Grupos ordenables: estructura algebraica y dinámica

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Leslie Alejandra Jiménez Palma

Noviembre, 2008

Director de Tesis: Dr. Andrés Ignacio Navas Flores

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Leslie Alejandra Jiménez Palma

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día ... de .... de 200.... .

Director de Tesis:

Dr. Andrés Navas Flores .... A Ignacio Navas F.

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Jan Kiwi Krauskopf .... Jan Kiwi

Dr. Jorge Soto Andrade ....

Agradecimientos

Primero que todo, quiero agradecer a mi tutor, Andrés Navas, toda la dedicación que puso en este proyecto, y por toda la ayuda que me brindó durante el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a mis padres por toda la confianza que desde siempre han mostrado tener en mi, por su preocupación y por todos los consejos entregados. Eso me da mucha fortaleza y me llena de motivación para seguir. Además, quiero dar gracias a mis hermanos por su apoyo incondicional. En especial, quiero agradecer a mi pequeño hermano Cristóbal, por todos los gratos momentos que hemos compartido, y por el cariño que me entrega.

No puedo dejar de agradecer a los profesores que han estado presentes en todo este proceso de aprendizaje, ya que cada uno de ellos, de una u otra manera han aportado en mi crecimiento humano y matemático. Muy especialmente, quiero agradecer al profesor Nicolás Yus por sus consejos, por su ayuda en momentos muy claves de mi vida y, porque además de haber motivado fuertemente y de diversas maneras mi gusto y motivación por las matemáticas, ha sido (y espero que siga siendo por mucho tiempo más) un referente humano durante todos estos años.

Quero agradecer enormemente a *todos* mis amigos, los cuales han sido imprescindibles durante el desarrollo de este trabajo. De manera muy especial, me gustaría agradecer a mi buena amiga Romina (con la cual tuve la oprtunidad de compratir hogar; buenos y no tan buenos momentos, que juntas superamos), por todos sus consejos y por ser siempre un apoyo firme. A verónica y a Sebastián por escucharme cada vez que lo necesito y, por todas las profundas conversaciones y gratos momentos compartidos.

Por último, quiero dedicar estas líneas finales a agradecer a la persona que hoy me acompaña, y aunque yo sé que él no muestra predilección por estas cosas, le quise dar gracias por su constante apoyo y recomendaciones. Asimismo, agradecer la preocupación y el gran amor que me entrega cada día.

Índice general

Resumen

Hasta ahora, los grupos ordenables han sido mayormente estudiados usando métodos puramente algebraicos. Sin embargo, una parte substancial de la teoría debería tener una contraparte dinámica natural. En este trabajo hacemos un estudio *en paralelo* de la teoría de los grupos ordenables, en el cual confrontamos la estructura algebraica clásica de esta teoría con un análisis dinámico de la misma. En particular, estudiaremos detalladamente los grupos C-ordenables; demostraremos que si $\preceq$ es un C-orden en un grupo entonces se tiene que $fg^2 \succ g$ para todo $f \succ id$ y $g \succ id$ en el grupo. Este resultado aparentemente inofensivo tiene una contraparte topológica interesante: el espacio de los C-órdenes de un grupo, provisto de una topología natural, es compacto. Esta compacidad fue usada en [12] para dar una demostración simplificada de un teorema profundo debido a Brodsky e independientemente a Rhemtulla y Rolfsen: todo grupo localmente indicable es C-ordenable.

Summary

Until now, orderable groups have mostly been studied using purely algebraic methods. Nevertheless, the whole theory should have a natural dynamical counterpart. In this work, we confront the classical algebraic structure of the theory of orderable groups with a dynamical analysis of it. In particular, we study in detail the concept of C-orderable group. Our main result is the following: if $\preceq$ is a C-order in a group then $fg^2 \succ g$ for all $f \succ id$ and $g \succ id$ in the group. This apparently innocuous result has an interesting topological counterpart: the space of C-orderings of a group is compact when endowed with a natural topology. This compactness was used in [12] for giving a simplified proof of a deep theorem due, independently, to Brodsky, and to Rhemtulla and Rolfsen: every locally indicable group is C-orderable.

Introducción

La teoría de grupos ordenables (es decir, grupos que admiten una relación de orden total invariante a izquierda) es una rama bastante desarrollada del álgebra contemporánea. Esta teoría está naturalmente conectada con la teoría de grupos abstracta y con la teoría de sistemas algebraicos ordenados. Su punto de inicio corresponde a trabajos de Dedekind y Hölder, los cuales datan de fines del siglo XIX e inicio del siglo XX respectivamente. Dedekind formalizó el concepto de número real mediante cortaduras (hoy en día conocidas como *cortaduras de Dedekind*). De esta manera, el conjunto de números reales quedó caracterizado como un cuerpo completo dotado de un orden bi-invariante (relación de orden total invariante a izquierda y a derecha simultáneamente) y arquimediano (ver sección 1.1). En 1901 Hölder utilizó dichas cortaduras para probar que todo grupo que admite un orden del tipo anterior es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{R}$.

En la década de los 40, Iwasawa y Malce'v hicieron importantes contribuciones, obteniendo independientemente una descripción de la estructura de grupos bi-ordenados (es decir, grupos dotados de un orden bi-invariante) en términos de sus subgrupos convexos. También en la misma década, Malce'v y B. H. Neumann probaron paralelamente que todo grupo bi-ordenado puede incrustarse en un anillo de división ordenado. Desde entonces el tema ha recibido una mayor atención, y se han estudiado nuevas clases de grupos definidos sobre la base de propiedades de ordenabilidad.

En los años 50, la teoría de grupos ordenables (al igual que la teoría de grupos admitiendo una relación de orden parcial) fue enormemente estudiada por diversas escuelas de matemáticas. Entre los pertenecientes la escuela estado-unidense, cabe señalar que los trabajos de Paul Conrad sobre valuaciones y grupos totalmente (y parcialmente) ordenados representan el inicio del estudio de estas áreas. Además, los textos [2] de R. Botto Mura y A. Remthulla, y [10] escrito por V. Kopytov y N. Medveded (pertenecientes a la escuela rusa) son ampliamente conocidos en la literatura.

Debemos precisar que, en general, la teoría de grupos ordenables es vista como un tema particular dentro de la teoría de l-grupos ("lattice orderable groups"), la cual se encuentra ampliamente desarrollada en [9] .

En los últimos años, la posibilidad de dotar de un orden a una amplia variedad de grupos, además de saber qué clase de grupos pueden ser ordenados, ha despertado el interés de diversos matemáticos especialistas en geometría, topología, álgebra universal, teoría de rigidez, foliaciones y lógica matemática.

Hasta ahora, los grupos ordenables han sido mayormente estudiados usando métodos puramente algebraicos. Sin embargo, una parte substancial de la teoría debería tener una contraparte dinámica natural. De hecho, un argumento bastante conocido (y no muy explotado) muestra que todo grupo ordenable numerable admite una acción fiel (o efectiva) por homeomorfismos de la recta que preservan orientación. Más aún, su recíproco es cierto incluso sin la hipótesis de numerabilidad.

Tal como su nombre lo dice, este trabajo representa un estudio en *paralelo* de la teoría de los grupos ordenables, siendo nuestro principal objetivo el confrontar la estructura algebraica clásica de esta teoría con un análisis dinámico de la misma. Los párrafos siguientes describen los principales temas a tratar en este trabajo.

Comenzamos nuestro estudio mostrando algunos de los teoremas y métodos clásicos de la teoría de grupos ordenables. Entre ellos, el (bastante conocido) teorema de Hölder juega un papel fundamental. Este teorema será primeramente estudiado de la manera algebraica clásica, para posteriormente ser analizado en profundidad desde un punto de vista dinámico.

Además, con el objetivo de complementar el estudio de los métodos clásicos de esta teoría, analizaremos diversas caracterizaciones algebraicas para los grupos ordenables, bi-ordenables y C-ordenables. Basándonos en [12], analizaremos desde un punto de vista dinámico la noción de bi-invariancia de una relación de orden total, exponiendo una reciente caracterización para dichas relaciones de orden. Por otra parte, diremos que una relación de orden invariante a izquierda $\preceq$ es *recurrente a derecha* si para todo par de elementos f, h en G tales que $f \succ id$ existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $fh^n \succ h^n$. También trabajaremos dinámicamente esta noción de recurrencia a derecha.

En este trabajo, el artículo clásico [4] debido a Conrad será profundamente estudiado. En particular, estudiaremos detalladamente los grupos *C-ordenables.* Éstos corresponden a grupos admitiendo una relación de orden total invariante a izquierda $\preceq$ que posee la propiedad (llamada *propiedad de Conrad*) consistente en que para todo par de elementos $f \succ id$ y $g \succ id$ en el grupo, existe un entero positivo n cumpliendo que $fg^n \succ g$. Diremos que un orden $\preceq$ con esta propiedad es un C-orden. En el aspecto algebraico de este estudio probaremos que, si la propiedad de Conrad se verifica para $\preceq$, entonces se tiene que $fg^2 \succ g$ para todo $f \succ id$ y $g \succ id$ en el grupo. Esta afirmación aparentemente inocua nos permitirá dar una demostración simplificada de un teorema profundo debido a Brodsky e independientemente a Rhemtulla y Rolfsen, a saber, si un grupo es localmente indicable, entonces es C-ordenable (notemos que la recíproca, debida a Conrad, también es válida, pero su demostración es notablemente más sencilla). Por otra parte, en el aspecto dinámico analizaremos principalmente:

- la noción de *número de traslación*,

- el concepto de *elementos entrecruzados*, y

- los *subgrupos convexos* de un grupo admitiendo un orden que posee la propiedad de Conrad.

Una nueva perspectiva a la teoría de los grupos ordenables ha sido recientemente propuesta por Ghys y Sikora. Ésta consiste en asociar, a cada grupo ordenable G, el espacio $\mathrm{Ord}(G)$ de todas sus relaciones de orden totales e invariantes a izquierda, y ha sido explotada fructíferamente por Witte en [19] y Navas en [12]. El capítulo 3 corresponde a una breve introducción a este tópico. En particular, dotaremos a este espacio de una topología natural, y probaremos que el subconjunto de los C-órdenes es cerrado (no necesariamente no vacío).

A continuación expondremos a grandes rasgos la pauta que vamos a seguir en cada una de los tres capítulos de este trabajo.

En el capítulo 1, mostraremos con detalle y apoyada con una buena cantidad de ejemplos (parte de) la teoría algebraica clásica de los grupos ordenables. En particular, la sección 1.3 tratará sobre órdenes Conrad: la Proposición 1.3.1 corresponde a nuestra caracterización "n=2" de dichos órdenes, mientras que la demostración de la Proposición 1.3.15 corresponde a una prueba simplificada del hecho que los grupos localmente indicables son C-ordenables.

En el capítulo 2, analizaremos desde un punto de vista dinámico los principales resultados obtenidos en el capítulo 1 de este trabajo.

Finalmente, en el capítulo 3 estudiaremos las propiedades del espacio $\mathrm{Ord}(G)$, y la acción del grupo G sobre dicho espacio.

Capítulo 1

La teoría algebraica

1.1. Definiciones generales

Comenzaremos este trabajo recordando las definiciones de conjuntos parcialmente y totalmente ordenados.

Definición 1.1.1. Un conjunto M se dice parcialmente ordenado si una relación binaria $\leq$ (llamada una relación de orden parcial o simplemente un orden parcial) está definida sobre M de tal manera que se cumplan las siguientes propiedades:

1. (*Reflexividad*) $x \leq x$.
2. (*Antisimetría*) Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.
3. (*Transitividad*) Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

La definición que sigue nos entrega la noción de extensión de un orden parcial. Ésta será utilizada en la sección 1.2 de este trabajo.

Definición 1.1.2. Sean $\leq$ y $\leq'$ dos relaciones de orden parcial definidas sobre un conjunto M. Si $x \leq' y$ para todo x, y en M tal que $x \leq y$, entonces $\leq'$ se llama una *extensión* de $\leq$.

Decimos que dos elementos x, y en M son comparables si $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Definición 1.1.3. Un conjunto parcialmente ordenado M se dice *totalmente ordenado* si dos elementos cualesquiera de M son comparables. En este caso, diremos que M admite una relación de orden total.

En lo que sigue, y salvo mención de lo contrario, la palabra "orden" será utilizada como una abreviación de "relación de orden total".

Al igual que para una relación de orden parcial, diremos que un orden $\preceq$ en un grupo G es:

- *invariante a izquierda* si para todo g, h en G tales que $g \preceq h$ se tiene $fg \preceq fh$ para todo f en G;
- *invariante a derecha* si para todo g, h en G tales que $g \preceq h$ se tiene $gf \preceq hf$ para todo f en G;
- *bi-invariante* si es invariante a izquierda y derecha simutáneamente.

Diremos que un grupo G es *ordenable* (respectivamente bi-ordenable) si admite un orden invariante a izquierda (respectivamente bi-invariante). Debido a que un grupo puede admitir muchos órdenes, diremos que G es un *grupo ordenado* (respectivamente bi-ordenado) cuando se haya escogido un orden invariante a izquierda (respectivamente bi-invariante) en él.

Si $\preceq$ es un orden en G diremos que g es un elemento *positivo* respecto a $\preceq$ si $g \succeq id$. Diremos que g está entre f y h si $f \prec g \prec h$ ó $h \prec g \prec f$.

La proposición siguiente corresponde a una *caracterización* de un grupo que admite un orden invariante a izquierda.

Proposición 1.1.4. *Un grupo G admite un orden invariante a izquierda si y sólo si contiene un subsemigrupo G_+ de modo que G es la unión de G_+ con el subsemigrupo $G_- = \{g : g^{-1} \in G_+\}$, y $G_+ \cap G_- = \{id\}$.*

Demostración. Supongamos que G admita un orden invariante a izquierda $\preceq$. Definimos $G_+ = \{g \in G : id \preceq g\}$. Si g y h están en G_+, entonces $id \preceq h \preceq hg$ (respectivamente $id \preceq g \preceq gh$) lo que implica que $hg \in G_+$ (respectivamente $gh \in G_+$). Luego, G_+ es un subsemigrupo. Análogamente, G_- es un subsemigrupo, y la relación $G_+ \cap G_- = \{id\}$ se desprende del hecho que $\preceq$ es una relación de orden total. Sea ahora $g \in G$. Si $g \in G_+$ entonces obviamente $g \in G_+ \cup G_-$. Si por el contrario $g \notin G_+$, entonces $g \preceq id$, por lo que $id = g^{-1}g \preceq g^{-1}$, es decir $g^{-1} \in G_+$, lo que implica que $g \in G_-$. Por lo tanto, G es la unión de G_+ y G_-.

Supongamos ahora que G contenga un subsemigrupo G_+ de modo que si $g \in G \backslash \{id\}$, entonces $g \in G_-$ o $g \in G_+$. Podemos definir $g \preceq h$ si $g^{-1}h \in G_+$. Claramente $\preceq$ es una relación de orden total. Además como $(fg)^{-1}fh = g^{-1}f^{-1}fh = g^{-1}h$, se tiene que si $g \preceq h$ entonces $fg \preceq fh$ para todo $f \in G$, por lo que $\preceq$ es invariante a izquierda. $\square$

Un grupo G admite una relación de orden parcial invariante a izquierda (respectivamente bi-invariante) si y sólo si existe un subsemigrupo G_+ de G tal que $G_+ \cap G_- = \{id\}$ (respectivamente $G_+ \cap G_- = \{id\}$ y $g^{-1}G_+g = G_+$ para todo $g \in G$), donde G_+ es el semigrupo de elementos positivos de G, el cual se conoce como *cono positivo*. Algunas veces se escribirá (abusando de la notación) que G_+ es un orden parcial invariante a izquierda para G.

Observación 1.1.5. Sea $\prec$ un orden invariante por la izquierda para un grupo G. Si definimos

$$f \ll g \text{ si } fg^{-1} \in G_+,$$

entonces $\ll$ es un orden invariante por la derecha. En efecto, claramente $\ll$ es una relación de orden total. Para verificar que si $f \ll g$ entonces $fh \ll gh$ para todo f, g y h en G, notemos que, como $fg^{-1} \succeq id$ y

$$fh(gh)^{-1} = fhh^{-1}g^{-1} = fg^{-1},$$

obtenemos que $fh(gh)^{-1} \in G_+$, es decir $fh \ll gh$.

Resumiendo, si G es un grupo admitiendo un orden invariante por la izquierda, entonces G admite un orden invariante por la derecha. Recíprocamente, si G es un grupo admitiendo un orden invariante por la derecha, entonces G admite un orden invariante por la izquierda.

Observación 1.1.6. Si G admite un orden $\preceq$ invariante a izquierda, entonces G es un grupo libre de torsión.

En efecto, si $id \prec g$ entonces $id \prec g \prec g^2 \prec ...$, y si $g \prec id$ entonces $... \prec g^2 \prec g \prec id$.

Observación 1.1.7. Si G es un grupo abeliano, entonces todo orden invariante a izquierda de G es bi-invariante. Asimismo, si G es un grupo abeliano, entonces G es ordenable si y sólo si es libre de torsión (vea el ejemplo 1.1.13).

Una caracterización para la *bi-invariancia* de un orden invariante a izquierda es la siguiente.

Proposición 1.1.8. *Un orden $\preceq$ invariante por la izquierda en un grupo G es bi-invariante si y sólo si para todo $f \succ id$ en G y para todo $g \in G$ se tiene que $fg \succ g$.*

Demostración. Supongamos que $\preceq$ es bi-invariante. Si $f \succ id$ y $g \in G$, entonces usando la invariancia a derecha de $\preceq$ se obtiene $fg \succ g$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $f \succ id$ en G y para todo $g \in G$ se tiene que $fg \succ g$. Queremos demostrar que $\preceq$ es invariante a derecha. Si $h_1 \succ h_2$, entonces $h_2^{-1}h_1 \succ id$. Luego, $h_2^{-1}h_1 g \succ g$, para todo $g \in G$, y de esta forma $h_1 g \succ h_2 g$, para todo $g \in G$. □

Proposición 1.1.9. *Un grupo G admite un orden total bi-invariante si y sólo si existe un subsemigrupo normal G_+ de G tal que G es la unión entre G_+ y G_-, y $G_+ \cap G_- = \{id\}$.*

Demostración. El resultado es inmendiato de la proposición 1.1.4 y la proposición 1.1.8. □

1.1.1. Ejemplos

A continuación se presenta una lista de ejemplos, extraídos principalmente de [9].

