COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESCALARES DE ORDEN CUATRO

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Fernando Huancas

Enero de 2004

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato.

FERNANDO HUANCAS SUAREZ

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemática en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día......................

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto	....
Comisión de Evaluación de Tesis Dr. Eduardo Friedman	....
Dr. Gueorgui Raykov	....
Dr. Samuel Castillo	....

Resumen

En esta tésis se considera la ecuación diferencial escalar lineal

$$y^{(4)} + \sum_{i=0}^{3}(r_i(t) + a_i)y^{(i)} \;=\; 0$$

Se estudia el comportamiento asintótico de las soluciones bajo dos condiciones fundamentales. En primer lugar se supone que $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \mathrm{Re}\lambda_3 > \mathrm{Re}\lambda_4$, donde λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, son las raices del polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Además se asume que $r_i \to 0$, cuando $t \to \infty$, $r_i \in L^p$ ó r_i condicionalmente integrables, para cada $i = 1, 2, 3, 4$

Las técnicas usadas en este trabajo permiten obtener por otra vía los resultados de Poincaré y Perron, con una clara mejora para la fórmula asintótica. Así mismo facilitan la deducción de teoremas asintóticos, tipo Levinson y Hartman-Wintner e inclusive se obtiene un teorema mas general que el sugerido por Harris y Lutz.

Abstract

This thesis is concerned with the asymptotic behavior of the following differential equation

$$y^{(4)} + \sum_{i=0}^{3}(r_i(t) + a_i)y^{(i)} \;=\; 0.$$

We present several results, under technical assumptions on the coefficients and perturbations and applying an appropiate change of variables. We consider $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \mathrm{Re}\lambda_3 > \mathrm{Re}\lambda_4$, where $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, are the roots of

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

with $r_i \to 0$, when $t \to \infty$, $r_i \in L^p$ or $r_i \in L^p_{\mathrm{loc}}$ and obtain comprehensive proofs of the results by Poincare [9] and Perron [7]. In addition, we get the asymptotic theorems of Levinson y Hartman-Witner and a generalization of result of Harris and Lutz [6].

A mis padres Tomás y Angela, y a mis hermanos por su apoyo incondicional
A mi esposa Miriam e hijos, por su comprensión y cariño

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento, al director de esta tésis el profesor Dr. Manuel Pinto por su valiosa guía y mucha paciencia, sin cuyo apoyo este trabajo no hubiese llegado a culminarse.

Así mismo expreso mi gratitud al Director de Postgrado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias, profesor Dr. Rolando Pomareda por la confianza depositada en mi persona, al apoyar mi aceptación en la Escuela de Postgrado.

Agradezco en forma especial a mis amigos: Anibal Coronel, Esperanza Lozada, Esptiben Rojas, Magaly Móraga, Pedro Julca y Antonio Carlos por su amistad y apoyo durante el desarrollo de este trabajo.

Expreso mis sinceros agradecimiento a los esposos Anibal Coronel y Esperanza Lozada y a la señora Cecilia Aguirre por su valiosa ayuda en la redacción de este trabajo.

Agradezco al proyecto Fondecyt 1030535, por el soporte económico para el desarrollo de esta tésis.

El Tesista

Índice General

Introducción

Considerando la ecuación lineal escalar homogenea de orden n

$$x^{(n)} + \ldots + a_4 x^{(4)} + a_3 x^{(3)} + a_2 x^{(2)} + a_1 x^{(1)} + a_0 x = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i son constantes, se define su perturbación como

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \{r_i(t) + a_i\} y^{(i)} + \{r_0(t) + a_0\} y = 0, \tag{2}$$

donde las funciones r_i, dependientes de t, $i = 1, \ldots, n-1$, son las perturbaciones de los coeficientes de la ecuación (1).

A finales del siglo XIX (1885), Poincaré [9], estableció la existencia de una solución para la ecuación (2), tal que el cociente $y^{(1)}/y$ converge cuando $t \to \infty$. Para la obtención de sus resultados supuso que todas las raíces λ_i, $i = 1, \ldots, n$ de la ecuación

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3}$$

tienen parte real distinta y además que los $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$, para cada $i = 1, \ldots, n-1$.

Posteriormente, a principios del siglo XX, Perron [7] mejoró notablemente los resultados de Poincaré [9], asegurando, bajo las mismas hipótesis, la existencia de n soluciones y_i, $i = 1, \ldots, n$ de la ecuación (2), tales que $y_i^{(1)}/y_i$ converge a λ_i, cuando $t \to \infty$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Ambos trabajos, el de Poincaré [9] y el de Perron [7] tienen la desventaja de presentar demostraciones muy complicadas y no establecer fórmulas precisas para el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuacion (2), lo que impide obtener un mayor aprovechamiento de estos resultados. Este punto es el que motiva el presente estudio, es decir, la busqueda de demostraciones alternativas a los resultados previamente mencionados y la precisión detallada del comportamiento asintótico.

La manera más natural de estudiar el comportamiento asintótico de la ecuación (2), es transformándola, mediante un cambio de variable, a un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma $z^{(1)} = A(t)z$, donde A es una matriz $n \times n$ de funciones de $[0, \infty[$ en $\mathbb{C}$ y z es un vector columna de n coordenadas. Luego, al sistema resultante, se aplican los conocidos teoremas de Levinson [3], de Hartman-Wintner [4] (ver teorema 1.6.1) y de Eastham [4]. Sin embargo, una clara desventaja de la aplicación directa de los teoremas aparece del hecho que los resultados no son válidos para perturbaciones que tiendan a cero. Superar esta dificultad ha motivado variados enfoques (ver [1, 6, 8]).

En [6] Harris y Lutz logran extender y unificar los trabajos de Levinson (ver [3]) y Hartman-Wintner (ver [4]). El tipo de sistemas considerados en [3] y [4] son los asintoticamente diagonales, es decir, de de la forma:

$$z^{(1)} = (D(t) + R(t))z \tag{4}$$

donde $D(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t); \lambda_2(t); \ldots; \lambda^{(n-1)}(t))$ es una matriz diagonal y R es una matriz de orden $(n-1)\times(n-1)$. Los teoremas obtenidos en [3] y [4] asumen distintas condiciones de tricotomia sobre D y suponen que las entradas de R estén en L^p,con $p = 1$ para el caso de Levinson (ver [3]) y $p \in]1, 2]$ para el caso de Hartman-Wintner (ver [4]). La extensión dada en [6], parte considerando las mismas condiciones sobre D, pero modifica las hipótesis de integrabilidad de las entradas de R a $p \geq 1$. La idea principal en [6] es la demostración de la existencia de un sistema fundamental de soluciones z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que:

$$z_i(t) = exp(-\int_{t_0}^{t} \overline{\lambda_i(s)} ds) \to e_i, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{5}$$

es decir:

$$z_i(t) = (e_i + o(1))exp(\int_{t_0}^{t} \overline{\lambda_i(s)} ds) \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{6}$$

donde $\overline{\lambda_i(t)} = \overline{\lambda_i}(\lambda_i(t), R(t))$ y e_i es un vector de la base canonica de $\mathbb{R}^n$ y posteriormente iterar sobre potencias 2^p.

Se debe también mencionar un teorema importante ,debido a Eastham(ver [4]) (5.teor.1.6.1),en el cual asume que

$\{\frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)}\}R \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $(\{\frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)}\}R)^{(1)}$ pertenece a L^1, $i \neq j$.

Pero como en este caso, los $\overline{\lambda_i}$, $(i = 1, \ldots, n)$ en la fórmula (4), son los valores propios de la matriz $D + R$, los cuales en la mayoria de los casos son dificiles de calcular, impide aprovechar al máximo este resultado.

Una desventaja de usar esta teoria, para estudiar la ecuación (2), es que al llevarla a un sistema, se debe diagonalizar la matriz involucrada, en este proceso se alteran todos los términos de las matrices originales, según el número de trasformaciones y las matrices resultantes son dificiles de calcular.

Existe otra manera de estudiar la ecuación (2), sin trasformarla a un sistema, mediante un cambio de variables, poco conocido para ordenes altos, el cual consiste en poner $z = (y^{(1)}/y) - \lambda$, con λ alguna raíz de la ecuación (3) (ver ,cap 6). A partir de esto llegamos a una ecuación tipo Riccati de orden $n-1$. Para usar este método es necesario conocer las raíces características de la parte lineal, las cuales pueden ser calculadas de manera algebraica.

Para $n = 2$, Bellman en [2] (ver Cap. 6), usando el cambio de variable propuesto anteriormente, muestra varios resultados, para la ecuación

$$y^{(2)} \pm (1 + \phi(t))y = 0. \tag{7}$$

El estudio, para el caso con signo positivo, lo hace usando perturbaciones con condiciones integrables y para el caso con signo negativo, usa perturbaciones que tiendan a cero, pidiendo además que la función ϕ pertenezca a L^2. Esto le permite obtener resultados mas precisos. Además considera la hipótesis que $\phi^{(}1)$ pertenezca a L^1, lo que de alguna manera se relaciona con el teorema de Eastham. Para $n = 3$, Bellman [2], usa el cambio de variables tipo Riccati, pero como no conoce las raíces características de la parte lineal, no obtiene resultados y practicamente solo plantea el problema.

En [4], existen resultados completos para la ecuación

$$(\psi(t)y^{(1)})^{(1)} \pm \varphi(t)y = 0, \tag{8}$$

estableciando una equivalencia entre (7) y (8), para deducir estos resultados se aplica el teorema de Levinson.

Resultados tipo: Poincare, Levinson y Hartman-Wintner, para los casos $n = 2, 3$ son obtenidos por Pablo Figueroa ([5]), dando una fórmula explícita para las soluciones fundamentales de la ecuacion (2).

En este trabajo, se estudia el caso dado por Poincare y Perron, o sea , la ecuacion (2), para $n = 4$. Usando una ecuación tipo Riccati se obtiene una fórmula mas explícita y precisa para el comportamiento asintótico de las soluciones (así como también para sus dos primeras derivadas), de la ecuación (2).

Para el caso $n = 4$, se consideran como hipótesis que $\mathrm{Re}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$, $\forall i \neq j$, donde los λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ son las raíces caracaterísticas de la ecuación (2). Es decir se tiene que para cada i, el conjunto $N(i) = \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$, se escribe como unión disjunta de 2 subconjuntos $N_1(i)$ y $N_2(i)$ tales que

$$\mathrm{Re}(\lambda_j - \lambda_i) > 0, \quad \text{si} \quad j \in N_1(i) \quad \text{y} \quad \mathrm{Re}(\lambda_j - \lambda_i) < 0, \quad \text{si} \quad j \in N_2(i),$$

junto con estas condiciones, estan las distintos comportamientos de las perturbaciones: $r_i \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, $r_i \in L^p$ o r_i sean condicionalmente integrables para $i = 01, 2, 3, 4$.

Se sabe que cuando las raíces de la ecuación (3), son todas distintas, entonces la ecuación (1) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_i(t) = exp(\int_{t_0}^{t} \overline{\lambda_i(s)} ds) \tag{9}$$

donde $\overline{\lambda_i} = \overline{\lambda_i}(\lambda_i, R)$ con $R = \{r_i\}$ desde $i = 0, \ldots, n$. Dependiendo de la condición que satisfagan los r_i, $i = 1, \ldots, n$, se puede conocer de manera bastante precisa, el comportamiento asintótico de los $\overline{\lambda_i}$. En este trabajo, por ejemplo se obtiene una fórmula explícita, para el caso r_i perteneciente a L^p, para cualquier $p \geq 1$, mejorando significativamente el metódo indicado por Harris y Lutz.

El trabajo esta estructurado en dos capitulos. En un primer capitulo, se muestran los resultados obtenidos para la ecuación de orden cuatro, es decir para la ecuación (2), con $n = 4$, usando una ecuación tipo Riccati, que se obtiene con el cambio de variables: $z = \dfrac{y^{(1)}}{y} - \lambda$, con λ alguna raíz de la ecuación (3), para $n = 4$, considerando solamente el caso

$$\mathrm{Re}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \quad \forall i \neq j.$$

Finalmente, en un segundo capitulo, se muestran ejemplos, en los que queda de manifiesto la ventaja de la técnica expuesta en este trabajo.

Capítulo 1

Teoremas para el comportamiento asintótico en una EDO de orden cuatro

1.1 Ecuación Diferencial Escalar de Orden cuatro

Considerando la ecuación diferencial escalar homogénea de orden 4

$$x^{(4)} + a_3x^{(3)} + a_2x^{(2)} + a_1x^{(1)} + a_0x = 0, \tag{1.1}$$

donde $a_j \in I\!R$ ó $\mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2, 3$, cuyo polinomio característico viene dado por

$$P(\lambda) \quad = \quad \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0,$$

en el presente estudio nos abocamos a investigar la siguiente perturbación

$$y^{(4)} + [r_3(t) + a_3]y^{(3)} + [r_2(t) + a_2]y^{(2)} + [r_1(t) + a_1]y^{(1)} + [r_0(t) + a_0]y = 0 \tag{1.2}$$

bajo diversas condiciones de comportamiento de r_j, $j = 0, 1, 2, 3$. Por ejemplo se asumirá $r_j \to 0$ cuando $t \to \infty$, $r_j \in L^p$, $\quad p \geq 1$ o que los r_j sean funciones localmente integrables.

Acontinuación se enuncian y demuestran unos lemas preliminares.

Lema 1.1.1 *Dada la ecuación (1.2) y suponiendo que las raíces características de la ecuación (1.1), denotadas por λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, son distintas dos a dos, se tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma*

$$y_i(t) = exp(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]ds) \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.3}$$

donde cada z_i, satisfacen las ecuaciones

$$\mathcal{E}\mathcal{Z}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\mathcal{Z}_i &= z_i^{(3)} + [4\lambda_i + a_3]z_i^{(2)} + [6\lambda_i^2 + 3a_3\lambda_i + a_2]z_i^{(1)} + [4\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 a_3 + 2\lambda_i a_2 + a_1]z_i \\
&\quad + r_3 z_i^{(2)} + [3\lambda_i r_3(t) + r_2(t)]z_i^{(1)} + [3\lambda_i^2 r_3(t) + 2\lambda_i r_2(t) + r_1(t)]z_i + \lambda_i^3 r_3(t) \\
&\quad + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t) + 4z_i z_i^{(2)} + [12\lambda_i + 3a_3 + 3r_3(t)]z_i z_i^{(1)} + 6z_i^2 z_i^{(1)} \\
&\quad + 3[z_i^{(1)}]^2 + [6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2 + 3\lambda_i r_3(t) + r_2(t)]z_i^2 + [4\lambda_i + r_3(t)]z_i^3 + z_i^4
\end{aligned}$$

Demostración. Se debe verificar que cada y_i, $i = 1, 2, 3, 4$ satisface la ecuación (1.2).

Por conveniencia notacional se define

$$\begin{aligned}
y(t) &= exp(\int_{t_0}^{t} [\lambda + z(s)]ds) \\
\mathcal{M} &= y^{(4)} + [r_3(t) + a_3]y^{(3)} + [r_2(t) + a_2]y^{(2)} + [r_1(t) + a_1]y^{(1)} + [r_0(t) + a_0]y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= z^{(3)} + 4(\lambda + z)z^{(2)} + 6(\lambda + z)^2 z^{(1)} + 3[z^{(1)}]^2 + (\lambda + z)^4 \\
&\quad + (r_3(t) + a_3)(z^{(2)} + 3(\lambda + z)z^{(1)} + (\lambda + z)^3) + (r_2(t) + a_2)(z^{(1)} + (\lambda + z)^2) \\
&\quad + (r_1(t) + a_1)(\lambda + z) + r_0(t) + a_0
\end{aligned}$$

donde λ es una raíz característica de (1.1). Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
y^{(1)}(t) &= [\lambda + z(t)]exp(\int_{t_0}^{t} [\lambda + z(s)]ds) = [\lambda + z(t)]y(t) \\
y^{(2)}(t) &= [(\lambda + z(t))^2 + z^{(1)}(t)]y(t) \\
y^{(3)}(t) &= [(\lambda + z(t))^3 + 3(\lambda + z(t))z^{(1)}(t) + z(2)(t)]y(t) \\
y^{(4)}(t) &= [(\lambda + z(t))^4 + 6(\lambda + z(t))^2 z^{(1)}(t) + 3[z^{(1)}(t)]^2 + 4(\lambda + z(t))z^{(2)}(t) \\
&\quad + z^{(3)}(t)]y(t).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= [z^{(3)}(t) + 4(\lambda + z(t))z^2 + 6(\lambda + z(t))^2 z^{(1)}(t) + 3[z^{(1)}]^2 + (\lambda + z(t))]^4 y(t) \\
&\quad + (r_3(t) + a_3)[z^{(2)}(t) + 3(\lambda + z(t))z^{(1)} + (\lambda + z(t))^2]y(t) + (r_2(t) + a_2) \\
&\quad [z^{(1)}(t) + (\lambda + z(t))^2]y(t) + (r_1(t) + a_1)(\lambda + z(t))y(t) + (r_0(t) + a_0)y(t) \\
&= [z^{(3)} + 4(\lambda + z)z^{(2)}] + 6(\lambda + z)^2 z^{(1)} + 3[z^{(1)}]^2 + (\lambda + z)^4 \\
&\quad + (r_3(t) + a_3)[z^{(2)} + 3(\lambda + z)z^{(1)} + (r_2(t) + a_2) \\
&\quad [z^{(1)}(t) + (\lambda + z(t))^2] + (r_1(t) + a_1)(\lambda + z) + r_0(t)a_0]y(t).
\end{aligned}$$

Para demostrar que los y_i verifican la ecuación (1.2) es suficiente probar que $\mathcal{T} = 0$, lo cual se sigue por la ecuación (1.4) y la notación introducida,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} &= z^{(3)} + 4\lambda z^{(2)} + 4zz^{(2)} + 6\lambda^2 z^{(1)} + 12\lambda zz^{(1)} + 6z^2 z^{(1)} + 3[z^{(1)}]^2 + \lambda^4 \\
&\quad +4\lambda^3 z + 6\lambda^2 z^2 + 4\lambda z^3 + z^4 + r_3(t) z^{(2)} + 3\lambda r_3(t) z^{(1)} + 3\lambda r_3(t) zz^{(1)} \\
&\quad +\lambda^3 r_3(t) + 3\lambda a_3 z^2 + z^3 + r_2(t) z^{(1)} + \lambda^2 r_2(t) + 2\lambda r_2(t) z + r_2(t) z^2 + a_2 z^{(1)} \\
&\quad +\lambda^2 a_2 + 2\lambda a_2 z + a_2 z^2 + \lambda r_1(t) + r_1(t) z + \lambda a_1 + a_1 z + r_0(t) + a_0 \\
&= z^{(3)}(t) + [4\lambda + a_3] z^{(2)} + [6\lambda^2 + 3a_3\lambda + a_2] z^{(1)} + [4\lambda^3 + 3\lambda^2 a_3 + 2\lambda a_2 + a_1] z \\
&\quad +r_3 z^{(2)} + [3\lambda r_3(t) + r_2(t)] z^{(1)} + [3\lambda^2 r_3(t) + 2\lambda r_2(t) \\
&\quad +r_1(t)] z + \lambda^3 r_3(t) + \lambda^2 r_2(t) + \lambda r_1(t) + r_0(t) + 4zz^{(2)} + [12\lambda + 3a_3 + 3r_3(t)] \\
&\quad zz^{(1)} + 6z^2 z^{(1)} + 3[z^{(1)}]^2 + [6\lambda^2 + 3\lambda a_3 + a_2 + 3\lambda r_3(t) + r_2(t)] z^2 \\
&\quad +[4\lambda + r_3(t)] z^3 + z^4 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto y_i es solución de la ecuación (1.2). como todas las raíces características son distintas se tienen cuatro ecuaciones para z, es decir cuatro soluciones z_i para $i = 1, 2, 3, 4$ ■

Observación 1.1.1

1. *El lema 1.1.1 muestra de otra manera el cambio de variables* $z = \dfrac{y'}{y} - \lambda$, *cuando las raíces características de la ecuación (1.1) son todas distintas.*

2. *Si se conocen las soluciones de (1.4), es decir, las raíces características de la ecuación.*

$$
z^{(3)} + [4\lambda + a_3] z^{(2)} + [6\lambda^2 + 3a_3 + a_2] z^{(1)} + [4\lambda^3 + 3\lambda^2 a_3 + 2\lambda a_2 + a_1] z = 0, \quad (1.5)
$$

se obtienen las soluciones de la ecuación (1.2).

El siguiente lema nos proporciona información sobre la raíces características de la ecuación (1.5).

Lema 1.1.2 *Si las raíces λ_i del polinomio característico P de la ecuación (1.1), son todas distintas. Entonces las diferencias $\lambda_j - \lambda_i$, $i \neq j$ satisfacen la ecuación*

$$
\lambda^3 + [4\lambda_i + a_3]\lambda^2 + [6\lambda_i^2 + 3a_3\lambda_i + a_2]\lambda + 4\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 a_3 + 2\lambda_i a_2 + a_1 \quad = \quad 0
$$

para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Sean λ_i y λ_j dos raíces arbitrarias del polinomio P entonces

$$\begin{aligned} \lambda_j^4 + a_3\lambda_j^3 + a_2\lambda_j^2 + a_1\lambda_j + a_0 &= 0 \qquad (1.6) \\ \lambda_i^4 + a_3\lambda_i^3 + a_2\lambda_i^2 + a_1\lambda_i + a_0 &= 0 \qquad (1.7) \end{aligned}$$

Restando (1.7) de (1.6), y dividiendo por $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ se obtiene

$$(\lambda_j^3 + \lambda_j^2\lambda_i + \lambda_j\lambda_i^2 + \lambda_i^3) + a_3(\lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i + \lambda_i^2) + a_2(\lambda_j + \lambda_i) + a_1 = 0.$$

Observando que

$$\begin{aligned} \lambda_j^3 + \lambda_j^2\lambda_i + \lambda_j\lambda_i^2 + \lambda_i^3 &= (\lambda_j - \lambda_i)^3 + 4\lambda_i(\lambda_j - \lambda_i)^2 + 6\lambda_i^2(\lambda_j - \lambda_i) + 4\lambda_i^3 \\ a_3(\lambda_j^2 + \lambda_j\lambda_i + \lambda_i^2) &= a_3(\lambda_j - \lambda_i)^2 + 3a_3\lambda_i(\lambda_j - \lambda_i) + 3a_3\lambda_i^2 \\ a_2(\lambda_j + \lambda_i) &= a_2(\lambda_j - \lambda_i) + 2\lambda_i a_2 \end{aligned}$$

se sique que

$$\begin{aligned} (\lambda_j - \lambda_i)^3 + 4\lambda_i(\lambda_j - \lambda_i)^2 + 6\lambda_i^2(\lambda_j - \lambda_i) + 4\lambda_i^3 + a_3(\lambda_j - \lambda_i)^2 + 3a_3\lambda_i(\lambda_j - \lambda_i) \\ +3a_3\lambda_i^2 + a_2(\lambda_j - \lambda_i) + 2\lambda_i a_2 + a_1 = 0 \end{aligned}$$

o equivalentemente que

$$\begin{aligned} (\lambda_j - \lambda_i)^3 + [4\lambda_i + a_3](\lambda_j - \lambda_i)^2 + [6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2](\lambda_j - \lambda_i) + 4\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 a_3 \\ +2\lambda_i a_2 + a_1 = 0, \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. ■

1.2. Soluciones de la ecuación (1.4)

Como se observó en la sección (1.1) (ver observación 1.4.1-*2*) las soluciones de la ecuación (1.2) vienen determinadas por las raíces características de la ecuación (1.1) y por las soluciones de la ecuación (1.4). Es por eso que resulta trascedental estudiar la ecuación (1.4).

Para resolver la ecuación (1.4) se ocupa el siguiente lema

Lema 1.2.1 *Dados los parámetros* $\rho, K_3 > 0$ *y la función* $K :]0, 1] \to]0, \infty[$ *tal que*

$$\lim_{M \to 0^+} K(M) = 0.$$

entonces existen constantes $M, K_1, K_2 > 0$ que satisfacen.

$$\begin{aligned} K_2 + K(M)K_3 + K(M)\rho &< 1 \quad y \\ K_1 + MK_2 + MK(M)K_3 + MK(M)\rho &= M. \end{aligned}$$

Demostración. *Observando que $1/\rho > 0$ y en virtud de las propiedades de la función K, se escoge $M > 0$ de modo que $0 < K(M) < 1/3\rho$ y $K_3K(M) < 1/3$. De este modo se tiene que $0 < \rho K(M) + K_3K(M) < 2/3 < 1$.*

Ahora se puede escoger K_2 de modo que $0 < K_2 < 1 - [\rho K(M) + K_3K(M)]$, es decir $K_2 + \rho K(M) + K_3K(M) < 1$.

