El Problema de Albert en Dimensiones Bajas

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas.
Facultad de Ciencias

por

Pedro Pablo Julca Córdova
Enero del 2004

Director de Tesis: Dr. Ivan Correa Sierra

Co-Directora de Tesis: Dra. Alicia Labra Jeldres

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

PEDRO PABLO JULCA CORDOVA

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 30 de Enero de 2004.

Director de Tesis:

Dr. Ivan Correa ....

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Rolando Pomareda (Presidente) ....

Dr. Alberto Elduque ....

Dra. Alicia Labra (Co-Directora de Tesis) ....

A mi madre Luisa Marina

y hermanos

José Santos, Jhoni, Luis Alberto y Bertila.

Indice

Resumen

En este trabajo estudiamos el problema de Albert sobre la solubilidad de las nilálgebras conmutativas y asociativas en las potencias de dimensión finita. Específicamente, estudiamos el problema en dimensión siete, dimensión ocho y nilíndice cuatro y algunos casos de dimensión nueve con nilíndice cuatro. Nuestro principal resultado es que todas estas álgebras son solubles.

Abstract

In this work we study the Albert's Problem on solvability of commutative finite dimensional power associative nilalgebras. Specificaly, we study the problem in dimension seven, dimension eigth and nilindex four and some cases of dimension nine and nilindex four. Our main result is that all these algebras are solvable.

Introducción

En 1843 Hamilton consiguió construir una estructura algebraica que satisfacía todos los axiomas de cuerpo, excepto la conmutatividad. Este sistema de números llamados *Cuaterniones,* fue el primer ejemplo de "cuerpo no conmutativo". Es así que en 1847, se estaba forjando una teoría matemática que merecía ser estudiada con más atención, la de las *álgebras no conmutativas.* Dos meses después de descubierto los Cuaterniones, Graves presentó los *Octonios,* definiendo una multiplicación en R^8. Este sistema de números fué descubierto en forma independiente por Cayley en 1845. Por esta razón son llamados también los *números de Cayley.* Esta estructura también es no conmutativa pero además no satisface la asociatividad. Así comienza una nueva teoría, la de las *álgebras no asociativas.*

La historia de la teoría de las álgebras asociativas y no asociativas están entrelazadas, pues hay una influencia recíproca. A partir de 1930, la investigación de las álgebras no asociativas avanzó velózmente en muchas direcciones. Por ejemplo, éstas aparecen de manera natural en algunos modelos matemáticos sobre el comportamiento reproductivo de poblaciones en genética, siendo Y. I. Lyubich uno de los padres de esta área de la matemática llamada *álgebras genéticas* (ver por ejemplo Structures in Population Genetics[21]). Las álgebras no asociativas aparecen también en el modelamiento del comportamiento de los llamados observables en mecánica cuántica. Esta interpretación llevó a la construcción de las llamadas *álgebras de Jordan,* en el trabajo de Jordan, von Neumann y Wigner[19] en 1934. A pesar (y afortunadamente!) de los esfuerzos de los hombres de ciencia, existen muchos problemas abiertos en álgebras no asociativas.

Un problema ya clásico en álgebras no asociativas, es el basado en una conjetura planteada por Albert en 1948, a saber,

¿Es toda nilálgebra conmutativa, asociativa en las potencias y dimensión finita nilpotente?.

D. Suttles[25] construye en 1972 un contraejemplo a esta conjetura. Sin embargo, el álgebra construida por Suttles, si bien no es nilpotente, satisface una condición un poco más débil, a saber, es *soluble.* A raíz de esto, se formuló el siguiente problema, el cual aún permanece abierto, conocido como el *Problema de Albert:*

¿ Es toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión finita, soluble ?

Los estudios acerca de este problema han sido satisfactorios solamente para algunos tipos especiales de álgebras, pero la respuesta global aún representa un enigma para los matemáticos. En el intento de solucionar el problema de Albert, se tienen como consecuencia muchos resultados interesantes que aportan de manera particular a la solución de dicho problema. En esta dirección tenemos el resultado de Gerstenhaber y Myung[14]. Ellos prueban que toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión cuatro sobre un cuerpo de característica distinta de dos es nilpotente, de aquí soluble. Correa y Suazo obtuvieron en [3] una generalización del resultado de Gerstenhaber y Myung probando que toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de nilíndice n con dimensión n es nilpotente de índice n. De aquí, tenemos que estas álgebras son también solubles. Estos resultados requieren que la característica del cuerpo sea distinta de 2 y de 3. El caso no conmutativo fué considerado por Correa y Hentzel en [4]. Ellos probaron que si A es una nilálgebra no conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión n con nilíndice n sobre un cuerpo de característica distinta de 2,3 entonces A es soluble y A^2 es nilpotente. Correa y Peresi probaron en [5] que toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión cinco es soluble de índice menor o igual que 3. Estos resultados requieren que la característica del cuerpo sea distinta de 2 y de 3. Recientemente J. C. Gutiérrez, en un trabajo aún no publicado, probó que toda nilálgebra conmutativa de dimensión menor o igual a seis es soluble, quitando la hipótesis de asociatividad en las potencias. Además probó que si la dimensión es n y el nilíndice es $n-1$ ó $n-2$, entonces el álgebra es soluble. Todos estos resultados requieren ciertas restricciones mínimas sobre la característica del cuerpo subyacente.

A través de los trabajos existentes, relacionados al problema de Albert, se puede inferir una fuerte e importante relación entre la nilpotencia o solubilidad de las álgebras y las nilpotencias de ciertos operadores lineales llamados operadores multiplicación. Un estudio de la nilpotencia de estos operadores fué hecho por M. Gerstenhaber en una serie de artículos llamados "On nilalgebras and linear varieties of nilpotente matrices", I, II y III, respectivamente entre 1958 y 1960 (ver Referencias [15, 16, 17]). Gerstenhaber en [16] prueba que bajo ciertas restricciones mínimas a la característica del cuerpo, toda álgebra conmutativa de dimensión finita que satisface una ecuación del tipo $((...((xx)x)...)x)x = 0$ satisface una ecuación de la forma $((...((yx)x)...)x)x = 0$.

Originalmente el problema de esta Tesis consistió en estudiar el problema de Albert en dimensión siete. Hemos logrado resolver este problema y además solucionar parcialmente el caso de dimensión ocho. Aplicamos un método que consiste en estudiar las posibles bases de las álgebras usando las representaciones matriciales canónicas de Jordan de los operadores multiplicación para ciertos elementos del álgebra. Se puede eventualmente aplicar el mismo método para el estudio de dimensiones mayores, estudio que se ve un tanto dificultado por la falta de identidades polinomiales de grados bajos.

En el Capítulo 1 enunciamos algunos resultados conocidos y que serán usados en los siguientes capítulos. Además probamos algunos resultados de álgebra lineal que serán fundamentales en las técnicas usadas en las demostraciones de los Capítulos 2, 3 y 4. Algunos de estos resultados fueron obtenidos en colaboración con los Profesores Ivan Correa, Irvin Hentzel y Luiz Antonio Peresi y se encuentran contenidos en el artículo [10] de las Referencias.

En el Capítulo 2 resolvemos el problema de Albert para dimensión siete para álgebras sobre un cuerpo de característica cero o mayor que siete. Los métodos utilizados son una extensión de los usados para dimensión seis en el artículo [6] de las Referencias.

En el Capítulo 3 resolvemos el problema de Albert para dimensión ocho y nilíndice cuatro. Cabe agregar que en este capítulo los métodos sufren una modificación al utilizar un reciente resultado sobre solubilidad obtenido por Correa y Hentzel en [11]. Como consecuencia de este resultado reducimos la cantidad de casos a estudiar. Los resultados de este capítulo fueron anunciados en el LXXV Encuentro de la Sociedad de Matemática de Chile, realizado en Octubre del 2003. Los mismos resultados fueron presentados de manera independiente y paralela por A. Suazo en el mismo Encuentro. Sin embargo el método utilizado por A. Suazo no permite una extensión a casos de dimensiones mayores que ocho. Esto debido a que las identidades utilizadas en dimensión menor que nueve no se cumplen para dimensiones mayores, lo cual el autor prueba con un ejemplo. Finalmente, en el Capítulo 4, presentamos algunos avances del problema para dimensión nueve.

Deseo agradecer al asesor de esta Tesis, el Profesor Ivan Correa por la valiosa guía que me brindó, sin la cual no hubiese prosperado este trabajo. También agradezco al Director de Postgrado del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Profesor Rolando Pomareda, primeramente por la confianza que tuvo en mi persona al ayudarme en la aceptación en la Escuela de Postgrado y además, por su sugerencia de tomar en Enero del 2003 el curso “ “Algebras no asociativas; Nilpotencia y Solubilidad”, dictado por el Profesor Correa. Allí comencé a estudiar las álgebra no asociativas y me sentí motivado a seguir en esta área de la matemática. Es mi mayor interés, en la actualidad, seguir en esta rama de la matemática, para futuros proyectos. Agradezco también al Profesor Sergei Trofimchuk, por la solicitud que tuvo al facilitarme el uso de su computador para redactar esta Tesis, ya que sin su apoyo de este medio el trabajo se habría retardado más de lo deseado. Agradezco también a mis amigos y colegas Aníbal, Fernando y Esperanza por su tonificante amistad.

Agradezco a FONDECYT el apoyo económico durante la realización de esta Tesis, a través del Proyecto 1010196.

Notación y Simbología

- L_x, R_x son los operadores multiplicación a la izquierda y derecha respectivamente.

- $< a_1, ..., a_n >_K$ es el espacio vectorial generado sobre el cuerpo K por los elementos $a_1, ..., a_n$.

- $J(i_1, ..., i_s)$ representa a la matriz $n \times n$ compuesta por s bloques de Jordan $J_{i_1}, ..., J_{i_s}$, donde cada bloque J_{i_k} es una matriz $i_k \times i_k$ de la forma

$$J_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

  con $i_s \leq ... \leq i_1$ y $\sum_{k=1}^{s} i_k = n$.

- A^n representa la n-ésima potencia principal de A definida por:
  $A^1 = A, \; A^n = \sum_{k=1}^{n-1} A^k A^{n-k}$ para $n > 1$.

- $A^{(n)}$ representa la n-ésima potencia plena de A definida por
  $A^{(1)} = A, A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$ para $n > 1$.

- Las letras α, $\beta, \gamma, ...$ etc., siempre denotarán elementos escalares de algún cuerpo K.

Capítulo 1

Definiciones y Resultados Preliminares

En este capítulo presentamos algunas definiciones básicas, resultados conocidos y los primeros resultados de la Tesis que servirán como herramienta para solucionar nuestro problema principal.

1.1 Definiciones Básicas

Una álgebra A sobre un cuerpo K es un espacio vectorial A sobre K dotado de una operación multiplicación, es decir una aplicación

$$: A \times A \longrightarrow A, \ (a, b) \mapsto ab$$

satisfaciendo las siguientes relaciones:

i) $(a+b)c = ac + bc$, para todo $a, b, c \in A$.

ii) $a(b+c) = ab + ac$, para todo $a, b, c \in A$.

iii) $(\alpha a)b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$, para todo $a, b \in A$, para todo $\alpha \in K$.

Si el producto satisface $ab = ba$, para todo $a, b \in A$ diremos que A es una *álgebra conmutativa*. Si el producto satisface $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in A$, entonces diremos que A es una *álgebra asociativa*.

Ejemplos:

1) $K[x]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo K es una álgebra sobre K con la suma y el producto usual de polinomios.

2) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, con $\dim_K V \geq 2$. Entonces el conjunto $\mathrm{End}_K V$ es una álgebra asociativa y no conmutativa con el producto definido por la composición de funciones.

