Derivada fraccionaria y Ecuaciones Abstractas de Evolución

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias
por

Marco Cornejo

Marzo de 2016

Director de Tesis: Dra. Verónica Poblete O.
Codirector de Tesis: Dr. Octavio Vera V.

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

Marco Antonio Cornejo Palominos

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa Privada de Tesis rendido el día Viernes 29 de Enero de 2016

Directora de Tesis:
Dra. Verónica Poblete ....

Codirector de Tesis:
Dr. Octavio Vera ....

Comisión de Evaluación:

Dr. Juan Carlos Pozo ....

Dr. Rodrigo Ponce ....

Agradecimientos

Agrede si miento: Agradezco a todos los que me han acompañado, o incluso adyacido durante mi formación. Agradezco a mis padres, dado que sin ellos yo no podría estar aquí. A mi familia entera. A mis profesores en toda la formación básica y media que despertaron en mí el gusto por la matemática. A todos los profesores que tuve en Licenciatura y en el Magister. A mis compañeros de Media y de Universidad. A todos los que me echaron una mano en el Magister y en el desarrollo de esta tesis. A mis amigos por estar ahí en los momentos precisos. A mis alumnos, porque ellos son inspiración. A los errores, porque gracias a ellos he aprendido un montón. A la profe Vero, por la paciencia y por haberme abierto las puertas. A Octavio, Rodrigo y Juan Carlos por sus comentarios y sus correcciones. A usted lector por darse el tiempo de hojear esta Tesis.

Gracias totales.

Este trabajo fue parcialmente financiado por proyecto Fondecyt 1110090.

Índice general

1. Preliminares **3**

1.1. Derivadas Fraccionarias 5

1.1.1. Introducción Histórica 5

1.1.2. Derivada fraccionaria en $\mathbb{R}_+$ 7

1.1.3. Derivada fraccionaria en $\mathbb{R}$ 10

1.2. Espacios UMD 11

2. Existencia de soluciones para ecuaciones integro-diferenciales fraccionarias con condiciones no locales **13**

2.1. Introducción 13

2.2. Problema Fraccionario de Cauchy 13

2.3. Nuestro caso 15

2.4. Aplicaciones 21

3. Regularidad maximal en L^p para ecuaciones diferenciales fraccionarias en todo $\mathbb{R}$ **23**

3.1. Introducción 23

3.2. Regularidad Maximal 24

3.3. Regularidad Maximal para una ecuación particular 34

3.4. Aplicaciones 36

4. Comportamiento asintótico y estabilidad de la Función de Mittag-Leffler generalizada **38**

4.1. Introducción 38

4.2. Regularidad de $E_{\alpha,\beta}$ 39

Bibliografía **45**

Introducción

En esta tesis trabajamos tres problemas involucrando derivadas de orden fraccionario según la definición de Caputo en espacios de Banach. En el primer capítulo presentamos una pequeña introducción a la derivada fraccionaria desde el punto de vista histórico, y nos centramos en la derivada fraccionaria de Caputo, mostrando sus versiones para $\mathbb{R}_+$ y $\mathbb{R}$, y las propiedades de estas que serán importantes en el desarrollo de la tesis.
En el segundo capítulo investigamos la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales fraccionarios del tipo

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha[u(t)+e(t,u(t))] &= Au(t)+f\left(t,u(t),\int_0^t k(t,s,u(s))\,ds\right), \quad t\in J \\ u(0)+g(u) &= u_0, \end{aligned}$$

donde $0<\alpha<1$, $J=[0,b]$ con $b>0$, A es un operador lineal cerrado, no acotado y densamente definido en un espacio de Banach X, $u_0\in X$ y las funciones $f: J\times X\times X\to X$, $e: J\times X\to X$, $k:\Omega\times X\to X$, y $g: C(J,X)\to X$ son continuas, siendo $\Omega=\{(t,s)|0\le s\le t\le b\}$. En este capítulo, trabajamos con técnicas de punto fijo para demostrar la existencia de soluciones para tal ecuación.
En el tercer capítulo, trabajamos la regularidad maximal de ecuaciones con retardo del estilo

