UCH-FC
MAG-M
H 565
C.1

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

# Polinomios y Números de Bernoulli asociados a un grupo formal cualquiera.

Tesis
Entregada A La
Universidad De Chile
En Cumplimiento Parcial De Los Requisitos
Para Optar Al Grado De
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

Por

**Fernando Andrés Herrera Contreras**

Septiembre, 2014

Director de Tesis: **Dr. Yves Martin**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Fernando Andrés Herrera Contreras**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 26 de Septiembre de 2014.

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

**Director de Tesis**

Dr. Yves Martin ______________________

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Manuel Arenas ______________________

Dr. Antonio Behn ______________________

Dr. Amalia Pizarro ______________________

*Dedicado a mi familia.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer a todos aquellos que ayudaron de forma directa o indirecta a que terminara el programa.

Agradecer al Dr. Yves Martin por su fundamental ayuda en esta tesis. Agradecerle primero por aceptar ser mi tutor, por su tiempo semanal para juntarnos a trabajar, por sus comentarios e ideas para seguir avanzando en la tesis. Tambien agradecerle por su ayuda fuera de la tesis, como por ejemplo: hacer que me sintiera en confianza con él, sus consejos hacía mí y por último el financiamiento que me ha brindado de sus proyectos el cual me ha ayudado bastante. Incluso gracias a su ayuda pude exponer esta tesis en la Somachi del año pasado.

Agradecer a mi familia, en especial a mis padres por interesarse en que estudiara cuando era niño.

Agradecer a compañeros-amigos con los que estudiamos juntos en el magíster. Agradecer a Alejandro Riquelme, Paulina Cecchi, Jaime Contreras, Sergio Astudillo, Nicolás Abarzúa, Henry Hughes, Boris Roa, Diego Lagos, Harold Bustos, Alan Chavez entre otros. Agradecer a Patricio Quiroz por sus (buenas) ayudantías en Topología Algebráica y Álgebra y por su disposición a ayudar.

Agradecer a la Tefy, por estar conmigo en la gran parte de este programa. Por darme mi tiempo para estudiar y ayudarme en muchos aspectos. Ha sido una gran persona para mí en estos dos años y medio.

Agradecer a varios del departamento como Santiago Andrews por su constante ayuda con la fotocopiadora y cualquier cosa del departamento, a Cecilia Aguirre por su buena disposición y Virginia Cárdenas por las impresiones.

Tambien agradezco a quienes compartimos durante este programa como Ignacio Saavedra, Juan Carlos Pozo, Luis González, Arnaldo Gajardo, Harold Ojeda, Pablo Ortíz, Sebastián Nuñez, Karen Corrales, María Tapia. A todo el grupo de ajedrez, en especial a Pablo Calvo. Aprovecho de agradecer en este 2014 a Pamela Pastén, Camilo Pérez, Camilo Vera, Leslie Jimenez, Frederick Silva, Sebastián Herrero y Victor Castillo que ha pesar de no conocernos en el magíster nos hemos ayudado este año en el doctorado juntándonos a estudiar.

# Índice

# Parte I

# Introducción

Los números y polinomios de Bernoulli aparecen en varios problemas matemáticos clásicos. Por ejemplo en la suma de una potencia fija de números naturales consecutivos $1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$, evaluación de la función Zeta de Riemann en números pares positivos y en la demostración de cierto caso del último teorema de Fermat.

Un grupo formal unidimensional conmutativo es una serie formal en dos variables con coeficientes en un anillo conmutativo con unidad que satisface ciertas condiciones. Si el anillo es local y completo se puede definir en el ideal maximal una operación aditiva abeliana con tal serie. En este trabajo pediremos que el anillo sea libre de torsión, pues en tal caso se le puede asociar a un grupo formal una serie de potencias en una variable llamada *exponencial formal*. A cada exponencial formal se le asocia una familia de números y una familia de polinomios llamados *números universales de Bernoulli* y *polinomios universales de Bernoulli*. En esta tesis mostraremos que varias de las propiedades de los números y polinomios de Bernoulli clásicos se pueden generalizar a tales familias. Tambien exhibiremos ejemplos concretos de exponenciales formales provenientes de grupos formales, y en cada caso estudiaremos los números y polinomios universales de Bernoulli asociados. En particular veremos que en estos ejemplos aparecen funciones clásicas de la teoría de números como la serie de Eisenstein y la función Zeta de Riemann.

Piergiulio Tempesta y Francis Clarke han trabajado con estas dos familias de objetos. Tal cual los números de Bernoulli se relacionan con la función Zeta de Riemann (ver ecuación (5)), Tempesta en [12] muestra una relación similar entre ciertos polinomios universales de Bernoulli y una generalización de la función Zeta de Riemann-Hurwitz. Por otro lado el teorema de Clausen-Von Staudt establece explícitamente el denominador de los números de Bernoulli (ver ecuación (4)). Clarke muestra en [5] una generalización de tal teorema a los números universales de Bernoulli.

Este trabajo de tesis se divide en dos partes. En la primera damos la definición de *grupo formal* (unidimensional conmutativo) sobre un anillo conmutativo con unidad y comentamos algunas de sus propiedades. Después asumimos que el anillo es libre de torsión y mostramos la existencia de dos series de una variable asociadas a un grupo formal denominadas *logaritmo formal* y *exponencial formal*. Luego recordamos los números y polinomios de Bernoulli clásicos y exhibimos algunas de sus propiedades. Entre estas podemos mencionar:

$$
\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} && (1)\\
\frac{d}{dx} B_n(x) &= n\, B_{n-1}(x) && (2)\\
\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x) &= n x^{n-1} && (3)\\
B_n(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k} && (4)
\end{aligned}
$$

donde $n$ es un entero positivo, $B_n$ el *n-ésimo número de Bernoulli* y $B_n(x)$ el *n-ésimo polinomio de Bernoulli.*

En este punto de la tesis damos la definición de $B_n^G$ y $B_n^G(x)$, los números y polinomios universales de Bernoulli asociados a un grupo formal. Luego nos dedicamos a estudiar las propiedades de estos objetos. En particular, mostramos las identidades

$$
\begin{aligned}
B_n^G(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^G x^{n-k}\\
\frac{d}{dx} B_n^G(x) &= n\, B_{n-1}^G(x)\\
\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_{n-k} B_k^G(x) &= n x^{n-1}\\
B_n^G(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^G(x) y^{n-k}
\end{aligned}
$$

Claramente estas expresiones generalizan las ecuaciones (1),(2),(3) y (4) mencionadas anteriormente.

La segunda parte de este trabajo de tesis corresponde al estudio de ciertos ejemplos. Consideraremos exponenciales formales concretas y calcularemos los números y polinomios universales de Bernoulli en cada caso. Añadiremos tambien algunas propiedades particulares. Los tres primeros ejemplos de grupos formales nos permitirán mostrar que tanto las potencias de la variable $x$ como los polinomios de Bernoulli son casos particulares de los polinomios universales de Bernoulli. En el cuarto ejemplo consideraremos la fórmula relativista para calcular la composición de velocidades, a saber

$$\dot{v} = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

donde $\dot{v}$ es la velocidad de un cuerpo con respecto al sistema $\dot{S}$, $v$ es la velocidad del cuerpo medida en el sistema de referencia inercial $S$, $u$ es la velocidad con la que el sistema $\dot{S}$ se aleja del sistema "en reposo" $S$ y $c$ es la velocidad de la luz. En el último ejemplo trabajaremos con integrales elípticas incompletas del primer tipo y mostraremos que la fórmula de adición de estas integrales define una familia de grupos formales para luego mostrar que los números universales de Bernoulli, en este ejemplo, aparecen como valores especiales de ciertas formas modulares, las series de Eisenstein.

# Notación

En lo que sigue $\mathbb{N}$ denota los números enteros positivos y $\mathbb{N}_* = \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\mathbb{R}_+$ será el conjunto de los números reales positivos y $|x|$ denota el valor absoluto de $x$ si $x$ es un número real arbitrario. Con $R^*$ nos referimos al conjunto de los elementos invertibles en el anillo $R$. $\mathcal{H}$ es el semiplano superior de $\mathbb{C}$, $\Re(z)$ y $\Im(z)$ es la parte real e imaginaria del número complejo $z$ respectivamente, además $\|z\| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$.

# Parte II

# Conceptos básicos

La teoría de los grupos formales ha entregado un número de aplicaciones importantes en la segunda mitad del siglo veinte en las áreas de teoría de números, geometría algebráica, aritmética en geometría algebráica y topología algebráica, que van desde congruencias para los coeficientes de formas modulares, teoría de cuerpos y curvas elípticas hasta las K-teorías e (indirectamente) resultados sobre los grupos de homotopías de esferas.

A través de todo este trabajo $R$ siempre denotará un anillo conmutativo con unidad.

## 1. Grupo formal

**Definición 1** *Un* grupo formal (conmutativo) $\mathcal{F}$ sobre $R$ *es una serie de potencias* $F(x,y) \in R[[x,y]]$ *que satisface:*

*a)* $F(x,y) = x + y + \sum_{i,j\in\mathbb{N}} c_{ij}x^i y^j$.

*b)* $F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))$.

*c)* $F(x,y) = F(y,x)$.

*Llamaremos a* $F(x,y)$ *la regla de asignación del grupo formal* $\mathcal{F}$. *Escribiremos* $\mathcal{F}/R$ *si* $\mathcal{F}$ *es un grupo formal sobre* $R$.

**Ejemplo 1** *El grupo formal multiplicativo, denotado* $\mathcal{G}_m$, *es definido mediante* $G_m(x,y) = x + y + xy$.
*El grupo formal asociado a la composición de velocidades, estudiado más adelante, es definido mediante* $F(x,y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

**Observación 1** *Ocupando a) y b) se puede probar*

- *Existe una única serie de potencias* $i(t) \in R[[t]]$ *tal que* $F(t,i(t)) = 0$.
- $F(x,0) = x$, $F(0,x) = x$.

**Definición 2** *Sean* $(\mathcal{F},F)$, $(\mathcal{G},G)$ *grupos formales. Un* homomorfismo de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ definido sobre $R$ *es una serie de potencias* $f(t) \in R[[t]]$ *(sin término constante) que satisface*

$$f(F(t,s)) = G(f(t),f(s)).$$

*Los grupos formales* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{G}$ *son* isomorfos sobre $R$ *si existen homomorfismos* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *y* $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ *tal que*

$$f(g(t)) = g(f(t)) = t.$$

**Lema 1** *Sea $a \in R^*$ y sea $f(t) \in R[[t]]$ una serie de potencias de la forma*

$$f(t) = at + \textit{(términos de grado mayor)}.$$

*Entonces existe una única serie de potencias $g(t) \in R[[t]]$, que llamaremos la inversa de $f$, tal que*

$$f(g(t)) = g(f(t)) = t.$$

**Observación 2 Grupo asociado a un grupo formal.** *Si consideramos $R$ un anillo local y completo*[1]*, y llamamos $M$ al ideal maximal, podemos dar a $M$ otra estructura de grupo con una operación basada en un grupo formal $\mathcal{F}$.*
*El* grupo asociado a $\mathcal{F}/R$ *es el conjunto $M$ con las operaciones*

$$\begin{aligned} x \oplus_{\mathcal{F}} y &= F(x,y) \qquad \textit{(adición)} \quad \textit{para todo } x, y \in M, \\ \ominus_{\mathcal{F}} x &= i(x) \qquad \textit{(inverso)} \quad \textit{para todo } x \in M. \end{aligned}$$

*Pidiendo que $R$ sea completo nos aseguramos que las series $F(x,y)$ e $i(x)$ convergen en $M^2$. De esta forma $(M, \oplus_{\mathcal{F}})$ es un grupo abeliano.*

En este trabajo utilizaremos los siguientes tres resultados. El primero es un lema técnico.

**Lema 2** *Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad. Sea $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in R[[t]]$ con $a_0 \in R^*$. Entonces*

$$\frac{1}{f(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \in R[[t]] \text{ con } b_0 = a_0^{-1}.$$

Los siguientes teoremas de variable compleja son conocidos como teorema de series dobles de Weierstrass y $M$-test de Weierstrass respectivamente.

**Teorema 1** *Sea $x \in \mathbb{C}$ y supongamos que las series*

$$f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^n \qquad (m = 0, 1, 2, ...\infty)$$

*son todas convergentes para $\|x\| < C$, $C \in \mathbb{R}_+$, y además la serie*

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)$$

*converge uniformemente en cualquier círculo de radio menor que $C$. Entonces*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} x^n, \quad \|x\| < C.$$

[1] Acá $R$ completo significa que toda sucesión de Cauchy en $R$ es convergente a un punto de $R$, donde la topología de $R$ está generada por la siguiente base de abiertos $\{r + M^l / r \in R, l \in \mathbb{N}\}$.