Finalmente, definiendo

$$K_1 = M - [K_2M + M\rho K(M) + K_3K(M)M] > 0$$

se logra concluir la demostración. ■

Definición ***1.2.1*** *([10]) Dada la ecuación diferencial escalar homogénea*

$$x^{(3)} + b_2x^{(2)} + b_1x^{(1)} + b_0x = 0, \tag{1.8}$$

teniendo en cuenta el signo de $\mathrm{Re}\gamma_i$, $i = 1, 2, 3$ la ecuación (1.8) tendrá las siguientes **funciones de Green**

Cuando $\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2, \mathrm{Re}\gamma_3 > 0$:

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} + (\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)} + (\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)} & , \quad si \quad t \leq s \\ 0 & , \quad si \quad t \geq s. \end{cases}$$

Cuando $\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2, \mathrm{Re}\gamma_3 < 0$:

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\gamma_1+\gamma_2)e^{\gamma_3(t-s)} - (\gamma_1+\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)} & , \quad si \quad t \geq s \\ \dfrac{(\gamma_2-\gamma_3)e^{\gamma_1(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)} & , \quad si \quad t \leq s. \end{cases}$$

Cuando $\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2 > 0$ *y* $\mathrm{Re}\gamma_3 < 0$:

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)} & , \quad si \quad t \geq s \\ \dfrac{(\gamma_2+\gamma_3)e^{\gamma_1(t-s)} - (\gamma_3+\gamma_1)e^{\gamma_2(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)} & , \quad si \quad t \leq s. \end{cases}$$

Cuando $\text{Re}\gamma_1, \text{Re}\gamma_2, \text{Re}\gamma_3 < 0$:

$$g(t,s) \;=\; \begin{cases} 0 & , \quad si \quad t \geq s \\ \dfrac{(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} + (\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)} + (\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)} & , \quad si \quad t \leq s. \end{cases}$$

La simbología $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *es utilizada para denotar las raíces características de la ecuación (1.8).*

Observación 1.2.1 . *A la luz del lema 1.1.2, las funciones de Green* $g(t,s)$ *pueden ser reescritas en términos de las diferencias de las raíces del polinomio característico de la ecuación (1.1).*

Definición 1.2.2 *Los operadores* G *y* L *se definen por*

$$\begin{aligned} G(F)(t) &= \Big|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F(s)ds\Big| + \Big|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F(s)ds\Big| + \Big|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F(s)ds\Big| \\ \mathcal{L}(F)(t) &= \int_{t_0}^{\infty}\Big[|g(t,s)| + |\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)| + |\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)|\Big]|F(s)|ds, \end{aligned}$$

donde g *es la función de Green de la ecuación (1.8).*

Con ayuda del lema 1.2.1, las definiciones y la observación 1.2.1 probaremos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1 *Sean* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *las raíces del polinomio*

$$Q(\gamma) \;=\; \gamma^3 + b_2\gamma^2 + b_1\gamma + b_0, \tag{1.9}$$

donde b_j, $j = 0,1,2$ *son constantes;* a, F_1, F_2 *son funciones definidas en* $[t_0, +\infty[$. *Se introduce la ecuación diferencial escalar*

$$z^{(3)} + b_2 z^{(2)} + b_1 z^{(1)} + b_0 z \;=\; a(t) + \hat{F}_1(t,\hat{z}) + \hat{F}_2(t,\hat{z}) + \mu(\hat{z}), \tag{1.10}$$

donde $\hat{F}_i(t,\hat{z}) = F_i(t)\hat{z}(t)$, $i = 1,2$, $\hat{z} = (z, z^{(1)}, z^{(2)})$ *y* μ *la función rescalamiento. Suponiendo que* K *y* M *son como en las hipótesis del lema 1.2.1 y además que*

1. *Las funciones* $\hat{F}_1$ *y* $\hat{F}_2$ *satisfacen*

$$\begin{aligned} |\hat{F}_1(t,\hat{z}_1) - \hat{F}_1(t,\hat{z}_2)| &\leq |F_1(t)|\|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0 \\ |\hat{F}_2(t,\hat{z}_1) - \hat{F}_2(t,\hat{z}_2)| &\leq K(M)|F_2(t)|\|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0 \\ |\mu(\hat{z}_1) - \mu(\hat{z}_2)| &\leq K(M)\|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0, \quad \|\hat{z}_i\|_0 \leq M, \end{aligned}$$

donde $\|\hat{z}\|_0 = \sup_{t\geq t_0}\{|z(t)| + z^{(1)}(t)| + |z^{(2)}(t)|\}$, $K(M)$ $K(M)$ *depende de* M *y* $\lim\limits_{M\to 0^+} K(M) = 0$.

2. $\text{Re}\gamma_1 \neq \text{Re}\gamma_2 \neq \text{Re}\gamma_3$,

3. $G(a) \to 0$, $\mathcal{L}(F_1), \mathcal{L}(F_2)$ *son acotados y* $\mathcal{L}(F_1)$ *adecuadamente pequeño; cuando* $t \to \infty$.

Entonces existen soluciones z *de la ecuación (1.10), tales que* $z, z^{(1)}, z^{(2)} \to 0$ *cuando* $t \to \infty$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se asume que $\gamma_k \in I\!R \quad k = 1, 2, 3$ se sabe, por variación de parámetros, la ecuación (1.10), es equivalente a la ecuación integral

$$z(t) \;=\; \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[a(s) + F_1(s, \hat{z}(s)) + F_2(s, \hat{z}(s)) + \mu(\hat{z}(s))]ds,$$

donde g denota una función de Green (ver 1.2.1).

Notese que

$$\mathcal{L}(1) \;\leq\; \frac{a_1}{|\gamma_1|} + \frac{a_2}{|\gamma_2|} + \frac{a_3}{|\gamma_3|} \tag{1.11}$$

con

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{|\tilde{\gamma}|}[|\gamma_3| + |\gamma_2|][1 + |\gamma_1| + |\gamma_1|^2], \\
a_2 &= \frac{1}{|\tilde{\gamma}|}[|\gamma_1| + |\gamma_3|][1 + |\gamma_2| + |\gamma_2|^2], \quad \text{y} \\
a_3 &= \frac{1}{|\tilde{\gamma}|}[|\gamma_1| + |\gamma_2|][1 + |\gamma_3| + |\gamma_3|^2],
\end{aligned}$$

donde $\tilde{\gamma} = (\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_3 - \gamma_1)$. Por ejemplo para el primer caso, es decir, cuando los $\text{Re}\gamma_i > 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1)(t) &= \int_{t_0}^{\infty} [|g(t,s)| + |\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)| + |\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)|]ds \\
&\leq \frac{1}{|\tilde{\gamma}|}\Big\{|\gamma_3 - \gamma_2|[1 + |\gamma_1| + |\gamma_1|^2]\int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)}ds + |\gamma_1 - \gamma_3|[1 + |\gamma_2| + |\gamma_2|^2] \\
&\quad \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_2(t-s)}ds + |\gamma_2 - \gamma_1|[1 + |\gamma_3| + |\gamma_3|^2]\int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_3(t-s)}\Big\}ds
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1)(t) &\leq \frac{1}{|\gamma_1|}\frac{(|\gamma_3| + |\gamma_2|)(1 + |\gamma_1| + |\gamma_1|^2)}{|\tilde{\gamma}|} + \frac{1}{|\gamma_2|}\frac{(|\gamma_1| + |\gamma_3|)(1 + |\gamma_2| + |\gamma_2|^2)}{|\tilde{\gamma}|} \\
&\quad + \frac{1}{|\gamma_3|}\frac{(|\gamma_1| + |\gamma_2|)(1 + |\gamma_3| + |\gamma_3|^2)}{|\tilde{\gamma}|}
\end{aligned}$$

es decir, se satisface (1.11). Los otros casos se deducen de manera análoga.

Introduciendo el espacio

$$C_0^2 \;=\; \{z : [t_0, \infty[\to I\!R/z, z^{(1)}, z^{(2)} \in C^0 \text{ y } z, z^{(1)}, z^{(2)} \to 0 \text{ cuando } t \to \infty]\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|\hat{z}\|_0 \;=\; \sup_{t \geq t_0}\{|z(t)| + |z^{(1)}(t)| + |z^{(2)}(t)|\},$$

Se define el operador $T : C_0^2 \to C_0^2$; con

$$Tz(t) \;=\; \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[a(s) + F_1(s, \hat{z}(s)) + F_2(s, \hat{z}(s)) + \mu(\hat{z}(s))]ds.$$

Además, relacionado a T, se introduce la notación

$$T^{(1)}z(t) \;=\; \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)[a(s) + F_1(s, \hat{z}(s)) + F_2(s, \hat{z}(s)) + \mu(\hat{z}(s))]ds$$

$$T^{(2)}z(t) \;=\; \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)[a(s) + F_1(s, \hat{z}(s)) + F_2(s, \hat{z}(s)) + \mu(\hat{z}(s))]ds.$$

Escogiendo M, K_1 y K_2 como en el lema 1.2.1, con

$$\rho = \frac{a_1}{|\gamma_1|} + \frac{a_2}{|\gamma_2|} + \frac{a_3}{|\gamma_3|} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(F_2) \leq K_3.$$

Así mismo escogiendo t_0 tal que $|G(a)| \leq K_1$, $\mathcal{L}(F_1) \leq K_2$, para todo $t \geq t_0$. Se define $B = B[0, M]$ y se toma $z \in B$. Por la hipótesis 2, se tiene que

$$\begin{aligned}
|Tz(t)| \;&\leq\; \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||F_1(s, \hat{z}(s))|ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||F_2(s, \hat{z}(s))|ds + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||\mu(\hat{z}(s)|ds \\
&\leq\; G(a) + \|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||F_1(s)|ds + \\
&\quad K(M)\|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||F_2(s)|ds + K(M)\|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|ds.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
|T^{(1)}z(t)| \;&\leq\; \left|\int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds\right| + \|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)||F_1(s)|ds \\
&\quad + K(M)\|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)||F_2(s)|ds + K(M)\|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)|ds \\
|T^{(2)}z(t)| \;&\leq\; \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)a(s)ds\right| + \|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)||F_1(s)|ds \\
&\quad + K(M)\|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)||F_2(s)|ds + K(M)\|\hat{z}\|_0 \int_{t_0}^{\infty} |\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)|ds.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}|Tz(t)| + |T^{(1)}z(t)| + |T^{(2)}z(t)| &\leq G(a) + \|\hat{z}\|_0\mathcal{L}(F_1)\\ &\quad + K(M)\|\hat{z}\|_0\mathcal{L}(F_2) + K(M)\|\hat{z}\|_0\mathcal{L}(1),\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\|Tz\|_0 \leq G(a) + MK_2 + K(M)MK_3 + K(M)M\rho.$$

En virtud del lema 1.2.1 existe $M > 0$ tal que $T : B \to B$ y además cuando $t \to \infty$, $Tz \to 0$. Luego T está bién definido de C_0^2 en C_0^2.

Por otro lado, por la hipótesis (item *1*), para $z_1, z_2 \in B$, se tiene que

$$\begin{aligned}|Tz_1(t) - Tz_2(t)| &\leq \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)| \Big[|F_1(s,\hat{z}_1(s)) - F_1(s,\hat{z}_2(s))|\\ &\quad + |F_2(s,\hat{z}_1(s)) - F_2(s,\hat{z}_2(s))| + |\mu(\hat{z}_1(s)) - \mu(\hat{z}_2(s))| \Big] ds\\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)| \Big[|F_1(s)| + K(M)|F_2(s)| + K(M) \Big] \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0 ds.\end{aligned}$$

Similarmente se deduce que

$$\begin{aligned}&|T^{(1)}z_1(t) - T^{(1)}z_2(t))|\\ &\quad \leq \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \Big[|F_1(s)| + K(M)|F_2(s)| + K(M) \Big] \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0 ds \quad \text{y}\\ &|T^{(2)}z_1(t) - T^{(2)}z_2(t)|\\ &\quad \leq \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\right| \Big[|F_1(s)| + K(M)|F_2(s)| + K(M) \Big] \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0 ds.\end{aligned}$$

Luego $\|Tz_1 - Tz_2\|_0 \leq \|z_1 - z_2\|_0[K_2 + K(M)K_3 + K(M)\rho]$.

Finalmente por el lema 1.2.1 se tiene que $K_2 + K(M)K_3 + K(M)\rho < 1$, y por ende $T : B \to B$ es una contracción en el conjunto cerrado B, por consiguiente el teorema del punto fijo de Banach implica la existencia de un único $z \in B \subset C_0^2$ tal que $Tz = z$. ■

Una consecuencia del teorema 1.2.1, es el siguiente corolario, el cual servirá para resolver la ecuación (1.4).

Corolario 1.2.1 *Considerando la ecuación diferencial escalar*

$$\begin{aligned}z^{(3)} + b_2 z^{(2)} + b_1 z^{(1)} + b_0 z &= a(t) + b(t)z + f(t)z^{(1)} + h(t)z^{(2)}\\ &\quad + p(t)zz^{(1)} + q(t)z^2 + r(t)z^3 + C_1[z^{(1)}]^2\\ &\quad + C_2 zz^{(1)} + C_3 z^2 + C_4 zz^{(2)} + C_5 z^2 z^{(1)}\\ &\quad + C_6 z^3 + C_7 z^4, \qquad (1.12)\end{aligned}$$

donde b_j, $j = 0, 1, 2$ *y* C_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ *son constantes. Si* γ_1, γ_2 *y* γ_3 *son las raíces del polinomio dado en (1.12),* $\mathrm{Re}\gamma_1 \neq \mathrm{Re}\gamma_2 \neq \mathrm{Re}\gamma_3$ *y además que* $G(a), \mathcal{L}(b)$, $\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(h), \mathcal{L}(p)$; $\mathcal{L}(q)$ *y* $\mathcal{L}(r) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$. *Entonces existen soluciones* z *de la ecuación (1.12), tales que* $z, z^{(1)}, z^{(2)} \to 0$ *cuando* $t \to \infty$.

Demostración. Sin perder generalidad se supone que $C_k > 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Poniendo

$$\begin{aligned}
\hat{F}_1(t, \hat{z}(t)) &= b(t)z(t) + f(t)z^{(1)} + h(t)z^{(2)}(t) \\
\hat{F}_2(t, \hat{z}(t)) &= p(t)z(t)z^{(1)}(t) + q(t)z^2(t) + r(t)z^3(t) \quad \text{y} \\
\mu(\hat{z}(t)) &= C_1[z^{(1)}(t)]^2 + C_2 z(t)z^{(1)}(t) + C_3 z(t)z^{(2)}(t) \\
&\quad + C_4 z^2(t) + C_5 z^2(t)z^{(1)}(t) + C_6 z^3(t) + C_7 z^4(t),
\end{aligned}$$

se deduce que $\mathcal{L}(F_2), \mathcal{L}(F_1), G(a) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Luego se satisface la hipótesis *2* del teorema 1.2.1.

Por otro lado, por construcción se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\hat{F}_1(t, \hat{z}_1(t)) - \hat{F}_1(t, \hat{z}_2(t))| &= |b(t)[z_1(t) - z_2(t)] + f(t)[z_1^{(1)}(t) - z_2^{(1)}(t)] \\
&\quad + h(t)[z_1^{(2)}(t) - z_2^{(2)}(t)]| \\
&\leq |b(t)||z_1(t) - z_2(t)| + |f(t)||z_1^{(1)}(t) - z_2^{(1)}(t)| \\
&\quad + |h(t)||z_1^{(2)}(t) - z_2^{(2)}(t)| \\
&\leq \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0[|b(t)| + f(t)| + |h(t)|],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\hat{F}_2(t, \hat{z}_1(t)) - \hat{F}_2(t, \hat{z}_2(t)| &\leq |p(t)||z_1(t)z_1^{(1)}(t) - z_2(t)z_2^{(1)}(t)| + |q(t)||z_1^2(t) - z_2^2(t)| \\
&\quad + |r(t)||z_1^3(t) - z_2^3(t)| \\
&\leq \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\|_0[2M|p(t)| + 2M|q(t)| + 3M^2|r(t)|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mu(\hat{z}_1(t)) - \mu(\hat{z}_2(t))| &\leq C_1|[z_1^{(1)}(t)]^2 - [z_2^{(1)}(t)]^2| + C_2|z_1 z^{(1)} - z_2 z_2^{(1)}| \\
&\quad + C_3|z_1 z_1^{(2)} - z_2 z_2^{(2)}| + C_4|z_1^2 - z_2^2| + C_5|z_1^2 z_1^{(1)} - z_2^2 z_2^{(1)}| \\
&\quad + C_6|z_1^3 - z_2^3| + C_7|z_1^4 - z_2^4|
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
|\mu(\hat{z}_1(s)) - \mu(\hat{z}_2^{(1)}(s))| &\leq \|\hat{z}_1 - \hat{z}_2\ |_0[2M(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \\
&\quad + 3M^2(C_5 + C_6) + 4M^3 C_7].
\end{aligned}$$

Entonces tomando

$$K(M) = \text{máx}\{M, 2M, 3M^2, 2M(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + 3M^2(C_5 + C_6) + 4M^3 C_7],$$

se satisface la hipótesis *1* del teorema 1.2.1.

Por lo tanto existen soluciones z de la ecuación (1.12) tales que $z, z^{(1)}, z^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$. ∎

1.3. Comportamiento de las soluciones de (1.12)

El corolario 1.2.1 nos garantiza una solución z de la ecuación (1.12), tal que $z, z^{(1)}, z^{(2)} \to 0$. En esta sección, se precisará el comportamiento asintótico de z.

Partimos presentando una definición.

Definición 1.3.1 *Dadas dos funciones f y $g : [t_0, \infty[\to I\!R$, se definen $\mathcal{O}(g)$ y $o(g)$ del siguiente modo*

i) $f = \mathcal{O}(g)$ si y solamente si $\exists c > 0$ tal que $|(f/g)(t)| \leq c$ para todo $t \geq t_0$.

ii) $f = o(g)$ si y solamente si $|(f/g)(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Dependiendo de las condiciones sobre los γ_i $i = 1, 2, 3$, se tienen cuatro resultados para el comportamiento asintótico de z, los cuales son presentados en los corolarios que se presentan a continuación.

Corolario 1.3.1 *Sean* $S = \text{máx}\{|\text{Re}\gamma_1|, |\text{Re}\gamma_2|, |\text{Re}\gamma_3|\}$, $A = \text{máx}\{6S, 6S^2, 6S^3\}$, $\alpha = \text{mín}\{-\text{Re}\gamma_1, -\text{Re}\gamma_2, -\text{Re}\gamma_3\}$, *$M$ tal que*

$$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3 < \alpha/2A$$

con C_i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ las constantes del corolario 1.2.1 y $\mathcal{F}$ el siguiente conjunto de funciones

$$\mathcal{F} = \{\chi : [t_0, \infty[\to I\!R / \int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|\chi(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|\chi(s)|ds \leq K, \forall t \geq t_0\}.$$

Asumiendo válidas las hipótesis del corolario 1.2.1, tomando $\beta \in]0, \alpha/2]$ tal que para algún $K > 0$

$$K < \frac{(\alpha - \beta) - A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3]}{A(\alpha - \beta)(3 + 2M + M^2)}, \quad (1.13)$$

y escogiendo las funciones b, f, h, p, q y r en $\mathcal{F}$, se obtiene que la solución z de la ecuación (1.12) satisface

$$z(t), z^{(1)}(t), z^{(2)}(t) = \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad se supone que $C_i > 0$ para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in I\!R$. Además, es sabido que existe una solución de (1.12) que satisface la ecuación integral

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Big\{a(s) + b(s)z + f(s)z^{(1)} + h(s)z^{(2)} + p(s)zz^{(1)} \quad (1.14)$$

$$+q(s)z^2 + r(s)z^3 + C_1[z^{(1)}]^2 + C_2 zz^{(1)} + C_3 z^2 \quad (1.15)$$

$$+C_4 zz^{(2)} + C_5 z^2 z^{(1)} + C_6 z^3 + C_7 z^4\Big\}ds \quad (1.16)$$

con $\|z\|_0 \leq M$ y g la función de Green

$$g(t,s) = \begin{cases} (\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} + (\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)} + (\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)} & , \quad t \geq s \\ 0 & , \quad t \leq s. \end{cases}$$

El factor $\tilde{\gamma} = (\gamma_2-\gamma_1)\gamma_3^2 + (\gamma_1-\gamma_3)\gamma_2^2 + (\gamma_3-\gamma_2)\gamma_1^2$ ha sido obviado por comodidad computacional y notacional.

Tomando la sucesión: $z_0 = 0, z_{n+1} = Tz_n$, $\forall n \geq 0$, donde T es el operador del teorema 1.2.1 y utilizando la contracción de T se deduce que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Luego, para obtener las conclusiones del corolario es suficiente probar que

$$|z_n(t)|, |z_n^{(1)}(t)|, |z_n^{(2)}(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds \quad \text{para todo } t \geq t_0 \tag{1.17}$$

donde

$$\begin{aligned} N \leq\ & (1 + 3kN + 2MkN + M^2kN \\ & + N\frac{[(C_1+C_2+C_3+C_4)M + (C_5+C_6)M^2 + C_7M^3]}{\alpha-\beta}A. \end{aligned}$$

Para demostrar (1.17), procedemos por inducción sobre n. Para $n = 0, 1$ (1.17) se satisface por construcción de la sucesión z_n. Luego suponiendo que se cumple para $n \leq k$, queda por demostrar que (1.17) se cumple para $n = k+1$. Antes de proceder a demostrar esto, se observa que la función de Green g cumple

$$|g(t,s)|, |\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)|, |\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)| \leq Ae^{-\alpha(t-s)} \tag{1.18}$$

y que, si se define,

$$\mathcal{R}(\chi) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|\chi(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)d\tau ds,$$

por Fubbini para $\chi \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\chi) &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} e^{(\alpha-\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||\chi(s)|d\tau ds = e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|a(\tau)|\chi(s)|d\tau ds \\ &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|\chi(s)|dsd\tau \leq Ke^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}d\tau \\ &\leq K\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds \end{aligned} \tag{1.19}$$

y

$$\mathcal{R}(1) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} |a(s)| ds. \tag{1.20}$$

Además, se demuestra que

$$N \;\geq\; \frac{A(\alpha - \beta)}{\Phi},$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi \;=\; & (\alpha - \beta) + A(\beta - \alpha)(3 + 2M + M^2)k - A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M \\ & +(C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3]. \end{aligned}$$

En efecto, por la hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} N\{(\alpha - \beta) + A(\beta - \alpha)(3 + 2M + M^2)k - A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M \\ +(C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3]\} \geq A(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} N(\alpha - \beta) \;\geq\; & A(\alpha - \beta) + A(\alpha - \beta)(3 + 2M + M^2)kN \\ & +A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + ((C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3], \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} N \;\geq\; & A(1 + 3KN + 2KMN + M^2 KN \\ & +N\frac{[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3]}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Ahora mostremos que $N > 0$, para lo cual es suficiente verificar que

$$0 < K < \frac{(\alpha - \beta) - A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3]}{A(\alpha - \beta)(3 + 2M + M^2)}.$$

Se sabe, por lema 1.2.1, que

$$\Big(K_b + 2MK_p + 2M(C_1 + C_2 C_3 + C_4) + 3M^2 K_r + 3M^2(C_5 + C_6) + 4M^3 C_7\Big) \;<\; 1,$$

entonces

$$\begin{aligned} & (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7 M^3 \\ & \quad < \Big(K_b + 2MK_p + 2M(C_1 + C_2 C_3 + C_4) + 3M^2 K_r + 3M^2(C_5 + C_6) + 4M^3 C_7\Big) \\ & \quad < 1. \end{aligned}$$

Ahora, se elige $M > 0$ tal que

$$A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3] \; < \; \frac{\alpha}{2} \leq \alpha - \beta$$

lo que implica

$$(\alpha - \beta) > A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3].$$

Luego $\exists K > 0$ requerido.

Ahora, se procede a la demostración del paso inductivo. Por la hipótesis inductiva, las relaciones (1.18), (1.19), (1.20), la hipótesis que $b, f, h, t, q, r \in \mathcal{F}$ y la forma de N, se tiene que

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &= |Tz_k(t)| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |g(t,s)| \Big\{ |a(s)| + |b(s)||z_k(s)| + |f(s)||z_k^{(1)}(s)| \\
&\quad + |h(s)||z_k^{(2)}(s)| + |p(s)||z_k^{(1)}(s)||z_k(s)| + |q(s)||z_k^{(2)}(s)| \\
&\quad + |r(s)||z_k^{(3)}(s)| + C_1|z_k^{(1)}|^2 + C_2|z_k||z_k^{(1)}| \\
&\quad + C_3|z_k|^2 + C_4|z_k||z_k^{(2)}| + C_5|z_k|^2|z_k^{(2)}| + C_6|z_k|^3 + C_7|z_k|^4 \Big\} ds \\
&\leq A\Big\{ \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)||z_k(s)|ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)||z_k^{(1)}(s)|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|h(s)||z_k^{(2)}(s)|ds \\
&\quad + M\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|p(s)||z_k(s)|ds + M\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|q(s)||z_k(s)|ds \\
&\quad + M^2\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r(s)||z_k(s)|ds + +C_1M\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k^{(1)}(s)|ds \\
&\quad + C_2M\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k(s)|ds + C_3M\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k(s)|ds \\
&\quad + C_4M\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k(s)|ds + C_5M^2\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k(s)|ds \\
&\quad + C_6M^2\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k(s)|ds + C_7M^3\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k(s)|ds \Big\} \\
&\leq A\Big\{ \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|a(s)|ds \\
&\quad + N[\mathcal{R}(b) + \mathcal{R}(f) + M\mathcal{R}(h) + M\mathcal{R}(p) + M\mathcal{R}(q) + M^2\mathcal{R}(q)] \\
&\quad + (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5M + C_6M + C_7M^2)MN\mathcal{R}(1) \Big\}
\end{aligned}$$

$$\leq A\Big(1 + 3kN + 2kMN + kM^2N + \frac{N[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + M^2(C_5 + C_6) + C_7M^3]}{(\alpha - \beta)}\Big)\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)ds$$
$$\leq N\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).$$

En forma análoga, se obtiene que

$$|z_{k+1}^{(1)}(t)|, \quad |z_{k+1}^{(2)}(t)| \leq N\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big),$$

lo cual concluye la prueba de la tesis inductiva.

Finalmente, la prueba del corolario se concluye por paso al limite en la sucesión de los z_n. ■

Corolario 1.3.2 *Sean* $S = \max\{\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2, \mathrm{Re}\gamma_3\}$, $A = \max\{6S, 6S^2, 6S^3\}$, $\alpha = \min\{\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2, \mathrm{Re}\gamma_3\}$, *$M$ tal que*

$$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3 < \alpha/2A$$

con C_i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ las constantes del corolario 1.2.1 y $\mathcal{F}$ como en el enunciado del corolario 1.3.1.

Asumiendo válidas las hipótesis del corolario 1.2.1, tomando $\beta \in]0, \alpha/2]$ tal que para algún K satisface (1.13) y escogiendo las funciones b, f, h, p, q y r en $\mathcal{F}$, se obtiene que la solución z de la ecuación (1.12) satisface

$$z(t), z^{(1)}(t), z^{(2)}(t) = \mathcal{O}\Big(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).$$

La demostración del corolario 1.3.2 es análoga a la del corolario 1.3.1, por lo cual se omitirá.

El siguiente corolario relaciona los dos últimos corolarios.

Corolario 1.3.3 *Sean* $S = \max\{|\mathrm{Re}\gamma_1|, |\mathrm{Re}\gamma_2|, |\mathrm{Re}\gamma_3|\}$, $A = \max\{6S, 6S^2, 6S^3\}$, $\alpha = \min\{\mathrm{Re}\gamma_1, -\mathrm{Re}\gamma_2, -\mathrm{Re}\gamma_3\}$, *$M$ tal que*

$$(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3 < \alpha/2A$$

con C_i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ las constantes del corolario 1.2.1 y $\mathcal{F}$ como en el enunciado del corolario 1.3.1.