3) Un cuerpo K es una álgebra asociativa y conmutativa sobre K.

4) El espacio vectorial $M_n(K)$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes en K es una álgebra sobre K con el producto usual de matrices.

Sean A y B álgebras sobre un cuerpo K. Una transformación lineal

$$\psi : A \longrightarrow B$$

se dice que es un *homomorfismo de álgebras* si

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b),$$

para todo $a,\ b \in A$. El kernel de ψ es el conjunto

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{a \in A \mid \quad \psi(a) = 0\ \}.$$

Si ψ es una biyección, diremos que ψ es un *isomorfismo de álgebras.*

Un *ideal a la izquierda (derecha)* de una álgebra A es un subespacio vectorial I de A tal que $aI \subseteq I \quad (Ia \subseteq I)$, para todo $a \in A$. Cuando I es a la vez un ideal a la izquierda y derecha, diremos que I es un *ideal de* A.

Sea A una álgebra sobre un cuerpo K con I un ideal de A. Definimos en A la relación $a \equiv b \quad$ si $\quad a - b \in I$. Esta relación es de equivalencia. La clase de equivalencia de un elemento a es

$$\bar{a} = a + I = \{a + b \in A \quad / \quad a, b \in I \quad \}.$$

El álgebra cociente de A por I es el espacio

$$A/I = \{\bar{a} \quad / \quad a \in A \quad \}$$

con las operaciones

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b},$$
$$\alpha\bar{a} = \overline{\alpha a},$$
$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab},$$

para todo $\alpha \in K$ y $a, b \in A$.

La aplicación

$$\pi : A \to A/I$$

definida por $\pi(a) = \bar{a}$ es un homomorfismo de álgebras denominado *homomorfismo canónico.*

Definimos las potencias de cualquier elemento a del álgebra A, como sigue:

$$a^1 = a \quad \text{ y } \quad a^n = a^{n-1}a, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Una álgebra A se dice que es *asociativa en las potencias* si cada uno de sus elementos genera una subálgebra asociativa. Esta condición es equivalente a que $a^i a^j = a^{i+j}$, para todo $a \in A$. Sea A una álgebra asociativa en las potencias. Se dice que un elemento $a \in A$ es nilpotente si existe un entero positivo n tal que $a^n = 0$. Cuando todos los elementos de A son nilpotentes se dice que A es una *nilálgebra*.

Sea A una álgebra arbitraria. Para cada elemento $a \in A$ podemos definir las funciones lineales

$$R_a, L_a : A \longrightarrow A$$

definidas por $xR_a = xa$, y $xL_a = ax$, para todo $x \in A$. Estas funciones son llamadas *multiplicación a la derecha por a y a la izquierda por a* respectivamente.

En el caso de que el álgebra sea conmutativa entonces $L_a = R_a$ usaremos L_a para escribir esta función.

Denotamos por $M(A)$ el álgebra generada por $\{L_x \mid x \in A\}$. Llamaremos a la álgebra asociativa $M(A)$, el *álgebra de multiplicación* de A.

Si S es un subconjunto no vacío de A entonces denotaremos por S^* la álgebra generada por el conjunto $\{L_s, R_s \in M(A) \mid s \in S\}$.

1.2 Identidades Polinomiales y Linealización

Sea A una álgebra sobre un cuerpo K. Una *identidad en A* es un polinomio $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ del álgebra libre tal que $p(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$, $i = 1, 2, ..., n$ (también diremos que $p(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ es una identidad).

Ejemplos

1) Una *álgebra conmutativa* es una álgebra que satisface la identidad $xy - yx = 0$.

2) Una *álgebra asociativa* es una álgebra que satisface la identidad $(xy)z - x(yz) = 0$.

3) Una *álgebra de Jordan* es una álgebra que satisface las identidades $xy - yx = 0$ y $(x^2y)x = x^2(yx)$. La última identidad es llamada *identidad de Jordan*.

4) Una *álgebra de Lie* es una álgebra que satisface las identidades: $x^2 = 0$ y $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$. Esta última identidad es llamada *identidad de Jacobi*.

5) Una *álgebra alternativa* es una álgebra que satisface las identidades $x^2y = x(xy)$ y $yx^2 = (yx)x$.

1.2.1 Linealización La linealización es una de las herramientas más importantes en el estudio de las álgebras.

Sea

$$f(x_1, ..., x_n) = 0$$

una identidad e y una indeterminada diferente de las x_i. Si sustituimos x_i por $x_i + y$, obtenemos

$$f(x_1, ..., x_i + y, ..., x_n) = \sum_{k \geq 0} f_{ik}(x_1, ..., x_i, ..., x_n, y),$$

donde f_{ik} es la suma de todos los términos que tienen grado k en la indeterminada y. Definimos el operador $\delta_i^k(y)$ actuando sobre la identidad f como

$$f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)\delta_i^k(y) = f_{ik}(x_1, ..., x_i, ..., x_n, y).$$

Observamos que $\delta_i^0 = I$. Si $k > 0$, el operador δ_i^k sustituye cada monomio por la suma de los monomios que son obtenidos al sustituir una cantidad k de los x_i por y. Observamos además de esto, que este operador satisface

$$(\alpha f + \beta g)\delta_i^k(y) = \alpha[f\delta_i^k(y)] + \beta[g\delta_i^k(y)],$$

para todo par de identidades f, g y $\alpha, \beta \in K$.

Sea f una identidad e y una indeterminada diferente de $x_1, x_2, ..., x_n$, $k \geq 1$, y supongamos que el grado de $x_i \geq k$ en algún monomio de f, entonces $f(x_1, x_2, ..., x_n)\delta_i^k(y)$ se dice una *linealización simple de f*. Una identidad que puede ser obtenida de f como una secuencia de una o mas linealizaciones simples de f se dice una *linealización* de f. Una linealización en la que cada monomio no aparecen variables con grado > 1 se dice una *linealización completa* (ver Osborn[22]).

Ejemplos:

1) Consideremos el polinomio $p(x, y) = (x^2y)x$. La primera linealización es:

$$((xz)y)x + ((zx)y)x + ((x^2)y)z.$$

La segunda linealización es:

$$((xz)y)t + ((tz)y)x + ((zt)y)x + ((zx)y)t + ((xt)y)z + ((tx)y)z.$$

Esta es también su linealización completa.

2) Linealicemos completamente la identidad polinomial $p(x) = x^3$ en una álgebra conmutativa A. La primera linealización es:

$$x^2y + 2(xy)x.$$

La segunda linealización de x^3 es

$$2(xy)z + 2(yz)x + 2(zx)y.$$

Esta es también la linealización completa

1.3 Solubilidad y Nilpotencia de Algebras

Sea A una álgebra no asociativa. Definimos inductivamente las siguientes potencias de A:

$$A^1 = A, \quad A^n = \sum_{k=1}^{n-1} A^k A^{n-k} \quad \text{para } n > 1.$$

$$A^{(0)} = A, \ A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2 \quad \text{para } n > 1.$$

Diremos que A es *nilpotente* si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$. Cuando A es nilpotente, el menor entero positivo k tal que $A^k = 0$ se llama el *índice de nilpotencia* de A.

Diremos que A es *soluble* si existe un entero positivo k tal que $A^{(k)} = 0$. Cuando A es soluble, el menor entero positivo k tal que $A^{(k)} = 0$ se llama el *índice de solubilidad* de A.

Si A es nilpotente entonces es soluble. Pero si una álgebra es soluble no necesariamente es nilpotente, como lo muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplos

1) Sea el álgebra A sobre un cuerpo K con base $\{x, y\}$, $x, y \in A$. Definamos una multiplicación en A, de la siguiente forma:

$$x^2 = y^2 = 0, \quad xy = yx = y.$$

Se demuestra que el álgebra A con la multiplicación así definida, es Soluble pero no nilpotente.

2) (Suttles[25]) Sea A una nilálgebra conmutativa con base e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 y productos no nulos definidos por:

$$e_1e_2 = e_2e_4 = -e_1e_5 = e_3, \quad e_1e_3 = e_4, \quad e_2e_3 = e_5.$$

A es una nilálgebra de nilíndice cuatro, asociativa en las potencias que no es nilpotente ya que $A^3 = A^2$. A es soluble pues $A^{(3)} = 0$.

3) (Zhevlakov[26]) Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_m, ...\}$ un conjunto numerable de símbolos x_i. Una palabra $u = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_s}$ es llamada *regular* si $s \geq 1$ y $i_1 < i_2 < ... < i_s$. Sea P

el conjunto de las palabras regulares y $N =< P >_K$ el espacio lineal generado por P sobre un cuerpo K con característica $\neq 2, 3$. La multiplicación se define en N de la siguiente forma:

Si $x_i, x_j \in X$ y $u, v \in P$:

1. $x_i * x_j = x_i x_j$ para $i < j$,
2. $u * v = 0$ si u y v tienen al menos dos letras,
3. $u * x_i = 0$ si $s \geq 2$ y $i < i_1$ o x_i aparece en u,
4. $u * x_i = (-1)^\sigma x_{i_1} x_{i_2} ... x_i ... x_{i_s}$ si $s \geq 2$ y $i > i_1$,

   donde σ es la permutación tal que ux_i es una palabra regular.

El álgebra N satisface la identidad de Jacobi

$$(u * v) * w + (v * w) * u + (w * u) * v = 0,$$

y además se tiene que $N^{(3)} = 0$. N no es nilpotente, puesto que para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$(...((x_1 * x_2) * x_3) * ...) * x_n = x_1 x_2 ... x_n \neq 0.$$

Sea A una álgebra asociativa en las potencias. Un elemento x de A se dice que es *nilpotente* si existe un entero positivo n tal que $x^n = 0$. El índice de nilpotencia para un elemento nilpotente x de A, es el menor entero positivo m tal que $x^m = 0$. Una álgebra asociativa en las potencias es llamada una *nilálgebra* si todo elemento es nilpotente. Si el conjunto de los índices de nilpotencias de todos los elementos de A está acotado por un cierto número entero positivo entonces el menor número entero positivo s tal que $x^s = 0$, para todo x en A se denomina *el nilíndice de* A. Si A es una nilálgebra asociativa en las potencias de dimensión n, entonces el nilíndice de A es menor o igual a $n + 1$.

A continuación enunciamos algunos resultados generales sobre solubilidad y nilpotencia sobre álgebras que se pueden encontrar en las Referencias.

Proposición 1.1 (Schafer [24], Proposición 2.2, p. 18) *Si una álgebra A contiene un ideal soluble S, y si A/S es soluble, entonces A es soluble.*

Proposición 1.2 (Schafer [24], Teorema 2.4 p. 18) *Un ideal B de una álgebra A es nilpotente si y solo si la subálgebra asociativa B^* de $M(A)$ es nilpotente.*

Proposición 1.3 (Correa [2]) *Sea N una álgebra conmutativa no asociativa finitamente generada sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ satisfaciendo la identidad $x^3 = 0$. Entonces N es nilpotente.*

1.4 Problema de Albert

Albert conjeturó que toda nilálgebra conmutativa que es asociativa en las potencias, conmutativa y de dimensión finita es nilpotente. Suttles[25] presentó en 1972 un contraejemplo de dimensión cinco (ver Ejemplo 1).

El siguiente problema, conocido como *problema de Albert,* es un problema abierto.

¿ Es toda nilálgebra conmutativa, asociativa en las potencias y de dimensión finita soluble ?

Este problema ha tenido respuestas parciales desde la aparición del trabajo de Suttles. La respuesta es positiva en todos los casos hasta ahora estudiados. En la siguiente sección presentamos un resumen de todos los resultados conocidos hasta ahora, además de algunos resultados que nos serán de gran utilidad en el siguiente capítulo.

