

UCH-FC
MAG-M
B826
C.1

Recursividad en funciones de Schur y una demostración combinatorial

Tesis
Entregada a la
Universidad de Chile
En cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Daniel Alfredo Bravo Vivallo

Agosto, 2005

Director de Tesis Dr. Luc Lapointe

Co-Director de Tesis Dr. Jorge Soto



FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato.

Daniel Alfredo Bravo Vivallo

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 19, de Agosto de 2005.

Director de Tesis:

Dr. Luc Lapointe


.....

Co-Director de Tesis:

Dr. Jorge Soto

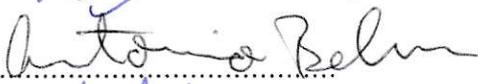

.....

Comisión de Evaluación de la Tesis

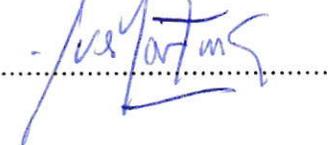
Dr. Luis Arenas


.....

Dr. Antonio Behn


.....

Dr. Yves Martin


.....



Para mi abuelo que la estaba esperando



Agradecimientos

A mi familia por su apoyo de siempre y que sé que seguirá siendo así.

Mis sinceros agradecimientos al profesor Luc Lapointe. Su constante guía y apoyo han brindado la posibilidad de lograr este trabajo.

Al profesor Jorge Soto por las constantes invitaciones al estudio realizadas durante mis estudios de pregrado y en estos últimos años.

Agradezco también al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile por el apoyo entregado en estos años que sin duda han contribuido a mi formación profesional.



Índice general



| | |
|--|-----------|
| 1. Particiones | 3 |
| 1.1. Nociones Clásicas | 3 |
| 1.2. Órdenes | 4 |
| 1.3. Skew Diagramas de Young, Bandas Verticales y Horizontales | 5 |
| 1.4. Tableros de Young | 6 |
| 2. Funciones Simétricas | 8 |
| 2.1. Definiciones Básicas | 8 |
| 2.2. Funciones Simétricas Monomiales | 9 |
| 2.3. Funciones Simétricas Elementales y Homogéneas | 9 |
| 2.4. Funciones de Schur | 12 |
| 2.5. Recursividad en funciones de Schur | 17 |
| 3. Una Demostración Combinatorial | 21 |
| 3.1. Interpretaciones Combinatorias | 21 |
| 3.2. Conjuntos de Particiones | 24 |
| 3.3. La Involución | 28 |
| 3.4. La demostración | 31 |
| 3.5. Proyecciones Futuras | 34 |

Introducción

El anillo de las funciones simétricas Λ es muy importante en muchas áreas de la matemática. Por ejemplo, en la teoría de representaciones del grupo simétrico, una gran cantidad de cálculos puede simplificarse usando el isomorfismo que existe entre el anillo de clases de funciones del grupo simétrico y una base fundamental del anillo de las funciones simétricas, conocidas como las funciones de Schur.

Estas funciones de Schur han sido ampliamente estudiadas (una referencia importante al respecto es [6]), mostrándose hasta ahora muchas propiedades, identidades, conexiones y aún siguen dando indicaciones por donde se debe seguir el estudio de las funciones simétricas. Algunas de las propiedades de estas funciones de Schur, están descritas de forma puramente combinatorial y son esas propiedades en las que nos vamos a interesar.

Recientemente L. Lapointe, A. Lascoux y J. Morse introdujeron una nueva familia de funciones simétricas llamadas k -funciones de Schur [2], [3], [4], [5]. Estas funciones tienen su origen en el estudio de los (q, t) -coeficientes de Kostka asociados a los polinomios de Macdonald, de donde aparecen como objetos que simplifican este estudio, y tienen propiedades muy similares a las de las funciones de Schur en Λ , pero en el subespacio $\Lambda^{(k)} = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_k]$. Estas propiedades sugieren que estas nuevas funciones son objetos muy importantes y que merecen ser estudiadas intensivamente.

Desde la combinatoria se pretende trabajar con las funciones de Schur y dar una nueva demostración a una identidad conocida para éstas. Esta identidad es una fórmula de recurrencia para funciones de Schur, permitiendo a las funciones de Schur, expresarse en términos de funciones de Schur de *grado menor* y de esa forma tomar la fórmula como una definición alternativa para las funciones de Schur. Esta fórmula es conocida por los trabajos de J. N. Bernstein [9] con ciertos operadores B_n , pero su demostración está lejos de dar luces de cómo debe ser una demostración combinatorial y dar una demostración combinatorial es lo principal de este trabajo. Hago hincapié en el hecho de que aunque es una identidad conocida, no conocemos en la literatura existente sobre el tema, que tal demostración combinatorial exista, así que en este trabajo se da un avance en esa dirección.

Este avance nos permite formular conjeturas y futuras líneas de investigación en torno a una posible generalización de la fórmula de Bernstein, pero para las k -

funciones de Schur. De hecho Luc Lapointe estableció una conjetura desde el estudio de los polinomios de Macdonald que permite establecer una nueva identidad para las k -funciones de Schur que generaliza a la fórmula de Bernstein. Esta conjetura permitiría una nueva definición de estas k -funciones de Schur, por medio de una fórmula de recurrencia, conjeturada por Luc Lapointe, y además refuerza la idea de que estas k -funciones de Schur se comportan como las funciones de Schur, dando así mayor respaldo al hecho de que esta nueva familia de funciones simétricas son el objeto apropiado a ser estudiado a futuro, para acercarnos a una mejor comprensión de las funciones simétricas y sus conexiones.

Todos los conceptos clásicos se pueden encontrar en libros como [1], [6], [7] y [8]. El resto ha sido parte del desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1

Particiones

1.1. Nociones Clásicas

Una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ es una sucesión no creciente de enteros positivos. También es conveniente identificar a λ con la sucesión infinita $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, 0, 0, \dots)$. El grado de la partición λ es $n = |\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$ con $n \in \mathbb{N}$ y diremos en este caso que λ es una partición de n , denotando esto como $\lambda \vdash n$. El número de partes no nulas de una partición λ lo denotaremos por $\ell(\lambda)$. En el caso en que la sucesión $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$, sea de enteros no negativos, no necesariamente no creciente y tal como antes que, $\alpha_1 + \dots + \alpha_l = n$, entonces diremos que α es una composición de n . El conjunto de las particiones de n lo denotaremos por \mathcal{P}_n y \mathcal{P} por el conjunto de todas las particiones, es decir,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n \quad (1.1.1)$$

Ejemplo 1. *El conjunto de todas las particiones de 5 es,*

$$\mathcal{P}_5 = \{(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\} \quad (1.1.2)$$

Cada partición λ tiene asociado un *diagrama de Young*, dado por colocar λ_i cuadrados o cajas alineados a la izquierda en la fila i , desde abajo hasta arriba. Para una partición λ vamos a definir T_λ por su diagrama de Young. Alternativamente podemos identificar el diagrama de Young de una partición con un subconjunto de puntos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $1 \leq i \leq \lambda_i$; de esta forma cada caja tiene un par de coordenadas enteras con que identificarse.

Ejemplo 2. *Aprovechando el Ejemplo 1 podemos construir el conjunto de los tableros de Young de todas las particiones de 5, es decir,*

$$\mathcal{P}_5 = \left\{ \begin{array}{c} \square\square\square\square\square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ \square\square\square\square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square\square \\ \square\square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square\square\square \\ \square \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square\square \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square\square \\ \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \quad (1.1.3)$$

Dada una partición λ , denotaremos por $\hat{\lambda}$ a $(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m)$ y diremos que su conjugada $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_i)$ es el diagrama de Young obtenido por reflejar el diagrama de Young de λ en su diagonal principal. Así λ'_i es el número de cajas en la fila i de λ' o equivalentemente el número de cajas en la columna i de λ .

Ejemplo 3. Sea $\lambda = (3, 2, 1, 1)$, entonces $\hat{\lambda} = (2, 1, 1)$ y $\lambda' = (4, 2, 1)$. El diagrama de Young de λ y el diagrama de Young de la partición conjugada λ' son respectivamente,

$$T_\lambda = T_{(3,2,1,1)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad T_{\lambda'} = T_{(4,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & & & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & \square & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \quad (1.1.4)$$

Sea T_λ el diagrama de Young de una partición λ y b una caja en T_λ , diremos que el *hook* de b es

$$h(b) = \{b\} \cup \{\text{cajas de } T_\lambda \text{ arriba de } b \text{ en la misma columna}\} \cup \{\text{cajas de } T_\lambda \text{ a la derecha de } b \text{ en la misma fila}\} \quad (1.1.5)$$

y que *hook length* de b es $|h(b)|$, donde $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A . Una caja e de T_λ , se llamará *caja extraíble* de T_λ , si $|h(e)| = 1$, es decir, si ni a la derecha ni arriba de e hay cajas en T_λ . Una caja b tiene su *hook* acotado por k si $|h(b)| \leq k$.

Ejemplo 4. Si b es la caja $(2, 1)$ del diagrama de Young de λ del Ejemplo 3,

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (1.1.6)$$

Entonces el número de cajas arriba y a la derecha de la caja b es 3, es decir $|h(b)| = 4$. Las cajas remarcadas en T_λ , son las cajas extraíbles.