$$D^\alpha_- u(t) = Au(t)+Fu_t+f(t), \quad t\in\mathbb{R} \tag{1}$$

con $\alpha>0$, A un operador lineal no acotado, cerrado y densamente definido en X un espacio de Banach, $f\in L^p(\mathbb{R},X)$ para $1<p<\infty$, $F: L^p([-r,0],X)\to X$ es un operador lineal acotado, y $u_t(\cdot)=u(t+\cdot)$. En esta sección, trabajamos con técnicas de multiplicadores de Fourier en espacios UMD, obteniendo condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones dependiendo de la función f y el operador A. Y en el cuarto capítulo, trabajamos las propiedades de las soluciones de ecuaciones no homogéneas de la forma

$$\mathbb{D}^\alpha u(t)=Au(t)+f(t),\ u(0)=x,\ u'(0)=y,\ t\ge 0 \tag{2}$$

en base una familia de operadores que generaliza la función de Mittag-Leffler; a saber:

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-\beta}(\lambda^\alpha-A)^{-1}d\lambda$$

donde γ es un camino conveniente en el cual la resolvente $(\lambda-A)^{-1}$ tiene sentido. Usando técnicas de integración compleja obtenemos cotas para el comportamiento de este operador cuando t tiende al infinito, y como consecuencia obtenemos propiedades de la solución de la ecuación.

Capítulo 1

Preliminares

Como es usual, denotaremos a los conjuntos de los números naturales, reales y reales positivos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}_+$. En esta tesis X será un espacio de Banach con norma $||\cdot||$. Si $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador lineal cerrado no acotado, denotaremos por $[D(A)]$ al dominio de A dotado de la norma $||x||_{[D(A)]} = ||x|| + ||Ax||$.
Si Y es otro espacio de Banach, denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ el espacio de los operadores lineales entre X y Y que sean continuos, y escribiremos $\mathcal{B}(X)$ para $\mathcal{B}(X, X)$. Sea $J \subset \mathbb{R}$ de interior no vacío, $L^p(J, X)$ es el espacio de las funciones integrables en el sentido de Bochner en todo J,

$$L^p(J,X) = \left\{ f : J \to X \text{ medible } : \underbrace{\left(\int_J ||f(t)||^p dt\right)^{1/p}}_{||f||_p} < \infty \right\}$$

el cual es un espacio normado con la norma $||\cdot||_p$, y el espacio de funciones localmente p-integrables según Bochner $L^p_{\text{loc}}(J, X)$ es el espacio de funciones que son integrables en cada compacto contenido en J. Esto es,

$$L^p_{\text{loc}}(J, X) = \{f : J \to X \text{ medible } : f \in L^p(K, X) \text{ para todo } K \subset J \text{ compacto}\}.$$

El espacio de Sobolev $W^{\alpha,p}(J, X)$ es el espacio de las funciones diferenciables $m = \lceil \alpha \rceil$ veces, y que tales derivadas están en $L^p(J, X)$, esto es:

$$W^{\alpha,p}(J, X) = \left\{ f : J \to X \text{ medible} : f^{(j)} \text{ existe, y } ||f^{(j)}||_p < \infty, \text{ para } j \in \{0, \ldots, m\} \right\}.$$

$C(J, X)$ es el espacio de las funciones continuas, dotado de la norma del supremo $||\cdot||_\infty$.
Para $\beta \in]0, 1[$, el espacio de funciones Hölder-continuas $C^\beta(J, X)$ es el espacio de las funciones continuas tales que $\sup\{||f(s) - f(t)||(s-t)^{-\beta} : s, t \in J\} < \infty$
Denotamos por $\mathcal{D}(J, X)$ el espacio de las funciones con infinitas derivadas continuas de soporte compacto, esto es

$$\mathcal{D}(J, X) = \{f \in C^\infty(J, X) | \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subset J \, \text{compacto}, ||f(x)|| < \varepsilon \text{ para } x \in J - K\}.$$