1.5 Resultados Preliminares

Los siguientes son resultados conocidos sobre nilpotencia y solubilidad de álgebras asociativas en las potencias.

Teorema 1.4 (Albert, [1]) *Toda nilálgebra de Jordan de dimensión finita sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ es nilpotente.*

Teorema 1.5 (Gerstenhaber - Myung[14]) *Toda nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de dimensión 4 y nilíndice 4 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ es nilpotente.*

En [3] Correa y Suazo generalizan el Teorema 1.5 a álgebras de dimensión finita n. Mas precisamente, en [3] se prueba el siguiente Teorema:

Teorema 1.6 (Correa - Suazo[3]) *Toda nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de nilíndice n y de dimensión n es nilpotente de índice n.*

Además en [3] se determinan las condiciones necesarias y suficientes para que una álgebra que satisface esas condiciones sea una álgebra de Jordan. En tal caso, se encuentran todas las clases de isomorfismos. Estos resultados requieren que el cuerpo tenga característica $\neq 2, 3$.

Correa y Hentzel extienden el resultado anterior al caso no conmutativo, probando el siguiente resultado:

Teorema 1.7 (Correa - Hentzel[4]) *Sea A una nilálgebra no conmutativa asociativa en las potencias de dimensión n y nilíndice n sobre un cuerpo de característica $\neq 2, 3$. Entonces A es soluble y A^2 es nilpotente.*

Además, en [4] se presentan dos ejemplos de nilálgebras no conmutativas, asociativas en las potencias de dimensión n que no son nilpotentes. El primer ejemplo tiene nilíndice n y el segundo tiene nilíndice $n-1$ y no es soluble.

Teorema 1.8 (Correa - Peresi[15]) *Toda nilálgebra conmutativa, asociativa en las potencias, de dimensión cinco sobre un cuerpo de característica $\neq 2, 3$ es soluble.*

Teorema 1.9 (Correa - Hentzel - Peresi[6]) *Sea A es una nilálgebra conmutativa, asociativa en las potencias de dimensión 6 sobre un cuerpo de característica $\neq 2, 3, 5$. Entonces A es soluble.*

El problema de Albert es ya interesante si lo consideramos para un nilíndice fijo y dimensión finita arbitraria. Por ejemplo, si el nilíndice es igual a tres, el álgebra es de Jordan y luego es nilpotente (Teorema 1.4). Para nilíndice fijo igual a cuatro, es posible considerar tres grandes casos. El álgebra satisfacerá estrictamente una de las siguientes tres identidades: i) $((yx)x)x = 0$, ii) $(((yx)x)x)x = 0$, iii) $((((yx)x)x)x)x = 0$. En [11] Correa y Hentzel solucionan el problema cuando el álgebra satisface la identidad i). El resultado es el siguiente:

Teorema 1.10 *Sea A una álgebra conmutativa finitamente generada sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ satisfaciendo la identidad $((yx)x)x = 0$. Entonces A es soluble.*

La nilpotencia de los operadores L_x juega un papel fundamental en la demostración de la solubilidad o nilpotencia de álgebras. Este problema fué estudiado por M. Gerstenhaber en una serie de artículos (ver [15, 16, 17] y [14]). Enunciamos ahora un resultado que es una de las bases de nuestro trabajo.

Teorema 1.11 (Gerstenhaber [16]) *Si A es una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión finita n de nilíndice t, sobre un cuerpo K de característica cero o mayor que n. Entonces, para todo $a \in A$, L_a es nilpotente de índice*

$\leq 2t-3$.

Para alcanzar nuestro objetivo, a saber, probar que efectivamente las nilálgebras conmutativas de dimensión siete son solubles, obtuvimos una serie de resultados preliminares que serán muy usados en la demostración de los teoremas en los capítulos siguientes.

Proposición 1.12 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión n y característica cero o mayor que n. Sea B una subálgebra (n-1)-dimensional de A. Entonces B es un ideal de A.*

Demostración. Debemos probar que $BA \subseteq B$. Sea

$$W = \{t \in A \mid tB \subset B\}.$$

Puesto que B es una subálgebra de A se sigue que $B \subseteq W$. El espacio vectorial cuociente A/B tiene dimensión 1. Es fácil probar que todo operador nilpotente sobre un espacio vectorial de dimensión uno es identicamente cero. De esta manera, $(A/B)L_t = 0$, para cada $t \in W$, es decir, $AW \subseteq B$. Como $B \subseteq W$, se sigue que $BA \subseteq B$. Esto prueba la Proposición.

Lema 1.13 Sea V un espacio vectorial de dimensión 2 sobre un cuerpo K y Sea Ω un subespacio vectorial de $L(V)$. Asumamos que R es nilpotente para todo $R \in \Omega$. Entonces, si R y S son dos elementos arbitrarios en Ω, tenemos que $RS = 0$.

Demostración. Sea R es un elemento no cero en Ω. Podemos asumir que la matriz $[R]$ asociada a R esta en su forma canónica de Jordan. Sea S cualquier otro elemento de Ω. Tenemos:

$$[R] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [S] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puesto que $T = uR + S$ es nilpotente para toda elección del escalar u, la traza y el determinante de $[T]$ deben ser ceros. Es decir,

$$a + d = 0 \quad \text{y} \quad a^2 - bc - uc = 0.$$

Puesto que esta última ecuación se tiene para todo u en K, tenemos que $c = 0$. En consecuencia, tenemos también que $a = 0$. Se sigue que $d = 0$. Así $[S]$ es estrictamente triangular superior. Esto significa que todo elemento de Ω está representado por una matriz 2×2 estrictamente triangular superior. El producto de cualquier par de matrices estrictamente triangular superior es cero. Se sigue que $TS = 0$.

Proposición 1.14 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión n sobre un cuerpo de característica cero ó mayor que n. Si existe una subálgebra soluble B de A de dimensión $n-2$, entonces A es soluble.*

Demostración. Sea
$$W = \{a \in A \mid aB \subseteq B\}$$
y
$$\Omega = \{L_a \mid a \in W\}.$$
Cada $L_a \in \Omega$ induce un operador lineal
$$\overline{L_a} : A/B \longrightarrow A/B,$$
definido por
$$(x + B)\overline{L_a} = xa + B.$$
Puesto que $\mathrm{Dim}(A/B) = 2$, el conjunto de estos operadores satisfacen las hipótesis del Lema 1.13. En consecuencia tenemos que
$$(AW)W \subseteq B.$$
Dado que $B \subseteq W$, se sigue que
$$AW \subseteq W.$$
Esto implica que W es un ideal de A y B es un ideal de W. Por consiguiente los espacios cuocientes A/W y W/B son nilálgebras conmutativas y asociativas en las potencias de dimensiones ≤ 2, y de aquí que, son solubles. Puesto que B es soluble, de la Proposición 1.1 se sigue que W es soluble y que A es soluble.

Teorema 1.15 (Correa-Hentzel-Julca-Peresi[10]) *Sea A una nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de dimensión finita n y nilíndice $n-1$ sobre un cuerpo de característica cero o mayor que n. Entonces A es soluble.*

Teorema 1.16 (Correa-Hentzel-Julca-Peresi[10]) Sea A una nilálgebra conmutativa asociativa en las potencias de dimensión finita n y nilíndice $n-2$ sobre un cuerpo de característica cero o mayor que n. Entonces A es soluble.

Es fácil probar que si A es una nilálgebra de dimensión n y nilíndice $n+1$ entonces A es nilpotente, luego es soluble. Si A tiene nilíndice dos, entonces satisface la identidad
$$xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - x^2 - y^2).$$
De aquí, $A^2 = 0$, es decir, A es soluble.

Además, si el nilíndice es 3, por la Proposición 1.3 se deduce que es nilpotente luego es soluble. Por lo tanto podemos resumir todos los resultados anteriores en el siguiente Teorema

Teorema 1.17 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión n sobre un cuerpo K de característica cero o mayor que n con nilíndice k. Si $k = 1, 2, 3, n-2, n-1, n$ ó $n+1$, entonces A es soluble.*

Capítulo 2

Solución del Problema de Albert en Dimensión Siete

En este capítulo estudiamos el problema de Albert en dimensión siete cuando el nilíndice es cuatro. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 2.1 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión siete sobre un cuerpo de característica cero o mayor que siete. Entonces A es soluble.*

En todo este capítulo A denotará una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión siete sobre un cuerpo K de característica $\neq 2, 3, 5y7$. Por el Teorema 1.17, A es soluble cuando su nilíndice es $1, 2, 3, 5, 6, 7$ y 8. De aquí sólo necesitaremos probar el Teorema 2.1 para el caso cuando A tiene nilíndice cuatro.

Lema 2.2 *Toda nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de nilíndice cuatro sobre un cuerpo de característica $\neq 2$ satisface las siguientes identidades:*

$$2((yx)x)x + (x^2y)x + x^3y = 0, \tag{2.1}$$

$$(yx)x^2 = 0, \tag{2.2}$$

$$2(yx)(zx) + (yz)x^2 = 0, \tag{2.3}$$

$$2(((yx)x)x)x + x^3(yx) = 0, \tag{2.4}$$

$$(yx^2)x^3 = 0, \tag{2.5}$$

$$(yx^3)x^2 = 0. \tag{2.6}$$

Demostración. Linealizando $x^4 = 0$ se obtiene (2.1). Linealizando $x^2x^2 = 0$, se obtiene (2.2) y (2.3). Reemplazando y por yx en (2.1) y usando (2.2) se obtiene (2.4). Reemplazando x por x^2 y z por x en (2.3) se obtiene (2.5). Reemplazando z por x^3 en (2.3) se obtiene (2.6).

Lema 2.3 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión 7 con nilíndice 4 sobre un cuerpo de característica $\neq 2$. Entonces A satisface las siguientes identidades y relaciones:*

$$(yx)x^3 = 0, \tag{2.7}$$

$$x^3(yz) = -(zx^2)(yx) - 2((zx)x)(yx), \tag{2.8}$$

$$(yx^2)x^2 = 0, \tag{2.9}$$

$$A^2x^2 = (Ax)^2, \tag{2.10}$$

$$A^3x^3 \subseteq ((A^2x)x)(Ax) + (Ax)^3. \tag{2.11}$$

Demostración. La identidad (2.7) se tiene si $x^3 = 0$. Sea $x \in A$ con $x^3 \neq 0$ y $X = < x, x^2, x^3 >$. Sea y un elemento arbitrario de A. Sea A/X el espacio vectorial cuociente de A por X. Puesto que

$$XL_x \subseteq X,$$

la función lineal

$$\overline{L_x} : A/X \to A/X,$$

definida por

$$(y + X)\overline{L_x} = yL_x + X,$$

está bien definida. Por [5, Lema 2], se tiene que $L_x^5 = 0$, para todo $x \in A$, de aquí se deduce que $(\overline{L_x})^5 = 0$. Puesto que A/X tiene dimensión cuatro tenemos que $(\overline{L_x})^4 = 0$. Esto implica que $yL_x^4 \in X$. Así,

$$yL_x^4 = \alpha\ x + \beta\ x^2 + \delta\ x^3,$$

para ciertos $\alpha, \beta, \delta \in K$. Dado que $L_x^5 = 0$ obtenemos que

$$\alpha x^2 + \beta x^3 = yL_x^5 = 0$$

y entonces $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Se sigue que $yL_x^4 = \delta x^3$. Por consiguiente de (2.4) se tiene que

$$(yx)x^3 = -2yL_x^4.$$

Reemplazando convenientemente, se tiene que

$$(yx)x^3 = -2\delta\ x^3.$$

Dado que $L_{yx}^5 = 0$, se deduce que

$$-2^5\delta^5\ x^3 = x^3L_{yx}^5 = 0.$$

Por consiguiente $\delta = 0$ y luego, obtenemos que $(yx)x^3 = 0$.