1.2. Órdenes

Definimos el orden por contención \subseteq en \mathcal{P} para $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ particiones, diciendo que $\mu \subseteq \lambda$ si $\mu_i \leq \lambda_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Aparte del orden por contención definimos también el *orden de dominancia* \trianglelefteq , también llamado *orden natural*, en \mathcal{P} de la siguiente forma,

$$\mu \trianglelefteq \lambda \iff \sum_{i=1}^l \mu_i \leq \sum_{i=1}^l \lambda_i \quad \text{para todo } l \geq 1 \quad (1.2.1)$$

Este orden se define normalmente sobre particiones del mismo entero.

Ejemplo 5. Si tomamos $\mu = (3, 1, 1)$ y $\lambda = (2, 2, 1)$ tenemos entonces que $\lambda \trianglelefteq \mu$, pero no que $\mu \subseteq \lambda$. Para que $\mu \subseteq \lambda$ basta tener que los diagramas de Young estén contenidos y si consideramos $\nu = (2, 1, 1)$ entonces los diagramas de Young son,

$$T_\nu = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad T_\mu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1.2.2)$$

y tenemos que $\nu \subseteq \lambda$ y $\nu \subseteq \mu$. Observamos además que $\lambda \not\subseteq \mu$.

Finalmente para μ y λ en \mathcal{P} , definimos el *orden lexicográfico* $<$ dado por $\mu < \lambda$ si para el primer i tal que $\mu_i \neq \lambda_i$ entonces $\mu_i < \lambda_i$. Este orden es un orden total para \mathcal{P} .

Ejemplo 6. Podemos usar el Ejemplo 1 para ilustrar este orden, obteniendo la siguiente cadena,

$$(1, 1, 1, 1, 1) < (2, 1, 1, 1) < (2, 2, 1) < (3, 1, 1) < (3, 2) < (4, 1) < (5) \quad (1.2.3)$$

Vimos un ejemplo donde $\mu \trianglelefteq \lambda$, pero $\mu \not\subseteq \lambda$. En general tenemos que $\mu \subseteq \lambda \Rightarrow \mu \trianglelefteq \lambda \Rightarrow \mu < \lambda$, pero estas implicancias no se pueden revertir, de hecho $(3, 3) < (4, 1)$, pero $(3, 3) \not\subseteq (4, 1)$.

1.3. Skew Diagramas de Young, Bandas Verticales y Horizontales

Si $\mu \subseteq \lambda$ entenderemos por λ/μ como el arreglo de cajas obtenido por sacar las cajas de T_λ que están en T_μ y lo llamaremos *skew diagrama de Young* λ/μ . Diremos también que $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu|$.

Ejemplo 7. Si tomamos $\mu = (5, 2, 1, 1)$ y $\lambda = (7, 4, 4, 2, 1, 1)$, entonces tendremos que,

$$\lambda/\mu = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & & & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline & \square & \square & \square \\ \hline & & \square & \square \\ \hline & & & \square \\ \hline & & & \square \\ \hline \end{array} \quad (1.3.1)$$

Definición 8. Una banda o franja vertical de tamaño p es un arreglo de cajas $\nu = \lambda/\mu$ tal que $|\nu| = p$ y de manera que ninguna caja está en la misma fila que otra caja.

Definición 9. Una banda o franja horizontal de tamaño p es un arreglo de cajas $\nu = \lambda/\mu$ tal que $|\nu| = p$ y de manera que ninguna caja está en la misma columna que otra caja.

Podemos pensar que una banda vertical (u horizontal) depende de un par de particiones μ y λ , de esta forma podemos decir que un par de particiones (μ, λ) posee o tiene un banda vertical (u horizontal), si λ/μ es una banda vertical (u horizontal).

Ejemplo 10. Una franja vertical y horizontal son respectivamente,

$$(5, 3, 1, 1, 1)/(4, 2) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (7, 3, 2, 1)/(4, 2, 1) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (1.3.2)$$

1.4. Tableros de Young

Si a un diagrama de Young T de una partición λ lo rellenamos con entradas en los enteros $\{1, \dots, l\}$, permitiendo repeticiones, tal que

- las entradas en las filas son crecientes al leerlas de izquierda a derecha
- las entradas en las columnas son estrictamente crecientes al leerlas de abajo hacia arriba.

entonces llamaremos a T un tablero de Young o Tablero de forma λ y relleno en $\{1, \dots, l\}$. Un Tablero T tiene *contenido* o *peso* $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ si sus entradas consisten de μ_1 1's, μ_2 2's, y así hasta μ_l l's.

Ejemplo 11. Si $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ y tomamos a $l = 5$, entonces un Tablero de Young T posible es,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (1.4.1)$$

y su contenido es $(2, 2, 1, 2, 1)$.

Para cualquier partición λ y cualquier sucesión de enteros no negativos $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$, diremos que $K_{\lambda, \mu}$ es el número de tableros de Young diferentes de forma λ y de contenido μ que hay.

Ejemplo 12. Si denotamos por $\mathcal{T}_l(\lambda)$ al conjunto de todos los tableros de Young de forma λ y con relleno en $1, 2, \dots, l$ entonces

$$\mathcal{T}_3((2, 1)) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right\} \quad (1.4.2)$$

De esta forma podemos observar que $K_{(2,1),(1,1,1)} = 2$ y que $K_{(2,1),(2,1,0)} = 1$. También observemos que $K_{(2,1),(1,2,0)} = K_{(2,1),(2,0,1)} = K_{(2,1),(1,0,2)} = K_{(2,1),(0,1,2)} = K_{(2,1),(0,2,1)} = 1$

Observación 13. Notemos que $K_{\lambda,\lambda} = 1$, para cualquier partición λ . Esto se obtiene por colocar λ_1 1's en la primera fila de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$, luego λ_2 2's en la segunda fila y así hasta colocar λ_l l's en la l-ésima fila de λ .

Estos números $K_{\lambda,\mu}$ se llaman *números de Kostka*. Si denotamos por $\mathcal{T}_\mu(\lambda)$ al conjunto de los tableros de Young de forma λ y contenido μ , entonces la definición de los números de Kostka dice exactamente que $K_{\lambda,\mu} = |\mathcal{T}_\mu(\lambda)|$.

Observación 14. De forma equivalente podemos decir que el número de Kostka $K_{\lambda,\mu}$ es el número de sucesiones de particiones $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^l)$ tales que $\lambda^1 \subseteq \lambda^2 \subseteq \dots \subseteq \lambda^l = \lambda$, con el arreglo de cajas λ^i/λ^{i-1} teniendo μ_i cajas y de manera que ninguna esté en la misma columna que otra.

Ejemplo 15. Verifiquemos mediante la Observación 14 que $K_{(4,3,1,1),(3,2,2,2)} = 3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & 2 \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & & & \\ \hline & 3 & & \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline & & 3 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & 4 \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 2 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} & \subset & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 2 & 2 & 4 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}
 \end{array} \tag{1.4.3}$$

Capítulo 2

Funciones Simétricas

2.1. Definiciones Básicas

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $x = (x_1, x_2, \dots)$ un conjunto de indeterminadas. Una *función simétrica homogénea de grado n* sobre un anillo conmutativo unitario A es una serie formal de potencias,

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \quad (2.1.1)$$

donde,

- (a) La suma es sobre todas las composiciones $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de n (de largo infinito),
- (b) $c_{\alpha} \in A$,
- (c) x^{α} representa al monomial $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$
- (d) $\omega \cdot f(x) = f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$ para toda permutación ω de los enteros positivos, entendido como una biyección de \mathbb{N} a \mathbb{N} .

El conjunto de todas las funciones simétricas homogéneas de grado n sobre A lo denotamos por Λ_A^n y es un A -módulo, es decir, si $f, g \in \Lambda_A^n$ y $a, b \in A$, entonces $af + bg \in \Lambda_A^n$ (una función simétrica de grado 0 es un elemento de A). En nuestro caso tomaremos $A = \mathbb{Z}$. Si $f \in \Lambda_{\mathbb{Z}}^m$ y $g \in \Lambda_{\mathbb{Z}}^n$, entonces es claro que $fg \in \Lambda_{\mathbb{Z}}^{m+n}$ (donde fg es el producto de series formales de potencias). Entonces si definimos

$$\Lambda_{\mathbb{Z}} = \Lambda_{\mathbb{Z}}^0 \oplus \Lambda_{\mathbb{Z}}^1 \oplus \dots \quad (2.1.2)$$

obtenemos un *anillo graduado*. Así los elementos de $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ son series formales de potencias $f = f_0 + f_1 + \dots$ con $f_n \in \Lambda_{\mathbb{Z}}^n$ y todos los f_n nulos, excepto una cantidad finita de ellos. De ahora en adelante escribiremos Λ^n y Λ por $\Lambda_{\mathbb{Z}}^n$ y $\Lambda_{\mathbb{Z}}$.

Parte importante de la teoría de funciones simétricas es la descripción de bases de Λ y las relaciones entre ellas. Las que mostramos a continuación son cuatro familias clásicas de funciones simétricas importantes.