[2] Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in R[[x]]$. Dado $x \in M$ se tiene que la serie $f(x)$ es convergente en $M$ si la sucesión de sumas parciales $\{S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n\}_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En tal caso se puede ver que $f(x)$ converge a un elemento de $M$.

**Teorema 2** *Sea $A$ un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$. Si la sucesión de funciones $f_n(x)$ tiene la propiedad*

$$\|f_n(x)\| \leq M_n \text{ para todo } x \in A,$$

*donde $M_n$ es una constante positiva y la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ converge entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

*converge absolutamente y uniformemente para todo punto $x$ en $A$.*

Para la demostración de Lema 1 ver [11], capítulo 4. Para ver la demostración de Teorema 1 ver [3], capítulo 10, pág. 266. Para la demostración de Teorema 2 ver [3], capítulo 10, pág. 246.

## 2. Logaritmo y exponencial formal

**Definición 3** *Un* diferencial invariante *para un grupo formal $\mathcal{F}/R$ es una forma diferencial*

$$w(t) = p(t)dt \in R[[t]]\, dt$$

*que satisface*

$$w \circ F(t, s) = w(t).$$

*Dicho de otra forma, $w = p(t)dt$ es un diferencial invariante para $\mathcal{F}/R$ si cumple*

$$p(F(t, s))F_x(t, s) = p(t)$$

*donde $F_x(t, s)$ es la derivada parcial de $F$ con respecto a su primera variable.*
*Diremos que un diferencial invariante es* normalizado *si $p(0) = 1$.*

**Ejemplo 2** *Para los grupos formales $\mathcal{G}_m$ y $F(x, y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$ considerados en Ejemplo (1) un diferencial invariante normalizado es $w(t) = \dfrac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt$ y $w(t) = \dfrac{1}{1-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}dt$ respectivamente. Estos cálculos son comentados con mayor profundidad en una sección posterior.*

**Proposición 1** *Sea $\mathcal{F}/R$ un grupo formal. Entonces existe un único diferencial invariante normalizado $w(t)$ para $\mathcal{F}/R$. Además*

$$w(t) = \frac{1}{F_x(0, t)}dt.$$

**Definición 4** *Sea $R$ un anillo libre de torsión*[3]*, $\mathcal{F}/R$ un grupo formal,*

$$w(t) = (1 + c_1 t + c_2 t^2 + ...)dt$$

*el diferencial invariante normalizado para $\mathcal{F}/R$ y $K = R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Se define el* logaritmo formal *de $\mathcal{F}/R$ como la serie de potencias*

$$Log_F(t) = t + \frac{c_1}{2}t^2 + \frac{c_2}{3}t^3 + ... \in K[[t]].$$

*Se define tambien la* exponencial formal *de $\mathcal{F}/R$ como la única serie de potencias $Exp_F(t) \in K[[t]]$ que satisface*

$$Log_F \circ Exp_F(t) = Exp_F \circ Log_F(t) = t.$$

[3]El que $R$ sea libre de torsión significa que para todo $x$ en $R$ el homomorfismo $\phi_x : \mathbb{Z} \to R$ definido por $\phi_x(1) = x$ es inyectivo.

**Proposición 2** *Sea $R$ un anillo libre de torsión y $\mathcal{F}/R$ un grupo formal. Entonces*

$$Log_F : \mathcal{F} \to G_a$$

*es un isomorfismo de grupos formales sobre $K = R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

*En particular $Log_F$ y $Exp_F$ cumplen las siguientes identidades equivalentes*

$$\begin{aligned} Log_F F(x,y) &= Log_F\, x + Log_F\, y \\ F(x,y) &= Exp_F(Log_F\, x + Log_F\, y) \\ Exp_F(x+y) &= F(Exp_F\, x, Exp_F\, y) \end{aligned}$$

**Ejemplo 3** *Para el grupo formal $\mathcal{G}_m$, las series que representan al logaritmo formal y exponencial formal son $ln(t+1)$ y $e^t - 1$ respectivamente. De igual forma, para el grupo formal $F(x,y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$ el logaritmo formal y exponencial formal son las funciones trigonométricas hiperbólicas* artanh *y* tanh *respectivamente. Estos cálculos son comentados con mayor profundidad en una sección posterior.*

Los siguientes resultados serán usados frecuentemente en este trabajo.

**Lema 3** *Sea $R$ un anillo libre de torsión, $K = R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ y*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \in K[[t]]$$

*una serie de potencias con $a_n \in R$ y $a_1 \in R^*$. Entonces existe una única serie de potencias $g(t) \in K[[t]]$ que satisface $f(g(t)) = t$, además cumple $g(f(t)) = t$ y tal $g$ tiene la forma*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$$

*con $b_n \in R$.*

**Proposición 3** *Sea $R$ un anillo libre de torsión y $\mathcal{F}/R$ un grupo formal. Entonces*

$$Log_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} t^n \quad y \quad Exp_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$$

*con $a_n, b_n \in R$ y $a_1 = b_1 = 1$.*

**Proposición 4** *Sea $\mathcal{F}/R$ un grupo formal sobre un anillo libre de torsión. $Log_F(t)$ es la única serie de la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n t^n \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[t]]$ y $l_1 = 1$ que cumple*

$$Log_F\, F(x,y) = Log_F\, x + Log_F\, y.$$

Para las demostraciones de Proposición 1, 2, 3 y Lema 3 ver [11] capítulo 4. Para la demostración de Proposición 4 ver [7] capítulo 1, sección 5.

**Lema 4** *Sea $R$ un anillo libre de torsión y $E(t) \in R[[t]]$ una serie de potencias de la forma*

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \ a_1 = 1.$$

*Entonces existe un grupo formal $\mathcal{F}$ sobre $R$ tal que $Exp_F = E$.*

**Dem.** Por Lema 1 existe una única serie de potencias $L(t) \in R[[t]]$ que es la inversa de $E$. Como $a_1 = 1$ tenemos $b_1 = 1$ luego la serie $L$ tiene la forma

$$L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n \text{ con } b_1 = 1 \text{ y } b_n \in R.$$

Definimos $F(x,y) = E(L(x) + L(y))$ y observamos que $F$ cumple

a) $F(x,y) \in R[[x,y]]$.

b) $F(x,y) = x + y + \sum_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} x^i y^j$.

c) $F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$.

d) $F(x,y) = F(y,x)$.

Entonces $F$ define un grupo formal $\mathcal{F}$ sobre $R$. Por Proposición 4 tenemos $L = Log_F$ luego $E = Exp_F$. $\square$

# 3. Números y polinomios de Bernoulli

En esta sección recordaremos la definición de los números y polinomios de Bernoulli, además de mostrar algunas de sus propiedades.

**Definición 5** *Para cada $x \in \mathbb{C}$ definimos las funciones $B_n(x)$ por la ecuación*

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi.$$

*El número $B_n(0)$ se llama* n-ésimo número de Bernoulli *y se denota $B_n$. Así*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n}, \quad |t| < 2\pi.$$

**Teorema 3** *Las funciones $B_n(x)$ son polinomios mónicos de grado $n$, con coeficientes racionales, en la variable $x$ dados por*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

*Ahora la función $B_n(x)$ será llamada el* n-ésimo polinomio de Bernoulli.

Los primeros polinomios de Bernoulli son

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

**Teorema 4** *(Clausen-Von Staudt)*

$$B_{2n} = I_{2n} - \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p} \quad \textit{donde } p \textit{ es primo y } I_{2n} \in \mathbb{Z}.$$

El teorema anterior afirma que el denominador de $B_{2n}$ es $\prod_{p-1|2n} p$.

**Proposición 5** *Si $n$ es un entero positivo los polinomios de Bernoulli satisfacen*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x) = nx^{n-1}.$$

Una consecuencia inmediata de lo anterior es lo siguiente:

**Corolario 1** *Dado $n$ entero positivo los números de Bernoulli cumplen*

$$B_0 = 1 \quad y \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

Podemos relacionar polinomios consecutivos de Bernoulli con sus derivadas e integrales.

**Proposición 6** *Si $n$ es entero positivo entonces*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(x) &= n\, B_{n-1}(x) \\ \int_a^x B_n(t)\, dt &= \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(a)}{n+1}. \end{aligned}$$

Otras propiedades interesantes de los polinomios y números de Bernoulli son las siguientes:

**Proposición 7** *Para $n$ entero positivo se tiene*

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}.$$

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

**Proposición 8** *Los números de Bernoulli cumplen*

$$B_{2n+1} = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 5** *Si $n$ es un entero positivo entonces*

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \tag{5}$$

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \tag{6}$$

*donde $\zeta$ es la función Zeta de Riemann. Lo anterior muestra que los números de Bernoulli de índice par son alternantes en signo, es decir*

$$(-1)^{n+1} B_{2n} > 0.$$

Para el próximo resultado necesitamos definir las series de Eisenstein.

**Definición 6** *Sea $k$ un entero par mayor que 2. Para $z \in \mathcal{H}$ definimos la* serie de Eisenstein

$$G_k(z) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{(nz+m)^k},$$

*donde la $'$ sobre $\Sigma$ significa que la suma es sobre todos los enteros $n, m$ ambos no nulos simultáneamente.*

**Proposición 9** *Si $n > 1$ tenemos*

$$B_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \lim_{z\to i\infty} G_{2n}(z) \tag{7}$$

*donde $G_{2n}$ es la serie de Eisenstein.*

Para las demostraciones de los teoremas y proposiciones de esta sección ver, por ejemplo, [1] capítulo 12.

Parte III

# Polinomios y números de Bernoulli asociados a un grupo formal.

## 4. Números y polinomios universales de Bernoulli

**Definición 7** *Sea $R$ un anillo libre de torsion, $\mathcal{F}/R$ un grupo formal y $Exp_F$ la exponencial formal asociada a tal grupo. Definimos la* n-ésima función universal de Bernoulli $B_n^G(x)$ *mediante la ecuación*

$$\frac{te^{xt}}{Exp_F(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^G(x)\frac{t^n}{n!}$$

*y definimos el* n-ésimo número universal de Bernoulli $B_n^G$ *por* $B_n^G = B_n^G(0)$.
*Equivalentemente*

$$\frac{t}{Exp_F(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^G\frac{t^n}{n!}.$$

A continuación demostraremos varias propiedades de estos números y funciones universales de Bernoulli. En particular veremos que los resultados en Teorema 3, Proposición 7, Corolario 1, Proposición 5, Proposición 6 y Proposición 8 se pueden generalizar al caso de nuestros números y polinomios universales.

**Proposición 10** *Las funciones $B_n^G(x)$ son polinomios mónicos en la variable $x$ de grado $n$ dados por*

$$B_n^G(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^G x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

*Por lo tanto, llamaremos a la n-ésima función universal de Bernoulli $B_n^G(x)$ el* n-ésimo polinomio universal de Bernoulli.

**Dem.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^G(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{Exp_F(t)}e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^G\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k^G}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)t^n.$$

Igualando los coeficientes de $t^n$ en ambos lados, se tiene

$$B_n^G(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^G x^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

Esta última igualdad muestra que $B_n^G(x)$ es un polinomio en la variable $x$ de grado $n$. Para ver que es mónico mostraremos $B_0^G = 1$. Por Proposición 3 sabemos que la exponencial formal tiene la forma $Exp_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}$ con $d_n \in R$ y $d_1 = 1$. Al considerar la definición (7) tenemos

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^G \frac{t^n}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}$$

y al comparar los coeficiente de $t$ se concluye $B_0^G = 1$. □

**Proposición 11** *Los polinomios universales de Bernoulli se relacionan con los polinomios clásicos de Bernoulli vía la identidad*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_{n-k}\, B_k^G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

*donde* $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son los coeficientes de la exponencial formal* $Exp_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}$.

