas anteriormente que:

$$-1 = \left(\frac{\pi, \Delta}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, \Delta a^2}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, -1}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right).$$

$$\left(\frac{\pi, \Delta\pi}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\pi, \Delta}{\mathfrak{p}} \right) \left(\frac{\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right) = (-1)(-1) = 1.$$

$$\left(\frac{\Delta\pi, \Delta\pi}{\mathfrak{p}} \right) = \left(\frac{\Delta\pi, \pi}{\mathfrak{p}} \right) \left(\frac{\Delta\pi, \Delta}{\mathfrak{p}} \right) = (1)(-1) = -1.$$

Apéndice B

$$K = \mathbb{Q}_2$$

El siguiente apéndice contiene los cálculos originales para el cuerpo local \mathbb{Q}_2 , estos resultados dieron lugar a los cálculos desarrollados en general en el capítulo 4, en donde consideramos la extensión K/\mathbb{Q}_2 no ramificada y en el cual son demostrados con mayor generalidad.

B.1. α, β libres de cuadrados

Consideremos el cuerpo local diádico $K = \mathbb{Q}_2$ y retomemos el orden $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[i, j] = \mathbb{Z}_2[i, j]$. Al igual que en el capítulo 3 podemos suponer primero que α, β son libres de cuadrados y dado esto basta conocerlos módulo cuadrados, es decir, en que clase de cuadrados están en el grupo, $\mathbb{Q}_2^*/\mathbb{Z}_2^{*2} = \{\pm\bar{1}, \pm\bar{2}, \pm\bar{5}, \pm\bar{10}\}$. Recordemos que por hipótesis, necesitamos que $\left(\frac{\alpha, \beta}{2}\right) = 1$. La siguiente tabla obtenida de [14, Apéndice], resume $\left(\frac{\alpha, \beta}{2}\right)$:

$\left(\frac{\cdot}{2}\right)$	1	-1	2	-2	5	-5	10	-10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
2			1	1	-1	-1	-1	-1
-2				-1	-1	1	-1	1
5					1	1	-1	-1
-5						-1	-1	1
10							1	1
-10								-1

Tabla B.1: Símbolo de Hilbert para clases de cuadrados en \mathbb{Q}_2 .

Se desprenden los siguientes casos acordes a la hipótesis, nótese que podemos permutar α y β , ya que $\mathbb{Z}_2[i, j] = \mathbb{Z}_2[j, i]$:

- 1) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^{*2}$.
- 2) $\alpha \in \mathbb{Z}_2^{*2}$ y $\beta \notin \mathbb{Q}_2^{*2}$. Aquí β cumple una de las siguientes:
 - i) $\beta \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$.
 - ii) $\beta \in (-1)\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$.
 - iii) $\beta \in u\mathbb{Z}_2^{*2}$, donde $u \in \{\pm 2, \pm 10\}$.
- 3) $\alpha = (-1)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos suponer que β cumple una de las siguientes:
 - i) $\beta = 5\mathbb{Z}_2^{*2}$.
 - ii) $\beta \in 2\mathbb{Z}_2^{*2} \cup 10\mathbb{Z}_2^{*2}$.
- 4) $\alpha \in 2\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos suponer que $\beta \in 2\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-2)\mathbb{Z}_2^{*2}$.
- 5) $\alpha \in (-2)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos suponer que β cumple una de las siguientes:
 - i) $\beta \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$.
 - ii) $\beta \in (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$.
- 6) $\alpha \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos suponer que β cumple una de las siguientes:
 - i) $\beta \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$.
 - ii) $\beta \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$.
- 7) $\alpha \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos suponer que $\beta \in (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$.
- 8) $\alpha \in 10\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos suponer que $\beta \in 10\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$.

Observación B.1.1. Para evitar confusión de notación más adelante y sin pérdida de generalidad, supondremos $\alpha, \beta \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$.

Debemos conocer que tipo de álgebra generan i y j sobre \mathbb{Q}_2 . En particular, para i se tiene:

- a) Si $\alpha \in \{-1, -5, \pm 2, \pm 10\}$, entonces la extensión cuadrática $\mathbb{Q}_2(i)/\mathbb{Q}_2$ es totalmente ramificada.
- b) Si $\alpha = 5$, entonces la extensión cuadrática $\mathbb{Q}_2(i)/\mathbb{Q}_2$ es no ramificada.
- c) Si $\alpha = 1$, entonces $\mathbb{Q}_2[i] \cong \mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2$.