Ejemplo 1.1.10. Los grupos aditivos de números enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$ y reales $\mathbb{R}$ son grupos bi-ordenados bajo el orden natural.

Ejemplo 1.1.11. Si H es un subgrupo de un grupo ordenable G (respectivamente bi-ordenable), entonces H también es (respectivamente bi-ordenable) bajo el orden inducido por G.

Ejemplo 1.1.12. Sea V un espacio vectorial racional con base $\{b_i : i \in I\}$. Supongamos que I es un conjunto totalmente ordenado. Sean v, w en V con $v \neq w$; digamos

$$v = \sum_{i \in I_0} q_i b_i \text{ y } w = \sum_{i \in I_0} r_i b_i,$$

donde I_0 es un subconjunto finito de I, $q_i \in \mathbb{Q}$ y $r_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i \in I_0$.

Definimos

$$v \prec w \text{ si y sólo si } q_j < r_j,$$

donde j es el menor elemento $i \in I_0$ tal que $q_i \neq r_i$. Probaremos que $\prec$ es un orden bi-invariante en V.

1. $\prec$ es una relación de orden parcial. Claramente $\prec$ es reflejo y antisimétrico, por lo que demostraremos que $\prec$ es transitivo.

   Sean v, w, z elementos distintos de V. Si $v \prec w$ y $w \prec z$ entonces

   j es el menor $i \in I_0$ tal que $q_i \neq r_i$, y
   k es el menor $i \in I_0$ tal que $r_i \neq p_i$.

   Consideraremos los siguientes tres casos posibles:

   (i) Si $j > k$ entonces $q_k = r_k \neq p_k$. Por tanto, tenemos que k es el menor $i \in I_0$ tal que $q_i \neq p_i$, y de esta forma obtenemos que $v \prec z$.

   (ii) Si $j < k$ entonces $p_j = r_j \neq q_j$. Por tanto, tenemos que j es el menor $i \in I_0$ tal que $q_i \neq p_i$, y de esta forma obtenemos que $v \prec z$.

   (iii) Si $j = k$ entonces $q_{k-l} = r_{k-l} = p_{k-l}$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Si $q_k \neq p_k$, entonces j es el menor elemento $i \in I_0$ tal que $q_i \neq p_i$, por lo que obtendríamos que $v \prec z$. Si no, es decir $q_k = p_k$, entonces a lo menos para $i = k + 1$ se tiene que $q_i \neq p_i$, por lo que nuevamente obtendríamos que $v \prec z$. Si $q_{k+1} = p_{k+1}$, entonces $j + 2$ sería el menor elemento $i \in I_0$ para el cual se podría tener que $q_i \neq p_i$, por lo que ontendríamos que $v \prec z$. Este proceso termina, pues si no tendríamos que $q_i = p_i$ para todo $i \in I_0$, lo cual es absurdo. Concluimos que $v < z$.

2. Los elementos de V son comparables (es decir $\prec$ es una relación de orden total). Sean v y w elementos de V. Si $v \leq w$ entonces no hay nada que demostrar. Si no, existe (al menos un) $j \in I_0$ tal que $q_j > r_j$. Por lo tanto, considerando el menor de los elemntos j (si j no es único) obtenemos que $v > w$. De esta manera, los elementos de V son comparables.

3. $\prec$ es bi-invariante. Sean v, w en V tales que $v \prec w$. Si j e el menor elemento $i \in I_0$ cumpliendo que $q_i < r_i$ entonces

$$p_k + q_j < p_k + r_j \text{ para todo } k \in I_0.$$

De esta manera, obtenemos que $z + v \prec z + w$, y por consiguiente $\prec$ es invariante a izquierda. Como V es abeliano, tenemos que $\prec$ es bi-invariante.

Ejemplo 1.1.13. Todo grupo abeliano libre de torsión G puede incrustarse en un espacio vectorial racional V. Debido al ejemplo anterior, V es un grupo bi-ordenado. Por lo tanto, considerando el orden inducido por $\prec$ (definido en el ejemplo 1.1.13) en G, obtenemos que G es bi-ordenado. De esta manera,

todo grupo abeliano libre de torsión admite un orden bi-invariante.

Ejemplo 1.1.14. El grupo aditivo $\mathbb{Z}^n$ *mirado como subconjunto de* $\mathbb{R}$ *dotado del orden usual es bi-ordenado.* Para incrustar $\mathbb{Z}^n$ en $\mathbb{R}$ podemos considerar el homomorfismo inyectivo $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ definido por $f(a_1, ..., a_n) = a_1 + a_2\pi + a_3\pi^2 + ...incrustar + a_n\pi^{n-1}$.

Además tenemos que $\mathbb{Z}^n$ *es bi-ordenado con el orden lexicográfico* $<$ debido a que es abeliano libre de torsión. Este orden lexicográfico (directo) se asemeja mucho a aquél del ejemplo 1.1.17.

Ejemplo 1.1.15. Recordaremos la definición de la serie central superior de un grupo G. Denotemos por $Z(G)$ al centro de G, que es el conjunto de elementos de G que conmutan con todo elemento de G. Definimos por inducción los subgrupos $Z_n(G)$ haciendo

$$\begin{aligned} Z_0(G) &= \{id\} \\ Z_{n+1}(G)/Z_n(G) &= Z(G/Z_n(G)). \end{aligned}$$

Un grupo G se dice *nilpotente de clase* c si $Z_c(G) = G$. De esta manera, un grupo abeliano es nilpotente de clase 1. Si G es nilpotente y libre de torsión, entonces cada $Z_{n+1}(G)/Z_n(G)$ es un grupo abeliano libre de torsión. Por lo tanto, en este caso $Z_{n+1}(G)/Z_n(G)$ admite un orden bi-invariante, al cual denotaremos por $<$.
Afirmación. Si G es nilpotente y $g \neq id$ en G, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $g \in Z_{n+1}(G) \setminus Z_n(G)$.
Existencia: Si G es nilpotente de clase c y $g \in G \setminus \{id\}$, entonces $g \in Z_c(G)$. Si $g \notin Z_{c-1}(G)$ entonces $g \in Z_c(G) \setminus Z_{c-1}(G)$. En caso contrario, es

decir si $g \in Z_{c-1}(G)$, entonces nuevamente si $g \notin Z_{c-2}(G)$ nuestro problema de existencia está resuelto. Ahora bien, si $g \in Z_{c-2}(G)$ procedemos como antes hasta encontrar un valor apropiado para n, lo cual es posible ya que si $g \in Z_{c-1}(G)$ para todo $c \in \mathbb{N}$ entonces $g = id$, lo cual contradice nuestra suposición inicial.
Unicidad: Supongamos que existe $m \neq n$ en $\mathbb{N}$ tal que $g \in Z_{m+1}(G) \setminus Z_m(G)$.
Si $n > m$ tenemos que

$$Z_{n+1}(G) \supset Z_n(G) \supseteq Z_{m+1}(G) \supset Z_m(G),$$

y como $g \in Z_{m+1}(G) \setminus Z_m(G)$ obtenemos que $g \in Z_n$, lo cual es imposible.

De esta manera, definimos $g \succ id$ si $gZ_n(G) > Z_n(G)$. Por tanto, el orden (total) $\prec$ es bi-invariante en G. De esta forma,

todo grupo nilpotente libre de torsión admite un orden bi-invariante.

Ejemplo 1.1.16. Recordemos la definición de un conmutador en un grupo G. Dados g, h en G, se define $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Si H y K son subgrupos de G entonces definimos $[H, K]$ como el subgrupo de G generado por el conjunto $\{[h, k] : h \in H, k \in K\}$.

Definimos G^i inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} G^0 &= G \\ G^{n+1} &= [G^n, G]. \end{aligned}$$

La sucesión $G^0, G^1, \ldots$ es conocida como la *serie central inferior.*

Sea $F = F_X$ el grupo libre sobre el conjunto X de generadores libres. En lo que sigue, examinaremos su serie central inferior.
Afirmación 1. El grupo cociente F^n/F^{n+1} es abeliano libre de torsión (y por tanto admite un orden bi-invariante, al cual denotaremos por $<$).

Claramente, el cociente anterior es abeliano. De esta manera, sólo nos resta probar que F^n/F^{n+1} es un grupo libre de torsión. Comenzaremos demostrando que F/F^1 es abeliano libre de torsión. Para probar esto, usaremos la propiedad universal de grupos libres. Ésta dice lo siguiente: dado un grupo G, un conjunto X y una función conjunto $\varphi : X \longrightarrow G$, tenemos que existe un único homomorfismo de grupos $\phi : F \longrightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{inclusión}"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[dl, "\phi"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Figura 1

De esta manera, existe un homomorfismo de grupos ϕ (denotado igual que en el diagrama) entre F y el producto $\prod \mathbb{Z}$ con tantas copias de $\mathbb{Z}$ como elementos tenga X. Note que si $F = \langle g_1, ..., g_k, ... \rangle$ entonces podemos definir este homomorfismo tal que g_i es enviado en el vector e_i en $\prod \mathbb{Z}$. Demostraremos que ϕ induce un homomorfismo inyectivo entre F/F^1 y $\prod \mathbb{Z}$.
Afirmación 2. $ker(\phi) = F^1$.

El hecho que $ker(\phi) \supseteq F^1$ es claro. En lo que sigue, probaremos la contención contraria, es decir que $ker(\phi) \subseteq F^1$. Consideremos una palabra $W(g_1, ..., g_k)$ en $ker(\phi)$, es decir

$$W(\phi(g_1), ..., \phi(g_k)) = \phi(W(g_1, ..., g_k)) = 0.$$

Es claro que podemos escribir

$$W(g_1, ..., g_k) = \prod g_1^{\alpha_i} ..., g_k^{\omega_i},$$

donde $i \in \{1, ..., l\}$ para cierto $l \in \mathbb{N}$. De esta manera,

$$\phi(W(g_1, ..., g_k)) = (\sum \alpha_i, ..., \sum \omega_i) = (0, ..., 0).$$

Por lo tanto, necesariamente

$$\sum \alpha_i = ... = \sum \omega_i = 0.$$

Demostraremos usando doble inducción -en función del número de generadores (valor dado por el parámetro k) y el número de *bloques* (valor dado por el parámetro l)- que $W(g_1, ..., g_k) \in F^1$.

1. Fijemos $k = 2$, es decir consideraremos $W(g_1, g_2)$ (el caso $k = 1$ es evidente). Haremos inducción sobre l comenzando con $l = 2$ ya que el caso $l = 1$ es claro. Para este caso, podemos escribir

$$W(g_1, g_2) = g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} g_1^{-\alpha_1} g_2^{-\beta_1} \in F^1,$$

ya que como vimos antes los exponentes de cada generador deben sumar cero. Supongamos que el resultado vale para $l = r$, es decir que

$$W(g_1, g_2) = g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} g_1^{\alpha_2} g_2^{\beta_2} \dots g_1^{\alpha_{r-1}} g_2^{\beta_{r-1}} g_1^{-\sum \alpha_i} g_2^{-\sum \beta_i} \in F^1,$$

donde $i \in \{1, ..., r-1\}$.

Queremos probar que éste es válido para $l = r + 1$. Consideremos la siguiente palabra

$$W(g_1, g_2) = g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} g_1^{\alpha_2} g_2^{\beta_2} \dots g_1^{\alpha_r} g_2^{\beta_r} g_1^{-\sum \alpha_i} g_2^{-\sum \beta_i} \in F^1,$$

donde $i \in \{1, ..., r\}$. Usando la hipótesis inductiva, y recordando la igualdad $ab = ba[a, b]$ (*), tenemos que para este caso (vea ítem 3.)

$$W(g_1, g_2) = g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} g_1^{-\alpha_1} g_2^{-\beta_1} g_1^{\alpha_2} g_2^{\beta_2} \dots g_1^{\alpha_r} g_2^{\beta_r} g_1^{-\sum \alpha_i} g_2^{-\sum \beta_i} W_0 \in F^1,$$

donde $i \in \{2, ..., r\}$, y W_0 es un producto de conmutadores obtenido de (*).

2. Fijemos $k = r$ y supongamos (hipótesis inductiva) que para este valor de k y para todo valor de l, la palabra $W(g_1, ..., g_r)$ pertenece a F^1.

3. Sea $W(g_1, ..., g_{r+1})$ una palabra en $ker(\phi)$. Si $l = 2$, obtenemos usando el resultado del item anterior y la igualdad (*) que

$$\begin{aligned} W(g_1, ..., g_{r+1}) &= g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} \dots g_{r+1}^{\omega_1} g_1^{-\alpha_1} g_2^{-\beta_1} \dots g_{r+1}^{-\omega_1} \\ &= g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} \dots g_{r+1}^{\omega_1} g_{r+1}^{-\omega_1} g_1^{-\alpha_1} g_2^{-\beta_1} \dots g_r^{-v_1} W_1 \\ &= g_1^{\alpha_1} g_2^{\beta_1} \dots g_r^{v_1} g_1^{-\alpha_1} g_2^{-\beta_1} \dots g_r^{-v_1} W_1, \end{aligned}$$

donde W_1 es un producto de conmutadores obtenido de (*). Esta última expresión para $W(g_1, ..., g_{r+1})$ está en F^1, ya que hemos escrito esta palabra en términos de r generadores.

De esta manera, hemos probado que existe un homomorfismo inyectivo de F/F^1 en $\prod \mathbb{Z}$. Por tanto, hemos probado la afirmación 1, es decir, el cociente F/F^1 es libre de torsión. Debido a que todo subgrupo de un grupo libre es libre (este resultado es debido a Scheier, ver [6] para una referencia), probar que F^n/F^{n+1} es libre de torsión es completamente análogo a probar que F/F^1 lo es. De esta forma, obtenemos que F^n/F^{n+1} es abeliano libre de torsión para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmación . Si $g \in F$ entonces $g = id$ o existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $g \in F^n \setminus F^{n+1}$.

Para probar esto procedemos de manera análoga a la prueba de unicidad en el ejemplo anterior. Para la existencia usamos el hecho que $\bigcap\{F^n : n \in \mathbb{N}\} = \{id\}$ (resultado debido a Magnus).

Por lo tanto, podemos definir $g \succ id$ si $gF^{n+1} > F^{n+1}$. Con respecto a este orden, el grupo F es bi-ordenado. Concluimos entonces que

todo grupo libre es bi-ordenable.

Ejemplo 1.1.17. Sea $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definimos

$$(g,h) + (g',h') = (g+g', h(-1)^{g'} + h')$$

y hacemos $G_+ = \{(g,h) : g > 0 \text{ o } (g = 0 \text{ y } h \geq 0)\}$.

Afirmación. El orden $\leq$ es invariante a izquierda, pero no bi-nvariante.

Es claro que $G \setminus \{id\}$ puede escribirse como la unión de G_+ y G_-. Además, es claro que la intersección de ambos semigrupos es trivial.

Consideremos (g,h) y (g',h') elementos positivos de G. Probaremos que G_+ es un semigrupo. Para esto consideraremos los siguientes 4 casos:

- Si $g > 0$ y $g' > 0$ entonces $g+g' > 0$, y por lo tanto $(g,h)+(g',h') \in G_+$.
- Si $g > 0$ y $g' = 0$ entonces $g+g' > 0$, y por lo tanto $(g,h)+(g',h') \in G_+$.
- Si $g = 0$ y $g' = 0$ entonces $h \geq 0$ y $h' \geq 0$, y por lo tanto, tenemos que $(g,h) + (g',h') = (0, h+h') \in G_+$.
- Si $g = 0$ y $g' > 0$ entonces $g+g' > 0$ y por lo tanto $(g,h)+(g',h') \in G_+$.

Por lo tanto, el orden $\leq$ es invariante a izquierda. Con respecto a este orden, el elemento $(0,1) \in G_+$, pero al conjugarlo por $(1,0)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} -(1,0)+(0,1)+(1,0) &= -(1,0)+(1,-1) \\ &= (0,-1) \\ &= -(0,1). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $(0,1)$ tiene como conjugado a un elemento de G_-. De esta manera, el orden $\leq$ no puede ser bi-invariante (ver proposición 1.1.9).

1.2. Otras caracterizaciones de la ordenabilidad

En lo que sigue, denotaremos por $S_G(M)$ al subsemigrupo de G generado por el subconjunto M. Si $M_1, ..., M_k$ son subconjuntos o elementos de G, escribiremos $S_G(M_1, ..., M_k)$ para denotar al subsemigrupo generado por la reunión de los M_i.

El resultado que se presenta a continuación es debido a Kopytov-Medvedev. Una demostración alternativa (usando el axioma de elección) aparece en [10].

Lema 1.2.1. *Un orden parcial invariante a izquierda G_+ sobre un grupo G puede extenderse a un orden total invariante a izquierda sobre G si y sólo si satisface la siguiente condición:*

(C_1) *para cada conjunto finito $g_1, ..., g_n$ de elementos en $G \setminus \{id\}$ existen enteros $e_1, ..., e_n$ en $\{-1, 1\}$ tales que $id \notin S_G(G_+ \setminus \{id\}, g_1^{e_1}, ..., g_n^{e_n})$.*

Demostración. Si un orden total G_+^1 es la extensión de G_+ entonces, dados $\{g_1, ..., g_n\}$ en $G \setminus \{id\}$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ escojemos e_i en $\{-1, 1\}$ de modo que $g_i^{e_i} \succ id$, es decir, $e_i = 1$ (respectivamente $e_i = -1$) si $g_i \in G_+$ (respectivamente $g_i^{-1} \in G_+$). Entonces todos los elementos $\{g_1^{e_1}, ..., g_n^{e_n}\}$ pertenecen a $G_+^1 \setminus \{id\}$. De esta forma, obtenemos que $id \notin S_G(G_+ \setminus \{id\}, g_1^{e_1}, ..., g_n^{e_n})$.