Asumiendo válidas las hipótesis del corolario 1.2.1, tomando $\beta \in]0, \alpha/2]$ tal que para algún $K > 0$ satisfaciendo

$$K < \frac{(\alpha - \beta) - 3A[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3]}{A(\alpha - \beta)(9 + 6M + 3M^2)} \tag{1.21}$$

y escogiendo las funciones b, f, h, p, q y r en $\mathcal{F}$, se obtiene que la solución z de la ecuación (1.12) satisface

$$z(t), z^{(1)}(t), z^{(2)}(t) = \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds \Big).$$

Demostración. Sin perdida de generalidad se supone que $C_k > 0$, $k = 1,2,3,4,5,6,7$, y que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in I\!R$. Además, es sabido que existe una solución de (1.12) que satisface la ecuación integral (1.16) con $\|z\|_0 \leq M$, y la función de Green

$$g(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\gamma_1+\gamma_2)e^{\gamma_3(t-s)} - (\gamma_1+\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_3^2 + (\gamma_1-\gamma_3)\gamma_2^2 + (\gamma_3-\gamma_2)\gamma_1^2}, & \text{si} \quad t \geq s \\[2ex] \dfrac{(\gamma_2-\gamma_3)e^{\gamma_1(t-s)}}{(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_3^2 + (\gamma_1-\gamma_3)\gamma_2^2 + (\gamma_3-\gamma_2)\gamma_1^2}, & \text{si} \quad t \leq s. \end{cases}$$

Bajo las mismas argumentos de la demostración del corolario 1.2.1 se ha omitido el factor

$$\gamma_3^2(\gamma_2-\gamma_1) + \gamma_2^2(\gamma_1-\gamma_3) + \gamma_1^2(\gamma_3-\gamma_2)$$

Lo que resta de la demostración se hará en tres pasos: En el primer paso se prueba la existencia de $N > 0$ satisfaciendo

$$N \geq \frac{A(\alpha-\beta)}{\Delta} \tag{1.22}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta = {} & (\alpha-\beta) + A(\beta-\alpha)(9+6M+3M^2)K - 3A[(C_1+C_2+C_3+C_4)M \\ & +(C_5+C_6)M^2 + C_7M^3]. \end{aligned}$$

En el segundo paso se introduce una notación apropiada y se demuestran unos resultados útiles. En el tercer paso se construye una sucesión, por inducción y con argumentos de tipo punto fijo de Banach se concluye la prueba.
Paso 1 Utilizando las hipótesis sobre M y β se consigue la siguiente desigualdad

$$3A[(C_1+C_2+C_3+C_4)M + (C_5+C_6)M^2 + C_7M^3] < \frac{\alpha}{2} \leq \alpha - \beta$$

que implica

$$(\alpha-\beta) > 3A[(C_1+C_2+C_3+C_4)M + (C_5+C_6)M^2 + C_7M^3].$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_t^\infty \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}|\chi(s)|e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau \\
\leq\ & e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^\tau e^{(\alpha-\beta)s}|\chi(s)|dsd\tau \\
& + \int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}e^{\beta s}|\chi(s)|dsd\tau \\
\leq\ & e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|Ke^{(\alpha-\beta)t}d\tau + \int_t^\infty e^{-\beta t}|a(\tau)|\int_{t_0}^t e^{-\alpha t}e^{(\alpha+\beta)s}|\chi(s)|dsd\tau \\
\leq\ & K\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + K\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_3(\chi) &= e^{\alpha(t)}\int_t^\infty \int_{t_0}^s e^{-\alpha s}|\chi(s)|e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds \\
&= e^{\alpha t}\Big[\int_{t_0}^t \int_t^\infty e^{-\alpha s}|\chi(s)|e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau \\
&\quad + \int_t^\infty \int_\tau^\infty e^{-\alpha s}|\chi(s)|e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau\Big] \\
&= \int_{t_0}^t \int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}|\chi(s)|e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau \\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty \int_\tau^\infty e^{-\alpha s}|\chi(s)|e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}e^{-\beta s}|\chi(s)|ds \\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_\tau^\infty e^{\alpha s}e^{\beta t}|\chi(s)|dsd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}|\chi(s)|ds + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_\tau^\infty e^{\beta-\alpha}|\chi(s)|dsd\tau \\
&\leq \int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|Ke^{-\beta\tau}d\tau + \int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|Ke^{-\beta\tau}d\tau \\
&\leq K\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + K\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_4(\chi) &= e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{-\alpha s}|\chi(s)|\int_s^\infty e^{\beta s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|d\tau ds \\
&= e^{\alpha t}\int_t^\infty \int_s^\infty e^{(\beta-\alpha)s}|\chi(s)|e^{-\beta\tau}|a(\tau)|d\tau ds \\
&= e^{\alpha t}\int_t^\infty \int_\tau^\infty e^{(\beta-\alpha)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)||\chi(s)|dsd\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_\tau^\infty e^{(\beta-\alpha)s}|\chi(s)|dsd\tau\\
&\leq K\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds.
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1(\chi) &= \int_{t_0}^t\int_{t_0}^s e^{-\alpha(t-s)}e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds = \int_{t_0}^t\int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds\\
&= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_\tau^t e^{(\alpha-\beta)s}dsd\tau \leq \frac{1}{\alpha-\beta}\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_2(\chi) &= \int_{t_0}^t\int_s^\infty e^{-\alpha(t-s)}e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds\\
&= \int_{t_0}^t\int_{t_0}^\tau e^{-\alpha(t-s)}e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau + \int_t^\infty\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau\\
&\leq \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\int_{t_0}^\tau e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau + e^{-\alpha t}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^t e^{(\alpha+\beta)s}dsd\tau\\
&\leq \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\int_{t_0}^\tau e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau\int_{t_0}^t\int_{t_0}^\tau e^{-\alpha(t-s)}e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau\\
&\quad +\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha+\beta)t}d\tau\\
&\leq e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\frac{1}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t}d\tau + \frac{1}{\alpha-\beta}\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\\
&\leq \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big],\\
\mathcal{R}_3(\chi) &= \int_t^\infty\int_{t_0}^s e^{\alpha(t-s)}e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|d\tau ds\\
&= \int_{t_0}^t\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau + \int_t^\infty\int_\tau^\infty e^{\alpha(t-s)}e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau\\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}dsd\tau + \int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}\int_\tau^\infty e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|dsd\tau\\
&\leq \frac{1}{\alpha-\beta}e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{-(\alpha+\beta)t}d\tau + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_\tau^\infty e^{(\beta-\alpha)s)}dsd\tau\\
&\leq \frac{1}{\alpha-\beta}\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \frac{e^{\alpha t}}{\alpha-\beta}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\beta-\alpha)t}d\tau\\
&\leq \frac{1}{\alpha-\beta}\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_4(\chi) &= \int_t^\infty \int_s^\infty e^{\alpha(t-s)} e^{\beta(s-\tau)} |a(\tau)| d\tau ds = \int_t^\infty \int_\tau^\infty e^{\alpha(t-s)} e^{\beta(s-\tau)} |a(\tau)| ds d\tau \\
&= e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\beta\tau} |a(\tau)| \int_\tau^\infty e^{(\beta-\alpha)s} ds d\tau \leq \frac{1}{\alpha-\beta} \int_t^\infty e^{\beta(t-s)} |a(s)| ds.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{R}(\chi) \leq 3k\Big[\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big],$$

y

$$\mathcal{R}_1(\chi) \leq \frac{3}{\alpha-\beta}\Big(\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_s^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).$$

Por otro lado, para $\chi \in \mathcal{F}$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{t_0}^\infty g(t,s)\chi(s)ds\Big| &= \Big|\int_{t_0}^t [(\gamma_1+\gamma_2)e^{\gamma_3(t-s)} - (\gamma_1+\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}]\chi(s)ds \\
&\quad + \int_t^\infty (\gamma_2-\gamma_3)e^{\gamma_1(t-s)}\chi(s)ds\Big| \\
&\leq (|\gamma_1|+|\gamma_2|)\int_{t_0}^t e^{\gamma_3(t-s)}|\chi(s)|ds + (|\gamma_1|+|\gamma_3|) \\
&\quad (\int_{t_0}^t e^{\gamma_2(t-s)}|\chi(s)|ds) + (|\gamma_2|+|\gamma_3|)(\int_t^\infty e^{\gamma_1(t-s)}|\chi(s)|ds) \\
&\leq 2S\Big(\int_{t_0}^t [e^{\gamma_3(t-s)} + e^{\gamma_2(t-s)}]|F(s)|ds + \int_t^\infty e^{\gamma_1(t-s)}|\chi(s)|ds\Big) \\
&\leq 2S\Big(\int_{t_0}^t [e^{\gamma_3(t-s)} + e^{\gamma_2(t-s)}]|\chi(s)|ds + \int_t^\infty e^{\gamma_1(t-s)}|\chi(s)|ds\Big) \\
&\leq 4S\int_{t_0}^\infty e^{-\alpha(t-s)}|\chi(s)|ds + 2S\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}|\chi(s)|ds,
\end{aligned}$$

y análogamente que

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{t_0}^\infty \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\chi(s)ds\Big| &\leq A\Big(\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}|\chi(s)|ds + \int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}|\chi(s)|ds\Big), \\
\Big|\int_{t_0}^\infty \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\chi(s)ds\Big| &\leq A\Big(\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}|\chi(s)|ds + \int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}|\chi(s)|ds\Big).
\end{aligned}$$

Paso 3 Construyendo la sucesión: $z_0 = 0$, $z_{n+1} = Tz_n\ \forall n \geq 0$, con T el operador definido en la demostración de 1.2.1 y usando la constracción de T se tiene que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$.

Luego debemos probar que para todo $t \geq t_0$ se cumple

$$|z_n(t)|, |z_n^{(1)}(t)|, |z_n^{(2)}(t)| \leq N\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big). \quad (1.23)$$

donde $n \in I\!N$

La demostración de (1.23) se hace por inducción. para $n = 0, 1$ se verifican fácilmente por la construcción de la sucesión de los z_n. Suponiendo que es válido para $n \leq k$ se va ha demostrar que también lo es para $n = k+1$, por lo demostrado en los pasos **1** y **2** se tiene que

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| \leq\ & A\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)||z_k|ds \\
& \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)||z_k|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)||z_k^{(1)}|ds \\
& + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|f(s)||z_k^{(1)}(s)|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|h(s)||z_k^{(2)}|ds \\
& + \int_{t}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)}|h(s)||z_k^{(2)}|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|p(s)||z_k^{(1)}|ds \\
& + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|p(s)||z_k||z_k^{(1)}|ds + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|q(s)||z_k^2|ds \\
& + \int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|q(s)||z_k^2|ds + \int_{t}^{\infty} e^{-\alpha(t-s)}|r(s)||z_k^3|ds \\
& + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r(s)||z_k^3|ds \\
& + C_1\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k^{(1)}|^2 ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k^{(1)}|^2 ds\Big) \\
& + C_2\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k||z_k^{(1)}|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k||z_k^{(1)}|ds\Big) \\
& C_3\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k|^2 ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k|^2 ds\Big) \\
& + C_4\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k||z_k^{(2)}|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k||z_k^{(2)}|ds\Big) \\
& + C_5\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k^2||z_k^{(1)}|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k^2||z_k^{(1)}|ds\Big) \\
& + C_6\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k^3|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k^3|ds\Big) \\
& + C_7\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|z_k^4|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|z_k^4|ds\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq A\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|a(s)|ds \\
&\quad + N[\mathcal{R}(b) + \mathcal{R}(f) + \mathcal{R}(h) + M\mathcal{R}(p) + M\mathcal{R}(q) + M^2\mathcal{R}(r)] \\
&\quad + [\mathcal{R}(1)[MN(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + M^2N(C_5 + C_6) + M^3NC_7]]\Big) \\
&\leq A\Big(1 + 3KN + 3KN + 3KN + 3KMN + 3KMN \\
&\quad 3KM^2N + \frac{3MN}{\alpha-\beta}(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + \frac{3M^2N}{\alpha-\beta} \\
&\quad (C_5 + C_6) + \frac{3M^3N}{\alpha-\beta}C_7\Big)\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{s}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big) \\
&\leq A\Big(1 + KN(9 + 6M + 3M^2) + \frac{3N}{\alpha-\beta}[(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M \\
&\quad (C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3]\Big)\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big). \\
&\leq N\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).
\end{aligned}
$$

Análogamente se prueba que

$$
\begin{aligned}
|z_{k+1}^{(1)}(t)| &\leq N\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big) \\
|z_{k+1}^{(2)}(t)| &\leq N\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).
\end{aligned}
$$

Finalmente, se deduce que

$$
z(t), z^{(1)}(t), z^{(2)}(t) = \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big),
$$

en virtud de los pasos 1, 2 y 3 y el teorema del punto fijo de Banach. ■

Corolario 1.3.4 *Sean* $S = \max\{\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2, \mathrm{Re}\gamma_3\}$, $A = \max\{6S, 6S^2, 6S^3\}$, $\alpha = \min\{\mathrm{Re}\gamma_1, \mathrm{Re}\gamma_2, -\mathrm{Re}\gamma_3\}$, *$M$ tal que*

$$
(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)M + (C_5 + C_6)M^2 + C_7M^3 < \alpha/2A
$$

con C_i $i = 1,2,3,4,5,6,7$ las constantes del corolario 1.2.1 y $\mathcal{F}$ como en el enunciado del corolario 1.3.1.

Asumiendo válidas las hipótesis del corolario 1.2.1, tomando $\beta \in]0, \alpha/2]$ tal que para algún K satisface (1.13) y escogiendo las funciones b, f, h, p, q y r en $\mathcal{F}$, se obtiene que la solución z de la ecuación (1.12) satisface

$$
z(t), z^{(1)}(t), z^{(2)}(t) = \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|ds + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|ds\Big).
$$

Demostración. Similar a la del corolario 1.3.3. ∎

1.4 Una Generalización del Teorema de Poincaré

Poincaré [9] estudió la ecuación (1.2), para el caso de sistemas, suponiendo que los $r_j \to 0$ cuando $t \to \infty$. Sin embargo, si tomamos $r_0(t) = \sin(t^2)$; $r_1(t) = \frac{1}{t}$; $r_2(t) = \frac{1}{\log t}$; $r_3(t) = \frac{1}{t^2}$ para $t \in [1, \infty[$ no se puede usar el teorema de Poincaré para resolver la ecuación (1.2), ya que $r_0 \not\to 0$ cuando $t \to \infty$. Más aún ni siquiera pueden usarse los resultados de Levinson y de Hartman-Wintner ya que $r_0 \notin L^p$ para todo $p \geq 1$.

El siguiente teorema permitirá resolver la ecuación (1.2), bajo condiciones más débiles que los asumidos por Poincaré.

Teorema 1.4.1 *Dada la ecuación (1.2) y se asume válidas*

1. $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \mathrm{Re}\lambda_3 > \mathrm{Re}\lambda_4$, *con* $\gamma_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\gamma_2 = \lambda_3 - \lambda_1$, $\gamma_3 = \lambda_4 - \lambda_1$, $\gamma_4 = \lambda_3 - \lambda_2$, $\gamma_5 = \lambda_4 - \lambda_2$, $\gamma_6 = \lambda_4 - \lambda_3$, *donde* λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ *son las raíces características de la ecuación (1.12).*

2. $G(r_0)$, $\mathcal{L}_k(r_j) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$, *para cada* $k = 1, 2$ *y cada* $j = 0, 1, 2, 3$ *donde*

$$\mathcal{L}_1(f) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}|f(s)|ds, \quad \mathcal{L}_2(f) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}|f(s)|ds$$

con $\gamma = min\{-\gamma_1, -\gamma_4, -\gamma_6\}$.

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3, 4$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i^{(1)}(t)}{y_i(t)} = \lambda_i, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{y_i^{(2)}(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^2, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{y_i^{(3)}(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^3. \tag{1.24}$$

Demostración. Es conocido que la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_i(t) = exp\Big(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]ds\Big), \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, \tag{1.25}$$

donde cada z_i satisface la ecuación (1.4). Entonces $y_i^{(1)}(t) = y_i(t)[\lambda_i + z_i(t)]$, es decir,

$$z_i(t) = \frac{y_i^{(1)}(t)}{y_i(t)} - \lambda_i,$$

$$\begin{aligned}
\frac{y_i^{(2)}(t)}{y_i(t)} &= [\lambda_i + z_i(t)]^2 + z_i^{(1)}(t), \quad \text{y} \\
\frac{y_i^{(3)}(t)}{y_i(t)} &= [\lambda_i + z_i(t)]^3 + 2[\lambda_i + z_i(t)]z_i^{(1)}(t) + [\lambda_i + z_i(t)]z_i(t) + z_i(2)(t).
\end{aligned}$$

Luego, la demostración se reduce a probar que para cada $i = 1, 2, 3, 4$ existe z_i tal que z_i, $z_i^{(1)}$,$z_i^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Usando las hipótesis *1* y *2* se tiene que para cada $i = 1, 2, 3, 4$ se satisfacen las hipótesis del corolario 1.2.1 con

$$\begin{aligned}
b_0 &= 4\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 a_3 + 2\lambda_i a_2 + a_1, \\
b_1 &= 6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2, \\
b_2 &= 4\lambda_i + a_3, \\
a(t) &= -(\lambda_i^3 r_3(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t)), \\
b(t) &= -(3\lambda_i^2 r_3(t) + 2\lambda_i r_2(t) + r_1(t)), \\
f(t) &= -(3\lambda_i r_3(t) + r_2(t)), \\
h(t) &= -r_3(t); \quad p(t) = -3r_3(t); \quad q(t) = -(3\lambda_i r_3(t) + r_2(t)), \\
r(t) &= -r_3(t), \quad C_1 = -3, \quad C_2 = -(12\lambda_i + 3a_3), \\
C_3 &= -(6\lambda_i^{(2)} + 3\lambda_i a_3 + a_2), \quad C_4 = -4, \quad C_5 = -6, \quad C_6 = -4\lambda_i, \quad \text{y} \\
C_7 &= -1
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Además, las ecuaciones para z_i, $\quad i = 1, 2, 3, 4$ son

$$z_i(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s) F_i(s, z(s)) ds, \tag{1.27}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_i(t,z) = & -\Big[(\lambda_i^3 r_3(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t)) + (3\lambda_i r_3(t) + 2\lambda_i r_2(t) \\
& + r_1(t))z + (3\lambda_i r_3(t) + r_2(t))z^{(1)} + r_3(t) z^{(2)} + 3r_3(t) z z^{(1)} \\
& + (3\lambda_i r_3(t) + r_2(t))z^{(2)} + r_3(t))z^3 + 3[z^{(1)}]^2 + (12\lambda_i + 3a_3) z z^{(1)} \\
& + (6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2) z^2 + 4 z z^{(2)} + r_3(t) z_i^3 + 6 z^2 z^{(1)} + 4\lambda_i z^3 + z^4\Big]
\end{aligned}$$

$$g_1(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_3 - \gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} + (\gamma_1 - \gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)} + (\gamma_2 - \gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}, & \text{si } s \in [t_0, t] \\ 0 & \text{si } s \notin [t_0, t] \end{cases}$$

$$g_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1 + \gamma_4)e^{\gamma_5(t-s)} - (\gamma_1 + \gamma_5)e^{\gamma_4(t-s)}}{(\gamma_5 - \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_5)} & \text{si } s \in [t_0, t] \\ -\dfrac{(\gamma_5 - \gamma_4)e^{-\gamma_1(t-s)}}{(\gamma_5 - \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_5)} & \text{si } s \notin [t_0, t] \end{cases}$$

$$g_3(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_2-\gamma_4)e^{\gamma_6(t-s)}}{(\gamma_6+\gamma_4)(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)} & \text{si } s\in[t_0,t] \\ \dfrac{(\gamma_2+\gamma_6)e^{-\gamma_4(t-s)}-(\gamma_6+\gamma_4)e^{-\gamma(t-s)}}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5+\gamma_3)(\gamma_6+\gamma_3)} & \text{si } s\notin[t_0,t] \end{cases}$$

$$g_4(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s\in[t_0,t] \\ \dfrac{(\gamma_3-\gamma_5)e^{-\gamma_6(t-s)}+(\gamma_6-\gamma_3)e^{-\gamma_5(t-s)}+(\gamma_5-\gamma_6)e^{-\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5-\gamma_3)(\gamma_6-\gamma_3)} & \text{si } s\notin[t_0,t] \end{cases}$$

Entonces denotando por

$$\begin{aligned} P(\lambda_1,R) &= [\lambda_1^3r_3(s)+\lambda_1^2r_2(s)+\lambda_1r_1(s)+r_0(s) \quad \text{y} \\ \kappa &= 2[|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|+|\gamma_1||\gamma_3|+|\gamma_1||\gamma_2|+|\gamma_2||\gamma_3|][|\gamma_1^2\gamma_3| \\ &\quad +|\gamma_1^2\gamma_2|+|\gamma_2^2\gamma_1|+|\gamma_2^2\gamma_3|+|\gamma_3^2\gamma_2|+|\gamma_3^2\gamma_1|], \end{aligned}$$

por la definición de G para z_1 se tiene que

$$\begin{aligned} G(a)(t) &= \Big|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds\Big| + \Big|\int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds\Big| + \Big|\int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)a(s)ds\Big| \\ &= \frac{1}{|(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)|}\Big(\int_{t_0}^{t}[(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} \\ &\quad +(\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}+(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}][P(\lambda_1,R)]ds \\ &\quad +\Big|\int_{t_0}^{t}[-\gamma_1(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)}-\gamma_2(\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)} \\ &\quad -\gamma_3(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}][P(\lambda_1,R)]ds\Big| \\ &\quad \Big|\int_{t_0}^{t}[-\gamma_1^2(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)}+\gamma_2^2(\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)} \\ &\quad +\gamma_3^2(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}][P(\lambda_1,R)]ds\Big|\Big) \\ &\leq \frac{\kappa}{|(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)|}\int_{t_0}^{t} e^{\gamma(t-s)}[P(|\lambda_1|,|R|)]ds \\ &\leq \frac{\kappa|\lambda_1|}{|(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)|}[|\lambda_1^2|\mathcal{L}_1(r_3)+|\lambda_1|\mathcal{L}_1(r_2)+\mathcal{L}_1(r_1)]+G(r_0). \end{aligned}$$

Además, análogamente,

$$\mathcal{L}(b)(t) = \int_{t_0}^{\infty}\Big(|g(t,s)|+|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)|+|\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)|\Big)|b(s)|ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)}\int_{t_0}^{\infty}\Big(|(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)}+(\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}\\
&\quad+(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}||\gamma_1(s)|(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)}-\gamma_2(s)(\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}\\
&\quad-\gamma_3(s)(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}|+|\gamma_1^2(s)|(\gamma_3-\gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)}+\gamma_2^2(s)(\gamma_1-\gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}\\
&\quad+\gamma_3^2(s)(\gamma_2-\gamma_1)e^{\gamma_3(t-s)}|\Big)\Big(3|\lambda_1^2+r_3(s)+2\lambda_1r_2(s)+r_1(s)|\Big)ds\\
&\leq \frac{\kappa}{|(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)|}\int_{t_0}^{\infty}e^{-\gamma(t-s)}[|3\lambda_1|^2+|r_3(s)|+|2\lambda_1||r_2(s)|\\
&\quad+|r_1(s)|]ds\\
&\leq \frac{\kappa|\lambda_1|}{|(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)|}(|3\lambda_1|^2\mathcal{L}_1(r_3)+2\mathcal{L}_2(r_2)+\mathcal{L}_1(r_1)|).
\end{aligned}
$$

En consecuencia $G(a)$, $\mathcal{L}(b)\to 0$ cuando $t\to\infty$ y utilizando los mismos argumentos se prueba que $\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(h)$, $\mathcal{L}(p)$, $\mathcal{L}(q)$, $\mathcal{L}(r)\to 0$, cuando $t\to\infty$.

Finalmente como z_1 satisface las hipótesis del corolario 1.2.1, $z_1\to 0$ cuando $t\to\infty$. Así mismo, con la misma estrategia se verifica que z_2, z_3, z_4 cumplen las hipótesis del corolario 1.2.1, por lo tanto existe z_i, para cada $i=1,2,3,4$, tal que $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)}\to 0$ cuando $t\to\infty$. ■

Observación 1.4.1

Una afirmación que se ha hecho pero que no se ha demostrado es que los y_i, $i=1,2,3,4$, forman un sistema fundamental de soluciones. Esto es una consecuencia de la hipótesis que $\lambda_i\neq\lambda_j$, $\forall i\neq j$, y del hecho que el Wronskiano para los y_i es asintóticamente equivalente a:

$$(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)$$

1.5. Perturbaciones que tienden a cero, Teorema de Poincaré

En esta sección se presenta un resultado para el caso dado por Poincaré.

Teorema 1.5.1 *Dada la ecuación (1.2) y se asume válidas las relaciones*

1. $\mathrm{Re}\lambda_1>\mathrm{Re}\lambda_2>\mathrm{Re}\lambda_3>\mathrm{Re}\lambda_4$, *con* $\gamma_1=\lambda_2-\lambda_1$, $\gamma_2=\lambda_3-\lambda_1$, $\gamma_3=\lambda_4-\lambda_1$, $\gamma_4=\lambda_3-\lambda_2$, $\gamma_5=\lambda_4-\lambda_2$, $\gamma_6=\lambda_4-\lambda_3$, *donde* λ_i, $i=1,2,3,4$ *son las raíces características de la ecuación (1.1).*

2. $r_j\to 0$ *cuando* $t\to\infty$, *para cada* $j=0,1,2,3$.

Entonces, la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, para $i = 1, 2, 3, 4$ satisfaciendo (1.24), y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i^{(4)}(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^4, \quad \textit{para cada} \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{1.28}$$

Además, para $j \in \{1, \cdots, 4\}$, se tiene que

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda_i^{(j-1)} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} exp\Big(- \prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} F_i(s, z)ds\Big) \tag{1.29}$$

donde $N(i) = \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$ y

$$\begin{aligned} F_i(s,t) &= -\Big[(\lambda_i^3 r_3(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t)) + (3\lambda_i r_3(t) + 2\lambda_i r_2(t) \\ &\quad + r_1(t))z + (3\lambda_i r_3(t) + r_2(t))z^{(1)} + r_3(t)z^{(2)} + 3r_3(t)zz^{(1)} \\ &\quad (3\lambda_i r_3(t) + r_2(t))z^{(2)} + r_3(t)z^{(3)} + 3[z^{(1)}]^2 + (12\lambda_i + 3a_3)zz^{(1)} \\ &\quad (6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2)z^2 + 4zz^{(2)} + 6z^2 z^{(1)} + 4\lambda_i z^3 + z^4\Big], \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} z_1(t), z_1^{(1)}(t), z_1^{(2)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} |P(\lambda_1, R(s))| ds\Big), \\ z_2(t), z_2^{(1)}(t), z_2^{(2)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} |P(\lambda_2, R(s))| ds \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)} |P(\lambda_2, R(s))| ds\Big), \\ z_3(t), z_3^{(1)}(t), z_3^{(2)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} |P(\lambda_3, R(s))| ds \\ &\quad + \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)} |P(\lambda_3, R(s))| ds\Big), \\ z_4(t), z_4^{(1)}(t), z_4^{(2)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_{t}^{t} e^{\beta(t-s)} |P(\lambda_4, R(s))| ds\Big), \end{aligned} \tag{1.30}$$

para $P(\lambda_i, R(s)) = \lambda_i^3 r_3(s) + \lambda_i^2 r_2(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_0(s)$, $\beta \in]0, \gamma/2]$ y $\gamma = min\{-\gamma_1, -\gamma_4, -\gamma_6\}$.