**Dem.** Como $\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$ y $\frac{te^{xt}}{Exp_F(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^G(x) \frac{t^n}{n!}$, podemos expresar $te^{xt}$ de dos formas

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = te^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^G(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!},$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k(x)}{k!(n-k)!} \right) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_{n-k}\, B_k^G(x)}{k!(n-k)!} \right) t^n.$$

Igualando los coeficientes de ambas series y amplificando por $n!$ concluimos

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_{n-k}\, B_k^G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

**Corolario 2** *Los números universales de Bernoulli y los números de Bernoulli cumplen*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_{n-k}\, B_k^G = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k.$$

**Dem.** En proposición anterior considerar $x = 0$. □

**Proposición 12** *Los polinomios universales de Bernoulli satisfacen*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_{n-k} B_k^G(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Dem.** Ocupando la Proposición 11 y Proposición 5 obtenemos lo propuesto. □

**Corolario 3** *Los números universales de Bernoulli tambien satisfacen*

$$B_0^G = 1 \quad y \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} d_{n-k} B_k^G = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Dem.** Reemplazar $x = 0$ en Proposición 12. □

Este corolario tambien nos muestra en donde viven estas familias de números y polinomios. Por el corolario anterior tenemos $B_n^G \in R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ para todo $n$ entero no negativo y luego, usando Proposición 10, deducimos $B_n^G(x) \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[x]$ para todo $n$ entero no negativo.

Revisando los resultados antes mencionados, podemos calcular los primeros polinomios universales. Para cualquier grupo formal $\mathcal{F}/R$ con exponencial formal $Exp_F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!} t^n$ tenemos

$$\begin{aligned}
B_0^G(x) &= 1 \\
B_1^G(x) &= x - \frac{d_2}{2} \\
B_2^G(x) &= x^2 - d_2 x - \frac{d_3}{3} + \frac{d_2^2}{2} \\
B_3^G(x) &= x^3 - \frac{3}{2} d_2 x^2 + (\frac{3}{2} d_2^2 - d_3) x + d_2 d_3 - \frac{3}{4} d_2^3 - \frac{d_4}{4} \\
B_4^G(x) &= x^4 - 2d_2 x^3 + (3d_2^2 - 2d_3) x^2 + (4d_2 d_3 - 3d_2^3 - d_4) x + \frac{3}{2} d_2^4 - 3d_2^2 d_3 + \frac{2}{3} d_3^2 + d_2 d_4 - \frac{1}{5} d_5 \\
B_5^G(x) &= x^5 - \frac{5}{2} d_2 x^4 + (5d_2^2 - \frac{10}{3} d_3) x^3 + (10 d_2 d_3 - \frac{15}{2} d_2^3 - \frac{5}{2} d_4) x^2 \\
&\quad + (\frac{15}{2} d_2^4 - 15 d_2^2 d_3 + \frac{10}{3} d_3^2 + 5 d_2 d_4 - d_5) x \\
&\quad - \frac{15}{4} d_2^5 + 10 d_2^3 d_3 - 5 d_2 d_3^2 - \frac{15}{4} d_2^2 d_4 + d_2 d_5 + \frac{5}{3} d_3 d_4 - \frac{1}{6} d_6.
\end{aligned} \tag{8}$$

**Proposición 13** *Los polinomios universales de Bernoulli cumplen*

$$\frac{d}{dx} B_n^G(x) = n\, B_{n-1}^G(x)$$

**Dem.** Por Proposición 10 tenemos

$$\begin{aligned}
B_n^G(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k^G x^{n-k} + B_n^G \\
\frac{d}{dx} B_n^G(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) B_k^G x^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Ocupando la identidad $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$ concluimos

$$\frac{d}{dx} B_n^G(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k^G x^{n-1-k} = n B_{n-1}^G(x).$$

$\square$

**Proposición 14** *Los polinomios de Bernoulli universales cumplen*

$$\int_a^x B_n^G(t)\,dt = \frac{B_{n+1}^G(x) - B_{n+1}^G(a)}{n+1}$$

**Dem.** Por Proposición 13 tenemos $\frac{d}{dt}B_{n+1}^G(t) = (n+1)B_n^G(t)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{d}{dt}B_{n+1}^G(t)\,dt &= (n+1)\int_a^x B_n^G(t)\,dt \\ B_{n+1}^G(x) - B_{n+1}^G(a) &= (n+1)\int_a^x B_n^G(t)\,dt \end{aligned}$$

esta última igualdad es equivalente a lo propuesto. $\square$

**Proposición 15** *Los polinomios universales de Bernoulli cumplen*

$$B_n^G(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^G(x)y^{n-k}$$

**Dem.** Primero notemos que si $a, b \in \mathbb{N}$ y $a < b$ entonces $\binom{a}{b} = 0$. Por Proposición 10 tenemos

$$\begin{aligned} B_n^G(x+y) &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_l^G(x+y)^{n-l} \\ &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_l^G\left(\sum_{k=0}^{n-l}\binom{n-l}{k}x^k\,y^{n-l-k}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}B_l^G\left(\sum_{k=l}^{n}\binom{n-l}{k-l}x^{k-l}\,y^{n-k}\right). \end{aligned}$$

Es fácil revisar que si $n, k, l \in \mathbb{N}$ y $n \leq k \leq l$ entonces $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \binom{n}{k}\binom{k}{l}$, luego

$$\begin{aligned} B_n^G(x+y) &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}B_l^G\binom{n}{k}\binom{k}{l}x^{k-l}y^{n-k} \\ &= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}B_l^G\binom{n}{k}\binom{k}{l}x^{k-l}y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n}\binom{k}{l}B_l^G x^{k-l}y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}B_l^G x^{k-l}y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^G(x)y^{n-k}. \end{aligned}$$

□

Una propiedad conocida de los números de Bernoulli clásicos es que aquellos con indice impar mayor a 1 son nulos (ver Proposición 8). Este resultado no es válido en el caso universal, pero es posible caracterizar cuando se tiene la misma situación.

**Proposición 16** *Sea $Exp_F$ una exponencial formal de un grupo formal $F/R$, entonces*

$$B^G_{2n+1} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \iff Exp_F(t) + Exp_F(-t) + d_2\, Exp_F(t)\, Exp_F(-t) = 0.$$

**Dem.** Notemos

$$\begin{aligned} \frac{t}{Exp_F(t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} B^G_n \frac{t^n}{n!} \\ \frac{t}{Exp_F(t)} - B^G_1 t &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B^G_n \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Por la ecuación (8) sabemos $B^G_1 = -\frac{d_2}{2}$, entonces la última igualdad es equivalente a

$$\frac{t}{Exp_F(t)} + \frac{d_2}{2} t = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B^G_n \frac{t^n}{n!}.$$

Considerando esta última igualdad tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} B^G_{2n+1} = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} &\iff 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B^G_n \frac{t^n}{n!} \quad \text{es una serie par} \\ &\iff \frac{t}{Exp_F(t)} + \frac{d_2}{2} t \quad \text{es una serie par} \\ &\iff \frac{t}{Exp_F(t)} + \frac{d_2}{2} t = -\frac{t}{Exp_F(-t)} - \frac{d_2}{2} t \\ &\iff Exp_F(t) + Exp_F(-t) + d_2 Exp_F(t) Exp_F(-t) = 0. \end{aligned}$$

□

**Observación 3** *¿ Será verdad que toda exponencial formal cumple $Exp_F(t) + Exp_F(-t) + d_2\, Exp_F(t) Exp_F(-t) = 0$?. En lo siguiente mostraremos que esto es falso presentando un grupo formal que no cumple tal condición.*

*En [12] Tempesta trabaja con exponenciales formales del tipo $\sum_{k=l}^{m} a_k e^{kt}$ donde $l, m$ son enteros y $l < m$. Los coeficientes $a_k$ deben cumplir las condiciones*

$$\sum_{k=l}^{m} a_k = 0, \quad \sum_{k=l}^{m} k a_k = 1,$$

*ambas son equivalentes a las identidades $Exp_F(0) = 0$ y $\frac{d}{dt} Exp_F(t)|_{t=0} = 1$.*

*Consideremos $e^{2t} - e^t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n!} t^n \in \mathbb{Q}[[t]]$. Por Lema 4 existe un grupo formal $\mathcal{F}/\mathbb{Q}$ tal que*

$Exp_F(t) = e^{2t} - e^t$. *Además* $Log_F(t) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)$.
*Mediante la identidad* $F(x,y) = Exp_F(Log_F\, x + Log_F\, y)$ *tenemos que el grupo formal* $\mathcal{F}$ *se define mediante*

$$F(x,y) = \frac{x+y}{2} + xy + \frac{1}{2}x\sqrt{1+4y} + \frac{1}{2}y\sqrt{1+4x} \in \mathbb{Z}[[x,y]]^4$$

*Es claro que los primeros sumandos son*

$$F(x,y) = x + y + 3xy - xy^2 - x^2y + 2xy^3 + 2x^3y + \ldots$$

*Mediante un cálculo sencillo la exponencial formal no cumple la condición* $Exp_F(t) + Exp_F(-t) + d_2 Exp_F(t) Exp_F(-t) = 0$. *Por otro lado se puede ver* $B_3^G = -3$ *y* $B_5^G = -5$.

**Proposición 17** *Sea* $Exp_F$ *la exponencial formal asociada a un grupo formal* $\mathcal{F}/R$. *Entonces*

$$Exp_F \text{ es serie impar} \iff B_{2n-1}^G = 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Dem.** Considerando Definición (7) podemos notar que $Exp_F$ es una serie impar si y sólo si $\frac{t}{Exp_F(t)}$ es una serie par. Esto último es equivalente a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^G}{n!} t^n$ es serie par, es decir $B_{2n-1}^G = 0$ todo $n$ natural. □

El siguiente resultado muestra que podemos conocer $d_2$ directamente del $F$ asociado a $\mathcal{F}$ sin tener que calcular su exponencial formal.

**Proposición 18** *Sea* $F(x,y) = x + y + xyg(x,y)$ *la regla de asignación de un grupo formal donde* $g(x,y) \in R[[x,y]]$. *Entonces* $d_2$ *es el término constante de* $g$.

**Dem.** Llamemos $w$ al diferencial invariante normalizado del grupo formal. Entonces

$$w(t) = p(t)dt = (1 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \cdots)dt$$

donde $p(t) \in R[[t]]$, entonces

$$\begin{aligned} w(F(t,s)) &= w(t) \\ p(F(t,s))F_x(t,s) &= p(t). \end{aligned}$$

Notar $F_x(t,s) = 1 + s[g(t,s) + t\frac{d}{dx}g(t,s)]$. Al usar $t = 0$ en la última igualdad tenemos

$$\begin{aligned} p(s)\,(1 + sg(0,s)) &= p(0) \\ (1 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots)\,(1 + sg(0,s)) &= 1. \end{aligned}$$

Al comparar el coeficiente de $s$ en esta última ecuación tenemos $c_1 + g(0,s) = 0$. Por otro lado, como $Exp_F(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \frac{t^n}{n!}$ es la inversa del logaritmo formal $Log_F(t) = t + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^{n+1}}{n+1!}$ se

[4] En Proposición 23 demostraremos que esta serie está en $\mathbb{Z}[[x,y]]$.

tiene $d_2 = -c_1$ concluyendo la proposición. $\square$

Para terminar esta sección reformularemos el Lema 4 para que sea más fácil de usar en la Sección 5.4.

**Definición 8** *Sea $R$ un anillo libre de torsión y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R$. Definimos la* serie formal generadora asociada a $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *como*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} t^n \text{ donde } A_0 = 1.$$

*Claramente $f(t) \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[t]]$.*

**Lema 5** *Sea $R$ un anillo libre de torsión (conmutativo con unidad) y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R$. Entonces existe un grupo formal $\mathcal{F}/(R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ tal que $B_n^G = A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
*Además $Exp_F(t) = \dfrac{t}{f(t)} \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[t]]$ donde $f$ es la serie formal generadora de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Dem.** Consideremos $f$ la serie formal generadora asociada a $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y definamos $E(t) := \dfrac{t}{f(t)}$. Por Lema 2 $E(t) \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[t]]$. Por Lema 4 existe un grupo formal $\mathcal{F}/(R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ tal que $Exp_F(t) = E(t)$ y luego por Lema 1 $Log_F(t) \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[t]]$. Siendo $F$ la regla de asignación de $\mathcal{F}$ sabemos por Proposición 2 que ella cumple $F(x, y) = Exp_F(Log_F\, x + Log_F\, y)$ luego $F(x, y) \in (R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[x, y]]$. Mediante las igualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^G}{n!} t^n = \frac{t}{Exp_F(t)} = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} t^n$$

concluimos $B_n^G = A_n$ todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

# 5. Ejemplos de números y polinomios universales de Bernoulli

En esta sección consideraremos grupos formales explícitos y calcularemos sus números y polinomios universales de Bernoulli. En algunos ejemplos comentaremos propiedades particulares. Comenzaremos con tres grupos formales clásicos donde uno de ellos tiene relación con los números y polinomios de Bernoulli, luego consideraremos la fórmula para las velocidades relativas y veremos que ella define un grupo formal. En otro ejemplo consideraremos un grupo formal que tiene relación con las integrales elípticas y veremos que sus números universales de Bernoulli son valores especiales de la serie de Eisenstein. Finalizaremos la sección aplicando el Lema 5 para mostrar que algunas familias de números clásicos son números universales de Bernoulli .