2.2. Funciones Simétricas Monomiales

Dado $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ una partición, definimos una función simétrica $m_\lambda(x) \in \Lambda$ por simetrizar al monomial x^λ , es decir,

$$m_\lambda = \sum_{\alpha} x^\alpha \quad (2.2.1)$$

donde la suma es sobre todas las distintas permutaciones $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de las entradas de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Por ejemplo,

$$m_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + \dots \quad (2.2.2)$$

Claramente si $\lambda \vdash n$ entonces $m_\lambda(x)$ es una función simétrica homogénea de grado n y la llamamos una *función simétrica monomial*. Además si $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \Lambda^n$ entonces $f = \sum_{\lambda \vdash n} c_{\lambda} m_{\lambda}$ y de forma única. Luego podemos decir que el conjunto $\{m_{\lambda} \mid \lambda \vdash n\}$ es una \mathbb{Z} -base de Λ^n , así el rango de $\Lambda^n = |\mathcal{P}_n|$.

Entonces alternativamente podemos definir Λ como el \mathbb{Z} -módulo libre generado por m_{λ} para todas las particiones $\lambda \in \mathcal{P}$. Más aun podemos decir que $\{m_{\lambda} \mid \lambda \in \mathcal{P}\}$ es una \mathbb{Z} -base de Λ , es decir, que podemos escribir cualquier función simétrica de forma única en términos de m_{λ} .

2.3. Funciones Simétricas Elementales y Homogéneas

Sea $r \in \mathbb{N}$, entonces llamamos *r-ésima función simétrica elemental* a:

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} = m_{(1^r)} \quad (2.3.1)$$

Y llamamos *r-ésima función simétrica homogénea* a:

$$h_r = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} = \sum_{\lambda \vdash r} m_{\lambda} \quad (2.3.2)$$

Ejemplo 16. Si $r = 3$ entonces,

$$e_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \dots \quad (2.3.3)$$

$$h_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + \dots + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots \quad (2.3.4)$$

Es conveniente definir por 1 a e_0 y h_0 y por 0 a e_r y h_r si $r < 0$. De esta forma sus funciones generadoras son:

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n(x) t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t) \quad (2.3.5)$$

$$H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n(x) t^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)} \quad (2.3.6)$$

Ahora de (2.3.5) y (2.3.6) obtenemos:

$$H(t)E(-t) = 1 \quad (2.3.7)$$

o equivalentemente,

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r h_{n-r} e_r = 0 \quad \text{para todo } n \geq 1 \quad (2.3.8)$$

Podemos decir además que las funciones simétricas elementales y homogéneas son ambas un conjunto generador de Λ y algebraicamente independiente sobre \mathbb{Z} , es decir que

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots] = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots], \quad (2.3.9)$$

De hecho basta ver que una familia de estas funciones simétricas lo sea, para ver que la otra también lo es, debido a que la identidad (2.3.8) termina el argumento de manera inductiva. Debido a que una demostración combinatorial de que las funciones simétricas elementales son un conjunto generador de Λ y algebraicamente independiente sobre \mathbb{Z} , está dentro del contexto de este trabajo la revisaremos aquí.

Proposición 17. $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots]$.

Demostración. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ una partición, entonces definamos

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots \quad (2.3.10)$$

Vamos a establecer que, si λ' es la partición conjugada de λ , entonces

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu \triangleleft \lambda} a_{\lambda, \mu} m_\mu \quad (2.3.11)$$

donde los $a_{\lambda, \mu}$ son enteros no negativos. De la definición tenemos que,

$$\begin{aligned} e_{\lambda'} &= e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} e_{\lambda'_3} \cdots \\ &= \left(\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{\lambda'_1}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{\lambda'_1}} \right) \cdot \left(\sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_{\lambda'_2}} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{\lambda'_2}} \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_{\lambda'_3}} x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{\lambda'_3}} \right) \cdots \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

entonces desarrollando este producto de sumas obtenemos una suma de monomiales

$$x^\alpha = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{\lambda'_1}})(x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{\lambda'_2}})(x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{\lambda'_3}}) \cdots \quad (2.3.13)$$

Para el monomial $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$ hagamos lo siguiente; coloquemos las entradas $i_1, i_2, \dots, i_{\lambda'_1}$ en orden creciente en la primera columna de λ , las entradas $j_1, j_2, \dots, j_{\lambda'_2}$ en orden creciente en la segunda columna de λ y así sucesivamente, obtenemos un tablero de Young T de forma λ en donde las entradas $r \geq 1$ están a los más en las primeras r filas del tablero de Young T , es decir, en la primera fila están todos los 1, en las primeras dos filas están todos los 2, en las primeras tres filas están todos los 3 y así sucesivamente. Esta composición $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ de $|\lambda|$ está asociada a una permutación de las entradas de una partición $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ de $|\lambda|$ y corresponde al contenido de un monomial en el que el número de 1 está acotado por λ_1 , el número de 2 está acotado por $\lambda_1 + \lambda_2$ y así sucesivamente.

Así tenemos que

$$\mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_r \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r \quad (2.3.14)$$

o equivalentemente $\mu \leq \lambda$, es decir se tiene que

$$e_{\lambda'} = \sum_{\mu \leq \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu \quad (2.3.15)$$

con $a_{\lambda\mu} \geq 0$. El mismo argumento anterior muestra que el monomial x^λ aparece una sola vez, es decir que $a_{\lambda\lambda} = 1$, de hecho esto lo podemos ver colocando λ_1 unos en la primera fila, λ_2 dos en la segunda fila y así sucesivamente con el resto de las filas. Finalmente tenemos que, como las m_λ son una \mathbb{Z} -base de Λ y la relación (2.3.11), entonces tenemos que podemos escribir m_λ de forma única en términos de e_λ , es decir, en términos de e_n . \square

Ejemplo 18. Si tomamos $\lambda = (2, 1)$, podemos ilustrar la demostración y mostrar que tenemos la siguiente expresión,

$$e_{(3,1)} = m_{(2,1,1)} + 4m_{(1,1,1,1)} \quad (2.3.16)$$

Esto se ve de,

$$\begin{aligned}
 e_{(3,1)} &= e_3 \cdot e_1 \\
 &= (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \dots) \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \dots) \\
 &= (x_1x_2x_3)(x_1) + (x_1x_2x_3)(x_2) + (x_1x_2x_3)(x_3) + (x_1x_2x_3)(x_4) + \dots \\
 &\quad + (x_1x_2x_4)(x_1) + (x_1x_2x_4)(x_2) + (x_1x_2x_4)(x_3) + (x_1x_2x_4)(x_4) + \dots \\
 &\quad + (x_1x_3x_4)(x_1) + (x_1x_3x_4)(x_2) + (x_1x_3x_4)(x_3) + (x_1x_3x_4)(x_4) + \dots \\
 &\quad + (x_2x_3x_4)(x_1) + (x_2x_3x_4)(x_2) + (x_2x_3x_4)(x_3) + (x_2x_3x_4)(x_4) + \dots \\
 &= x^{(2,1,1,0,0,\dots)} + x^{(1,2,1,0,0,\dots)} + x^{(1,1,2,0,0,\dots)} + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + \dots \\
 &\quad + x^{(2,1,0,1,0,\dots)} + x^{(1,2,0,1,0,\dots)} + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + x^{(1,1,0,2,0,\dots)} + \dots \\
 &\quad + x^{(2,0,1,1,0,\dots)} + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + x^{(1,0,2,1,0,\dots)} + x^{(1,0,1,2,0,\dots)} + \dots \\
 &\quad + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + x^{(0,2,1,1,0,\dots)} + x^{(0,1,2,1,0,\dots)} + x^{(0,1,1,2,0,\dots)} + \dots \\
 &= x^{(2,1,1,0,0,\dots)} + x^{(1,2,1,0,0,\dots)} + x^{(1,1,2,0,0,\dots)} + x^{(2,1,0,1,0,\dots)} + x^{(1,2,0,1,0,\dots)} + x^{(1,1,0,2,0,\dots)} + \dots \\
 &\quad + x^{(2,0,1,1,0,\dots)} + x^{(1,0,2,1,0,\dots)} + x^{(1,0,1,2,0,\dots)} + x^{(0,2,1,1,0,\dots)} + x^{(0,1,2,1,0,\dots)} + x^{(0,1,1,2,0,\dots)} + \dots \\
 &\quad + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + x^{(1,1,1,1,0,\dots)} + \dots \\
 &= m_{(2,1,1,0,0,\dots)} + 4m_{(1,1,1,1,0,\dots)} = m_{(2,1,1)} + 4m_{(1,1,1,1)}
 \end{aligned}$$

2.4. Funciones de Schur

Esta cuarta familia de funciones simétricas es una muy importante por su descripción de Λ y por sus propiedades. De hecho hay varias maneras de definir las y nosotros tomaremos un acercamiento combinatorial. Al final de esta sección daremos otras formas de definir las funciones de Schur, una definición que nos ayudará en secciones más adelante y otra más clásica.

Dado un tablero de Young T de forma λ y contenido $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_i)$ definimos,

$$x^T = x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots x_i^{\mu_i} \tag{2.4.1}$$

Ejemplo 19. Si tomamos al siguiente tablero de Young de forma $(5, 3, 3, 1)$,

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & & & \\ \hline 4 & 5 & 5 & & \\ \hline 2 & 4 & 4 & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \tag{2.4.2}$$

con contenido $(2, 3, 0, 3, 4)$, entonces $x^T = x_1^2 x_2^3 x_3^0 x_4^3 x_5^4$

Definición 20. Sea λ una partición, entonces la función de Schur s_λ se define como

$$s_\lambda = s_\lambda(x) = \sum_T x^T \tag{2.4.3}$$

donde la suma es sobre todos los tableros de Young posibles de forma λ , es decir, la suma es sobre los Tableros de Young de forma λ cuando consideramos todas las composiciones.