Linealizando (2.7) obtenemos (2.8). Reemplazando z por x^2 en (2.3) y usando (2.7) se obtiene (2.9). De (2.3) obtenemos (2.10). Considerando $z \in A^2$, $y \in A$ en (2.8) y usando (2.10) obtenemos (2.11).

Linealizando completamente la identidad (2.2) obtenemos

$$(xy)(zw) + (xz)(wy) + (xw)(yz) = 0.$$

Usando esta identidad, con $w = x^2$ y escribiendo $(yz)(x^2x) = (yz)x^3$, obtenemos

$$-(yz)x^3 = (yx^2)(zx) + (yx)(x^2z). \tag{2.12}$$

Sumando (2.8) con (2.12) obtenemos

$$(yx^2)(zx) = 2(yx)((zx)x). \tag{2.13}$$

Intercambiando y con z en esta última ecuación obtenemos

$$(zx^2)(yx) = 2(zx)((yx)x). \tag{2.14}$$

Sumando estas dos últimas identidades y usando (2.12) obtenemos

$$-(yz)x^3 = 2(yx)((zx)x) + 2(zx)((yx)x). \tag{2.15}$$

De (2.15) se sigue que:

$$A^2x^3 \subseteq ((Ax)x)(Ax). \tag{2.16}$$

Para la demostración del Teorema 2.1, y las contenidas en los capítulos que siguen, introducimos la siguiente notación. Dado un operador lineal nilpotente sobre un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo K, representaremos por $J(i_1, ..., i_s)$ la matriz que representa a T en su forma canónica de Jordan, la cual se compone de s bloques de Jordan $J_{i_1}, ..., J_{i_s}$, donde cada bloque J_{i_k} es una matriz $i_k \times i_k$ de la forma

$$J_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . & . \\ . & . & ... & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con $i_s \leq ... \leq i_1$ y $\sum_{k=1}^{s} i_k = n$.

De ahora en adelante asumiremos que x es un elemento de A tal que $x^3 \neq 0$ y $X =< x, x^2, x^3 >$. Así, $L_x \neq 0, L_x^2 \neq 0$. Usando (2.7) y (2.4) obtenemos $L_x^4 = 0$. Por consiguiente el polinomio minimal de L_x es t^4 o t^3. Las posibles formas canónicas de Jordan de L_x son:

a) $J(4,3)$,	*b*) $J(4,2,1)$,
c) $J(4,1,1,1)$,	*d*) $J(3,3,1)$,
e) $J(3,,2,2)$,	*f*) $J(3,2,1,1)$,
g) $J(3,1,1,1,1)$.	

Las bases de A correspondientes a cada una de estas matrices son:

a) $\{y,\ yx,\ (yx)x,\ ((yx)x)x,\ a,\ ax,\ (ax)x\}$,
con $(((yx)x)x)x = ((ax)x)x = 0$.

b) $\{y,\ yx,\ (yx)x,\ ((yx)x)x,\ a,\ ax,\ b\}$,
con $(((yx)x)x)x = (ax)x = bx = 0$.

c) $\{y,\ yx,\ (yx)x,\ ((yx)x)x,\ a,\ b,\ c\}$,
con $(((yx)x)x)x = ax = bx = cx = 0$.

d) $\{y,\ (yx),\ (yx)x,\ a,\ ax,\ (ax)x,\ b\}$,
con $((yx)x)x = ((ax)x)x = bx = 0$.

e) $\{y,\ yx,\ (yx)x,\ a,\ ax,\ b,\ bx\}$,
con $((yx)x)x = (ax)x = (bx)x = 0$.

f) $\{y,\ yx,\ (yx)x,\ a,\ ax,\ b,\ c\}$,
con $((yx)x)x = (ax)x = bx = cx = 0$.

g) $\{y,\ yx,\ (yx)x,\ a,\ b,\ c,\ d\}$,
con $((yx)x)x = ax = bx = cx = dx = 0$.

Ahora probaremos la solubilidad de A considerando cada una de las bases anteriores.

Base a): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 a + \alpha_6 ax + \alpha_7 (ax)x, \ \ \alpha_i \in K.$$

Aplicando L_x^3 a x obtenemos que $\alpha_1 = 0$. De aquí $\alpha_5 \neq 0$, pues si $\alpha_5 = 0$ se tiene que $x \in Ax$, lo cual es una contradicción. Aplicando L_{x^2} a x y usando (2.2) obtenemos $x^3 = \alpha_5\ ax^2$, de aquí que $ax^2 = \alpha_5^{-1}x^3$. Por consiguiente $(ax^2)x = 0$ y entonces por (2.1) tenemos

$$x^3 a = -2\ ((ax)x)x - (ax^2)x = 0.$$

Luego $a \in \mathrm{Ker}(L_{x^3})$.

Si $yx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ por (2.7). Por consiguiente $< x^3 >$ es un ideal soluble de A. Dado que $A/ < x^3 >$ es una nilálgebra de dimensión ≤ 6, es soluble. Por consiguiente A es soluble por Proposición 1.1.

Asumamos ahora que $yx^3 \neq 0$. Entonces, usando (2.7) es fácil probar que

$$\mathrm{Ker}(L_{x^3}) = < yx,\ (yx)x,\ ((yx)x)x,\ a,\ ax,\ (ax)x > .$$

Probaremos ahora que $\mathrm{Ker}(L_{x^3})$ es un ideal de A. Por la Proposición 1.12 es suficiente probar que $\mathrm{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A.
Como es un subespacio sólo tenemos que probar que $tz \in \mathrm{Ker}(L_{x^3})$ para todo $t, z \in \mathrm{Ker}(L_{x^3})$. Reemplazando y por t en (2.8) obtenemos

$$(tz)x^3 = -(zx^2)(tx) - 2\ ((zx)x)(tx).$$

Para $z = (yx)x$ ó $((yx)x)x$ ó ax ó $(ax)x$, obtenemos que $(zx^2)(tx) = 0$ por (2.2), para todo $t \in A$. Para $z = (yx)x$ ó $(yx)x)x$, obtenemos $((zx)x)(tx) = 0$, para todo $t \in A$, puesto que $(((yx)x)x)x = 0$. Para $z = ax$ ó $(ax)x$, obtenemos $((zx)x)(tx) = 0$, para todo $t \in A$, dado que $((ax)x)x = 0$. Por consiguiente $(tz)x^3 = 0$ para $z = (yx)x$ ó $((yx)x)x$ ó ax ó $(ax)x$, y para cualquier $t \in A$. En lo que sigue probaremos que

$$(yx)(yx),\ \ (yx)a,\ \ a^2 \in \mathrm{Ker}(L_{x^3}).$$

Tenemos por (2.12) y (2.2) que:

$$((yx)(yx))x^3 = -2((yx)x^2)((yx)x) = 0$$

Entonces $(yx)(yx) \in \mathrm{Ker}(L_{x^3})$. Usando nuevamente (2.12), se tiene que

$$((yx)a)x^3 = -(ax^2)((yx)x) - (ax)((yx)x^2).$$

Como $ax^2 = \alpha_5^{-1}x^3$, reemplazando en la última ecuación se tiene que

$$((yx)a)x^3 = -(\alpha_5^{-1}x^3)((yx)x) - (ax)((yx)x^2).$$

De aquí que por (2.2) y (2.7), se tiene que $((yx)a)x^3 = 0$, es decir $(yx)a \in \operatorname{Ker}(L_{x^3})$. Para probar que $a^2 \in \operatorname{Ker}(L_{x^3})$ usamos (2.12) con $y = a, z = a$ y (2.7), obteniendo que

$$a^2x^3 = -2(ax^2)(ax) = -2(\alpha_5^{-1}x^3)(ax) = 0.$$

Por consiguiente $\operatorname{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A. Puesto que $\operatorname{Ker}(L_{x^3})$ y $A/\operatorname{Ker}(L_{x^3})$ son nilálgebras de dimensión ≤ 6, son solubles. Por consiguiente A es soluble por Proposición 1.1.

Base b): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 a + \alpha_6 ax + \alpha_7 b.$$

Multiplicando por x esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x + \alpha_5 ax.$$

Multiplicando nuevamente por x queda,

$$x^3 = \alpha_1(yx)x + \alpha_2((yx)x)x.$$

Multiplicando otra vez por x, queda que

$$\alpha_1((yx)x)x = 0.$$

De aquí se deduce que $\alpha_1 = 0$. Luego

$$x^3 = \alpha_2((yx)x)x.$$

Como $x^3 \neq 0$, se deduce que $\alpha_2 \neq 0$. Luego

$$((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3.$$

Tenemos dos posibilidades para α_5, a saber, $\alpha_5 = 0$ ó $\alpha_5 \neq 0$. En cada uno de los dos casos probaremos, que el álgebra es soluble. En efecto:

Supongamos que $\alpha_5 = 0$. Luego tenemos que,

$$x^2 = \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x,$$

y de aquí que

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3.$$

Luego, para probar la solubilidad del álgebra A, es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16). Como $\alpha_2 \neq 0$, podemos considerar la nueva base de A dada por el conjunto

$$\{y, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad ax, \quad b\}.$$

con
$$(ax)x = bx = 0.$$
Entonces vemos que
$$Ax =< yx, \quad x^2, \quad x^3, \quad ax > \quad \text{y} \quad (Ax)x =< (yx)x, \quad x^3 > .$$
Por otro lado tenemos que:
$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3.$$
Luego, podemos escribir
$$(Ax)x =< x^2, \quad x^3 > .$$
En virtud de las identidades (2.2) y (2.7), tenemos que
$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$
Luego por (2.16), se concluye que $A^2x^3 = 0$. De donde $X^3 =< x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis, es soluble. En consecuencia, por Proposición 1.1, se deduce que A^2 es soluble. Por tanto A es soluble. Queda por ver el caso cuando $\alpha_5 \neq 0$. En virtud de esto, podemos considerar la siguiente base de A :
$$\{y, \quad yx, \quad (yx)x, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad b\}.$$
con
$$(((yx)x)x)x = bx = 0.$$
Entonces para probar la solubilidad del álgebra A, es suficiente ver que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16). En efecto:
$$Ax =< yx, \quad (yx)x, \quad x^2, \quad x^3 > \quad \text{y} \quad (Ax)x =< (yx)x, \quad x^3 > .$$
Como
$$((yx)x)((yx)x) = -\frac{1}{2}((yx)(yx))x^2 = \frac{1}{4}(y^2x^2)x^2 = 0,$$
por las identidades (2.3) y (2.9). Usando las identidades (2.2) y (2.7), se tiene que
$$((Ax)x)(Ax) =< (yx)((yx)x) > .$$
Si $(yx)((yx)x) = 0$, tenemos que
$$((Ax)x)(Ax) = 0,$$
y de aquí, por (2.16), concluímos que $A^2x^3 = 0$. De aquí $X^3 =< x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Puesto que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis, luego se sigue que es soluble. En consecuencia, por Proposición 1.1, se deduce que A^2 es soluble y de aquí que A es soluble.
Si $(yx)((yx)x) \neq 0$, entonces para ver la solubilidad en este caso, consideramos el operador compuesto por los operadores L_{x^2} y L_{yx}, es decir,

$$L_{x^2}L_{yx} : A \longrightarrow A,$$

definido por $z(L_{x^2}L_{yx}) = (zx^2)(yx)$, para todo $z \in A$. Usando la identidad (2.8) para $z = y$, tenemos que

$$y^2x^3 = -(yx^2)(yx) - 2((yx)x)(yx).$$

Por la identidad (2.12) con $z = y$, se tiene que

$$y^2x^3 = -2(yx^2)(yx).$$

Igualando ambas ecuaciones tenemos

$$(yx^2)(yx) = 2((yx)x)(yx).$$

Como $((yx)x)(yx) \neq 0$, y en virtud de las identidades (2.2), (2.7) y (2.13), se tiene que

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{yx}) =< yx,\ (yx)x,\ x,\ x^2,\ x^3,\ b > .$$

Observamos que $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$ tiene dimensión seis. Usando las identidades (2.3), (2.9) y (2.7), se prueba fácilmente que $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$, es una subálgebra que tiene dimensión seis. En efecto,

$$(yx)^2x^2 = -\frac{1}{2}(y^2x^2)x^2 = 0,$$

por las identidades (2.3) y (2.9). Luego

$$((yx)^2x^2)(yx) = 0.$$

De forma análoga se ve en los demás restantes productos. Por consiguiente, por Proposición 1.12, se tiene que $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$, es un ideal de A y como tiene dimensión seis, es soluble por Teorema 1.9. Luego se concluye que el álgebra A es soluble por Proposición 1.1.