Recíprocamente, supongamos que la condición (C_1) es satisfecha por el orden G_+. Afirmamos que para cada $g \in G \setminus \{id\}$ existe $e \in \{-1, 1\}$ tal que $S_G(G_+ \setminus \{id\}, g^e)$ satisface (C_1). En efecto, supongamos por contradicción que $S_G(G_+ \setminus \{id\}, g)$ y $S_G(G_+ \setminus \{id\}, g^{-1})$ no satisfacen (C_1), es decir, existen $h_1, ..., h_l$ en $G \setminus \{id\}$ y $f_1, ..., f_m$ en $G \setminus \{id\}$ tales que

$$id \in S_G(G_+ \setminus \{id\}, g, h_1^{\epsilon_1}, ..., h_l^{\epsilon_l}) \text{ y } id \in S_G(G_+ \setminus \{id\}, g^{-1}, f_1^{\delta_1}, ..., f_m^{\delta_m}),$$

para toda elección de ϵ_i, δ_j en $\{-1, 1\}$ con $i \in \{1, ..., l\}$ y $j \in \{1, ..., m\}$. Se tiene entonces que

$$id \in S_G(G_+ \setminus \{id\}, g^e, h_1^{\epsilon_1}, ..., h_l^{\epsilon_l}, f_1^{\delta_1}, ..., f_m^{\delta_m}),$$

para toda elección de e, ϵ_i y δ_j en $\{-1, 1\}$. Sin embargo, esto contradice la condición (C_1). Por consiguiente, para cada $g \in G$ podemos escoger e en $\{-1, 1\}$ tal que $S_G(G_+ \setminus \{id\}, g^e)$ satisface (C_1).

Sea G_+^1 un orden invariante a izquierda maximal que extiende a G_+ y que satisface la condición (C_1). Tal orden maximal existe porque (C_1) es satisfecha por la *unión* de una cadena ascendente de órdenes parciales invariantes a izquierda satisfaciendo (C_1). Claramente dicha unión no es G, pues las potencias negativas de todo elemento perteneciente a la unión no está en ella.

Si G_+^1 no fuera total, entonces existiría $g \in G$ tal que $g \notin G_+^1 \cup G_-^1$. Por otro lado, existe un entero e en $\{-1,1\}$ tal que $S_G(G_+^1 \setminus \{id\}, g^e)$ satisface (C_1). Al mismo tiempo, $G_+^1 \subset S_G(G_+^1 \setminus \{id\}, g^e) \cup id$, lo cual contradice la elección de G_+^1. □

Como aplicación del lema anterior, mencionamos (sin demostración) un resultado obtenido por Rhemtulla (ver [2], p. 149-152):

Si G es un grupo nilpotente libre de torsión, entonces todo orden parcial invariante a izquierda en G puede ser extendido a un orden en G.

El siguiente teorema debido a Conrad-Onishi (ver [4] o [14]) entrega condiciones necesarias y suficientes para que un grupo admita un orden invariante a izquierda.

Teorema 1.2.2. *Si G es un grupo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *G admite un orden invariante por la izquierda,*

(2) *si $\{g_1, ..., g_n\}$ es un subconjunto finito de G que no contiene al elemento neutro, entonces existe una elección de exponentes $e_i \in \{-1,1\}$ para $i \in \{1, ..., n\}$ tal que id no pertenece al subsemigrupo de G generado por $\{g_1^{e_1}, ..., g_n^{e_n}\}$,*

(3) *existe un conjunto ς de subsemigrupos de G tal que $id = \cap_{S \in \varsigma} S$ y para cada $g \in G$ y $S \in \varsigma$ ocurre que $g \in S$ o $g^{-1} \in S$.*

Demostración. Si G es ordenable, entonces existe un subsemigrupo G_+ de G que satisface que

$$\text{si } g \in G \setminus \{id\} \text{ entonces se tiene que } g \in G_+ \text{ o } g^{-1} \in G_+.$$

Si consideramos $\varsigma = \{G_+, G_-\}$ obtenemos que (1) implica (3). Suponemos ahora que G cumple con la afirmación (3). Ordenemos completamente de manera arbitraria los elementos de ς con un buen orden $S_1 \dashv S_2 \dashv ....$ Para cada $g \neq id$ en G, denotemos por $\alpha(g)$ el primer S_i que no contiene a g (el cual existe por la hipótesis $id = \cap_{S \in \varsigma} S$). Si $\alpha(g) = \alpha(g^{-1})$, entonces para

$\varsigma_i = \alpha(g)$ se tiene que g y g^{-1} no pertenecen a ς_i, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $\alpha(g) \neq \alpha(g^{-1})$ para todo $g \neq id$ en G. Consideremos

$$P = \{g \in G : g \neq id \text{ y } \alpha(g) \dashv \alpha(g^{-1})\}.$$

Claramente si $g \neq id$ en G, entonces $g \in P$ ó $g^{-1} \in P$. Además, P es un semigrupo tal que $P \cap P = \emptyset$. Por tanto, (3) implica (1).

Considerando $G_+ = \{id\}$ en el lema 1.2.1 obtenemos la equivalencia entre las afirmaciones (1) y (2). □

Note que la equivalencia entre las afirmaciones (1) y (2) del teorema anterior implica lo siguiente: G es ordenable si y sólo si *todo subgrupo finitamente generado de G es ordenable.*

A continuación se presenta (sin demostración) un resultado debido a Onishi y Loś similar al dado por el teorema precedente para un orden bi-invariante, el cual implica que *todo subgrupo finitamente generado de G admite un orden bi-invariante si y sólo si G admite un orden bi-invariante.* Una reciente demostración (topológica) de éste se encuentra en [12].

Teorema 1.2.3. *G admite un orden bi-invariante si y sólo si para todo conjunto finito $\{g_1, ..., g_n\}$ en $G \setminus \{id\}$ existen $e_1, ..., e_n$ en $\{-1, 1\}$ tales que id no pertenece al menor subsemigrupo H de G satisfaciendo*

(i) $g_i^{e_i} \in H$,

(ii) *si $h \in H$ entonces $ghg^{-1} \in H$ para todo $g \in G$.*

Diremos que un grupo G es *localmente indicable* si para todo subgrupo no trivial finitamente generado H de G existe un homomorfismo no trivial $\phi : H \longrightarrow \mathbb{Z}$. La proposición que sigue es debida a Burns y Hale. La demostración que se presenta en este trabajo se obtuvo de [2].

Proposición 1.2.4. *Todo grupo localmente indicable es ordenable.*

Demostración. Supongamos por contradicción que G es localmente indicable no ordenable. Debido a (2) del teorema 1.2.2 existen $g_1, ..., g_n \in G \setminus \{id\}$ tales que para toda elección de $e_i \in \{-1, 1\}$ con $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $id \in S_G(g_1^{e_1}, ..., g_n^{e_n})$. Elijamos los elementos g_i de manera que n es el menor posible y consideremos $G_1 = \langle g_1, ..., g_n \rangle$. Como G es localmente indicable, tenemos que existe un subgrupo normal K en G_1 tal que G_1/K es ordenable no trivial, pues $\mathbb{Z}$ lo es. Por lo tanto, existe al menos un g_i en K, y no todos los g_i están en K. Tras reordenamiento, podemos suponer que $g_i \notin K$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$, y $\{g_{r+1}, ..., g_n\} \subseteq K$, donde $0 < r < n$. Consideremos $\delta_i \in \{-1, 1\}$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$ tal que $S_G(g_1^{\delta_1}, ..., g_r^{\delta_r}) \cap K = \emptyset$. Debido a la minimalidad de n también podemos elegir $\delta_{r+1}, ..., \delta_n$ en $\{-1, 1\}$ tal que $id \notin S_G(g_{r+1}^{\delta_{r+1}}, ..., g_n^{\delta_n})$. De esta manera, podemos escribir

$$id = g_{i(1)}^{m_1\delta_{i(1)}} \cdot ... \cdot g_{i(s)}^{m_s\delta_{i(s)}},$$

donde $m_j \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq i(j) \leq n$, y al menos un $i(j) \leq r$. Se deduce entonces que

$$K = g_{i(1)}^{m_1\delta_{i(1)}} K \cdot ... \cdot g_{i(s)}^{m_s\delta_{i(s)}} K,$$

lo cual contradice que $S_G(g_1^{\delta_1}, ..., g_r^{\delta_r}) \cap K = \emptyset$. $\square$

El recíproco del resultado anterior es falso. A continuación se presentan dos ejemplos de este hecho.

(i) Bergman [1], Thurston [18]: El grupo $G = \langle f, g, h : f^2 = g^3 = h^7 = fgh \rangle$ contenido en el grupo $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ formado por los levantamientos a la recta de las transformaciones de Möbius del círculo.

(ii) Dehornoy [5], Remthulla-Rolfsen [2]: El grupo de trenzas B_n para $n \geq 5$.

Las tres definiciones que se presentan a continuación representan tres propiedades de un orden invariante a izquierda sobre un grupo. Éstas poseen respectivos equivalentes dinámicos, los cuales serán presentados en el capítulo 2 de este trabajo.

Definición 1.2.5. Un orden $\preceq$ invariante a izquierda en un grupo G posee la *propiedad arquimediana* si para todo f, g en G, con $g \neq id$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n \succ f$.

Definición 1.2.6. Un orden $\preceq$ invariante a izquierda en un grupo G posee la *propiedad de Conrad* si para todo par de elementos positivos f, g en G, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $fg^n \succ g$.

Definición 1.2.7. Un orden $\preceq$ invariante a izquierda en un grupo G posee la *propiedad de recurrencia a derecha* si para todo par de elementos f, g en G tales que $f \succ id$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $fg^n \succ g^n$.

Observación 1.2.8. Sea $\preceq$ un orden en el grupo G.

(i) Si $\preceq$ es bi-invariante, entonces $\preceq$ es un C-orden.

Si $f \succ id$ y g es cualquier elemento del grupo G, entonces $fg \succ g$. Luego, la propiedad de Conrad se verifica para $n = 1$.

(ii) Si $\preceq$ es recurrente, entonces $\preceq$ es un C-orden.

Si $f \succ id$ y $g \succ id$, entonces existe un entero positivo n cumpliendo que $fg^n \succ g^n$, y como g es un elemento positivo en G, esto implica que $fg^n \succ g$.

En lo que sigue, mencionamos una lista de ejemplos que muestran que los recíprocos de las implicancias anteriores no son válidos.

1. D. Witte en el ejemplo 4.6 de [19] prueba que si F es un subgrupo libre de índice finito en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, entonces el producto semidirecto natural $G = F \ltimes \mathbb{Z}^2$ es C-ordenable, pero no admite órdenes recurrentes. Por lo tanto, G es un grupo C-ordenable que no posee órdenes recurrentes.

2. El grupo G de presentación $\langle f, g : fgf^{-1} = g^{-1} \rangle$ admite órdenes recurrentes a derecha, pero no admite órdenes bi-invariantes (de hecho, todo orden en este grupo es recurrente a derecha), pues G admite sólo un número finito de órdenes: ver teorema 3.2.4. Observe que G es el grupo fundamental de la botella de Klein.

En lo que sigue de esta tesis, y salvo mención de lo contrario, los *órdenes* admitidos por un grupo serán *supuestos invariantes a izquierda.*

Proposición 1.2.9. *Sea G un grupo dotado de un orden $\prec$. Si g y h son dos elementos positivos en G tales que $g \prec h^n$ para algún entero positivo n, entonces $g^{-1}hg \in G_+$.*

Demostración. Sea n el menor entero positivo tal que $g \prec h^n$. Si $g^{-1}hg \prec id$, entonces $hg \prec g \prec h^n$, por lo que $g \prec h^{n-1}$, lo cual contradice la definición de n. $\square$

Proposición 1.2.10. *Sean G un grupo ordenado, $g \in G$, $h \in G$ y $f \in G_+$. Si $g \prec h$ y existe un entero positivo n tal que $f \prec (g^{-1}h)^n$, entonces $gf \prec hf$.*

Demostración. Por la proposición anterior, $id \prec f^{-1}(g^{-1}h)f = (gf)^{-1}(hf)$, de donde se deduce que $gf \prec hf$.

□

El siguiente lema sobre sucesiones "casi subaditivas" es bastante conocido. Una demostración de éste, puede encontrarse en [12, lema 2.2.1, p. 34].

Lema 1.2.11. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números reales. Suponga que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leq C$$

para todo m, n en $\mathbb{Z}$. Entonces existe un único $\rho \in \mathbb{R}$ tal que la sucesión $(|a_n - n\rho|)_{n\in\mathbb{Z}}$ es acotada. Además ρ coincide con el límite de la sucesión (a_n/n) cuando n tiende a $\pm\infty$ (en particular, dicho límite existe).

La siguiente proposición es debida a Conrad [4].

Proposición 1.2.12. *Si G es un grupo ordenado con un orden $\preceq$ arquimediano, entonces $\preceq$ es bi-invariante.*

Demostración. Sea $h \in G_+$ un elemento arbitrario. Debemos probar que $g^{-1}hg \in G_+$ para todo $g \in G$. Si $g \in G_+$ esto resulta de la proposición 1.2.9. Supongamos que $g \in G_-$ es tal que $g^{-1}hg \in G_-$. Entonces $g^{-1}h^{-1}g \in G_+$. Como $g^{-1} \in G_+$, por el caso anterior se tiene $g(g^{-1}h^{-1}g)g^{-1} \in G_+$. Por lo tanto, $h^{-1} \in G_+$, lo cual es una contradicción. □

El siguiente teorema, debido también a Hölder (ver [13]), representa el resultado más importante de esta sección. Una demostración alternativa a la que daremos aparece en [3, teo. 1, p. 45].

Teorema 1.2.13. *Si G admite un orden arquimediano, entonces G es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

Demostración. Por la proposición 1.2.12, si $\preceq$ es arquimediano entonces $\preceq$ es bi-invariante. Fijemos un elemento positivo f en G. Como $\preceq$ posee la propiedad arquimediana, para cada $g \in G$ y cada $p \in \mathbb{N}$ existe un único entero $q = q(p)$ tal que $f^q \preceq g^p \prec f^{q+1}$.

- El siguiente límite existe.

$$\lim_{p\to\infty} \left\{ \frac{q}{p} : f^q \preceq g^p \prec f^{q+1} \right\}. \tag{1.1}$$

En efecto, si

$$f^{q(p_1)} \preceq g^{p_1} \prec f^{q(p_1)+1} \tag{1.2}$$

y

$$f^{q(p_2)} \preceq g^{p_2} \prec f^{q(p_2)+1}, \tag{1.3}$$

entonces multiplicando a derecha por $f^{q(p_2)}$ en (1.2), obtenemos que

$$f^{q(p_1)}f^{q(p_2)} \preceq g^{p_1}f^{q(p_2)} \prec f^{q(p_1)+q(p_2)+2}.$$

Multiplicando a izquierda en (1.3) por g^{p_1}, se tiene que

$$g^{p_1}f^{q(p_2)} \preceq g^{p_1}g^{p_2} \prec g^{p_1}f^{q(p_2)+1}.$$

Multiplicando la desigualdad $g^{p_1} \prec f^{q(p_1)+1}$ (debida a (1.2)) a derecha por $f^{q(p_2)+1}$, obtenemos $g^{p_1}f^{q(p_2)+1} \prec f^{q(p_1)+q(p_2)+2}$. Por lo tanto,

$$f^{q(p_1)+q(p_2)} \preceq g^{p_1+p_2} \prec f^{q(p_1)+q(p_2)+2},$$

de donde se obtiene que $q(p_1) + q(p_2) \leq q(p_1 + p_2) < q(p_1) + q(p_2) + 1$. La afirmación resulta entonces del lema 1.2.11.

Denotaremos $\phi(g)$ al límite dado por la expresión (1.1). Observe que el valor de $\phi(g)$ es finito. En efecto, para $g \in G$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n \preceq g \prec f^{n+1}$. Luego,

$$f^{np} \preceq g^p \prec f^{(n+1)p},$$

de donde se concluye que

$$n = \lim_{p\to\infty} \frac{np}{p} \leq \phi(g) \leq \lim_{p\to\infty} \frac{(n+1)p-1}{p} = n+1.$$

- La aplicación $\phi : G \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ es un homomorfismo.

  Sean g_1, g_2 elementos arbitrarios de G. Si $f^{q_1} \preceq g_1^p \prec f^{q_1+1}$ y $f^{q_2} \preceq g_2^p \prec f^{q_2+1}$, entonces por la bi-invariancia de $\preceq$ tenemos

$$\begin{aligned} f^{q_1+q_2} &\preceq g_1^p g_2^p \preceq & f^{q_1+q_2+2} \\ f^{q_1+q_2} &\preceq g_2^p g_1^p \prec & f^{q_1+q_2+2}. \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente por inducción que $g_1^p g_2^p \preceq (g_1g_2)^p \preceq g_2^p g_1^p$, o bien $g_2^p g_1^p \preceq (g_2g_1)^p \preceq g_1^p g_2^p$. Por lo tanto,

$$f^{q_1+q_2} \preceq (g_1g_2)^p \preceq f^{q_1+q_2+2},$$

por lo que

$$\begin{aligned}\phi(g_1)+\phi(g_2) &= \lim_{p\to\infty}\frac{q_1}{p}+\lim_{p\to\infty}\frac{q_2}{p}\\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{q_1+q_2}{p}\\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{q_1+q_2+1}{p}\\ &= \phi(g_1g_2).\end{aligned}$$

- El homomorfismo ϕ es inyectivo.

  Observe que ϕ preserva orden, es decir, si $g_1 \preceq g_2$ entonces $\phi(g_1) \leq \phi(g_2)$. Note además que $\phi(f) = 1$. Sea h un elemento de G tal que $\phi(h) = 0$. Supongamos que $h \neq id$. Existe entonces un entero n tal que $h^n \succeq f$. De lo anterior se concluye que $0 = n\phi(h) = \phi(h^n) \geq \phi(f) = 1$, lo cual es absurdo. Luego, si $\phi(h) = 0$ entonces $h = id$, lo cual prueba que ϕ es inyectiva.

$\square$

A modo de observación referente al enunciado del teorema anterior, es importante decir que Hölder supuso una hipótesis más fuerte (que la que se utiliza en estas notas) para el orden $\preceq$ en G: él supone a priori que $\preceq$ es bi-invariante (además de asumir que éste posee la propiedad arquimediana). El teorema en toda su generalidad fue demostrado por Conrad.

1.3. La propiedad de Conrad

Recordemos que un grupo G admitiendo un orden $\preceq$ tiene la *propiedad de Conrad* si para todo par de elementos positivos h, g en G, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $hg^n \succ g$. Los grupos que satisfacen esta propiedad son llamados C-*ordenables*, y el orden correspondiente $\preceq$ es llamado un C-orden.

El resultado que se presenta a continuación posee una demostración dinámica, la cual será expuesta en el segundo capítulo de este trabajo. La demostración algebraica propuesta aquí es debida a la tesista.

