# OPERADORES INDESCOMPONIBLES EN ESPACIOS SOBRE CUERPOS DE SERIES DE POTENCIAS

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en el cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Matemáticas



Facultad de Ciencias
por
Tonino Costa Araya

Agosto, 2005

Director de Tesis: Dra. Herminia Ochsenius A.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la tesis de Magister presentada por el candidato.

Tonino Costa Araya

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 24 de Agosto de 2005.

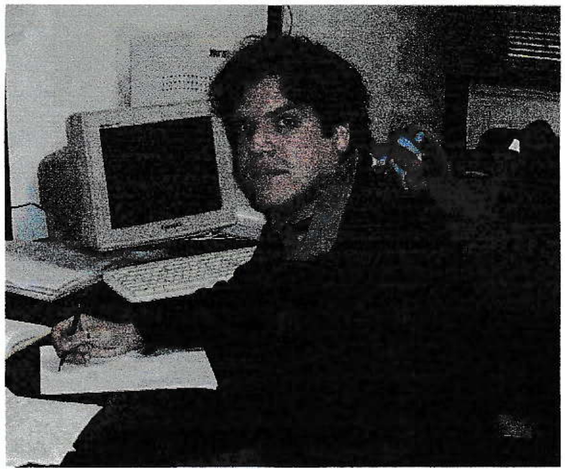
Director de Tesis
Dra. Herminia Ochsenius A. ........................ H. Ochsenius

Comisión de Evaluación de Tesis

Dr. Hans Keller ........................ Hans A. Keller

Dra. Alicia Labra J. ........................ Alicia Labra J.

Dr. Jorge Soto A. ........................





Desde el colegio fui "bueno para los números", frase que todo el mundo utiliza cuando cuentas que estudias matemáticas, frase que muchos concordarán conmigo, está muy mal usada, pero eso uno lo descubre cuando ya está algo avanzado en la carrera.

Estudié Licenciatura en Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de Chile y el último año hice un intercambio con el Politécnico de Milán, antes de partir tenia claro que la investigación era algo que queria explorar y terminé haciendo esta tesis de Magister en la Universidad de Chile. Ahora hay que mirar hacia adelante, como siempre lo he hecho en mi vida, y el siguiente paso para completar mi formación académica es realizar un doctorado, el cual comienza el próximo Noviembre en la Universidad de Cantabria, Santander, España.

De manera paralela a la vida estudiantil hay muchas cosas que me gusta hacer, pero sin duda la que más es viajar, si fuese posible lo haría un hobby. Según muchos de mis amigos mi fin en la vida es ahorrar dinero para poder viajar, lo cual no se aleja mucho de la realidad, de hecho pienso que no hay nada más entretenido que perderse en una ciudad donde no hablo el idioma.

Debido a este gusto por los viajes y por ser una herramienta fundamental cuando se estudia una carrera científica me vi obligado a estudiar inglés, pero al final no fue tan terrible, de hecho, además de ser muy útil, es algo que se puede tornar muy entretenido para hacer amigos, no es raro verme ofreciendo ayuda a alguien con un mapa en la mano y cara de perdido en la estación Baquedano del metro de Santiago, y terminar haciendo de guia en un paseo por Valparaiso, ciudad de la cual estoy profundamente enamorado y cada vez que voy disfruto buscando nuevos y más bellos paisajes.

Desde 1979 he sentido fuertemente el apoyo de mis padres Sara y Alberto, y de mi hermano Adrian, gracias a ellos es que hoy tengo todo lo que he conseguido, pero no puedo dejar fuera a la gente cuyo apoyo no ha sido sólo en el ámbito personal, sino que también a escala matemática, como por ejemplo mi tutora Herminia Ochsenius, mi amiga Carla Barrios, el Profesor Rolando Pomareda y tantos otros que estuvieron ahí cuando los necesité, en particular a la comisión examinadora formada por Hans Keller, Alicia Labra y Jorge Soto.

# Índice



0. Introducción 1

1. Preliminares 2
   1.1. Cuerpos de series de potencias generalizadas. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
   1.2. El espacio vectorial $E_n$ sobre el cuerpo $K_n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
   1.3. El espacio $E$ sobre el cuerpo $K$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

2. Construcción de una colección de operadores autoadjuntos e indescomponibles 11

3. Operadores indescomponibles sobre $E$ 18
   3.1. Espacios residuales . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
   3.2. Operadores lineales acotados en $E$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
   3.3. El operador $T$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

4. Construcción de una familia no numerable de operadores acotados, autoadjuntos e indescomponibles en el espacio $(\mathbf{E}, \phi)$ 24
   4.1. Construcción de familias de operadores indescomponibles en dimensión finita. . . 24
   4.2. Una familia no numerable de operadores indescomponibles en $E$ . . . . . . . . . 26
   4.3. Otras aplicaciones del método $S_n^{\alpha,\beta}$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

5. Referencias 28

# 0. Introducción

La clase de espacios ortomodulares descrita por Gross y Künzi (ver[5]) basándose en el trabajo de H. Keller (ver[1]) es una generalización de los espacios de Hilbert clásicos. En efecto, sea $E$ un espacio ortomodular de esta clase con una forma $\phi$ bilineal, simétrica y anisótropa. Tal como en los espacios de Hilbert $\phi$ induce una topología con respecto a la cual $E$ es completo. Los subespacios cerrados topológicamente son exactamente aquellos que son ortogonalmente cerrados, y el teorema de proyección es válido.

Sin embargo las diferencias son marcadas. En efecto en un espacio de Hilbert los operadores autoadjuntos cumplen el teorema espectral. En particular si $K = \mathbb{R}$ y la dimensión de $E$ es finita un operador $T$ es autoadjunto si y sólo si $E$ tiene una base de vectores propios de $T$.

En cambio en [2] se describen espacios $(E_n, \phi_n)$ con dimensión $2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $\phi_n$ es una forma bilineal definida positiva. El cuerpo base de $E_n$ es el cuerpo de series de potencias generalizadas $K_n = \mathbb{R}((\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n))$, que es henseliano y ordenable. Se presenta en cada $E_n$ un ejemplo de un operador $A_n$ que es autoadjunto e indescomponible, vale decir no tiene subespacios invariantes no triviales.

En este trabajo se obtiene para cada $(E_n, \phi_n)$ una familia no numerable de operadores autoadjuntos e indescomponibles. De hecho se presenta un método (al que llamamos método $S_n^{\alpha,\beta}$) que permite construirlos a partir de un operador autoadjunto e indescomponible en el espacio $E_1$ de dimensión 2. Luego se construye un espacio ortomodular de dimensión infinita $(E, \phi)$ y se prueba que dicho método induce un operador autoadjunto e indescomponible en $(E, \phi)$, esta construcción coincide con las ideas que aparecen en [7], pero fue desarrollada en forma independiente.

En el capítulo 1 haremos un primer acercamiento mostrando los resultados perliminares a este trabajo. En el capítulo 2 mostraremos la construcción de una colección de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumplen en cada espacio $(E_n, \phi_n)$ con ser autoadjuntos e indescomponibles, y luego en el capítulo 3 mostraremos de que manera estos operadores inducen un operador lineal acotado, autoadjunto e indescomponible $T$ en el espacio $(E, \phi)$.

Finalmente en el capítulo 4, utilizando las técnicas usadas en los capítulos 2 y 3, construiremos nuevas familias de operadores, en efecto una cantidad no numerable de ellos, que generalizan las anteriormente construidas, tanto en este trabajo, como en [2]. Mostraremos también un ejemplo que no pertenece a ninguna de las familias conocidas y que genera, usando el método $S_n^{\alpha,\beta}$, una nueva familia no numerable de operadores acotados, autoadjuntos e indescomponibles en $(E, \phi)$.

# 1. Preliminares

En este capítulo estudiaremos los cuerpos bases de los espacios vectoriales tanto con grupo de valores de rango finito como infinito, espacios vectoriales con dimensión finita y el espacio ortomodular de dimensión infinita $E$.

## 1.1. Cuerpos de series de potencias generalizadas.

Sea $(G,+)$ un grupo ordenado (y por tanto infinito). Consideramos $K = \mathbb{R}((G))$, el cuerpo de series de potencias generalizadas con coeficientes reales, formado por todas las funciones $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{R}$ para las cuales $supp(\alpha) = \{g \in G : \ \alpha(g) \neq 0\}$ es un subconjunto bien ordenado de $G$. Se define la suma y la multiplicación en este cuerpo de la siguiente manera:

$$(\alpha + \beta)(g) = \alpha(g) + \beta(g)$$
$$(\alpha \cdot \beta)(g) = \sum_{g'+g''=g} \alpha(g') \cdot \beta(g'')$$

para todo $\alpha, \beta \in K$ y $g, g', g'' \in G$.

Sea $\tau^g$ la función característica de $\{g\}$. Entonces $\alpha \in K$ puede ser representado por:

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g \tau^g$$

donde $a_g := \alpha(g) \in \mathbb{R}$.

Ordenamos $K$ en la forma siguiente: dado $\alpha = \sum_{g \in G} a_g \tau^g \in K$ con $g_0 = \text{mín}\, supp(\alpha)$ se define $\alpha$ positivo en $K$ si y sólo si $a_{g_0}$ es positivo en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, la función $v : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ definida por

$$v(\alpha) := \text{mín}\, supp(\alpha) \quad \text{para } \alpha \neq 0 \text{ y } v(0) = \infty$$

es una valuación de Krull, es decir:

a) $v(\alpha) = \infty$ si y sólo si $\alpha = 0$,

b) $v(\alpha \cdot \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$, y

c) $v(\alpha + \beta) \geq \text{mín}\{v(\alpha), v(\beta)\}$.

El orden de $K$ es compatible con esta valuación, es decir para todo $\alpha, \beta \in K$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$ entonces $v(\beta) \leq v(\alpha)$.

Un estudio amplio de las características y propiedades de este cuerpo se encuentra en [2] y [3]. Enunciaremos a continuación aquéllas que utilizaremos.

Por la propiedad (c), tenemos que $K$ es un cuerpo valuado no arquimedianamente. Por tanto, se cumple que una serie $\sum a_i$ converge en $K$ si y sólo si $\lim_{i \to \infty} v(a_i) = \infty$.