Base c): Luego x se puede escribir en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 a + \alpha_6 b + \alpha_7 c.$$

Multiplicando esta ecuación por x obtenemos:

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x.$$

Multiplicando esta ecuación por x obtenemos

$$x^3 = \alpha_1(yx)x + \alpha_2((yx)x)x.$$

Multiplicando otra vez por x, queda $0 = \alpha_1((yx)x)x$. De donde se deduce que $\alpha_1 = 0$. Luego

$$x^3 = \alpha_2((yx)x)x.$$

Como $x^3 \neq 0$, de deduce que $\alpha_2 \neq 0$. Luego

$$((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3.$$

Por consiguiente, podemos cambiar la base del álgebra por,

$$\{y, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad b, \quad c\}.$$

En virtud de la identidad (2.16), para probar la solubilidad del álgebra A, es suficiente probar que

$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$

Esto se cumple. En efecto:

$$Ax =< yx, \quad x^2, \quad x^3 >$$

y

$$(Ax)x =< (yx)x, \quad x^3 > .$$

Por otro lado tenemos

$$x^2 = \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x.$$

Como $\alpha_2 \neq 0$ y $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$, podemos escribir

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3,$$

de donde

$$(Ax)x =< x^2, \quad x^3 > .$$

En virtud de las identidades (2.2) y (2.7), tenemos que

$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$

Luego, por (2.16), se concluye que

$$A^2x^3 = 0.$$

Se sigue que $X^3 =< x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis, es soluble. En consecuencia, por Proposición 1.1, se deduce que A^2 es soluble, y de aquí se sigue que A es soluble.

Base d): Aquí x se puede escribir en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4 a + \alpha_5 ax + \alpha_6(ax)x + \alpha_7 b.$$

Multiplicando por x a esta ecuación, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_4 ax + \alpha_5(ax)x.$$

Multiplicando nuevamente por x, queda

$$x^3 = \alpha_1(yx)x + \alpha_4(ax)x.$$

Como $x^3 \neq 0$, de deduce que $(\alpha_1, \alpha_4) \neq (0,0)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\alpha_1 \neq 0$. Por tanto podemos considerar la siguiente base de A :

$$\{x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad ax, \quad (ax)x, \quad b\},$$

con

$$((ax)x)x = 0, \quad bx = 0.$$

Para probar la solubilidad de A, es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$, en virtud de la identidad (2.16). En efecto:

$$Ax = < x^2,\ x^3,\ ax,\ (ax)x > \quad \text{y} \quad (Ax)x = < x^3,\ (ax)x > .$$

Usando las identidades (2.2), (2.7), (2.3) y (2.9) se tiene que

$$((Ax)x)(Ax) = < (ax)((ax)x) > .$$

Si $(ax)((ax)x) = 0$, tenemos que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego, por (2.16), se concluye que $A^2x^3 = 0$, de aquí $X^3 = < x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis, es soluble. Luego por Proposición 1.1 se tiene que A^2 es soluble y de aquí que A es soluble. Queda ver el caso cuando $(ax)((ax)x) \neq 0$. Para probar la solubilidad en este caso, consideramos el operador compuesto por los operadores L_{x^2} y L_{ax}, es decir,

$$L_{x^2}L_{ax} : A \longrightarrow A,$$

definido por $y(L_{x^2}L_{ax}) = (yx^2)(ax)$, para todo $y \in A$. En virtud de las identidades (2.13), (2.7), (2.2) y (2.14), se tiene que

$$\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax}) = < x,\ x^2,\ x^3,\ ax,\ (ax)x,\ b > .$$

Observamos que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax})$ tiene dimensión seis. Usando las identidades (2.2), (2.7), (2.3) y (2.9), es fácil ver que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax})$, es una subálgebra que tiene dimensión seis. Luego por Proposición 1.12, se concluye que $\text{Ker}(L_{x^2}L_{ax})$ es un ideal de A de dimensión seis y, por Teorema 1.9 es soluble. Luego se concluye que el álgebra A es soluble por Proposición 1.1.

Base e): En este caso escribimos x en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4 a + \alpha_5 ax + \alpha_6 b + \alpha_7 bx.$$

Multiplicando por x esta ecuación, resulta que

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_4 ax + \alpha_6 bx.$$

Multiplicando por x nuevamente, se obtiene que

$$x^3 = \alpha_1(yx)x.$$

Como $x^3 \neq 0$, de deduce que $\alpha_1 \neq 0$. Luego

$$(yx)x = \alpha_1^{-1}x^3.$$

Por consiguiente, podemos considerar esta nueva base de A, dada por el conjunto:

$$\{x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad ax, \quad b, \quad bx\}$$

con

$$(ax)x = 0 \text{ y } (bx)x = 0.$$

En virtud de la identidad (2.16), para probar la solubilidad del álgebra A, es suficiente probar que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Como

$$Ax =< x^2, \quad x^3, \quad ax, \quad bx >$$

y

$$(Ax)x =< x^3 > .$$

Usando la identidad (2.7), se tiene que

$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$

Luego por (2.16), se concluye que

$$A^2x^3 = 0.$$

De aquí, $X^3 =< x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis, luego es soluble. En consecuencia, por la Proposición 1.1, se deduce que A^2 es soluble. Por tanto A es soluble.

Base f): En este caso escribimos x en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3(yx)x + \alpha_4 a + \alpha_5 ax + \alpha_6 b + \alpha_7 d.$$

Multiplicando por x a la ecuación anterior, resulta

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2(yx)x + \alpha_4 ax.$$

Multiplicando otra vez por x se obtiene que $x^3 = \alpha_1(yx)x$. Como $x^3 \neq 0$ se deduce que $\alpha_1 \neq 0$ y de aquí

$$(yx)x = \alpha_1^{-1}x^3.$$

Luego podemos considerar la siguiente base de A :

$$\{x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad ax, \quad b, \quad d\},$$

con

$$(ax)x = 0, \quad bx = 0, \quad dx = 0.$$

En virtud de (2.16) es suficiente probar

$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$

En efecto, $Ax =< x^2, \quad x^3, \quad ax >$ y $(Ax)x =< x^3 >$. Por (2.7), se concluye que $((Ax)x)(Ax) = 0$. De aquí tenemos, por (2.16), que $A^2x^3 = 0$. Por consiguiente $X^3 =< x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis. Luego es soluble. En consecuencia por Proposición 1.1 se deduce que A^2 es soluble, de donde se deduce que A es soluble.

Base g): En este caso escribimos x en la forma

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4 a + \alpha_5 b + \alpha_6 c + \alpha_7 d.$$

Multiplicando por x esta ecuación, obtenemos

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x.$$

Multiplicando por x nuevamente se obtiene:

$$x^3 = \alpha_1 (yx)x.$$

De aquí, que $\alpha_1 \neq 0$ y $(yx)x = \alpha_1^{-1}x^3$. Por consiguiente, podemos considerar la siguiente base de A :

$$\{x, \quad x^2, \quad x^3, \quad a, \quad b, \quad c, \quad d\},$$

con

$$ax = bx = cx = dx = 0.$$

Para probar la solubilidad del álgebra, basta ver que: $((Ax)x)(Ax) = 0$. Tenemos que

$$Ax =< x^2, \, x^3 > \quad \text{y} \quad (Ax)x =< x^3 > .$$

Como $x^4 = 0$ se tiene que $x^5 = x^6 = 0$. Luego

$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$

De aquí, por (2.16), tenemos que $A^2x^3 = 0$ y así $X^3 =< x^3 >$ es un ideal soluble de A^2. Dado que A^2/X^3 es una nilálgebra de dimensión menor o igual que seis, es soluble. En consecuencia por Proposición 1.1, se deduce que A^2 es soluble, de donde se deduce que A es soluble.

Esto completa la demostración del Teorema 2.1.

Capítulo 3

Solución del Problema de Albert en Dimensión Ocho y Nilíndice Cuatro

En este capítulo estudiamos el Problema de Albert en dimensión ocho cuando el nilíndice es cuatro. Nuestro principal resultado es el siguiente:

Teorema 3.1 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión ocho con nilíndice 4 sobre un cuerpo K de característica cero o mayor que siete. Entonces A es soluble.*

Lema 3.2 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión ocho con nilíndice 4 sobre un cuerpo K de característica $\neq 2$. Entonces $L_x^4 = 0$ para todo x en A.*

Demostración. Se tiene de [5, Lema 2] que $L_x^5 = 0$, para todo $x \in A$. Asumamos que existe un x en A tal que $L_x^4 \neq 0$. Entonces las posibles representaciones matriciales de Jordan de L_x son:

a) $J(5, 1, 1, 1)$,

b) $J(5, 3)$,

c) $J(5, 2, 1)$.

Las bases correspondientes son:

a) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ yL_x^4,\ a,\ b,\ c\}$,
con $yL_x^5 = aL_x = bL_x = cL_x = 0$,

b) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ yL_x^4,\ w,\ wL_x,\ wL_x^2\}$,
con $yL_x^5 = wL_x^3 = 0$
y

c) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ yL_x^4,\ w,\ wL_x,\ b\}$,
con $yL_x^5 = wL_x^2 = bL_x = 0$,
respectivamente.

Asumamos que A tiene una base del tipo a) ó c): Escribiendo x como combinación lineal de la base y aplicando L_x^3 y luego L_x^2 obtenemos que x^3 y yL_x^4 son linealmente dependientes. Usando (2.4) se deduce que x^3 y $(xy)x^3$ son linealmente dependientes. Se sigue, de la nilpotencia del operador L_{xy}, que $(xy)x^3 = 0$. Por consiguiente de (2.4) obtenemos que $yL_x^4 = 0$, lo cual es una contradicción.