Observación B.1.2. La descripción anterior para α y el tipo de extensión, vale para β , es decir, para la extensión $\mathbb{Q}_2(j)/\mathbb{Q}_2$.

Se quiere describir $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$, para lo cual se requiere conocer $\mathbb{Z}_2[i, j]$. Recordemos que $\mathbb{Q}_2(i)/\mathbb{Q}_2$ puede ser una extensión cuadrática o un producto de cuerpos, con $i^2 = \alpha$, por lo que el anillo de enteros asociado a dicha extensión debe tener la forma [17, Ex.§7.1]:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_2[i]} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[i] & , \quad \text{si } \alpha \in \{-1, \pm 2, -5, \pm 10\} \\ \mathbb{Z}_2\left[\frac{i+1}{2}\right] & , \quad \text{si } \alpha \in \{1, 5\}. \end{cases}$$

Análogamente para j , tenemos que $j^2 = \beta$, por lo que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_2[j]} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[j] & , \quad \text{si } \beta \in \{-1, \pm 2, -5, \pm 10\} \\ \mathbb{Z}_2\left[\frac{j+1}{2}\right] & , \quad \text{si } \beta \in \{1, 5\}. \end{cases}$$

Observación B.1.3. Si $\alpha, \beta \in \{1, 5\}$, sean $\eta = \frac{i+1}{2}$, $\omega = \frac{j+1}{2}$. Se sigue que, $i = 2\eta - 1$, $j = 2\omega - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} ij &= (2\eta - 1)(2\omega - 1) \\ &= 4\eta\omega - 2(\eta + \omega) + 1. \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} ji &= (2\omega - 1)(2\eta - 1) \\ &= 4\omega\eta - 2(\omega + \eta) + 1. \end{aligned}$$

Como $ij = -ji$, se tiene que

$$\begin{aligned} 4\eta\omega - 2(\eta + \omega) + 1 &= -4\omega\eta + 2(\omega + \eta) - 1 \\ 4(\eta + \omega) - 4(\eta\omega + \omega\eta) &= 2 \\ \eta + \omega - \eta\omega - \omega\eta &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_2[\eta, \omega]$, se sigue que para ningún isomorfismo de álgebras $\psi : \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathbb{Q}_2}\right) \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{Q}_2)$, es posible que se tenga $\psi(\eta), \psi(\omega) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ simultáneamente, es decir, η, ω no están contenidos en un mismo orden.

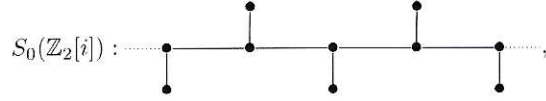
Además, en las notaciones de la definición 2.5.4 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2[i] &= \mathbb{Z}_2[2\eta - 1] \\ &= \mathbb{Z}_2[2\eta] \\ &= 2\mathbb{Z}_2[\eta] + \mathbb{Z}_2 \\ &= \mathbb{Z}_2[\eta]^{[1]}. \end{aligned}$$

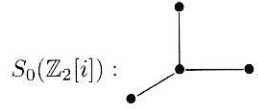
análogamente con j

$$\mathbb{Z}_2[j] = \mathbb{Z}_2[\omega]^{[1]}.$$

De aquí, obtenemos que si $\alpha = 1$, respectivamente $\alpha = 5$, entonces $S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[\eta]^{[1]})$, respectivamente $S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[\omega]^{[1]})$. Ahora bien, si $\alpha = 1$, entonces $\mathbb{Q}_2[\eta] \cong \mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2$ y $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta])$ es un camino infinito. Por otro lado, si $\alpha = 5$, entonces $\mathbb{Q}_2(\eta)/\mathbb{Q}_2$ es no ramificada y $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta])$ es un punto, análogamente con β . En conclusión, por [1, Prop. 2.4], si $\alpha = 1$, $S_0(\mathbb{Z}_2[i])$ se obtiene engrosando en 1 un camino infinito, y respectivamente un punto si $\alpha = 5$. Es decir, si $\alpha = 1$:



respectivamente, si $\alpha = 5$:



Notar que cuando $\alpha \in \{-1, -5, \pm 2, \pm 10\}$, entonces la extensión L/\mathbb{Q}_2 , con $L = \mathbb{Q}_2(i)$, es ramificada, por lo que los órdenes maximales que contienen a $\mathcal{O}_K[i]$ son sólo dos y son conjugados:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \pi_L \mathcal{O}_K \\ \pi_L^{-1} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix},$$

los cuales son claramente vecinos.