Proposición 1.3.1. *Si $\preceq$ es un C-orden en un grupo G entonces para todo $f \succ id$ y $h \succ id$ se tiene $fh^2 \succ h$.*

Demostración. Sea $\preceq$ un orden para el cual existen $f \succ id$ y $g \succ id$ en G tales que $fg^2 \preceq g$. Tenemos entonces que $id \prec g \preceq g^{-1}f^{-1}g = (fg)^{-1}g$, por lo que

$$\begin{aligned}
(fg)^n &\prec (fg)^{n-1}g = (fg)^{n-2}fg^2 \\
&\preceq (fg)^{n-2}g = (fg)^{n-3}fg^2 \\
&\preceq (fg)^{n-3}g = (fg)^{n-4}fg^2 \\
&\vdots \\
&\preceq fg^2 \\
&\preceq g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(fg)^n \prec g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $f(fg)^n \prec fg$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, si escribimos $h = fg$, concluimos que existen $f \succ id$ y $h \succ id$ en G tales que $fh^n \prec h$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\preceq$ no es un C-orden. □

Observación 1.3.2. En la siguiente sección probaremos que si $\preceq$ es un C-orden entonces $fg^{n+1} \succ g^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, condición que es equivalente a $g^{-n}fg^{n+1} \succ id$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La proposición a continuación nos entrega condiciones necesarias y suficientes para que un orden en un grupo G posea la propiedad de Conrad.

Proposición 1.3.3. *Si G es un grupo admitiendo un orden $\preceq$, entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

(i) *Para todo g y h elementos positivos en G existe un entero positivo n tal que $(hg)^n \succ gh$;*

(ii) *para todo $id \prec g \prec h$ existe un entero positivo n tal que $g^{-1}h^ng \succ h$;*

(iii) *para todo par de elementos positivos g, h en G existe un entero positivo n tal que $hg^n \succ g$.*

Demostración. Si $g \prec h$, entonces $g^{-1}h \succ id$. Luego si admitimos (i), entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^{-1}h^n g = (g^{-1}hg)^n \succ gg^{-1}h = h.$$

Así (i) implica (ii). Si $id \prec g$, entonces $h \prec hg$. Luego si aceptamos (ii), entonces existe n tal que $(gh)^n = h^{-1}(hg)^n h \succ hg$. De esta manera obtenemos que (ii) implica (i). Si (i) es falsa, entonces

$$h(gh)^n \prec h(gh)^n g = (hg)^{n+1} \prec gh$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que (iii) es falsa. Luego (iii) implica (i). Si $g \preceq h$, entonces $g \preceq h \prec hg$; luego con $n = 1$ obtenemos (iii). Si $g \succ h \succ id$, entonces $g = hf$, donde $f = h^{-1}g \succ id$. Si admitimos (i) entonces $(hf)^n \succ fh$ para algún entero positivo n. De este modo,

$$hg^n = h(hf)^n \succ hfh = gh \succ g.$$

Luego (i) implica (iii). □

La siguiente caracterización de un orden Conrad tiene como consecuencia que todo subgrupo finitamente generado de un grupo G es C-ordenable si y sólo si G es C-ordenable. Para una demostración ver [12].

Proposición 1.3.4. *Sea G un grupo. G es C-ordenable si y sólo si para todo subconjunto finito $\{g_1, ..., g_n\}$ de $G \setminus \{id\}$ existe una elección de exponentes $e_1, ..., e_n$ en $\{-1, 1\}$ tal que id no pertenece al menor semigrupo $\langle\langle g_1^{e_1}, ..., g_n^{e_n}\rangle\rangle$ que satisface simultáneamente las siguientes dos propiedades:*

(i) *éste contiene todos los elementos de la forma $g_i^{e_i}$,*

(ii) *para todo par de elementos g, h en el semigrupo, el elemento $g^{-1}hg^2$ también pertenece a él.*

1.3.1. Subgrupos convexos

Sean $\preceq$ un orden en un grupo G y H un subgrupo de G. Diremos que H es convexo en G (respecto a $\preceq$) si para todo $g \in G$, $h_1 \in H$ y $h_2 \in H$,

$$h_1 \preceq g \preceq h_2 \text{ implica que } g \in H.$$

Equivalentemente, podemos decir que H es convexo en G si para todo $g \in G$ y $h \in H$,

$$id \preceq g \preceq h \text{ implica que } g \in H.$$

Note que G y $\{1\}$ son subgrupos convexos en G. A los restantes subgrupos convexos en G se le denominará no triviales o propios.

Ejemplo 1.3.5. Si consideramos el orden lexicográfico en $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, el cual es bi-invariante (ver el ejemplo 1.1.14), entonces el conjunto $\{(0, m) : m \in \mathbb{Z}\}$ es el único subgrupo convexo propio de G.

Para probar esto, escribamos $H = \{(0, m) : m \in \mathbb{Z}\}$. Claramente H es un subgrupo propio de G.

Si $(0,0) \leq (n_1, n_2) \leq (0, m)$ entonces $n_1 = 0$ y $0 \leq n_2 \leq m$. Por lo tanto, tenemos que $(n_1, n_2) \in H$, y por consiguiente H es convexo.

Sea ahora H' un subgrupo convexo conteniendo estrictamente a H. Si $(m_1, m_2) \in H' \setminus H$ entonces $m_1 \neq 0$. Como $(0, m_2)$ pertenece a H, tenemos que $(m_1, 0)$ está en H', y por convexidad H' contiene a $\{(m, 0) : m \in \mathbb{Z}\}$. Luego, $H' = \mathbb{Z}^2$.

Como primera propiedad a mencionar, tenemos que el conjunto de todos los subgrupos convexos de un grupo G es (totalmente) ordenado por inclusión. Para demostrar esto consideremos dos subgrupos convexos H y H' de G, y supongamos que $h' \in H' \setminus H$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $h' \in G_+$ (en caso contrario $h'^{-1} \in G_+$). Tomemos $h \in H \cap G_+$. Entonces $id \preceq h \prec h'$, porque H es convexo y $h' \notin H$. De este modo $h \in H'$ y $H \cap G_+ \subset H'$. Pero como H' es un grupo, concluimos que $H \subset H'$. Así, el conjunto de todos los subgrupos convexos de un grupo es (totalmente) ordenado por inclusión.

Como consecuencia de lo anterior se deduce que tanto uniones como intersecciones arbitrarias de subgrupos convexos de G son subgrupos convexos de G.

Proposición 1.3.6. *Si H es un subgrupo convexo de G y $g \in (G \setminus H) \cap G_+$, entonces $Hg \subset (G \setminus H) \cap G_+$.*

Demostración. Si $h \in H$ entonces $h^{-1} \prec g$, pues de lo contrario $id \preceq g \preceq h^{-1}$, lo cual implicaría que $g \in H$. Por lo tanto, $id = hh^{-1} \prec hg$. $\square$

Note que cambiando h por h^{-1} en la demostración anterior, también se tiene que $gH \subset (G \setminus H) \cap G_+$ (esto es importante de remarcar, pues H no es necesariamente normal).

Los tres lemas que se presentan a continuación son de gran utilidad para demostrar el teorema 1.3.13, el cual representa un importante resultado en este trabajo.

Lema 1.3.7. *Supongamos que G satisface las propiedades de la proposición 1.3.3. Sean $g \in G$ y f, h en G_+. Si $g \prec f^m$ y $h \prec f^n$ para ciertos enteros positivos m y n, entonces existe un entero positivo l tal que $gh \prec f^l$.*

Demostración. Supondremos sin pérdida de generalidad que $m = n$. De la hipótesis $h \prec f^n$ obtenemos que $gh \prec gf^n$. Debido a esto, si demostramos que existe un entero positivo r tal que $f^n \prec g^{-1}f^r$, entonces $gf^n \prec f^r$, por lo que $gh \prec f^r$. Supongamos por contradicción que $g^{-1}f^r \preceq f^n$ para todo r. Entonces $g^{-1}f^{n+l} \preceq f^n$ para todo $l \geq 0$. Pero $g \prec f^n$, por lo que $f^l g \prec f^{n+l}$ y $g^{-1}f^l g \prec g^{-1}f^{n+l} \preceq f^n$ para todo $l \geq 0$. De esta manera obtenemos que $g^{-1}(f^n)^l g \prec f^n$ para todo $l \geq 0$. Sin embargo, esto contradice la propiedad (ii) del lema 1.3.3. □

Antes de enunciar el segundo lema, es importante introducir el concepto de *cubrimiento* para subgrupos convexos. Si H y H' son dos subgrupos convexos de G, diremos que H' cubre a H si *no* existe subgrupo convexo T de H' tal que $H \subseteq T \subseteq H'$ y $H \neq \mathrm{T} \neq H'$. Si H' cubre a H, entonces el par (H, H') es llamado *salto convexo* (ver [2]).

Lema 1.3.8. *Asumamos que G satisface las propiedades de la proposición 1.3.3. Si H y H' son subgrupos convexos de G tales que H' cubre a H y si f, h pertenecen a $(H' \setminus H) \cap G_+$, entonces existe un entero positivo n tal que $f^n \succ h$. En particular, si G no contiene subgrupos convexos propios, entonces G es isomorfo a un subgrupo del grupo aditivo de los números reales.*

Demostración. Supongamos vía contradicción que $f^n \prec h$ para todo entero positivo n (obseve que si $f^n = h$, entonces $f^{2n} = hf^n > h$). Sea $\mathrm{S} = \{g \in G : id \prec g \prec f^n \text{ para algún } n\}$. Claramente S es un subconjunto convexo, y por el lema anterior S es un semigrupo dentro de G. Consideremos $\mathrm{F} = \mathrm{S} \cup \mathrm{S}^{-1} \cup \{id\}$, donde $\mathrm{S}^{-1} = \{g \in G : g^{-1} \in \mathrm{S}\}$. Vamos a demostrar que F es un subgrupo de G. Lo primero que afirmamos es que si g es un elemento de F, entonces $g^{-1} \in \mathrm{F}$, pues si $g \in \mathrm{F}$, entonces $g = id$, $g \in \mathrm{S}$ o $g \in \mathrm{S}^{-1}$. Luego, tenemos que $g^{-1} = id$, $g^{-1} \in \mathrm{S}^{-1}$ o $g \in \mathrm{S}$. De esta manera, obtenemos que $g^{-1} \in \mathrm{F}$.

Supongamos ahora que g_1 y g_2 son elementos de F.

- Si una de las tres igualdades $g_1 = id$, $g_2 = id$ o $g_1g_2 = id$ es satisfecha, entonces $g_1g_2 \in$ F. Ahora si g_1, g_2 pertenecen a S, entonces debido a que S es un semigrupo tenemos que $g_1g_2 \in$ F. Por último, si g_1, g_2 pertenecen a S^{-1}, entonces $g_2^{-1}g_1^{-1} = (g_1g_2)^{-1} \in$ S. Luego, $(g_1g_2) \in \mathrm{S}^{-1} \subset$ F, y así $g_1g_2 \in$ F.

- Si $g_1 \in$ S y $g_2 \in \mathrm{S}^{-1}$, entonces $g_1g_2 \prec g_1$.

  (i) Si $id \prec g_1g_2$, entonces $id \prec g_1g_2 \prec g_1$. De esta manera, como $g_1 \in$ S, obtenemos que $g_1g_2 \in$ S, y por consiguiente en F.

  (ii) Si $id \succ g_1g_2$, entonces $id \prec (g_1g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1^{-1}$. Como $g_1^{-1} \prec id$ tenemos que $g_2^{-1}g_1^{-1} \prec g_2^{-1}$. Concluimos que $(g_1g_2)^{-1} \in$ S, ya que $g_2^{-1} \in$ S. De esta forma, obtenemos que $(g_1g_2)^{-1} \in$ S y, por lo tanto, $g_1g_2 \in$ F.

- Supongamos ahora que $g_2 \in$ S y $g_1 \in \mathrm{S}^{-1}$.

  (i) Si g_1g_2 y g_2g_1 pertenecen al cono positivo G_+ de G, entonces debido a la afirmación (i) del lema 1.3.3 obtenemos que

  $$g_2 = g_2g_1g_1^{-1} \prec (g_1^{-1}g_2g_1)^n = g_1^{-1}g_2^ng_1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}.$$

  De esto concluimos que $id \prec g_1g_2 \prec g_2^ng_1 \prec g_2^n$, y así $g_1g_2 \in$ F.

  (ii) Si g_1g_2 y g_2g_1 pertenecen a G_-, entonces $(g_1g_2)^{-1}$ y $(g_2g_1)^{-1}$ son elementos de G_+. Por lo que cambiando g_1 por g_1^{-1} y g_2 por g_2^{-1} en (i), obtenemos que $g_1g_2 \in$ F.

  (iii) Si $g_1g_2 \in G_+$ y $g_2g_1 \in G_-$, entonces $g_1^{-1}g_2^{-1} \in G_+$. Luego, debido a la afirmación (iii) del lema 1.3.3, tenemos que $g_2 \prec (g_1^{-1}g_2^{-1})g_2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego, $id \prec g_1g_2 \prec g_2^{n-1}$, y así $g_1g_2 \in$ F.

Hemos obtenido que F es un subgrupo de G. Además, debido a que S es convexo, tenemos que F es un subgrupo convexo de G.

Si $g \in H \cap G_+$, entonces $g \prec f$ ya que en el caso contrario $id \preceq f \prec g$ con $g \in H$ y así f sería un elemento de H. De esta forma $H \cap G_+ \subset$ F, y como F es un grupo, esto implica que $H \subset$ F. Notemos que $H \neq$ F, pues f es un elemento de F que no está en H. Si $g \in$ F $\cap G_+$, entonces de $id \preceq g \prec f^n$ con $f^n \in H'$ se concluye que g es un elemento de H'. Por lo tanto, F $\subset H'$. Ahora, como h es un elemento de H', el cual no está en F, obtenemos que F $\neq H'$. Podemos concluir entonces que $H \subset$ F $\subset H'$ y $H \neq$ F $\neq H'$. Sin embargo, esto contradice el hecho que H' cubre a H, lo cual completa la prueba de la primera afirmación del lema.

Ahora, si G no posee subgrupos convexos propios (es decir sólo $\emptyset$ y G son subgrupos convexos de G), entonces de la primera parte se deduce que $\preceq$ es un orden arquimediano para G. Por el teorema 1.2.14, G es isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$. $\square$

Corolario 1.3.9. *Supongamos que G satisface las condiciones de la proposición 1.3.3. Entonces el orden $\preceq$ es arquimediano si y sólo si G no contiene subgrupos convexos propios.*

Lema 1.3.10. *Supongamos que G satisface las condiciones de la proposición 1.3.3. Si H y H' son subgrupos convexos de G tales que H' cubre a H, entonces H es normal en H'.*

Demostración. Consideremos $g^{-1} \in (H' \setminus H) \cap G_+$. Demostraremos primero que $g^{-1}hg \prec g^{-1}$, para todo $h \in H$.

Por la proposición 1.3.5, $h^{-1}g^{-1} \in (H' \setminus H) \cap G_+$. Así debido al lema anterior $(h^{-1}g^{-1})^n \succ g^{-1}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces si usamos la proposición 1.2.1, obtenemos que $g^{-1}(h^{-1}g^{-1})g \succ id$ y de esta forma $g^{-1}hg \prec g^{-1}$. Consideremos ahora $h \in H$ y supongamos que $g^{-1}hg \in H' \setminus H$. Si $g^{-1}hg \in (H' \setminus H) \cap G_+$, entonces por el lema anterior existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^{-1}h^n g = (g^{-1}hg)^n \succ g^{-1},$$

pero $h^n \in H$, así $g^{-1}h^n g \prec g^{-1}$. En caso contrario, si $(g^{-1}hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}g$ es un elemento de $(H' \setminus H) \cap G_+$, entonces

$$g^{-1}h^{-n}g = (g^{-1}h^{-1}g)^n \succ g^{-1},$$

pero $h^{-n} \in H$, así $g^{-1}h^{-n}g \prec g^{-1}$. Luego $g^{-1}Hg \subset H$.

Para demostrar la contención contraria, es decir que $H \subset g^{-1}Hg$, usaremos el hecho que para cada $h \in (H' \setminus H) \cap G_+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h^n \succ g^{-1}$. Si asumimos la condición (ii) del teorema 1.3.3, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(g^{-1}h^n g)^m \succ h^n$. Luego,

$$(g^{-1}hg)^{nm} \in (H' \setminus H) \cap G_+,$$

y por lo tanto

$$g^{-1}hg \in (H' \setminus H) \cap G_+,$$

de lo cual se concluye que

$$g^{-1}[(H' \setminus H) \cap G_+]g \subset (H' \setminus H) \cap G_+,$$

y

$$g^{-1}(H' \setminus H)g \subset (H' \setminus H),$$

luego $g^{-1}Hg \subset H$ y de esta manera concluimos para este caso que H es normal en H', es decir $g^{-1}Hg = H$.

Ahora, si consideramos $g^{-1} \in (H' \setminus H) \cap G_-$ y definimos $\pi(h) = g^{-1}hg$ para todo $h \in H$, entonces usando (debido a lo anterior) que $\pi(H) = H$, obtenemos que $\pi^{-1}(\pi(H)) = \pi^{-1}(H)$, lo cual implica que $\pi^{-1}(H) = H$. □

El teorema que se presenta a continuación nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un orden en un grupo G posea la propiedad de Conrad en términos de sus subgrupos convexos.

Teorema 1.3.11. *Las siguientes propiedades de un grupo ordenado G admitiendo un orden $\preceq$ son equivalentes:*

(i) *para cada par de elementos g, h en G_+ existe un entero positivo n tal que $(hg)^n \succ gh$,*

(ii) *si H y H' son subgrupos convexos de G tales que H' cubre a H, entonces H es normal en H' y H'/H es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

Demostración. El hecho que (i) implica (ii) resulta inmediatamente de los tres lemas anteriores.

Recíprocamente, supongamos que G satisface (ii), y consideremos dos elementos g y h en G_+. Primero asumamos que $h \preceq g$. Sean G^g la intersección de todos los subgrupos convexos de G que contienen a g y G_g la unión de todos los subgrupos convexos de G que no contienen a g. Entonces, debido a lo mencionado al comienzo de esta sección, G^g y G_g son subgrupos convexos de G, y claramente G^g cubre a G_g. De esta manera, G^g/G_g es isomorfo a un subgrupo del grupo aditivo de los números reales. Usando las propiedades de $(\mathbb{R}, +)$, obtenemos que existe un entero positivo n tal que

$$(hg)^n G_g = [(hG_g)(gG_g)]^n \succ (gG_g)(hG_g) = gh(Gg)$$

Por lo tanto, $(gh)^{-1}(hg)^n G_g$ es positivo en G^g/G_g. Esto implica que $(hg)^n \succ gh$. El caso en que $g \prec h$ es análogo. □

Note que el último paso de la demostración es válido para $n = 2$, lo cual está directamente relacionado con la validez de la proposición 1.3.1.