Asumamos ahora que el álgebra A tiene una base del tipo b). Escribiendo x como combinación lineal de esta base tenemos:

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5(((yx)x)x)x$$
$$+\alpha_6 w + \alpha_7 wx + \alpha_8 (wx)x.$$

Multiplicando la anterior ecuación por x, se obtiene:

$$x^2 = \alpha_1 yx + \alpha_2 (yx)x + \alpha_3((yx)x)x + \alpha_4(((yx)x)x)x + \alpha_6 wx + \alpha_7 (wx)x.$$

Multiplicando otra vez por x, se obtiene:

$$x^3 = \alpha_1 (yx)x + \alpha_2((yx)x)x + \alpha_3(((yx)x)x)x + \alpha_6 (wx)x.$$

Multiplicando ahora x^3 por x, obtenemos:

$$0 = \alpha_1((yx)x)x + \alpha_2(((yx)x)x)x.$$

De aquí que, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Luego x tiene la forma:

$$x = \alpha_3(yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5(((yx)x)x)x + \alpha_6 w + \alpha_7 wx + \alpha_8 (wx)x.$$

Luego, x está en el subespacio vectorial S generado por el conjunto:

$$\{yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ yL_x^4,\ w,\ wL_x,\ wL_x^2\}.$$

Además x^3 tiene la forma:

$$x^3 = \alpha_3(((yx)x)x)x + \alpha_6(wx)x.$$

De aquí que x^3 está en el subespacio vectorial generado por yL_x^4 y wL_x^2. Si $\alpha_6 = 0$ se sigue que x está en Ax lo cual es una contradicción. Asumamos que $\alpha_6 \neq 0$.

Entonces, aplicando L_{x^2} a x se obtiene que $x^3 = \alpha_6 wx^2$. Definamos el operador $\overline{L_{x^2}} : A/S \longrightarrow A/S$, de la forma siguiente, $z\overline{L_{x^2}} = zx^2$. El operador así dado está bien definido. Como L_{x^2} es un operador nilpotente entonces el operador $\overline{L_{x^2}}$ también es nilpotente. De aquí que, como la Dim $(A/S) = 1$, se sigue que yx^2 está en S. Escribiendo yx^2 como combinación lineal de los generadores de S obtenemos que $(yx^2)x^2 = \gamma wx^2$ para algún γ en K. Usando (2.12) con $z = x$ y reemplazando wx^2, obtenemos que $-2\alpha_6(yx)x^3 = \gamma x^3$. La nilpotencia de L_{yx} implica que $\gamma = 0$, de aquí que $(yx)x^3 = 0$. De (2.4) obtenemos que $yL_x^4 = 0$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, A no puede tener una base de este tipo. Esto prueba el Lema.

Una consecuencia inmediata del Lema 3.2 y de la identidad (2.4) es la identidad

$$(yx)x^3 = 0.$$

De aquí se deducen las identidades: (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16).

Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de dimensión 8 con nilíndice 4 sobre un cuerpo de característica cero o mayor que siete. De la Proposición 1.1 se deduce que para probar que A es soluble, es suficiente encontrar un ideal soluble no trivial de A.

Si $L_x^3 = 0$ para todo x en A, entonces del Teorema 1.10, se tiene que A es soluble. Asumamos que existe x en A con $L_x^3 \neq 0$. Del Lema 3.2 el polinomio minimal de L_x es X^4. Por consiguiente, las posibles formas matriciales canónicas de Jordan de L_x son:

a) $J(4,4)$,

b) $J(4,3,1)$,

c) $J(4,2,2)$,

d) $J(4,2,1,1)$,

e) $J(4,1,1,1,1)$.

Las bases respectivas de A asociadas a cada una de estas matrices son:

a) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ w,\ wL_x,\ wL_x^2,\ wL_x^3\}$,

con $yL_x^4 = wL_x^4 = 0$.

b) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ w,\ wL_x,\ wL_x^2,\ z\}$,

con $yL_x^4 = wL_x^3 = zL_x = 0$.

c) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ w,\ wL_x,\ z,\ zL_x\}$,

con $yL_x^4 = wL_x^2 = zL_x^2 = 0$.

d) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ w,\ wL_x,\ a,\ b\}$,

con $yL_x^4 = wL_x^2 = aL_x = bL_x = 0$.

e) $\{y,\ yL_x,\ yL_x^2,\ yL_x^3,\ a,\ b,\ c,\ d\}$,

con $yL_x^4 = aL_x = bL_x = cL_x = dL_x = 0$.

Observamos de (2.1), que si $x^2 = 0$ entonces $L_x^3 = 0$, lo cual es una contradicción. Luego $x^2 \neq 0$. Por consiguiente, para cada base necesitamos considerar los casos respectivos, $x^3 = 0$ y $x^3 \neq 0$.

Base a): Esta base no es posible. En efecto, si escribimos x como una combinación lineal de esta base y aplicamos L_x^3 a esta combinación lineal, obtenemos que x está en Ax lo cual es una contradicción.

Base b): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7(wx)x + \alpha_8 z.$$

Aplicando L_x^3 obtenemos que $\alpha_1 = 0$.

Asumamos primero que $x^3 = 0$. Se sigue que $\alpha_2 = \alpha_5 = 0$ y entonces necesariamente $\alpha_8 \neq 0$. Aplicando L_{x^2} a x obtenemos que $zx^2 = 0$. De aquí que

$$\{yx,\ (yx)x,\ ((yx)x)x,\ wx,\ (wx)x,\ z\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{x^2}).$$

Puesto que $((yx)x)x \neq 0$, de (2.1) y $x^3 = 0$ obtenemos que $yx^2 \neq 0$. Si $wx^2 \neq 0$, entonces usando (2.1) y que $((wx)x)x = 0$ obtenemos que yx^2 y wx^2 son linealmente independientes. Por consiguiente $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(L_{x^2})) = 2$ y además,

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, wx, (wx)x, z > .$$

Usando (2.3) y (2.9) es fácil probar que

$$[\mathrm{Ker}(L_{x^2})]^2 x^2 = 0.$$

De aquí que $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ es una subálgebra de dimensión 6 de A y por la Proposición 1.14 se tiene que A es soluble. Si $wx^2 = 0$ entonces

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, (wx)x, z > .$$

Luego para probar que $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ es una subálgebra probaremos que los productos $(yx)w$ y w^2 están en $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$. Si

$$(yx)w = \gamma_1 y + \gamma_2 yx + \gamma_3 (yx)x + \gamma_4((yx)x)x + \gamma_5 w + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z,$$

entonces, usando (2.2) se tiene que $((yx)w)x^2 = \gamma_1 yx^2$. De (2.3) y (2.8) obtenemos que:

$$((yx)w)x^2 = -2((yx)x)(wx) = (yx^2)(xw) = \gamma_1 yx^2.$$

De aquí que γ_1 es un valor propio del operador nilpotente L_{xw}, luego $\gamma_1 = 0$. Por consiguiente $(yx)w$ está en $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$. Ahora probaremos que $w^2 \in \mathrm{Ker}(L_{x^2})$, para esto usamos la segunda linealización de (2.1) de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} 2((yx)w)w + 2((yw)x)w + 2((yw)w)x + 2((wx)y)w \\ +(w^2y)x + 2((wx)w)y + (w^2x)y = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando y por x^2 y usando (2.2), y que $wx^2 = 0$ obtenemos que

$$(w^2x^2)x = -2((wx)w)x^2 = 4((wx)x)(wx) = -2(wx^2)(wx) = 0.$$

Se sigue que $(w^2x^2)x = 0$. Sea

$$w^2 = \beta_1 y + \beta_2 yx + \beta_3 (yx)x + \beta_4((yx)x)x + \beta_5 w + \beta_6 wx + \beta_7 (wx)x + \beta_8 z.$$

Entonces,

$$0 = (w^2x^2)x = \beta_1 (yx^2)x.$$

De aquí que por (2.1) y del hecho que $x^3 = 0$, se sigue que $\beta_1 = 0$ y entonces obtenemos que $w^2x^2 = 0$. De esto es fácil probar que todos los otros productos de elementos de $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ están en el $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$. De aquí que $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ es una subálgebra de dimensión siete de A. Se sigue de la Proposición 1.12 que $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ es soluble, y por la Proposición 1.1 se concluye que A es soluble.

Asumamos ahora que $x^3 \neq 0$. Tenemos

$$x^3 = \alpha_2((yx)x)x + \alpha_5 (wx)x.$$

Si $\alpha_5 = 0$ entonces $\alpha_2 \neq 0$ y necesariamente $\alpha_8 \neq 0$. Además, el conjunto

$$\{y,\ x,\ x^2,\ x^3,\ w,\ wx,\ (wx)x,\ z\}$$

es una base de A. Multiplicando x por x^3 y por x^2 obtenemos respectivamente que $zx^3 = 0$ y $zx^2 = \alpha_8^{-1}x^3$.

Probaremos que $((wx)x)(wx) = 0$ o A es soluble.

Si $(wx)w = 0$, entonces $((wx)x)(wx) = 0$. Asumamos $(wx)w \neq 0$. Sea

$$(wx)w = \gamma_1 y + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 + \gamma_5 w + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z.$$

Si $\gamma_1 \neq 0$, entonces el conjunto

$$\{(wx)w,\ x,\ x^2,\ x^3,\ w,\ wx,\ (wx)x,\ z\} \text{ es una base de } A$$

y

$$\{(wx)w,\ x,\ x^2,\ x^3,\ wx,\ (wx)x,\ z\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{x^3}).$$

Si $wx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ y así A es soluble. Si $wx^3 \neq 0$, entonces

$$\mathrm{Ker}(L_{x^3}) = <(wx)w,\ x,\ x^2,\ x^3,\ wx,\ (wx)x,\ z> .$$

Es fácil probar en virtud de las identidades (2.3), (2.9), (2.5), (2.2), (2.8), (2.7) y (2.15) que el $\mathrm{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A. Luego se sigue de las Proposiciones 1.1, 1.12 y del Teorema 2.1 que A es soluble. Asumamos ahora que $\gamma_1 = 0$. Entonces

$$(wx)w = \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 + \gamma_5 w + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z.$$

Si $\gamma_5 \neq 0$ entonces el conjunto

$$\{y,\ x,\ x^2,\ x^3,\ (wx)w,\ wx,\ (wx)x,\ z\}$$

es una base de A y

$$\{x,\ x^2,\ x^3,\ (wx)w,\ wx,\ (wx)x,\ z\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{x^3}).$$

Si $yx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ y así A es soluble. Si $yx^3 \neq 0$, entonces

$$\mathrm{Ker}(L_{x^3}) = < x,\ x^2,\ x^3,\ (wx)w,\ wx,\ (wx)x,\ z > .$$

Como en el caso en que $\gamma_1 \neq 0$, $\mathrm{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A. Asumamos ahora $\gamma_5 = 0$. Entonces

$$(wx)w = \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 + \gamma_6 wx + \gamma_7 (wx)x + \gamma_8 z.$$

Multiplicando $(wx)w$ por x^2 y usando (2.2) y (2.3) obtenemos

$$-2((wx)x)(wx) = \gamma_2 x^3 + \gamma_8 z x^2.$$

Puesto que $zx^2 = \alpha_8^{-1} x^3$, obtenemos que

$$-2((wx)x)(wx) = \gamma_2 x^3 + \gamma_8 \alpha_8^{-1} x^3.$$

Por otra parte, usando (2.15) tenemos $((wx)x)(wx) = -1/4 w^2 x^3$, reemplazando en la ecuación anterior y luego por la nilpotencia del operador L_{w^2} se sigue que $((wx)x)(wx) = 0$. Entonces hemos probado que A es soluble o $((wx)x)(wx) = 0$. Luego para probar que A es soluble cuando $((wx)x)(wx) = 0$, asumamos primero que $(wx^2)x = 0$. De (2.1) tenemos que $wx^3 = 0$. Por consiguiente

$$\{x, x^2, x^3, w, wx, (wx)x, z\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{x^3}).$$

Si $yx^3 = 0$ entonces $Ax^3 = 0$ y así A es soluble. Si $yx^3 \neq 0$, entonces

$$\mathrm{Ker}(L_{x^3}) =< x,\ x^2,\ x^3,\ w,\ wx,\ (wx)x,\ z > .$$

Puesto que $((wx)x)(wx) = 0$, y usando las identidades (2.7), (2.5), (2.15) y (2.3), es fácil probar que el $\mathrm{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de dimensión 7. Así A es soluble. Consideremos ahora $(wx^2)x \neq 0$. De (2.1), usando que $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$, se sigue que $(yx^2)x \neq 0$. Entonces $(wx^2)x$ e $(yx^2)x$ son linealmente independientes. En efecto, sea

$$\alpha(wx^2)x + \beta(yx^2)x = 0.$$

Usando (2.1) tenemos que

$$\alpha wx^3 + \beta[2((yx)x)x + yx^3] = 0.$$

De aquí que

$$\alpha wx^3 + \beta(2\alpha_2^{-1}x^3 + yx^3) = 0$$

y

$$-(\alpha w + \beta y)x^3 = 2\beta\alpha_2^{-1}x^3.$$

Luego por la nilpotencia del operador $L_{\alpha w+\beta y}$, se sigue que $\beta = 0$ y entonces $\alpha = 0$. Por consiguiente $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(L_{x^2}L_x)) = 2$ y así

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x) =< x, x^2, x^3, wx, (wx)x, z > .$$

En virtud de las identidades (2.2), (2.3) y (2.9) se prueba inmediatamente que en este caso $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subálgebra de A. Se sigue que A es soluble.