En lo que sigue, buscaremos el árbol $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$ para los distintos casos enumerados anteriormente. Recuerde que i y j , tienen representaciones en $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, las que usaremos a conveniencia para hacer los cálculos más fáciles.

Bajo el mismo argumento realizado en el capítulo 3, para encontrar $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$, debemos calcular los subespacios invariantes de $(\mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2)^2 \cong \mathbb{F}_2^2$ bajo la acción de las transformaciones \bar{i}, \bar{j} , que son las imágenes de i, j en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_2)$.

- 1) α, β son cuadrados y sabemos que $2^2 \nmid \alpha, \beta$, de donde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos asumir que $\alpha = \beta = 1$, y además que $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$.

Se sigue que el subespacio de \mathbb{F}_2^2 generado por el vector $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$, es el único subespacio invariante bajo la acción de \bar{i}, \bar{j} . Se concluye de [1, §3], [2, §3] y [2, Lema 3.1] que $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$ está contenido en más

de un orden maximal. Ahora bien, sea $\eta = \frac{i+1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nótese que por B.1.3 $\mathbb{Z}_2[i] = \mathbb{Z}_2[\eta]^{[1]}$,

donde $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta])$ es un camino infinito. Por otra parte, $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que \mathbb{F}_2^2 es el unico espacio

invariante no nulo bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} . Se concluye que, $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta, j])$ está contenido en un único orden maximal \mathfrak{D} , es decir, $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta])$ y $S_0(\mathbb{Z}_2[j])$ se intersectan en sólo un punto, como indica la figura B.1:



Figura B.1:

por lo tanto, se tiene que $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$ consta sólo de dos puntos, y su posición relativa esta descrita por la siguiente figura B.2:

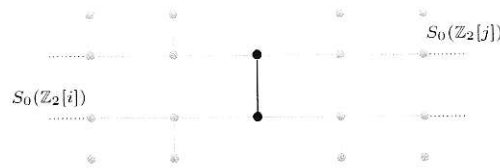


Figura B.2:

Se sigue que,

$$S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = \bullet \text{---} \bullet.$$

2) $\alpha \in \mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $\alpha = 1$. Consideremos la identificación $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sea

$\eta = \frac{i+1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notemos que $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta])$ es un camino infinito. Se desprenden los casos siguientes para β :

i) $\beta \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que, $\beta = 5$.

Sea $j = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, notemos que $ij = -ji$, entonces, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que,

$\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$, es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} , por lo tanto, $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal.

Además, $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$, de modo que el único subespacio invariante no nulo bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} tiene dimensión 2. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_2[\eta, j]$ está contenido en un único orden maximal \mathfrak{D} .

La figura B.3 describe la posición relativa de $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta, j])$:

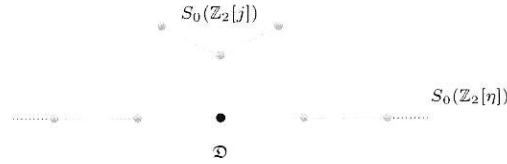


Figura B.3:

Se sigue que, $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$ consta sólo de dos puntos, como indica la figura B.4:

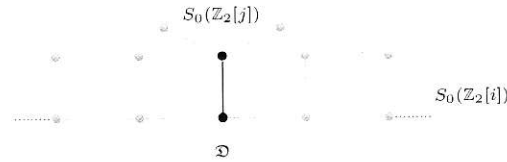


Figura B.4:

ii) $\beta \in (-1)\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que, β es -1 ó -5 . Hagamos $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $j = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de modo que se cumple $ij = -ji$, y además, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i}, \bar{j} , es decir, $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido

en más de un orden maximal. Por otra parte, si $\eta = \frac{i+1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se concluye que el único subespacio invariante no nulo bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} tiene dimensión 2, es decir, $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta, j])$ consta de un sólo punto \mathfrak{D} . La siguiente figura B.5 describe la posición relativa:

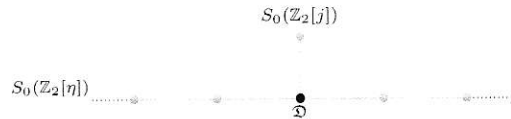


Figura B.5:

por lo que al engrosar en 1 $S_0(\mathcal{Z}_2[\eta])$ obtenemos, $S_0(\mathbb{Z}_2[j]) \subseteq S_0(\mathbb{Z}_2[\eta]^{[1]}) = S_0(\mathbb{Z}_2[i])$, y por lo tanto, $S_0(\mathcal{S})$ consta sólo de dos puntos, como describe la figura B.6:

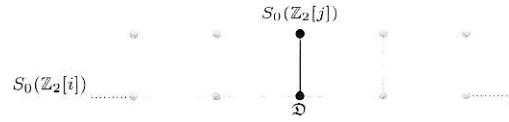


Figura B.6:

En particular, $S_0(\mathcal{S}) = S_0(\mathbb{Z}_2[j])$.