Por la misma propiedad, también se tiene que:

**Lema 1.1** (Principio de dominación) *Sean $\alpha, \beta \in K$ con $v(\alpha) \neq v(\beta)$, entonces*

$$v(\alpha + \beta) = \text{mín}\{v(\alpha), v(\beta)\}.$$

$K$ es cuerpo topológico considerando los abiertos basales para un punto $\alpha$ definidos por

$$U_g(\alpha) = \{x \in K : v(x - \alpha) > g\}$$

donde $g \in G$. Es completo en la topología de la valuación.

**Lema 1.2** ([2], Teorema 1.1) *En el cuerpo $K = \mathbb{R}((G))$ se cumple:*

*a) $K$ es henseliano.*

*b) Sea $\xi \in K$. Si $v(\xi) > 0$, entonces $1 + \xi$ es un cuadrado en $K$.*

*c) Sean $\alpha, \beta \in K$. Si $v(\alpha) = v(\beta)$ y $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, entonces $\alpha \equiv \beta$ mod$(\dot{K}^2)$.*

*d) La suma de dos cuadrados en $K$ es, también, un cuadrado.*

La siguiente definición será fundamental al momento de probar que el espacio de dimensión infinita en el que trabajaremos es ortomodular.

**Definición 1.3** *Para un cuerpo $F$, definimos su nivel, $S(F)$, como sigue:*

*a) Si $-1$ es suma de cuadrados, entonces*

$$S(F) = \text{mín}\{m \in \mathbb{N} : \ \textit{existen } a_1, a_2, \ldots, a_m \in F \textit{ con } -1 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2\}.$$

*b) Si $-1$ no es una suma de cuadrados, entonces $S(F) = \infty$.*

Debido a que $K$ es ordenado, se tiene que $S(K) = \infty$.

## 1.2. El espacio vectorial $E_n$ sobre el cuerpo $K_n$.

a) **El cuerpo valuado $K_n$.** Consideremos el grupo $G_n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_i$, donde cada $\mathbb{Z}_i$ es una copia isomorfa de los números enteros. Notemos que cada $G_n$ puede ser inyectado en $G_{n+1}$ de manera trival. $G_n$ está ordenado antilexicográficamente, es decir, si $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G$ y $k = \max\{j : h_j \neq g_j\}$ entonces $g < h$ si y solo si $g_k < h_k$. Definimos $K_n$ como el cuerpo de series de potencias generalizadas con coeficientes reales $K_n = \mathbb{R}((G_n))$.

**Observación 1.4** $K_1 = \mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ es isomorfo a $\mathbb{R}((t_1))$ el cuerpo consistente de todas las series de Laurent $\alpha = \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i t_1^i$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$. De manera más general, $K_n \cong \mathbb{R}((t_1, t_2, \ldots, t_n))$.

El cuerpo $K_n$ no es algebraicamente cerrado. De hecho:

**Lema 1.5** ([2], Lema 1.2) *Sea $K_n = \mathbb{R}((G_n))$. Para $i = 1, \ldots, n$ sea $g_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in G_n$, donde el 1 está en la posición i-ésima, y ponemos $\chi_i := \tau^{g_i} \in K_n$. Entonces*

$$\Sigma_n := \{\chi_1^{\epsilon_1} \cdots \chi_n^{\epsilon_n} : \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0, 1\}\}$$

*es un conjunto completo de representantes de clases de cuadrados positivos en $K_n$.*

**Demostración:** Sea $\alpha \in K_n$ un elemento positivo. Como $\{g_1, \ldots, g_n\} = \{v(\chi_1), \ldots, v(\chi_n)\}$ es una base para $G_n$, entonces existe un único $\tau \in \Sigma_n$ tal que $v(\alpha) \equiv v(\tau)\ mod(2G_n)$. Por lo tanto, $v(\alpha) = v(\tau \cdot \gamma^2)$ para algún $\gamma \in K_n$. Y por la afirmación (c) del Lema 1.2, concluimos que $\alpha \equiv \tau\ mod(\dot{K}^2)$. $\square$

**Observación 1.6** Como $K_n$ es ordenado, podemos ordenar de mayor a menor los representantes de clases del lema anterior, es decir,

$$\Sigma_n = \{\tau_1 = 1, \tau_2 = \chi_1, \tau_3 = \chi_2, \tau_4 = \chi_1\chi_2, \ldots, \tau_{2^n} = \chi_1\chi_2 \cdots \chi_n\}.$$

b) **Los espacios $E_n$.**

**Definición 1.7** $E_n = \{(\xi_1, \ldots, \xi_{2^n})\}$ *es el espacio vectorial de dimensión $2^n$ sobre el cuerpo $K_n$.*

*Denotamos por $e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{2^n}^n$ a los elementos de su base canónica. Dotamos a $E_n$ de un producto interno anisótropo $\phi_n$ definido sobre esta base por:*

*Para $i, j \in \{1, \ldots, 2^n\}$:*

*a) Si $i \neq j$, entonces $\phi_n(e_i^n, e_j^n) = 0$, y* *b)* $\phi_n(e_i^n, e_i^n) = \tau_i \in \Sigma_n$ *(Ver Observación 1.6).*

c) **Operadores en $L(E_n)$.**

El siguiente paso, luego de haber definidos los espacios, es estudiar los operadores lineales en $L(E_n)$. Recordamos las definiciones siguientes:

**Definición 1.8** *Sean $(E, \phi)$ un espacio vectorial dotado de un producto interno y $B : E \longrightarrow E$ un operador lineal. Diremos que $B$ es descomponible si $E$ es suma ortogonal de dos subespacios no triviales invariantes bajo $B$, es decir, $E = E_1 \oplus E_2$, donde $B(E_i) \subseteq E_i$ para $i = 1, 2$. En este caso, hay una base ortogonal del espacio $E$ con respecto a la cual la matriz de $B$ se descompone en dos bloques,*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.9** *Un operador lineal $B : E \longrightarrow E$ se dice autoadjunto con respecto al producto interno $\phi$, si para todo par $x, y \in E$ se tiene que:*

$$\phi(B(x), y) = \phi(x, B(y)).$$

Estamos interesados en estudiar la descomponibilidad o la indescomponibilidad de operadores lineales autoadjuntos en los espacios $E_n$ de la definición 1.7. El Lema siguiente justifica la elección de $\dim E_n$ como una potencia de 2. Al estudiar espacios residuales en el Capítulo 4 será clara la razón por la cual no consideramos espacios de dimensión $2^n$ sobre $K_m$ con $m \neq n$ (ver Observación 3.2).

**Lema 1.10** ([2], Lema 2.6) *Sea $K_n$ el cuerpo base y $(E, \phi)$ un espacio definido positivo sobre $K_n$. Si la dimensión de $E$ no es una potencia de 2, entonces cada operador autoadjunto $C : (E, \phi) \longrightarrow (E, \phi)$ es descomponible.*

En [2] se construye para cada $n \in \mathbb{N}$ un operador autoadjunto e indescomponible en $(E_n, \phi_n)$ y en [7] se prueba que esta colección induce un operador en dimensión infinita que es autoadjunto e indescomponible. La meta de este trabajo es generalizar dicha construcción.

**Observación 1.11** Si $\phi$ es el producto interno en $E$ y $A : E \longrightarrow E$ es un operador lineal cuya matriz sobre la base canónica es $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times m}$, con $m = dim(E)$, entonces $A$ es autoadjunto si y sólo si para todo par de vectores $e_i, e_j$ de una base ortogonal se cumple que:

$$\phi(A(e_i), e_j) = \phi(e_i, A(e_j)).$$

En el caso de los espacios $(E_n, \phi_n)$, lo anterior es equivalente a

$$a_{ji}\tau_j = a_{ji}\phi_n(e_j^n, e_j^n) = a_{ij}\phi_n(e_i^n, e_i^n) = a_{ij}\tau_i \tag{1}$$

para todo $i, j \in \{1 \ldots, 2^n\}$, pues la base es ortogonal.

Si $B$ es un operador autoadjunto con respecto al producto interno $\phi$, podemos reescribir la definición de un operador descomponible como sigue:

**Definición 1.12** *Un operador lineal $B : (E, \phi) \longrightarrow (E, \phi)$ autoadjunto, con respecto al producto interno anisótropo $\phi$, es descomponible si y sólo si existe un subespacio no trivial $E_1$ que es invariante bajo $B$.*

De hecho, es fácil ver que si $x \in E_1$ y $z \in E_1^{\perp}$, entonces $0 = \phi(B(x), z)$, pues $B(E_1) \subset E_1$. Pero, además, $\phi(B(x), z) = \phi(x, B(z))$, lo que implica que $E_1^{\perp}$ también queda fijo por el operador $B$.

El siguiente lema nos dará una condición necesaria para que un operador se pueda descomponer en subespacios invariantes:

**Lema 1.13** *Sea $E$ un espacio de dimensión finita sobre un cuerpo $K$. Si $B : E \longrightarrow E$ es un operador lineal descomponible, entonces su polinomio característico es reducible en $K[x]$.*

**Demostración:** Sean $T : (E, \phi) \longrightarrow (E, \phi)$ un operador descomponible y $W$ un espacio invariante bajo $T$, entonces existe una base de $E$ donde la matriz de $T$ puede escribirse por bloques de la siguiente manera:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}.$$

Donde $\mathcal{B}_1$ es la matriz del operador $T_W : W \longrightarrow W$, definido por $T_W(x) = T(x)$ para todo $x \in W$.

Como el polinomio característico es independiente de la base, entonces el polinomio característico del operador $T_W$, divide al polinomio característico de $T$ y por tanto este es reducible. $\square$

## 1.3. El espacio E sobre el cuerpo K.

Dado que este trabajo consta de dos partes, una de ellas desarrollada en dimensión finita y otra en dimensión infinita, indicaremos, así como lo hicimos para dimensión finita, los resultados previos en los cuales nos hemos basado para la parte infinito-dimensional (ver [7]).

Para el grupo $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_i$ ordenado antilexicográficamente, consideramos $K = \mathbb{R}((G))$ el cuerpo de series de potencias generalizadas con coeficientes reales.