## 5.1. Ejemplos clásicos

### 5.1.1. Grupo aditivo

En este ejemplo mostraremos que las potencias de la variable $x$ son polinomios universales de Bernoulli.

El grupo formal aditivo sobre $\mathbb{Z}$ se denota $\mathcal{G}_a$ y se define mediante $G_a(x,y) = x + y$. Su nombre se debe a que la operación del grupo asociado[5] a $\mathcal{G}_a/R$ es precisamente la suma del anillo, es decir $x \oplus_{G_a} y = G_a(x,y) = x + y$.

Mediante la igualdad $\frac{d}{dx}G_a(0,t) = 1$ tenemos que el diferencial invariante normalizado es

$$w(t) = 1\, dt$$

integrando lo anterior tenemos el logaritmo formal

$$Log_{G_a}(t) = \int w(t) = t$$

luego la exponencial formal es

$$Exp_{G_a}(t) = t.$$

Si denotamos por $Exp_F$ a tal exponencial formal tenemos

$$\frac{te^{xt}}{Exp_F(t)} = e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}$$

y al comparar esto con la definición (7) concluimos que los polinomios universales de Bernoulli son las potencias mencionadas más arriba, es decir

$$B_n^G(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

[5]ver observación (2)

Ya que $B_n^G = B_n^G(0)$ los números universales de Bernoulli son

$$B_n^G = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

### 5.1.2. Grupo formal multiplicativo

Este ejemplo muestra que los números y polinomios de Bernoulli son un caso especial de lo que en este trabajo llamamos números y polinomios universales de Bernoulli.

El grupo formal muliplicativo sobre $R$ se denota $\mathcal{G}_m$ y se define mediante $G_m(x,y) = x+y+xy = (1+x)(1+y)-1$. Su nombre se debe al considerar un anillo local y completo $R$ con ideal maximal $M$, pues entonces $(M, \oplus_{G_m}) \cong (1+M, \cdot)$ donde $\cdot$ es el producto del anillo $R$ (ver observación (2)).

Mediante la igualdad $\frac{d}{dx}G_m(0,t) = 1+t$, Proposición 1 y $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ tenemos que el diferencial invariante normalizado es

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \, dt$$

que al integrar nos da la serie del logaritmo formal

$$Log_{G_m}(t) = \int w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Notemos que $Log_{G_m}(t)$ es la serie de $ln(t+1)$. Ocupando la identidad $Log_F \circ Exp_F(t) = t$ para todo $F$ grupo formal deducimos

$$Exp_{G_m}(t) = e^t - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Al ver Definición 5 y Definición 7 deducimos que para este grupo formal los polinomios y números universales de Bernoulli coinciden con los polinomios y números clásicos de Bernoulli. En otras palabras

$$\begin{aligned} B_n^G(x) &= B_n(x) \\ B_n^G &= B_n \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_*$.

### 5.1.3. Grupo formal multiplicativo generalizado

$F(x,y) = x+y+\mu xy$ es un grupo formal sobre el anillo $\mathbb{Z}[\mu]$ donde $\mu$ es un elemento que satisface $n\mu \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ya que $F_x(0,t) = 1 + \mu t$ tenemos $\frac{1}{F_x(0,t)} = \frac{1}{1+\mu t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mu)^n t^n \in \mathbb{Z}[\mu][[t]]$. Entonces el diferencial invariante normalizado es

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\mu)^n t^n \, dt.$$

Integrando la serie anterior obtenemos el logaritmo formal

$$Log_F(t) = \int w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mu)^{n-1}}{n} t^n \quad \in \mathbb{Q}[\mu][[t]].$$

Ocupando la serie de $ln(1+t)$ podemos escribir el logaritmo formal anterior en términos de una función conocida. Sabemos $ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ entonces $ln(1+\mu t) = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mu)^{n-1}}{n} t^n = \mu Log_F(t)$, concluimos

$$Log_F(t) = \frac{1}{\mu} ln(1+\mu t).$$

Ocupando la identidad $Log_F \circ Exp_F(t) = t$ deducimos

$$Exp_F(t) = \frac{1}{\mu}(e^{\mu t} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^{n-1}}{n!} t^n \quad \in \mathbb{Q}[\mu][[t]].$$

Consideremos ahora

$$\frac{te^{xt}}{Exp_F(t)} = \frac{\mu te^{xt}}{e^{\mu t} - 1} = \frac{\mu te^{\frac{x}{\mu}\mu t}}{e^{\mu t} - 1}.$$

Recordando la Definición 5 tenemos

$$\frac{\mu te^{\frac{x}{\mu}\mu t}}{e^{\mu t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\frac{(\mu t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n B_n\left(\frac{x}{\mu}\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Usando estas igualdades y Definición 7 obtenemos

$$B_n^G(x) = \mu^n B_n\left(\frac{x}{\mu}\right) \qquad n \in \mathbb{N}_*.$$

Notar que esta igualdad muestra que $B_n^G(x)$ es un polinomio homogéneo en las variables $x$ y $\mu$ de grado $n$.

Considerando la última igualdad y $B_n^G = B_n^G(0)$ concluimos

$$B_n^G = \mu^n B_n \quad n \in \mathbb{N}_*.$$

**Observación 4** *Podemos ver que $B_{2n+1}^G = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por Proposición 16. Notar $d_2 = \mu$ por Proposición 18.*

## 5.2. Grupo formal asociado a la composición de velocidades

En el contexto de la teoría de la relatividad existe una fórmula para calcular la composición de velocidades. En esta sección mostraremos que tal expresión es un grupo formal, calcularemos sus números y polinomios universales de Bernoulli y comentaremos algunas propiedades particulares. Primero veremos un caso especial ($c = 1$) en más detalle y luego diremos algo más sobre el caso general.

La composición de velocidades es el cambio en la velocidad de un cuerpo al ser medida en diferentes sistemas de referencia inerciales.
La fórmula para calcular la composición de velocidades en la relatividad especial es

$$\dot{v} = \frac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}} \tag{9}$$

donde $\dot{v}$ es la velocidad del cuerpo con respecto al sistema $\dot{S}$, $u$ la velocidad con la que el sistema $\dot{S}$ se aleja del sistema "en reposo" S, $v$ es la velocidad del cuerpo medida en S y $c$ es la velocidad de la luz (ver [9]).

**Proposición 19**

*La serie de potencias* $F(x,y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$ *define un grupo formal sobre* $\mathbb{Z}$.

**Dem.**

Debemos probar

a) $F(x,y) \in \mathbb{Z}[[x,y]]$.

b) $F(x,y) = x + y + \sum_{i,j \in \mathbb{N}} c_{ij} x^i y^j$.

c) $F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$.

d) $F(x,y) = F(y,x)$.

Primero escribimos $F$ como serie formal

$$F(x,y) = \frac{x+y}{1+xy} = (x+y)\sum_{n=0}^{\infty}(-xy)^n = (x+y)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n y^n$$

con lo cual se prueba *a*), *b*) y *d*).

Por otro lado recordamos que la función trigonométrica hiperbólica tanh se define como $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Sabemos que satisface $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$. Luego tenemos las siguientes expresiones equivalentes

$$\begin{aligned} F(\tanh x, \tanh y) &= \tanh(x+y) \\ F(x,y) &= \tanh(\operatorname{artanh} x + \operatorname{artanh} y) \qquad (10) \\ \operatorname{artanh} F(x,y) &= \operatorname{artanh} x + \operatorname{artanh} y. \qquad (11) \end{aligned}$$

Ocupando las ecuaciones (10) y (11) tenemos

$$\begin{aligned}F(F(x,y),z) &= \tanh(\operatorname{artanh} F(x,y) + \operatorname{artanh} z)\\ &= \tanh(\operatorname{artanh} x + \operatorname{artanh} y + \operatorname{artanh} z)\\ &= \tanh(\operatorname{artanh} x + \operatorname{artanh} F(y,z))\\ &= F(x, F(y,z)).\end{aligned}$$

FACULTAD DE CIENCIAS BIBLIOTECA CENTRAL U. DE CHILE

Esto prueba $c$) terminando la demostración. □

**Proposición 20**

$$Log_F(t) = \operatorname{artanh}(t)$$
$$Exp_F(t) = \tanh(t).$$

**Dem.** Considerando la ecuación (11) y la serie de $\operatorname{artanh}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} t^{2n+1}$ por Proposición 4 tenemos que el logaritmo formal es artanh y su inversa tanh es la exponencial formal. □

Notar que calculando el diferencial invariante normalizado obtenemos, obviamente, el mismo resultado. Considerando $F_x(0,t) = 1 - t^2$ tenemos $\frac{1}{F_x(0,t)} = \frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}$. Esto muestra que el diferencial invariante normalizado es $w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\, dt$ que al integrar nos da el logaritmo formal

$$Log_F(t) = \int \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} t^{2n+1} = \operatorname{artanh}(t),$$

luego $Exp_F = \tanh$. □

**Corolario 4** *Denotemos $Log_{G_m}$ el logaritmo formal de $\mathcal{G}_m/\mathbb{Z}$, el grupo multiplicativo visto anteriormente. Entonces*

$$Log_F(t) = \frac{1}{2}(Log_{G_m}(t) - Log_{G_m}(-t)).$$

**Dem.** Se sabe que

$$\operatorname{artanh}(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).[6]$$

Ocupando este resultado y recordando $Log_{G_m}(t) = \ln(1+t)$ y $Log_F(t) = \operatorname{artanh}(t)$ tenemos

$$\begin{aligned}Log_F(t) &= \operatorname{artanh}(t)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\ln(1+t) - \ln(1-t))\\ &= \frac{1}{2}(Log_{G_m}(t) - Log_{G_m}(-t)).\end{aligned}$$

[6] Una forma de probar esta igualdad es primero mostrar $\frac{d}{dt}\operatorname{artanh}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ entonces $\operatorname{artanh}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + a$ donde $a$ una constante. Al evaluar $t = 0$ se concluye $a = 0$.

$\square$

Antes de continuar nuestro estudio con los polinomios universales damos una aplicación de lo anterior mostrando un resultado de teoría de números que se obtiene fácilmente de la teoría de los grupos formales en este caso particular.

**Corolario 5** *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\prod_{\substack{p-1|2n \\ p\neq 2 \\ p\,primo}} p \quad \textit{divide a} \quad 2^{2n}-1.$$

**Dem.** Consideremos la serie formal de tanh

$$Exp_F(t) = \tanh(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)2^{2n-1}B_{2n}}{n} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Ocupando la Proposición 3 obtenemos

$$\frac{(2^{2n}-1)2^{2n-1}B_{2n}}{n} \in \mathbb{Z}$$

lo que implica

$$(2^{2n}-1)2^{2n-1}B_{2n} \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, por Teorema 4 sabemos que el denominador de $B_{2n}$ es $\prod_{\substack{p-1|2n \\ p\,primo}} p$ . Entonces ocupando lo anterior tenemos

$$\prod_{\substack{p-1|2n \\ p\,primo}} p \quad \text{divide a} \quad (2^{2n}-1)2^{2n-1}$$

$$\prod_{\substack{p-1|2n \\ p\neq 2 \\ p\,primo}} p \quad \text{divide a} \quad 2^{2n}-1.$$

$\square$

Volvamos ahora al grupo formal definido en Proposición 19. En las siguientes proposiciones calculamos los números y polinomios universales de Bernoulli asociados a este grupo formal.