- iii) $\beta \in u\mathbb{Z}_2^{*2}$, donde $u \in \{\pm 2, \pm 10\}$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad que β es u . Sea $j = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se cumple que $ij = -ji$, y además, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} , es decir, $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal. Por otra parte, sea $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se concluye que un subespacio invariante bajo la acción de $\bar{\eta}$ y \bar{j} es $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$, es decir, $S_0(\mathbb{Z}_2[j]) \subseteq S_0(\mathbb{Z}_2[\eta])$. Se sigue que $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta, j])$ consta de dos puntos, como indica la figura B.7:

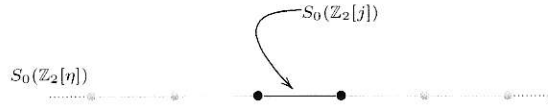


Figura B.7:

Se concluye que $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j])$, como indica la figura B.8:

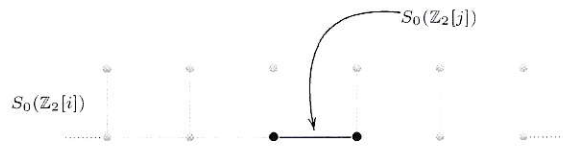


Figura B.8:

- 3) $\alpha \in (-1)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $\alpha = -1$. Consideremos la identificación $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tenemos las siguientes posibilidades para β :

- i) $\beta \in (5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Asumimos $\beta = 5$. Sea $j = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$. Entonces, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$

y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$, es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Se concluye que $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal, es decir, $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i])$, el cual consta de dos puntos, y su posición relativa es como indica la figura B.9:

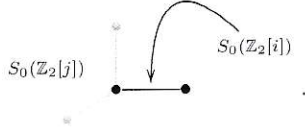


Figura B.9:

ii) $\beta \in 2\mathbb{Z}_2^{*2} \cup 10\mathbb{Z}_2^{*2}$. Asumimos $\beta \in \{2, 10\}$. Sea $j = \begin{pmatrix} -w & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix}$, donde $w \in \{1, 3\}$. Notar que

$j^2 \in \{2, 10\}$, e $ij = -ji$. Entonces, $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$ y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . En conclusión, $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal, es decir $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = \bullet \text{---} \bullet$.

4) $\alpha \in 2\mathbb{Z}_2^{*2}$, entonces $\beta \in 2\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-2)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad asumimos $\alpha = 2$ y $\beta \in \{2, -2\}$.

Sean $i = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $j \in \left\{ \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Notar que $i^2 = 2$, $j^2 \in \{2, -2\}$, e $ij = -ji$.

Entonces, se tiene que $\bar{i} = \bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} .

Se concluye que, $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal, es decir $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = \bullet \text{---} \bullet$.

5) $\alpha \in (-2)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad asumimos $\alpha = -2$. Sea $i = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notamos que $-7 \equiv 1 \pmod{8}$, luego $-7 \in \mathbb{Z}_2^{*2}$. Se sigue que $\sqrt{-7} \in \mathbb{Z}_2^*$. Considerando esto tenemos los siguientes casos para

β :

i) $\beta \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Asumimos $\beta = -5$. Sea $j = \begin{pmatrix} -\sqrt{-7} & 2 \\ 1 & \sqrt{-7} \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$. Entonces,

$\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$, y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$, es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} .

Concluimos que $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = \bullet \text{---} \bullet$.

ii) $\beta \in (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Asumimos $\beta = -10$. Sea $j = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{-7} \\ \sqrt{-7} & -2 \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$. Entonces

$\bar{i} = \bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Concluimos que $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = \bullet \text{---} \bullet$.

6) $\alpha \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad asumimos $\alpha = 5$. Tenemos las siguientes posibilidades para β :

i) $\beta \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Asumimos $\beta = -5$. Sean $i = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$.

Entonces, $\bar{i} = \bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} .