Ejemplo 21. Si $\lambda = (2, 1)$, entonces algunos de los posibles tableros de Young de forma $(2, 1)$ están dados en el Ejemplo 1.4.2 y así,

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1)}(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + \dots + 2x_1 x_2 x_3 + 2x_1 x_2 x_4 + \dots \quad (2.4.4)$$

Notemos que podemos recuperar las funciones homogéneas y elementales como casos particulares de funciones de Schur. De hecho, si consideramos $\lambda = (n)$ la partición de n que consiste de 1 parte, es decir, en el n mismo tenemos,

$$s_{(n)} = h_n \quad (2.4.5)$$

Esto lo podemos ver del hecho que un tablero de forma (n) , es una fila de entradas débilmente creciente de enteros positivos.

Ahora si ponemos $\lambda = (1^n)$, la partición de n que consiste en n partes, es decir $(1^n) = (1, 1, \dots, 1)$ con 1 repetido n veces, tenemos una columna de entradas estrictamente crecientes desde abajo hacia arriba. Así las n entradas deben ser todas diferentes y entonces por definición,

$$s_{(1^n)} = e_n \quad (2.4.6)$$

Esto nos da evidencia de que estas funciones de Schur son efectivamente funciones simétricas.

Proposición 22. Las funciones s_λ son funciones simétricas.

Demostración. Probemos esto de una forma combinatorial. Sólo debemos mostrar que se cumple la parte (d) de la definición de las funciones simétricas, es decir, si tomamos $\omega = (i, i + 1)$, entonces,

$$(i, i + 1) \cdot s_\lambda = s_\lambda \quad (2.4.7)$$

para cada transposición ω de elementos adyacentes.

Una función de Schur es una suma sobre tableros de Young, entonces describiremos el efecto que tiene la acción de la transposición $(i, i + 1)$, sobre los tableros de Young. Esta acción nos va a describir una involución sobre los tableros de Young de forma λ , tomando un tablero T y llevándolo a un tablero T' tal que el número de i 's se intercambian con el número de $i + 1$'s, manteniendo el resto de las entradas de T igual.

Dado un tablero de Young T , siempre se tiene que una columna puede contener o no contener entradas i ó $i + 1$. Las entradas i ó $i + 1$ que aparecen en una misma columna que una entrada $i + 1$ ó i , respectivamente, las llamaremos entradas *fijas*. Las entradas i ó $i + 1$ que aparecen en una columna donde no hay entradas $i + 1$ ó i , respectivamente, las llamaremos *libres*. Ahora la involución la definimos de esta forma, en cada fila de T , cambiamos el número de los i libres por el número de $i + 1$ libres, es decir, si en una fila hay m i 's libres seguidos de n $i + 1$'s libres, entonces los reemplazo por n i 's seguidos de m $i + 1$'s.

Ejemplo 23. Si $i = 2$, y remarcamos las entradas *fijas*, entonces esta acción sobre un tablero de Young T posible es,

$$(2, 3) \cdot T = (2, 3) \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} = T' \quad (2.4.8)$$

Necesitamos ahora revisar que esta involución esté bien definida, es decir que $(i, i + 1) \cdot T = T'$, sea efectivamente un tablero de Young. Las entradas que no son ni i ni $i + 1$, quedan exactamente igual en ambos tableros. Para las entradas i e $i + 1$ observar primero que los pares $i, i + 1$ en columnas quedan fijos, manteniendo la estructura de estrictamente creciente en esas columnas. Para las entradas libres, se mantiene la estructura en filas y columnas de tablero de Young por definición. Más aún, el número de i 's que hay en T se cambia por el número de $i + 1$'s que hay en T , obteniendo así una función con la propiedad descrita antes, que además es una involución. \square

Observemos que junto con la definición de los números de Kotska, podemos dar una fórmula para las funciones de Schur en términos de monomiales. Esto es,

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda, \mu} x^\mu \quad (2.4.9)$$

donde la suma es sobre todas las composiciones μ de $|\lambda|$. Podemos decir aun más de esta relación,

Proposición 24. Si λ es una partición, entonces,

$$s_\lambda = \sum_{\mu \triangleleft \lambda} K_{\lambda, \mu} m_\mu \quad (2.4.10)$$

Demostración. De hecho basta probar que

$$K_{\lambda, \mu} = K_{\lambda, \tilde{\mu}} \quad (2.4.11)$$

para cualquier rearreglo o permutación $\tilde{\mu}$ de las entradas de μ .

Esto se obtiene como corolario de la demostración de la Proposición 22. Notemos que la misma involución de esa demostración dice que cuando cambiamos dos entradas consecutivas $i, i + 1$ solamente, lo que cambiamos es el contenido de los tableros de Young. Así basta describir la acción de la transposición $(i, i + 1)$ sobre los contenidos $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_l)$ de cada tablero de forma λ . Según la definición de la involución, esto es,

$$(i, i + 1) \cdot (\mu_1, \dots, \mu_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_l) = (\mu_1, \dots, \mu_{i+1}, \mu_i, \dots, \mu_l) \quad (2.4.12)$$

que es exactamente la propiedad de la involución que describimos en la demostración anterior. El hecho que sea una involución nos entrega la ecuación (2.4.11), que queríamos.

Ahora sólo basta con agrupar los monomiales x^μ en términos de las funciones simétricas m_μ . Según la Observación 13 tenemos el primer término de la suma. Para ver que el resto de los elementos de la expresión (2.4.10) es una suma sobre las particiones $\mu \triangleleft \lambda$ hacemos lo mismo que en el caso que expresamos las funciones simétricas elementales en términos de las funciones simétricas monomiales. Concretamente, como en un tablero de Young T de forma λ las entradas son estrictamente crecientes en las columnas, si aparecen los números $1, 2, \dots, r$, estos aparecen en las filas 1 a r , así tenemos que para todo $r \geq 1$,

$$\mu_1 + \mu_2 \dots + \mu_r \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r \quad (2.4.13)$$

es decir $\mu \trianglelefteq \lambda$. □

Ejemplo 25. *Aprovechando los números de Kostka calculados en el ejemplo (1.4.2) tenemos que,*

$$s_{(2,1)} = m_{(2,1)} + 2m_{(1,1,1)} \quad (2.4.14)$$

Finalmente, junto con la Observación 13, tenemos como corolario de la demostración de la Proposición 24 que los números de Kostka satisfacen la siguiente,

Propiedad 26. *Si λ y μ son particiones entonces,*

$$K_{\lambda, \mu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \not\triangleleft \lambda \\ 1 & \text{si } \mu = \lambda \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Observación 27. *La Propiedad 26 dice que si λ y μ son particiones del mismo grado y consideramos la matriz $\|K_{\lambda, \mu}\|_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}}$ con las particiones de $|\lambda|$ ordenadas mediante el orden lexicográfico, entonces tenemos que es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal. Es decir tenemos que la matriz $\|\bar{K}_{\lambda, \mu}\| = \|K_{\lambda, \mu}\|^{-1}$ existe.*

Existen reglas que dicen como multiplicar funciones de Schur, como la *regla de Pieri* y la *regla de Littlewood-Richardson*. Revisemos que dice la regla de Pieri.

Si λ es una partición, entonces,

$$s_{(n)} \cdot s_\lambda = h_n \cdot s_\lambda = \sum_{\mu} s_\mu \quad (2.4.16)$$

donde la suma es sobre todas las particiones μ que se obtienen del diagrama de Young de λ al agregar n cajas, todas en distintas columna. O dicho de otra forma, la suma es sobre todas las particiones μ tales que $\mu/\lambda =$ banda horizontal de tamaño n . Y también dice que,

$$s_{(1^n)} \cdot s_\lambda = e_n \cdot s_\lambda = \sum_{\mu} s_\mu \quad (2.4.17)$$

donde la suma es sobre todas las particiones μ que se obtienen del diagrama de Young de λ al agregar n cajas con todas en distintas filas. O equivalentemente, la suma es sobre todas las particiones μ tales que $\mu/\lambda =$ banda vertical de tamaño n .

Esta descripción combinatorial de la regla de Pieri es muy interesante por sí sola llevando a conclusiones inmediatas que veremos a continuación, no obstante una demostración de la regla de Pieri se escapa del espíritu combinatorial de este trabajo, por lo que no lo haremos.

Una consecuencia inmediata de (2.4.16) es que según la Observación 14 cuando $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$ es una partición, se tiene la siguiente identidad,

$$h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_l} = \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} s_\lambda \quad (2.4.18)$$

donde la suma es sobre todas las particiones λ . Tenemos entonces la relación siguiente,

$$h_\mu = \sum_{\lambda} K_{\lambda, \mu} s_\lambda \quad (2.4.19)$$

que junto con la Observación 27 nos dice que podemos expresar las funciones de Schur en términos de las funciones simétricas homogéneas, esto es,

$$s_\lambda = \sum_{\mu} \bar{K}_{\lambda, \mu} h_\mu \quad (2.4.20)$$

Esto nos dice nuevamente que las funciones de Schur son funciones simétricas, además como la matriz $||\bar{K}_{\lambda, \mu}||$ es también triangular y con 1 en la diagonal, la identidad (2.4.20) dice que el conjunto $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ es una base de Λ . Notemos que la fórmula (2.4.20) se puede tomar como una segunda definición de las funciones de Schur.