Demostración. Es sabido que $\mathcal{L}_k(F) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $F \to \infty$ cuando $t \to \infty$, para los operadores $\mathcal{L}_k$, $k = 1, 2$ del teorema (1.4.1). Luego se cumplen las hipótesis de dicho teorema, y por ende existen soluciones y_i para cada $i = 1, 2, 3, 4$ que satisfacen las ecuaciones (1.24) y (1.25), donde cada z_i,$z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}$ $\to 0$ cuando $t \to \infty$ $i = 1, 2, 3, 4$. Además las z_i satisfacen (1.27)

Luego

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} z_1(s)ds &= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} g_1(t,s)F_1(\tau,z)d\tau ds \\
&= \frac{1}{(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)}\Big\{\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_1}\Big[\int_{t_0}^{t} e^{\gamma_1(t-s)}F_1(s,z)ds \\
&\quad -\int_{t_0}^{t} F_1(s,z)ds\Big] + \frac{\gamma_1-\gamma_3}{\gamma_2}\Big[\int_{t_0}^{t} e^{\gamma_2(t-s)}F_1(s,z)ds - \int_{t_0}^{t} F_1(s,z)ds\Big]\Big\} \\
&\quad +\Big(\frac{1}{(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)}\Big)\Big(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1}\Big) \\
&\quad \Big(\int_{t_0}^{t} e^{\gamma_3(t-s)}F_1(s,z)ds - \int_{t_0}^{t} F_1(s,z)ds\Big) \\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} F_1(s,z)ds + \Big(\frac{1}{(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)}\Big) \\
&\quad \Big(\int_{t_0}^{t}\Big[\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_1}e^{\gamma_1(t-s)} + \frac{\gamma_1-\gamma_3}{\gamma_2}e^{\gamma_2(t-s)} + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_3}e^{\gamma_3(t-s)}\Big]F_1(s,z)ds\Big) \\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} F_1(s,z)ds + o(1) \\
&= \frac{-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}\int_{t_0}^{t} F_1(s,z)ds + o(1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} z_2(s)ds &= \frac{1}{(\gamma_5-\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_5)}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(\gamma_1+\gamma_4)e^{\gamma_5(s-\tau)}F_2(\tau,z)d\tau ds \\
&\quad -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(\gamma_1+\gamma_5)e^{\gamma_4(s-\tau)}F_2(\tau,z)d\tau ds \\
&\quad -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(\gamma_5-\gamma_4)e^{-\gamma_1(s-\tau)}F_2(\tau,z)d\tau ds\Big] \\
&= \frac{1}{(\gamma_5-\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_5)}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(\gamma_1+\gamma_4)e^{\gamma_5(s-\tau)}F_2(\tau,z)dsd\tau \\
&\quad -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(\gamma_1+\gamma_5)e^{\gamma_4(s-\tau)}F_2(\tau,z)dsd\tau \\
&\quad -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}(\gamma_5-\gamma_4)e^{-\gamma_1(s-\tau)}F_2(\tau,z)dsd\tau \\
&\quad -\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t}(\gamma_5-\gamma_4)(e^{-\gamma_1(s-\tau)}F_2(\tau,z))dsd\tau\Big] \\
&= \frac{1}{(\gamma_5-\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Big[\int_{t_0}^{t}\Big[\frac{\gamma_1+\gamma_4}{\gamma_5}e^{\gamma_5(t-s)}-\frac{\gamma_1+\gamma_5}{\gamma_4}e^{\gamma_4(t-s)}\Big]F_2(s,z)ds\\
&-\int_{t}^{\infty}\frac{\gamma_4-\gamma_5}{\gamma_1}e^{-\gamma_1(t-s)}F_2(s,z)ds\Big]\\
&+\Big[\int_{t_0}^{\infty}\frac{\gamma_4-\gamma_5}{\gamma_1}e^{-\gamma_1(t_0-s)}F_2(s,z)ds\\
&+\Big[-\frac{\gamma_1+\gamma_4}{\gamma_5}+\frac{\gamma_1+\gamma_5}{\gamma_4}+\frac{\gamma_5-\gamma_4}{\gamma_1}\Big]\int_{t_0}^{t}F_2(s,z)dsd\tau\Big]\Big)\\
&=\frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}\int_{t_0}^{t}F_2(s,z)ds+o(1)+K_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}z_3(s)ds \;=\;& \frac{1}{(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_4+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(\gamma_2-\gamma_4)e^{\gamma_6(s-\tau)}F_3(\tau,z)d\tau ds\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty}(\gamma_2+\gamma_6)e^{-\gamma_4(s-\tau)}F_3(\tau,z)d\tau ds\\
&-\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty}(\gamma_6+\gamma_4)e^{-\gamma_2(s-\tau)}F_3(\tau,z)d\tau ds\Big]\\
=\;& \frac{1}{(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_4+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{t}(\gamma_2-\gamma_4)e^{\gamma_6(s-\tau)}F_3(\tau,z)dsd\tau\\
&+\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t}(\gamma_2+\gamma_6)e^{-\gamma_4(s-\tau)}F_3(\tau,z)dsd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}-(\gamma_6+\gamma_4)e^{-\gamma_2(s-\tau)}F_3(\tau,z)dsd\tau\\
&-\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t}(\gamma_6+\gamma_4)e^{-\gamma_2(s-\tau)}F_3(\tau,z)dsd\tau\Big]\\
=\;& \frac{1}{(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_4+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)}\Big[\int_{t_0}^{t}\Big(\frac{\gamma_2-\gamma_4}{\gamma_6}e^{\gamma_6(t-s)}F_3(s,z)ds\\
&+\int_{t}^{\infty}\frac{\gamma_2+\gamma_6}{-\gamma_4}e^{-\gamma_4(t-s)}-\frac{\gamma_6+\gamma_4}{-\gamma_2}e^{-\gamma_2(t-s)}\Big)F_3(s,z)ds\\
&+\int_{t_0}^{\infty}\frac{\gamma_2+\gamma_6}{\gamma_4}e^{-\gamma_4(t-s)}F_3(s,z)ds+\int_{t_0}^{\infty}\frac{\gamma_6+\gamma_4}{-\gamma_2}e^{\gamma_2(t_0-s)}F_3(s,z)ds\\
&+\Big(-\frac{\gamma_2-\gamma_4}{\gamma_6}+\frac{-(\gamma_2+\gamma_6)}{\gamma_4}+\frac{\gamma_6+\gamma_4}{\gamma_2}\Big)\int_{t_0}^{t}F_3(s,z)ds\Big],\\
=\;& \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}\int_{t_0}^{t}F_3(s,z)ds+o(1)+K_2.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} z_4(s)ds &= \frac{1}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5-\gamma_3)(\gamma_6-\gamma_3)}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty}(\gamma_3-\gamma_5)e^{-\gamma_6(s-\tau)}F_4(\tau,z)d\tau ds \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty}(\gamma_6-\gamma_3)e^{-\gamma_5(s-\tau)}F_4(\tau,z)d\tau ds \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty}(\gamma_5-\gamma_6)e^{-\gamma_3(s-\tau)}F_4(\tau,z)d\tau ds\Big] \\
&= \frac{1}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5-\gamma_3)(\gamma_6-\gamma_3)}\Big[\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}(\gamma_3-\gamma_5)e^{-\gamma_6(s-\tau)}F_4(\tau,z)dsd\tau \\
&+\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t}(\gamma_3-\gamma_5)e^{-\gamma_6(s-\tau)}F_4(\tau,z)dsd\tau \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}(\gamma_6-\gamma_3)e^{-\gamma_5(s-\tau)}F_4(\tau,z)dsd\tau \\
&+\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t}(\gamma_6-\gamma_3)e^{-\gamma_5(s-\tau)}F_4(\tau,z)dsd\tau\Big] \\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}(\gamma_5-\gamma_6)e^{-\gamma_3(s-\tau)}F_4(\tau,z)dsd\tau \\
&+\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t}(\gamma_5-\gamma_6)e^{-\gamma_3(s-\tau)}F_4(\tau,z)dsd\tau\Big] \\
&= \frac{-1}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5-\gamma_3)(\gamma_6-\gamma_3)}\Big[\int_{t}^{\infty}\Big(\frac{\gamma_3-\gamma_5}{\gamma_6}e^{-\gamma_6(t-s)}+\frac{\gamma_6-\gamma_3}{\gamma_5} \\
&e^{-\gamma_5(t-s)}+\frac{\gamma_5-\gamma_6}{\gamma_3}e^{-\gamma_3(t-s)}\Big)F_4(s,z)ds \\
&+\int_{t_0}^{\infty}\frac{\gamma_3-\gamma_5}{\gamma_6}e^{-\gamma_6(t_0-s)}F_4(s,z)ds \\
&+\int_{t}^{\infty}\frac{\gamma_6-\gamma_3}{\gamma_5}e^{-\gamma_5(t_0-s)}F_4(s,z)ds+\int_{t_0}^{\infty}\frac{\gamma_5-\gamma_6}{\gamma_3}e^{-\gamma_3(t_0-s)}F_4(s,z)ds \\
&+\int_{t_0}^{\infty}\Big(-\frac{\gamma_3-\gamma_4}{\gamma_6}+\frac{-(\gamma_6-\gamma_3)}{\gamma_5}+\frac{-(\gamma_5-\gamma_6)}{\gamma_3}\Big)\int_{t_0}^{t}F_4(s,z)ds\Big] \\
&= \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}\int_{t_0}^{t}F_4(s,z)ds+o(1)+K_3.
\end{aligned}
$$

Estas estimaciones concluyen la prueba de (1.29), dado que por las hipótesis *1* y *2* y las conclusiones de los corolarios 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 y 1.3.4, (1.30) resulta ser válida.

Por otro lado, como z_i, $z_i^{(1)} = o(1)$ se tiene que

$$y_i^{(1)}(t) \;=\; [\lambda_i + z_i]y_i$$

$$
\begin{aligned}
&= [\lambda_i + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}exp\Big(- \prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} F_i(s,z)ds\Big),\\
y_i^{(2)}(t) &= [\lambda_i^2 + 2\lambda_i z_i + z_i^2 + z_i^{(1)}]y_i(t)\\
&= [\lambda_i + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}exp\Big(- \prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} F_i(s,z)ds\Big), \quad \text{y}\\
y_i^{(3)}(t) &= \Big([\lambda_i + z_i(t)]^3 + 2(\lambda_i + z_i)z_i^{(1)} + (\lambda_i + z_i)z_i + z_i^{(1)}\Big)y_i(t)\\
&= [\lambda_i^3 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}exp\Big(- \prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} F_i(s,z)ds\Big),
\end{aligned}
$$

con $N(i) = \{1,2,3,4\} - \{i\}$. Luego, de la ecuación (1.4) y la hipótesis *1* se deduce que $z_i^{(3)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y por lo tanto

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{y_i^{(4)}(t)}{y_i(t)} = 2\lambda_i z_i^{(2)} + 2z_i^{(1)}z_i^{(1)} + 2z_i z_i^{(2)} + z_i^{(3)} + 3(\lambda_i + z_i)^2 z_i^{(1)} + (\lambda_i + z_i)^4 = \lambda_i^4,
$$

es decir se satisface (1.28).

1.6 Integrabilidad de las soluciones de la ecuación

Usando variación de parámetros se sabe que (1.12) es equivalente a la ecuación integral (1.16). Luego la integrabilidad de z depende de la integrabilidad del las funciones a, b, f, h, p, q, r y esta dependencia es mostrada en el siguiente lema, donde además de deducir la integrabilidad de $z^{(1)}, z^{(2)}$ se obtienen una fórmula para describir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$.

Lema 1.6.1 *Si se considera la ecuación (1.10), las hipótesis del corolario 1.2.1 y se asume que $a, b, f, h, p, q, r \in L^p[t_0, \infty[$ con $p \geq 1$. Entonces*

1. *$z, z^{(1)}, z^{(2)} \in L^p[t_0, \infty]$ para $p \geq 1$, donde z es la solución obtenida por el corolario 1.2.1.*

2. *Si $p \in]1, 2]$, $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ se puede escribir como*

$$
z(t) = \theta(t) + \psi_m(t), \quad z^{(j)}(t) = \theta^{(j)}(t) + \psi_m^{(j)}(t) \quad j = 1,2
$$

con $\theta, \theta^{(1)}, \theta^{(2)} \in L^p[t_0, \infty[$ y $\psi_m, \psi_m^{(1)}, \psi_m^{(2)} \in L^1[t_0, \infty[$.

3. Si $p \in]m, m+1]$ *con* $m \in I\!N - \{1\}$, $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ *pueden escribirse como*

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t), \quad z^{(j)}(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l^{(j)}(t) + \psi_m^{(j)}(t), \quad j = 1, 2,$$

con $\theta_k, \theta_k^{(1)}, \theta_k^{(2)} \in L^p[t_0, \infty[$, *para* $k = 1, \ldots, m-1$ *y* $\psi_m, \psi_m^{(1)}, \psi_m^{(2)} \in L^{p/m}[t_0, \infty[$.

Demostración. [**item***1*] (Ver [5]), Se sabe que si $a, b, f, h, p, q, r \in L^p[t_0, \infty[$ entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\int_{t_0}^{\cdot} e^{-\varepsilon(\cdot - s)}|a(s)|ds, \quad \int_{\cdot}^{\infty} e^{\varepsilon(\cdot - s)}|a(s)|ds, \in L^p[t_0, \infty[$$

de donde se puede escojer t_0 de manera que se cumplan las hipótesis de los corolario 1.2.1, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, y 1.3.4, es decir se tiene que

$$z(t), z^{(1)}(t), z^{(2)}(t) = \mathcal{O}\Big(\int_{t_0}^{\infty} g_\beta(t,s)|a(s)|ds\Big) \tag{1.31}$$

y como consecuencia

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & , \text{ si } t \geq s \\ 0 & , \text{ si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\text{Re}\gamma_1, \text{Re}\gamma_2, \text{Re}\gamma_3 < 0$

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & , \text{ si } t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & , \text{ si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\text{Re}\gamma_1 > 0, \text{Re}\gamma_2, \text{Re}\gamma_3 < 0$ cuando $\text{Re}\gamma_1 > 0, \text{Re}\gamma_2 > 0, \text{Re}\gamma_3 < 0$

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & , \text{ si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\text{Re}\gamma_1, \text{Re}\gamma_2, \text{Re}\gamma_3 > 0$ con $\beta \in]0, \gamma/2]$.

Ahora como

$$\int_{t_0}^{\infty} g_\beta(\cdot, s)|a(s)|ds \in L^p[t_0, \infty[,$$

de (1.31) se concluye que $z, z^{(1)}, z^{(2)} \in L^p[t_0, \infty[$.

[**Item***2*] Si $p \in]1, 2]$ su exponente conjugado $q = p/p - 1 \in [2, \infty[$, es decir $q \geq p$ entonces $z, z^{(1)}, z^{(2)} \in B]0, 1[\subset L^p$, se sigue que

$$bz, fz^{(1)}, hz^{(2)}, pzz^{(1)}, qz^2, rz^3[z^{(1)}]^2, zz^{(1)}, z^2, zz^{(2)}, z^2z^{(1)}, z^3, z^4 \in L^1[t_0, \infty[.$$

Entonces, tomando $\theta \in L^p[t_0,\infty[$ y $\psi \in [t_0,\infty[$ talque $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)} \in L^p[t_0,\infty[$ y $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)} \in L^1[t_0,\infty[$, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= \int_{t_0}^{t} g(t,s)a(s)ds, \quad \text{y} \\
\psi_m(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Big(bz + fz^{(1)} + hz^{(2)} + pzz^{(1)} + qz^2 \\
&\quad + rz^3 + C_1[z^{(1)}]^2 + C_2zz^{(1)} + C_3z^2 + C_4zz^{(2)} + C_5z^2z^{(1)} \\
&\quad + C_6z^3 + C_7z^4\Big)ds,
\end{aligned}$$

Se observa que $\psi_m^{(1)}, \psi_m^{(2)} \in L^1[t_0,\infty[$ y además , que $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned}
z(t) &= \theta(t) + \psi_m(t), \quad \theta \in L^p[t_0,\infty[, \quad \psi_m \in L^1[t_0,\infty[\\
z^{(j)}(t) &= \theta^{(j)}(t) + \psi_m^{(j)}(t), \quad \theta^{(j)} \in L^p[t_0,\infty[, \quad \psi_m^{(j)} \in L^1[t_0,\infty[, \quad j = 1,2
\end{aligned}$$

[Item*3*] Sea $p \in]m, m+1]$, $(m \in I\!N, m \geq 2)$. Se hará la demostración en dos pasos. Primeramente se demuestra para $m = 2$ y luego para $m > 2$ **Paso 1** Para $m = 2$. Por Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
&bz, fz^{(1)}, hz^{(2)}, [z^{(1)}]^2, z^2, zz^{(1)}, zz^{(2)} \in L^{p/2}[t_0,\infty[\\
&pzz^{(1)}, qz^2, z^2z^{(1)}, z^3 \in L^{p/3}[t_0,\infty[\\
&rz^3, z^4 \in L^{p/4}[t_0,\infty[.
\end{aligned}$$

Ahora como $pzz^{(1)}, qz^2$, $z^2z^{(1)}, z^3, qz^3, z^4$, son acotadas entonces se tiene que $pzz^{(1)}$, qz^2, $z^2z^{(1)}, z^3, qz^3, z^4 \in L^{p/2}[t_0,\infty[$. Luego es posible escribir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ como

$$z(t) = \theta_1(t) + \psi_2(t), z^{(j)}(t) = \theta_1^{(j)}(t) + \psi_2^{(j)}(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds, \\
\psi_2(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Big(bz + fz^{(1)} + hz^{(2)} + pzz^{(1)} + qz^{(2)} + rz^{(3)} + C_1[z^{(1)}]^2 \\
&\quad + C_2zz^{(1)} + C_3z^2 + C_4zz^{(2)} + C_5z^2z^{(1)} + C_6z^3 + C_7z^4\Big)ds.
\end{aligned}$$

Se observa $\theta_1, \theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)} \in L^p[t_0,\infty[$ y además que $\psi_2, \psi_2^{(1)}, \psi_2^{(2)} \in L^{p/2}[t_0,\infty[$, es decir, para $m = 2$ se cumple el resultado para

Paso 2 Para $m > 2$. Reemplazando $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ en las respectivas ecuaciones integrales, se tiene que

$$\begin{aligned} z(t) &= \theta_1(t) + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\omega_2 ds}_{\theta_2} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\zeta_3 ds}_{\psi_3} \\ z^{(1)} &= \theta_1^{(1)} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\omega_2 ds}_{\theta_2^{(1)}} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\zeta_3 ds}_{\psi_3^{(1)}} \quad \text{y} \\ z^{(2)}(t) &= \theta_1^{(2)}(t) + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\omega_2}_{\theta_2^{(2)}} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\zeta_3 ds,}_{\psi_3^{(2)}} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \Big[b\theta_1 + f\theta_1^{(1)} + h\theta_1^{(2)} + C_1[\theta_1^{(1)}]^2 \\ &\quad + C_2\theta_1\theta_1^{(1)} + C_3\theta_1^{(2)} + \theta_1\theta_1^{(2)}\Big], \quad \text{y} \\ \zeta_3 &= \Big[b\psi_2 + f\psi_2^{(1)} + h\psi_2^{(2)} + p(s)(\theta_1\psi_2^{(1)} + \theta_1\theta_1^{(1)} \\ &\quad + \psi_2\theta_1^{(1)} + \psi_2\psi_2^{(1)}) + q(s)(\theta_1^2 + 2\theta_1\psi_2 + \psi_2^2) \\ &\quad + r(s)(\theta_1^3 + 3\theta_1^2\psi_2 + 3\theta_1\psi_2^2 + \psi_2^3) + C_1(2\theta_1^{(1)}\psi_2^{(1)} + [\psi_2^{(1)}]^2) \\ &\quad + C_2(\theta_1\psi_2^{(1)} + \psi_2\theta_1^{(1)} + \psi_2\psi_2^{(1)}) + C_3(2\theta_1\psi_2 + \psi_2^{(2)}) \\ &\quad + C_4(\theta_1\psi_2^{(2)} + \psi_2\theta_1^{(2)} + \psi_2\psi_2^{(2)}) + C_5(\theta_1^{(2)}\theta_1^{(1)} + \theta_1^2\psi_2^{(1)} + 2\theta_1\psi_2\theta_1^{(1)} \\ &\quad + 2\theta_1\psi_2\psi_2^{(1)} + 2\theta_1\psi_2\psi_2^{(1)} + \psi_2^{(2)}(\theta_1^{(1)} + \psi_2^{(1)})) \\ &\quad + C_6(\theta_1^{(3)} + 3\theta_1^{(2)}\psi_2 + 3\theta_1\psi_2^{(2)} + \psi_2^3) + C_7(\theta_1^{(4)} + 4\theta_1^{(3)}\psi_2 \\ &\quad + 6\theta_1^2\psi_2^{(2)} + 4\theta_1\psi_3^3 + \psi_2^4)\Big]. \end{aligned}$$

Luego es posible escribir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ como

$$z(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \psi_3(t), \quad z^{(j)}(t) = \theta_1^{(j)}(t) + \theta_2^{(j)}(t) + \psi_3^{(j)}(t) \quad j = 1, 2 \quad (1.32)$$

Usando Hölder se tiene que cada uno de los sumandos de $\omega_2 \in L^{p/2}[t_0, \infty[$ y que cada uno de los sumandos de $\zeta_3 \in L^{p/3}[t_0, \infty[$ lo que implica que $\theta_2, \theta_2^{(1)}, \theta_2^{(2)} \in L^{p/2}[t_0, \infty[$ y que $\psi_2, \psi_2^{(1)}, \psi_2^{(2)} \in L^{p/3}[t_0, \infty[$.

Ahora sustituyendo las fórmulas $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ dadas en (1.32) en las ecuaciones integrales de $z, z^{(1)}, z^{(2)}$, se tiene

$$z(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\omega_3 ds}_{\theta_3} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\zeta_4 ds}_{\psi_4}$$

donde

$$\begin{aligned}
\omega_3(t) &= \Big(b\theta_2 + f\theta_2^{(1)} + h\theta_2^{(2)} + p\theta_1\theta_1^{(1)} + q\theta_1^2 + C_1\sum_{k=1}^{2}\theta_k^{(1)}\theta_{3-k}^{(1)} + C_2\sum_{k=1}^{2}\theta_k\theta_{3-k}^{(1)} \\
&\quad + C_3\sum_{k=1}^{2}\theta_k\theta_{3-k} + C_4\sum_{k=1}^{2}\theta_k\theta_{3-k}^{(2)} + C_5\theta_1^2\theta_1^{(1)} + C_6\theta_1^3\Big)ds \quad \text{y} \\
\zeta_4 &= \Big[b\psi_2 + f\psi_2^{(1)} + h\psi_2^{(2)} + p(\theta_1\psi_2^{(1)} + \theta_1\theta_1^{(1)} + \psi_2\psi_2^{(1)}) + q(\theta_1^2 + 2\theta_1\psi_2 + \psi_2^2) \\
&\quad + r(\theta_1^3 + 3\theta_1^2\psi_2 + 3\theta_1\psi_2^2 + \psi_2^3) + C_1(2\theta_1^{(1)}\psi_2^{(1)} + [\psi_2^{(1)}]^2) \\
&\quad + C_2(\theta_1\psi_2^{(1)} + \psi_2\theta_1^{(1)} + \psi_2\psi_2^{(1)}) + C_3(2\theta_1\psi_2 + \psi_2^2) \\
&\quad + C_4(\theta_1\psi_2^{(2)} + \psi_2\theta_1^{(2)} + \psi_2\psi_2^{(2)}) + C_5(\theta_1^2\theta_1^{(1)} + \theta_1^2\psi_2^{(1)} + 2\theta_1\psi_2\theta_1^{(1)} \\
&\quad + 2\theta_1\psi_2\psi_2^{(1)} + \psi_2^2(\theta_1^{(1)} + \psi_2^{(1)})) \\
&\quad + C_6(\theta_1^3 + 3\theta_1^2\psi_2 + 3\theta_1\psi_2^2 + \psi_2^3) + C_7(\theta_1^4 + 4\theta_1^3\psi_2 \\
&\quad + 6\theta_1^2\psi_2^2 + 4\theta_1\psi_3^3 + \psi_2^4)\Big]
\end{aligned}$$

con $\psi_4 \in L^{p/4}[t_0,\infty[$ y $\theta_3 \in L^{p/3}[t_0,\infty[$ es decir,

$$z(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \theta_3(t) + \psi_4(t), \quad \theta_k \in L^{p/k}, k = 1,2,3, \quad \psi_4 \in L^{p/4} \tag{1.33}$$

Análogamente también se tiene que

$$\begin{aligned}
z^{(j)}(t) = \theta_1^{(j)}(t) + \theta_2^{(j)}(t) + \theta_3^{(j)}(t) + \psi_4^{(j)}(t), \theta_k^{(j)} \in L^{p/k}, k = 1,2,3, \\
\psi_1^{(j)} \in L^{p/4}, \quad \text{para} \quad j = 1,2.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Suponiendo que se puede escribir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ como

$$\begin{aligned}
z(t) &= \varphi_k(t) + \psi_{k+1}(t) \quad \text{con} \quad \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{k}\theta_l(t) \\
z^{(j)}(t) &= \varphi_k^{(j)}(t) + \psi_{k+1}^{(j)}(t) \quad \text{con} \quad \varphi_k^{(j)}(t) = \sum_{l=1}^{k}\theta_l^{(j)}(t)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds, \quad \theta_1^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds, \\
\theta_1^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)a(s)ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\theta_2(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_1(s)ds, \quad \theta_2^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_1(s)ds,\\
\theta_2^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_1(s)ds,\\
\theta_3(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_2(s)ds, \quad \theta_3^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_2(s)ds,\\
\theta_3^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_2(s)ds,\\
\theta_l(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_3(s)ds, \quad \theta_l^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_3(s)ds,\\
\theta_3^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_3(s)ds,
\end{aligned}
$$

$4 \leq l \leq k$ con

$$
\begin{aligned}
F_1(t) &= b(t)\theta_1 + f(t)\theta_1^{(1)} + h(t)\theta_1^{(2)} + C_1[\theta_1^{(1)}]^2\\
&\quad + C_2\theta_1\theta_1^{(1)} + C_3\theta_1^2 + C_4\theta_1\theta_1^{(2)}\\
F_2(t) &= b(t)\theta_2 + f(t)\theta_2^{(1)} + p(t)\theta_1\theta_1^{(1)} + q(t)\theta_1^2 + C_1\sum_{k=1}^{2}\theta_k^{(1)}\theta_{3-k}^{(1)}\\
&\quad + C_2\sum_{k=1}^{2}\theta_k\theta_{3-k}^{(1)} + C_3\sum_{k=1}^{2}\theta_k\theta_{3-k} + C_4\sum_{k=1}^{2}\theta_k\theta_{3-k}^{(2)}\\
&\quad + C_5\theta_1^2\theta_1^{(1)} + C_6\theta_1^3\\
F_3(t) &= b(t)\theta_{l-1} + f(t)\theta_{l-1}^{(1)} + p(t)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k\theta_{l-1-k}^{(1)} + q(t)\sum_{k=1}^{(l-2)}\theta_k\theta_{l-1-k}\\
&\quad + r(t)\sum_{i+j+m=l-1}\theta_i\theta_j\theta_m + C_1\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(1)}\theta_{l-k}^{(1)} + C_2\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k\theta_{l-k}^{(1)}\\
&\quad + C_3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k\theta_{l-k} + C_4\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k\theta_{l-k}^{(2)} + C_5\sum_{i+j+m=l}\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)}\\
&\quad + C_6\sum_{i+j+m=l}\theta_i\theta_j\theta_m + C_7\sum_{i+j+m=l}\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n
\end{aligned}
$$

además $k < m-1$, $\theta_l, \theta_l^{(1)}, \theta_l^{(2)} \in L^{p/l}[t_0,\infty[$, $l = 1,2,\ldots,k$ y ψ_{k+1}, $\psi_{k+1}^{(1)}$, $\psi_{k+1}^{(2)} \in L^{p/(k+1)}[t_0,\infty[$, sustituyendo $z, z^{(1)}, z^{(2)}$, en la ecuación integral.