Como vimos en la sección 1,1, este cuerpo es valuado no arquimedianamente en el sentido de Krull, henseliano y topológico y, además, está dotado de un orden consistente con la valuación.

Sea $\Sigma$ el siguiente conjunto completo de representantes de clases de cuadrados positivos en $\dot{K}$, ordenados de mayor a menor:

$$\Sigma = \{\tau_1 = \tau^{(0,0,\ldots)}, \tau_2 = \tau^{(1,0,0,\ldots)}, \tau_3 = \tau^{(0,1,0,0,\ldots)}, \tau_4 = \tau^{(1,1,0,0,\ldots)}, \ldots\}$$

Así, podemos definir el espacio (ver [4])

$$E := \{(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \tau_i \text{ converge en la topología de la valuación}\},$$

$E$ es un espacio vectorial con la suma y la ponderación definidas por componentes. Podemos definir en $E$ un producto interno anisótropo $\phi : E \times E \longrightarrow K$ mediante la fórmula

$$\phi((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}, (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \tau_i.$$

Observación 1.14 Notemos que para cada vector $e_i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ de la base canónica se tiene que $\phi(e_i, e_i) = \tau_i$, y como $\tau_i$ no es un cuadrado, excepto cuando $i = 1$, es claro que esta base es ortogonal, pero no es ortonormal.

Definición 1.15 *Diremos que un espacio $L$ dotado de un producto interno $\phi$ es un espacio ortomodular si en él se cumple la versión algebraica del teorema de proyección. Es decir, para todo $X$ subespacio de $L$ se cumple:*

$$X = X^{\perp\perp} \Rightarrow L = X \oplus X^{\perp}$$

Nos interesa mostrar que $E$ es un espacio ortomodular. Para ello necesitamos el concepto de tipo topológico, que está relacionado con los subgrupos convexos (o aislados) del grupo de valores $G = \bigoplus_{n\in N} \mathbb{Z}$.

Definición 1.16 *Sea $S$ un grupo ordenado. Un subgrupo $H \leq S$ se dice convexo si dados $s \in S$ y $h_1, h_2 \in H$,*

$$h_1 \leq s \leq h_2 \Longrightarrow s \in H.$$

Definición 1.17 *Para $g \in G$ definimos:*

$$\Delta(g) = \{g' \in G : \text{para todo } n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq n|g'| \leq g\}$$

Tenemos que:

a) $\Delta(0) = \{0\}$.

b) Si $g \neq 0$, entonces $\Delta(g)$ es el subgrupo convexo más grande que no contiene a $g$.

Los subgrupos convexos del grupo $G = \bigoplus_{n \in N} \mathbb{Z}$ son $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \ldots$, donde $\Delta_n = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} D_i$ con $D_i = \mathbb{Z}$ si $i \leq n$ y $D_i = \{0\}$ si $i > n$.

Ahora estamos en condiciones de definir los tipos topológicos.

**Definición 1.18** *Sea $g \in G$. El tipo topológico de $g$ es*

$$T_G(g) := \bigcap_{g' \in G} \Delta(g + 2g').$$

*Definimos, también, el tipo topológico para un elemento $a \in K \setminus \{0\}$ de la siguiente manera:*

$$T_K(a) = T_G(v(a)).$$

Con esta definición podemos enunciar el teorema siguiente.

**Teorema 1.19** ([4], Teorema 1) *Sean $G$, $K$ y $E$ como antes y, supongamos que $n_k = card\{i \in \mathbb{N} : \ T_K(\tau_i) = \Delta_k\}$, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es finito y cumple que $S(K) \geq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces:*

*a) El producto interno es anisótropo.*

*b) La asignación*

$$x \mapsto v(\phi(x, x)) \in G$$

*cumple con la desigualdad triangular fuerte y por tanto define una norma, la que llamaremos $\|\cdot\|$.*

*c) $E$ es completo en la topología de la norma.*

*d) Un subespacio $U \subseteq E$ es ortogonalmente cerrado si y sólo si $U$ es topológicamente cerrado.*

*e) $E$ es ortomodular.*

El Teorema 1.19 nos entrega todas las herramientas para probar que el espacio $E$ es ortomodular. Basta establecer que $n_k = card\{i \in \mathbb{N} : \ T_K(\tau_i) = \Delta_k\}$ es finito, pues la condición $S(K) \geq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple trivialmente ya que $K$ es un cuerpo ordenado y, por tanto, $S(K) = \infty$.

**Lema 1.20** *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $n_0 = 2$ y para $k \geq 1$ se tiene que $n_k = 2^k$.*

Demostración: Para calcular $n_0$ notemos que $T_K(\tau_1) = \{0\}$ y $T_K(\tau_2) = \{0\}$, pero $T_K(\tau_3) = \Delta_1$ y como la valuación es una función creciente con $i$ cuando la evaluamos en $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces concluimos que $n_0 = 2$.

Consideremos para cada $l \in \mathbb{N}$ el conjunto con $2^l$ elementos

$$\begin{aligned}\tau_{2^l+1}\cdot\Sigma_l &= \{\tau_{2^l+1}\cdot\tau_1, \tau_{2^l+1}\cdot\tau_2, \tau_{2^l+1}\cdot\tau_3, \tau_{2^l+1}\cdot\tau_4, \ldots, \tau_{2^l+1}\cdot\tau_{2^l}\}\\ &= \{\tau_{2^l+1}, \tau_{2^l+2}, \tau_{2^l+3}, \tau_{2^l+4}, \ldots, \tau_{2^{l+1}}\}\end{aligned}$$

notamos que

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Big(\bigcup_{l=2}^{\infty} \tau_{2^{l-1}+1}\cdot\Sigma_{l-1}\Big)$$

donde las uniones son disjuntas.

Afirmamos que si $\tau_i \in \tau_{2^l+1}\cdot\Sigma_l$ para algún $l$ fijo entonces $T_G(v(\tau_i)) = \Delta_l$. De hecho,

a) $\Delta(v(\tau_i)) = \Delta_l$,

b) si $\gamma \in \Delta_{l+1}$, entonces $\Delta(v(\tau_i) + 2\gamma) = \Delta_l$, y

c) si $\gamma \in \Delta_n \setminus \Delta_{n-1}$, con $n > l$, entonces $\Delta(v(\tau_i) + 2\gamma) = \Delta_{n-1}$.

Así, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\{i \in \mathbb{N} : T_G(v(\tau_i)) = \Delta_k\} = \{i \in \mathbb{N} : \tau_i \in \tau_{2^k+1}\cdot\Sigma_k\}$$

y, por tanto, $n_k = 2^k$. □

Hemos probado que el espacio $E$ es ortomodular y tenemos la siguiente:

Definición 1.21 *Sea $N : E \longrightarrow \frac{1}{2}G$ la aplicación definida por $N(x) = \frac{1}{2}v(\phi(x,x))$*

Por el teorema anterior la función $||x|| = 2N(x)$ cumple con la desigualdad triangular fuerte. En todo lo que sigue, trabajaremos con esta aplicación.

El siguiente teorema muestra la equivalencia de cuatro afirmaciones. Como ya sabemos que $E$ es ortomodular, entonces la primera es cierta, y por tanto todas ellas lo son.

Teorema 1.22 ([5], Lema 14) *Las siguientes cuatro afirmaciones son equivalentes:*

*a)* $\forall x, y \in E :\quad v(\phi(x+y, x+y)) \geq \min\{v(\phi(x,x)), v(\phi(y,y))\}$ *(Desigualdad Triangular)*

*b)* $\forall x, y \in E :\quad \phi(x,y) = 0 \Rightarrow v(\phi(x+y, x+y)) = \min\{v(\phi(x,x)), v(\phi(y,y))\}$ *(Pitágoras).*

*c)* $\forall x, y \in E :\quad v(\phi(x,y)) \geq \min\{v(\phi(x,x)), v(\phi(y,y))\}$ *(Cauchy-Schwarz débil)*

*d)* $\forall x, y \in E :\quad 2v(\phi(x,y)) \geq v(\phi(x,x)) + v(\phi(y,y))$ *(Cauchy-Schwarz).*

Para completar la enumeración de los resultados preliminares falta el estudio de los espacios residuales. Sin embargo lo postergaremos hasta el capítulo 3 donde surgen de manera natural por su gran importancia para probar la indescomponibilidad de algunos operadores definidos en $E$. Nos centraremos ahora en el estudio del caso de los espacios de dimensión finita.

## 2. Construcción de una colección de operadores autoadjuntos e indescomponibles

Ahora que hemos terminado con los preliminares, construiremos de manera recursiva una sucesión de operadores lineales $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde cada operador está definido sobre $(E_n, \phi_n)$. Estos operadores reunen las características de ser autoadjuntos e indescomponibles.

Sea $\mathcal{I}_n$ la matriz identidad de orden $2^n$, entonces: $T_1$ es el operador lineal cuya matriz sobre la base canónica es

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y para $n \geq 1$, se define $T_{n+1}$, de manera recursiva, como el operador que sobre la base canónica se puede representar por la matriz

$$\mathcal{T}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_n & \chi_{n+1}\cdot(\mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n) \\ \\ \mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n & \mathcal{T}_n \end{pmatrix}.$$

Nuestro primer objetivo es probar que los operadores de la sucesión son autoadjuntos respecto al producto interno correspondiente. Para esto, usaremos la estrecha relación que existe entre $E_n$ y $E_{n+1}$. El siguiente teorema nos muestra cómo construir operadores autoadjuntos en $E_{n+1}$, conociendo dos operadores autoadjuntos en $E_n$.