Una forma alternativa y clásica de definir las funciones de Schur es la siguiente,

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2.4.21)$$

donde $n \geq \ell(\lambda)$. Aunque nos da otra forma de escribir s_λ en términos de funciones simétricas homogéneas, no haremos una demostración de esta relación. Sólo la tendremos presente para usarla más adelante.

Podemos definir un producto interno para las funciones simétricas pidiendo que las funciones de Schur sean una base ortonormal, esto es que,

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \quad (2.4.22)$$

Notemos que según la identidad (2.4.19) y la Proposición 24, éste producto es equivalente al siguiente producto interno,

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \quad (2.4.23)$$

2.5. Recursividad en funciones de Schur

Otro acercamiento hacia las funciones de Schur es mediante fórmulas de recurrencias. Éstas fórmulas pueden por si solas tomarse como definiciones de las funciones de Schur; revisemos que ya hemos de alguna forma visto ciertas de evidencia de esta fórmula de recurrencia, de hecho con todo lo hecho en la sección 2.4 la identidad (2.3.8) se convierte en,

$$s_{(1^n)} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r h_{n-r} s_{(1^r)} \quad \text{para todo } n \geq 1 \quad (2.5.1)$$

Lo que da una expresión de $s_{(1^n)}$ en términos de otras funciones de Schur, es decir, una recursividad que permite construir $s_{(1^n)}$ a partir de $s_{(1^m)}$ y h_m con $m < n$. Si pensamos sólo en funciones de Schur podemos expresar la identidad (2.5.1) de la siguiente forma,

$$s_{(1^n)} = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r s_{(n-r)} s_{(1^r)} \quad \text{para todo } n \geq 1 \quad (2.5.2)$$

Para funciones de Schur en general mostramos una fórmula conocida como fórmula de Bernstein. Para llegar a esto debemos introducir algunos conceptos más, pero no daremos todos los pasos ni las demostraciones, sólo es para tener presente los métodos de demostración usados en este caso.

Para cada función simétrica $f \in \Lambda$ definimos un operador $f^\perp : \Lambda \rightarrow \Lambda$ como el operador adjunto de multiplicación por f , es decir,

$$\langle f^\perp u, v \rangle = \langle u, f v \rangle \quad \text{para todo } u, v \in \Lambda \quad (2.5.3)$$

Es importante entender que es lo que hace este operador f^\perp sobre las funciones simétricas. Observemos que si tomamos $f = h_r$ y aplicamos el operador sobre las funciones de Schur, tenemos que,

$$\langle h_r^\perp s_\lambda, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, h_r s_\mu \rangle \quad (2.5.4)$$

La regla de Pieri dice que $h_r s_\mu$ es una suma de funciones de Schur indexadas por particiones que se obtienen de agregar al diagrama de Young de μ , r cajas todas en diferentes columnas. Entonces si el producto de la ecuación (2.5.4) no es nulo, el lado derecho de la ecuación dice que podemos obtener el diagrama de Young de λ a partir del diagrama de Young de μ agregando una banda horizontal de tamaño r a T_μ . Esto, junto a que las funciones de Schur son una base ortonormal, dice que lo que hace el operador h_r^\perp sobre s_λ es justamente lo contrario a la regla de Pieri, es decir, extraer r cajas del diagrama de Young de λ todas de diferentes filas. El mismo argumento es válido para el operador e_r^\perp pero en este caso, sacamos r cajas de diferentes filas.

Así entonces podemos decir que,

$$h_r^\perp : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^{n-r} \quad (2.5.5)$$

en otras palabras, podemos entender a f^\perp como un tipo de operador diferencial sobre Λ . Definamos ahora,

$$H^\perp(t) = \sum_{n \geq 0} h_n^\perp t^n \quad (2.5.6)$$

$$E^\perp(t) = \sum_{n \geq 0} e_n^\perp t^n \quad (2.5.7)$$

Se puede mostrar que estos objetos cumplen ciertas reglas de conmutatividad, a saber una de ellas es,

$$E^\perp(t) \circ H(u) = (1 + tu)H(u) \circ E^\perp(t) \quad (2.5.8)$$

Con estos objetos presentes, definimos,

$$B(t) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} B_r t^r = H(t) \circ E^\perp(-t^{-1}) \quad (2.5.9)$$

con la convención usual de que $h_n = 0$ si $n < 0$

Podemos recuperar ahora el coeficiente B_n . Basta observar que,

$$\begin{aligned} H(t) \circ E^\perp(-t^{-1}) &= \sum_{m, n \geq 0} h_n t^n \circ e_m^\perp (-t^{-1})^m \\ &= \sum_{m, n \geq 0} (-1)^m h_n \circ e_m^\perp t^{n-m} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

tomando $r + m = n$ y $m \geq 0$ tenemos que,

$$H(t) \circ E^\perp(-t^{-1}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_{r+m} \circ e_m^\perp t^r \quad (2.5.11)$$

Así tenemos que,

$$B_r = \sum_{m \geq 0} (-1)^m h_{r+m} \circ e_m^\perp \quad (2.5.12)$$

De forma más general, si t_1, t_2, \dots, t_n son indeterminadas independientes, entonces definimos,

$$B(t_1, t_2, \dots, t_n) = H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n)E^\perp(-t_1^{-1})E^\perp(-t_2^{-1}) \cdots E^\perp(-t_n^{-1}) \quad (2.5.13)$$

la relación (2.5.8) dice que,

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2, \dots, t_n) &= H(t_1)H(t_2) \cdots (1 - t_1^{-1}t_n)^{-1}E^\perp(-t_1^{-1})H(t_n) \\ &\quad E^\perp(-t_2^{-1}) \cdots E^\perp(-t_n^{-1}) \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

iterando sobre las otras variables, obtenemos que,

$$\begin{aligned} &B(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= \prod_{i < j} (1 - t_i^{-1}t_j)^{-1} H(t_1)E^\perp(-t_1^{-1})H(t_2)E^\perp(-t_2^{-1}) \cdots H(t_n)E^\perp(-t_n^{-1}) \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

es decir que,

$$B(t_1)B(t_2) \cdots B(t_n) = \prod_{i < j} (1 - t_i^{-1}t_j) B(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (2.5.16)$$

Esta última expresión la podemos evaluar en $1 = s_{(0)}$ y es interesante observar que $e_n^\perp(1) = 0$ si $n > 0$. De esta forma, tenemos que,

$$B(t_1)B(t_2) \cdots B(t_n)(1) = \prod_{i < j} (1 - t_i^{-1}t_j) H(t_1)H(t_2) \cdots H(t_n) \quad (2.5.17)$$

ya que al evaluar en 1 el único termino no nulo es e_0^\perp , pero eso es exactamente sacar ninguna caja, es decir el operador identidad.

Ahora sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ una partición. Si igualamos los coeficientes de t^λ a ambos lados de (2.5.17) tenemos que,

$$B_{\lambda_1} B_{\lambda_2} \cdots B_{\lambda_n}(1) = \prod_{i < j} (1 - R_{i,j}) h_\lambda \quad (2.5.18)$$

donde $R_{i,j}$ es un operador de $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ definido por,

$$R_{i,j}(a) = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j - 1, a_{j+1}, \dots, a_n) \quad (2.5.19)$$

y de esta forma definimos $R_{i,j}h_\lambda = h_{R_{i,j}(\lambda)}$.

Con estos operadores la relación (2.4.21) se transforma en,

$$s_\lambda = \prod_{i < j} (1 - R_{i,j}) h_\lambda \quad (2.5.20)$$

que si la juntamos con la ecuación (2.5.18) obtenemos la siguiente identidad,

$$s_\lambda = B_{\lambda_1} B_{\lambda_2} \cdots B_{\lambda_n}(1) \quad (2.5.21)$$

Notemos ahora que la identidad (2.5.21) nos dice que,

$$s_\lambda = B_{\lambda_1} \cdot s_{\hat{\lambda}} \quad (2.5.22)$$

Como $B_r = \sum_{m \geq 0} (-1)^m h_{r+m} \circ e_m^\perp$, entonces la ecuación (2.5.22), queda así,

$$s_\lambda = \sum_{m \geq 0} (-1)^m h_{\lambda_1+m} \circ e_m^\perp s_{\hat{\lambda}} \quad (2.5.23)$$

En términos de funciones de Schur y entendiendo lo que hace el operador e_m^\perp , obtenemos la siguiente identidad,

$$s_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda'_1-1} (-1)^i s_{(\lambda_1+i)} \cdot \left(\sum_{\nu \in C_{\hat{\lambda}}(i)} s_\nu \right) \quad (2.5.24)$$

donde $C_\lambda(i) = \{\mu \vdash (n-i) \mid \mu \text{ se obtiene al sacar } i \text{ cajas de diferentes filas de } \lambda\}$.

La ecuación (2.5.22) fue introducida por J. N. Bernstein y aparece en [9]. Para ver con mas detalles la demostración que acabamos de ilustrar, revisar [6].

Observemos que esta fórmula da una forma recursiva de cómo definir las funciones de Schur. Basta tener este operador B_n y funciones de Schur indexadas por particiones menores, para construir funciones de Schur más grandes. De parte del autor y de revisiones de Luc Lapointe no encontramos en la literatura una demostración combinatorial de esta identidad. A esto es a lo que se dedica el resto de este trabajo.