Proposición 1.3.12. *Sea G un grupo admitiendo un C-orden $\preceq$. Consideremos una palabra $W(f,g) = f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k}g^{n_k}$ tal que $\sum m_i > 0$ y $\sum n_i > 0$. Si $f \succ id$ y $g \succ id$ en G, entonces $W(f,g) \succ id$ en G.*

Demostración. Debido a que el conjunto de subgrupos convexos de un grupo G es totalmente ordenado, tenemos que analizar los siguientes tres casos:

Caso 1. Si $G_g \subsetneq G_f$, entonces $g \in G_f$ ya que G_g es (por definición) el mayor subgrupo convexo de G que no contiene a g. Para todo $h \in G^f$ denotaremos su clase en G^f/G_f por $[h]$. Consideraremos $\preceq$ en G^f/G_f. De esta manera, $[g] = id$ y $[f] \succ id$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[W(f,g)] &= [f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k}g^{n_k}] \\
&= [f^{m_1}][g^{n_1}]...[f^{m_k}][g^{n_k}] \\
&= [f^{\sum m_i}] \\
&= [f]^{\sum m_i} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Se concluye que $W(f,g) \succ id$.

Caso 2. Si $G_f \subsetneq G_g$, entonces $f \in G_g$. Cambiando f por g en la demostración anterior, se obtiene (para este caso) que $W(f,g) \succ id$.

Caso 3. Si $G_g = G_f = G_0$, entonces $G^f = G^g = G^0$, y por consiguiente ni f ni g pertenecen a G_0. Debido al teorema 1.3.11, G^0/G_0 es isomorfo a un subgrupo no trivial de $\mathbb{R}$. De esta manera, el orden $\preceq$ es arquimediano en G^0/G_0, y entonces G^0/G_0 es abeliano. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[W(f,g)] &= [f^{m_1}g^{n_1}...f^{m_k}g^{n_k}] \\
&= [f^{m_1}][g^{n_1}]...[f^{m_k}][g^{n_k}] \\
&= [f^{\sum m_i}][g^{\sum n_i}] \\
&= [f]^{\sum m_i}[g]^{\sum n_i} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Concluimos que $W(f,g) \succ id$.

$\square$

1.3.2. Indicabilidad local

El teorema a continuación es debido a Conrad.

Teorema 1.3.13. *Sea G un grupo finitamente generado. Si $\preceq$ es un C-orden en G, entonces existe un homomorfismo no trivial $\phi : G \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$.*

Demostración. Sea $\preceq$ un C-orden en G. Debido al teorema 1.3.10, si H y H' son subgrupos convexos de G tales que H' cubre a H, entonces H es normal en H' y H'/H es isomorfo a un subgrupo (no trivial) de $(\mathbb{R}, +)$.

Si G no posee subgrupos convexos propios, entonces G es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. En caso contrario, es decir, si existe (al menos) un subgrupo convexo propio de G, razonamos como sigue.

Sea $F = \{f_1, ..., f_k\}$ un conjunto generador de G, formado por elementos dos a dos distintos y positivos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que f_1 es el mayor elemento relativo a $\preceq$. Sea C la unión de todos los subgrupos convexos de G que no contienen a f_1.

<u>Afirmación.</u> G cubre a C.

Supongamos que C' es un subgrupo convexo de G tal que C $\subsetneq$ C' $\subset G$. Entonces existe (al menos) un elemento en C' que no pertenece a C. Por la manera en la que fue definido C, tenemos que $f_1 \in$ C'. Luego, podemos concluir que $F \subset$ C'. De esta manera, como F genera G, obtenemos que C' $= G$.

De esta forma, G cubre a C y $G/$C es isomorfo a un subgrupo no trivial de $(\mathbb{R}, +)$ debido al teorema 1.3.11. Llamemos ψ al isomorfismo correspondiente. Consideremos la aplicación $\phi : G \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ tal que $\phi = \psi \circ p$, donde p es la proyección canónica, la cual envía g en su clase $\overline{g}$ en $G/$C.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & & (\mathbb{R},+) \\
G/\mathrm{C} \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Figura 2

La aplicación ϕ es un homomorfismo, pues ella es la composición de dos homomorfismos. Además, ϕ es no trivial, pues si lo fuera se tendría que $\psi(\overline{g}) = 0$ para todo $\overline{g} \in G/\ \mathrm{C}$, lo cual es absurdo ya que la imagen de ψ es no trivial. $\square$

El siguiente resultado es debido a Conrad. La demostración que se presenta en este trabajo fue extraída de [15].

Proposición 1.3.14. *Si G es un grupo C-ordenable entonces es localmente indicable.*

Demostración. Si H es un subgrupo no trivial finitamente generado de G, entonces H es C-ordenable con el C-orden inducido por G. Debido al teorema 1.3.13, existe un homomorfismo no trivial de H en $\mathbb{Z}^n$. De esta manera, componiendo este homomorfismo con la proyección de $\mathbb{Z}^n$ en $\mathbb{Z}$, obtenemos un homomorfismo epiyectivo $\phi : H \longrightarrow \mathbb{Z}$. $\square$

El recíproco de la proposición anterior es debido a Brodskii ([3]) y Remthulla-Rolfsen ([15]). La demostración que se presenta a continuación, la cual se apoya sobre la proposición 1.3.1, ha sido tomada de [12].

Proposición 1.3.15. *Todo grupo localmente indicable es C-ordenable.*

Demostración. Necesitamos verificar que todo grupo localmente indicable G satisface la condición en la proposición 1.3.4. Sea $\{g_1, ..., g_k\}$ una familia finita de elementos en $G \setminus \{id\}$. Por hipótesis, existe un homomorfismo no trivial $\phi_1 : \langle g_1, ..., g_k \rangle \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$. Sean $i_1, ..., i_{k'}$ los índices tales que $\phi_1(g_{i_j}) = 0$. Otra vez por hipótesis, existe un homomorfismo no trivial $\phi_2 : \langle g_{i_1}, ..., g_{i_{k'}} \rangle \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$. Consideremos $i'_1, ..., i'_{k''}$ los índices en $\{i_1, ..., i_{k'}\}$ para los cuales $\phi_2(g_{i'_j}) = 0$. Podemos continuar el proceso y elegir un homomorfismo no trivial $\phi_3 : \langle g_{i'_1}, ..., g_{i'_{k''}} \rangle \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$... Note que este proceso debería finalizar en un número finito de pasos (de hecho, éste para en a lo más k pasos). Ahora, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ elegimos el único índice $j(i)$ tal que $\phi_{j(i)}$ está definido sobre g_i y $\phi_{j(i)}(g_i) \neq 0$. Consideremos

$$\eta_i \in \{-1, 1\} \text{ tal que } \phi_{j(i)}(g_i^{\eta_i}) > 0.$$

Afirmamos que esta elección de exponentes es "compatible". De hecho, para cada índice j y cada f, g para los cuales ϕ_j están definidas se tiene que

$$\phi_j(f^{-1} g f^2) = \phi_j(f) + \phi_j(g).$$

De esta manera, tenemos que $\phi_1(g) \geq 0$ para todo $g \in \langle\langle g_1^{\eta_1}, ..., g_k^{\eta_k} \rangle\rangle$. Más aún, si $\phi_1(g) = 0$ entonces $g \in \langle\langle g_{i_1}^{\eta_{i_1}}, ..., g_{i_{k'}}^{\eta_{i_{k'}}} \rangle\rangle$. En este caso, el mismo argumento anterior muestra que $\phi_2(g) \geq 0$, obteniendo la igualdad si y sólamente si $g \in \langle\langle g_{i'_1}^{\eta_{i'_1}}, ..., g_{i'_{k''}}^{\eta_{i'_{k''}}} \rangle\rangle$... Continuando con este razonamiento, concluimos que $\phi_j(g)$ debe ser estrictamente positivo para algún índice j. De esta manera, tenemos que $\phi_j(f^{-1} g f^2) > 0$ para todo par de elementos f, g en $\langle\langle g_1^{\eta_1}, ..., g_k^{\eta_k} \rangle\rangle$, y por lo tanto, el elemento $f^{-1} g f^2$ no puede ser igual a la identidad. De esta forma, concluimos que $id \notin \langle\langle g_1^{\eta_1}, ..., g_k^{\eta_k} \rangle\rangle$, y por consiguiente que G es C-ordenable. $\square$

Capítulo 2

La teoría dinámica

2.1. Acciones por homeomorfismos de la recta

En lo que sigue, hablaremos de acción sobre la recta pensando en una acción sobre la recta por homeomorfismos que preservan orientación. El siguiente teorema representa el punto de partida en nuestro estudio de la dinámica de grupos ordenables.

Teorema 2.1.1. *Un grupo infinito numerable G actúa de manera efectiva sobre la recta por homeomorfismos que preservan orientación si y sólo si es ordenable.*

Demostración. Supongamos que G actúa de manera efectiva sobre la recta por homeomorfismos que preservan orientación. Consideremos una sucesión (x_n) densa en $\mathbb{R}$ y definamos $g \preceq h$ si $g = h$ o si el menor índice n para el cual $g(x_n) \neq h(x_n)$ es tal que $g(x_n) < h(x_n)$. Claramente $\preceq$ es un orden.

Recíprocamente, supongamos que $\preceq$ es un orden en G. Escojamos una numeración (g_i) de G, hagamos $t(g_0) = 0$, y supongamos que $t(g_0), ..., t(g_i)$ ya han sido definidos. Si g_{i+1} es mayor que $g_0, ..., g_i$ (respectivamente menor), entonces definimos $t(g_{i+1}) = \text{máx}\{t(g_0), ..., t(g_i)\}+1$ (resp. $\text{mín}\{t(g_0), ..., t(g_i)\}-1$). Finalmente, si $g_m \prec g_{i+1} \prec g_n$ para ciertos m, n en $\{0, ..., i\}$, y si g_j no está entre g_m y g_n para ningún $0 \leq j \leq i$, entonces definimos $t(g_{i+1}) = (t(g_m) + t(g_n))/2$. De esta manera, hemos obtenido una acción de G sobre $t(G)$ por $g(t(g_i)) = t(gg_i)$.

Afirmamos que esta acción se extiende continuamente a la clausura de $t(G)$. En efecto, si a está en la clausura de $t(G)$, entonces existe una sucesión

(h_n) en G tal que $a = \lim_{n\to\infty} t(h_n)$. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} g(t(h_n))$ existe. Para probar esto, dado $k \in \mathbb{N}$ diremos que f_1, f_2 en G estan k-cercanos si la posición relativa de ambos respecto a $g_0, g_1, ..., g_k$ es "casi" la misma. De manera más precisa, si $g_{i_0}, g_{i_1}, ..., g_{i_k}$ es el reordenamiento de $g_0, g_1, ..., g_k$ de acuerdo a $\prec$, y si $g_{i_j} \prec f_1 \prec g_{i_{j+1}}$, entonces $g_{i_{j-1}} \prec f_2 \prec g_{i_{j+2}}$.

Resulta directamente de la construcción lo siguiente: dados $\epsilon > 0$ y $M > 0$, existe $k = k(\epsilon, M) \in \mathbb{N}$ tal que

si $t(f_1)$ y $t(f_2)$ pertenecen a $[-M, M]$, entonces $\mathrm{dist}(t(f_1), t(f_2)) < \epsilon$ si y sólo si f_1 y f_2 están k-cercanos.

Observe que si $\epsilon \to 0$ y $M \to \infty$, entonces $k \to \infty$.

Teniendo esto en mente, probaremos que la sucesión $g(t(h_n)) = (t(gh_n))$ es de Cauchy. Fijemos $M > 0$ tal que todos los puntos $t(h_n)$ y $t(gh_n)$ están en $[-M, M]$ (se verifica fácilmente la existencia de un tal M). Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\epsilon' > 0$ tal que

$$\{g^{-1}g_0, ..., g^{-1}g_{k_\epsilon}\} \subseteq \{g_0, ..., g_{k_{\epsilon'}}\} \qquad (*).$$

Como $t(h_n)$ converge al punto $a \in \mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n_1 \geq N$ y $n_2 \geq N$, entonces $\mathrm{dist}(t(h_{n_1}), t(h_{n_2})) < \epsilon'$. Esto implica que h_{n_1} y h_{n_2} están $k_{(\epsilon', M)}$-próximos. Por (*), h_{n_1} y h_{n_2} casi tienen la misma posoción relativa a $\{g^{-1}g_0, ..., g^{-1}g_{k_\epsilon}\}$, lo cual implica que gh_{n_1} y gh_{n_2} casi tienen la misma posición relativa a $\{g_0, ..., g_{k_\epsilon}\}$. Por lo tanto, $\mathrm{dist}(t(gh_{n_1}), t(gh_{n_2})) < \epsilon$, lo cual prueba que $(t(gh_n))$ es de Cauchy.

Podemos definir entonces que

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g(t(h_n)) = \lim_{n\to\infty} g(t(h_n))$$

Por un argumento estándar de concatenación, el límite no depende de la sucesión (h_n) escogida verificando $t(h_n) \to a$. Además, la extensión obtenida es necesariamente continua.

Finalmente, extendemos la acción a toda la recta de modo que cada aplicación g sea afín sobre cada intervalo del complemento de la clausura de $t(G)$. La acción así obtenida es efectiva, pues para cada $g \neq id$ se tiene $g(t(id)) = t(g) \neq t(id)$. □

Observación 2.1.2. Fijado un orden $\preceq$ además de una numeración (g_n) de un grupo numerable G, llamamos *realización dinámica* a la acción construida en la demostración del teorema precedente. Daremos a continuación dos interesantes propiedades de dicha realización.

(i) Si G es un grupo no trivial, entonces ninguna *realización dinámica* asociada a G admite puntos fijos globales.

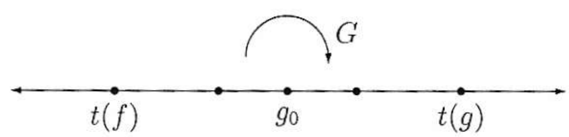

Figura 3

En efecto, si G es no trivial entonces de la construcción de la realización dinámica se deduce fácilmente que para cada $n \in \mathbb{N}$ *existen* f, g en G tales que $t(f) = -n$ y $t(g) = n$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ y n es suficientemente grande, esto implica que $t(f) < x_0 < t(g)$. Para $h = gf^{-1}$ obtenemos entonces $h(x_0) > x_0$, ya que

$$t(f) < x_0 < t(g),$$

implica que

$$h(t(f)) < h(x_0) < h(t(g)),$$

por lo que

$$x_0 < t(g) < h(x_0).$$

Por tanto, tenemos que x_0 no es un punto fijo de h. De esta manera, obtenemos que ninguna realización dinámica asociada a G admite puntos fijos globales.

(ii) Si f es un elemento de G cuya realización dinámica admite dos puntos fijos $a < b$ (que pueden ser iguales a $\pm\infty$) de modo que $]a, b[$ no contiene puntos fijos de f, entonces existe $g \in G$ tal que $t(g) \in]a, b[$.

Supongamos por contradicción que $]a, b[$ no contiene puntos de la forma $t(g)$. Entonces f en $]a, b[$ debe extenderse (por construcción) de manera afín al intervalo $[a, b]$, por lo que $f = Id$ en $]a, b[$, lo cual contradice el hecho que f no tenga puntos fijos en este intervalo.

La propiedad anterior está representada, *por ejemplo*, en la siguiente figura:

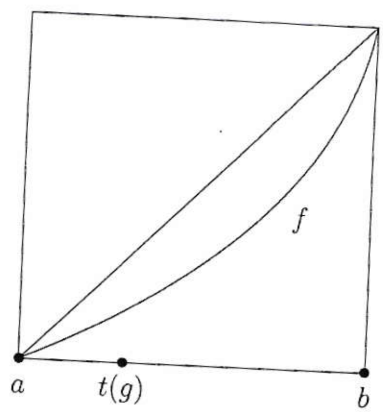

Figura 4

En el teorema anterior vimos que el hecho que un grupo (numerable) admita un orden es equivalente a que este grupo actúe efectivamente sobre la recta. Los dos lemas siguientes dicen que el hecho que G actúe libremente sobre $\mathbb{R}$ está estrechamente relacionado con la posiblidad que G posea un orden arquimedeano.

Lema 2.1.3. *Si G es un grupo que actúa libremente por homeomorfismos de la recta, entonces G admite un orden total bi-invariante y arquimediano.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo que actúa libremente por homeomorfismos de la recta. Consideremos la relación de orden $\preceq$ en G según la cual $g \prec h$ si $g(x) < h(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}$ (equivalentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, pues debido a que la *acción es libre*, si $g \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ cumple que $g(x) > x$ para algún $x \in \mathbb{R}$ (respectivamente $g(x) < x$), entonces el gráfico de g *siempre* está por sobre la diagonal (respectivamente el gráfico de g *siempre* está por debajo de la diagonal)). Claramente esta relación de orden es total.

Demostremos que el orden $\preceq$ es bi-invariante. La invariancia a izquierda es clara, pues G actúa por homeomorfismos que preservan orientación sobre $\mathbb{R}$. La invariancia a derecha, es decir, que $gf \prec hf$ si $g \prec h$ para todo $f \in G$, resulta del hecho que $g \prec h$ implica $g(x) < h(x)$ para algún x. Como la acción es libre, tenemos que $g(x) < h(x)$ para todo x y en particular, se obtiene que $gf(x) < hf(x)$.