**Teorema 2.1** *Sean $A, B : (E_n, \phi_n) \longrightarrow (E_n, \phi_n)$ dos operadores autoadjuntos con matrices $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ respectivamente. Entonces el operador $C : (E_{n+1}, \phi_{n+1}) \longrightarrow (E_{n+1}, \phi_{n+1})$ definido por la matriz*

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \chi_{n+1}\cdot\mathcal{B} \\ \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}$$

*es autoadjunto con respecto al producto interno $\phi_{n+1}$.*

**Demostración:** Primero fijemos la siguiente notación:

a) la matriz de $A$ será $\mathcal{A} = (a_{ij})_{2^n\times 2^n}$,

b) la matriz de $B$ será $\mathcal{B} = (b_{ij})_{2^n\times 2^n}$, y

c) la matriz de $C$ será $\mathcal{C} = (c_{ij})_{2^{n+1}\times 2^{n+1}}$

Dividiremos la demostración en tres casos (ver la notación de los vectores en la base en la definición 1.7):

Caso 1: Si $i, j \leq 2^n$ se cumple que:

$$\phi_{n+1}(e_i^{n+1}, e_i^{n+1}) = \phi_n(e_i^n, e_i^n). \tag{2}$$

Por la forma de $\mathcal{C}$, se tiene que:

$$c_{ij} = a_{ij}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} c_{ij}\phi_{n+1}(e_i^{n+1}, e_i^{n+1}) &= a_{ij}\phi_n(e_i^n, e_i^n) \\ &= a_{ji}\phi_n(e_j^n, e_j^n) \\ &= c_{ji}\phi_{n+1}(e_j^{n+1}, e_j^{n+1}), \end{aligned}$$

pues $\mathcal{A}$ es autoadjunta.

Caso 2: Si $i, j > 2^n$ entonces se tiene que:

$$\phi_{n+1}(e_i^{n+1}, e_i^{n+1}) = \chi_{n+1}\phi_n(e_{i-2^n}^n, e_{i-2^n}^n) \tag{3}$$

y que

$$c_{ij} = a_{(i-2^n)(j-2^n)} \tag{4}$$

por lo que:

$$c_{ij}\phi_{n+1}(e_i^{n+1}, e_i^{n+1}) = a_{(i-2^n)(j-2^n)}\chi_{n+1}\phi_n(e_{i-2^n}^n, e_{i-2^n}^n)$$

y, usando que $\mathcal{A}$ es autoadjunta, tenemos:

$$\begin{aligned} a_{(i-2^n)(j-2^n)}\chi_{n+1}\phi_n(e_{i-2^n}^n, e_{i-2^n}^n) &= a_{(j-2^n)(i-2^n)} \cdot \chi_{n+1}\phi_n(e_{j-2^n}^n, e_{j-2^n}^n) \\ &= c_{ji}\phi_{n+1}(e_j^{n+1}, e_j^{n+1}), \end{aligned}$$

es decir:

$$c_{ij}\phi_{n+1}(e_i^{n+1}, e_i^{n+1}) = c_{ji}\phi_{n+1}(e_j^{n+1}, e_j^{n+1}).$$

Caso 3: Si $i \leq 2^n$ y $j > 2^n$. Por la definición de $\mathcal{C}$, tenemos que

$$c_{ij} = \chi_{n+1}b_{i(j-2^n)},$$

luego:

$$\begin{aligned} c_{ij}\phi_{n+1}(e_i^{n+1}, e_i^{n+1}) &= c_{ij}\phi_n(e_i^n, e_i^n) && \text{(por (2))} \\ &= \chi_{n+1}b_{i(j-2^n)}\phi_n(e_i^n, e_i^n) \\ &= \chi_{n+1}b_{(j-2^n)i}\phi_n(e_{j-2^n}^n, e_{j-2^n}^n) && \text{(pues } \mathcal{B} \text{ es autoadjunta)} \\ &= b_{(j-2^n)i}\chi_{n+1}\phi_n(e_{j-2^n}^n, e_{j-2^n}^n) \\ &= b_{(j-2^n)i}\phi_{n+1}(e_j^{n+1}, e_j^{n+1}) && \text{(por 3)} \\ &= c_{ji}\phi_{n+1}(e_j^{n+1}, e_j^{n+1}) \end{aligned}$$

Finalmente, el caso $i > 2^n$ y $j \leq 2^n$ es análogo al caso anterior. $\square$

Corolario 2.2 *Para $n \geq 1$, el operador $\mathcal{T}_n : (E_n, \phi_n) \longrightarrow (E_n, \phi_n)$ es autoadjunto.*

Demostración: Haremos la demostración por inducción.

Para $n = 1$, tenemos: $a_{12} = \chi_1$, $a_{21} = 1$, $\phi_1(e_1^1, e_1^1) = 1$ y $\phi_1(e_2^1, e_2^1) = \chi_1$, lo que implica que

$$a_{21} \cdot \phi_1(e_2^1, e_2^1) = \chi_1 = a_{12} \cdot \phi_1(e_1^1, e_1^1).$$

Esto prueba que $\mathcal{T}_1$ es autoadjunta.

Suponemos, ahora, que $\mathcal{T}_n$ es autoadjunta. Entonces $\mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n$ también es autoadjunta y por el teorema anterior

$$\mathcal{T}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_n & \chi_{n+1} \cdot (\mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n) \\ \mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n & \mathcal{T}_n \end{pmatrix}$$

también lo es. $\square$

Habiendo probado que esta sucesión está compuesta por operadores autoadjuntos, sólo nos falta ver que son indescomponibles para obtener lo prometido.

Probar la indescomponibilidad de estos operadores no será una tarea tan directa como lo mostrado hasta ahora, pero con la ayuda de la Teoría de Galois lograremos nuestro objetivo.

Lema 2.3 *Para $n \geq 1$, el operador $T_n$ no tiene valores propios en $K_n$.*

Demostración: Probaremos por inducción que para cada natural $n$ el operador $T_n$ no tiene valores propios en $K_n$, pero si en $\overline{K}_n = K_n(\sqrt{\chi_1}, \sqrt{\chi_2}, \ldots, \sqrt{\chi_n})$, y en esta extensión son todos distintos.

Si $n = 1$,

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es $p_1(\lambda) = \lambda^2 - \chi_1$. Sus valores propios son, por lo tanto, $\lambda_1 = \sqrt{\chi_1}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\chi_1}$. Estos valores no pertenecen al cuerpo $K_1$, pues de ser así, $\chi_1$ sería un cuadrado en $K_1$, lo que no es cierto.

Para $n \geq 1$,

$$\mathcal{T}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_n & \chi_{n+1} \cdot (\mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n) \\ \mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n & \mathcal{T}_n \end{pmatrix}.$$

Sean $p_n(\lambda)$ el polinomio característico de $\mathcal{T}_n$ y $C_n$ una extensión de $K_n$ que contiene las $2^n$ raíces de $p_n(\lambda)$, a las que llamaremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n}$. Por hipótesis de inducción, las $2^n$ raices

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & (\lambda_1-1)\chi_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1-1 & \lambda_1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2-\lambda & (\lambda_2-1)\chi_{n+1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2-1 & \lambda_2-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2^n}-\lambda & (\lambda_{2^n}-1)\chi_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{2^n}-1 & \lambda_{2^n}-\lambda \end{vmatrix}$$

De lo que se obtiene que:

$$p_{n+1}(\lambda) = [(\lambda-\lambda_1)^2-(\lambda_1-1)^2\chi_{n+1}]\,[(\lambda-\lambda_2)^2-(\lambda_2-1)^2\chi_{n+1}]\cdots[(\lambda-\lambda_{2^n})^2-(\lambda_{2^n}-1)^2\chi_{n+1}]$$

Por lo tanto, los valores propios de $\mathcal{T}_{n+1}$ son las soluciones de las ecuaciones

$$(\lambda-\lambda_i)^2-(\lambda_i-1)^2\cdot\chi_{n+1}=0, \quad \text{con } i=1,\ldots,2^n.$$

Es decir, están dados por:

$$\lambda_i^{(l)} = \lambda_i + l\sqrt{\chi_{n+1}}\cdot(\lambda_i-1)$$

donde $l \in \{-1,1\}$ y $i \in \{1,\ldots,2^n\}$.

Como $\sqrt{\chi_{n+1}} \notin K_{n+1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2^n})$, entonces tenemos que $\lambda_i^{(l)} \notin K_{n+1}$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_{n+1}$ no tiene valores propios en $K_{n+1}$. Y las $2^{n+1}$ raices de $p_{n+1}(\lambda)$ son todas distintas. □

Un resultado clásico de la teoría de Galois nos entregará una importante herramienta para probar que estos polinomios son irreducibles en los cuerpos de series de potencias generalizadas que corresponda.

Lema 2.4 *Sea $F$ un cuerpo y sean $r_1,\ldots,r_m$ en la clausura algebraica de $F$ las $m$ raíces distintas de un polinomio $p(x)\in F[x]$, donde el grado de $p$ es $m$ y supongamos que $r_i \notin F$ para $i=1,\ldots,m$. Sea $K=F(r_1,\ldots,r_m)$ y $G=\mathcal{G}al_F(K)$. Entonces $p(x)$ es irreducible sobre $F[x]$ si y sólo si para cada par de raíces $r_i, r_j$ de $p(x)$ existe un automorfismo $g\in G$ tal que $g(r_i)=r_j$.*

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p(x)$ es mónico.

Primero, supongamos que no existe un automorfismo en el grupo $G$ tal que $g(r_1)=r_m$. Entonces considere:

$$A=\{g(r_1): g\in G\}.$$

Así, por hipótesis, $r_m \notin A$.

Sobre $K[x]$ podemos escribir $p(x)$ de la siguiente forma:

$$p(x) = \prod_{r_i\in A}(x-r_i)\cdot\prod_{r_j\notin A}(x-r_j)$$

y para todo $g \in G$ se cumple que $g(p(x)) = p(x)$ y $g(A) \subseteq A$. Lo que implica que $\prod_{r_i \in A} (x - r_i)$ y $\prod_{r_j \notin A} (x - r_j)$ son polinomios fijos bajo cualquier automorfismo de $G$ y, por tanto, sus coeficientes están en $F$, lo que muestra que $p(x)$ es reducible en $F[x]$.

Ahora, supongamos que para cada par de raíces $r_i, r_j$ de $p(x)$ existe un automorfismo $g \in G$ tal que $g(r_i) = r_j$. Entonces si $p(x)$ es reducible sobre $F[x]$, se tiene que $p(x) = h(x) \cdot l(x)$ con $h(x), l(x) \in F[x]$. Luego, para todo $g \in G$, se tiene que $g(h(x)) = h(x)$ y $g(l(x)) = l(x)$.