$$
z(t) = \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\omega_k ds + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\zeta_k ds
$$

$$z^{(1)}(t) = \theta_1^{(1)} + \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\omega_k ds + \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\zeta_3 ds$$

y también

$$z^{(2)}(t) = \theta_1^{(2)}(t) + \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\omega_k + \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\zeta_k ds$$

donde

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \Big[b\varphi_k + f\varphi_k^{(1)} + h\varphi_k^{(2)} + p\varphi_k\psi_k^{(1)} \\
&\quad + q\varphi_k^2 + \varphi_k^3 + C_1[\psi_k^{(1)}]^2 + C_2\varphi_k\varphi_k^{(1)} + C_3\varphi_k^2 \\
&\quad + C_4\varphi_k\varphi_k^{(2)} + C_5\varphi_k^2\varphi_k^{(1)} + C_6\varphi_k^3 + C_7\varphi_k^4\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_2^{(1)} &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\Big[b\varphi_k + f\varphi_k^{(1)} + h\varphi_k^{(2)} + p\varphi_k\psi_k^{(1)} \\
&\quad + q\varphi_k^{(2)} + \varphi_k^3 + C_1[\varphi_k^{(1)}]^2 + C_2\varphi_k\psi_k^{(1)} + C_3\varphi_k^{(2)} \\
&\quad + C_4\varphi_k\varphi_k^{(2)} + C_5\varphi_k^2\psi_k^{(1)} + C_6\varphi_k^{(3)} + C_7\varphi_k^4\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_2^{(2)} &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\Big[b\varphi_k + f\psi_k^{(1)} + h\varphi_k^{(2)} + p\varphi_k\psi_k^{(1)} \\
&\quad + q\varphi_k^{(2)} + \psi_k^3 + C_1[\varphi_k^{(1)}]^2 + C_2\varphi_k\varphi_k^{(1)} + C_3\varphi_k^{(2)} \\
&\quad + C_4\varphi_k\psi_k^{(2)} + C_5\varphi_k^2\psi_k^{(1)} + C_6\varphi_k^{(3)} + C_7\varphi_k^4\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_k &= \Big[b\psi_{k+1} + f\psi_{k+1}^{(1)} + h\psi_{k+1}^{(2)} + p(\varphi_k\psi_{k+1}^{(1)} + \psi_{k+1}\varphi_k^{(1)} \\
&\quad + \psi_{k+1}\psi_{k+1}^{(1)}) + q(2\varphi_k\psi_{k+1} + \psi_{k+1}^2) \\
&\quad + r(3\varphi_k^2\psi_{k+1} + 3\varphi_k\psi_{k+1}^2 + \psi_{k+1}^3) + C_1(2\varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}^{(1)} + [\psi_{k+1}^{(1)}]^2) \\
&\quad + C_2(\varphi_k\psi_{k+1}^{(1)} + \psi_{k+1}\varphi_k^{(1)} + \psi_{k+1}\psi_{k+1}^{(1)}) + C_3(2\varphi_k\psi_{k+1} + \psi_{k+1}^2) \\
&\quad + C_4(\varphi_k\psi_{k+1}^{(2)} + \psi_{k+1}\varphi_k^{(2)} + \psi_{k+1}\psi_{k+1}^{(2)}) + C_5(\varphi_k^2\psi_{k+1}^{(1)} + 2\varphi_k\psi_{k+1}\varphi_k^{(1)} \\
&\quad + 2\varphi_k\psi_{k+1}\psi_{k+1}^{(1)} + \psi_{k+1}^2\varphi_k^{(1)} + \psi_{k+1}^2\psi_{k+1}^{(1)}) \\
&\quad + C_6(3\varphi_k^{(2)}\psi_{k+1} + 3\varphi_k\psi_{k+1}^2 + \psi_{k+1}^3) + C_7(4\varphi_k^3 \\
&\quad + 6\varphi_k^2\psi_{k+1}^{(2)} + 4\varphi_k\psi_{k+1}^3 + \psi_{k+1}^4)\Big]
\end{aligned}$$

$$\hat{\zeta}_k^{(1)} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\Big[b\psi_{k+1} + f\psi_{k+1}^{(1)} + h\psi_{k+1}^{(2)} + p(\varphi_k\psi_{k+1}^{(1)} + \psi_{k+1}\varphi_k^{(1)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\psi_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1}) + q(2\varphi_k\psi_{k+1} + \psi^2_{k+1})\\
&+r(3\varphi^2_k\psi_{k+1} + 3\varphi_k\psi^2_{k+1} + \psi^3_{k+1}) + C_1(2\varphi^{(1)}_k\psi^{(1)}_{k+1} + [\psi^{(1)}_{k+1}]^2)\\
&+C_2(\varphi_k\psi^{(1)}_{k+1} + \psi_{k+1}\varphi^{(1)}_k + \psi_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1}) + C_3(2\varphi_k\psi_{k+1} + \psi^2_{k+1})\\
&+C_4(\varphi_k\psi^{(2)}_{k+1} + \psi_{k+1}\varphi^{(2)}_k + \psi_{k+1}\psi^{(2)}_{k+1}) + C_5(\varphi^2_k\psi^{(1)}_{k+1} + 2\varphi_k\psi_{k+1}\varphi^{(1)}_k\\
&+2\varphi_k\psi_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1} + \psi^2_{k+1}\varphi^{(1)}_k + \psi^2_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1})\\
&+C_6(3\varphi^{(2)}_k\psi_{k+1} + 3\varphi_k\psi^2_{k+1} + \psi^3_{k+1}) + C_7(4\varphi^3_k\\
&+6\varphi^2_k\psi^{(2)}_{k+1} + 4\varphi_k\psi^3_{k+1} + \psi^4_{k+1})\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta^{(2)}_k &= \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)\Big[b\psi_{k+1} + f\psi^{(1)}_{k+1} + h\psi^{(2)}_{k+1} + p(\varphi_k\psi^{(1)}_{k+1} + \psi_{k+1}\varphi^{(1)}_k\\
&+\psi_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1}) + q(2\varphi_k\psi_{k+1} + \psi^2_{k+1})\\
&+r(3\varphi^2_k\psi_{k+1} + 3\varphi_k\psi^2_{k+1} + \psi^3_{k+1}) + C_1(2\varphi^{(1)}_k\psi^{(1)}_{k+1} + [\psi^{(1)}_{k+1}]^2)\\
&+C_2(\varphi_k\psi^{(1)}_{k+1} + \psi_{k+1}\varphi^{(1)}_k + \psi_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1}) + C_3(2\varphi_k\psi_{k+1} + \psi^2_{k+1})\\
&+C_4(\varphi_k\psi^{(2)}_{k+1} + \psi_{k+1}\varphi^{(2)}_k + \psi_{k+1}\psi^{(2)}_{k+1}) + C_5(\varphi^2_k\psi^{(1)}_{k+1} + 2\varphi_k\psi_{k+1}\varphi^{(1)}_k\\
&+2\varphi_k\psi_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1} + \psi^2_{k+1}\varphi^{(1)}_k + \psi^2_{k+1}\psi^{(1)}_{k+1})\\
&+C_6(3\varphi^{(2)}_k\psi_{k+1} + 3\varphi_k\psi^2_{k+1} + \psi^3_{k+1}) + C_7(4\varphi^3_k\\
&+6\varphi^2_k\psi^{(2)}_{k+1} + 4\varphi_k\psi^3_{k+1} + \psi^4_{k+1})\Big]
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
b\varphi_k + f\varphi^{(1)}_k + h\varphi^{(2)}_k &= b\theta_1 + b\theta_2 + f\theta^{(1)}_1 + f\theta^{(1)}_2 + h\theta^{(2)}_1 + h\theta^{(2)}_2\\
&+\sum_{l=1}^{k-3}[b\theta_{l+2} + f\theta^{(1)}_{l+2} + h^{(2)}_{l+2}] + b\theta_k + f\theta^{(1)}_k + g\theta^{(2)}_k.\\
p\varphi_k\varphi^{(1)}_k &= p\theta_1\theta^{(1)}_1 + p\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i=1}^{l+1}\theta_i\theta^{(1)}_{l+2-i} + p\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta^{(1)}_{k-i}\\
&+p\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta^{(1)}_j.\\
q\varphi^{(2)}_k &= q\theta^{(2)}_1 + q\sum_{i=1}^{2}\theta_i\theta_{3-i} + q\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i=1}^{l+1}\theta_i\theta_{l+2-i}\\
&+q\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta_{k-i} + q\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j.\\
r\varphi^{(3)}_k &= r\theta^{(3)}_1 + r\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i+j+m=l+2}\theta_i\theta_j\theta_m
\end{aligned}
$$

$$+r\sum_{i+j+m=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m + r\sum_{i+j+m\geq k+1}\theta_i\theta_j\theta_m.$$

$$\begin{aligned}
C_1[\varphi_k^{(1)}]^2 &= C_1[\theta_1^{(1)}]^2 + C_1\sum_{i=1}^{2}\theta_i^{(1)}\theta_{3-i}^{(1)} + C_1\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i=1}^{l+2}\theta_i^{(1)}\theta_{l+3-i}^{(1)} \\
&\quad + C_1\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{(1)}\theta_{k-1+1}^{(1)} + C_1\sum_{i+j>k+1}\theta_i^{(1)}\theta_j^{(1)}. \\
C_2\varphi_k\varphi_k^{(1)} &= C_2\theta_1\theta_1^{(1)} + C_2\sum_{i=1}^{2}\theta_i\theta_{3-i}^{(1)} + C_2\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i=1}^{l+2}\theta_i\theta_{l+3-i}^{(1)} \\
&\quad + C_2\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-1+1}^{(1)} + C_2\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j^{(1)}. \\
C_3\varphi_k^2 &= C_3\theta_1^2 + C_3\sum_{i=1}^{2}\theta_i\theta_{3-i} + C_3\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i=1}^{l+2}\theta_i\theta_{l+3-i} \\
&\quad + C_3\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-1+1} + C_3\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j. \\
C_4\varphi_k\varphi_k^{(2)} &= C_4\theta_1\theta_1^{(2)} + C_4\sum_{i=1}^{2}\theta_i\theta_{3-i}^{(2)} + C_4\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i=1}^{l+2}\theta_i\theta_{l+3-i}^{(2)} \\
&\quad + C_4\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}^{(1)} + C_4\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j^{(2)}. \\
C_5\varphi_k^2\varphi_k^{(1)} &= C_5\theta_1^2\theta_1^{(1)} + C_5\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{ij+m=l+3}\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)} \\
&\quad + C_5\sum_{i+j+m=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)} + C_5\sum_{i+j+m>k+1}\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)}. \\
C_6\varphi_k^3 &= C_6\theta_1^3 + C_6\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{i+j+m=l+3}\theta_i\theta_j\theta_m \\
&\quad + C_6\sum_{i+j+m=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m + C_6\sum_{i+j+m>k+1}\theta_i\theta_j\theta_m. \\
C_7\varphi_k^4 &= C_7\sum_{l=1}^{k-3}\sum_{ij+m+n=l+3}\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n + C_7\sum_{i+j+m+n=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n \\
&\quad + C_7\sum_{i+j+m+n>k+1}\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n.
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} A &= b\varphi_k + f\varphi_k^{(1)} + h\varphi_k^{(2)} + p\varphi_k\varphi_k^{(1)} + q\varphi_k^2 + r\varphi_k^3 + C_1[\varphi_k^{(1)}]^2 \\ &\quad + C_2\varphi_k\varphi_k^{(1)} + C_3\varphi_k^2 + C_4\varphi_k\varphi_k^{(2)} + C_5\varphi_k^2\varphi_k^{(1)} + C_6\varphi_k^3 + C_7\varphi_k^4 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} A &= \theta_2 + \theta_3 + \sum_{l=1}^{k-3}\theta_{l+3} + \theta_{k+1} + p\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j^{(1)} + q\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j \\ &\quad + r\sum_{i+j+m\geq k+1}\theta_i\theta_j\theta_m + C_1\sum_{i+j>k+1}\theta_i^{(1)}\theta_j^{(1)} + C_2\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j^{(1)} \\ &\quad + C_3\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j + C_4\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j^{(2)} + C_5\sum_{i+j+m>k+1}\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)} \\ &\quad + C_6\sum_{i+j+m>k+1}\theta_i\theta_j\theta_m + C_7\sum_{i+j+m+n>k+1}\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= b\theta_k + f\theta_k^{(1)} + h\theta_k^{(2)} + p\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta_{k-i}^{(1)} + r\sum_{i+j+m=k}\theta_i\theta_j\theta_m + C_1\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{(1)}\theta_{k-i+1}^{(1)} \\ &\quad + C_2\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}^{(1)} + C_3\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1} + C_4\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}^{(1)} + C_5 \\ &\quad \sum_{i+j+m=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)} + C_6\sum_{i+j+m=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m + C_7\sum_{i+j+m+n=k+1}\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n \end{aligned}$$

Por otro lado $|\theta_l|^{p/(l+1)} \in L^{l+1/p}$ para todo $1 \leq l \leq k$ y como $|b|^{p/(l+1)} \in L^{l+1}$, entonces por Hölder $|b\theta_l|^{p/(l+1)} \in L^l$ para todo $1 \leq l \leq k$ luego $b\theta_l \in L^{p/(l+1)}$, para todo $1 \leq l \leq k$.

Análogamente se prueba que $f\theta_l^{(1)}$, $h\theta_l^{(2)} \in L^{p/l+1}$ para todo $1 \leq l \leq k$. Con argumentos similares se prueba que $p\theta_i\theta_{l-i}^{(1)}, q\theta_i\theta_{l-i} \in L^{p/(l+1)}$ para $1 \leq i \leq l-1$ y $2 \leq l \leq k$

$$\begin{aligned} r\theta_i\theta_j\theta_m \in L^{p/l} \quad &\text{cuando} \quad i+j+m = l-1, \quad 1 \leq i,j,m \leq l-3 \\ &\qquad\qquad 4 \leq l \leq k+1 \\ \theta_i\theta_j\theta_m, \theta_i\theta_j\theta_m^{(1)}, \in L^{p/l} \quad &\text{cuando} \quad i+j+m = l, \quad 1 \leq i,j,m \leq l-2 \\ &\qquad\qquad 3 \leq l \leq k+1 \\ \theta_i\theta_j\theta_m\theta_n \in L^{p/l} \quad &\text{cuando} \quad i+j+m+n = l, \quad 1 \leq i,j,m,n \leq l-3 \\ &\qquad\qquad 4 \leq l \leq k+1 \end{aligned}$$

$$\theta_i^{(1)}\theta_{l-i+1}^{(1)}, \theta_i\theta_{l-i+1}, \theta_i\theta_{l-i+1}^{(2)}, \theta_i\theta_{l-i+1}^{(1)} \in L^{p/l+1} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq l \leq k$$

Por otro lado si

$$\begin{aligned} i+j > k+1 \;&\Rightarrow\; i+j \geq k+2 \Rightarrow i \geq k+2-j \\ &\Rightarrow\; \frac{p}{i} \leq \frac{p}{k+2-j} \Rightarrow \theta_i \in L^{p(k+2-j)} \end{aligned}$$

del mismo modo se tiene que $\theta_j \in L^{p/k+2-i}$ de donde $|\theta_i|^{p/k+2} \in L^{k+2/k+2-j}$ entonces por Hölder $|\theta_i\theta_j|^{p/k+2} \in L^1$, luego $\theta_i\theta_j \in L^{p/k+2}$ para todo $i+j > k+1$; análogamente se prueba que

$$\theta_i\theta_j^{(1)}, \theta_i\theta_j^{(2)}, \theta_i^{(1)}\theta_j^{(1)} \in L^{p/k+2} \quad \text{para todo} \quad i+j > k+1$$

Ahora como $\theta_i\theta_j$ es acotado y $\dfrac{p}{k+2} \leq \dfrac{p}{k+1} \Rightarrow \theta_i\theta_j \in L^{p/k+1}$ para todo $i+j > k+1$ luego $|\theta_i\theta_j|^{p/k+2} \in L^{(k+2)/(k+1)}$ y como $|q|^{p/k+2} \in L^{k+2}$, entonces por Hölder $q\theta_i\theta_j \in L^{p/k+2}$, análogamente se prueba que $p\theta_i\theta_j^{(1)} \in L^{p/k+2}$ para todo $i+j > k+1$. Con argumentos similares se prueba que $\theta_i\theta_j\theta_m$, $\theta_i\theta_j\theta_m^{(1)} \in L^{p/k+2}$ para todo $i+j > k+1$, $r\theta_i\theta_j\theta_m \in L^{p/k+2}$ para todo $i+j+m \geq k+1$, $\theta_i\theta_j\theta_m\theta_n \in L^{p/k+2}$ para todo $i+j+m+n > k+1$.

Para el tercer sumando en la sustitución de $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \left(|\psi_{k+1}|^{p/k+2}\right)^{(k+2)/(k+1)} ds \;&=\; \int_{t_0}^{\infty} |\psi_{k+1}|^{p/k+1} ds < \infty \\ &\Rightarrow\; |\psi_{k+1}|^{p/k+2} \in L^{(k+2)/(k+1)} \end{aligned}$$

y como $|b|^{p/k+2} \in L^{(k+2)}$, entonces por Hölder $b\psi_{k+1} \in L^{p/k+2}$.

Análogamente se prueba que $f\psi_{k+1}^{(1)}$, $h\psi_{k+1}^{(2)} \in L^{p/k+2}$, ahora como φ_k es acotada ya que z lo es, entonces

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(|p(s)\varphi_k(s)|^{(p/k+2)}\right)^{k+2} ds \;\leq\; M^p \int_{t_0}^{\infty} |p(s)|^p ds$$

y como $|\psi_{k+1}^{(1)}|^{p/k+2} \in L^{(k+2)/(k+1)}$ entonces por Hölder $p\varphi_k\psi_k^{(1)} \in L^{p/k+2}$, análogamente

$$p\varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}, q\varphi_k\psi_{k+1}, r\varphi_k^2\psi_{k+1}, \varphi_k\varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}, \psi_k\varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}^{(1)}, \varphi_k^2\psi_{k+1}, \varphi_k^3\psi_{k+1} \in L^{p/k+2}$$

y también

$$p\psi_{k+1}\psi_{k+1}^{(1)}, q(\psi_{k+1})^2, r\varphi_k\psi_{k+1}^2, r\psi_{k+1}^3, \varphi_k^2\psi_{k+1}^{(1)}\varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}^2 \in L^{p/k+2}$$

ahora como

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} \left(|\varphi_k^{(1)}(s)|^{p/k+2}\right)^{k+2} ds \;&=\; \int_{t_0}^{\infty} |\varphi_k^{(1)}(s)|^p ds < \infty \\ &\Rightarrow\; |\varphi_k^{(1)}|^{p/k+2} \in L^{k+2} \end{aligned}$$

y como $|\psi_{k+1}^{(1)}|^{p/k+2} \in L^{k+2/k+1}$, entonces por Hölder $\varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}^{(1)} \in L^{p/k+2}$, análogamente se prueba que $\varphi_k\psi_{k+1}^{(1)}, \varphi_k^{(1)}\psi_{k+1}, \varphi_k\psi_{k+1}, \varphi_k\psi_{k+1}^{(2)}, \varphi_k^{(2)}\psi_{k+1}, \varphi_k\psi_{k+1}^{(2)}, \varphi_k^2\psi_{k+1}^{(2)}, \varphi_k\psi_{k+1}^3 \in L^{p/k+2}$ por último

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty}\left(|\psi_{k+1}(s)|^{p/k+2}\right)^{k+2}ds &= \int_{t_0}^{\infty}|\psi_{k+1}(s)|^p ds < \infty\\ &\Rightarrow |\psi_{k+1}^{(1)}|^{p/k+2} \in L^{k+2}\end{aligned}$$

además se tiene que $|\psi_{k+1}^{(1)}|^{p/k+2} \in L^{(k+2)/(k+1)}$, entonces por Hölder $\psi_{k+1}, \quad \psi_{k+1}^{(1)} \in L^{p/k+2}$ análogamente se prueba que $[\psi_{k+1}^{(1)}]^2$, φ_{k+1}^2, $\psi_{k+1}^2\psi_{k+1}^{(1)}$, $\psi_{k+1}\psi_{k+1}^{(2)}$, ψ_{k+1}^3 , $\psi_{k+1}^4 \in L^{p/k+2}$.

Lo anterior permite agrupar en un solo término, los elementos del segundo y tercer sumando que pertenecen a $L^{p/k+2}$, el cual será denotado como $\psi_{k+2}(t)$, luego se puede escribir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ como

$$\begin{aligned}z(t) &= \varphi_k^{(1)}(t) + \psi_{k+2}(t)\\ z^{(j)}(t) &= \varphi_k^{(j)}(t) + \psi_{k+2}^{(j)}(t) \quad j = 1,2\end{aligned}$$

donde $\theta_i, \theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)} \in L^{p/i}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$ y ψ_{k+2}, $\psi_{k+2}^{(1)}, \psi_{k+2}^{(2)} \in L^{p/k+2}$.

Ahora es posible iterar el proceso hasta llegar a $k = m-1$; obteniendose.

$$\begin{aligned}z(t) &= \sum_{l=1}^{m-1}\theta_l(t) + \psi_m(t)\\ z^{(j)}(t) &= \sum_{l=1}^{m-1}\theta_l^{(j)}(t) + \psi_m^{(j)}(t) \quad j = 1,2\end{aligned}$$

donde $\theta_l, \theta_l^{(1)}, \theta_l^{(2)} \in L^{p/l}$ $l = 1, 2, \ldots, m-1$ y ψ_m, $\psi_m^{(1)}$, $\psi_m^{(2)} \in L^{p/m}$.

Observación 1.6.1 *Si se iterara una vez más el proceso del lema 1.6.1, es decir reemplazando*

$$\begin{aligned}z(t) &= \sum_{l=1}^{m-1}\theta_l(t) + \psi_m(t)\\ z^{(j)}(t) &= \sum_{l=1}^{m-1}\theta_l^{(j)}(t) + \psi_m^{(j)}(t) \quad j = 1,2\end{aligned}$$

en las respectivas ecuaciones integrales se puede encontrar $\theta_m, \theta_m^{(j)}$, ψ_{m+1}, $\psi_{m+1}^{(j)}$ $j = 1, 2$ *donde*

$$\begin{aligned}
\theta_m(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_m(s)ds \\
\theta_m^{(1)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_m(s)ds \\
\theta_m^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_m(s)ds
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
F_m(t) &= b(t)\theta_{m-1}(t) + f(t)\theta_{m-1}^{(1)}(t) + h(t)\theta_{m-1}^{(2)}(t) + p(t)\sum_{k=1}^{m-2}\theta_k(t)\theta_{m-1-k}^{(1)}(t) \\
&+q(t)\sum_{k=1}^{m-2}\theta_k(t)\theta_{m-1-k}(t) + C_1\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k^{(1)}(t)\theta_{m-k}^{(1)}(t) + C_2\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(t)\theta_{m-k}^{(1)}(t) \\
&+C_3\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(t)\theta_{m-k}(t) + C_4\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(t)\theta_{m-k}^{(2)}(t) + C_5\sum_{i+j+k=m}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_k^{(1)}(t) \\
&+C_6\sum_{i+j+k=m}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_k(t) + C_7\sum_{i+j+k+l=m}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_k(t)\theta_l(t).
\end{aligned}$$

Así es posible escribir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ *como*

$$\begin{aligned}
z(t) &= \sum_{l=1}^{m}\theta_l(t) + \psi_{m+1}(t) \\
z^{(j)}(t) &= \sum_{l=1}^{m}\theta_l^{(j)}(t) + \psi_{m+1}^{(j)}(t) \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)ds \qquad \theta_1^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)ds \\
\theta_1^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)a(s)ds. \\
\theta_2(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_1(s)ds \qquad \theta_2^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_1(s)ds \\
\theta_2^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_1(s)ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_3(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_2(s)ds \qquad \theta_3^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_2(s)ds \\
\theta_3^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_2(s)ds. \\
\theta_l(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)F_3(s)ds \qquad \theta_l^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)F_3(s)ds \\
\theta_l^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,s)F_3(s)ds, \quad l \geq 3,
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= b(t)\theta_1(t) + f(t)\theta_1^{(1)} + h(t)\theta_1^{(2)}(t) + C_1[\theta_1^{(1)}(t)]^2 \\
&\quad + C_2\theta_1(t)\theta_1^{(1)}(t) + C_3[\theta_1(t)]^2 + C_4\theta_1(t)\theta_1^{(2)}(t). \\
F_2(t) &= b(t)\theta_2(t) + f(t)\theta_2^{(1)}(t) + p(t)\theta_1(t)\theta_1^{(1)}(t) + q(t)\theta_1^{(2)}(t) + C_1\sum_{k=1}^{2}\theta_k^{(1)}(t)\theta_{3-k}^{(1)}(t) \\
&\quad + C_2\sum_{k=1}^{2}\theta_k(t)\theta_{3-k}^{(1)}(t) + C_3\sum_{k=1}^{2}\theta_k(t)\theta_{3-k}(t) + C_4\sum_{k=1}^{2}\theta_k(t)\theta_{3-k}^{(2)}(t) \\
&\quad + C_5\theta_1^2(t)\theta_1^{(1)}(t) + C_6\theta_1^3(t). \\
F_3(t) &= b(t)\theta_{l-1}(t) + f(t)\theta_{l-1}^{(1)}(t) + h(t)\theta_{l-1}^{(2)}(t) + p(t)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k(t)\theta_{l-1-k}^{(1)}(t) \\
&\quad + q(t)\sum_{k=1}^{(l-2)}\theta_k(t)\theta_{l-1-k}(t) + r(t)\sum_{i+j+m=l-1}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_m(t) \\
&\quad + C_1\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(1)}(t)\theta_{l-k}^{(1)}(t) + C_2\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(t)\theta_{l-k}^{(1)}(t) \\
&\quad + C_3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(t)\theta_{l-k}(t) + C_4\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(t)\theta_{l-k}^{(2)}(t) + C_5\sum_{i+j+m=l}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_m^{(1)}(t) \\
&\quad + C_6\sum_{i+j+m=l}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_m(7) + C_7\sum_{i+j+m+n=l}\theta_i(t)\theta_j(t)\theta_m(t)\theta_n(t),
\end{aligned}$$

y $\theta_l, \theta_l^{(1)}, \theta_l^{(2)} \in L^{p/l}[t_0,\infty[$, $l = 1, 2, \ldots, m$ *y* $\psi_{m+1}, \psi_{m+1}^{(1)}, \psi_{m+1}^{(2)} \in L^1[t_0,\infty[$.