**Proposición 21** *Los números universales de Bernoulli asociados a este grupo formal son*

$$B_n^G = \begin{cases} 0 & n \textit{ impar} \\ 2^n B_n & n \textit{ par.} \end{cases}$$

**Dem.** Ya que $Exp_F$ es función impar, por Proposición 17 tenemos $B_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Para probar $B_{2n} = 2^{2n} B_{2n}$ consideremos las igualdades

$$t \coth(t) = \frac{t}{\tanh(t)} = \frac{t}{Exp_F(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}^G}{(2n)!} t^{2n}. \tag{12}$$

La última igualdad es exactamente la definición de los números universales de Bernoulli. Ahora bien, la serie formal de coth es

$$\coth(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n-1}$$

por lo que las igualdades de la ecuación (12) implican

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}^G}{(2n)!} t^{2n}.$$

Comparando los coeficientes de ambas series concluimos $B_{2n}^G = 2^{2n} B_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}_*$. □

Los primeros números universales de Bernoulli para este grupo formal son

$$\begin{array}{lll} B_0^G = 1 & B_6^G = \dfrac{32}{21} & B_{12}^G = \dfrac{-1415168}{1365} \\ B_2^G = \dfrac{2}{3} & B_8^G = \dfrac{-128}{15} & B_{14}^G = \dfrac{57344}{3} \\ B_4^G = \dfrac{-8}{15} & B_{10}^G = \dfrac{2560}{33} & B_{16}^G = \dfrac{-118521856}{255} \end{array}$$

**Proposición 22** *Para este grupo formal, los polinomios universales de Bernoulli satisfacen*

$$B_n^G(x) = 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right) + nx^{n-1} \qquad \textit{todo } n \in \mathbb{N}_*.$$

**Dem.** Por Proposición 21 y Proposición 8 se concluye $B_n^G = 2^n B_n$ para todo $n \in (\mathbb{N}_* \setminus \{1\})$. En el caso $n = 1$ tenemos $B_1^G = 0$. Ocupando la Proposición 10 se tiene

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k^G}{2^k} x^{n-k} - \frac{n}{2} x^{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora haremos el cambio de variable $x$ por $\frac{x}{2}$ en la ecuación anterior y, usando Proposición 7 nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} B_n\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k^G}{2^k} \frac{x^{n-k}}{2^{n-k}} - \frac{n}{2} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^G x^{n-k} - nx^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} (B_n^G(x) - nx^{n-1}). \end{aligned}$$

Esta última igualdad es equivalente a lo propuesto.

$\square$

Volviendo al caso general de la ecuación (9), es decir $c \in R^*$ cualquiera, se tienen los siguientes resultados

a) $\mathcal{F}_c$ es un grupo formal sobre $R$ definido por $F_c(x,y) = \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{c^2}}$.

b) $w(t) = \dfrac{1}{1-\frac{t^2}{c^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{c^{2n}}\, dt$.

c) $Log_{F_c}(t) = c \operatorname{artanh}(\frac{t}{c})$.

d) $Exp_{F_c}(t) = c \tanh(\frac{t}{c})$.

e) $B_n^G = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ \left(\frac{2}{c}\right)^n B_n & n \text{ par} \end{cases}$

f) $B_n^G(x) = \left(\frac{2}{c}\right)^n B_n(\frac{cx}{2}) + \frac{n}{c} x^{n-1}$.

Todas estas identidades se obtienen de una manera similar a lo hecho en el caso $c = 1$ descrito en detalle más arriba.

Un caso particular interesante es $c = i$ donde $i$ es la unidad imaginaria. El grupo formal obtenido tiene relación con las identidades trigonómetricas

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}. \tag{13}$$

Los elementos asociados a este grupo formal son

a) $F_i(x,y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$.

b) $w(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt$.

c) $Log_{F_i}(t) = \arctan(t)$.

d) $Exp_{F_i}(t) = \tan(t)$.

e) $B_n^G = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ (2i)^n B_n & n \text{ par.} \end{cases}$

f) $B_n^G(x) = (-2i)^n B_n(\frac{ix}{2}) - inx^{n-1}$.

Notar que las identidades trigonométricas de la ecuación (13) son el equivalente a

$$Exp_F(x+y) = F(Exp_F\, x, Exp_F\, y) \qquad Log_F F(x,y) = Log_F\, x + Log_F\, y.$$

Una particularidad del caso $c = i$ es que sus números universales de Bernoulli son no positivos excepto $B_1^G = 1$. Esto puede deducirse de la expresión $e)$ anterior y de la ecuación (6) del Teorema (5).

## 5.3. Grupo formal asociado a la integral elíptica

Las integrales elípticas aparecen al calcular la longitud de arco de una elipse. Los primeros estudios fueron hechos por los matemáticos Fagnano y Euler.

En este ejemplo consideraremos una fórmula de adición de las integrales elípticas y mostraremos que dicha fórmula define un grupo formal. El logaritmo formal correspondiente es la integral elíptica incompleta del primer tipo, y su exponencial formal es la función elíptica jacobiana *sn*; de esta forma exhibiremos expansiones en serie de potencias de un tipo de integral elíptica y de la función *sn*. Además calcularemos sus números universales de Bernoulli y mostraremos que son valores especiales de cierta forma modular bastante conocida llamada serie de Eisenstein.

**Definición 9** *Sea* $k \in (0,1)$ *la excentricidad de una elipse y* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *el ángulo que la parametriza. Definimos la* integral elíptica incompleta del primer tipo (tipo Legendre)

$$E(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \int_0^{\sin\theta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

Sean $\theta, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y $k \in (0,1)$ fijo. La regla de adición de las integrales elípticas incompletas del primer tipo es

$$E(\theta, k) + E(\phi, k) = E(\psi, k)$$

donde

$$\sin\psi = \frac{\sin\theta\ \cos\phi\ \Delta(\phi) + \sin\phi\ \cos\theta\ \Delta(\theta)}{1-k^2\sin^2\theta\sin^2\phi} \quad \text{y} \quad \Delta(\theta) = \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$$

(ver por ejemplo [10], capítulo 19.11).

En otras palabras, si sustituimos $\sin\theta$ por $x$ y $\sin\phi$ por $y$, tenemos la siguiente propiedad

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \int_0^{F_k(x,y)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \tag{14}$$

donde

$$F_k(x,y) = \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2} + y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}. \tag{15}$$

**Proposición 23** $F_k$ *define un grupo formal sobre* $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right]$.

**Dem.** Probaremos

a) $F_k(x,y) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, k^2][[x,y]]$.

b) $F_k(x,y) = x + y + \sum\limits_{i,j\in\mathbb{N}} c_{ij}x^iy^j$.

c) $F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$.

d) $F(x,y) = F(y,x)$.

Primero probaremos $\sqrt{1-x} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][[x]]$. Consideremos la serie formal de $\sqrt{1-x}$

$$\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{-1}{2})_n}{n!} x^n \tag{16}$$

donde $()_n$ es el símbolo de Polchhamer que se define como

$$(m)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \prod_{j=0}^{n-1}(m+j) & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Para nuestro caso, con $n \neq 0$, tenemos $\left(\frac{-1}{2}\right)_n = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2} \cdots \frac{2n-3}{2} = -\frac{(2n)!}{n!\;2^{2n}\;(2n-1)}$ luego el coeficiente de $x^n$ en la serie formal de $\sqrt{1-x}$ es $\frac{(\frac{-1}{2})_n}{n!} = -\frac{(2n)!}{n!^2\;2^{2n}\;(2n-1)}$.

Gracias a las siguientes igualdades

$$\frac{(2n)!}{n!^2\;(2n-1)} = \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n} = 2\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}\right]$$

deducimos que $\frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)}$ es un número entero, luego $\frac{(\frac{-1}{2})_n}{n!} = -\frac{(2n)!}{n!^2\;2^{2n}\;(2n-1)} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

De esta forma concluímos que la serie formal de $\sqrt{1-x}$ pertenece a $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][[x]]$.

De esto último se deduce que las series formales de $\sqrt{1-x^2}$ y de $\sqrt{1-k^2x^2}$ pertenecen al anillo $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right][[x]]$. Añadiendo la igualdad formal $\frac{1}{1-k^2x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n}x^{2n}y^{2n} \in \mathbb{Z}[k^2][[x,y]]$ es claro que

$$F_k(x,y) = \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2} + y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right][[x,y]].$$

Esto prueba a).

Multiplicando las series formales que representan a $\frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}{1-k^2x^2y^2}$ y $\frac{y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}$ se obtienen los primeros términos de $F_k$

$$\begin{aligned} F_k(x,y) = x + y - \frac{k^2+1}{2}xy^2 - \frac{k^2+1}{2}x^2y - \frac{(k^2-1)^2}{8}xy^4 - \frac{(k^2-1)^2}{8}x^4y + k^2x^3y^2 + k^2x^2y^3 + \\ \frac{-k^6+k^4+k^2-1}{16}x^6y + \frac{-k^6+k^4+k^2-1}{16}xy^6 - \frac{k^2+1}{2}x^3y^4 - \frac{k^2+1}{2}x^4y^3 + \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

esto prueba b).

Para ver la propiedad asociativa de $F_k$ consideremos la serie formal de $\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right][[t]]$. Como su término constante es 1 por Lema 2 tenemos $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \in$

$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right][[t]]$ y su término constante tambien es 1. Llamamos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n} := \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \in$ $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right][[t]]$ con $a_0 = 1$ y definimos

$$L(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

L es la integración término a término de la serie $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$ entonces la serie de $L(x)$ tiene la forma

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} x^{2n+1} \text{ con } a_{2n} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right] \text{ y } a_0 = 1.$$

Notar $L(x) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right] \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}[[x]]$. Luego por Lema 3 sabemos que existe $e(x) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right] \bigotimes \mathbb{Q}[[x]]$ tal que $e \circ L(x) = L \circ e(x) = x$, además

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ con } b_{2n+1} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right] \text{ y } b_1 = 1.$$

Por otro lado, la ecuación (14) es equivalente a

$$L(x) + L(y) = L(F_k(x,y))$$

y aplicando la serie $e$ a esta última ecuación obtenemos

$$e(L(x) + L(y)) = F_k(x,y),$$

de esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} F_k(F_k(x,y),z) &= e(L(F_k(x,y)) + L(z)) \\ &= e(L(x) + L(y) + L(z)) \\ &= e(L(x) + L(F_k(y,z))) \\ &= F_k(x, F_k(y,z)). \end{aligned}$$

Esto prueba *c*). De la ecuación (15) es claro *d*). □

Ahora mostraremos la forma de la expansión en serie de potencias de la integral elíptica incompleta de primer tipo. Para esto definiremos una integral elíptica incompleta del primer tipo similar a la definida anteriormente.

**Definición 10** *Sea $k \in (0,1)$ la excentricidad de una elipse y $x \in [0,1]$. Definimos la integral elíptica incompleta del primer tipo (tipo Jacobi)*

$$E(x;k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$

**Observación 5** *Notar que la relación entre ambas integrales elípticas incompletas del primer tipo (Legendre y Jacobi) es $E(\theta;k) = E(\arcsin\theta, k)$ para $\theta$ y $k$ tal como en Definición (9).*

**Proposición 24** *El logaritmo formal es la integral elíptica incompleta del primer tipo (tipo Jacobi), es decir*

$$Log_{F_k}(t) = E(t;k).$$

*Además* $Log_{F_k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} t^{2n+1}$ *donde* $a_{2n} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right]$ *y* $a_0 = 1$.

**Dem.** Notar $E(t;k) = L(t)$. En la demostración de Proposición 23 mostramos

$$L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} t^{2n+1} \qquad \text{con } a_{2n} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right] \text{ y } a_0 = 1$$

y que $L$ cumple la relación $L(F_k(x,y)) = L(x) + L(y)$. Luego, por Proposición 4 deducimos $Log_{F_k}(t) = L(t) = E(t;k)$. □

Por completitud mostramos acá que también se puede escribir el logaritmo formal en función de los polinomios de Legendre. Comenzamos con una definición.