Sobre $K[x]$, podemos escribir $p(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_m)$ y, salvo por una reordenación de los factores, podemos escribir $h(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_n)$ y $l(x) = (x - r_{n+1}) \cdots (x - r_m)$, pero, por hipótesis, existe un $g_0 \in G$ que lleva $r_1$ en $r_{n+1}$, lo que implica que $g_0(h(x)) \neq h(x)$, lo que nos lleva a una contradicción. □

Ya hemos visto cómo probar que un polinomio es irreducible. Veamos ahora que la irreducibilidad se mantiene cuando cambiamos de un cuerpo a otro dentro de los mencionados en este trabajo.

**Lema 2.5** *Sea $s(x) \in K_n[x]$ un polinomio con $deg(s) > 1$. Si $s(x)$ es irreducible sobre $K_n[x]$, entonces también lo es en $K_{n+1}[x]$.*

**Demostración:** Supongamos que $s(x)$ es un polinomio mónico, irreducible y no lineal en $K_n[x]$, y supongamos que es reducible en $K_{n+1}[x]$. Entonces podemos escribir $s(x) = h(x) \cdot l(x)$ con $h(x), l(x) \in K_{n+1}[x]$, polinomios no constantes. Sean $h_0, \ldots, h_p, l_0, \ldots, l_q \in K_{n+1}$ los coeficientes de los polinomios $h$ y $l$ respectivamente. Entonces tanto los $h_i$ como los $l_j$ son sumas de productos de raíces de $s(x)$, las que pertenecen a una extensión finita de $K_n$. Como $h_i \in K_{n+1}$ se tiene que $h_i = \sum_{k=m}^{\infty} a_k^{(i)} \chi_{n+1}^k$ pero esta suma consta de un solo término $a_0^{(i)}$, pues en todas y cada una de las raíces de $s(x)$ sólo aparecen elementos algebraicos sobre $K_n$, pero todo elemento en $K_{n+1} \setminus K_n$ es trascendente sobre $K_n$( ver[9], Lema 1). Entonces tenemos que esta reducción de $s(x)$ es una factorización en $K_n[x]$, lo que produce una contradicción, pues el polinomio es irreducible en $K_n[x]$. □

En su mayoría los resultados obtenidos hasta ahora han sido orientados a probar la indescomponibilidad de los operadores $T_n$, finalmente podemos enunciarla en el siguiente:

**Teorema 2.6** *Para todo $n \geq 1$, el operador $T_n$ es indescomponible.*

**Demostración:** Procederemos por inducción.

Por el Lema 1.13, basta probar que el polinomio $p_n(\lambda)$ es irreducible.

Para $n = 1$, tenemos que el $p_1(\lambda) = \lambda^2 - \chi_1$, que es irreducible pues $\sqrt{\chi_1} \notin K_1$.

Para $n \geq 1$, supongamos que $p_n(x)$ es irreducible sobre $K_n$. Considere $J_n$ el cuerpo de descomposición de $p_n(x)$ sobre $K_{n+1}$ y sea $G' = Gal_{K_{n+1}}(J_n)$. Por el lema 2.5 $p_n(x)$ es irreducible sobre $K_{n+1}[x]$ y por el lema 2.4 se tiene que para cada par de raíces $\lambda_i, \lambda_j$ de $p_n(x)$ existe $g'$ en $G'$ tal que $g'(\lambda_i) = \lambda_j$. Sea $C_{n+1} = K_{n+1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n}, \sqrt{\chi_{n+1}})$ el cuerpo de descomposición de

$f_{n+1}(x) = x^2 - \chi_{n+1}$ sobre $J_n$. Entonces $|C_{n+1} : K_{n+1}| = |C_{n+1} : J_n| \cdot |J_n : K_{n+1}| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Notemos que $C_{n+1}$ es también el cuerpo de descomposición de $p_{n+1}(x)$ sobre $K_{n+1}$ y, que para cada $g' \in G'$, existe un $g \in G = Gal_{K_{n+1}}(C_{n+1})$ tal que $g|_{J_n} = g'$.

Nuestro propósito es probar la irreducibilidad de $p_{n+1}(x)$ en $K_{n+1}[x]$. Por el Lema 2.4 es suficiente probar que para cada par de raíces de este polinomio es posible encontrar un automorfismo del grupo de Galois que lleva una en la otra, para esto, por el Lema 2.3 las raíces de $p_{n+1}(x)$ tienen la forma:

$$\lambda_i^{(l)} = \lambda_i + l\sqrt{\chi_{n+1}}(\lambda_i - 1)$$

Considere, entonces, dos de estas raíces $\lambda_i^{(l)}, \lambda_j^{(l')}$, considere también $g' \in G'$ tal que $g'(\lambda_i) = \lambda_j$, y el homomorfismo $g : C_{n+1} \longrightarrow C_{n+1}$ tal que $g|_{J_n} = g'$ y $g(\sqrt{\chi_{n+1}}) = ll'\sqrt{\chi_{n+1}}$. Luego, la función $g$ así definida es un automorfismo del grupo $Gal_{K_{n+1}}(C_{n+1})$ y:

$$\begin{aligned}
g(\lambda_i^{(l)}) &= g(\lambda_i + l\sqrt{\chi_{n+1}}(\lambda_i - 1)) \\
&= g(\lambda_i) + lg(\sqrt{\chi_{n+1}})(g(\lambda_i) - 1) \\
&= g'(\lambda_i) + lg(\sqrt{\chi_{n+1}})(g'(\lambda_i) - 1) \\
&= \lambda_j + l^2 l'\sqrt{\chi_{n+1}}(\lambda_j - 1) \\
&= \lambda_j + l'\sqrt{\chi_{n+1}}(\lambda_j - 1) \\
&= \lambda_j^{(l')}
\end{aligned}$$

lo que muestra que para cada par de raíces hay un automorfismo de Galois que lleva una raíz en la otra y, por el Lema 2.4, se tiene que $p_{n+1}(x)$ es irreducible sobre $K_{n+1}[x]$.

Así, por inducción, tenemos que para todo $n \geq 1$ el polinomio $p_n(x)$ es irreducible y, por el Lema 1.13, el operador $T_n$ es indescomponible. □

Con esto hemos completado todas las metas propuestas para estos operadores, analizaremos ahora qué sucede en dimensión infinita.

# 3. Operadores indescomponibles sobre E

La meta en esta sección es construir un operador en $E$ que sea acotado, autoadjunto y por supuesto indescomponible, todo esto a partir de los operadores en dimensión finita que ya hemos construido. Para eso debemos conocer las estructuras del cuerpo residual y del espacio residual.

## 3.1. Espacios residuales

Los subgrupos convexos de $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ son $\Delta_0 \subset \Delta_1 \ldots$ definidos para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ por $\Delta_n = \bigoplus_{i=1}^{\infty} D_i$ donde $D_i = \mathbb{Z}$ si $i \leq n$ y $D_i = \{0\}$ si $i > n$. A cada uno de estos subgrupos le corresponde un anillo de la valuación $R_n$ definido por:

$$R_n = \{\xi \in K : \ v(\xi) \geq \delta \text{ para algún } \delta \in \Delta_n\}$$

y cuyo único ideal maximal es

$$J_n = \{\xi \in K : \ v(\xi) > \delta \text{ para todo } \delta \in \Delta_n\}.$$

Entonces $\hat{K}_n := R_n/J_n$ (con $\theta_n : R_n \longrightarrow \hat{K}_n$, la proyección canónica) es el cuerpo residual correspondiente al subgrupo $\Delta_n$.

**Lema 3.1** *El n-ésimo cuerpo residual $\hat{K}_n$ es isomorfo a $K_n$.*

**Demostración:** Debemos probar que $\hat{K}_n = R_n/J_n \cong K_n$, para ello considere $\xi \in R_n$, entonces $v(\xi) \geq \delta$ para algún $\delta \in \Delta_n$. Como $\xi \in K$ entonces:

$$\xi = \sum_{g\in G} a_g \tau^g = \sum_{g\in\Delta_n} a_g\tau^g + \sum_{g\in\Delta_n^+} a_g\tau^g$$

donde $\Delta_n^+ = \{g \in G : \quad g > \delta \text{ para todo } \delta \in \Delta_n\}$. Considere $y = \sum_{g\in\Delta_n} a_g\tau^g$.

Entonces

$$\begin{array}{rccc} f_n : & R_n/J_n & \longrightarrow & K_n \\ & \xi + J_n = y + J_n & \longmapsto & y \end{array}$$

está bien definida, es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto una biyección. Para mostrar que es un isomorfismo de cuerpos debemos probar los siguientes puntos:

a) $f_n(\xi \cdot \eta) = f_n(\xi) \cdot f_n(\eta)$.

Sean $\xi = y_1 + z_1$ y $\eta = y_2 + z_2$, con $y_1 = \sum_{g\in\Delta_n} a_g\tau^g$, $z_1 = \sum_{g\in\Delta_n^+} a_g\tau^g$, $y_2 = \sum_{h\in\Delta_n} b_h\tau^h$, $z_2 = \sum_{h\in\Delta_n^+} b_h\tau^h$. Entonces $f_n(\xi) = y_1$ y $f_n(\eta) = y_2$. Calculamos ahora $f_n(\xi\eta)$

$$\begin{aligned} f_n(\xi\eta) &= f_n((y_1+z_1)(y_2+z_2)) \\ &= f_n(y_1y_2 + y_1z_2 + y_2z_1 + z_1z_2), \end{aligned}$$

pero $v(y_1z_2), v(y_2z_1), v(z_1z_2) \in \Delta_n^+$, entonces $f_n(y_1y_2 + y_1z_2 + y_2z_1 + z_1z_2) = f_n(y_1y_2)$. Notemos que

$$y_1y_2 = \sum_{g\in\Delta_n} a_g\tau^g \sum_{g\in\Delta_n} b_g\tau^g = \sum_{g\in\Delta_n} c_g\tau^g,$$

con $c_g$ de la manera usual. Por lo tanto $f_n(y_1y_2) = y_1y_2 = f_n(\xi)f_n(\eta)$.

b) Para probar que $f_n(\xi+\eta) = f_n(\xi)+f_n(\eta)$ ponemos $\xi = y_1+z_1$ y $\eta = y_1+z_1$ como en la parte (a) y tenemos que $f_n(\xi+\eta) = f_n((y_1+z_1)+(y_2+z_2)) = f_n((y_1+y_2)+(z_1+z_2))$, al igual que antes $v(z_1+z_2) \in \Delta_n^+$, entonces $f_n((y_1+y_2)+(z_1+z_2)) = f_n(y_1+y_2) = f_n(y_1)+f_n(y_2)$.