Concluimos que, $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j])$. La figura B.10 indica la posición relativa de las ramas:

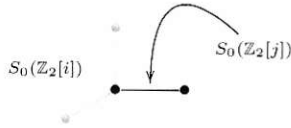


Figura B.10:

ii) $\beta \in (5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Asumimos $\beta = 5$. Sean $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$. Entonces,

$\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$, y $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Se

concluye que, $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal. Definimos $\eta = \frac{i+1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

y $\omega = \frac{j+1}{2}$, se sigue como en la observación B.1.3, que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_2[\eta, \omega]$, por lo cual, no existe orden que contenga a $\mathbb{Z}_2[\eta, \omega]$, de donde $S_0(\mathbb{Z}_2[\eta, \omega]) = \emptyset$. Por lo tanto $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j])$ tiene la forma que indica la

figura B.11:

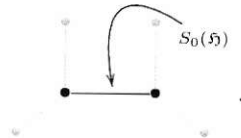


Figura B.11:

- 7) $\alpha \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$ y $\beta \in (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $\alpha = -5$ y $\beta = -10$. Sean $i = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} -5 & 5\sqrt{-7} \\ \sqrt{-7} & 5 \end{pmatrix}$. Notar que $ij = -ji$. Entonces $\bar{i} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$, $\bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{1} \ \bar{1})^T \rangle$ es invariante bajo la acción de \bar{i}, \bar{j} , por lo que $\mathbb{Z}_2[i, j]$ está contenido en más de un orden maximal. Se concluye que $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = \bullet \text{---} \bullet$.
- 8) $\alpha \in 10\mathbb{Z}_2^{*2}$, entonces $\beta \in 10\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $\alpha = 10$ y $\beta \in \{10, -10\}$. Sean $i = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $j \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & -30 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \right\}$. Notar que $ij = -ji$. Entonces, $\bar{i} = \bar{j} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Se sigue que $\langle (\bar{0} \ \bar{1})^T \rangle$, es invariante bajo la acción de \bar{i} y \bar{j} . Concluimos que, $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]) = \bullet \text{---} \bullet$.

La siguiente tabla resume las posiciones relativas de las ramas en cada caso:

α	β	$S_0(\mathfrak{h})$
1	1	
	5	
	$\in \{-1, -5\}$	
	$\in \{\pm 2, \pm 10\}$	
-1	5	
	$\in \{2, 10\}$	
2	$\in \{2, -2\}$	
	-5	
-2	-10	
	5	
5	5	
	-10	
-5	-10	
10	$\in \{10, -10\}$	

Tabla B.2: Intersccciones, i.e $S_0(\mathfrak{h})$.

B.2. Caso general

Consideremos los órdenes $\mathfrak{H}_0 = \mathbb{Z}_2[i, j]$ y $\mathfrak{H} = \mathbb{Z}_2[2^r i, 2^s j]$, veamos las ramas $S = S_0(\mathfrak{H})$ para los distintos casos. Aquí denotamos los puntos en el tallo con el símbolo \star y sus aristas con doble línea:

- 1) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^{*2}$. En este caso, sabemos que $S_0(\mathfrak{H}_0)$ tiene dos puntos, digamos $S_0(\mathfrak{H}) = \{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $r < s$, de modo que la 0-rama, en general, tiene la forma dada en la figura B.12:

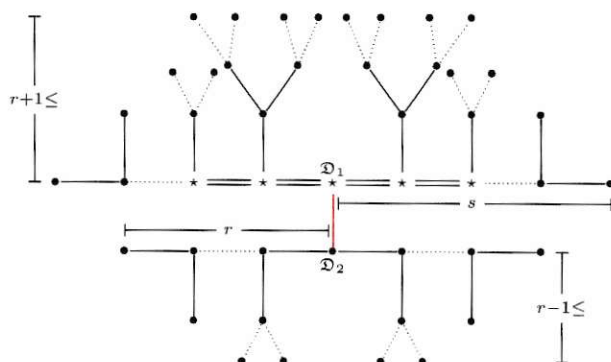


Figura B.12:

Notar que, $S_0(\mathfrak{H})$ contiene a los órdenes maximales a distancia menor o igual que r a \mathfrak{D}_2 hacia abajo y los órdenes a distancia menor o igual que s a \mathfrak{D}_1 hacia arriba.