**Definición 11** *Los polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_*}$ se definen vía la igualdad*

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n.$$

**Proposición 25**

$$Log_{F_k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{2n+1} P_n\left(\frac{k^2+1}{2k}\right) t^{2n+1}$$

*donde $P_n$ es el n-ésimo polinomio de Legendre.*
*Además, siendo $w$ el diferencial invariante normalizado de $\mathcal{F}/\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right]$, se tiene*

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n P_n\left(\frac{k^2+1}{2k}\right) t^{2n}\, dt.$$

**Dem.**
Para demostrar la segunda ecuación de la proposición observamos que $\frac{d}{dx}F_k(0,t) = \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}$ luego $\frac{1}{\frac{d}{dx}F_k(0,t)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$. Entonces

$$\begin{aligned} w(t) = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} &= \frac{dt}{\sqrt{k^2t^4 - (k^2+1)t^2 + 1}} = \frac{dt}{\sqrt{(kt^2)^2 - 2(\frac{k^2+1}{2k})(kt^2) + 1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{k^2+1}{2k}\right) (kt^2)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} k^n P_n\left(\frac{k^2+1}{2k}\right) t^{2n}\, dt. \end{aligned}$$

Ya que $Log_F$ es la integral de $w$ concluimos

$$Log_{F_k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{2n+1} P_n\left(\frac{k^2+1}{2k}\right) t^{2n+1}.$$

$\square$

Ahora calcularemos explícitamente los coeficientes de la serie del logaritmo formal, esto lo haremos calculando la serie del diferencial invariante normalizado y luego integraremos término a término. Usando la serie formal de la ecuación 16 tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)_j\left(\frac{-1}{2}\right)_{n-j}k^{2j}}{j!\,(n-j)!}\right)t^{2n}}.$$

Entonces buscamos la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, k^2][[t]]$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n}.$$

Sean $n, j \in \mathbb{N}_*$, $j \leq n$. Definimos $l_{n,j} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, k^2]$ como

$$l_{n,j} := \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)_j \left(\frac{-1}{2}\right)_{n-j} k^{2j}}{j!\,(n-j)!}.$$

De la igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} l_{n,j}\right)t^{2n} &= 1\\
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(a_{2j}\sum_{m=0}^{n-j} l_{n-j,m}\right)\right)t^{2n} &= 1
\end{aligned}$$

y ocupando $l_{0,0} = 1$ concluimos

$$a_{2n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ -\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(a_{2j}\sum\limits_{m=0}^{n-j} l_{n-j,m}\right) & \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}. \tag{18}$$

Los primeros coeficientes de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n}$ son

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_2 &= -\left(a_0\sum_{j=0}^{1} l_{1,j}\right) = \frac{k^2+1}{2}\\
a_4 &= -\sum_{j=0}^{1}\left(a_{2j}\sum_{m=0}^{2-j} l_{2-j,m}\right) = \frac{3k^4+2k^2+3}{8}\\
a_6 &= -\sum_{j=0}^{2}\left(a_{2j}\sum_{m=0}^{3-j} l_{3-j,m}\right) = \frac{5k^6+3k^4+3k^2+5}{16}
\end{aligned}$$

Como $w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, t^{2n}\, dt$ tenemos finalmente la serie del logaritmo formal

$$Log_{F_k}(t) = \int w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n+1} t^{2n+1} \in \mathbb{Q}[k^2][[t]],\ a_{2n} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right] \tag{19}$$

donde los coeficientes $a_{2n}$ se calculan mediante la ecuación (18).

Claramente los primeros sumandos del logaritmo formal son

$$Log_{F_k}(t) = t + \frac{k^2+1}{6}t^3 + \frac{3k^4+2k^2+3}{40}t^5 + \frac{5k^6+5k^4+3k^2+5}{112}t^7 + ...$$

Ahora vamos en busca de la serie de la exponencial formal asociada a este grupo formal, para eso primero definimos un tipo de función elíptica jacobiana.

**Definición 12** *La función elíptica jacobiana sn se define como la inversa de la integral elíptica incompleta del primer tipo (tipo Jacobi). En otras palabras, si*

$$u = \int_0^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = E(\theta; k),$$

*entonces la función elíptica jacobiana sn es tal que*

$$sn\, u = \theta.$$

La siguiente proposición muestra la forma de la expansión en serie de potencias de la función elíptica jacobiana $sn$.

**Proposición 26** *La exponencial formal es la función elíptica jacobiana sn.*
*Es decir*

$$Exp_{F_k}(t) = sn(t).$$

*Además* $Exp_{F_k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+1}$ *donde* $b_{2n+1} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right]$ *y* $b_1 = 1$.

**Dem.** Ocupando la definición (12) $sn(u)$ es la función inversa de $E(u; k)$, que a su vez es igual a $Log_{F_k}(u)$, por lo tanto $Exp_{F_k}(u) = sn(u)$. □

Ahora calcularemos explícitamente los coeficientes de la serie de la exponencial formal, para esto ocuparemos el teorema de la inversión de Lagrange (conocido también como la fórmula Bürmann-Lagrange). Para esto primero definiremos algunas notaciones sobre series. Definimos el operador $[t^n]$ como aquel que extrae el coeficiente que acompaña a $t^n$ en una serie de potencias en $t$, es decir $[t^n] \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_n$, luego para $a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ definimos $a_m^n = [t^m]a(t)^n$.

**Lema 6** *La exponencial formal de* $F_k/\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},k^2\right]$ *es*

$$Exp_{F_k}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_{2n}^{2n+1}}{2n+1}t^{2n+1}$$

*donde*

$$\begin{aligned}\phi_0^n &= 1 \quad ,n\in\mathbb{N}\\ \phi_{2m}^{2n+1} &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(2(n+1)j-m)\ \phi_{2j}\ \phi_{2m-2j}^{2n+1} \quad ;n,m\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{20}$$

*y* $\phi_{2j}$ *son los coeficientes de la serie* $\phi(t)\in\mathbb{Q}[k^2][[t]]$ *tal que* $Log_{F_k}(t)=\dfrac{t}{\phi(t)}$.

**Dem.**
Primero calcularemos la serie $\phi$ tal que

$$Log_{F_k}(t)=\frac{t}{\phi(t)}. \tag{21}$$

De la ecuación anterior y ocupando Proposición 24 tenemos

$$\phi(t)=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{2n+1}t^{2n}}.$$

Por la misma Proposición 24 sabemos $Log_{F_k}(t)\in\mathbb{Q}[k^2][[t]]$ con $a_0=1$ y ocupando Lema 2 concluímos $\phi(t)\in\mathbb{Q}[k^2][[t]]$. Además sabemos que $Log_{F_k}$ es una serie impar, luego $\phi$ es una serie par de la forma

$$\phi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{2n}t^{2n}. \tag{22}$$

De la ecuación (21) tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_{2n}t^{2n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{2n+1}t^{2n}=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\phi_{2j}\frac{a_{2n-2j}}{2n-2j+1}\right)t^{2n}=1$$

y ya que $a_0=1$ podemos resumir el valor de $\phi_{2n}$

$$\phi_{2n}=\begin{cases}1 & n=0\\ -\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{\phi_{2j}\ a_{2n-2j}}{2n-2j+1} & n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{23}$$

Claramente los primeros coeficientes de la serie $\phi$ son

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= 1 \\
\phi_2 &= -\frac{k^2+1}{6} \\
\phi_4 &= \frac{-17k^4+2k^2-17}{360} \\
\phi_6 &= \frac{-367k^6+15k^4+15k^2-367}{15120}.
\end{aligned}
$$

De esta forma terminamos con el cálculo de la serie $\phi$.

Ocupando el teorema de la inversión de Lagrange sabemos que los coeficientes de la exponencial formal están completamente determinados por los coeficientes de $\phi$, a saber

$$[t^n]Exp_{F_K}(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\,\phi(t)^n \qquad \text{todo } n \in \mathbb{N}_*. \tag{24}$$

De Proposición 26 sabemos que $Exp_{F_k}$ es una serie impar, por otro lado la ecuación (21) muestra que la serie $\phi$ es par, entonces los coeficientes no nulos de la ecuación (24) son

$$[t^{2n+1}]Exp_{F_k}(t) = \frac{1}{2n+1}[t^{2n}](\phi(t)^{2n+1}) \qquad \text{todo } n \in \mathbb{N}_*. \tag{25}$$

En vista de la ecuación anterior nos interesa calcular $[t^{2n}]\phi(t)^{2n+1}$.
Sea $a_0 \in R^*$, sabemos (ver [6], pág. 17)

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, t^j\right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, t^j \text{ donde } c_0 = a_0^n \quad \text{y} \quad c_m = \frac{1}{m\, a_0}\sum_{j=1}^{m}((n+1)j-m)\, a_j\, c_{m-j}. \tag{26}$$

Recordando las definiciones anteriores al lema definimos $\phi_m^n := [t^m]\phi(t)^n$, esta notación es compatible con los coeficientes $\phi_m$ de la ecuación (22) vía $\phi_m = \phi_m^1$. Por la identidad de la ecuación (26) resulta

$$\phi_m^n = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}((n+1)j-m)\,\phi_j\,\phi_{m-j}^n.$$

En particular

$$
\begin{aligned}
\phi_{2m}^n &= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{2m}((n+1)j-2m)\,\phi_j\,\phi_{2m-j}^n \\
&= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}2((n+1)j-m)\,\phi_{2j}\,\phi_{2m-2j}^n \\
&= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}((n+1)j-m)\,\phi_{2j}\,\phi_{2m-2j}^n.
\end{aligned}
$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}
\phi_0^n &= 1 \quad ,n \in \mathbb{N} \\
\phi_{2m}^{2n+1} &= \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(2(n+1)j - m)\,\phi_{2j}\,\phi_{2m-2j}^{2n+1} \quad ;n,m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Concluyendo

$$Exp_{F_k}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_{2n}^{2n+1}}{2n+1} t^{2n+1}$$

y $\phi_{2n}^{2n+1}$ se calcula recursivamente con la fórmula (27). Esto termina el cálculo de la exponencial formal para $F_k$. □

**Observación 6** *Con respecto a los coeficientes del numerador de la exponencial formal por Proposición 3 se tiene* $(2n)!\phi_{2n}^{2n+1} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, k^2\right]$.

Considerando los cálculos

$$\begin{aligned}
\phi_2^3 &= -\frac{k^2+1}{2} \\
\phi_2^5 &= -\frac{5(k^2+1)}{6} \\
\phi_4^5 &= \frac{k^4+14k^2+1}{24} \\
\phi_2^7 &= -\frac{7(k^2+1)}{6} \\
\phi_4^7 &= \frac{7(13k^4+62k^2+13)}{360} \\
\phi_6^7 &= -\frac{k^6+135k^4+135k^2+1}{720}
\end{aligned}$$

claramente los primeros sumandos de la exponencial formal son

$$Exp_{F_k}(t) = t - \frac{k^2+1}{3!}t^3 + \frac{k^4+14k^2+1}{5!}t^5 - \frac{k^6+135k^4+135k^2+1}{7!}t^7 + \ldots \tag{28}$$

Ahora calcularemos los números universales de Bernoulli en este caso.
Ya que $Exp_{F_k}$ es función impar por Proposición 17 deducimos $B_{2n-1}^G = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
La función recíproca de $sn$ se denota $ns$, es decir $ns(t,k) = \dfrac{1}{sn(t,k)}$. En nuestro estudio $k$ es constante entonces escribiremos $sn(t)$ en vez de $sn(t,k)$ y escribiremos $ns(t)$ en vez de $ns(t,k)$. Con respecto a los números de índice par notamos que conocerlos es equivalente a conocer la serie de potencias de $ns$ ya que

$$t\,ns(t) = \frac{t}{sn(t)} = \frac{t}{Exp_{F_k}(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}^G \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \tag{29}$$

Sea $z \in \mathbb{C}$. En [10], capítulo 22.11, se muestra que la función $ns(z)$ puede escribirse de la siguiente manera

$$ns(z) = \frac{\pi}{2K}\csc(\zeta) + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin((2n+1)\zeta)}{1-q^{2n+1}} \tag{30}$$

donde $\zeta$ número complejo tal que $q\,e^{|\Im(\zeta)|} < 1$ y

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}\\
\zeta &= \frac{\pi}{2K}z\\
k_2 &= \sqrt{1-k^2}\\
K_2 &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k_2^2t^2}}\\
q &= e^{\frac{-\pi K_2}{K}}.
\end{aligned}$$

Para nuestro caso $k$ es fijo entonces $k_2, K, K_2$ y $q$ son constantes. De la ecuación (30) vemos que conocer la serie de potencias de $z$ $ns(z)$ se reduce a conocer la serie de potencia de $\csc(\zeta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin((2n+1)\zeta)}{1-q^{2n+1}}$.

**Lema 7**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin((2n+1)\zeta)}{1-q^{2n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(2n+1)^{2m+1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m+1}z^{2m+1}, \tag{31}$$

*para* $\|z\| < 2K_2$.

**Dem.**
Considerando la expansión en serie de potencias de la función trigonométrica sin escribiremos una serie de potencias de la serie que está a la izquierda de la ecuación (31) con respecto a la variable $z$. En la ecuación (30) notar que la condición $q\,e^{|\Im(\zeta)|} < 1$ es equivalente a $|\Im(\zeta)| < \frac{\pi K_2}{K}$ lo que a su vez es equivalente a $|\Im(z)| < 2K_2$. La constante $q$ cumple $0 < q < 1$ y como $k \in (0,1)$ se tiene $\frac{\pi}{2} < K, K_2 < \infty$. Para más información ver [10], capítulo 19.
Al reemplazar la serie de potencias de la función sin en la serie de la izquierda de la ecuación (31) tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin((2n+1)\zeta)}{1-q^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(2n+1)^{2m+1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m+1}z^{2m+1}. \tag{32}$$

Ahora mostraremos que en esta serie doble podemos intercambiar el orden de las sumas para todo complejo $z$ tal que $\|z\| < 2K_2$. Para demostrarlo ocuparemos Teorema 1.