Lo que prueba que $f_n$ es un isomorfismo de cuerpos. □

Observación 3.2 En esta sección nos concentramos en el estudio de los espacios residuales y los cuerpos residuales. Acerca de estos últimos, hemos probado en el lema anterior que son isomorfos a los cuerpo de series de potencias generalizadas $K_n$ que son los cuerpos base donde hemos definido los espacios de dimensión finita $E_n$ del capítulo 2, por lo que resulta natural definir $E_n$ de la manera que se ha hecho.

A continuación veremos cómo se definen los espacios residuales del espacio $E$ y probaremos que son copias isomorfas de los espacios $E_n$ ya definidos.

De la desigualdad triangular de $||\cdot||$ en $E$ (Teorema 1.19), se tiene que

$$M_n := \{x \in E : \ ||x|| \geq \delta \text{ para algún } \delta \in \Delta_n\}$$

es un módulo sobre $R_n$ y que

$$S_n := \{x \in E : \ ||x|| > \delta \text{ para todo } \delta \in \Delta_n\}$$

un sub-módulo.

Entonces $\hat{E}_n := M_n/S_n$ ($\pi_n : M_n \longrightarrow \hat{E}_n$, la proyección canónica) es un espacio vectorial sobre el cuerpo residual $\hat{K}_n$ definiendo la ponderación como

$$\pi_n(\xi x) := \theta_n(\xi)\pi_n(x)$$

cuando $x \in M_n$ y $\xi \in R_n$.

El espacio residual $\hat{E}_n$ está dotado de un producto interno inducido por $\phi$ dado por

$$\hat{\phi}_n(\pi_n(x), \pi_n(y)) := \theta_n(\phi(x,y))$$

con $x, y \in M_n$.

Lema 3.3 *El espacio residual $\hat{E}_n$ es isomorfo a $E_n$.*

**Demostración:** A continuación mostraremos que $\hat{E}_n$ es un espacio vectorial de dimensión $2^n$ sobre $\hat{K}_n \cong K_n$. Con esto y como $\pi_n$ inyecta a $E_n$ en $\hat{E}_n$, se concluye que son espacios vectoriales isomorfos.

Es claro que $\{\pi_n(e_i)\}_{i=1}^{2^n}$ es linealmente independiente, pues son ortogonales bajo el producto interno inducido $\hat{\phi}_n(\pi_n(x), \pi_n(y)) := \theta_n(\phi(x,y))$ y $\pi_n(e_i) \neq 0$ si $1 \leq i \leq 2^n$.

Sea $\overline{E}_n = \prod_{i \in \mathbb{N}} F_i \subset E$, donde $F_i = K$ si $i \leq 2^n$ y $F_i = \{0\}$ si $i > 2^n$ ($2^n$ copias de $K$ en las primeras coordenadas). $\overline{E}_n$ es topológicamente cerrado, pues es de dimensión finita. Entonces, como $E$ es ortomodular, $E = \overline{E}_n \oplus \overline{E}_n^{\perp}$.

Sea $x \in M_n$. En particular, $x \in E$, entonces $x = y + z$ con $y \in \overline{E}_n$ y $z \in \overline{E}_n^{\perp}$. Luego, $\pi_n(x) = \pi_n(y) + \pi_n(z)$ y ambos son proyectables pues $||x|| = \text{mín}\{||y||, ||z||\}$ ya que $y \perp z$ y como $||x|| \geq \delta$ para algún $\delta$ en $\Delta_n$, entonces $||y||, ||z|| \geq \delta$.

Escribimos $x$ en la base canónica como $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i e_i + \sum_{i=2^n+1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

Queremos probar que $z \in S_n$, es decir $||z|| > \delta$ para todo $\delta \in \Delta_n$, pero $||z|| = \text{mín}\{v(\alpha_i^2 \tau_i) : i \in \{2^n+1, \ldots\}\}$. Si suponemos que este mínimo se alcanza en la coordenada $k$-ésima, entonces $||z|| = v(\alpha_k^2 \tau_k)$, pero $\tau_k \in J_n$ y $\alpha_k \in R_n$, como $J_n$ es un ideal en $R_n$, entonces $z \in S_n$. Por lo tanto, $\pi_n(z) = 0$.

Luego $\pi_n(x) = \pi_n(y) = \sum_{i=1}^{2^n} \theta_n(\alpha_i)\pi_n(e_i)$, lo que muestra que $\{\pi_n(e_i)\}_{i=1}^{2^n}$ genera a $\hat{E}_n$. Así $\hat{E}_n$ es un espacio vectorial de dimensión $2^n$ sobre $\hat{K}_n$. □

También podemos proyectar cada subespacio $U \subseteq E$ bajo $\pi_n$ a un subespacio de $\hat{E}_n$

$$\pi_n(U) := \{\pi_n(x) : \ x \in U \cap M_n\}.$$

**Lema 3.4** [6] *Si los subespacios $U, W \subseteq E$ son ortogonales, $U \perp W$, entonces $\pi_n(U) \perp \pi_n(W)$ y $\pi_n(U \oplus W) = \pi_n(U) \oplus \pi_n(W)$.*

**Demostración:** Claramente, $\pi_n(U) \perp \pi_n(W)$. Para la segunda afirmación, debemos mostrar que $(U \oplus W) \cap M_n = (U \cap M_n) \oplus (W \cap M_n)$. Sea $x \in (U \oplus W) \cap M_n$. Descomponemos $x = u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$. Entonces $||x|| = \text{mín}\{||u||, ||w||\}$, pues $u \perp w$. Como $x \in M_n$, entonces $u, w \in M_n$, y consecuentemente $x = u + w \in (U \cap M_n) \oplus (W \cap M_n)$. La demostración en la otra dirección es trivial. □

## 3.2. Operadores lineales acotados en $E$

En esta sección definiremos una matriz infinita que representará un operador lineal. Para este operador nos interesarán ciertas propiedades básicas, como ser acotado, autoadjunto y finalmente probar su indescomponibilidad.

**Definición 3.5** *Un operador lineal $B : E \longrightarrow E$ se dice acotado si existe un $g \in G$ tal que*

$$||B(x)|| - ||x|| \geq g$$

*para todo $x \in E \setminus \{0\}$.*

El conjunto de todos los operadores acotados en $E$, $\mathcal{B}(E)$, es cerrado bajo la adición y composición usual, es decir, $\mathcal{B}(E)$ es un álgebra. Un operador $B$ es determinado por las imágenes $B(e_i)$ de los vectores de la base, por lo que puede ser representado por una matriz infinita.

**Lema 3.6** [6](3.1) *Una función $B_0 : \{e_i : \ i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow E$ se extiende a un operador lineal acotado $B : E \longrightarrow E$ si (y sólo si) el conjunto $\{||B_0(e_i)|| - ||e_i|| : \ i \in \mathbb{N}\}$ es acotado inferiormente.*

**Demostración:** Supongamos que existe un $g \in G$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ $||B_0(e_i)|| - ||e_i|| \geq g$. $B_0$ se extiende a una funcion lineal $B_0^* : E_0 \longrightarrow E$, donde $E_0 = span\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Primero mostraremos que $B_0^*$ es acotado por $g$. Considere un vector no cero $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E_0$. Sea $k \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $||B_0^*(\xi_k e_k)|| = \text{mín}\{||B_0^*(\xi_i e_i)|| : \ i \in \mathbb{N}\}$. Entonces

$$||B_0^*(x)|| \geq ||B_0^*(\xi_k e_k)|| = 2v(\xi_k) + ||B_0(e_k)||.$$

Además, $||x|| = \text{mín}\, ||\xi_i e_i|| : \ i = 1, \ldots, n$, por lo tanto

$$||x|| \leq ||\xi_k e_k|| = 2v(\xi_k) + ||e_k||$$

restando las desigualdades obtenemos $||B_0^*(x)|| - ||x|| \geq ||B_0(e_k)|| - ||e_k||$, por lo tanto $||B_0^*(x)|| - ||x|| \geq g$ como se quería. Ahora, $E_0$ es denso en $E$ en la topología de la norma, por lo que la afirmación es cierta. □

## 3.3. El operador $T$.

En el capítulo 2 construimos una colección de operadores lineales autoadjuntos e indescomponibles sobre los espacios residuales $(E_n, \phi_n)$ de $(E, \phi)$. Ahora, veremos cómo esta colección induce un operador lineal en $E$.

**Definición 3.7** *Sea $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de matrices, donde $P_n = (p_{ij}^n)$, tal que para cada $n$ se tiene que:*

*a) $P_n \in Mat_{2^n}(K_n)$,*

*b) si $i, j \leq 2^n$ entonces $p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^n$.*

*Llamaremos **matriz final** de la sucesión $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a la matriz infinita $P$ definida por:*

$$P = (p_{ij})$$

*donde, dados $i, j \in \mathbb{N}$ considere un $m \in \mathbb{N}$ tal que $i, j \leq 2^m$, entonces $p_{ij} = p_{ij}^m$.*

Definimos la matriz infinita $\mathcal{T}$ como la matriz final de las matrices $\mathcal{T}_n$ del capítulo 2 y probaremos que esta matriz representa un operador lineal acotado $T$, autoadjunto e indescomponible en $(E, \phi)$.

Con la ayuda del Teorema 3.6 y el siguiente lema probaremos que la matriz $\mathcal{T}$ induce un operador acotado en $E$.