Nos falta probar la arquimedianidad de $\preceq$. Es decir, queremos probar que para todo f, g en G, con $g \neq id$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n(x) > f(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $g \succ id$, es decir que $g(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La sucesión $(g^n(x))$ es entonces decreciente. Afirmamos que ella es no acotada. En efecto, si lo fuese entonces tendría un límite $a = \text{lím}_{n\to\infty} g^n(x)$, lo cual implicaría que

$$g(a) = g(\text{lím}_{n\to\infty} g^n(x)) = \text{lím}_{n\to\infty} g^{n+1}(x) = a,$$

contradiciendo la hipótesis de libertad. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(x) > h(x)$, lo cual implica que $g^n \succ h$. $\square$

2.2. Versión dinámica del teorema de Hölder

Recordemos que si G admite un orden arquimediano entonces G es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Sabemos además (de la demostración del teorema 1.2.13) que si fijamos un elemento positivo f en G, entonces para cada $g \in G$ y para cada $p \in \mathbb{N}$ existe un único entero $q = q(p)$ tal que $f^q \preceq g^p \prec f^{q+1}$. La aplicación ϕ definida de manera tal que

$$\phi(g) = \lim_{p\to\infty} \left\{ \frac{q}{p} : f^q \preceq g^p \prec f^{q+1} \right\},$$

es un isomorfismo ordenado (es decir, preserva orden) G y un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Como consecuencia de lo anterior y del lema 2.1.3 se tiene que *los únicos grupos que pueden actuar libremente por homeomorfismos de la recta son los subgrupos de* $(\mathbb{R}, +)$.

Supongamos que G es un grupo que actúa libremente sobre la recta. Debido al lema 2.1.3, G admite un orden bi-invariante y arquimedeano $\preceq$ tal que si $g, h \in G$, entonces $g \prec h$ si $g(x)$ es menor a $h(x)$ para algún $x \in \mathbb{R}$. Este orden permite construir un isomorfismo ϕ entre G y un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. A continuación demostraremos la siguiente afirmación: la acción de G sobre $\mathbb{R}$ por $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ es semiconjugada a la acción por traslaciones correspondiente.

Definición 2.2.1. Dos acciones ϕ_1 y ϕ_2 de un grupo G por homeomorfismos que preservan orientación de $\mathbb{R}$ son *topológicamente semiconjugadas* si existe $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y no decreciente tal que $\varphi\phi_1(g) = \phi_2(g)\varphi$ para todo $g \in G$. Si existe $\varphi \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ verificando lo anterior, entonces se dice que ϕ_1 y ϕ_2 son dos acciones *topológicamente conjugadas.*

Si $\phi(G)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$, entonces la acción de G es conjugada a la acción por traslaciones enteras de la recta. Si estamos en el caso contrario, entonces el grupo $\phi(G)$ es denso en $(\mathbb{R}, +)$. Para cada punto x de la recta definimos

$$\varphi(x) = \sup\{\phi(h) \in \mathbb{R} : h(0) \leq x\}$$

- φ es una función *no decreciente*, pues si $x < y$ entonces

  $$\{h \in G : h(0) \leq x\} \subseteq \{h \in G : h(0) \leq y\},$$

  por lo que

  $$\varphi(x) = \sup\{h \in G : h(0) \leq x\} \leq \sup\{h \in G : h(0) \leq y\} = \varphi(y).$$

- Se tiene $\varphi(h(x)) = \varphi(x) + \phi(h)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $h \in G$.

  En efecto, si escribimos $h(x) = y \in \mathbb{R}$, entonces

  $$\begin{aligned} \varphi(h(x)) = \varphi(y) &= \sup\{\phi(g) : g(0) \leq y\} \\ &= \sup\{\phi(hg) : hg(0) \leq h(x)\} \\ &= \sup\{\phi(h) + \phi(g) : g(0) \leq x\} \\ &= \sup\{\phi(g) : g(0) \leq x\} + \phi(h) \\ &= \varphi(x) + \phi(h). \end{aligned}$$

- φ es una *función continua*, pues si no lo fuera entonces $\mathbb{R} \setminus \varphi(\mathbb{R})$ (es decir, el conjunto $\mathrm{Salt}(\varphi)$ de los saltos de la función φ) sería abierto, no vacío e invariante por traslaciones de $\phi(G)$, lo cual es imposible porque $\phi(G)$ es denso en $\mathbb{R}$.

  Para demostrar la invariancia de $\mathrm{Salt}(\varphi)$ escribamos $\mathrm{Salt}(\varphi) = \mathbb{R} \setminus \varphi(\mathbb{R})$. claramente, éste es abierto y no vacío. Además, como

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{\phi(g)}(\mathrm{Salt}(\varphi)) &= \mathrm{T}_{\phi(g)}(\mathbb{R} \setminus \varphi(\mathbb{R}) \\
&= \mathbb{R} \setminus \mathrm{T}_{\phi(g)}(\varphi(\mathbb{R})) \\
&= \mathbb{R} \setminus \varphi(g(\mathbb{R})) \\
&= \mathbb{R} \setminus \varphi(\mathbb{R})) \\
&= \mathrm{Salt}(\varphi),
\end{aligned}$$

$\mathrm{Salt}(\varphi)$ es invariante por traslaciones de elementos en $\phi(G)$.

2.3. Versión dinámica de la bi-invariancia

Siguiendo [12], diremos que la acción de un grupo G por homeomorfismos de la recta que preservan orientación es *esencialmente libre* si para todo elemento $g \in G$ se tiene de manera excluyente que $g(x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o bien $g(x) \geq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La proposición a continuación, debida esencialmente a Ghys [8], entrega una contraparte algebraica para esta noción.

Proposición 2.3.1. *Un grupo numerable G admite una acción esencialmente libre sobre la recta si y sólo si es bi-ordenable.*

Demostración. Si G es bi-ordenable entonces la acción sobre la recta de la realización dinámica asociada a cualquier numeración de éste es esencialmente libre. En efecto, si $g \succ id$ entonces $gg_i \succ g_i$ para todo $g_i \in G$, y entonces $g(t(g_i)) = t(gg_i) > t(g_i)$. Debido a la construcción de la realización dinámica, tenemos que $g(x) \geq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Análogamente, tenemos que si $g \prec id$ entonces $g(x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, obtenemos que la acción es esencialmente libre.

Recíprocamente, sea G un grupo de homeomorfismos de la recta cuya acción es esencialmente libre. Queremos probar que el orden $\preceq$ asociado a cualquier sucesión de puntos de la recta (x_n) es bi-invariante. De hecho, si $f \succeq id$ entonces el gráfico de f no tiene puntos bajo la diagonal. Por otro lado, si g es cualquier elemento de G entonces lo mismo es verdad para el gráfico de gfg^{-1}. Por lo tanto, tenemos que $gfg^{-1} \succeq id$.

De esta forma hemos probado que $\preceq$ es bi-invariante. □

El siguiente resultado entrega una demostración dinámica de la proposición 1.2.12.

Proposición 2.3.2. *Todo orden arquimediano en un grupo es bi-invariante.*

Demostración. Sean $\preceq$ un orden arquimediano en un grupo G y $\{f_1, ..., f_k\}$ una familia finita de elementos en él. Consideremos alguna numeración (h_n) del grupo generada por ellos, así como su correspondiente realización dinámica. Probaremos que esta acción es libre. De hecho, si no lo fuera, existiría $h \in \langle f_1, ..., f_k \rangle$ y un intervalo $]a, b[$ (el cual no es toda la recta) tal que h fija a y b, y no tiene puntos fijos en $]a, b[$. Debido a los comentarios inmediatamente posteriores al teorema 2.1.1, tenemos que el intervalo $]a, b[$ puede ser considerado de manera tal que $b \neq \infty$. Mas aún, existe algún punto de la forma $t(h_i)$ en $]a, b[$, y conjugando por h_i si es necesario, podemos asumir que $t(id)$ pertenece a $]a, b[$. Ahora, debido a que las realizaciones dinámicas de grupos ordenables (no triviales) no poseen puntos fijos globales, tenemos que debería existir $h' \in \langle f_1, ..., f_k \rangle$ tal que $h'(t(id)) > b$. De esta manera, tenemos que $h'(t(id)) > b > h^n(t(id))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $h^n \prec h'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, lo cual viola el hecho que el orden $\preceq$ posea la propiedad arquimediana.

Ahora, consideremos $f \prec g$ y h tres elementos en G. Debido a que la realización dinámica asociada al grupo generado por ellos es libre y $f(t(id)) < g(t(id))$, obtenemos que $f(t(h)) < g(t(h))$, que es $t(fh) < t(gh)$. Por construcción esto implica que $fh \prec gh$. Como f, g y h son elementos arbitrarios de G, tenemos que $\preceq$ es un orden invariante a derecha. □

2.4. Versión dinámica de la propiedad de Conrad

2.4.1. Elementos entrecruzados, medidas invariantes y número de traslación

Al comenzar esta sección, es importante recordar que una medida definida sobre los conjuntos borelianos de un espacio topológico que es finita sobre sus compactos se denomina *medida de Radon*.

Para cada medida de Radon no trivial v sobre los borelianos de la recta consideraremos el grupo G_v de los homeomorfismos que (preservan orientación y) fijan v. Para cada $g \in G_v$ definimos el *número de traslación de g respecto a v* por

$$\tau_v(g) = \begin{cases} v([x, g(x)[) & \text{si } g(x) \geq x, \\ -v([g(x), x[) & \text{si } g(x) \leq x. \end{cases}$$

Lo primero que veremos es que dicho valor no depende de la elección de $x \in \mathbb{R}$. Para esto tomemos $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq x$. Si $y < g(y)$ (el caso en que $g(y) < y$ es análogo), tenemos los siguientes 3 casos:

- Si $y < g(x) < g(y)$, entonces

$$\begin{aligned} v([y, g(y)[) &= v([y, g(x)[) + v([g(x), g(y)[) \\ &= v([y, g(x)[) + v([x, y[) \\ &= v([x, g(x)[). \end{aligned}$$

- Si $g(x) < y < g(y)$, entonces

$$\begin{aligned} v([y, g(y)[) &= v([g(x), g(y)[) - v([g(x), y[) \\ &= v([x, y[) - v([g(x), y[) \\ &= v([x, g(x)[). \end{aligned}$$

- Si $y < g(y) < g(x)$, entonces

$$\begin{aligned} v([y, g(y)[) &= v([y, g(x)[) - v([g(y), g(x)[) \\ &= v([y, g(x)[) - v([y, x[) \\ &= v([x, g(x)[). \end{aligned}$$

Una propiedad importante del número de traslación es que la aplicación $\tau_v : G_v \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de G_v sobre $(\mathbb{R}, +)$, es decir, si $g \in G_v$ y $h \in G_v$, entonces $\tau_v(gh) = \tau_v(g) + \tau_v(h)$. Esto último se obtiene básicamente de la siguiente propiedad de v:

$$v([x, gh(x)[) = v([x, h(x)[) + v([h(x), g(h(x))[).$$

Además, para $g \in G_v$ se cumple

$$\tau_v(g) = 0 \text{ si y sólo si } g \text{ posee al menos un punto fijo.}$$

En efecto, si g posee un punto fijo x entonces $\tau_v(g) = v([x, g(x)[) = v([x, x[) = 0$. Recíprocamente, si $\mathrm{Fix}(g) = \varnothing$, entonces la órbita por g de cada punto x de la recta es no acotada en ambas direcciones. Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que $g(x) > x$ (en caso contrario reemplazamos g por g^{-1}). El hecho que $\tau_v(g) = 0$ implica que $\sum_{i=0}^{n-1} v([g^i(x), g^{i+1}(x)[) = nv([x, g(x)[) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente $v([g^{-n}(x), x[) = 0$. Luego, si hacemos tender n al infinito obtenemos $v([-\infty, \infty[) = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\tau_v(g) \neq 0$ si $\mathrm{Fix}(g) = 0$.

Una propiedad más fuerte que la anterior para el número de traslación es la siguiente:

si $\mathrm{Fix}(g) \neq \varnothing$ entonces el soporte de v está contenido en $\mathrm{Fix}(g)$.

En efecto, si suponemos que existe un boreliano A disjunto de $\mathrm{Fix}(g)$ tal que $v(A) > 0$ y $A \cap g(A) = \varnothing$, y que la sucesión de conjuntos $(g^n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada (cambiando g por g^{-1} si fuese necesario), entonces $v(\cup_{n\in\mathbb{N}} g^n(A))$ debiese ser finita. Sin embargo, esta medida es igual a $\sum_{n\in\mathbb{N}} v(g^n(A)) = \infty$.

Definición 2.4.1. Decimos que dos homeomorfismos de la recta están *entrecruzados* sobre un intervalo $]a, b[$ si uno de ellos fija $]a, b[$ pero no tiene puntos fijos en el interior, mientras que el otro envía a o b dentro de $]a, b[$.

Recalquemos que, en la definición anterior, a (respectivamente b) puede ser igual a $-\infty$ (respectivamente $+\infty$).

Veremos en lo que sigue que la existencia de medida de Radon invariante está estrechamente relacionada con el concepto de elementos entrecruzados.

Teorema 2.4.2. *Sea G un grupo finitamente generado de homeomorfismos de la recta. Si G no posee elementos entrecruzados, entonces G preserva una medida de Radon sobre los borelianos de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Si G admite puntos fijos globales entonces la afirmación es obvia: la medida de Dirac soportada en cualquiera de estos puntos es invariante por la acción.

Supongamos en lo que sigue que no hay puntos fijos globales para la acción, y fijemos un sistema finito de generadores $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ para G. Comenzamos afirmando que al menos uno de estos generadores no posee punto fijo.

Para verificar lo anterior razonamos por contradicción suponiendo que cada uno de los f_i posee puntos fijos. Sea $x_1 \in]0, 1[$ un punto fijo de f_1. Si f_2 fija x_1 entonces haciendo $x_2 = x_1$ tenemos que x_2 es fijado tanto por f_1 como por f_2. En caso contrario, escojamos un punto fijo x_2 para f_2 de modo que f_2 no posea ningún otro punto fijo entre x_1 y x_2. Como f_1 y f_2 no se entrecruzan sobre ningún intervalo, f_1 debe también fijar f_2. Si f_3 fija x_2 hacemos $x_3 = x_2$; si no, consideramos un punto x_3 que sea fijado por

f_3 de modo que f_3 no posea ningún punto fijo entre x_2 y x_3. El argumento usado anteriormente permite nuevamente probar que f_1, f_2 y f_3 fijan x_3. Continuando de esta manera podemos hallar un punto fijo común para todos los generadores f_i, es decir un punto fijo global para la realización de G, lo cual es absurdo. De esta manera obtenemos que al menos un f_k no posee punto fijo.

Afirmamos ahora que existe un conjunto cerrado no vacío invariante y minimal para la acción de G. Para probar esto consideremos un generador $f = f_i$ sin puntos fijos, fijemos un punto arbitrario x_0 de la recta, y denotemos por I al intervalo $[x_0, f(x_0)]$ si $f(x_0) > x_0$ (respectivamente $[f(x_0), x_0]$ si $f(x_0) < x_0$). En la familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados no vacíos e invariantes por G consideremos la relación de orden $\preceq$ definida por $\Lambda_1 \succeq \Lambda_2$ si $\Lambda_1 \cap I \subset \Lambda_2 \cap I$. Como f no tiene puntos fijos, toda órbita de G debe intersectar al intervalo I, por lo que $\Lambda \cap I$ es un compacto no vacío para todo $\Lambda \in \mathcal{F}$. Podemos así aplicar el lema de Zorn, el cual nos brinda un elemento maximal para el orden $\preceq$; dicho elemento maximal no es otra cosa que la intersección con I de un conjunto G-invariante cerrado no vacío y minimal $\preceq$.

Observe ahora que tanto la frontera $\partial\Lambda$ de Λ como el conjunto Λ' de los puntos de acumulación de Λ son también cerrados e invariantes por G. Debido a la minimalidad de Λ, sólo tres casos pueden presentarse.

(i) $\Lambda' = \emptyset$.
En este caso Λ es discreto, es decir Λ coincide con el conjunto de los puntos de una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo $y_n < y_{n+1}$ para todo n y que carece de puntos de acumulación. De esta manera, la medida de Radon $v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{y_n}$ es invariante por G.

(ii) $\partial\Lambda = \emptyset$.
En este caso Λ coincide con toda la recta. Afirmamos que la acción de G es libre. En efecto, si este no fuera el caso entonces existiría un elemento $g \in G$ y un intervalo $]a, b[$ estrictamente contenido en la recta de modo que g fija $]a, b[$, pero no posee punto fijo en su interior. Como la acción es minimal, debe existir un elemento $h \in G$ que envía a o b dentro de $]a, b[$; sin embargo, esto implica que g y h se entrecruzan en $]a, b[$, lo cual viola nustra hipótesis. Ahora bien, como la acción de G sobre la recta es libre, el teorema de Hölder implica que G es topológicamente conjugado a un grupo de traslación. La preimagen de la medida de Lebesgue por la conjugación resulta ser entonces una medida de Radon invariante por la acción.

(iii) $\partial\Lambda = \Lambda' = \Lambda$.
En este caso Λ es "localmente" un conjunto de Cantor. Colapsando

a un punto la clausura de cada una de las componentes conexas del complemento de Λ, obtenemos un nueva recta topológica con una G-acción inducida por semiconjugación. Como en el caso (ii), se verifica que esta nueva acción es libre, y por lo tanto preserva una medida de Radon. La preimagen de esta medida por la semiconjugación resulta ser entonces una medida de Radon invariante por la acción original de G.

□

Observación. La hipótesis de generación finita es necesaria para el teorema 2.4.2 anterior (ver [13], ejemplo 2.2.47). Sin embargo, a lo largo de la demostración dicha hipótesis fue utilizada sólo para hallar un elemento sin puntos fijos. Por lo tanto, si esta última condición es asumida como hipótesis entonces el teorema continúa siendo válido (ver 2.2.46 en [13]).

El teorema a continuación nos da una condición suficiente para que exista un homomorfismo de grupos *no trivial* de G en $(\mathbb{R}, +)$.

Teorema 2.4.3. *Si G es un grupo finitamente generado de homeomorfismos de la recta admitiendo un orden $\preceq$ bi-invariante, entonces existe un homomorfismo de grupos no trivial de G en $(\mathbb{R}, +)$.*

Demostración. Sabemos que si G es finitamente generado y $\preceq$ es un orden bi-invariante, entonces G admite una realización dinámica sin elementos entrecruzados. Debido a este último resultado, G satisface las hipótesis del teorema 2.4.2, y de esta manera G preserva una medida de Radon sobre los borelianos de $\mathbb{R}$, a la cual denotaremos v. Luego, $\tau_v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo entre los grupos G y $(\mathbb{R}, +)$. Además, tenemos que τ_v es *no trivial*, pues de lo contrario, es decir, si $\tau_v \equiv 0$ entonces todo elemento de G fija el soporte de v, lo cual es imposible para una realización dinámica. □

En la sección siguiente probaremos que lo anterior se extiende a C-órdenes.