Definimos $c := \frac{\pi}{2K}$, demostraremos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$ la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \frac{(-1)^m (2n+1)^{2m+1} c^{2m+1}}{(2m+1)!} z^{2m+1} \tag{33}$$

converge para todos los valores complejos de $z$ en $\mathbb{C}$. Luego demostraremos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \frac{(-1)^m (2n+1)^{2m+1} c^{2m+1}}{(2m+1)!} z^{2m+1} \tag{34}$$

converge uniformemente para los valores de $z \in \mathbb{C}$ tal que $\|z\| < 2K_2$.

Para demostrar que la serie de la ecuación (33) converge consideramos el criterio del cuociente de los coeficientes para series de potencias. Tenemos

$$\left| \frac{\frac{(-1)^{m+1}(2n+1)^{2m+3}c^{2m+3}}{(2m+3)!}}{\frac{(-1)^m(2n+1)^{2m+1}c^{2m+1}}{(2m+1)!}} \right| = \frac{(2n+1)^2 c^2}{(2m+3)(2m+2)}$$

y esta última expresión converge a cero cuando $m$ crece indefinidamente. Es decir el radio de convergencia de la serie es infinito.

Por otro lado recordemos que

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

para todo $z$ en $\mathbb{C}$, entonces

$$q^{2n+1} \sin(c(2n+1)z) = \frac{q^{2n+1}}{2i} \left[ e^{ic(2n+1)z} - e^{-ic(2n+1)z} \right] = \frac{1}{2i} \left[ (e^{icz} q)^{2n+1} - \left( e^{-icz} q \right)^{2n+1} \right].$$

Por lo anterior y recordando la serie de potencias de sin, se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \frac{(-1)^m (2n+1)^{2m+1} c^{2m+1}}{(2m+1)!} z^{2m+1} \\
&= \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}} \sin(c(2n+1)z) \\
&= \frac{1}{1-q^{2n+1}} \frac{1}{2i} \left[ (e^{icz} q)^{2n+1} - \left( e^{-icz} q \right)^{2n+1} \right].
\end{aligned}$$

Ahora mostraremos que la serie de la ecuación (34) converge uniformemente ocupando el

Teorema 2. Ya que $0 < q < 1$ se tiene $\frac{1}{1-q^{2n+1}} \leq \frac{1}{1-q}$ para todo $n$ en $\mathbb{N}_*$. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\frac{(-1)^m(2n+1)^{2m+1}c^{2m+1}}{(2m+1)!}z^{2m+1}\right\| \\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{1-q^{2n+1}}\frac{1}{2i}\left[(e^{icz}q)^{2n+1}-\left(e^{-icz}q\right)^{2n+1}\right]\right\| \\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n+1}}\frac{1}{2}\left\|(e^{icz}q)^{2n+1}-\left(e^{-icz}q\right)^{2n+1}\right\| \\
\leq& \frac{1}{2(1-q)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|(e^{icz}q)^{2n+1}-\left(e^{-icz}q\right)^{2n+1}\right\| \\
\leq& \frac{1}{2(1-q)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|e^{icz}q\right\|^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\left\|e^{-icz}q\right\|^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Sea $z$ número complejo tal que $\|z\| < 2K_2$ entonces $|\Im(z)| < 2K_2$ y consideramos ahora las estimaciones

$$\|e^{\pm icz}q\| = q\|e^{\pm icz}\| = qe^{\mp c\Im(z)} = e^{\frac{-\pi K_2}{K}}e^{\frac{\mp\pi\Im(z)}{2K}} < e^{\frac{-\pi K_2}{K}}e^{\frac{\pi\|z\|}{2K}} = e^{\frac{\pi}{2K}(\|z\|-2K_2)}.$$

Entonces tenemos que las dos series anteriores son acotadas por la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(e^{\frac{\pi}{2K}(R-2K_2)})^{2n+1}$.

Como $\|z\| < 2K_2$ tenemos que $\frac{\pi}{2K}(\|z\|-2K_2) < 0$ luego $e^{\frac{\pi}{2K}(\|z\|-2K_2)} < 1$ y entonces esta serie geométrica es convergente. Por Teorema 2 concluímos que la serie de la ecuación (34) converge uniformemente.

Por teorema 1 podemos conmutar el orden de las sumas en el lado derecho de la ecuación (32) y obtener

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(2n+1)^{2m+1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m+1}z^{2m+1} \\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(2n+1)^{2m+1}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m+1}z^{2m+1}
\end{aligned} \tag{35}$$

para $\|z\| < 2K_2$. □

Consideremos ahora la serie de potencias de csc (ver [10] capítulo 4.19)

$$\csc(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(2^{2m}-2)B_{2m}}{(2m)!}\zeta^{2m-1} \qquad \zeta\in\mathbb{C}, 0<\|\zeta\|<\pi.$$

Notar que la condición $0 < \|\zeta\| < \pi$ es equivalente a $0 < \|z\| < 2K$. Ocupando la ecuación (30) y recordando la ecuación (35), obtenemos una serie de potencias para la función $z\,ns(z)$. Si $z$ es un número complejo tal que $\|z\| < \text{mín}\{2K, 2K_2\}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
z\,ns(z) &= z\left(\frac{\pi}{2K}\csc(\zeta)+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\sin((2n+1)\zeta)\right) \qquad (36)\\
&= \frac{\pi}{2K}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(2^{2m}-2)B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m-1}z^{2m}+\\
&\quad \frac{2\pi}{K}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^{2m+1}\right)z^{2m+2}\\
&= 1+\frac{\pi}{2K}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(2^{2m}-2)B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m-1}z^{2m}+\\
&\quad \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^{2m-1}\right)z^{2m}\\
&= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m}\left[(2^{2m}-2)B_{2m}+8m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^{2m-1}\right]z^{2m}.
\end{aligned}
$$

De esta manera vemos que los números buscados están relacionados con los valores de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^m \qquad (37)$$

donde $m$ es un número natural impar y $0<q<1$. Primero notemos que dicha serie es convergente. En efecto, como $0<q<1$ entonces $\frac{1}{1-q^{2n+1}}\leq\frac{1}{1-q}$ para todo $n\in\mathbb{N}_*$, luego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^m\leq\frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty}q^{2n+1}(2n+1)^m$$

y esta última serie numérica es convergente por el criterio de la razón.

Mostraremos que la serie de la ecuación (37) es un valor especial de la serie de Eisenstein normalizada. Comenzamos definiendo dicha serie.

**Definición 13** *Sea $j$ un entero par mayor que 2. Para $z\in\mathcal{H}$ definimos la* serie de Eisenstein

$$G_j(z)={\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}}'\frac{1}{(nz+m)^j}, \qquad (38)$$

*donde la ′ sobre $\Sigma$ significa que la suma es sobre todos los enteros $n,m$ ambos no nulos simultáneamente.*
*Esta función es una forma modular de peso $j$ sobre el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$. A partir de esta función podemos definir la* serie de Eisenstein normalizada

$$E_j(z)=\frac{1}{2\zeta(j)}G_j(z), \qquad (39)$$

*donde $\zeta$ denota la función Zeta de Riemann.*

**Proposición 27** *Sea $a \geq 3$ natural impar y $0 < q < 1$. Entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n)q^n - 2^a \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n)q^{2n} \tag{40}$$

$$= \frac{B_{a+1}}{2(a+1)}\left[1 - E_{a+1}(\eta) - 2^a\left(1 - E_{a+1}(2\eta)\right)\right] \tag{41}$$

*donde $\eta = \frac{K_2}{2K}i$, $\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a$ es la suma de las a potencias de los divisores de $n$ y $E_{a+1}$ es la serie de Eisenstein normalizada.*

**Dem.** Primero demostraremos la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n)x^n \tag{42}$$

donde $x$ es un número complejo con norma menor que 1 y $a$ es un entero positivo. Esta serie es un caso particular de las series de Lambert (ver [2] capítulo 1, ejercicio 14 o también ver [10], capítulo 27.7). Consideremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^a\, x^n. \tag{43}$$

Esta serie es absolutamente convergente ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{d|n} d^a x^n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{a+1}\|x\|^n$$

y el cuociente

$$\frac{(n+1)^{a+1}\|x\|^{n+1}}{n^{a+1}\|x\|^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{a+1} \|x\|$$

converge a $\|x\| < 1$ cuando $n$ crece indefinidamente. De esta forma concluímos que la serie (43) converge absolutamente y podemos reordenar sus términos. En particular tenemos la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^a x^n = \sum_{d=1}^{\infty} d^a \sum_{\substack{n>0 \\ d|n}} x^n.$$

Como $\|x^d\| < 1$, podemos usar la igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} x^{dn} = \frac{x^d}{1-x^d}$ y concluir de lo anterior que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^a x^n = \sum_{d=1}^{\infty} d^a \sum_{\substack{n>0 \\ d|n}} x^n = \sum_{d=1}^{\infty} d^a \sum_{n=1}^{\infty} x^{dn} = \sum_{d=1}^{\infty} d^a \frac{x^d}{1-x^d}.$$

Esto termina la demostración de la identidad (42).

Ahora bien,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a q^n}{1-q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(2n)^a$$

y ecuación (42) implican

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a q^n}{1-q^n} - 2^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a q^{2n}}{1-q^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) q^n - 2^a \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) q^{2n},$$

lo que demuestra la igualdad (40).

Por otro lado, un resultado standard de la teoría de formas modulares muestra que la serie de Eisenstein normalizada tiene la siguiente expansión (ver por ejemplo [8], capítulo 3.2)

$$E_j(z) = 1 - \frac{2j}{B_j} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{j-1}(n) x^n \tag{44}$$

donde $x = e^{2\pi i z}$ y $B_j$ es el j-ésimo número de Bernoulli clásico.

Ahora escribiremos las dos sumas en el lado derecho de (40) en función de la serie de Eisenstein normalizada. Primero notamos que $a+1$ es par y mayor o igual a 4 por hipótesis. Tomando $\eta = \frac{K_2}{2K} i \in \mathcal{H}$, resulta que $e^{2\pi i \eta} = e^{-\frac{\pi K_2}{K}} = q$, y por la ecuación (44) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) q^n &= \frac{B_{a+1}}{2(a+1)}(1 - E_{a+1}(\eta)) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_a(n) q^{2n} &= \frac{B_{a+1}}{2(a+1)}(1 - E_{a+1}(2\eta)). \end{aligned}$$

FACULTAD DE CIENCIAS
BIBLIOTECA CENTRAL
U. DE CHILE

Reemplazando esto en (40) tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^a = \frac{B_{a+1}}{2(a+1)} \left(1 - E_{a+1}(\eta) - 2^a (1 - E_{a+1}(2\eta))\right).$$

Esto termina la demostración de la proposición. □

El siguiente corolario muestra una expansión en serie de $sn$ donde los coeficientes son valores especiales de la serie de Eisenstein normalizada.

**Corolario 6**

$$ns(z,k) = \frac{1}{z} + \frac{k^2+1}{6} z + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{K}\right)^{2m} \frac{(-1)^{m+1} B_{2m}}{(2m)!} \left[E_{2m}(2\eta) - 2^{1-2m} E_{2m}(\eta)\right] z^{2m-1}$$

*donde* $\eta = \frac{K_2}{2K} i$ *y* $0 < \|z\| < \text{mín}\{2K, 2K_2\}$.

**Dem.**

De las ecuaciónes (28) y (29) se deduce que los dos primeros sumandos de la serie $ns(z,k)$ son $\frac{1}{z}$ y $\frac{k^2+1}{6}z$. De la ecuación (36) vemos que el coeficiente que acompaña a la potencia $z^{2m-1}$, con $m \geq 2$, en la expansión de $ns(z,k)$ es

$$\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m}\left[(2^{2m}-2)B_{2m}+8m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^{2m-1}\right].$$

En lo que sigue usamos Proposición 27 para escribir este coeficiente en término de valores especiales de la serie de Eisenstein normalizada.