**Lema 3.8** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $||T_n(e_i^n)|| - ||e_i^n|| > 0$ para $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$.*

**Demostración:** Recordemos que $\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y que para $n \geq 1$

$$\mathcal{T}_{n+1} = (t_{ij}^{n+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_n & \chi_{n+1}(\mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n) \\ \\ \mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n & \mathcal{T}_n \end{pmatrix}.$$

Para $n = 1$, $||T_1(e_1^1)|| = \min\{v(0), v(\chi_1)\} = v(\chi_1)$ y $||e_1^1|| = 0 \in G$ entonces $||T_1(e_1^1)|| - ||e_1^1|| > 0$ y $||T_1(e_2^1)|| = v(\chi_1^2)$ y $||e_2^1|| = v(\chi_1)$ entonces restando $||T_1(e_2^1)|| - ||e_2^1|| = v(\chi_1) > 0$. Así, hemos obtenido la afirmación para $n = 1$.

Supongamos que la afirmación es cierta para $n$ y consideremos $i \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Para este $i$ fijo, se tiene que $||T_{n+1}(e_i^{n+1})|| = \min\{v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) : k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}\}$.

Recordemos que por la forma de $\mathcal{T}_{n+1}$, tenemos que $t_{ki}^{n+1} \in K_n$, entonces $v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) \in \Delta_n$ si $k \leq 2^n$, y $v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) \in \Delta_{n+1} \setminus \Delta_n$ si $2^n < k \leq 2^{n+1}$. Por lo tanto

$$\min\{v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) : k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}\} = \min\{v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) : k \in \{1, \ldots, 2^n\}\},$$

es decir, $||T_{n+1}(e_i^{n+1})|| = ||T_n(e_i^n)||$. Además, como $||e_i^{n+1}|| = ||e_i^n||$ obtenemos que $||T_{n+1}(e_i^{n+1})|| - ||e_i^{n+1}|| = ||T_n(e_i^n)|| - ||e_i^n|| > 0$ .

Ahora, para completar la demostración, supongamos que $i \in \{2^n + 1, 2^n + 2, \ldots, 2^{n+1}\}$. Para calcular $||T_{n+1}(e_i^{n+1})|| = \min\{v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) : \ k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}\}$, notemos que

$$t_{ki}^{n+1} = \begin{cases} \chi_{n+1}a_{ki}, & \text{si } k \leq 2^n; \\ t_{ki}^n, & \text{si } 2^n < k \leq 2^{n+1}. \end{cases}$$

donde $a_{ki}$ es el coeficiente $ki$ de la matriz $\mathcal{T}_n - \mathcal{I}_n$. Como $a_{ki}, t_{ki}^n \in K_n$, entonces sus valuaciones están en $\Delta_n$. Así, si $k \leq 2^n$, entonces $v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) = \delta + 2v(\chi_{n+1})$ para algún $\delta \in \Delta_n$ y si $2^n < k \leq 2^{n+1}$, entonces $v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) = \delta' + v(\chi_{n+1})$ para algún $\delta' \in \Delta_n$. Con esto

$$||T_{n+1}(e_i^{n+1})|| = \min\{v((t_{ki}^{n+1})^2\tau_k) : k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n+1}\}\} = ||T_n(e_{i-2^n}^n)|| + v(\chi_{n+1})$$

y como $||e_i^{n+1}|| = ||e_{i-2^n}^n|| + v(\chi_{n+1})$, restando obtenemos la afirmación. □

**Teorema 3.9** *La matriz $\mathcal{T}$ define un operador lineal acotado $T$ en $E$.*

**Demostración:** Probaremos que de hecho $T$ tiene cota 0. Haremos la demostración por contradicción, entonces supongamos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $||T(e_i)|| - ||e_i|| < 0$. Sea $k$ tal que $v(t_{ki}^2\tau_k) = ||T(e_i)||$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $i, k < 2^n$, luego $v((t_{ki}^n)^2\tau_k) = ||T_n(e_i^n)||$ y $||e_i|| = ||e_i^n||$, luego $0 > ||T(e_i)|| - ||e_i|| = ||T_n(e_i^n)|| - ||e_i^n||$, produciendo una contradicción con el lema anterior. $\square$

Se sigue del Teorema 3.9 que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $T(M_n) \subseteq M_n$ y $T(S_n) \subseteq S_n$, por lo que $T$ induce un operador

$$\begin{array}{rccc} \hat{T}_n : & \hat{E}_n & \longrightarrow & \hat{E}_n \\ & \pi_n(x) & \longmapsto & \pi_n(T(x)) \quad (x \in M_n) \end{array}$$

**Lema 3.10** *El operador $T : (E, \phi) \longrightarrow (E, \phi)$ es autoadjunto.*

**Demostración:** Debemos probar que

$$\phi(T(e_i), e_j) = \phi(e_i, T(e_j)),$$

o lo que es equivalente,

$$t_{ji}\phi(e_i, e_i) = t_{ij}\phi(e_j, e_j).$$

Pero para cada par $i, j \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $i, j < 2^n$. Luego, $t_{ji} = t_{ji}^n$, $t_{ij} = t_{ij}^n$, $\phi(e_j, e_j) = \phi_n(e_j^n, e_j^n)$, $\phi(e_i, e_i) = \phi_n(e_i^n, e_i^n)$, y por el Teorema 1 se cumple

$$t_{ji}^n\phi_n(e_i^n, e_i^n) = t_{ij}^n\phi_n(e_j^n, e_j^n).$$

$\square$

Hasta este momento $T$ representa un operador autoadjunto y acotado en $(E, \phi)$. Ahora, para terminar el capítulo probaremos que éste sólo admite como subespacios cerrados invariantes a los subespacios triviales.

**Teorema 3.11** *El operador $T$ es indescomponible.*

**Demostración:** Supongamos que $T$ deja invariante un subespacio cerrado no trivial $U$. Por ortomodularidad, podemos escribir $E = U \oplus U^\perp$. Dado que tanto $U$ como $U^\perp$ son no triviales, existen $x \in U$ y $z \in U^\perp$, ambos distintos de cero, y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_n(x), \pi_n(z) \neq 0$.

Escribimos $E_n \cong \hat{E}_n = \pi_n(E) = \pi_n(U) \oplus \pi_n(U^\perp)$. Por el Lema 3.4, $\pi_n(U)$ y $\pi_n(U^\perp)$ son no triviales (uno contiene la proyección de $x$ y el otro la de $y$), pero esto muestra que $\pi_n(U)$ es invariante bajo $\hat{T}_n$ lo que contradice el Teorema 2.6. Luego $T$ es indescomponible. $\square$

Con lo anterior hemos conseguido un operador lineal, acotado y autoadjunto en $E$ que no tiene subespacios cerrados invariantes.

# 4. Construcción de una familia no numerable de operadores acotados, autoadjuntos e indescomponibles en el espacio $(\mathbf{E}, \phi)$

En los capítulos anteriores hemos probado que una colección específica de operadores en los espacios $E_n$ son autoadjuntos e indescomponibles y que también lo es el operador acotado $T$ definido por la matriz final de la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Utilizando esencialmente las mismas demostraciones construiremos una familia no numerable de operadores acotados, autoadjuntos e indescomponibles, de manera que tanto los operadores mostrados en los capítulos anteriores como los que aparecen en [2] son casos particulares en ella.

## 4.1. Construcción de familias de operadores indescomponibles en dimensión finita.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta \in K_n$, definimos el operador matricial:

$$S_n^{\alpha,\beta} : Mat_{2^n}(K_n) \longrightarrow Mat_{2^{n+1}}(K_{n+1})$$

$$\mathcal{B} \mapsto S_n^{\alpha,\beta}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & \chi_{n+1} \cdot (\alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{I}_n) \\ & \\ \alpha\mathcal{B} - \beta\mathcal{I}_n & \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz $S_n^{\alpha,\beta}(\mathcal{B})$ define un operador lineal, que denotamos por $S_n^{\alpha,\beta}(B) : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$. En lo que sigue mostraremos las propiedades que nos interesan. El siguiente lema es en verdad una aplicación directa de 2.1.

**Lema 4.1** *Si $B : (E_n, \phi_n) \longrightarrow (E_n, \phi_n)$ es un operador lineal autoadjunto, entonces el operador lineal $S_n^{\alpha,\beta}(B)$ es autoadjunto en $(E_{n+1}, \phi_{n+1})$.*

**Demostración:** Si $B$ define un operador autoadjunto en $(E_n, \phi_n)$, entonces también lo es $\alpha B - \beta I_n$, para todo $\alpha, \beta \in K_n$, para terminar aplicamos el Teorema 2.1 y tenemos que $S_n^{\alpha,\beta}(B)$ es autoadjunto. □

Siempre pensando en probar la indescomponibilidad de un operador, el siguiente lema nos indica como reconocer la descomponibilidad de un operador si se conoce su polinomio característico.

**Lema 4.2** [8] *Sea $s(x) = f_1^{k_1}(x) \cdots f_r^{k_r}(x)$ el polinomio característico de un operador $S : E \longrightarrow E$, donde $k_i > 0$ y $f_i(x)$ es irreducible sobre el cuerpo base de $E$ para $i = 1, 2, \ldots, r$, entonces $E$ puede descomponerse en $r$ subespacios invariantes bajo $S$.*

Consideremos ahora en la familia de los operadores lineales autoadjuntos en $(E_n, \phi_n)$ aquellos operadores $C$ que cumplan las siguientes condiciones:

a) Si $p_c(x)$ es su polinomio característico y $p_c'(x)$ su derivada formal entonces el máximo común divisor entre estos dos polinomios en $K_n[x]$ es 1.

b) El operador lineal $C$ es indescomponible en $E_n$.

Probaremos lo siguiente:

**Teorema 4.3** *Para un operador $C : E_n \longrightarrow E_n$ con las características anteriores y elementos $\alpha, \beta \in K$ no ambos cero, el operador $S_n^{\alpha,\beta}(C) : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$ es indescomponible.*

**Demostración:** Del Lema 4.2 se desprende que un operador $C : E_n \longrightarrow E_n$ indescomponible tiene como polinomio característico a:

$$p_c(x) = (f(x))^k$$

para algún polinomio irreducible $f(x) \in K_n[x]$ y $k$ algún número natural. Como $p_c(x)$ no tiene raíces repetidas concluimos que $k = 1$ y $p_c(x) = f(x)$, vale decir $p_c(x)$ es irreducible en $K_n[x]$. Por el corolario 2.5 $p_c(x)$ es irreducible en $K_{n+1}[x]$.