Asumamos ahora $\alpha_5 \neq 0$. Entonces el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, x^3, z\}$$

es una base de A. Además,

$$\mathrm{Ker}(L_x^3) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, x^3, z > .$$

De (2.1) podemos escribir

$$\mathrm{Ker}(L_x^3) = \mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x + L_{x^3}).$$

Es inmediato probar que $\mathrm{Ker}(L_x^3)$ es una subálgebra de A. De aquí que A es soluble.

Base c): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 z + \alpha_8 zx.$$

Aplicando L_x^3 a esta ecuación obtenemos $\alpha_1 = 0$. Esto implica que necesariamente $(\alpha_5, \alpha_7) \neq (0, 0)$. Asumimos sin pérdida de generalidad que $\alpha_5 \neq 0$.

Asumamos primero que $x^3 = 0$. Entonces $\alpha_2 = 0$. En este caso el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, z, zx\}$$

es una base de A. Tenemos por (2.2) que

$$\{yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, zx\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{x^2}).$$

Por consiguiente $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(L_{x^2})) \geq 6$. Consideremos dos casos: Si $zx^2 = 0$ entonces $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(L_{x^2})) = 7$. En la misma forma que en el caso b) es posible probar que $(z^2x^2)x = 0$. De aquí, se sigue fácilmente que $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ es una subálgebra de dimensión siete y que que A es soluble. Si $zx^2 \neq 0$, se tiene que yx^2 y zx^2 son linealmente independientes y están en la $\mathrm{Im}(L_{x^2})$. De aquí que,

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, x, x^2, zx > .$$

Por las identidades (2.2), (2.9), (2.3), es fácil probar que $\mathrm{Ker}(L_{x^2})$ es una subálgebra de dimensión 6, de aquí que por la Proposición 1.14 se sigue que A es soluble.

Asumamos $x^3 \neq 0$. Entonces $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. Puesto que $\alpha_5 \neq 0$, podemos tomar la base de A dada por el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, x, x^2, x^3, z, zx\}.$$

Observamos que

$$\{yx, (yx)x, x, x^2, x^3, zx\} \subseteq \mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x).$$

Si $(zx^2)x \neq 0$ entonces $(yx^2)x$ y $(zx^2)x$ son linealmente independientes. En efecto, si

$$\alpha(yx^2)x + \beta(zx^2)x = 0,$$

entonces usando (2.1), obtenemos que

$$\alpha(2((yx)x)x + yx^3) + \beta zx^3 = 0.$$

De aquí que, obtenemos

$$\alpha(2\alpha_2^{-1}x^3 + yx^3) + \beta zx^3 = 0.$$

Por lo tanto

$$(\alpha y + \beta z)x^3 = -2\alpha\alpha_2^{-1}x^3.$$

Luego por la nilpotencia del operador $L_{\alpha y+\beta z}$, se sigue que $\alpha = 0$ y de aquí $\beta = 0$. En consecuencia el

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x) =< yx, (yx)x, x, x^2, x^3, zx > .$$

En forma análoga a los casos anteriores es fácil probar que en este caso $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subálgebra de A. De aquí se concluye por la Proposición 1.14, que A es soluble. Si $(zx^2)x = 0$ entonces de (2.1) tenemos que $zx^3 = 0$. Por consiguiente

$$\mathrm{Ker}(L_{x^3}) =< yx, (yx)x, x, x^2, x^3, z, zx > .$$

De (2.15) tenemos que $z^2x^3 = -4((zx)x)(zx) = 0$
y
$$(z(yx))x^3 = -2((zx)x)((yx)x) - 2(zx)(((yx)x)x) = 0$$
dado que $((zx)x) = 0$ y $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. De aquí que, es fácil probar que el $\mathrm{Ker}(L_{x^3})$ es una subálgebra de A. Se sigue que A es soluble.

Base d): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 a + \alpha_8 b.$$

Aplicando L_x^3 a x obtenemos que $\alpha_1 = 0$ y además que

$$x^2 = \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x + \alpha_5 wx.$$

Asumamos primero $x^3 = 0$. Entonces $\alpha_2 = 0$. Por consiguiente

$$x^2 = \alpha_3((yx)x)x + \alpha_5 wx.$$

De aquí que
$$(x^2 - \alpha_3((yx)x)x)^2 = \alpha_5^2(wx)^2 = 0.$$
Luego $\alpha_5 = 0$ o $(wx)^2 = 0$. Si $(wx)^2 = 0$, entonces de (2.3) tenemos que $w^2x^2 = 0$.

Consideremos el conjunto $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$. Este conjunto contiene al conjunto

$$\{yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, a, b\}.$$

Usando la identidad (2.1), se obtiene que

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, a, b > .$$

Por otro lado, usando (2.3),(2.8) y (2.14) obtenemos también que $((yx)w)x^2 = 0$. Es fácil de aquí concluir que A es soluble. Asumamos $\alpha_5 = 0$. Por consiguiente $\alpha_3 \neq 0$, luego
$$((yx)x)x = \alpha_3^{-1}x^2.$$
Luego, el conjunto
$$\{y, yx, x^2, x^3, w, wx, a, b\}$$
es una base de A. Ahora probaremos que,

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x) =< yx, x, x^2, w, wx, a, b >,$$

es una subálgebra. Para esto es suficiente probar que $w^2 \in \mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$, puesto que los demás productos es fácil de probar que están en el $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$. Sea

$$w^2 = \beta_1 y + \beta_2 yx + \beta_3(yx)x + \beta_4((yx)x)x + \beta_5 w + \beta_6 wx + \beta_7 a + \beta_8 b.$$

Aplicando $L_{x^2}L_x$ a esta ecuación obtenemos $(w^2x^2)x = \beta_1(yx^2)x$ de aquí que

$$((w^2x^2)x)w^2 = \beta_1((yx^2)x)w^2.$$

De (2.1) obtenemos que $(yx^2)x = -2((yx)x)x$ y por lo tanto

$$((yx^2)x)w^2 = -2(((yx)x)x)w^2 = -2\alpha_3^{-1}x^2w^2 = 4\alpha_3^{-1}(xw)^2.$$

Hemos obtenido que

$$((w^2x^2)x)w^2 = 4\beta_1\alpha_3^{-1}(xw)^2.$$

Por otro lado, usando (2.3) y luego reemplazando y por x^2 y x por w en (2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}((w^2x^2)x)w^2 &= -2((w^2x^2)w)(xw) = (4((x^2w)w)w + 2x^2w^3)(xw) \\ &= 4(((x^2w)w)w)(xw) + 2(x^2w^3)(xw).\end{aligned}$$

Usando (2.8) en $(((x^2w)w)w)(xw)$ con $z = x^2w, x = w, y = x$ obtenemos:

$$(((x^2w)w)w)(xw) = -1/2(w^3((x^2w)x) - ((x^2w)w^2)(xw)) = 0.$$

De (2.1) se sigue que $(x^2w)x = 0$, y de (2.2) se tiene que $(x^2w)w^2 = 0$. Finalmente, usando (2.8) y entonces (2.15) tenemos que

$$(x^2w^3)(xw) = -2((w^3x)x)(xw) = 2(w^3x)((wx)x) = 0$$

dado que $(wx)x = 0$. Por consiguiente, $\beta_1\alpha_3^{-1}(wx)^2 = 0$. Se sigue que $\beta_1 = 0$ o $(wx)^2 = 0$. En cualquier caso obtenemos que w^2 está en el $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$. Luego el

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, a, b >,$$

es una subálgebra. De aquí que A es soluble. Asumamos ahora que $x^3 \neq 0$. En este caso $x^3 = \alpha_2((yx)x)x$ y de aquí que $\alpha_2 \neq 0$. Asumamos primero $\alpha_5 \neq 0$. Luego podemos tomar la base de A dada por el conjunto

$$\{y, yx, (yx)x, x, x^2, x^3, a, b\}.$$

Por consiguiente;

$$((Ax)x)(Ax) =< ((yx)x)(yx) > .$$

Si $((yx)x)(yx) = 0$ entonces A es soluble por (2.16). Si $((yx)x)(yx) \neq 0$, consideremos el operador $L_{x^2}L_{yx}$. Por (2.13) se tiene que $yL_{x^2}L_{yx} \neq 0$ y en consecuencia

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{yx}) =< yx, (yx)x, x, x^2, x^3, a, b > .$$

En forma análoga a las demás bases y casos anteriores se prueba que el $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{yx})$ es una subálgebra de A. De aquí que A es soluble. Asumamos ahora $\alpha_5 = 0$. Puesto que $\alpha_2 \neq 0$, obtenemos que

$$(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 - \alpha_2^{-1}\alpha_3x^3.$$

De aquí que, podemos tomar una nueva base de A dado por el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, w, wx, a, b\}.$$

Entonces

$$Ax = < yx, x^2, x^3, wx >$$

y

$$(Ax)x = < x^2, x^3 > .$$

En virtud de (2.2) y (2.7) se sigue que $((Ax)x)(Ax) = 0$. Luego en consecuencia de (2.16) se tiene que A es soluble.

Base e): Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 a + \alpha_6 b + \alpha_7 c + \alpha_8 d.$$

Aplicando L_x^3 a x obtenemos que $\alpha_1 = 0$. Se sigue que

$$x^2 = \alpha_2(yx)x + \alpha_3((yx)x)x$$

y $x^3 = \alpha_2((yx)x)x$ Asumamos primero que $x^3 = 0$. Entonces $\alpha_2 = 0$ y $x^2 = \alpha_3((yx)x)x$, de aquí que $\alpha_3 = 0$. De (2.1) obtenemos que

$$(ax^2)x = (bx^2)x = (cx^2)x = (dx^2)x = 0.$$

Puesto que $(yx^2)x = -2((yx)x)x \neq 0$, se sigue que

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x) = < yL_x, yL_x^2, yL_x^3, a, b, c, d > .$$

Haciendo cálculos directos, usando (2.3) y (2.9) probamos que $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_x)$ es una subálgebra de A, de donde se sigue, igual que en las demás bases anteriores, que A es soluble.