1.7 Perturbaciones L^p, fórmulas asintóticas para las soluciones de la ecuación (1.2)

En la sección 1.5, se obtuvo un teorema para perturbaciones $r_j \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $j = 0, 1, 2, 3$.

La forma de escribir $z, z^{(1)}, z^{(2)}$ obtenida en la observación de la sección 5 permite demostrar un teorema tipo Levinson, es decir, cuando las perturbaciones $r_j \in L^1$ para $j = 0, 1, 2, 3$.

Para perturbaciones $r_j \in L^p$ para $j = 0, 1, 2, 3$ y $p \in]1, 2]$, es posible obtener un resultado tipo Hartman-Wintner para la ecuación (1.2) y tambien un resultado para perturbaciones $r_j \in L^p$ para $j = 0, 1, 2, 3$ y $p \in]m, m+1]$ con $n \in I\!N - \{0\}$.

En todos estos resultados se obtienen fórmulas asintóticas para $z, z^{(1)}, z^{(2)}$.

Ahora, se presenta el teorema tipo Levinson.

Teorema 1.7.1 *Dada la ecuación (1.2). Si se supone que*

1. $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \mathrm{Re}\lambda_3 > \mathrm{Re}\lambda_4$, $\gamma_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\gamma_2 = \lambda_3 - \lambda_1$, $\gamma_3 = \lambda_4 - \lambda_1$, $\gamma_4 = \lambda_3 - \lambda_2$, $\gamma_5 = \lambda_4 - \lambda_2$, $\gamma_6 = \lambda_4 - \lambda_3$, *donde* λ_i, $\quad i = 1, 2, 3, 4$ *son las raíces características de la ecuación (1.1).*

2. $r_j \in L^p, \quad j = 0, 1, 2, 3$

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $\quad i = 1, 2, 3, 4$, *tales que satisfacen (6) y más aún se tiene que*

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda_i^{j-1} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}, \quad \textit{para cada } i = 1, 2, 3, 4 \textit{ y } 1 \le j \le 4.$$

Demostración. Se sabe que $\mathcal{L}_k(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \in L^1$, donde $\mathcal{L}_k$ son los operadores del teorema 1.4.1 para $k = 1, 2$. Luego se satisfacen las hipótesis del teorema 1.4.1, entonces existe un sistema fundamental de soluciones y_i, $\quad i = 1, 2, 3, 4$ que satisfacen la ecuación (6). Además se tiene que

$$y_i(t) = \exp \int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]ds \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4,$$

con z_i satisfaciendo la ecuación (1.4), con

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{(\gamma_3 - \gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} + (\gamma_1 - \gamma_3)e^{\gamma_2(t-s)}}{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)}\Big] F_1(s, z(s))ds. \\ z_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{(\gamma_1 + \gamma_4)e^{\gamma_5(t-s)} - (\gamma_1 + \gamma_5)e^{\gamma_4(t-s)}}{(\gamma_5 - \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_5)}\Big] F_2(s, z(s))ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \int_t^\infty \Big[\frac{(\gamma_5-\gamma_4)e^{-\gamma_1(t-s)}}{(\gamma_5-\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_4)(\gamma_1+\gamma_5)}\Big] F_2(s,z(s))ds. \\
z_3(t) &= \int_{t_0}^t \Big[\frac{(\gamma_2-\gamma_4)e^{\gamma_6(t-s)}}{(\gamma_6+\gamma_4)(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)}\Big] F_3(s,z(s))ds \\
& - \int_t^\infty \Big[\frac{(\gamma_6+\gamma_4)e^{-\gamma_2(t-s)}-(\gamma_2+\gamma_6)e^{-\gamma_4(t-s)}}{(\gamma_6+\gamma_4)(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)}\Big] F_3(s,z(s))ds. \\
z_4(t) &= \int_t^\infty \Big[\frac{(\gamma_3-\gamma_5)e^{\gamma_6(t-s)}+(\gamma_6-\gamma_3)e^{-\gamma_5(t-s)}+(\gamma_5-\gamma_6)e^{-\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5-\gamma_3)(\gamma_6-\gamma_3)}\Big] F_1(s,z(s))ds.
\end{aligned}
$$

Donde

$$
\begin{aligned}
F_i(t,z(t)) &= -\Big[(\lambda_i^3 r_3(t)+\lambda_i^2 r_2(t)+\lambda_i r_1(t)+r_0(t)) + (3\lambda_i r_3(t)+2\lambda_i r_2(t) \\
&+r_1(t))z_i(t) + (3\lambda_i r_3(t)+r_2(t))z_i^{(1)}(t) + r_3(t)z_i^{(2)}(t) + 3r_3(t)z_i(t)z_i^{(1)}(t) \\
&+(3\lambda_i r_3(t)+r_2(t))z_i^{(2)}(t) + 3[z_i^{(1)}(t)]^2 + (12\lambda_i+3a_3)z_i(t)z_i^{(1)}(t) \\
&+(6\lambda_i^{(2)}+3\lambda_i a_3+a_2)z_i^2(t) + 4z_i(t)z_i^{(2)}(t) + r_3(t)z_i^3(t) + 6z_i^2(t)z_i^{(1)}(t) \\
&+4\lambda_i z_i^3(t) + z_i^4(t)\Big]
\end{aligned}
$$

para cada $i = 1,2,3,4$.

Usando las hipótesis (1) y (2) se satisfacen las condiciones del corolario 1.3.3 y del lema 1.6.1 para la ecuación (1.4) con $p = 1$,

$$
\begin{aligned}
a(t) &= -(\lambda_i^3 r_3(t)+\lambda_i^2 r_2(t)+\lambda_i r_1(t)+r_0(t)) \\
b(t) &= -(3\lambda_i^2 r_3(t)+2\lambda_i r_2(t)+r_1(t)) \\
f(t) &= -(3\lambda_i r_3(t)+r_2(t)) \\
h(t) &= -r_3(t); \quad p(t) = -3r_3(t); \quad q(t) = -(3\lambda_i r_3(t)+r_2(t)) \\
r(t) &= -r_3(t), \quad C_1 = -3, \quad C_2 = -(12\lambda_i+3a_3) \\
C_3 &= -(6\lambda_i^{(2)}+3\lambda_i a_3+a_2), \quad C_4 = -4, \quad C_5 = -6, \quad C_6 = -4\lambda_i, \quad C_7 = -1
\end{aligned}
$$

entonces existe z_i talque $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cada $i = 1,2,3,4$ y además $z_i \in L^1$ luego

$$\int_{t_0}^t z_i(s)ds = k + o(1) \quad \text{para} \quad i = 1,2,3,4.$$

Ahora si se escoge z_i de manera que $e^{\int_{t_0}^t z_i(s)ds} = 1 + o(1)$ de donde

$$y_i(t) = [1+o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad \text{para} \quad i = 1,2,3,4$$

además como

$$y_i^{(1)}(t) = [\lambda_i + z_i(t)]y_i(t)$$

y $z_i \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces $z_i = o(1)$; se tiene

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= [\lambda_i + o(1)]y_i(t) = [\lambda_i + o(1)][1 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \\ y_i^{(1)}(t) &= [\lambda_i + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Ahora usando el hecho que $z_i^{(1)}, z_i^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} y_i^{(2)}(t) &= [\lambda_i^2 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \\ y_i^{(3)}(t) &= [\lambda_i^3 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Por lo tanto

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda_i^{j-1} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq 4$$

Ahora véase un resultado tipo Hartman-Wintner para la ecuación (1.2)

Teorema 1.7.2 *Dada la ecuación (1.2). Si se supone que*

1. $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \mathrm{Re}\lambda_3 > \mathrm{Re}\lambda_4$, $\gamma_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\gamma_2 = \lambda_3 - \lambda_1$, $\gamma_3 = \lambda_4 - \lambda_1$, $\gamma_4 = \lambda_3 - \lambda_2$, $\gamma_5 = \lambda_4 - \lambda_2$, $\gamma_6 = \lambda_4 - \lambda_3$, *donde* λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ *son las raíces características de la ecuación (1.1).*

2. $r_j \in L^p$, $j = 0, 1, 2, 3$ *y* $p \in]1, 2]$

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *tales que satisfacen (6) y más aún se tiene que*

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda_i^{j-1} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} exp(-\prod_{k \in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} P(\lambda_i, R(s))ds),$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$ $N(i) = \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$ *y*

$$P(\lambda_i, R(s))ds = \lambda_i^3 r_3(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t)$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración. Se sabe que la ecuación (1.2) tiene soluciones de la forma (3), donde cada z_i satisface la ecuación (1.4) para $i = 1,2,3,4$. Además note que se satisfacen las hipótesis del corolario 1.2.1 y del lema 1.6.1 para la ecuación (1.4) con $p \in]1,2]$

$$\begin{aligned}
b_0 &= 4\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 a_3 + 2\lambda_i a_2 + a_1 \\
b_1 &= 6\lambda_i^2 + 3a_3\lambda_i, \quad b_2 = 4\lambda_i + a_3 \\
a(t) &= -(\lambda_i^3 r_3(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t)) \\
b(t) &= -(3\lambda_i^2 r_3(t) + 2\lambda_i r_2(t) + r_1(t)) \\
f(t) &= -(3\lambda_i r_3(t) + r_2(t)) \\
h(t) &= -r_3(t); \quad p(t) = -3r_3(t); \quad q(t) = -(3\lambda_i r_3(t) + r_2(t)) \\
r(t) &= -r_3(t), \quad C_1 = -3, \quad C_2 = -(12\lambda_i + 3a_3) \\
C_3 &= -(6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2), \quad C_4 = -4, \quad C_5 = -6, \quad C_6 = -4\lambda_i, \quad C_7 = -1
\end{aligned}$$

para cada $i = 1,2,3,4$, entonces existe z_i tal que $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)} \to 0$ cuando $t \to \infty$, además $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)} \in L^p[t_0, \infty[$ pudiendose escribir $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)}$ como

$$\begin{aligned}
z_i(t) &= \theta_i(t) + \psi_i(t) \\
z_i^{(j)}(t) &= \theta_i^{(j)}(t) + \psi_i^{(j)}(t) \quad j = 1,2.
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_i(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s) P(\lambda_i, R) ds, \\
\theta_i^{(1)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g_i}{\partial t}(t,s) P(\lambda_i, R) ds, \\
\theta_i^{(2)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2}(t,s) P(\lambda_i, R) ds,
\end{aligned}$$

con $\theta_i, \theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)} \in L^p[t_0, \infty[$ y $\psi_i, \psi_i^{(i)}\ \psi_i^{(2)} \in L^1[t_0, \infty[$ y g_i la función de Green para cada z_i, $\quad i = 1,2,3,4$, es decir,

$$g_1(t,s) = \begin{cases} 0 & , \ t \le s \\ \dfrac{(\gamma_3 - \gamma_2)e^{\gamma_1(t-s)} + (\gamma_1 - \gamma_3)e^{\gamma_3(t-s)} + (\gamma_2 - \gamma_4)e^{\gamma_1(t-s)}}{(\gamma_3 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_3 - \gamma_1)} & , \ t \ge s \end{cases}$$

$$g_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\gamma_1 + \gamma_4)e^{\gamma_5(t-s)} - (\gamma_1 + \gamma_5)e^{\gamma_4(t-s)}}{(\gamma_5 - \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_5)} & , \ t \ge s \\ \dfrac{(\gamma_4 - \gamma_5)e^{-\gamma_1(t-s)}}{(\gamma_5 - \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_4)(\gamma_1 + \gamma_5)} & , \ t \le s \end{cases}$$

$$g_3(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(\gamma_2-\gamma_4)e^{\gamma_6(t-s)}}{(\gamma_6+\gamma_4)(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)} & , \quad t \geq s \\[2ex] \dfrac{(\gamma_2+\gamma_6)e^{-\gamma_4(t-s)}-(\gamma_6+\gamma_4)e^{-\gamma_2(t-s)}}{(\gamma_6+\gamma_4)(\gamma_2+\gamma_6)(\gamma_2-\gamma_4)} & , \quad t \leq s \end{cases}$$

$$g_4(t,s) = \begin{cases} 0 & , \quad t \geq s \\[2ex] \dfrac{(\gamma_3-\gamma_5)e^{-\gamma_6(t-s)}+(\gamma_6-\gamma_3)e^{-\gamma_5(t-s)}+(\gamma_5-\gamma_6)e^{-\gamma_3(t-s)}}{(\gamma_6-\gamma_5)(\gamma_5-\gamma_3)(\gamma_6-\gamma_3)} & , \quad t \leq s. \end{cases}$$

Luego se tiene

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)ds = \int_{t_0}^{t} \theta_i(s)ds + C_i + o(1).$$

Procediendo como en la demostración del teorema (1.5.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \theta_1(s)ds &= \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_1\zeta}e^{\gamma_1(t-s)}+\frac{\gamma_1-\gamma_3}{\gamma_2\zeta}e^{\gamma_2(t-s)}+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_3\zeta}e^{\gamma_3(t-s)}\Big]P(\lambda_1,R)ds \\ &\quad + \frac{-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}\int_{t_0}^{t} P(\lambda_1,R)ds \end{aligned}$$

con $\zeta = (\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)$. Luego

$$\int_{t_0}^{t} \theta_1(s)ds = \frac{-1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}\int_{t_0}^{t} P(\lambda_1,R)ds + o(1),$$

análogamente se tiene

$$\int_{t_0}^{t} \theta_2(s)ds = \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}\int_{t_0}^{t} P(\lambda_2,R)ds + o(1) + \overline{k_1}.$$

Además

$$\int_{t_0}^{t} \theta_3(s)ds = \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}\int_{t_0}^{t} P(\lambda_3,R)ds + o(1) + \overline{k_2},$$

y también

$$\int_{t_0}^{t} \theta_4(s)ds = \frac{-1}{(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}\int_{t_0}^{t} P(\lambda_4,R)ds + o(1) + \overline{k_3}.$$

Por lo tanto

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)ds = -\prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} P(\lambda_i, R(s)ds + \overline{C_i} + o(1)$$

con $N(i) = \{1,2,3,4\} - \{i\}$, para cada $i = 1,2,3,4$.

Por lo tanto

$$y_i(t) = [1 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}exp(-\prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} P(\lambda_i, R(s))ds),$$

donde $i = 1,2,3,4$ con $N(i) = \{1,2,3,4\} - \{i\}$ y por otro lado

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= [\lambda_i + z_i(t)]y_i(t) \\ y_i^{(2)}(t) &= [\lambda_i^2 + 2\lambda_i z_i(t) + z_i^2(t) + z_i^{(1)}]y_i(t) \\ y_i^{(3)}(t) &= [\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 z_i(t) + 3\lambda_i z_i^2(t) + z_i^3(t) + 3\lambda_i z_i^{(1)}(t) \\ &\quad + z_i(t)z_i^{(1)}(t) + z_i^{(2)}(t) + 2z_i(t)]y_i(t) \end{aligned}$$

además se tiene que $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)} = o(1)$, de donde

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= [\lambda_i + o(1)]y_i(t) = [\lambda_i + o(1)]\xi, \\ y_i^{(2)}(t) &= [\lambda_i^2 + o(1)]y_i(t) = [\lambda_i^2 + o(1)]\xi \\ y_i^{(3)}(t) &= [\lambda_i^3 + o(1)]y_i(t) = [\lambda_i^3 + o(1)]\xi, \end{aligned}$$

con

$$\xi = e^{\lambda_i(t-t_0)}exp(-\prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} P(\lambda_i, R(s))ds).$$

Por lo tanto

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda^{j-1} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}exp(-\prod_{k\in N(i)} (\lambda_k - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} P(\lambda_i, R(s))ds),$$

con $N(i) = 1,2,3,4$ y $P(\lambda_i, R(t)) = \lambda_i^3 r_3(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + \lambda_i r_1(t) + r_0(t)$.

Se puede generalizar la idea anterior para perturbaciones en $L^p, p \geq 1$.

Teorema 1.7.3 *Dada la ecuación (1.2). Si se supone que*

1. $\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \mathrm{Re}\lambda_3 > \mathrm{Re}\lambda_4$, $\gamma_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\gamma_2 = \lambda_3 - \lambda_1$, $\gamma_3 = \lambda_4 - \lambda_1$, $\gamma_4 = \lambda_3 - \lambda_2$, $\gamma_5 = \lambda_4 - \lambda_2$, $\gamma_6 = \lambda_4 - \lambda_3$, *donde* λ_i, $i = 1,2,3,4$ *son las raíces características de la ecuación (1.1).*

2. $r_j \in L^p, \quad j = 0,1,2,3$ *y* $p \in]m, m+1]$ *con* $m \in I\!N - \{1\}$

Entonces la ecuación (1.2) tiene un sistema fundamental de soluciones $y_i, \quad i = 1,2,3,4,$ *tales que satisfacen (6) y en particular se tiene que*

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda^{j-1} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}exp(\int_{t_0}^{t} \varphi_{m,i}(s)ds), \quad i,j = 1,2,3,4$$

con

$$\varphi_{m,i}(t) \;=\; \sum_{l=1}^{m} \theta_{l,i}(t)$$

donde

$$\begin{aligned}
\theta_{1,i}(t) &= -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\sigma_1 ds\\
\theta_{2,i}(t) &= -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\sigma_2 ds\\
\theta_{3,i}(t) &= -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\sigma_3 ds\\
\theta_{l,i}(t) &= -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\sigma_l ds
\end{aligned}$$

donde

$$\sigma_1 \;=\; [3\lambda_i^3 r_3(s) + \lambda_i^2 r_2(s) + \lambda_i r_1(s) + r_0(s)]$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2 \;=\; & [3\lambda_i^2 r_3(s) + 2\lambda_i r_2(s) + r_1(s)]\theta_{1,i} + [3\lambda_i r_3(s) + r_2(s)]\theta_{1,i}^{(1)} + r_3(s)\theta_{1,i}^{(2)} + 3[\theta_{1,i}^{(1)}]^2\\
& + C_2\theta_{1,i}\theta_{1,i}^{(1)} + C_3\theta_{1,i}^2 + 4\theta_{1,i}\theta_{1,i}^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 \;=\; & [3\lambda_i^2 r_3(s) + 2\lambda_i r_2(s) + r_1(s)]\theta_{2,i} + [3\lambda_i r_3(s) + r_2(s)]\theta_{2,i}^{(1)} + r_3(s)\theta_{2,i}^{(2)}\\
& + 3r_3(s)\theta_{1,i}\theta_{1,i}^{(1)} + [3\lambda_i r_3(s) + r_2(s)]\theta_{1,i}^2 + 3\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}^{(1)}\theta_{3-k,i}^{(1)} + [12\lambda_i + 3a_3]\\
& \sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}\theta_{3-k,i}^{(1)} + [6\lambda_i^2 + 3\lambda_i a_3 + a_2]\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}\theta_{3-k,i} + 4\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}\theta_{3-k,i}^{(2)} + 6\theta_{1,i}^2\theta_{1,i}^{(1)}\\
& + 4\lambda_i\theta_{4,i}^3
\end{aligned}$$

$$\sigma_l \;=\; [3\lambda_i^2 r_3(s) + 2\lambda_i r_2(s) + r_1(s)]\theta_{l-1,i} + [3\lambda_i r_3(s) + r_2(s)]\theta_{l-1,i}^{(1)} + r_3(s)\theta_{l-1,i}^{(2)}$$

$$+3r_3(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}^{(1)}+[3\lambda_i r_3(s)+r_2(s)]\sum_{k=1}^{l-2}\theta_{k,i}^2\theta_{l-1-k,i}$$
$$+r_3(s)\sum_{j+m+n=l-1}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}+3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}^{(1)}\theta_{l-k,i}^{(1)}+[12\lambda_i+3a_3]$$
$$\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}^{(1)}+[6\lambda_i^2+3\lambda_i a_3+a_2]\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}+4\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}^{(2)}$$
$$+6\sum_{j+m+n=l}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}^{(1)}+4\lambda_i\sum_{j+m+n=l}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}+\sum_{j+m+n+q=l}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}\theta_{q,i}$$

Demostración. Se sabe que la ecuación (1.2) tiene soluciones de la forma (3), donde cada z_i satisface la ecuación (1.4) para $i=1,2,3,4$, note que se satisfacen las hipótesis del corolario 1, lema (1.6.1) y del teorema (1.4.1) para la ecuación (1.4) con $p\in]m,m+1]$

$$\begin{aligned}
b_0 &= 4\lambda_i^3+3\lambda_i^2a_3+2\lambda_ia_2+a_1\\
b_1 &= 6\lambda_i^2+3a_3\lambda_i,\quad b_2=4\lambda_i+a_3\\
a(t) &= -(\lambda_i^3r_3(t)+\lambda_i^2r_2(t)+\lambda_ir_1(t)+r_0(t))\\
b(t) &= -(3\lambda_i^2r_3(t)+2\lambda_ir_2(t)+r_1(t))\\
f(t) &= -(3\lambda_ir_3(t)+r_2(t))\\
h(t) &= -r_3(t);\quad p(t)=-3r_3(t);\quad q(t)=-(3\lambda_ir_3(t)+r_2(t))\\
r(t) &= -r_3(t),\quad C_1=-3,\quad C_2=-(12\lambda_i+3a_3)\\
C_3 &= -(6\lambda_i^2+3\lambda_ia_3+a_2),\quad C_4=-4,\quad C_5=-6,\quad C_6=-4\lambda_i,\quad C_7=-1.
\end{aligned}$$

Entonces por lema (1.6.1) existe z_i tal que $z_i, z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}\to 0$ cuando $t\to\infty$ $i=1,2,3,4$. Ahora como $z_i, z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}$ son acotadas, entonces $z_i, z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}\in L^\mu[t_0,\infty[$, $\forall\mu\geq p$. Luego por la observación que sigue el lema (1.6.1) es posible escribir z_i como

$$z_i(t) = \varphi_{m,i}(t)+\psi_{m+1,i}(t)$$

donde

$$\varphi_{m,i} = \sum_{l=1}^{m}\theta_{l,i}(t),$$

y

$$\theta_{1,i}(t) = -\int_{t_0}^{t}g_i(t,s)\Big\{[\lambda_i^3r_3(s)+\lambda_i^2r_2(s)+\lambda_ir_1(s)+r_0(s)]\Big\}ds$$

$$\begin{aligned}
\theta_{2,i}(t) &= -\int_{t_0}^{t} g_i(t,s)\Big\{[3\lambda_i^2 r_3(s)+2\lambda_i r_2(s)+r_1(s)]\theta_{1,i}+[3\lambda_i r_3(s)+r_2(s)]\theta_{1,i}^{(1)}\\
&\quad +r_3(s)\theta_{1,i}^{(2)}+3[\theta_{1,i}^{(1)}]^2+[12\lambda_i+3a_3]\theta_{1,i}\theta_{1,i}^{(1)}+\\
&\quad [6\lambda_i^2+3\lambda_i a_3+a_2]\theta_{1,i}^2+4\theta_{1,i}\theta_{1,i}^2\Big\}ds\\
\theta_{3,i}(t) &= -\int_{t_0}^{t} g_i(t,s)\Big\{[3\lambda_i^2 r_3(s)+2\lambda_i r_2(s)+r_1(s)]\theta_{2,i}+[3\lambda_i r_3(s)+r_2(s)]\theta_{2,i}^{(1)}\\
&\quad +r_3(s)\theta_{2,i}^{(2)}+3r_3(s)\theta_{1,i}\theta_{1,i}^{(1)}+[3\lambda_i r_3(s)+r_2(s)]\theta_{1,i}^2\\
&\quad +3\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}^{(1)}\theta_{3-k,i}^{(1)}+[12\lambda_i+3a_3]\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}\theta_{3-k,i}^{(1)}\\
&\quad +[6\lambda_i^2+3\lambda_i a_3+a_2]\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}\theta_{3,i}+4\sum_{k=1}^{2}\theta_{k,i}\theta_{3-k,i}^{(2)}+6\theta_{1,i}^2\theta_{1,i}^{(1)}+4\lambda_i\theta_{j,i}\theta_{1,i}^3\Big\}ds\\
\theta_{l,i}(t) &= -\int_{t_0}^{t} g_i(t,s)\Big\{[3\lambda_i^2 r_3(s)+2\lambda_i r_2(s)+r_1(s)]\theta_{l-1,i}+[3\lambda_i r_3(s)+r_2(s)]\theta_{l-1,i}^{(1)}\\
&\quad +r_3(s)\theta_{l-1,i}^{(2)}+3r_3(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}^{(1)}+[3\lambda_i r_3(s)+r_2(s)]\sum_{k=1}^{l-2}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}\\
&\quad +r_3(s)\sum_{j+m+n=l-1}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}+3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}^{(1)}\theta_{l-k,i}^{(1)}+[12\lambda_i+3a_3]\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}^{(1)}\\
&\quad +[6\lambda_i^2+3\lambda_i a_3+a_2]\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}+4\sum_{k=1}^{l-1}\theta_{k,i}\theta_{l-k,i}^{(2)}+6\sum_{j+m+n=l-1}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}^{(1)}\\
&\quad +4\lambda_i\sum_{j+m+n=l-1}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}+\sum_{j+m+n+q=l-1}\theta_{j,i}\theta_{m,i}\theta_{n,i}\theta_{q,i}\Big\},\quad 4\le l\le m.
\end{aligned}$$

Con $\theta_{l,i}\in L^{p/l}$, $l=1,2,\cdot,m$ y $\psi_{m+1,i}\in L^1$, entonces

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)ds = \int_{t_0}^{t}\varphi_{m,i}(s)ds+C_i+o(1),\quad i1,2,3,4.$$

Así

$$y_i(t)=[1+o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)}\exp(\int_{t_0}^{t}\varphi_{m,i}(s)ds)\quad \text{para} i=1,2,3,4.$$

Como

$$\begin{aligned}
y_i^{(1)}(t) &= [\lambda_i+z_i(t)]y_i(t)\\
y_i^{(2)}(t) &= [\lambda_i^2+2\lambda_i z_i(t)+z_i^2(t)+z_i^{(1)}(t)]y_i(t)\\
y_i^{(3)}(t) &= [\lambda_i^3+3\lambda_i^2 z_i(t)+3\lambda_i z_i^2(t)+z_i^3(t)\\
&\quad +3\lambda_i z_i^{(1)}(t)+z_i(t)z_i^{(1)}(t)+z_i^{(2)}(t)+2z_i(t)]y_i(t)
\end{aligned}$$

y $z_i, z_i^{(1)}, z_i^{(2)} = o(1)$, entonces

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) &= [\lambda_i + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp(\int_{t_0}^t \varphi_{m,i}(s)ds) \\ y_i^{(2)}(t) &= [\lambda_i^2 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp(\int_{t_0}^t \varphi_{m,i}(s)ds) \\ y_i^{(3)}(t) &= [\lambda_i^3 + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp(\int_{t_0}^t \varphi_{m,i}(s)ds). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_i^{(j-1)}(t) = [\lambda_i^{(j-1)} + o(1)]e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp(\int_{t_0}^t \varphi_{m,i}(s)ds) \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4.$$

■

Capítulo 2

Ejemplos de aplicación

En los ejemplos se usará el siguiente lema.