Capítulo 3

Una Demostración Combinatorial

Nuestra demostración se basa en describir una involución que va a actuar sobre conjuntos de tríos de particiones, que están representados por ciertos diagramas de Young, pero antes de empezar a mostrar cómo es la involución, vamos a introducir algunos conceptos y definiciones que nos ayudarán a entender mejor lo que queremos demostrar.

3.1. Interpretaciones Combinatoriales

Aprovecharemos la forma de entender a las particiones como arreglos de cajas. Hemos visto que estas cajas pueden llevar un relleno en algunos casos, usaremos esta idea para visualizar mejor los objetos sobre los cuales haremos todo el trabajo y donde la combinatoria de la demostración se ve bien representada.

Definición 28. Sean λ y μ particiones, tales que $\mu \subseteq \lambda$, entonces definimos $(\mu \setminus_A \lambda)$ por el diagrama de Young T_λ con las cajas que no están en T_μ rellenas con A , donde A es sólo un símbolo arbitrario para distinguir cajas.

Esta definición nos ayudará a visualizar mejor una banda vertical u horizontal. De hecho vamos a decir que el par (μ, λ) dado en la definición (28) tiene una banda vertical (respectivamente horizontal) de tamaño p , si en $(\mu \setminus_A \lambda)$ hay p cajas marcadas con A y todas las cajas marcadas con A están en diferentes filas (respectivamente columnas) de T_λ .

Ejemplo 29. De esta forma las bandas verticales y horizontales del Ejemplo 10 con nuestra nueva definición se ven así,

$$(4, 2) \setminus_A (5, 3, 1, 1, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & & & \\ \hline A & & & \\ \hline A & & & \\ \hline & & A & \\ \hline & & & A \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad (4, 2, 1) \setminus_A (7, 3, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline A & & & & & & \\ \hline & A & & & & & \\ \hline & & A & & & & \\ \hline & & & A & & & \\ \hline & & & & A & A & A \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \quad (3.1.1)$$

Cuando sacamos cajas y agregamos cajas a un diagrama de Young, se ven involucradas tres particiones como se observa en el Ejemplo 32. Así como tenemos definida la operación $(\mu \setminus_A \lambda)$ para particiones $\mu \subseteq \lambda$, podemos dar una definición general para cuando agregamos y quitamos cajas a un diagrama.

Definición 37. Sean μ, λ, ν particiones tales que $\mu \subseteq \lambda$ y $\mu \subseteq \nu$, entonces definimos,

$$(\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu) = (\mu \setminus_o \lambda) + (\mu \setminus_x \nu) \quad (3.1.7)$$

donde la suma de los diagramas de Young es mediante superposición fijando la caja en la primera fila y primera columna.

Nos referiremos a la suma $(\mu \setminus_o \lambda) + (\mu \setminus_x \nu)$ como el diagrama de representación de $(\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu)$. Si $T = (\mu \setminus_o \lambda) + (\mu \setminus_x \nu)$, entonces definimos $sh(T) = sh(\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu) = \nu$

Ejemplo 38. De esta forma el diagrama del Ejemplo 32 lo podemos escribir como,

$$T = ((3, 3) \setminus_o (4, 3, 1, 1) \setminus_x (6, 3, 2)) \quad (3.1.8)$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \circ & & & \\ \hline \circ & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \circ \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \times & \times & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & \times & \times & \times \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \circ & & & & & \\ \hline \circ & \times & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \times & \times \\ \hline \end{array} \quad (3.1.9)$$

Y además

$$sh(T) = (6, 3, 2) \quad (3.1.10)$$

3.2. Conjuntos de Particiones

Nuestro trabajo ahora se centra en conjuntos de particiones, que obtendremos de la identidad (2.5.24) que queremos demostrar, y estudiar sus propiedades desde un punto de vista combinatorial.

Definición 39. Sean i, j enteros no negativos y λ una partición, entonces definimos

$$T_{i,j}^\lambda = \{(\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu) \mid \begin{array}{l} \lambda/\mu = \text{banda vertical de tamaño } i; \\ \nu/\mu = \text{banda horizontal de tamaño } j \end{array}\} \quad (3.2.1)$$

Si $T = (\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu) \in T_{i,j}^\lambda$, entonces definimos $sh(T) = \nu$.

Ejemplo 40. En el Ejemplo 32,

$$T = ((3, 3) \setminus_o (4, 3, 1, 1) \setminus_x (6, 3, 2)) \in T_{3,5}^{(4,3,1,1)} \quad (3.2.2)$$

Observación 41. Una descripción de $T_{i,j}^\lambda$ puede darse también así,

$$T_{i,j}^\lambda = \{(\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu) \mid \mu = \text{se obtiene al sacar } i \text{ cajas de diferentes filas de } T_\lambda; \\ \nu = \text{se obtiene al agregar } j \text{ cajas de a diferentes columnas de } T_\mu\} \quad (3.2.3)$$

La Observación 41 nos dice que los elementos de $T_{i,j}^\lambda$ se obtienen a partir del diagrama de Young de λ , primero sacando una banda vertical de tamaño i , obteniendo un diagrama que nos entrega una partición μ , al que luego se le agrega una banda horizontal de tamaño j , es decir exactamente

$$(\mu \setminus_o \lambda) + (\mu \setminus_x \nu) \quad (3.2.4)$$

donde λ/μ tiene una banda vertical de tamaño i y ν/μ tiene una banda horizontal de tamaño j .

Ejemplo 42. Si tomamos $\lambda = (3, 2, 2)$ y los enteros $i = 2$ y $j = 5$ tenemos en términos de los diagramas de representación que,

$$T_{2,5}^{(3,2,2)} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & \\ \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & \\ \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & \\ \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline & & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline & & & & X & X & X & X \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X & X \\ \hline & & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & \\ \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline X & & & & \\ \hline & O & & & \\ \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline & & & & X & X & X \\ \hline & & & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & X & & \\ \hline & & & X & X & X \\ \hline & & & & X & X & X \\ \hline & & & & & X & X & X \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \quad (3.2.5)$$

Mientras que si tomamos $i = 0$ y $j = 3$, obtenemos,

$$T_{0,3}^{(3,2,2)} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & X & & \\ \hline & & X & \\ \hline & & & X \\ \hline & & & & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & & & \\ \hline & & X & \\ \hline & & & X \\ \hline & & & & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X & & & \\ \hline & & X & \\ \hline & & & X \\ \hline & & & & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & X & \\ \hline & & & X \\ \hline & & & X & X \\ \hline & & & & X & X & X \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & X & \\ \hline & & & X \\ \hline & & & X & X \\ \hline & & & & X & X & X \\ \hline \end{array} \end{array} \right\} \quad (3.2.6)$$

Si siguiendo con en el tipo de lecturas hechas en las Observaciones 35, 33 y 36, la información de cada caja la interpretaremos así:

- (i) Las cajas que son del tipo \square se leerán como cajas que no han cambiado, serán llamadas cajas fijas.
- (ii) Las cajas que son del tipo \square como cajas que han sido extraídas, serán llamadas cajas tipo O .
- (iii) las cajas que son del tipo \square como cajas que han sido agregadas, serán llamadas cajas tipo X .

- (iv) las cajas que son del tipo $\boxed{\otimes}$ como cajas que han sido extraídas y luego agregadas, que serán llamadas cajas tipo OX .

Notar que en el tope superior de las columnas de cada $T \in T_{i,j}^\lambda$ se desarrollan los cuatro tipos posibles de cajas de las listadas anteriormente (como se ve en el último elemento del conjunto descrito en (3.2.5)), pero recordemos que una caja del tipo O es una caja que ha sido removida, entonces no es exactamente la que está en el tope superior de la columna de la partición representada, más bien, el tope superior en ese caso es una caja más abajo en la misma columna de tipo fija o tipo OX , pues por la Observación 35. Las cajas que están en los topes superiores de cada columna de una partición λ se pueden caracterizar por medio de la siguiente franja horizontal $(\lambda/\hat{\lambda})$. De esta forma hacemos la siguiente,

Definición 43. Sea $T = (\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu) \in T_{i,j}^\lambda$ definir,

$$C(T) = (\nu/\hat{\nu})/(\nu/\lambda) \tag{3.2.7}$$

Una caja en $C(T)$ la llamaremos caja cambiabile.

Ejemplo 44. Sea $T = ((6, 4, 2, 2, 2, 2) \setminus_o (6, 5, 3, 3, 3, 2, 1) \setminus_x (13, 4, 4, 2, 2, 2, 2))$, un elemento de $T_{5,11}^{(6,5,3,3,3,2,1)}$, entonces

$(\nu/\hat{\nu}) =$

$(\nu/\lambda) =$

(3.2.8)

y así

$C(T) =$

(3.2.9)

Y si marcamos las cajas cambiabiles en T , obtenemos,

$$\begin{aligned}
 & ((6, 4, 2, 2, 2, 2) \setminus_o (6, 5, 3, 3, 3, 2, 1) \setminus_x (13, 4, 4, 2, 2, 2, 2)) = \\
 & =
 \end{aligned}$$

(3.2.10)

Observación 45. Una caracterización de las cajas cambiables es, aquellas cajas que están en el tope superior de cada columna y son cajas del tipo OX o cajas tipo fijas.