2.4.2. Elementos entrecruzados y propiedad de Conrad

El resultado que se presenta a continuación es realmente importante, pues con él nos acercamos a la demostración del siguiente hecho: un grupo (numerable) G es C-ordenable si y sólo si existe una realización dinámica para G sin elementos entrecruzados.

Teorema 2.4.4. *Si G es un grupo numerable que admite un C-orden $\preceq$, y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier numeración de G, entonces la realización dinámica de G asociada a esta numeración es un subgrupo de $Homeo_+(\mathbb{R})$ sin elementos entrecruzados.*

Demostración. Procederemos por contradicción, así que supondremos que la realización dinámica de G es un subgrupo de Homeo$_+(\mathbb{R})$, que posee elementos entrecruzados en un intervalo $[a, b]$.

Asumiremos en lo que sigue que G es infinito, pues si G es trivial la afirmación es obvia. Debido a la propiedad (ii) vista en la Observación 2.1.2, existe $g_i \in G$ tal que $t(g_i)$ está en $]a, b[$, el cual *sin pérdida de generalidad* podemos considerar igual a $t(g_0) = t(id) = t$, ya que si conjugamos f y g por $g_0g_i^{-1}$ obtenemos que

$$g_0g_i^{-1}t(g_i) = t(g_0g_i^{-1}g_i) = t(g_0) = t(id).$$

Esta situación se ilustra en la figura 5 (donde $g' = g_0g_i^{-1}$).

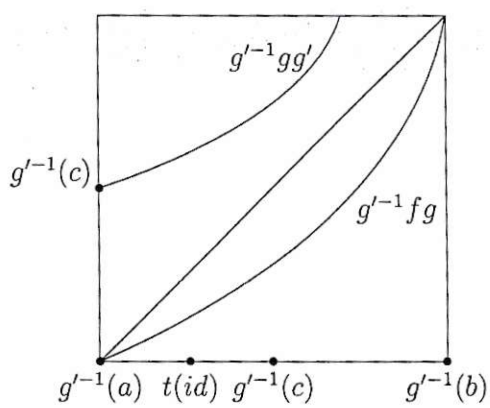

Figura 5

Sean g y f un par de elementos entrecruzados en $[a, b]$. Cambiando f por su inversa si es necesario, podemos suponer que $f(x) < x$ para todo $x \in [a, b]$ y $g(a) \in]a, b[$ (el caso en que $g(b)$ pertenece a $]a, b[$ es análogo). Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $gf^n(a) = g(a) = c$. Además, $f^n(d) \longrightarrow a$ cuando n tiende al infinito, por lo que $gf^n(d) \longrightarrow g(a) = c$. También

$$c < gf^n(d) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ (ver Figura 6)}.$$

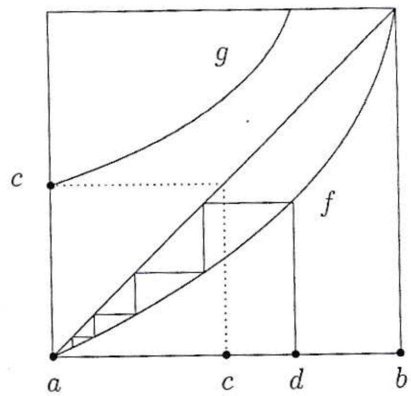

Figura 6

Escribamos $h_n = gf^n$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se tiene que $h_n(a) > a$ y $h_n(d) < d$. Así, debido al teorema del valor intermedio, gf^n posee (al menos un) punto fijo en $]a, d[$. Definimos las sucesiones (c_n) y (c'_n) tales que

$$\mathrm{Fix}(h_n) \cap]a, d[\subset [c_n, c'_n] \subset]c, h_n(d)[\text{ y } \{c_n, c'_n\} \subset \mathrm{Fix}(h_n).$$

Necesariamente (c_n) y (c'_n) convergen a c por la derecha (ver la figura 7 a continuación). Observamos que cada h_n satisfaciendo las propiedades precedentes es un elemento positivo de G, pues

$$h_n(t(g_0)) > h_n(a) = c > t(g_0),$$

de lo cual se concluye que $t(h_n) > t(id)$ y por construcción de la realización dinámica esto implica que $h_n \succ id$.

Fijemos $m > n$ suficientemente grandes de modo que las propiedades anteriores se verifiquen para h_m y h_n y se cumpla además que $[c_m, c'_m] \subset]c, c_n[$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera tal que $h_n^k(a) > h_m(c_n)$, y definamos $h = h_m^k$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $h^i(t(g_0)) \in]h_m(c_n), c_n[$, y por lo tanto

$$h_m h^i(t(g_0)) < h_m(c_n) < h(a) < h(t(g_0)).$$

Luego, $h_m h^i \prec h$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sin embargo, esto viola la propiedad de Conrad.

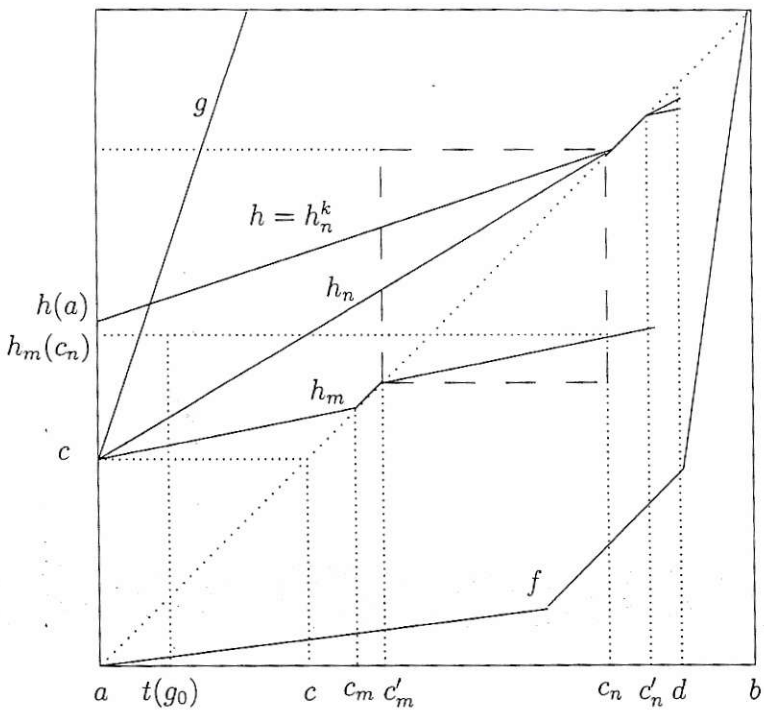

Figura 7

De esta manera, hemos probado que si $\preceq$ posee la propiedad de Conrad, entonces la realización dinámica de G (asociada al orden $\preceq$ y la numeración escogida) no admite elementos entrecruzados. $\square$

Como "recíproco" del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5. *Sea (x_n) una sucesión densa y numerable de puntos de la recta. Si G es un subgrupo de Homeo$_+(\mathbb{R})$ sin elementos entrecruzados, entonces la relación de orden inducida por (x_n) y construida en la demostración del teorema 2.1.1 satisface la propiedad de Conrad.*

Demostración. Sea $\preceq$ la relación de orden inducida por (x_n) y construida en la demostración del teorema 2.1.1. Dados $f \succ id$ y $g \succ id$ en G, queremos probar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $fg^k \succ g$.

Consideremos el subgrupo $\langle f, g\rangle$ de G generado por los elementos f y g. Debido a que f y g son elementos positivos de G, existen $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

(i) n es el menor índice para el cual $f(x_n) \neq x_n$ con $f(x_n) > x_n$, y

(ii) m es el menor índice para el cual $g(x_m) \neq x_m$ con $g(x_m) > x_m$.

Escojamos $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ y $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que sean puntos fijos globales para $\langle f, g\rangle$ y de manera tal que en $]a, b[$ no existan puntos fijos globales para $\langle f, g\rangle$. Como $\langle f, g\rangle$ no posee elementos entrecruzados, existe una v medida de Radon v invariante en $]a, b[$. De esta forma, $\tau_v : \langle f, g\rangle \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ es no trivial, ya que al menos un elemento de $\langle f, g\rangle$ no posee puntos fijos en $]a, b[$ (vea la demostración del teorema 2.4.2).

Tenemos tres casos posibles: $m > n$, $m = n$ y $m < n$.

Caso 1. Si $m > n$, entonces $g(x_n) = x_n$. Debido a esto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$f(g^k(x_n)) = f(x_n) > x_n,$$

y como $f(g^k(x_i)) = x_i = g(x_i)$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$, concluimos que $fg^k \succ g$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Caso 2. Si $m = n$, entonces de $g(x_n) > x_n$ se concluye que $g^2(x_n) > g(x_n)$. Si $fg^2(x_n) > g^2(x_n)$ entonces $fg^2 \succ g$. Si $f(g^2(x_n)) = g^2(x_n)$, entonces $f(g^2(x_n)) > g(x_n)$, así $fg^2 \succ g$. Por último, si $f(g^2(x_n)) < g^2(x_n)$, entonces debido a que $f(x_n) > x_n$, obtenemos que $\mathrm{Fix}(f) \cap]a, b[\neq \emptyset$, es decir que f posee (al menos) un punto fijo en el intervalo $]a, b[$, lo cual implica que $\tau_v(f) = 0$. Sin embargo, $\tau_v(g) > 0$, ya que $g(x_n) > x_n$. Como $\tau_v(g^{-1}fg^2) = \tau_v(g) > 0$, tenemos que $g^{-1}fg^2(t) > t$ para todo $t \in]a, b[$. Luego para $t = x_n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}fg^2(x_n) &> x_n \\ fg^2(x_n) &> g(x_n), \end{aligned}$$

y de esta forma $fg^2 \succ g$.

Caso 3. Si $m < n$, $g(x_m) > x_m$, por lo que $g^2(x_m) > g(x_m)$. De esta manera, si $fg^2(x_m) \geq x_m$ entonces $fg^2 \succ g$. Ahora, si $f(g^2(x_m)) < g^2(x_m)$, entonces $\tau_v(f) = 0$, ya que $f(x_n) > x_n$. Por otro lado, $\tau_v(g) > 0$ ya que g traslada x_m a la derecha. De manera análoga al caso 2 y considerando $t = x_m$, concluimos que $fg^2 \succ g$.

$\square$

Como hemos visto, la propiedad de Conrad para un orden invariante a izquierda posee una consecuencia dinámica bastante útil. Usaremos esto para dar una demostración alternativa (extraida de [12]) a la entregada en el capítulo 1 de la proposición 1.3.1.

Proposición 2.4.6. *Si* $\preceq$ *es un C-orden en* G, *entonces* $fh^2 \succ h$ *para todo* $f \succ id$ *y* $h \succ id$ *en* G.

Demostración. Sean f y g elementos positivos en G. Consideremos el grupo $\langle f, g \rangle$ enumerado de manera tal que el primer elemento sea la identidad. Por el teorema 2.4.4 la realización dinámica de $\langle f, g \rangle$ es un subgrupo de $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$ sin elementos entrecruzados. Por lo tanto, $\langle f, g \rangle$ preserva una medida de Radon v sobre los borelianos de la recta. Para cada elemento $h \in \langle f, g \rangle$ definimos el número de traslación de h respecto a v, el cual denotaremos por $\tau_v(h)$.

Afirmación. Si $\tau_v(h) > 0$, entonces $h \succ id$.

Si $\tau_v(h) > 0$, entonces h mueve todos los puntos de la recta hacia la derecha, pues de lo contrario $\mathrm{Fix}(h) \neq \emptyset$ y $\tau_v(h) = 0$. En particular, si consideramos $t(id) \in \mathbb{R}$,

$$t(h) = t(h \circ id) = h(t(id)) > t(id).$$

De esta forma $t(h) > t(id)$ y $h \succ id$.

Como $\langle f, g \rangle$ no posee puntos fijos globales debido a la observación 2.1.2, el homomorfismo $\tau_v : \langle f, g \rangle \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ es no trivial. Debemos analizar entonces los siguientes tres casos:

(i) $\tau_v(f) > 0$ y $\tau_v(g) > 0$,

(ii) $\tau_v(f) > 0$ y $\tau_v(g) = 0$,

(iii) $\tau_v(f) = 0$ y $\tau_v(g) > 0$.

No obstante, para cualquiera de éstos,

$$\begin{aligned} \tau_v(g^{-1} f g^2) &= \tau_v(g^{-1}) + \tau_v(f) + \tau_v(g^2) \\ &= -\tau_v(g) + \tau_v(f) + 2\tau_v(g) \\ &= \tau_v(f) + \tau_v(g) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1}fg^2 \succ id$, lo cual implica que $fg^2 \succ g$. $\square$

Observación. Bajo las mismas hipótesis de la proposición anterior se puede concluir (análogamente) que $fg^{n+1} \succ g^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo par de elementos positivos f, g en G. De manera más general, se puede además dar una demostración alternativa de la proposición 1.3.12.

A continuación se presenta una demostración dinámica del teorema 1.3.11.

Teorema 2.4.7. *Si G es un grupo finitamente generado que admite un C-orden $\preceq$, entonces existe un homomorfismo no trivial $\phi : G \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$.*

Demostración. Debido al teorema 2.4.4, G admite una realización dinámica (asociada al orden $\preceq$ y a la numeración (g_n)) sin elementos entrecruzados. Luego, G deja invariante una medida de Radon v, y de esta manera podemos definir el homomorfismo $\tau_v : G \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, el cual es claramente no trivial (ver demostración del teorema 2.4.2). $\square$

A continuación estudiaremos la relación entre elementos entrecruzados y semigrupos libres para un grupo de homeomorfismos de la recta.

Definición 2.4.8. Dos elementos f, g de un grupo G generan un semigrupo libre si los elementos de la forma $f^n g^{m_r} f^{n_r} ... g^{n_1} f^{n_1} g^m$, con n_j y m_j enteros positivos, $m \geq 0$ y $n \geq 0$, son dos a dos distintos para elecciones diferentes de los exponentes.

El siguiente criterio para encontrar semigrupos libres a dos generadores dentro de grupos de homeomorfismos de variedades unidimensionales es bastante conocido.

Lema 2.4.9. *Todo subgrupo G de $Homeo_+(\mathbb{R})$ que posee dos elementos entrecruzados contiene un semigrupo libre a dos generadores.*

Demostración. Supongamos que f y g se entrecruzan en un intervalo $[a, b]$. Entonces $\mathrm{Fix}(f) \cap [a, b] = \{a, b\}$ y $g(a) \in]a, b[$ (el caso en que $g(b) \in]a, b[$ es análogo). Cambiando f por su inversa si es necesario, podemos suponer que $f(x) < x$ para todo $x \in]a, b[$. Definamos $c = g(a)$ en $]a, b[$ y fijemos un punto d' en $]c, b[$. Como $gf^n(a) = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $gf^n(d')$ converge a c cuando n tiende al infinito, tenemos que para n suficientemente grande la aplicación gf^n posee un punto fijo sobre $]a, d'[$. Fijemos un tal $n \in \mathbb{N}$ y sea

$d > c$ el ínfimo de los puntos fijos de gf^n en $]a,b[$. Para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tenemos $f^m(d) < c$, por lo que el lema del ping-pong positivo (ver [13]) aplicado a las restricciones de f^m y gf^n a $[a,b]$ prueba que el semigrupo generado por tales elementos es libre. □

Usando el teorema 2.4.7 y el lema 2.4.9, se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 2.4.10. *Sea G un grupo ordenable finitamente generado. Si G no contiene semigrupos libres a dos generadores, entonces existe un homomorfismo de grupos no trivial entre G y $(\mathbb{R},+)$.*

2.4.3. Una visión dinámica de los subgrupos convexos

Recordemos que dado $g \in G \setminus \{id\}$ definimos G^g (respectivamente G_g) como la intersección (respectivamente la unión) de todos los subgrupos convexos de G que contienen (respectivamente que no contienen) a g.

Además, si μ es una medida de Radon G-invariante entonces definimos el homomorfismo $\tau_\mu : G \longrightarrow (\mathbb{R},+)$, el cual preserva orden (es decir, si $g \preceq h$ entonces $\tau_\mu(g) \leq \tau_\mu(h)$).

Proposición 2.4.11. *Si G es un grupo finitamente generado C-ordenable no trivial y μ es una medida de radon G-invariante para una realización dinámica de G, entonces existe $g \in G \setminus \{id\}$ tal que $G_g = ker(\tau_\mu)$.*

Demostración. Supongamos que G está generado por el conjunto $\{g_1, ..., g_k\}$ de elementos positivos de G. Sin pérdida de generalidad, asumamos que g_1 es el mayor de estos generadores respecto al C-orden $\preceq$. Considerando una realización dinámica cualquiera de G, debido a los teoremas 2.4.2 y 2.4.4 existe una medida de Radon μ sobre la recta invariante por G.
Afirmación: $G_{g_1} = ker(\tau_\mu)$.

Dividiremos la prueba de la afirmación en las siguientes tres partes:

(i) *$ker(\tau_\mu)$ es convexo.* Sean $f \in ker(\tau_\mu)$, $h \in ker(\tau_\mu)$ y $g \in G$ tales que $f \preceq g \preceq h$. Como el homomorfismo τ_μ preserva orden tenemos que $\tau_\mu(f) \leq \tau_\mu(g) \leq \tau_\mu(h)$. Concluimos que $\tau_\mu(g) = 0$, y de esta manera $g \in ker(\tau_\mu)$.

(ii) $g_1 \notin ker(\tau_\mu)$. En efecto, en caso contrario $0 \leq \tau_\mu(g_i) \leq \tau_\mu(g_1)$ para todo $i \in \{2, ..., k\}$, y por consiguiente τ_μ sería trivial, lo cual es imposible debido a que G no posee puntos fijos globales.

(iii) G *cubre a* $ker(\tau_\mu)$. Supongamos que existe un subgrupo convexo G' de G (pues G es no trivial) tal que $ker(\tau_\mu) \subsetneq G' \subsetneq G$. Sea h un elemento de G' que no pertenece a $ker(\tau_\mu)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h \succ id$, y por lo tanto $\tau_\mu(h) > id$. De esta forma $h(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por consiguiente existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h^n(0) > g_1(0) > 0$. Obtenemos entonces que $h^n \succ g_1 \succ id$, y como G' es convexo tenemos que $g_1 \in G'$. Debido a que $g_1 \succ g_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, obtenemos que $g_i \in G'$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que $G = G'$.