Lema 2.0.1 *Dados $\varepsilon > 0$ y una función $f : [t_0, \infty[\to I\!R$, localmente integrable; si además existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se satisface*

$$\int_t^{t+\varepsilon} |f(s)| ds \;\leq\; \delta(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_0.$$

Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds &\leq \delta(\varepsilon)(1-e^{-\alpha})^{-1}, \qquad \forall t \geq t_0 \\ \int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|f(s)|ds &\leq \delta(\varepsilon)(1-e^{-\alpha})^{-1}, \qquad \forall t \geq t_0 \end{aligned}$$

Demostración. El intervalo $[t_0, t]$ puede ser particionado en subintervalos de longitud $\varepsilon > 0$, luego

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds &= \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds + \int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+2\varepsilon} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds \\ &\quad + \int_{t_0+2\varepsilon}^{t_0+3\varepsilon} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds + \ldots + \int_{t_0+n\varepsilon}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds \\ &= e^{-\alpha t}\Big[\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds + \int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+2\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds \\ &\quad + \int_{t_0+2\varepsilon}^{t_0+3\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds + \ldots + \int_{t_0+(n-1)\varepsilon}^{t_0+n\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds \\ &\quad + \int_{t_0+n\varepsilon}^{t} e^{\alpha s}|f(s)|ds\Big]. \end{aligned}$$

Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds &= e^{\alpha s}\int_{t_0}^{s}|f(\tau)|d\tau\Big]_{t_0}^{t_0+\varepsilon} - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\alpha e^{\alpha s}\int_{t_0}^{s}|f(\tau)|d\tau ds \\
&= e^{\alpha(t_0+\varepsilon)}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}|f(\tau)|d\tau| - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}\int_{\tau}^{t_0+\varepsilon} e^{\alpha s}|f(\tau)|\alpha ds d\tau \\
&= e^{\alpha(t_0+\varepsilon)}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}|f(\tau)|d\tau - (e^{\alpha(t_0+\varepsilon)} - e^{\alpha\tau})\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}|f(\tau)|d\tau \\
&= e^{\alpha\tau}\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}|f(\tau)|d\tau \leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha\tau} \leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha(t_0+\varepsilon)} \leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha(t_0+1)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha(t_0+1)}.$$

Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+2\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds &\leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha(t_0+2)} \\
\int_{t_0+2\varepsilon}^{t_0+3\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds &\leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha(t_0+3)} \\
&\vdots \\
\int_{t_0+(n-1)\varepsilon}^{t_0+n\varepsilon} e^{\alpha s}|f(s)|ds &\leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha(t_0+n)}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_{t_0+n\varepsilon}^{t} e^{\alpha s}|f(s)|ds &= e^{\tau}\int_{t_0+n\varepsilon}^{t}|f(\tau)|d\tau \leq e^{t}\int_{t_0+n\varepsilon}^{t}|f(\tau)|d\tau \\
&\leq e^{t}\int_{t_0+n\varepsilon}^{t_0+(n+1)\varepsilon}|f(\tau)|d\tau \leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha t},
\end{aligned}$$

y

$$\int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)\Big[e^{\alpha t} + e^{\alpha(t_0+1)} + e^{\alpha(t_0+2)} + \ldots + e^{\alpha(t_0+n)}\Big]$$

Por otro lado

$$t_0 + 2 \leq t \ \Rightarrow \ e^{\alpha(t_0+1)} \leq e^{\alpha(t-1)}$$

y además

$$\begin{aligned}
e^{\alpha(t_0+2)} &\leq e^{\alpha(t-2)} \\
e^{\alpha(t_0+3)} &\leq e^{\alpha(t-3)} \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Ahora se elige t de modo que $t \geq t_0 + 2n$, con $n \in I\!N \Rightarrow e^{\alpha(t_0+n)} \leq e^{\alpha(t-n)}$.

Luego

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}|f(s)|ds &\leq \delta(\varepsilon)\left[e^{\alpha t} + e^{\alpha(t_0-1)} + e^{\alpha(t_0-2)} + \ldots + e^{\alpha(t_0-(n-1))} + e^{\alpha(t-n)}\right] \\ &\leq \delta(\varepsilon)\sum_{i=0}^{n} e^{\alpha(t-i)}\end{aligned}$$

De donde

$$\int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)\sum_{i=0}^{n} e^{\alpha(t-i)} \leq \delta(\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty} e^{\alpha(t-i)}$$

y entonces

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha i}.$$

Pero

$$\sum_{i=0}^{\infty}(e^{-\alpha})^i = \frac{1}{(1-e^{-\alpha})} = (1-e^{-\alpha})^{-1}$$

y

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)(1-e^{-\alpha})^{-1}.$$

Análogamente se prueba que

$$\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha(t+i)} = \delta(\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha i}$$

Por lo tanto

$$\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|f(s)|ds \leq \delta(\varepsilon)(1-e^{-\alpha})^{-1} \quad \forall t \geq t_0.$$

□

Como resultado se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.0.1 *Sean $\alpha, t_0 > 0$, $p \geq 1$. Entonces*

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \sin s^p ds, \quad \int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} \sin s^p ds \to 0, \quad \textit{cuando } t \to \infty$$

Ahora en el siguiente ejemplo se verá la utilidad del teorema (1.2.1).

2.1 Ejemplo 1

Considere la ecuación diferencial escalar

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + [\sin(t^2) + 4]y = 0$$

Sea $f(t) = \sin(t^2)$, claramente $f \not\to 0$ cuando $t \to \infty$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sin(t^2)dt &= \int_0^\varepsilon \sin(t^2)dt + \int_\varepsilon^\infty \sin(t^2)dt \\
\int_0^\varepsilon \sin(t^2)dt &= \int_0^{\varepsilon^2} \frac{\sin w}{w^{1/2}}dw \leq \int_0^{\varepsilon^2} \frac{1}{w^{1/2}}dw = \varepsilon \\
&\Rightarrow \left|\int_0^\varepsilon \sin(t^2)dt\right| < \infty
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_\varepsilon^\infty \sin(t^2)dt = \lim_{s\to\infty} \int_\varepsilon^s \frac{1}{2t}\sin(t^2)2tdt,$$

integrando por partes se tiene

$$\int_\varepsilon^\infty \sin(t^2)dt = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{\cos t^2}{2t}\Big]_\varepsilon^s\right) + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos t^2}{t^2}dt$$

y como $\lim_{s\to\infty} \dfrac{\cos s^2}{s} = 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos s^2}{s^2}ds\right| &\leq \int_\varepsilon^\infty \frac{|\cos s^2|}{s^2}ds \leq \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{s^2}ds < \infty \\
&\Rightarrow \left|\int_\varepsilon^\infty \sin t^2 dt\right| < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\left|\int_0^\infty \sin t^2 dt\right| < \infty$. Luego f es condicionalmente integrable. Se puede probar que $f \notin L^p[0,\infty]$, $\forall p \geq 1$, acotando inferiormente por una serie divergente. Se observa que $f^{(1)} \notin L^1[0,\infty]$, entonces no se puede usar los teoremas 1.5.1, 1.7.1 y 1.7.2, tampoco se puede usar el teorema de Eastham. Sin embargo se satisfacen las condiciones del teorema 2, con $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -2, r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) = 0; r_0(t) = \sin t^2$ y por el corolario del lema anterior se tiene que $G(r_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$ Entonces se tiene un sistema fundamental de soluciones

$$y_1(t) \;=\; [1 + o(1)]e^{2t}exp\Big(-\frac{1}{12}\int_0^t [\sin s^2 - (z_1^1(s))^2 + 19z_1^2(s) + 8z_1^3(s) + z_1^4(s)]ds\Big)$$

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= [1+o(1)]e^t exp\Big(\frac{1}{6}\int_0^t [\sin s^2 - (z_2^1(s))^2 + z_2^2(s) + 4z_2^3(s) + z_2^4(s)]ds\Big) \\
y_3(t) &= [1+o(1)]e^{-t} exp\Big(-\frac{1}{6}\int_0^t [\sin s^2 - (z_3^1(s))^2 + z_3^2(s) - 4z_3^3(s) + z_3^4(s)]ds\Big) \\
y_4(t) &= [1+o(1)]e^{-2t} exp\Big(\frac{1}{12}\int_0^t [\sin s^2 - (z_4^1(s))^2 + 19z_4^2(s) - 8z_4^3(s) + z_4^4(s)]ds\Big)
\end{aligned}
$$

Pero como $\Big|\int_0^\infty \sin(s^2)ds\Big| < \infty$, entonces

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= [1+o(1)]e^{2t} exp\Big(-\frac{1}{12}\int_0^t [-(z_1^1(s))^2 + 19z_1^2(s) + 8z_1^3(s) + z_1^4(s)]ds\Big) \\
y_2(t) &= [1+o(1)]e^t exp\Big(\frac{1}{6}\int_0^t [-(z_2^1(s))^2 + z_2^2(s) + 4z_2^3(s) + z_2^4(s)]ds\Big) \\
y_3(t) &= [1+o(1)]e^{-t} exp\Big(-\frac{1}{6}\int_0^t [-(z_3^1(s))^2 + z_3^2(s) - 4z_3^3(s) + z_3^4(s)]ds\Big) \\
y_4(t) &= [1+o(1)]e^{-2t} exp\Big(\frac{1}{12}\int_0^t [-(z_4^1(s))^2 + 19z_4^2(s) - 8z_4^3(s) + z_4^4(s)]ds\Big)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
z_1(t), z_1^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_0^t e^{-\beta(t-s)}|\sin(s^2)|ds\Big) \\
z_2(t), z_2^{(1)}(t), z_3^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_0^t e^{-\beta(t-s)}|\sin(s^2)|ds + \int_y^\infty e^{\beta(t-s)}|\sin(s^2)|ds\Big) \\
z_4(t), z_4^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|\sin(s^2)|ds\Big), \quad \text{con} \quad 0 < \beta \leq 1/2.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente ejemplo muestra una función f ,para un p dado,con $p \geq 1$; tal que $f \to 0$ cuando $t \to \infty$, $f \notin L^p$ y con $f^{(1)} \in L^1$

2.2 Ejemplo 2

Considere la ecuación diferencial escalar

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 13y^{(2)} - 14y^{(1)} + \Big[\frac{\eta}{x^{1/(p+1)}[\sin x + 2]} + 24\Big]y = 0, \quad p \geq 1, \quad \eta = 3^p.$$

Hagamos

$$f(t) = \frac{\eta}{t^{1/(p+1)}[\sin(t) + 2]}, \quad t \in [1, \infty[$$

claramente se tiene que $f \to 0$ cuando $f \to \infty$. Por otro lado para un p dado con $p \geq 1$, y $\forall t \geq 1$ se tiene

$$t^{p/(p+1)} \leq t \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{t} < \frac{1}{t^{p/(p+1)}}$$

y como

$$\frac{|\sin(t)|}{t} \leq \frac{\eta}{t^{p/(p+1)}|\sin(t)+2|^p}$$

luego

$$\frac{\sin(t)}{t} \leq \Big(\frac{\eta}{t^{1/(p+1)}|\sin(t)+2|}\Big)^p$$

Por lo tanto $f \notin L^p[1,+\infty[\quad \forall p \geq 1$ En lo que sigue se ve que $f^{(1)} \in L^1[1,+\infty[$ En efecto

$$f^{(1)}(t) = -\eta\Big[\frac{\cos(t)}{t^{1/(p+1)}[\sin(t)+2]^2} + \Big(\frac{1}{p+1}\Big)\Big(\frac{1}{t^{1/(p+1)+1}[\sin(t)+2]}\Big)\Big]$$

Se sabe que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin(t)+2|}{t^{1/(p+1)+1}}dt < \infty$, ya que $\dfrac{1}{p+1}+1>1$
Por lo tanto

$$\Big|\int_1^\infty \frac{1}{t^{1/(p|\sin(t)+2|+1)+1}|\sin(t)+2|}\Big| < \infty$$

Por otro lado

$$\frac{|\cos(t)|}{t^{1/(p+1)+1}|\sin(t)+2|^2} \leq \frac{1}{t^{1/(p+1)+1}|\sin(t)+2|^2}$$

Entonces se tiene que

$$\Big|\int_1^\infty \frac{1}{t^{1/(p+1)+1}|\sin(t)+2|^2}dt\Big| < \infty \Rightarrow \Big|\int_1^\infty \frac{|\cos(t)|}{t^{1/(p+1)+1}|\sin(t)+2|^2}dt\Big| < \infty,$$

es decir se ha mostrado que $f^{(1)} \in L^1[1,+\infty[$ y $f \notin L^p[1,+\infty[\quad \forall p \geq 1$;sin embargo se satisfacen las condiciones del teorema 3, con $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4,\quad r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) = 0;\quad r_0(t) = \dfrac{\eta}{t^{1/(p+1)+1}[\sin(t)+2]}$, entonces se tiene un sistema fundamental de soluciones

$$y_1(t) = [1+o(1)]e^{3(t-1)}exp\Big(-\frac{1}{70}\int_1^t \Big[\frac{\eta}{s^{1/(p+1)}[\sin(s)+2]} + (z_1^1(s))^2 + 85z_1^2(s)$$

$$
\begin{aligned}
&+12z_1^3(s) + z_1^4(s)\Big]ds\Big)\\
y_2(t) &= [1+o(1)]e^{t-1}exp\Big(\frac{1}{30}\int_1^t\Big[\frac{\eta}{s^{1/(p+1)}[\sin(s)+2]} + (z_2^1(s))^2 + 25z_2^2(s)\\
&+4z_2^3(s) + z_2^4(s)\Big]ds\Big)\\
y_3(t) &= [1+o(1)]e^{-2(t-1)}exp\Big(-\frac{1}{30}\int_1^t\Big[\frac{\eta}{s^{1/(p+1)}[\sin(s)+2]} + (z_3^1(s))^2 + 25z_3^2(s)\\
&-8z_3^3(s) + z_3^4(s)\Big]ds\Big)\\
y_4(t) &= [1+o(1)]e^{-4(t-1)}exp\Big(\frac{1}{70}\int_0^t\Big[\frac{\eta}{s^{1/(p+1)}[\sin(s)+2]} + (z_4^1(s))^2 + 85z_4^2(s)\\
&-16z_4^3(s) + z_4^4(s)\Big]ds\Big),
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
z_1(t), z_1^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}}{s^{1/(p+1)}|\sin(s^2)|}ds\Big)\\
z_2(t), z_2^{(1)}(t), z_3^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}|\sin(s^2)|}ds + \int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}|\sin(s^2)|}ds\Big)\\
z_4(t), z_4^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}|\sin(s^2)|}ds\Big), \quad \text{con} \quad 0<\beta\leq 1
\end{aligned}
$$

Sean

$$
\begin{aligned}
A_1(t) &= \int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}}ds\\
A_2(t) &= \int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}}ds\\
A_3(t) &= A_1(t) + A_2(t)
\end{aligned}
$$

Integrando por partes, se tiene

$$
\begin{aligned}
A_1(t) &= \frac{\eta e^{-\beta(t-s)}}{\beta s^{1/(p+1)}}\Big]_1^t + \frac{\eta}{\beta(p+1)}\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}}{s^{(p+2)/(p+1)}}ds\\
A_1(t) &= \frac{\eta}{\beta t^{1/(p+1)}} - \frac{\eta e^{-\beta(t-1)}}{\beta} + \frac{\eta}{\beta(p+1)}\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}}{s^{(p+2)/(p+1)}}ds
\end{aligned}
$$

del mismo modo

$$
A_2(t) = \frac{\eta}{\beta t^{1/(p+1)}} - \frac{\eta}{\beta(p+1)}\int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}}{s^{(p+2)/(p+1)}}ds
$$

finalmente

$$A_3(t) = \frac{2\eta}{\beta t^{1/(p+1)}} + \frac{\eta}{\beta(p+1)}\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}}{s^{(p+2)/(p+1)}} - \frac{\eta}{\beta(p+1)}\int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}}{s^{(p+2)/(p+1)}}ds.$$

Por otro lado

$$|\sin(s)+2| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{|\sin(s)+2|} \leq 1$$

entonces

$$\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}|\sin(s)+2|}ds \leq \eta\int_1^t \frac{e^{-\beta(t-s)}}{s^{1/(p+1)}}ds.$$

También

$$\int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}\eta}{s^{1/(p+1)}|\sin(s)+2|}ds \leq \eta\int_t^\infty \frac{e^{\beta(t-s)}}{s^{1/(p+1)}}ds$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_1^t z_i^2(s)ds, \quad \int_1^t [z_i^{(1)}(s)]^2 ds &= \mathcal{O}\Big(\int_1^t \frac{1}{s^{2/(p+1)}}ds\Big) \\ \int_1^t z_i^3(s)ds &= \mathcal{O}\Big(\int_1^t \frac{1}{s^{3/(p+1)}}ds\Big) \\ \int_1^t z_i^4(s)ds &= \mathcal{O}\Big(\int_1^t \frac{1}{s^{4/(p+1)}}ds\Big) \end{aligned}$$

Luego con la técnica de este trabajo,se tienen formulas asintóticas para las soluciones de la ecuación dada.
En lo que sigue se verá la ventaja de la técnica escalar, con respecto a sistemas, específicamente comparando con el teorema de Eastham.

Sea la ecuación diferencial

$$y^{(4)} + [a_3 + r_3(t)]y^{(3)} + [a_2 + r_2(t)]y^{(2)} + [a_1 + r_1(t)]y^{(1)} + [a_0 + r_0(t)]y = 0$$

considerando

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= y^{(1)} \\ (y^{(1)})^{(1)} &= y^{(2)} \\ (y^{(2)})^{(2)} &= y^{(3)} \\ (y^{(3)})^{(1)} &= -[a_3 + r_3(t)]y^{(3)} - [a_2 + r_2(t)]y^{(2)} - [a_1 + r_1(t)]y^{(1)} - [a_0 + r_0(t)]y. \end{aligned}$$

Escribiendo matricialmente

$$Y^{(1)} = [A + B(t)]Y$$

donde $Y = [y\ y^{(1)}\ y^{(2)}\ y^{(3)}]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz A, son las raíces del polinomio característico de la ecuación (1), esto permite diagonalizar la matriz A, ya que todas las raíces son distintas. Sea T la matriz dada por

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix}$$

con

$$|T| = (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Sea

$$\begin{aligned} Y = TX \ \Rightarrow \ TX^{(1)} &= Y^{(1)} = [A + B(t)]Y \\ TX^{(1)} &= [A + B(t)]TX. \end{aligned}$$

Luego se tiene el nuevo sistema

$$X^{(1)} = [T^{-1}AT + T^{-1}B(t)T]X$$

con

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\lambda_2\lambda_3^2\lambda_4^3 + \lambda_2^2\lambda_3^3\lambda_4 + \lambda_2^3\lambda_3\lambda_4^2) - (\lambda_2^3\lambda_3^2\lambda_4 + \lambda_4^2\lambda_3^3\lambda_2 + \lambda_4^3\lambda_3\lambda_2^2) \\ a_{21} &= (\lambda_1^3\lambda_3^2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3^3\lambda_4^2 + \lambda_1^2\lambda_3\lambda_4^3) - (\lambda_1\lambda_3^2\lambda_4^2 + \lambda_1^2\lambda_3^3\lambda_4 + \lambda_1^3\lambda_3\lambda_4^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{31} &= (\lambda_1\lambda_2^2\lambda_4^3 + \lambda_1^2\lambda_2^3\lambda_4 + \lambda_1^3\lambda_2\lambda_4^2) - (\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2^3\lambda_4^2 + \lambda_1^2\lambda_2\lambda_4^3) \\
a_{41} &= (\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^3\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^3) - (\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2^3\lambda_3 + \lambda_1^3\lambda_2\lambda_3^2) \\
a_{12} &= \lambda_3^2\lambda_4^2(\lambda_3 - \lambda_4) + \lambda_2^2\lambda_4^2(\lambda_4 - \lambda_2) + \lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_2 - \lambda_3) \\
a_{22} &= \lambda_3^2\lambda_4^2(\lambda_4 - \lambda_3) + \lambda_1^2\lambda_4^2(\lambda_1 - \lambda_4) + \lambda_1^2\lambda_3^2(\lambda_3 - \lambda 1) \\
a_{32} &= \lambda_2^2\lambda_4^2(\lambda_2 - \lambda_4) + \lambda_1^2\lambda_4^2(\lambda_4 - \lambda_1) + \lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_2 - \lambda_1) \\
a_{42} &= \lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_1^2\lambda_3^2(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1 - \lambda_2) \\
a_{13} &= \lambda_3\lambda_4(\lambda_4^2 - \lambda_3^2) + \lambda_2\lambda_4(\lambda_2^2 - \lambda_4^2) + \lambda_2\lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \\
a_{23} &= \lambda_3\lambda_4(\lambda_3^2 - \lambda_4^2) + \lambda_1\lambda_4(\lambda_4^2 - \lambda_1^2) + \lambda_1\lambda_3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2) \\
a_{33} &= \lambda_2\lambda_4(\lambda_4^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1\lambda_4(\lambda_1^2 - \lambda_4^2) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \\
a_{43} &= \lambda_2\lambda_3(\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + \lambda_1\lambda_3(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\
a_{14} &= \lambda_3\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_4) + \lambda_2\lambda_4(\lambda_4 - \lambda_2) + \lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_3) \\
a_{24} &= \lambda_3\lambda_4(\lambda_4 - \lambda_3) + \lambda_1\lambda_4(\lambda_1 - \lambda_4) + \lambda_1\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) \\
a_{34} &= \lambda_2\lambda_4(\lambda_2 - \lambda_4) + \lambda_1\lambda_4(\lambda_4 - \lambda_1) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) \\
a_{44} &= \lambda_2\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_2) + \lambda_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)
\end{aligned}
$$

$$
\Omega = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}
$$

Además

$$
T^{-1}B(t)T = (r_{ij}(t)) = R(t),
$$

donde

$$
r_{ij}(t) = \frac{-a_{i4}[r_0(t) + \lambda_j t_1(t) + \lambda_j^2 r_2(t) + \lambda_j^3 r_3(t)]}{|T|}, \quad 1 \leq j, i \leq 4
$$

Usando el teorema de Eastham se tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$
X_i(t) = [e_k + o(1)]exp(\int_{t_0}^{t} \mu_i(s)ds) \quad i = 1, 2, 3, 4
$$

donde los $\mu_i(s)$ son los valores propios de la matriz $\Omega + R(t)$,que para nuestro ejemplo viene dada por

$$
\Omega + R(t) = \begin{bmatrix} 3 - 30r_0(t) & -30r_0(t) & -30r_0(t) & -30r_0(t) \\ 70r_0(t) & 1 + 70r_0(t) & 70r_0(t) & 70r_0(t) \\ -70r_0(t) & -70r_0(t) & -2 - 70r_0(t) & -70r_0(t) \\ 30r_0(t) & 30r_0(t) & 30r_0(t) & -4 + 30r_0(t) \end{bmatrix}
$$

Con polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^3[13 - 280r_0(t)] + \lambda[38 - 580r_0(t)] - [24 + 420r_0(t)],$$

entonces el sistema original tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$Y_i(t) = [1 + o(1)]exp(\int_{t_0}^{t} \mu_i(s)ds) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Notése que a pesar que en el ejemplo $r_1(t) = r_2(t) = r_3(t) = 0$ encontrar los valores propios μ_i de la matriz $\Omega + R(t)$, es decir encontrar las raíces del polinomio P, es muy complicado. Este hecho pone de manifiesto la ventaja del método expuesto en este trabajo.

El siguiente ejemplo, muestra una función f,que para un p dado,con $p \geq 1$, $f \notin L^p$ y $f^{(1)} \notin L^1$.