Otra observación interesante de hacer es que hay elementos T en ciertos conjuntos $T_{i,j}^\lambda$ que tienen $C(T) = \emptyset$, como por ejemplo en T_{0,λ_1}^λ está el elemento $T = (\hat{\lambda} \setminus_o \hat{\lambda} \setminus_x \lambda)$ que tiene $C(T) = \emptyset$. Notar que el primer elemento del conjunto dado en (3.2.6) cumple tal condición, es decir, no tiene cajas cambiables. El siguiente lema establece un caso donde hay tales T con $C(T) = \emptyset$.

Lema 46. $T = (\hat{\lambda} \setminus_o \hat{\lambda} \setminus_x \lambda) \in T_{0,\lambda_1}^\lambda$ es el único $T \in \bigcup_{i=0}^{\lambda_1'-1} T_{i,\lambda_1+i}^\lambda$ tal que $C(T) = \emptyset$.

Demostración. Si hay $T = (\mu \setminus_o \hat{\lambda} \setminus_x \nu) \in T_{i,\lambda_1+i}^\lambda$ tal que $C(T) = (\nu \setminus \hat{\nu}) \setminus (\nu \setminus \hat{\lambda}) = \emptyset$ entonces i debe ser igual a 0, pues si no, existiría una caja cambiabile. Esto sale de que si $i > 0$, entonces

- hay cajas del tipo OX en el diagrama de la representación de T ó
- hay cajas del tipo O en el diagrama de la representación de T .

En el primer caso hay una caja cambiabile, por definición. En el segundo caso, como una caja del tipo O significa que no hay caja en esa posición, entonces hay que mirar la caja más abajo en esa columna que no es del tipo O . Si esta caja existe entonces, esta caja tiene dos opciones o es del tipo OX , o es del tipo caja fija, pues no tiene sentido ser del tipo X por la Observación 35, y esta caja es la que está en el tope superior de su columna, así tendríamos una caja cambiabile. Si esta caja no existe, entonces estamos en la situación en que todas las cajas en esa columna son del tipo O . Veamos que esto no puede ser. Notar que si hay una caja tipo O en el tope superior de una columna, entonces por la Observación 36 y por la definición de $T_{i,j}^\lambda$, debe estar al final de esa fila. Supongamos que estamos en la situación señalada, entonces hay una caja del tipo O en la primera fila. Según la Observación 41 debemos agregar λ_1 cajas, pero antes de agregar las cajas hay a lo más λ_2 columnas, y como agregamos $\lambda_1 \geq \lambda_2$ cajas y sólo una caja en cada columna, entonces se debe pasar, al menos, por la primera fila para poder agregar el resto de las cajas. Esto fuerza a que la caja tipo O en la primera fila sea en realidad una caja del tipo OX , contradiciendo que existan solo cajas del tipo O en la columna en cuestión. Entonces en ambos casos hay una caja cambiabile. Luego efectivamente $i = 0$ y $T \in T_{0,\lambda_1}^\lambda$. Ahora como todas las cajas cambiables de los elementos de T_{0,λ_1}^λ , son del tipo caja fija entonces la única manera de que un $T \in T_{0,\lambda_1}^\lambda$, tenga $C(T) = \emptyset$ es que, según la Observación 41, agregue una caja en cada columna disponible de $\hat{\lambda}$ hasta acabar con todas las cajas que hay que agregar. Esto recupera a λ lo que concluye la demostración del lema. \square

Finalmente observamos que según el Lema 46 el resto de los elementos de $\bigcup_{i=0}^{\lambda_1'-1} T_{i, \lambda_1+i}^\lambda$ tiene un conjunto de cajas cambiables no vacío.

Definición 47. Sea λ una partición, entonces definimos $T^\lambda = \bigcup_{i=0}^{\lambda_1'-1} T_{i, \lambda_1+i}^\lambda \setminus \{(\hat{\lambda} \setminus_o \hat{\lambda} \setminus_x \lambda)\}$ que llamaremos el conjunto de las representaciones con cajas cambiables

3.3. La Involución

Recordemos la Observación 33 que decía que las cajas tipo fijas y tipo OX son en un sentido, cajas equivalentes, esto era cajas que representaban lo mismo, pero tenían diferente relleno. Podemos pensar entonces que existen diferentes $(\mu \setminus_o \lambda \setminus_x \nu)$ y $(\tilde{\mu} \setminus_o \lambda \setminus_x \tilde{\nu})$ en T^λ tales que representan a la misma partición, es decir $\nu = \tilde{\nu}$.

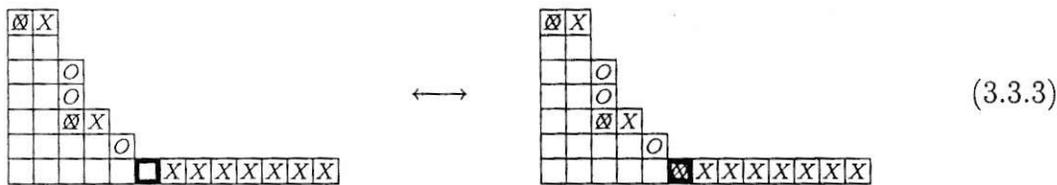
Ejemplo 48. Si $\lambda = (6, 5, 3, 3, 3, 2, 1)$, entonces en $T_{5,11}^\lambda$ tengo

$$T = ((6, 4, 2, 2, 2, 2) \setminus_o (6, 5, 3, 3, 3, 2, 1) \setminus_x (13, 4, 4, 2, 2, 2, 2)) \tag{3.3.1}$$

y en $T_{6,12}^\lambda$ tengo

$$T' = ((5, 4, 2, 2, 2, 2) \setminus_o (6, 5, 3, 3, 3, 2, 1) \setminus_x (13, 4, 4, 2, 2, 2, 2)) \tag{3.3.2}$$

y ambos diagramas de representación de T y T' , leemos finalmente una misma partición, a saber, $(13, 4, 4, 2, 2, 2, 2)$. En términos de diagramas esto es,



donde la caja remarcada es la única diferencia en los dos diagramas.

Vemos que en el Ejemplo 48 se hace evidente el hecho de la equivalencia de las cajas tipo fijas y tipo OX. Además ambas cajas son cajas cambiables, pues están en el tope superior de su columna, entonces pareciera que siempre puedo cambiar una caja tipo fija por una caja tipo OX. A continuación presentamos el resultado que nos permitirá hacer la demostración de la identidad,

Teorema 49. Sea λ partición y T^λ como la Definición 47, entonces

$$\sigma : T^\lambda \longrightarrow T^\lambda \tag{3.3.4}$$

(i) σ cambia $\boxed{\otimes} \longrightarrow \square$

(ii) σ cambia $\square \longrightarrow \boxed{\otimes}$

El primer caso es más claro, debido a que la aplicación de σ en este caso es sacar una caja. Entonces si antes de σ teníamos que (ν/μ) era un franja horizontal, entonces $(\bar{\nu}/\bar{\mu})$ seguirá siendo franja horizontal, pues a la franja la sacamos una caja. Igual argumento para la franja vertical.

Para el segundo caso, sea b la caja cambiante de $T_b = (\mu_b \setminus_o \lambda_b \setminus_x \nu_b) \in T^\lambda$ más a la derecha. La llamaremos caja b (o solamente b si está claro en el contexto). En este caso la caja b es una caja del tipo fija, es decir $b = \square$, entonces $\sigma(b) = \sigma(\square) = \boxed{\otimes}$ y por lo tanto debemos verificar las siguientes propiedades,

(I) en la fila de $\sigma(b)$ no hay otra caja con relleno O .

(II) en la columna de $\sigma(b)$ no hay otra caja con relleno X .

pues si falla (I) contradice el hecho que $\lambda_b/\bar{\mu}_b$ sea una franja vertical y si falla (II), contradice que $\nu_b/\bar{\mu}_b$ sea una franja horizontal. Para la propiedad (II) podemos afirmar que no hay una caja del tipo X en la misma columna de $\sigma(b)$, del hecho que la caja b es por definición una caja cambiante. Esto dice que b está en el tope superior de su columna, por lo que de haber una caja del tipo X debería estar más abajo que b en la misma columna, pero esto no tiene sentido en un diagrama de representación, según la Observación 41. Para la propiedad (I), supongamos que la en la fila de la caja b hay una caja tipo O . Esta caja tipo O debe estar a la derecha de b y al final de la fila, pues antes no tiene sentido según la Observación 36 y además como b está en el tope superior de su columna no hay cajas a la derecha de b y en una fila superior. Ahora en la situación siguiente que existe una caja c , entre la columna j y la columna l , el diagrama se ve de esta forma,

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \text{col } j & & & \text{col } l & \\
 \vdots & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \\
 \square & \dots & \boxed{b} & \dots & \boxed{c} & \dots & \boxed{O} \leftarrow \text{fila } i \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array} \tag{3.3.12}$$

Pero la caja c no puede ser caja tipo O , pues no tiene sentido según nuevamente la Observación 36. Tampoco la caja c puede ser cambiante, pues b es la caja cambiante más a la derecha. Finalmente, del hecho de que b está en el tope superior de su columna, junto con que la caja en la posición (i, l) es del tipo O , dice que la caja c no puede ser del tipo X ; de serlo contradice que el diagrama inicial de λ sea efectivamente un diagrama de Young. Entonces no puede existir tal caja c . Luego $j + 1 = l$.