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m}\left[(2^{2m}-2)B_{2m}+8m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}(2n+1)^{2m-1}\right]\\
&=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m}\left[(2^{2m}-2)B_{2m}+8m\frac{B_{2m}}{4m}\left[1-E_{2m}(\eta)-2^{2m-1}(1-E_{2m}(2\eta))\right]\right]\\
&=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m}B_{2m}\left[2^{2m}-2+2(1-E_{2m}(\eta))-2^{2m}(1-E_{2m}(2\eta))\right]\\
&=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^{2m}B_{2m}\left[2^{2m}E_{2m}(2\eta)-2E_{2m}(\eta)\right]\\
&=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{2m}B_{2m}\left[E_{2m}(2\eta)-2^{1-2m}E_{2m}(\eta)\right].
\end{aligned}$$

De esta forma se obtiene la fórmula deseada para $ns(z,k)$. □

**Corolario 7**

$$B_{2n}^{G}=\begin{cases}1 & si\ n=0\\ \frac{k^2+1}{3} & si\ n=1\ .\\ (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{2n}B_{2n}[E_{2n}(2\eta)-2^{1-2n}E_{2n}(\eta)] & si\ n\geq 2\end{cases} \tag{45}$$

*donde* $\eta=\frac{K_2}{2K}i$.

**Dem.** Si amplificamos por $z$ la serie de $ns(z,k)$ demostrada en Corolario 6 tenemos

$$z\,ns(z,k)=1+\frac{k^2+1}{6}z^2+\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{2m}\frac{(-1)^{m+1}B_{2m}}{(2m)!}[E_{2m}(2\eta)-2^{1-2m}E_{2m}(\eta)]\,z^{2m}. \tag{46}$$

Al comparar esta serie de potencias con la ecuación (29) se obtiene lo propuesto en la ecuación (45). □

**Observación 7** *Para $n\geq 2$ se tiene*

$$B_{2n}^{G}=\frac{(2n)!}{(2K)^{2n}}[G_{2n}(2\eta)-2^{1-2n}G_{2n}(\eta)], \tag{47}$$

*donde* $\eta=\frac{K_2}{2K}i$.

**Dem.** Recordando que $G_{2n}$ está dada en ecuación (39) y notando que la ecuación (6) del Teorema 5 es equivalente a

$$\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n}B_{2n}}{\zeta(2n)} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}},$$

y finalmente reemplazando en la ecuación (45) obtenemos

$$\begin{aligned} B_{2n}^G &= (-1)^{n+1}B_{2n}\left(\frac{\pi}{K}\right)^{2n}\left[E_{2n}(2\eta) - 2^{1-2n}E_{2n}(\eta)\right] \\ &= \frac{(2n)!}{(2K)^{2n}}[G_{2n}(2\eta) - 2^{1-2n}G_{2n}(\eta)]. \end{aligned}$$

□

**Observación 8** *La ecuación*

$$B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\lim_{z\to i\infty} G_{2n}(z)$$

*muestra que los números de Bernoulli clásicos se obtienen como el valor de la serie de Eisenstein en el infinito. De forma similar la ecuación*

$$B_{2n}^G = \frac{(2n)!}{(2K)^{2n}}[G_{2n}(2\eta) - 2^{1-2n}G_{2n}(\eta)], \quad \textit{donde } \eta = \frac{K_2}{2K}i$$

*muestra que los números universales de Bernoulli para este ejemplo se obtienen como valores de la serie de Eisenstein cuando el argumento es cualquier complejo sobre el eje imaginario positivo.*

Considerando los primeros sumandos de la serie de $ns$

$$\begin{aligned} ns(t,k) = \frac{1}{t} + \frac{k^2+1}{6}t + \frac{7k^4-22k^2+7}{360}t^3 + \\ \frac{31k^6-15k^4-15k^2+31}{15120}t^5 + \frac{127k^8-248k^6+186k^4-284k^2+127}{604800}t^7 + \ldots \end{aligned}$$

podemos calcular los primeros números

$$\begin{aligned} B_0^G &= 1 \\ B_2^G &= \frac{k^2+1}{3} \\ B_4^G &= \frac{7k^4-22k^2+7}{15} \\ B_6^G &= \frac{31k^6-15k^4-15k^2+31}{21} \\ B_8^G &= \frac{127k^8-248k^6+186k^4-284k^2+127}{15}. \end{aligned}$$

Los primeros polinomios son

$$
\begin{aligned}
B_0^G(x) &= 1\\
B_1^G(x) &= x\\
B_2^G(x) &= x^2+\frac{k^2+1}{3}\\
B_3^G(x) &= x^3+(k^2+1)x\\
B_4^G(x) &= x^4+2(k^2+1)x^2+\frac{7k^4-22k^2+7}{15}\\
B_5^G(x) &= x^5+\frac{10}{3}(k^2+1)x^3+\frac{7k^4-22k^2+7}{3}x\\
B_6^G(x) &= x^6+5(k^2+1)x^4+(7k^4-22k^2+7)x^2+\frac{31k^6-15k^4-15k^2+31}{21}\\
B_7^G(x) &= x^7+7(k^2+1)x^5+\frac{5}{3}(7k^4-22k^2+7)x^3+\frac{31k^6-15k^4-15k^2+31}{3}x\\
B_8^G(x) &= x^8+\frac{28}{3}(k^2+1)x^6+\frac{14}{3}(7k^4-22k^2+7)x^4+\frac{4}{3}(31k^6-15k^4-15k^2+31)x^2\\
&\quad+\frac{127k^8-248k^6+186k^4-284k^2+127}{15}.
\end{aligned}
$$

Para finalizar estudiaremos en más detalle los números y polinomios universales de Bernoulli que resultan al considerar el grupo formal $F_k$ cuando el parámetro $k$ asume los valores extremos 0 y 1. Recordar que $k$ es la excentricidad de la elipse y por lo tanto $k \in (0,1)$ en los argumentos anteriores.

**Ejemplo 4** *Para el caso $k=1$ tenemos $F_1(x,y)=\dfrac{x+y}{1+xy}\in\mathbb{Z}[[x,y]]$ el grupo formal estudiado en el ejemplo anterior.*

**Ejemplo 5** *Para el caso $k=0$, se tiene*

$$
\begin{aligned}
F_0(x,y) &= x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} \text{ es grupo formal sobre } \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][[x,y]]\\
Log_{F_0}(t) &= \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(t),\\
Exp_{F_0}(t) &= \sin(t).
\end{aligned}
$$

*La expresión $Exp_F(x+y)=F(Exp_F\,x, Exp_F\,y)$ de la Proposición 2 es equivalente a la identidad clásica*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta}+\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}=F(\sin\alpha,\sin\beta).$$

*Para conocer los números de Bernoulli asociados a este caso consideramos las igualdades:*

$$t\ \csc(t)=\frac{t}{\sin(t)}=\frac{t}{Exp_{F_0}(t)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}^G\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

*Por otro lado ocupando la serie formal de* csc

$$\csc(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2^{2n}-2)B_{2n}\frac{t^{2n-1}}{(2n)!}.$$

*Tenemos entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(2^{2n}-2)B_{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}^{G}\frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

*De lo cual se concluye*

$$B_n^G = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ (2-2^n)(-1)^{\frac{n}{2}}B_n & n \text{ par} \end{cases}.$$

***Observación 9*** *Notar que se obtiene el mismo resultado anterior tomando el límite en el caso descrito en el Corolario 7. Cuando $k \to 0^+$ los valores de las constantes $K, K_2$ y $\eta$ tienden a*

$$\begin{aligned} K &\to \frac{\pi}{2} \\ K_2 &\to \infty \\ \eta &\to i\infty. \end{aligned}$$

*Ya que* $\lim_{\eta \to i\infty} E_{2n}(\eta) = 1$, *al reemplazar estos valores en Corolario 7 se tiene*

$$\begin{aligned} B_{2n}^G &= (-1)^{n+1}B_{2n}2^{2n}\lim_{\eta\to i\infty}\left[E_{2n}(2\eta) - 2^{1-2n}E_{2n}(\eta)\right] \\ &= (-1)^{n+1}B_{2n}2^{2n}[1-2^{1-2n}] \\ &= (-1)^{n}B_{2n}[2-2^{2n}]. \end{aligned}$$

*Esta última igualdad termina la observación.*

*Por otro lado, considerando las igualdades*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^G(x)}{n!}t^n = \frac{te^{xt}}{Exp_{F_0}(t)} = \frac{te^{xt}}{\sin(t)} = \frac{2ite^{xt}}{e^{it}-e^{-it}} = \frac{2ite^{(x+i)t}}{e^{2it}-1} = \frac{2ite^{(\frac{1-ix}{2})2it}}{e^{2it}-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(\frac{1-ix}{2})}{n!}(2i)^n t^n,$$

*los polinomios universales que se obtienen del grupo formal $F_0$ están relacionados con los polinomios clásicos de Bernoulli, a saber*

$$B_n^G(x) = (2i)^n B_n\left(\frac{1-ix}{2}\right) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}_*.$$

## 5.4. Otros números y polinomios clásicos

El Lema 5 nos sirve para mostrar que si tenemos una colección cualquiera de elementos definidos sobre un anillo libre de torsión (conmutativo con unidad) entonces son números universales de Bernoulli. En esta sección, y a modo de ejemplo, aplicaremos dicho lema a los números y polinomios de Euler.

### 5.4.1. Números y polinomios de Euler

Los números de Euler tambien son llamados números secante ya que aparecen en los coeficientes de las series de potencias de las funciones *sec* y *sech*. El primero que trabajó con la serie sec fue Gregory en 1671. Estos coeficientes fueron estudiados por Euler (1755) y luego fueron llamados números de Euler por Raabe en 1851.

**Definición 14** *El* n-ésimo polinomio de Euler, *denotado* $E_n(x)$, *se define*

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!}t^n$$

*y el nésimo número de Euler* $E_n = E_n(\frac{1}{2})$. *Equivalentemente, los números de Euler se definen mediante la serie generadora*

$$\frac{1}{cosh(t)} = \frac{2}{e^t+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!}t^n. \tag{48}$$

**Proposición 28** *Existe un grupo formal* $\mathcal{F}/\mathbb{Q}$ *tal que* $B_n^G = E_n$, $B_n^G(x) = 2^n E_n(\frac{x+1}{2})$.

**Dem.** Utilizando la serie de potencias de $e^t$ en la ecuación (48) se puede probar $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$. Entonces, por Lema (5), existe grupo formal $\mathcal{F}/\mathbb{Q}$ tal que $B_n^G = E_n$ todo $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente por Definición 14 es claro que la serie formal generadora asociada a los números de Euler es $f(t) = sech(t)$, luego $Exp_F(t) = t\cosh(t)$ y considerando las igualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^G(x)}{n!}t^n = \frac{te^{xt}}{Exp_F(t)} = \frac{e^{xt}}{cosh(t)} = \frac{2e^{xt}e^t}{e^{2t}+1} = \frac{2e^{\frac{x+1}{2}2t}}{e^{2t}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n E_n(\frac{x+1}{2})}{n!}t^n$$

concluimos

$$B_n^G(x) = 2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_*.$$

□

# Referencias


[1] Tom Apostol. *Introduction to analytic number theory,* (1976). Springer-Verlag.

[2] Tom Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory,* (1990). Springer-Verlag.

[3] T J L'a Bromwich. *Introduction to the theory of Infinite Series,* (1956). Macmillan.

[4] Leonard Carlitz. *A note on Euler numbers and polynomials,* (1955).

[5] Francis Clarke. *The universal Von Staudt Theorems,* (1989). American Mathematical Society. Volume 315, number 2, October 1989.

[6] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik (Alan Jeffrey, Daniel Zwillinger). *Table of Integrals, Series, and Products, seventh edition,* (2007). Academic Press.

[7] Michiel Hazewinkel. *Formal groups and applications,* (1978). Academic Press.

[8] Neal Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms,* (1984). Springer.

[9] Anatoli Logunov. *Curso de Teoría de la Relatividad y de la gravitación. Análisis contemporáneo del problema,* (1998). Editorial URSS.

[10] Frank Olver, Daniel Lozier, Ronald Boisvert, Charles Clark. *NIST Handbook of mathematical functions,* (2010). Dover Publications, Inc., New York. Libro digital en http://dlmf.nist.gov/.

[11] Joseph Silverman. *Arithmetic Of Elliptic Curves,* (1986). Springer.

[12] Piergiulio Tempesta. *Formal groups, Bernoulli-type polynomials and L-series,* (2007). C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I345 303-306.