2.3 Ejemplo 3

Considere la ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 10y^{(3)} + 35y^{(2)} + 50y^{(1)} + \Big[\frac{\gamma}{\log(t)[\cos(t) + 2]} + 24\Big]y = 0, \quad \gamma > 0$$

donde

$$r_0(t) = \frac{\gamma}{\log(t)[\cos(t) + 2]}$$

entonces se tiene que

$$\frac{\gamma}{3\log(t)} \leq \frac{\gamma}{\log(t)|\cos(t) + 2|}$$

se sabe que $\frac{1}{\log(t)} \notin L^p[2, \infty[\quad p \geq 1$, por lo tanto $r_0 \notin L^p[2, \infty[\quad \forall p \geq 1$, y se tiene que

$$r_0^{(1)} = -\gamma\Big[\frac{1}{t(\log(t))^2[\cos(t) + 2]} + \frac{\sin(t)}{\log(t)[\cos(t) + 2]^2}\Big]$$

y como

$$\Big|\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\log(t))^2}dt\Big| < \infty$$

entonces se tiene que

$$\Big|\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\log(t))^2|\cos(t) + 2|}\Big| < \infty.$$

Por otro lado

$$\frac{|\sin(t)|}{9\log(t)} \leq \frac{|\sin(t)|}{\log(t)|\cos(t)+2|^2}$$

pero $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{\log(t)} \notin L^p[2,\infty[\quad \forall p \geq 1$, de donde $\displaystyle\int_2^\infty \frac{|\sin(t)|}{\log(t)|\cos(t)+1|^2}dt$ diverge. Por lo tanto $r_0^{(1)} \notin L^1[2,\infty[$; luego no puede usarse el resultado de Eastham, tampoco los teoremas de Levinson, Hartman-Witner. Sin embargo se satisfacen las condiciones del teorema 3 con $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -4, \quad r+1(t) = r_2(t) = r_3(t) = 0$; $\dfrac{\gamma}{\log(t)[\cos(t)+2]}$, entonces se tiene un sistema fundamental de soluciones

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= [1+o(1)]e^{-(t-2)}exp\Big(-\frac{1}{6}\int_2^t\Big[\frac{\gamma}{\log(s)[\cos(t)+2]} - (z_1^1(s))^2 + 11z_1^2(s) \\
&\quad -4z_1^3(s) + z_1^4(s)\Big]ds\Big). \\
y_2(t) &= [1+o(1)]e^{-2(t-2)}exp\Big(\frac{1}{2}\int_2^t\Big[\frac{\gamma}{\log(s)[\cos(s)+2]} - (z_2^1(s))^2 - 2z_2^2(s) \\
&\quad -8z_2^3(s) + z_2^4(s)\Big]ds\Big). \\
y_3(t) &= [1+o(1)]e^{-3(t-2)}exp\Big(-\frac{1}{2}\int_2^t\Big[\frac{\gamma}{\log(s)[\cos(s)+2]} - (z_3^1(s))^2 - z_3^2(s) \\
&\quad -12z_3^3(s) + z_3^4(s)\Big]ds\Big). \\
y_4(t) &= [1+o(1)]e^{-4(t-2)}exp\Big(\frac{1}{6}\int_2^t\Big[\frac{\gamma}{\log(s)[\cos(s)+2]} - (z_4^1(s))^2 + 11z_4^2(s) \\
&\quad -16z_4^3(s) + z_4^4(s)\Big]ds\Big),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
z_1(t), z_1^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_2^t \frac{\gamma e^{-\beta(t-s)}}{\log(s)|\cos(s)+2|}ds\Big) \\
z_2(t), z_2^{(1)}(t), z_3(t), z_3^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_2^t \frac{\gamma e^{-\beta(t-s)}}{\log(s)|\cos(s)+2|}ds + \int_t^\infty \frac{\gamma e^{\beta(t-s)}}{\log(s)|\cos(s)+2|}ds\Big) \\
z_4(t), z_4^{(1)}(t) &= \mathcal{O}\Big(\int_t^\infty \frac{\gamma e^{\beta(t-s)}}{\log(s)|\cos(s)+2|}ds\Big), \quad \text{con} \quad 0 < \beta \leq 1/2.
\end{aligned}$$

Otra situación interesante, se presenta, cuando para un p dado, con $p \geq 1$, $f \notin L^p$,pero existe un $q > p$ tal que $f \in L^q$,el siguiente ejemplo aborda tal situación

2.4 Ejemplo 4

Considere la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + \left[\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{p}} + 4\right]y = 0$$

donde $r_0(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{1/p}$, claramente $r_0 \notin L^p[2, +\infty[$, para un cierto p dado, con $p \geq 1$ sin embargo existe $q > p$ tal que $r_0 \in L^q[2, +\infty[$. Si $p \in [1, 2[$, se tiene que $q \in [2, \infty[$; entonces por teorema 1.7.2, existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= [1 + o(1)]e^{2(t-1)}exp\Big(-\frac{1}{12}\int_1^t \left(\frac{1}{s}\right)^{1/p} ds\Big)\\
y_2(t) &= [1 + o(1)]e^{(t-1)}exp\Big(\frac{1}{6}\int_1^t \left(\frac{1}{s}\right)^{1/p} ds\Big)\\
y_3(t) &= [1 + o(1)]e^{-(t-1)}exp\Big(-\frac{1}{6}\int_1^t \left(\frac{1}{s}\right)^{1/p} ds\Big)\\
y_4(t) &= [1 + o(1)]e^{-2(t-1)}exp\Big(\frac{1}{12}\int_1^t \left(\frac{1}{s}\right)^{1/p} ds\Big)
\end{aligned}$$

Ahora si $p \in [2, \infty[$, $\quad q \in]m, m+1]$, $\quad m \in (I\!N - \{1\})$; entonces se tiene las fórmulas dadas por el teorema 1.7.3. Calculemos estas fórmulas para un cierto p

$$\begin{aligned}
\text{Si } \ p &= 2\\
y_1(t) &= [1 + o(1)]e^{2(t-1)}exp\Big(\int_1^t \Big(\Theta_{1,1}(s) + \Theta_{2,1}(s)\Big)ds\Big)\\
\Theta_{1,1}(s) &= \int_2^s \Big[\frac{-18e^{-3(s-\tau)} + 16e^{-4(s-\tau)} + 2e^{-(s-\tau)}}{6}\Big]\tau^{1/2}d\tau\\
\Theta_{2,1}(s) &= \int_1^s \Big[\frac{3e^{-3(s-\tau)} - 2e^{-4(s-\tau)} - e^{-(s-\tau)}}{6}\Big]\\
&\Big(3\Big(\int_2^\tau \frac{54e^{-3(\tau-\mu)} + 64e^{-4(\tau-\mu)} + 2e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)^2\\
&+24\Big(\int_2^\tau \frac{-18e^{-3(\tau-\mu)} + 16e^{-4(\tau-\mu)} + 2e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)\\
&\Big(\int_2^\tau \frac{54e^{-3(\tau-\mu)} + 64e^{-4(\tau-\mu)} + 2e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)\\
&+19\Big(\int_1^\tau \frac{-18e^{-3(\tau-\mu)} + 16e^{-4(\tau-\mu)} + 2e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)^2\\
&+4\Big(\int_1^\tau \frac{-18e^{-3(\tau-\mu)} + 16e^{-4(\tau-\mu)} + 2e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)
\end{aligned}$$

$$
\Big(\int_1^{\tau} \frac{162e^{-3(\tau-\mu)} + 256e^{-4(\tau-\mu)} + 2e^{-(\tau-\mu)}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big) \Big) d\tau
$$

$$
y_2(t) \;=\; [1+o(1)]e^{(t-1)} exp\Big(\int_1^t \Big(\Theta_{1,2}(s) + \Theta_{2,2}(s) \Big) ds \Big),
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\Theta_{1,2}(s) \;&=\; \int_1^s \Big[\frac{-8e^{-2(s-\tau)} + 9e^{-3(s-\tau)}}{6} \Big] \tau^{1/2} d\tau \\
&\quad + \int_s^{\infty} -\frac{e^{s-\tau}}{6} \tau^{1/2} d\tau \\
\Theta_{2,2}(s) \;&=\; \int_1^s \Big[\frac{4e^{-2(s-\tau)} - 3e^{-3(s-\tau)}}{12} \Big] A_{2,2}(\tau) d\tau + \\
&\quad \int_s^{\infty} \frac{e^{(s-\tau)}}{12} A_{2,2}(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
A_{2,2}(\tau) \;&=\; 3\Big(\int_1^{\tau} \Big[\frac{-16e^{-2(\tau-\mu)+27e^{-3(\tau-\mu)}}}{6} \Big] \mu^{1/2} d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{\tau-\mu}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big)^2 \\
&\quad +12\Big(\int_1^{\tau} \frac{-8e^{-2(\tau-\mu)} + 9e^{-3(\tau-\mu)}}{6} \mu^{1/2} d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-e^{\tau-\mu}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big) \\
&\quad \Big(\int_1^{\tau} \frac{-16e^{-2(\tau-\mu)} + 27e^{-3(\tau-\mu)}}{6} \mu^{1/2} d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{\tau-\mu}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big) \\
&\quad +\Big(\int_1^{\tau} \frac{-8e^{-2(\tau-\mu)} + 9e^{-3(\tau-\mu)}}{6} \mu^{1/2} d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-e^{\tau-\mu}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big)^2 \\
&\quad +4\Big(\int_1^{\tau} \frac{-8e^{-2(\tau-\mu)} + 9e^{-3(\tau-\mu)}}{6} \mu^{1/2} d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-e^{\tau-\mu}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big) \\
&\quad \Big(\int_1^{\tau} \frac{-32e^{-2(\tau-\mu)} + 86e^{-3(\tau-\mu)}}{6} \mu^{1/2} d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-e^{\tau-\mu}}{6} \mu^{1/2} d\mu \Big).
\end{aligned}
$$

Ahora

$$
y_3(t) \;=\; [1+o(1)]e^{-(t-1)} exp\Big(\int_1^t \Big(\Theta_{1,3}(s) + \Theta_{2,3}(s) \Big) ds \Big)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\Theta_{1,3}(s) \;&=\; \int_1^s \frac{e^{-(s-\tau)}}{6} \tau^{1/2} d\tau + \int_s^{\infty} \Big[\frac{-3e^{-3(s-\tau)} + 4e^{2(s-\tau)}}{6} \Big] \tau^{1/2} d\tau \\
\Theta_{2,3}(s) \;&=\; \int_1^s \frac{-e^{-(s-\tau)}}{12} A_{2,3}(\tau) d\tau + \int_s^{\infty} \Big[\frac{3e^{3(s-\tau)} - 4e^{2(s-\tau)}}{12} \Big] A_{2,3}(\tau) d\tau
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
A_{2,3}(\tau) &= (3\Big(\int_1^{\tau} \frac{e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{9e^{3(\tau-\mu)} - 8e^{2(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)^2 \\
&\quad -12\Big(\int_1^{\tau} \frac{e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu + \frac{-3e^{3(\tau-\mu)} + 4e^{2(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big) \\
&\quad \Big(\int_2^{\tau} \frac{e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{9e^{3(\tau-\mu)} - 8e^{2(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big) \\
&\quad +\Big(\int_1^{\tau} \frac{e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-3e^{3(\tau-\mu)} + 4e^{2(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)^2 \\
&\quad +4\Big(\int_1^{\tau} \frac{e^{-(\tau-\mu)}}{6}u\mu^{1/2}d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-3e^{3(\tau-\mu)} + 4e^{2(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu) \\
&\quad \Big(\int_1^{\infty} \frac{e^{-(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu + \int_{\tau}^{\infty} \frac{-27e^{3(\tau-\mu)} + 16e^{2(\tau-\mu)}}{6}\mu^{1/2}d\mu\Big)
\end{aligned}
$$

Por último

$$
\begin{aligned}
y_4(t) &= [1 + o(1)]e^{-2(t-1)}exp\Big(\int_1^t [\Theta_{1,4}(s) + \Theta_{2,4}(s)]ds\Big), \quad \text{donde} \\
\Theta_{1,4}(s) &= \int_s^{\infty} \frac{-9e^{3(s-\tau)} + 8e^{4(s-\tau)} + e^{(s-\tau)}}{3}\tau^{1/2}d\tau \\
\Theta_{2,4}(s) &= -\int_s^{\infty} \frac{3e^{3(s-\tau)} - 2e^{4(s-\tau)} - e^{s-\tau}}{6}A_{2,4}(\tau)d\tau, \quad \text{con} \\
A_{2,4}(\tau) &= 3\Big(\int_{\tau}^{\infty} \frac{27e^{3(\tau-\mu)} - 32e^{4(\tau-\mu)} - e^{(\tau-\mu)}}{3}\mu^{1/2}d\mu\Big)^2 \\
&\quad -24\Big(\int_{\tau}^{\infty} \frac{-9e^{3(\tau-\mu)} + 8e^{4(\tau-\mu)} + e^{(\tau-\mu)}}{3}\mu^{1/2}d\mu\Big) \\
&\quad \Big(\int_{\tau}^{\infty} \frac{27e^{3(\tau-\mu)} - 32e^{4(\tau-\mu)} - e^{(\tau-\mu)}}{3}\mu^{1/2}d\mu\Big) + \\
&\quad 19\Big(\int_{\tau}^{\infty} \frac{-9e^{3(\tau-\mu)} + 8e^{4(\tau-\mu)} + e^{(\tau-\mu)}}{3}\mu^{1/2}d\mu\Big)^2 \\
&\quad +4\Big(\int_{\tau}^{\infty} \frac{-9e^{3(\tau-\mu)} + 8e^{4(\tau-\mu)} + e^{(\tau-\mu)}}{3}\mu^{1/2}d\mu\Big) \\
&\quad \Big(\int_{\tau}^{\infty} \frac{-81e^{3(\tau-\mu)} + 128e^{4(\tau-\mu)} + e^{(\tau-\mu)}}{3}\mu^{1/2}d\mu\Big).
\end{aligned}
$$

En el siguiente ejemplo, se aprecia como usar estimaciones previas, para un caso similar.

2.5 Ejemplo 5

Considere la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + \Big[\Big(\frac{\sin(t)+1}{t}\Big)^{1/p} + 4\Big]y = 0$$

sea

$$\begin{aligned} r_o(t) &= \Big(\frac{\sin(t)+1}{t}\Big)^{1/p} \\ &\Rightarrow\ r_0(t)^p = \frac{\sin(t)+1}{t} = \frac{\sin(t)}{t} + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

de donde $r_0 \notin L^p[1,\infty[$, para un p dado, con $p \geq 1$ sin embargo, $r_0 \in L^q[1,\infty[$ para algún $q > p$. Si $p \in [1,2[$, entonces $q \in [2,\infty[$, luego puede usarse el teorema 1.7.2, es decir, existe un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial dada, de la forma

$$\begin{aligned} y_1(t) &= [1+o(1)]e^{2(t-1)}exp\Big(-\frac{1}{12}\int_1^t \Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p} ds\Big).. \\ y_2(t) &= [1+o(1)]e^{(t-1)}exp\Big(\frac{1}{6}\int_1^t \Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p} ds\Big) \\ y_3(t) &= [1+o(1)]e^{-(t-1)}exp\Big(-\frac{1}{6}\int_1^t \Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p} ds\Big). \\ y_4(t) &= [1+o(1)]e^{-2(t-1)}exp\Big(\frac{1}{12}\int_1^t \Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p} ds\Big). \end{aligned}$$

Por otro lado si $p \in [2,\infty[$, entonces $q \in]m, m+1]$, para algún $m \in (I\!N - \{1\})$, luego. Se puede usar el teorema 1.7.3, es decir existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = [1+o(1)]e^{2(t-1)}exp\Big(\int_1^t \sum_{l=1}^{m} \overline{\Theta}_{l,1}(s)ds\Big)$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{\Theta}_{1,1}(t) &= \int_1^t \Big[\frac{3e^{-3(t-s)} - 2e^{-4(t-s)} - e^{-(t-s)}}{6}\Big]\Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p} ds \\ \overline{\Theta}_{2,1}(t) &= \int_1^t \Big[\frac{3e^{-3(t-s)} - 2e^{-4(t-s)} - e^{-(t-s)}}{6}\Big]\Big[3(\overline{\Theta}_{1,1}^{(1)}(s))^2 + 24\overline{\Theta}_{1,1}(s)\overline{\Theta}_{1,1}^{(1)}(s) \\ &\quad 19(\overline{\Theta}_{1,1}(s))^2 + 4\overline{\Theta}_{1,1}\overline{\Theta}_{1,1}^{(2)}(s)\Big]ds \\ \overline{\Theta}_{3,1}(t) &= \int_1^t \Big[\frac{3e^{-3(t-s)} - 2e^{-4(t-s)} - e^{-(t-s)}}{6}\Big]\Big[3\sum_{k=1}^{2} \overline{\Theta}_{k,1}^{(1)}(s)\overline{\Theta}_{3-k,1}^{(1)}(s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+24\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,1}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,1}(s)+19\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,1}(s)\overline{\Theta}_{3-k,1}(s)\\
&+4\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,1}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{3-k,1}(s)+6\overline{\Theta}^{2}_{1,1}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,1}(s)+8\overline{\Theta}^{3}_{1,1}(s)\Big]ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_{l,1}(t) &= \int_1^t\Big[\frac{3e^{-3(t-s)}-2e^{-4(t-s)}-e^{-(t-s)}}{6}\Big]\Big[3\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,1}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{l-k,1}(s)\\
&+24\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,1}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{l-k,1}(s)+19\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,1}(s)\overline{\Theta}_{l-k,1}(s)\\
&+4\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,1}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{l-k,1}(s)+6\sum_{j+m+n=l}\overline{\Theta}_{j,1}(s)\overline{\Theta}_{m,1}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{n,1}(s)\\
&8\sum_{j+m+n=l}\overline{\Theta}_{j,1}(s)\overline{\Theta}_{m,1}(s)\overline{\Theta}_{n,1}(s)\\
&+\sum_{j+m+n+q=l}\overline{\Theta}_{j,1}(s)\overline{\Theta}_{m,1}(s)\overline{\Theta}_{n,1}(s)\overline{\Theta}_{q,1}(s)\Big]ds
\end{aligned}
$$

$4\leq l\leq m$

$$
y_2(t) = [1+o(1)]e^{(t-1)}exp\Big(\int_1^t\sum_{l=1}^{m}\overline{\Theta}_{l,2}(s)ds\Big)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_{1,2}(t) &= \int_1^t\Big[\frac{4e^{-2(t-s)}-3e^{-3(t-s)}}{12}\Big]\Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p}ds\\
&+\int_t^\infty\frac{e^{(t-s)}}{12}\Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p}ds.
\end{aligned}
$$

Sean

$$
\begin{aligned}
A_{2,2}(s) &= 3[\overline{\Theta}^{(1)}_{1,2}(s)]^2+12\overline{\Theta}_{1,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,2}(s)+\overline{\Theta}^{(2)}_{1,2}(s)+4\overline{\Theta}_{1,2}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{1,2}(s)].\\
A_{3,2}(s) &= 3\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,2}(s)+12\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,2}(s)\\
&+\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,2}(s)\overline{\Theta}_{3-k,2}(s)+4\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,2}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{3-k,2}(s)\\
&+6\overline{\Theta}^{(2)}_{1,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,2}(s)+4\overline{\Theta}^{(3)}_{1,2}(s).\\
A_{l,2}(s) &= 3\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{l-k,2}(s)+12\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{l-k,2}(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,2}(s)\overline{\Theta}_{l-k,2}(s)+4\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,2}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{l-k,2}(s)\\
&+6\sum_{j+m+n=1}\overline{\Theta}_{j,2}(s)\overline{\Theta}_{m,2}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{n,2}(s)\\
&+4\sum_{j+m+n=l}\overline{\Theta}_{j,2}(s)\overline{\Theta}_{m,2}(s)\overline{\Theta}_{n,2}(s)\\
&\sum_{j+m+n+q=l}\overline{\Theta}_{j,2}(s)\overline{\Theta}_{m,2}(s)\overline{\Theta}_{n,2}(s)\overline{\Theta}_{q,2}(s).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_{2,2}(t) &= \int_1^t \Big[\frac{4e^{-2(t-s)}-3e^{-3(t-s)}}{12}\Big]A_{2,2}(s)ds\\
&\quad+\int_t^\infty \frac{e^{(t-s)}}{12}A_{2,2}(s)ds.\\
\overline{\Theta}_{3,2}(t) &= \int_1^t \Big[\frac{4e^{-2(t-s)}-3e^{-3(t-s)}}{12}\Big]A_{3,2}(s)ds\\
&\quad+\int_t^\infty \frac{e^{(t-s)}}{12}A_{3,2}(s)ds.\\
\overline{\Theta}_{l,2}(t) &= \int_1^t \Big[\frac{4e^{-2(t-s)}-3e^{-3(t-s)}}{12}\Big]A_{l,2}(s)ds\\
&\quad+\int_t^\infty \frac{e^{(t-s)}}{12}A_{l,2}(s)ds, \quad 4\le l\le m.
\end{aligned}
$$

También,

$$
y_3(t) = [1+o(1)]e^{-(t-1)}exp\Big(\int_1^t\sum_{l=1}^{m}\overline{\Theta}_{l,3}(s)ds\Big),
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_{1,3}(t) &= -\int_1^t \frac{e^{-(t-s)}}{12}\Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p}ds\\
&\quad+\int_t^\infty \Big[\frac{3e^{3(t-s)}-4e^{2(t-s)}}{12}\Big]\Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p}ds.
\end{aligned}
$$

Sean

$$
\begin{aligned}
A_{2,3}(s) &= 3[\overline{\Theta}^{(1)}_{1,3}(s)]^2-12\overline{\Theta}_{1,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,3}(s)+\overline{\Theta}^{(2)}_{1,3}(s)+4\overline{\Theta}_{1,3}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{1,3}(s)]\\
A_{3,3}(s) &= 3\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,2}(s)-12\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,3}(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,3}(s)\overline{\Theta}_{3-k,3}(s)+4\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,3}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{3-k,2}(s)\\
& +6\overline{\Theta}^{(2)}_{1,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,3}(s)-4\overline{\Theta}^{(3)}_{1,3}(s)\\
A_{l,3}(s) &= 3\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{l-k,3}(s)-12\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,2}(s)\\
& +\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,3}(s)\overline{\Theta}_{3-k,2}(s)+4\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,3}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{3-k,3}(s)\\
& +6\sum_{j+m+n=1}\overline{\Theta}_{j,3}(s)\overline{\Theta}_{m,3}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{n,3}(s)\\
& -4\sum_{j+m+n=l}\overline{\Theta}_{j,3}(s)\overline{\Theta}_{m,3}(s)\overline{\Theta}_{n,3}(s)\\
& \sum_{j+m+n+q=l}\overline{\Theta}_{j,3}(s)\overline{\Theta}_{m,3}(s)\overline{\Theta}_{n,3}(s)\overline{\Theta}_{q,3}(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_{2,3}(t) &= \int_1^t -\frac{e^{-(t-s)}}{12}A_{2,3}(s)ds\\
&\quad +\int_t^\infty\left[\frac{3e^{3(t-s)}-4e^{2(t-s)}}{12}\right]A_{2,3}(s)ds\\
\overline{\Theta}_{3,3}(t) &= \int_1^t -\frac{e^{-(t-s)}}{12}A_{3,3}(s)ds\\
&\quad +\int_1^t\left[\frac{3e^{3(t-s)}-4e^{2(t-s)}}{12}\right]A_{3,3}(s)ds\\
\overline{\Theta}_{l,3}(t) &= \int_1^t -\frac{e^{-(t-s)}}{12}A_{l,3}(s)ds\\
&\quad +\int_t^\infty\left[\frac{3e^{3(t-s)}-4e^{2(t-s)}}{12}\right]A_{l,3}(s)ds,\quad 4\le l\le m.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
y_4(t) = [1+o(1)]e^{2-(t-1)}exp\Big(\int_1^t\sum_{l=1}^{m}\overline{\Theta}_{l,4}(s)ds\Big),
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\overline{\Theta}_{1,4}(t) &= -\int_t^\infty\left[\frac{3e^{3(t-s)}-2e^{4(t-s)}-e^{(t-s)}}{6}\right]\Big(\frac{\sin(s)+1}{s}\Big)^{1/p}ds\\
\overline{\Theta}_{2,4}(t) &= -\int_t^\infty\left[\frac{3e^{3(t-s)}-2e^{4(t-s)}-e^{(t-s)}}{6}\right]\Big[3(\overline{\Theta}^{(1)}_{1,4}(s))^2-24\overline{\Theta}_{1,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,4}(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +19(\overline{\Theta}_{1,4}(s))^2 + 4\overline{\Theta}_{1,4}\Theta^{(2)}_{1,4}(s)\Big]ds \\
\overline{\Theta}_{3,4}(t) \;=\; & -\int_t^\infty \Big[\frac{3e^{3(t-s)} - 2e^{4(t-s)} - e^{(t-s)}}{6}\Big]\Big[3\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,4}(s) \\
& -24\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,4}(s) + 19\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,4}(s)\Theta_{3-k,4}(s) \\
& +4\sum_{k=1}^{2}\overline{\Theta}_{k,4}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{3-k,4}(s) + 6\overline{\Theta}^{2}_{1,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{1,4}(s) - 8\overline{\Theta}^{3}_{1,4}(s)\Big]ds \\
\overline{\Theta}_{l,4}(t) \;=\; & -\int_t^\infty \Big[\frac{3e^{3(t-s)} - 2e^{4(t-s)} - e^{(t-s)}}{6}\Big]\Big[3\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}^{(1)}_{k,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,4}(s) \\
& -24\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{3-k,4}(s) + 19\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,4}(s)\overline{\Theta}_{3-k,4}(s) \\
& +4\sum_{k=1}^{l-1}\overline{\Theta}_{k,4}(s)\overline{\Theta}^{(2)}_{3-k,4}(s) + 6\sum_{j+m+n=l}\overline{\Theta}_{j,4}(s)\overline{\Theta}_{m,4}(s)\overline{\Theta}^{(1)}_{n,4}(s) \\
& -8\sum_{j+m+n=l}\overline{\Theta}_{j,4}(s)\overline{\Theta}_{m,4}(s)\overline{\Theta}_{n,4}(s) \\
& +\sum_{j+m+n+q=l}\overline{\Theta}_{j,4}(s)\overline{\Theta}_{m,4}(s)\overline{\Theta}_{n,4}(s)\overline{\Theta}_{q,4}(s)\Big]ds
\end{aligned}
$$

$4 \le l \le m.$

Sea $\alpha > 0$, entonces

$$\int_1^t e^{-\alpha(t-s)}\Big|\frac{\sin(s)+1}{s}\Big|^{1/p}ds \;\le\; 2^{1/p}\int_1^t e^{\alpha(t-s)}\Big(\frac{1}{s}\Big)^{1/p}ds,$$

y también

$$\int_1^\infty e^{\alpha(t-s)}\Big|\frac{\sin(s)+1}{s}\Big|^{1/p}ds \;\le\; 2^{1/p}\int_1^\infty e^{\alpha(t-s)}\Big(\frac{1}{s}\Big)^{1/p}ds,$$

de donde para $p = 2$ se tiene

$$\overline{\Theta}_{i,j}(s) = \mathcal{O}\Big(|\Theta_{i,j}(s)|\Big) \quad \text{para} \quad i = 1,2 \quad \text{y} \quad j = 1,\ldots,4,$$

donde los $\Theta_{i,j}$ son los mismos del ejemplo 4. Entonces se tiene que

$$y_1(t) \;=\; [1+o(1)]e^{2(t-1)}exp\Big(\int_1^t [\mathcal{O}(|\Theta_{1,1}(s)|) + \mathcal{O}(|\Theta_{2,1}(s)|)]ds\Big).$$

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= [1+o(1)]e^{(t-1)}exp\Big(\int_1^t [\mathcal{O}(|\Theta_{1,2}(s)|)+\mathcal{O}(|\Theta_{2,2}(s)|)]ds\Big).\\
y_3(t) &= [1+o(1)]e^{-(t-1)}exp\Big(\int_1^t [\mathcal{O}(|\Theta_{1,3}(s)|)+\mathcal{O}(|\Theta_{2,3}(s))|]ds\Big).\\
y_4(t) &= [1+o(1)]e^{-2(t-1)}exp\Big(\int_1^t [\mathcal{O}(|\Theta_{1,4}(s)|)+\mathcal{O}(|\Theta_{2,4}(s)|)]ds\Big).
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] Horst Behncke and Christian Remling. Asymptotic integration of linear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 210(2):585–597, 1997.

[2] Richard Bellman. *Stability theory of differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[3] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1995.

[4] M. S. P. Eastham. *The asymptotic solution of linear differential systems*, volume 4 of *London Mathematical Society Monographs. New Series.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1989. Applications of the Levinson theorem, Oxford Science Publications.

[5] P. Figueroa. *Comportamiento Asintótico de Ecuaciones Escalares de Tipo Poincaré de Orden 2 y 3.* Mg. thesis, Universidad de Chile, 2004.

[6] W. A. Harris, Jr. and D. A. Lutz. A unified theory of asymptotic integration. *J. Math. Anal. Appl.*, 57(3):571–586, 1977.

[7] O. Perron. über einen satz des henri poincaré. *J. Reine Angew. Math.*, (136):17–37, 1909.

[8] Manuel Pinto. Null solutions of difference systems under vanishing perturbation. *J. Difference Equ. Appl.*, 9(1):1–13, 2003. In honour of Professor Allan Peterson on the occasion of his 60th birthday, Part II.

[9] H Poincaré. Sur les equations lineáires aux differéntielles et aux differénces finies. *Amer, J. Math.*, 7:203–258, 1885.

[10] J. R. Rice and J. D. Strange. *Ordinary Differential Equations with Applications.* Brooks/Cole Publishing Company, California, 1989.