Asumamos ahora $x^3 \neq 0$. De aquí que $\alpha_2 \neq 0$ y $((yx)x)x = \alpha_2^{-1}x^3$. Entonces podemos tomar una nueva base de A dado por el conjunto

$$\{y, x, x^2, x^3, a, b, c, d\}.$$

Luego

$$(Ax)x = < (yx)x, x^3 > \text{ y } Ax = < yx, x^2, x^3 >,$$

pero $(yx)x = \alpha_2^{-1}x^2 + \alpha_3\alpha_2^{-2}x^3$, y de aquí que $(Ax)x = < x^2, x^3 >$. Usando las identidades (2.2) y (2.7) se tiene que,

$$((Ax)x)(Ax) = < x^2, x^3 >< yx, x^2, x^3 > = 0.$$

Se sigue como consecuencia de (2.16) que A es soluble.

Capítulo 4

Avances en el Problema de Albert en Dimensión Nueve y Nilíndice Cuatro

Es posible extender nuestros resultados al caso en que la dimensión es nueve. En este caso no contamos con la identidad $(xy)x^3 = 0$, que ha cumplido un papel fundamental en la demostración de la solubilidad hasta dimensión ocho.

Lema 4.1 *Si A es una nilálgebra conmutativa, asociativa en las potencias de nilíndice cuatro y dimensión menor o igual que ocho, entonces $(xy)x^3 = 0$ es una identidad en A.*

La demostración de este Lema no es más que la recopilación de los resultados obtenidos en el Capítulo 2. Este resultado no es cierto para dimensión nueve, como veremos más adelante. Sin embargo, estamos en condiciones de enunciar el siguiente resultado:

Teorema 4.2 *Sea A una nilálgebra conmutativa, asociativa en las potencias de nilíndice cuatro y dimensión nueve sobre un cuerpo K de característica cero o mayor que siete. Entonces A es soluble o satisface la identidad $(xy)x^3 = 0$.*

Demostración. Si $L_x^3 = 0$ para todo x en A, entonces por Teorema 1.10, A es soluble. Si existe algún elemento x en A con $L_x^3 \neq 0$, entonces tenemos dos posibilidades: $L_x^4 = 0$ para todo x en A o, existe x en A con $L_x^4 \neq 0$. En el primer caso, por la identidad (2.4), A satisface la identidad

$$(xy)x^3 = 0.$$

Sea x en A tal que $L_x^4 \neq 0$. Se deduce del Teorema 1.11 que $L_x^5 = 0$. Luego el polinomio minimal de L_x es X^5. De esta forma las posibles representaciones canónicas de Jordan de L_x son:

a) $J(5,4)$,

b) $J(5,3,1)$,

c) $J(5,2,2)$,

d) $J(5,2,1,1)$,

e) $J(5,1,1,1,1)$.

Ahora analizaremos las bases correpondientes.

Base a): Escribiendo x como combinación lineal de la base respectiva en a) se obtiene que x está en Ax lo que contradice la nilpotencia del operador multiplicación L_x. Luego este caso no existe.

Base b): En este caso A tiene una base de la forma

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, (((yx)x)x)x, z, zx, (zx)x, w\}.$$

Observamos que

$$\mathrm{Ker}(L_x^4) =< yx, (yx)x, ((yx)x)x, (((yx)x)x)x, z, zx, (zx)x, w >,$$

y

$$\mathrm{Ker}(L_x^4) = \mathrm{Ker}\ L_x L_{x^3} = \mathrm{Ker}(L_{x^2}^2).$$

Es fácil comprobar, usando estas igualdades, que

$$[\mathrm{Ker}(L_x^4)]^2 L_x^4 = 0.$$

Se concluye que $\mathrm{Ker}(L_x^4)$ es una subálgebra de dimensión ocho de A. De aquí, por la Proposición 1.12 se deduce que $\mathrm{Ker}(L_x^4)$ es un ideal de dimensión 8 de A. Entonces de la Proposición 1.1 concluímos que A es soluble.

Utilizando los mismos métodos que en el Lema 3.2, en los casos c), d) y e), escribimos x como combinación lineal de la base respectiva y aplicamos L_x^3 para obtener que

$$x^3 = \alpha(((yx)x)x)x$$

para cierto α en K. Por la identidad (2.4) obtenemos que

$$x^3 = -\frac{1}{2}\alpha^{-1}(xy)x^3.$$

De aquí se deduce que necesariamente $\alpha = 0$. Esto implica que $x^3 = 0$. De aquí, desde la identidad (2.4) concluímos que $(((yx)x)x)x = 0$ lo que es una contradicción pues $(((yx)x)x)x$ es parte de la base de A. Luego estos casos no ocurren. Esto prueba el Teorema.

Usando los mismos argumentos anteriores es posible demostrar el siguiente resultado:

Lema 4.3 *Sea A una nilálgebra conmutativa y asociativa en las potencias de nilíndice de dimensión finita n sobre un cuerpo de característica cero o mayor que n. Si existe x en A con $L_x^4 \neq 0$ y la representación canónica de Jordan de L_x es $J(5, i_2, ..., i_s)$ entonces $i_2 \geq 3$.*

A continuación veremos algunos casos de dimensión nueve en que se cumple la identidad $(xy)x^3$ y el álgebra es soluble.

Sea x en A con $L_x^3 \neq 0$ y $L_x^4 = 0$.

Las posibles formas matriciales de Jordan son:

a)J(4,4,1), *b*)J(4,3,2), *c*)J(4,3,1,1), *d*)J(4,2,2,1),
e)J(4,2,1,1,1), *f*)J(4,1,1,1,1,1), *g*)J(3,3,3), *h*)J(3,3,2,1),
i)J(3,3,1,1,1), *j*)J(3,2,2,2), *k*)J(3,2,2,1,1), *l*)J(3,2,1,1,1,1),
m)J(3,1,1,1,1,1,1).

Proposición 4.4 Si existe x en A con $x^3 \neq 0$ y tal que L_x tiene una representación canónica de Jordan del tipo a), e) ó f), entonces A es soluble.

Demostración. En el caso f) A tiene una base de la forma

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, a, b, c, d, e\}$$

con $(((yx)x)x)x = ax = bx = cx = dx = cx = 0$.

Escribiendo x como combinación lineal de la base concluímos que el conjunto

$$\{y,\ x,\ x^2,\ x^3,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$$

es base de A y que

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{xy}) =< x, x^2, x^3, a, b, c, d, e > .$$

Análogamente a los casos vistos en dimensión ocho es fácil probar que $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{xy})$ es una subálgebra de A. Como esta subálgebra tiene dimensión ocho de nilíndice 4, entonces por el Teorema 3.1 se deduce que es soluble. Además por la Proposición 1.12 es un ideal, luego usando la Proposición 1.1 obtenemos que A es soluble.

En el caso e) A tiene una base de la forma

$$\{y, yx, (yx)x, ((yx)x)x, w, wx, a, b, c\}.$$

Sea

$$x = \alpha_1 y + \alpha_2 yx + \alpha_3 (yx)x + \alpha_4((yx)x)x + \alpha_5 w + \alpha_6 wx + \alpha_7 a + \alpha_8 b + \alpha_9 c.$$

Usando que $x^3 \neq 0$ concluímos que el conjunto

$$\{ y,\ x,\ x^2,\ x^3,\ w,\ wx,\ a,\ b,\ c\}$$

es una base de A y que:

Si $\alpha_5 \neq 0$, entonces:

$$((Ax)x)(Ax) =< ((yx)x)(yx) > .$$

Si $((yx)x)(yx) = 0$ entonces A es soluble.

Si $((yx)x)(yx) \neq 0$ entonces

$$\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{xy}) =< x, x^2, x^3, w, wx, a, b, c > .$$

Además se prueba fácilmente que $\mathrm{Ker}(L_{x^2}L_{xy})$ es una subálgebra de A de donde concluímos que A es soluble.

Si $\alpha_5 = 0$ entonces

$$((Ax)x)(Ax) = 0.$$

De aquí, A es soluble.

Usando el mismo tipo de argumentos se concluye finalmente que en el caso a), A también es una álgebra soluble.

Conclusiones finales Es posible continuar el estudio de nuestro problema en dimensiones bajas usando el método desarrollado hasta ahora. Lo interesante sería obtener un algoritmo que nos permitiera, por ejemplo, obtener resultados sobre las representaciones de Jordan al menos en el caso de nilíndice cuatro.

Nuestro trabajo en el futuro inmediato será completar el estudio al menos hasta dimensión nueve.

Bibliografía

1. A. A. Albert, On power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 552-593.

2. I. Correa, Finitely generated Bernstein algebras, Algebras Groups and Geometries **1996**, 13, 380-383.

3. I. Correa, A. Suazo, On a class of Commutative power-associative nilalgebras, *Journal of Algebra* **215** (1999), 412-417.

4. I. Correa and I. R. Hentzel, On Solvability of Noncommutative Power-Associative Nilalgebras, Journal of Algebra **240** (2001), 98-102.

5. I. Correa, L. A. Peresi, On the solvability of the power-associative nilalgebras of dimension five, Results in Mathematics **39** (2001), 23-27.

6. I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, On the solvability of the commutative power-associative nilalgebras of dimension six, Linear Alg. Appl. **369** (2003), 185-192.

7. I. Correa, I. R. Hentzel, A. Labra, On the Nilpotence of Right Multiplication Operator in Right NilAlgebras, Communications in Algebra **30 (7)** (2002), 3473-3488.

8. I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, On the Nilpotence of the Commutative Right Nilalgebras of Maximum Right Nilindex, por aparecer en International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra.

9. I. Correa, I. R. Hentzel, A. Labra, On Solvability of Right Nilalgebras of Low Dimension, por aparecer en International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra.

10. I. Correa, I. R. Hentzel, P. P. Julca, L. A. Peresi, Nilpotent linear transformations and the Albert's problem, preprint.

11. I. Correa, I. R. Hentzel, Commutative algebras with ((yx)x)x=0, preprint.

12. I. Correa, P. P. Julca, On the Albert's Problem in Dimension Eight, Preprint.

13. L. Elgueta, A. Suazo, Solubilidad de las Nilálgebras Conmutativas de Potencias Asociativas de Nilíndice 4 y Dimensión $\leq$ 8, Actas LXXV Encuentro de la Sociedad de Matemática de Chile, La Serena, Octubre del 2003.

14. M. Gerstenhaber, H. C. Myung, On commutative power-associative nilalgebras of low dimension, *Proc. Amer. Math. Soc.* **48** (1975), 29-32.

15. M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices I, Amer. J. Math. 80 (1958), 614-622.

16. M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices II, Duke Math. J. 27 (1960), 21-31.

17. M. Gerstenhaber, On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices III, Ann. Math. 70 (1959), 167-205.

18. J. C. Gutiérrez Fernández, On commutative power-associative nilalgebras, preprint.

19. P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, On an algebraic generalization of the Quantum Mechanical Formalism, Ann. Math., II **35** (1934), 29-64.

20. P. P. Julca, Sobre Operadores Nilpotentes y el Problema de Albert, Actas LXXV Encuentro de la Sociedad de Matematica de Chile, La Serena, Octubre del 2003.

21. Y. I. Lyubich, Mathematical Structures in Population Genetics, Biomathematics Volume 22,Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1992.

22. J. M. Osborn, Varieties of Algebras, Adv. Math. **8** (1972), 163-369.

23. L. A. Peresi, "Algebras nao-associativas", Cursillo X Congreso de Matemáticas Capricornio COMCA, La Serena 2000.

24. R. D. Schafer, "An Introduction to Nonassociative Algebras", Academic Press, New York, London, 1966.

25. D. Suttles, A counterexample to a conjecture of Albert, *Notices Amer. Math. Soc.* **19** (1972), A-566.

26. Zhevlakov, K. A.; Slin'ko A. M.; Shestakov, I. P.; Shirshov, A. I.; Rings that are nearly associative, Academic Press, New York, 1982.