□

Teorema 2.4.12. *Sean G un grupo admitiendo un orden Conrad $\preceq$ y $g \in G$. Si G^g es un subgrupo numerable de G y μ es una medida de Radon invariante por la realización dinámica de G^g, entonces $G_g = ker(\tau_\mu)$.*

Demostración. Observaremos la realización dinámica de G^g (ver Figura 7).

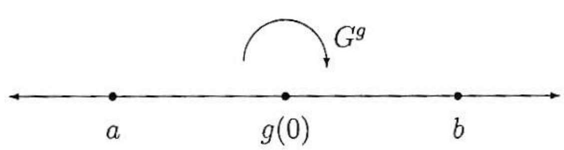

Figura 8

Probaremos que el conjunto de puntos fijos de g es vacío. Supongamos por contradicción que $a < 0$ y $b > 0$ pertenecen al conjunto (de puntos fijos de g) $Fix(g)$, por lo tanto, g pertenece al estabilizador $Est([a, b]) \subseteq G^g$ del intervalo $[a, b]$. De esta manera obtenemos que $Est([a, b])$ es convexo en G^g (y por tanto convexo en G), ya que si $h_i \in Est([a, b])$ para todo $i \in \{1, 2\}$ tal que $h_1 \prec h \prec h_2$, entonces

$$a < h_1(0) < h(0) < h_2(0) < b.$$

Por lo tanto, $a < h(0) < b$. A partir de g (que fija a y b) y h construimos elementos entrecruzados (ver Figura 9), lo cual contradice el hecho que $\preceq$ posea la propiedad de Conrad. De esta manera, concluimos que $Fix(g) = \emptyset$.

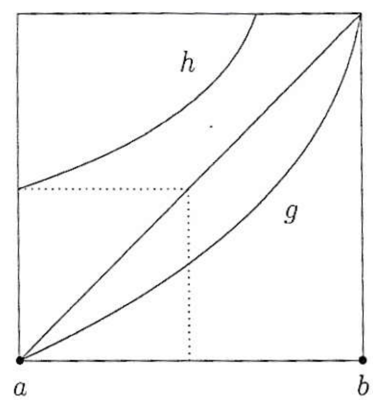

Figura 9

Recordando la demostración del teorema 2.4.2 podemos concluir que existe una medida de Radon invariante μ para G^g. De esta forma, podemos definir el homomorfismo $\tau_\mu : G^g \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$.

Afirmación. $ker(\tau_\mu) = G_g$.

Primero probamos que $g \notin ker(\tau_\mu)$, pues como $Fix(g) = \emptyset$ y g preserva orientación, entonces $\tau_\mu(g) > 0$. Además, $ker(\tau_\mu)$ es el mayor subgrupo convexo contenido en G^g (ver la demostración de (ii) y (iii) de la proposición anterior). $\square$

Capítulo 3

El espacio de órdenes de un grupo

3.1. Definiciones y hechos generales

Ya vimos que un grupo (ordenable) puede admitir muchos órdenes. En este capítulo presentaremos una idea de Ghys y Sikora [16], la cual consiste en estudiar el espacio de órdenes de un grupo ordenable. En particular, estudiaremos la acción de un grupo sobre el espacio de todos sus órdenes. A continuación expondremos esto de manera más precisa.

Si G es un grupo ordenable, denotaremos por $\mathrm{Ord}(G)$ al conjunto de todos los órdenes en G (este espacio, al igual que la definición a continuación, se pueden introducir para semigrupos arbitrarios). La siguiente definición muestra que dicho conjunto posee una topología natural.

Definición 3.1.1. Un conjunto es abierto en $\mathrm{Ord}(G)$ si y sólo si es unión de conjuntos abiertos básicos de la forma

$$U_{f_1,...,f_n} = \{\preceq : f_1 \preceq f_2 \preceq ... \preceq f_n\},$$

donde $\{f_1, ..., f_n\}$ es una familia finita de elementos de G.

Para simplificar, supongamos en lo que sigue que G es finitamente generado. Fijemos un sistema finito y simétrico de elementos $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_m\}$ (recuerde que el vocablo simétrico significa que si $g \in \mathcal{G}$ entonces $g^{-1} \in \mathcal{G}$). Para cada $g \in G$ definimos la longitud de g como el número mínimo de elementos (no necesariamente distintos) de $\mathcal{G}$ que son necesarios para representar g. En términos más precisos,

$$long(g) = \min\{n \in \mathbb{N} : g = g_{i_n} \cdot g_{i_{n-1}} \cdot \ldots \cdot g_{i_1},\ g_{i_j} \in \mathcal{G}\}.$$

LLamamos *bola de radio* n respecto a $\mathcal{G}$ al conjunto $B_{\mathcal{G}}(n)$ de los elementos de G de longitud menor o igual a n, y denotamos por $L_{\mathcal{G}}(n)$ su cardinalidad.

De esta manera, si fijamos un sistema finito y simétrico de generadores $\mathcal{G}$ de G, entonces podemos definir una distancia entre dos elementos distintos $\leq$ y $\preceq$ de $\mathrm{Ord}(G)$ haciendo

$$dist(\leq, \preceq) = e^{-n},$$

donde n es el máximo entero no negativo tal que los órdenes $\leq$ y $\preceq$ coinciden sobre la bola $B_{\mathcal{G}}(n)$ de radio n en G. En otras palabras, n es el mayor entero no negativo tal que para todo g, h en $B_{\mathcal{G}}(n)$ se tiene que $g \leq h$ si y sólo si $g \preceq h$. Haciendo $dist(\preceq, \preceq) = 0$ para todo orden $\preceq$, obtenemos que la función $dist$ recién definida es una métrica. De hecho, el espacio resultante verifica la propiedad ultramétrica.

El grupo G actúa sobre $\mathrm{Ord}(G)$ por conjugación (o equivalentemente, por multiplicación a derecha): dados un orden $\preceq$ con cono positivo G_+ y un elemento $f \in G$, la imagen de $\preceq$ bajo f es el orden $\preceq_f$ cuyo cono positivo es el conjugado fG_+f^{-1} de G_+ por f. En otras palabras, se tiene que

$$g \preceq_f h \text{ si y sólo si } gf^{-1} \preceq hf^{-1}.$$

Claramente, tenemos que si $\preceq$ es un orden, entonces $\preceq_f$ también lo es. Además, tenemos que $\preceq_{fg} = (\preceq_f)_g$. Por consiguiente, hemos definido una acción de G sobre el espacio de todos sus órdenes.

Recordemos que un espacio es *totalmente disconexo* si para cada par de puntos distintos x, y existen abiertos disjuntos V_x y V_y que cubren el espacio y tales que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. El lema que sigue fue observado independientemente por Ghys y Sikora. La demostración de la afirmación (i) fue obtenida de [16], mientras que la de (ii) fue extraida de [19].

Lema 3.1.2. *Para todo grupo finitamente generado G tenemos lo siguiente:*

(i) *El espacio $Ord(G)$ es compacto totalmente disconexo, y*

(ii) *G actúa sobre $Ord(G)$ por homeomorfismos.*

Demostración. Para todo par de órdenes distintos $\leq_1, \leq_2$ en $\mathrm{Ord}(G)$ existen g, h en G tales que $\leq_1 \in U_{g,h}$ y $\leq_2 \in U_{h,g}$, ya que de lo contario $\leq_1$ y $\leq_2$ coinciden. Como $U_{g,h} \cup U_{h,g} = \mathrm{Ord}(G)$ y $U_{g,h} \cap U_{h,g} = \emptyset$ tenemos que $\mathrm{Ord}(G)$ es totalmente disconexo. Ahora probaremos que $\mathrm{Ord}(G)$ es compacto. Sea ρ la métrica en $\mathrm{Ord}(G)$ asociada a un sistema de generadores $\mathcal{G}$. Necesitamos probar que toda sucesión infinita $\leq_1, \leq_2, ...$ en $\mathrm{Ord}(G)$ tiene un subsucesión convergente. Construiremos ésta de la siguiente manera: Debido a que existe una cantidad finita de órdenes sobre $B_{\mathcal{G}}(1)$, tenemos que existe una subsucesión infinita $\leq_1^1, \leq_2^1, ...$ de $\leq_1, \leq_2, ...$ cuyos elementos inducen el mismo orden en $B_{\mathcal{G}}(1)$. Luego, extraemos una subsucesión infinita $\leq_1^2, \leq_2^2, ...$ de ésta, cuyos elementos coinciden sobre $B_{\mathcal{G}}(2)$. Continuando este proceso, consideremos la sucesión $\leq^1, \leq^2, ...$ construida haciendo corresponder el n-ésimo término de ella con la n-ésima sucesión contruida antes para $n \in \{1, 2, ...\}$.
Afirmación. La secuencia $\leq^1, \leq^2, ...$ converge hacia el orden $\leq^\infty$, definido como sigue:

$$a \leq^\infty b \text{ si y sólo si } a \leq^n b \text{ para casi todo } n.$$

Si g y h son elementos de $B_{\mathcal{G}}(r)$ entonces $a \leq^i b$ para $i > r$ o bien $b \leq^i a$ para $i > r$. De esta manera, tenemos que $\leq^\infty$ es un orden para G. Como $\rho(\leq^n, \leq^\infty) \leq \frac{1}{e^n}$, obtenemos que la sucesión $\leq^1, \leq^2, ...$ converge a $\leq^\infty$. De esta forma hemos probado la afirmación, y por consiguiente, hemos probado (1).

Para probar (2) notamos que, por definición, la acción de G sobre $\mathrm{Ord}(G)$ es una acción por biyecciones. Además, la imagen del conjunto abierto $U_{f_1,...,f_n}$ bajo un elemento f de G es el abierto $U_{f_1 f,...,f_n f}$, por lo que la acción de G es por homeomorfismos. □

Observación 3.1.3. *La compacidad de Ord(G) vale también para grupos no finitamente generados: ver [12].*

3.2. Órdenes Conrad en $\mathrm{Ord}(G)$

En el capítulo 1, vimos que un orden $\preceq$ sobre un grupo G posee la propiedad de recurrencia a derecha si para todo par de elementos positivos f, g en G existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $gf^n \succ f^n$. Además, probamos que tal orden $\preceq$ posee la propiedad de Conrad (es decir, es un C-orden). De acuerdo a la definición dada en la sección anterior, observamos que el conjunto de los C-órdenes y el conjunto de los órdenes recurrentes a derecha son invariantes bajo la acción de G por conjugación.

En lo que sigue, miraremos algunas propiedades de un orden bi-invariante, Conrad y recurrente a derecha, desde un punto de vista topológico. Para esto, notemos primero que el conjunto de órdenes bi-invariantes sobre G es cerrado (siempre que no sea vacío) en el espacio $\mathrm{Ord}(G)$, de acuerdo a la siguiente proposición debida a Sikora [16].

Proposición 3.2.1. *El conjunto de órdenes bi-invariantes es cerrado en Ord(G).*

Demostración. Sea $(\preceq_n)$ una sucesión de órdenes bi-invariantes convergiendo a $\preceq$ en $\mathrm{Ord}(G)$. Si f y g son elementos de G tales que $f \preceq g$, entonces $f \preceq_n g$ para n suficientemente grande. De esta manera, para cada $h \in G$ tenemos $fh \preceq_n gh$ para n suficientemente grande. Luego, pasando al límite de esta última desigualdad tenemos que $fh \preceq gh$ para todo $h \in G$. Por lo tanto, el orden $\preceq$ es bi-invariante. □

De manera análoga se tiene la siguiente proposición extraida de [12].

Proposición 3.2.2. *El conjunto de los C-órdenes es cerrado en Ord(G).*

Demostración. Sea $(\preceq_n)$ una sucesión de C-órdenes convergiendo a $\preceq$ en $\mathrm{Ord}(G)$. Si f y g son elementos estrictamente positivos (respecto a $\preceq$) de G, entonces para n suficientemente grande se tiene que $id \prec_n f$ y $id \prec_n g$. Como cada orden $\preceq n$ posee la propiedad de Conrad, debido a la proposición 1.3.1 tenemos $fg^2 \succ_n g$ para n suficientemente grande. Pasando al límite obtenemos $fg^2 \succ g$, lo cual muestra que $\preceq$ también verifica la propiedad de Conrad. □

La propiedad de recurrencia a derecha no es tan clara como la propiedad de Conrad o la de bi-invariancia. De hecho, como el siguiente ejemplo muestra, no existe análogo de las proposiciones 1.3.1 y 3.2.1 para órdenes recurrentes a derecha.

Ejemplo 3.2.3. Sea f la traslación $x \mapsto x+1$ y sea g cualquier homeomorfismo que preserva orientación del intervalo unitario tal que $g(x) > x$ para todo $x \in]0,1[$. Fijemos una sucesión creciente (n_i) de enteros no negativos tales que $n_0 = 0$ y $n_{2k+1} - n_{2k}$ tiende a infinito cuando k lo hace. Extendemos g a un homeomorfismo de la recta definiendo, para $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in [n, n+1]$,

$$g(x) = \begin{cases} f^n g f^{-n}(x) & \text{si } n = n_{2k}, \\ f^n g^{-1} f^{-n}(x) & \text{si } n = n_{2k+1}, \\ x & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

No es difícil verificar que el grupo G generado por f y g es isomorfo al grupo $(\mathbb{Z},+) \wr (\mathbb{Z},+)$. Para cada k, sea $\preceq_k$ el orden sobre G definido por $h_1 \prec_k h_2$ si y sólo si el mínimo entero $i \geq n_{2k}$ para el cual $h_1(i+1/2) \neq h_2(i+1/2)$ es tal que $h_1(i+1/2) < h_2(i+1/2)$. Es claro que $\preceq_k$ es recurrente a derecha (note que $\preceq_k$ coincide con la imagen de $\preceq_0$ por $f^{-n_{2k}}$). Además ningún punto de adherencia $\preceq$ de la sucesión deórdenes $\preceq_k$ es recurrente a derecha. De hecho, los elementos f y g son positivos para todos los órdenes $\preceq_k$. Por otro lado, tenemos que $gf^n \prec_k f^n$ para todo $n \in \{1, ..., n_{2k+1} - n_{2k}\}$, y pasando al límite obtenemos que $gf^n \prec f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Saber cuáles son todos los grupos que admiten *sólo* órdenes recurrentes constituye un problema abierto. El siguiente resultado se relaciona de algún modo a este problema.

Lema 3.2.4. *Si un grupo ordenable G admite sólo una cantidad finita de órdenes, entonces cada elemento de Ord(G) es recurrente a derecha.*

Demostración. Como Ord(G) es finito, entonces todos sus puntos son periódicos por la acción de cualquier elemento de G. De esta manera, cada orden en Ord(G) es recurrente a derecha. □

A continuación, se presenta un importante resultado de Tararin [17] (ver [10] para una demostración detallada). Éste dice relación con los grupos admitiendo una cantidad finita de órdenes. Para establecer este resultado, recordemos que el rango de un grupo abeliano libre de torsión es la menor dimensión del espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ en el cual el grupo es enviado. Una *serie racional* para un grupo G es una sucesión finita de subgrupos

$$\{id\} = G^k \subset G^{k-1} \subset ... \subset G^0 = G,$$

la cual es subnormal (que es, cada G^i es normal en G^{i-1}), y tal que cada cociente G^{i-1}/G^i es abeliano libre de torsión de rango 1. Note que cada grupo que admite una serie racional es ordenable.

Teorema 3.2.5. *Si G es un grupo que admite una serie racional*

$$\{id\} = G^k \subset G^{k-1} \subset ... \subset G^0 = G,$$

entonces su espacio de órdenes $Ord(G)$ es finito si y sólo si los subgrupos G^i son normales en G, y el cociente G^{i-2}/G^i es bi-ordenable. Si éste es el caso, entonces G admite una única serie racional, y para cada orden sobre G los subgrupos convexos son precisamente $G^0, G^1, ..., G^k$.

De hecho, el número de órdenes sobre un grupo que satisfacen las propiedades anteriores es igual a 2^k. Más aún, si elegimos $g_i \in G^i \setminus G^{i-1}$, tenemos que cada uno de tales órdenes está únicamente determinado por la colección de signos de los elementos g_i.

Bibliografía

[1] G. Bergman. *Right-orderable groups wich are not locally indicable.* Pac. J. Math. **147** (1991), 243-248.

[2] R. Botto Mura & A. Rhemtulla. *Orderable groups.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **27**, Marcel Dekker (1977).

[3] S. Brodskii. *Equation over groups, and groups with one defining relation.* Sibirsk Mat. Zh. **25** (1984), 84-103. Traducción al inglés en Siberian Math. Journal **25** (1984), 235-251.

[4] P. Conrad. *Right-ordered groups.* Michigan Math. J. **6** (1959), 267-273.

[5] P. Dehornoy. *Braids and Self-Ditributivity.* Progress in Mathematics **192**, Birkhäuser (1999).

[6] D. Dummit & R. Foote. *Abstract Algebra, second edition.* John Wiley and sons, Inc. (1999).

[7] L. Fuchs. *Partially ordered algebraic systems.* Pergamon Press (1963).

[8] E. Ghys. *Groups acting on the circle.* L'Enseignement Mathématique **47** (2001), 329-407.

[9] A. M. W. Glass. *Partially ordered groups.* World Scientific, River Edge, NJ (1999).

[10] V. Kopytov, N. Medvedev. *Right ordered groups.* Siberian School of Algebra and Logic. Plenum Publ. corp. New York (1996).

[11] P. Linnell. *The topology on the space of left orderings of a group.* Prepublicación (2006).

[12] A. NAVAS. *On the dynamics of (left) orderable groups.* Prepublicación (2007).

[13] A. NAVAS. *Grupos de difeomorfismos del círculo.* Ensaios Matemáticos, Braz. Math. Soc. (2007).

[14] M. ONISHI. *Linear order on a group.* Osaka Math. J. **4** (1952), 17-18.

[15] A. RHEMTULLA & D. ROLFSEN. *Local indicability in ordered groups: braids and elementary amenable groups.* Proc. Amer. Soc. **130** (2002), 2569-2577.

[16] A. S. SIKORA. *Topology on the spaces of orderings of groups.* Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 519-526.

[17] V. TARARIN. *On groups having a finite number of orders.* Dep. Viniti (Report), Moscow (1991).

[18] W. THURSTON. *A generalization of Reeb stability theorem.* Topology **13** (1974), 347-352.

[19] D. WITTE MORRIS. *Amenable groups that act on the line.* Algebraic & Geometric Topology **6** (2006), 2509-2518.