Veamos ahora que pasa debajo de la fila i . Si $i > 1$ entonces hay una caja d en la fila $i - 1$ y columna $j + 1$. Esta caja d sólo puede ser del tipo O , pues si es caja fija o del tipo OX , sería caja cambiante, contradiciendo la elección de b como la caja cambiante más a la derecha. Tampoco la caja d puede ser del tipo X , pues no tiene

sentido por contrucción (primero sacamos cajas y luego agregamos cajas). Esto fuerza a que si hay tal caja d , entonces ésta es del tipo O y entonces la fila $(i - 1)$ de T_b es idéntica a la fila i de T_b , a excepción de la caja b . Entonces iterando, todas las filas $k < i$ son iguales. La situación queda entonces así:

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \vdots \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \cdots & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & b & O \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{fila } i \\
 \vdots & & \vdots \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \cdots & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & O \\ \hline \end{array} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{col } 1 & & \text{col } \lambda_2
 \end{array} \tag{3.3.13}$$

El otro caso es que $i = 1$. En ambos casos el número de columnas es a lo más λ_2 y para obtener ν_b hay que agregar por lo menos λ_1 cajas. Como $\lambda_1 > \lambda_2$, entonces para que la representación de T_b , sea un diagrama, tengo que agregar cajas en la primera fila ocupando las últimas columnas. Esto hace aparecer una caja en la columna λ_2 del tipo OX . Lo que contradice la elección de b como la caja cambiable más a la derecha. Luego no puede haber una caja tipo O a la derecha de b en T_b . Esto dice que efectivamente $\sigma(T_b) \in T^\lambda$, entonces tenemos que $\sigma : T^\lambda \rightarrow T^\lambda$ es una función bien definida.

Tenemos también que si b es la caja cambiable más a la derecha, entonces $\sigma(b)$ es también una caja cambiable, pues σ por definición lleva caja cambiable en caja cambiable, y está más a la derecha que todas las otras cajas cambiables, pues si no contradice la elección de b como caja cambiable más a la derecha. Esto, junto con la definición de σ en su regla de cambio (3.3.5), dice que $\sigma : T^\lambda \rightarrow T^\lambda$ es una involución y completando la demostración del teorema. \square

3.4. La demostración

Con estos ingredientes podemos hacer una demostración de la identidad (2.5.24). Recordemos la regla de Pieri, que nos dice cómo multiplicar funciones de Schur para un caso específico. Sea $n, l \in \mathbb{N}$ y ν partición entonces

$$s_{(l)} \cdot s_\nu = \sum_{\mu} s_\mu \tag{3.4.1}$$

donde la suma es sobre todos los μ tales que μ/ν es una banda horizontal de tamaño l .

Demostración. Según la regla de Pieri y lo hecho para los conjuntos $T_{i,j}^\lambda$, la identidad (2.5.24) la podemos escribir como sigue:

$$s_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda'_1-1} (-1)^i s_{(\lambda_1+i)} \cdot \left(\sum_{\nu \in C_\lambda^\lambda(i)} s_\nu \right) \quad (3.4.2)$$

$$\Updownarrow$$

$$s_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda'_1-1} (-1)^i s_{(\lambda_1+i)} \cdot \left(\sum_{T \in T_{i,0}^\lambda} s_{sh(T)} \right) \quad (3.4.3)$$

$$\Updownarrow$$

$$s_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda'_1-1} (-1)^i \left(\sum_{T \in T_{i,0}^\lambda} s_{(\lambda_1+i)} \cdot s_{sh(T)} \right) \quad (3.4.4)$$

$$\Updownarrow$$

$$s_\lambda = \sum_{i=0}^{\lambda'_1-1} (-1)^i \left(\sum_{T' \in T_{i,\lambda_1+i}^\lambda} s_{sh(T')} \right) \quad (3.4.5)$$

Usando la definición de T^λ , la Ecuación 3.4.5 la podemos escribir como:

$$s_\lambda = s_\lambda + \sum_{T \in T^\lambda} sgn(T) \cdot s_{sh(T)} \quad (3.4.6)$$

donde

$$sgn(T) = (-1)^{|cajas\ quitadas|} \quad (3.4.7)$$

Así basta ver que

$$\sum_{T \in T^\lambda} sgn(T) \cdot s_{sh(T)} = 0 \quad (3.4.8)$$

De la definición de la regla de cambio dada en (3.3.5) podemos decir que $sgn(\sigma(T)) = -sgn(T)$, pues sea cual sea T , bajo la acción de σ , a T se le aumenta o disminuye en 1 el número de cajas tipo OX. Como además σ es una biyección, pues es una involución, entonces

$$\sum_{T \in T^\lambda} sgn(T) \cdot s_{sh(T)} = \sum_{T \in T^\lambda} sgn(\sigma(T)) \cdot s_{sh(\sigma(T))} = - \sum_{T \in T^\lambda} sgn(T) \cdot s_{sh(T)} \quad (3.4.9)$$

pues $sh(\sigma(T)) = sh(T)$ debido que la partición que representa $sh(T)$ no cambia bajo σ . Entonces,

$$\sum_{T \in T^\lambda} sgn(T) \cdot s_{sh(T)} = - \sum_{T \in T^\lambda} sgn(T) \cdot s_{sh(T)} \quad (3.4.10)$$

Es decir,

$$\sum_{T \in T^\lambda} \operatorname{sgn}(T) \cdot s_{sh(T)} = 0 \quad (3.4.11)$$

como se quería demostrar. \square

3.5. Proyecciones Futuras

Ya hemos comentado que el estudio de las funciones simétricas ha llevado en trabajos recientes, [2], [3], [4] y [5], al estudio de una nueva familia de funciones simétricas $s_\lambda^{(k)}$, indexadas por particiones cuya primera parte no es mayor que un entero positivo k , llamadas k -funciones de Schur. El nombre cae del hecho de que en el estudio de estas funciones se estableció que, las $s_\lambda^{(k)}$ cumplían propiedades combinatoriales similares a las de las funciones de Schur en $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$, pero en el espacio $\Lambda^{(k)} = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_k]$.

Estas funciones satisfacen, de una forma más general, propiedades clásicas de las funciones de Schur tales como la regla de Pieri y la regla de Littlewood-Richardson. Estas reglas se deben entender como nuevas reglas que reciben el nombre de k -regla de Pieri y k -regla de Littlewood-Richardson. Una observación interesante de hacer sobre estas k -funciones de Schur, es que en los casos en que el entero positivo k se toma muy grande en comparación con la primera parte de la partición λ , se recupera el caso clásico, es decir, las k -particiones se comportan como particiones y las k -reglas son exactamente las reglas conocidas. De esta forma y aprovechándonos del lenguaje llamaremos al caso clásico por el *caso infinito*.

La existencia de estas k -reglas hace pensar que las k -funciones de Schur podrían satisfacer una relación similar a la fórmula de Bernstein. Esto fue conjeturado por Luc Lapointe en sus trabajos con polinomios de Macdonald, observando que una k -función de Schur se podía expresar en términos de sumas de productos alternados de k -funciones de Schur de grado menor. Así aprovechando las propiedades combinatoriales de las k -funciones de Schur, se sugirió que la demostración combinatorial de la identidad (2.5.24), podría establecer las bases de una posible demostración de la identidad más general conjeturada. De esta forma en un trabajo cercano, para lograr la verificación de la conjetura de Lapointe, se debería precisar mejor cuales son los objetos que permiten enunciar de forma precisa la conjetura.

En una etapa inicial será necesario establecer sobre que conjunto de particiones es la suma de esta expansión alternada. En este paso inicial se debe definir un conjunto $C_\lambda^{(k)}(i)$ equivalente al conjunto $C_\lambda(i)$. Para este proceso debería llevarse a cabo un trabajo de encontrar una definición apropiada al concepto equivalente de banda vertical y banda horizontal, una especie de k -banda vertical y k -banda horizontal. Esta definición debe permitir luego hacer el trabajo combinatorial sobre los conjuntos de particiones. Luego encontrar una función sobre el conjunto sobre el cual se hace la suma, que sea una involución que cambia el signo de la alternancia. Finalmente con todos esos elementos hacer una demostración, siguiendo los mismos pasos que en el caso infinito.

Este trabajo no sólo es interesante por si mismo y por entregar mayor evidencia que respalde a las k -funciones de Schur como los objetos apropiados a ser estudiados, sino que además propone que hay una traducción desde el caso infinito al caso general

en muchos otros aspecto abriendo nuevas líneas de investigación que merecerían ser exploradas.

Bibliografía

- [1] W. Fulton, *Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] L. Lapointe, A. Lascoux y J. Morse, *Tableau atoms and a new Macdonald positivity conjecture*, *Duke Math. J.* **116**, 103-146 (2003)
- [3] L. Lapointe, y J. Morse, *Schur function analogs for a filtration of the symmetric function space*, *J. Comb. Th. A* **101/2**, 191-224 (2003)
- [4] L. Lapointe, y J. Morse, *Tableaux on $k+1$ -cores, reduced words for affine permutations, and k -Schur expansions*, por pulicar en *J. Comb. Th. A* (2004)
- [5] L. Lapointe y J. Morse, *A k -tableau characterization of k -Schur functions*, math.CO/0505519.
- [6] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd edition, Oxford University Press, 1998.
- [7] B. E. Sagan, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, 2nd edition, Springer-Verlag, 2001.
- [8] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 2*, Cambridge University Press, 1999.
- [9] A. V. Zelevinsky, *Representation of finite classical groups: a Hopf algebra approach*. Springer Lecture Notes, **869**, 1981.