Con todo esto, estamos listos para estudiar la irreducibilidad del polinomio característico de $S_n^{\alpha,\beta}(C)$:

$$s(x) = det(S_n^{\alpha,\beta}(C) - x \cdot \mathcal{I}_{n+1}).$$

Sea $\{\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}\}$ el conjunto formado por las $2^n$ raíces distintas de $p_c(x)$, entonces siguiendo la construcción hecha en la demostración de 2.3 se tiene que $s(x) \in K_{n+1}(\delta_1, \ldots, \delta_{2^n})[x]$ se factoriza como:

$$s(x) = [(x-\delta_1)^2 - \chi_{n+1}(\alpha\delta_1 - \beta)^2][(x-\delta_2)^2 - \chi_{n+1}(\alpha\delta_2 - \beta)^2] \cdots [(x-\delta_{2^n})^2 - \chi_{n+1}(\alpha\delta_1 - \beta)^2]$$

Por lo tanto, $s(x)$ tiene $2^{n+1}$ raíces distintas y que son:

$$\delta_i^{(l)} = \delta_i + l \cdot \sqrt{\chi_{n+1}}(\alpha\delta_i - \beta) \text{ para } i = 1, \ldots, 2^n \text{ y } l \in \{1, -1\}.$$

Sea $G = \mathcal{G}al_{K_{n+1}}(K_{n+1}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2^n}, \sqrt{\chi_{n+1}}))$. Como $d(x) = x^2 - \chi_{n+1}$ es el polinomio minimal de $\sqrt{\chi_{n+1}}$, entonces para todo $g \in G$ tenemos que $g(\sqrt{\chi_{n+1}}) \in \{\sqrt{\chi_{n+1}}, -\sqrt{\chi_{n+1}}\}$, y para $\delta_i$ tenemos que $g(\delta_i)$ es raíz del polinomio $p_c(x)$. Más aún, como $p_c(x)$ es irreducible, entonces para cada par $\delta_i, \delta_j$ existe un $g \in G$ tal que $g(\delta_i) = \delta_j$, con esto entonces tenemos que si $r, r'$ son dos raíces de $s(x)$ entonces existe un $g \in G$ tal que $g(r) = r'$. Por el lema(2.4) el operador $S_n^{\alpha,\beta}(C)$ es indescomponible en $E_{n+1}$. □

El siguiente teorema describe el método, al que llamaremos método $S_n^{\alpha,\beta}$, que nos permite construir una colección de operadores autoadjuntos e indescomponibles en cada espacio $(E_n, \phi_n)$.

**Teorema 4.4** *Sean $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{A} \in Mat_2(K_1)$ tal que:*

*a) para cada $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_i \in K_i$, no ambos cero.*

*b) para cada $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq v(\alpha_i)$ y $0 \leq v(\beta_i)$.*

*c) El operador $T_{\mathcal{A}} : (E_1, \phi_1) \longrightarrow (E_1, \phi_1)$ inducido por la matriz $\mathcal{A}$ es autoadjunto e indescomponible.*

*d) El conjunto $\{||T_{\mathcal{A}}(e_i)|| - ||e_i|| : i = 1, 2\}$ es acotado inferiormente por $0 \in G_1$.*

*Entonces los operadores $L_k : (E_k, \phi_k) \longrightarrow (E_k, \phi_k)$ definidos por las matrices $\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{L}_{k+1} = S_k^{\alpha_k, \beta_k}(\mathcal{L}_k)$ son autoadjuntos e indescomponibles.*

**Demostración:** La demostración de este teorema se basa en el uso de inducción junto con el lema 4.1 y el teorema 4.4, donde el paso $n = 1$ se cumple gracias a las condiciones que cumple el operador $T_{\mathcal{A}}$. □

## 4.2. Una familia no numerable de operadores indescomponibles en E.

Definimos como en 3.7 la matriz final $\mathcal{L}$ de la sucesión $\{\mathcal{L}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

**Teorema 4.5** *El operador final $L$ de la sucesión $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ representado por la matriz infinita $\mathcal{L}$, es un operador lineal y acotado en $(E, \phi)$. Más aún, esta cota es $0 \in G$.*

**Demostración:**
Por el Lema 3.6, sólo basta encontrar una cota inferior para el conjunto

$$\{||L(e_i)|| - ||e_i|| : i \in \mathbb{N}\}$$

Pero por la construcción de $L$ y el Teorema (3.9) sólo necesitamos probar que si $L_n$ es acotado por $0 \in G_n$ entonces $L_{n+1}$ también lo será en $G_{n+1}$. Pero eso se establece con el mismo razonamiento utilizado en el lema 3.8, en efecto, como la matriz de $L_n$ tiene todos sus coeficientes en $K_n$, entonces para todo $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$ tenemos que $||L_{n+1}(e_i^{n+1})|| - ||e_i^{n+1}|| = ||L_n(e_i^n)|| - ||e_i^n|| \geq 0$. Luego el operador definido por la matriz infinita $\mathcal{L}$ es acotado por cero.

□

**Teorema 4.6** *El operador $L$ es autoadjunto con respecto al producto interno $\phi$.*

**Demostración:** Análoga a la demostración de 3.10.

□

Notemos que en la demostración del Teorema 3.11 sólo requiere que los operadores inducidos en los espacios residuales del operador $T$ sean indescomponibles. Hemos probado ya esta propiedad para los operadores $L_n$, por lo que tenemos de inmediato:

**Teorema 4.7** *El operador $L$ es indescomponible en $(E, \phi)$.*

**Corolario 4.8** *Existe una familia no numerable de operadores en el espacio ortomodular $(E, \phi)$ tal que cada operador en la familia es acotado, autoadjunto e indescomponible.*

## 4.3. Otras aplicaciones del método $S_n^{\alpha,\beta}$.

Si consideramos la sucesión obtenida usando el método $S_n^{\alpha,\beta}$, a partir de $T_A = T_1$ y $\alpha_n, \beta_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conseguimos la colección construida en los capítulos 2 y 3. Si consideramos $T_A = T_1$ y luego $\alpha_n = 0$ y $\beta_n = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos la colección construida en [2]. Esto muestra claramente que los teoremas de este capítulo generalizan las construcciones anteriores de operadores en este contexto.

Ahora veremos un último ejemplo que sin pertenecer totalmente a alguna de las colecciones construidas hasta ahora tiene una estrecha relación con ellas.

Sabemos que cualquier operador autoadjunto e indescomponible en $(E_1, \phi_1)$ genera una cantidad no numerable de operadores cuando usamos $S_n^{\alpha,\beta}$ para subirlo a los espacios $E_2, E_3, \ldots$, pero ¿qué sucede si intentamos subir un operador en $(E_k, \phi_k)$ para un $k > 1$?. Lo que veremos a continuación contesta en alguna medida esta pregunta.

Durante la construcción de los operadores vistos en los capítulos anteriores surgió el operador $B_3 \in L(E_3)$ definido por la matriz:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 & \chi_2 & 0 & \chi_3 & 4\chi_1\chi_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \chi_2 & 4\chi_3 & \chi_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \chi_1 & 0 & 0 & \chi_3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_3 \\ 1 & 4\chi_1 & 0 & 0 & 0 & \chi_1 & \chi_2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \chi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es autoadjunto e indescomponible, y no pertenece a ninguna de las colecciones anteriormente estudiadas.

A partir de este operador, podemos estudiar la colección de operadores definida por $B_4 = S_3^{\alpha_3,\beta_3}(B_3)$ y $B_{n+1} = S_n^{\alpha_n,\beta_n}(B_n)$ para todo $n \geq 4$, con $\alpha_n, \beta_n$ cumpliendo las mismas hipótesis requeridas para el teorema 4.4. Cada uno de estos operadores está definido en $(E_n, \phi_n)$, es autoadjunto e indescomponible, y la matriz final generada por esta coleción define un operador $B : (E, \phi) \longrightarrow (E, \phi)$ acotado por $0 \in G$, pues $B_3$ es acotada por $0 \in G_3$.

Por el teorema 3.11 este operador es indescomponible si los operadores inducidos por $B$ en los espacios residuales son indescomponibles. Eso es cierto para los espacios residuales $E_n$ con $n \geq 4$, y el cálculo directo nos muestra que $\hat{B}_3, \hat{B}_2, \hat{B}_1$ tienen asociados polinomios característicos irreducibles, y por tanto son indescomponibles. Eso asegura la indescomponibilidad del operador $B$.

Con esto ampliamos la gama de operadores de este trabajo, tanto en dimensión finita, como en dimensión infinita.

## Referencias


[1] H. Keller, *Ein nicht-klassischer Hilbertscher Raum*, Math. Z. 172 (1980), 41-49.

[2] H. Keller y H. Ochsenius, *Orthogonal descompositions of Matrices over Fields of Power Series*. Enviada a publicación.

[3] P.Ribenboim, *Théorie des valuations*, Les Presses de L' Université de Montreal, 1964.

[4] H. Gross, *Different Orthomodular Orthocomplementation on a Lattice*. Order 4, (1987), pág 79-92.

[5] H. Gross y U.M. Künzi, *On a class of orthomodular quadratic spaces*, L' Enseign. Math.(2) 31 (1985), 187-212.

[6] H. Keller y H. Ochsenius, *Bounded operators on Non-Archimedean Orthomodular Spaces*, Math. Slovaca **45** (1995) No. 4, 413–434.

[7] H. Keller y H. Ochsenius, *On the Geometry of Orthomodular Spaces over Fields of Power Series*, International journal of Theoretical Physics, Vol. 37, No 1, pág. 85-92, (1998).

[8] W.Greub, *Linear Algebra*, (1967), Springer, New York.

[9] H. Keller y H. Ochsenius, *A Spectral Theorem For Matrices over Fields of Power Series*, Ann. Math. Blaise Pascal, Vol.2, No.1, 169-179.