Ahora bien, si $r = s$, entonces la 0-rama tiene la forma de la figura B.13:

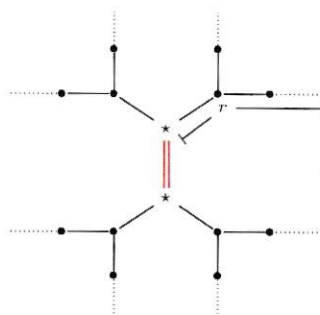


Figura B.13:

2) $\alpha \in \mathbb{Z}_2^{*2}$,

i) $\beta \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$. Si $r \leq s$ entonces $S_0(\mathfrak{h})$ tiene la forma de la figura B.14:

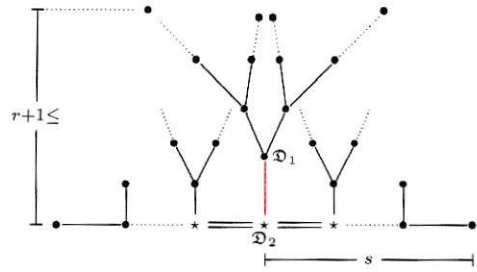


Figura B.14:

Notar que $S_0(\mathfrak{h})$ contiene a los órdenes a distancia menor o igual que r de \mathfrak{D}_1 hacia arriba y a los órdenes a distancia menor o igual que s de \mathfrak{D}_2 hacia el lado. Por otra parte, sabemos que,

$$S_0(\mathbb{Z}_2[j]) \subset S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[1]}).$$

Entonces, si $s < r$, se sigue que $S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]}) \subset S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]})$, por lo tanto

$$S_0(\mathfrak{h}) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]}).$$

Concluimos que la rama tiene un centro (tallo de largo cero) como indica la figura B.15:

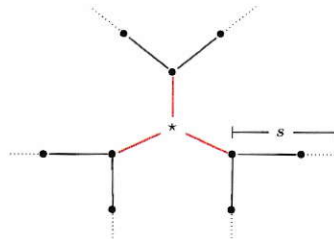


Figura B.15:

ii) $\beta \in (-1)\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Si $s \leq r$, se sigue que $S_0(\mathfrak{h}) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]})$, como indica la figura B.16:



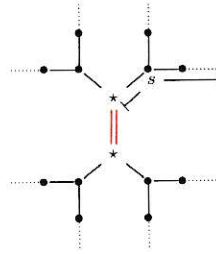


Figura B.16:

Notemos que si $r < s$, el árbol tiene la forma ya descrita en la figura B.14.

iii) $\beta \in \{\pm 2, \pm 10\}$. Si $r < s$, entonces el árbol $S_0(\mathfrak{h})$ tiene la forma dada en la figura B.17:

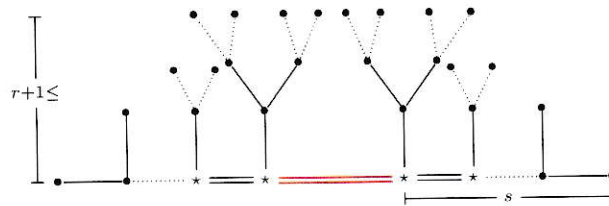


Figura B.17:

Por otra parte, si $s \leq r$, entonces $S_0(\mathfrak{h}) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]})$. Se sigue que el árbol, en general, tiene la forma dada en la figura B.18:

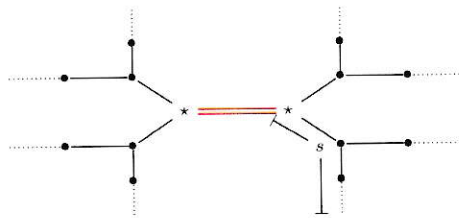


Figura B.18:

3) $\alpha \in (-1)\mathbb{Z}_2^{*2}$.

i) $\beta \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$. Sabemos que $S_0(\mathbb{Z}_2[i]) \subset S_0(\mathbb{Z}_2[j])$. Ahora bien, si $r \leq s$, entonces $S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]}) \subset S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]})$, de donde

$$S_0(\mathfrak{h}) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]}),$$

como indica la figura B.19:

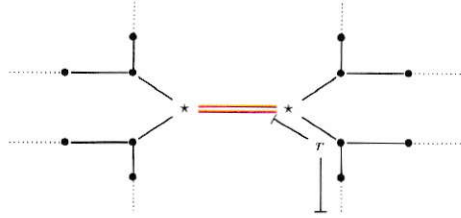


Figura B.19:

Por otra parte, sabemos que $S_0(\mathbb{Z}_2[j]) \subset S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[1]})$, entonces si $s < r$, se sigue que,

$$\begin{aligned} S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]}) &\subset S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]}) \\ \Rightarrow S_0(\mathfrak{H}) &= S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]}), \end{aligned}$$

como indica la figura B.20:

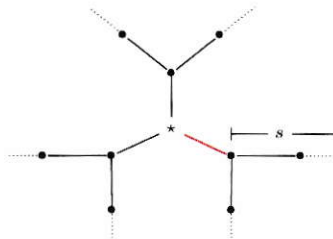


Figura B.20:

- ii) $\beta \in 2\mathbb{Z}_2^{*2} \cup 10\mathbb{Z}_2^{*2}$. Notar que, en general, para estos caso se tiene $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j])$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $r \leq s$. Se concluye que $S_0(\mathfrak{H}) = S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]})$. Luego, el árbol está descrito por la siguiente figura B.21:

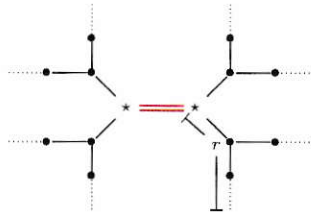


Figura B.21:

- 4) $\alpha \in 2\mathbb{Z}_2^{*2}$, $\beta \in 2\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-2)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Este caso es similar al caso 3(ii).
- 5) $\alpha \in (-2)\mathbb{Z}_2^{*2}$,
- i) $\beta \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Este caso es similar al caso 3(ii).

ii) $\beta \in (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Este caso es similar al caso **3(ii)**.

6) $\alpha \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$,

i) $\beta \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Este caso es similar al caso **3(i)**.

ii) $\beta \in 5\mathbb{Z}_2^{*2}$. Supongamos $r \neq s$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $r < s$, ya que $S_0(\mathbb{Z}_2[i])$ y $S_0(\mathbb{Z}_2[j])$ son similares. Además, $S_0(\mathbb{Z}_2[i]) = S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[1]})$. Se sigue que

$$\begin{aligned} S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]}) &\subset S_0(\mathbb{Z}_2[j]^{[s]}) \\ \Rightarrow S_0(\mathfrak{H}) &= S_0(\mathbb{Z}_2[i]^{[r]}). \end{aligned}$$

Se concluye que el árbol $S_0(\mathfrak{H})$ es como se observa en la figura B.22:

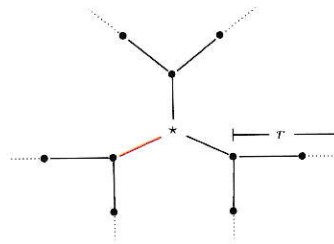


Figura B.22:

Ahora bien, si $r = s$, entonces $S_0(\mathfrak{H})$ se obtiene engrosando en r , el árbol $S_0(\mathbb{Z}_2[i, j]) = \bullet \text{---} \bullet$, por un razonamiento similar al caso **3(i)**, como indica la figura B.23:

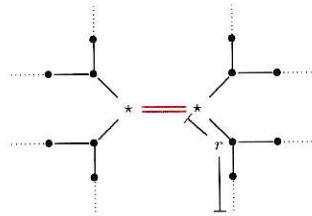


Figura B.23:

7) $\alpha \in (-5)\mathbb{Z}_2^{*2}, \beta \in (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Este caso es similar al caso **3(ii)**.

8) $\alpha \in 10\mathbb{Z}_2^{*2}, \beta \in 10\mathbb{Z}_2^{*2} \cup (-10)\mathbb{Z}_2^{*2}$. Este caso es similar al caso **3(ii)**.

Podemos establecer la siguiente tabla de invariantes correspondientes a cada caso. La demostración se dió en detalle, para el caso general, en el capítulo 4:

Casos	$\alpha \in$	$\beta \in$	$p(S)$	$l_i(S)$	$diam(S)$
1	$\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} \min\{r, s\} + 1 & \text{si, } r \neq s \\ r & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2(r-s -1) & \text{si, } r \neq s \\ 1 & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2\max\{r, s\} & \text{si, } r \neq s \\ 2r+1 & \text{si, } r = s \end{cases}$
2(i)		$5\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} \min\{r, s\} + 1 & \text{si, } r \neq s \\ r & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2(s-r-1) & \text{si, } r < s \\ 1 & \text{si, } r = s \\ 0 & \text{si, } s < r \end{cases}$	$\begin{cases} 2s & \text{si, } r < s \\ 2r+1 & \text{si, } r = s \\ 2(s+1) & \text{si, } s < r \end{cases}$
2(ii)		$(-1)\mathbb{Z}_2^{s^2} \cup (-5)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} r+1 & \text{si, } r < s \\ s & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2(s-r-1) & \text{si, } r < s \\ 0 & \text{si, } r = s \\ 1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2s & \text{si, } r < s \\ 2s+1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$
2(iii)		$2\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} r+1 & \text{si, } r < s \\ s & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 2(s-r)-1 & \text{si, } r < s \\ 1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$2s+1$
3(i)	$(-1)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$5\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} r & \text{si, } r \leq s \\ s+1 & \text{si, } s < r \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & \text{si, } r \leq s \\ 0 & \text{si, } s < r \end{cases}$	$\begin{cases} 2r+1 & \text{si, } r \leq s \\ 2(s+1) & \text{si, } s < r \end{cases}$
3(ii)		$2\mathbb{Z}_2^{s^2} \cup 10\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\min\{r, s\}$	1	$2 \min\{r, s\} + 1$
4	$2\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$2\mathbb{Z}_2^{s^2} \cup (-2)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\min\{r, s\}$	1	
5(i)	$(-2)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$(-5)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\min\{r, s\}$	1	
5(ii)		$(-10)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\min\{r, s\}$	1	
6(i)	$5\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$(-5)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} r+1 & \text{si, } r < s \\ s & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si, } r < s \\ 1 & \text{si, } s \leq r \end{cases}$	
6(ii)		$(5)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\begin{cases} \min\{r, s\} + 1 & \text{si, } r \neq s \\ r & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si, } r \neq s \\ 1 & \text{si, } r = s \end{cases}$	$\begin{cases} 2(\min\{r, s\} + 1) & \text{si, } r \neq s \\ 2r+1 & \text{si, } r = s \end{cases}$
7	$(-5)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$(-10)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\min\{r, s\}$	1	$2 \min\{r, s\} + 1$
8	$10\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$10\mathbb{Z}_2^{s^2} \cup (-10)\mathbb{Z}_2^{s^2}$	$\min\{r, s\}$	1	

Tabla B.3: Invariantes para caso $K = \mathbb{Q}_2$.

Bibliografía

- [1] L. ARENAS-CARMONA *Eichler orders, trees and Representation Fields*. Por aparecer en Int. Journal of Number Theory.
- [2] L. ARENAS-CARMONA *Representation Fields for commutative orders*. *Ann. Inst. Fourier* **62** (2012), 807-819.
- [3] L. ARENAS-CARMONA *Applications of spinor class fields: embeddings of orders and quaternionic lattices*, *Ann. Inst. Fourier* **53** (2003) 2021-2038.
- [4] L. ARENAS-CARMONA, *Maximal selectivity for orders in fields*. *J. Number Th.* **132** (2012), 2748-2755.
- [5] P. BAYER, M. ALSINA, *Quaternion orders, quadratic forms, and Shimura curves*. *CRM monograph series*, ISSN 1065-8599; v.22 (2004).
- [6] C. CHEVALLEY, *L'Arithmétique dans les Algèbres de Matrices*, Hermann, Paris, 1936.
- [7] T. CHINBURG, E. FRIEDMAN, *An embedding theorem for quaternion algebras*, *J. London Math. Soc.*, 60(1999), 33-44.
- [8] X. GUO AND H. QIN, *An embedding theorem for Eichler orders*, *J. Number Th.* **107.2** (2004), 207-214.
- [9] B. LINOWITZ, *Selectivity in quaternion algebras*, *J. Number Th.* 132 (2012), pp. 1425-1437.
- [10] B. LINOWITZ AND T.R. SHEMANSKE, *Embedding orders into central simple algebras*, *Journal théorie des nombres de Bordeaux* 24 (2012), 405-424.
- [11] J.S. MILNE, *Class Field Theory (v4.01)*, 2011. Available at www.jmilne.org/math/.
- [12] J.S. MILNE, *Algebraic Number Theory (v3.03)*, 2011. Available at www.jmilne.org/math/.
- [13] O. T. O'MEARA, *Introduction to quadratic forms*, Academic Press, New York, 1963.
- [14] P. QUIROZ, *Cálculo de la norma espinorial para formas anti-hermitianas sobre un álgebra de cuaterniones de división sobre un cuerpo local diádico*, Tesis de doctorado, Universidad de Chile, (2013).

- [15] I. REINER, *Maximal Orders*, Oxford University Press, 2003.
- [16] J.-P. SERRE, *Trees* (translated by John Stillwell), Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [17] DUMMIT, FOOTE, *Abstract Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [18] A. WEIL, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [19] H. COHN, *Advanced Number Theory*, Dover Publications, Inc, New York, 1980.