Escribiremos $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ para $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}(J,X)$ es el espacio de funciones con infinitas derivadas continuas tales que todas sus derivadas decrecen en norma más rápido que cualquier polinomio, o sea

$$\mathcal{S}(\mathbb{R},X)=\left\{f\in C^{\infty}(\mathbb{R},X)\ :\ \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)^n||f^{(m)}(x)||<\infty,\ \text{ para todos } n,m\in\mathbb{N}\right\}$$

Este espacio de funciones suele nombrarse como la Clase de Schwartz.
Adoptaremos la notación de convolución para la integral

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx$$

para funciones al menos en $L^1(\mathbb{R},X)$, recordando que $(L^1(\mathbb{R},X),+,*)$ forma una estructura de anillo conmutativo sin unidad.
Para $f\in L^1(\mathbb{R},X)$, se define la transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}(f)(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\lambda x}f(x)\,dx\ \lambda\in\mathbb{R},$$

y para $g\in L^1(\mathbb{R}_+,X)$ de orden exponencial, la transformada de Laplace por

$$\mathcal{L}(g)(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}g(x)\,dx.\mathrm{Re}(\lambda)>0.$$

Recordamos las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(f*g)(\lambda)=\mathcal{L}(f)(\lambda)\mathcal{L}(g)(\lambda)$$

y

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}\}(\lambda)=\lambda^k\mathcal{L}\{f\}(\lambda)-\sum_{n=1}^{k}\lambda^{k-n}f^{(n-1)}(0).$$

Para una función $f\in L^1(\mathbb{R},X)$ de crecimiento subexponencial, esto es,

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-\epsilon|t|}||f(t)||dt<\infty\quad\text{para cada } \epsilon>0$$

definimos la transformada de Carleman f como

$$\tilde{f}(\lambda):=\begin{cases}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}f(t)dt, & \text{si } \mathrm{Re}(\lambda)>0\\ -\int_0^{\infty}e^{\lambda t}f(-t)dt, & \text{si } \mathrm{Re}(\lambda)<0\end{cases}$$

La transformada de Carleman $\tilde{f}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}-i\mathbb{R}$.

Dada función f y su transformada de Carleman $\tilde{f}$, diremos que $i\eta\in i\mathbb{R}$ es un punto regular para $\tilde{f}$ si existe una vecindad V de $i\eta$ y una función analítica $h:V\to X$ tal que $\tilde{f}(\lambda)=h(\lambda)$ en $V-\{i\eta\}$. Definimos el espectro de Carleman $\mathrm{sp}_C(f)$ como los puntos que no son regulares para $\tilde{f}$.

La importancia de la transformada de Carleman se hará notar en el capítulo 3, en el cual utilizaremos una de sus propiedades:

Proposición 1.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Entonces $sp_C(f) = \varnothing$ si y sólo si $f(t) = 0$ casi en todo punto.*

Para una demostración de este resultado, ver [2].

Y por último, recordamos la definición de la función Gamma

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

función que tiene sentido para todos los complejos que no sean enteros no positivos, y que generaliza el factorial en el sentido de que si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\Gamma(n+1) = n!$; y la función Beta

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \int_0^\infty \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\, ds,$$

definida para pares de complejos de parte real positiva. Ambas funciones están relacionadas bajo la identidad $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y)$.

1.1. Derivadas Fraccionarias

1.1.1. Introducción Histórica

Las derivadas fraccionarias nacieron no mucho después de la creación del cálculo que todos conocemos, al menos como idea. Es en 1695, cuando Leibnitz le presentaba la idea de derivada al marqués de L'Hôpital, este último le preguntó qué pasaba si al término

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

se le reemplazaba el índice n, que se suponía era natural, por un valor como por ejemplo $1/2$. Leibnitz meditó y trabajó la idea con Johann Bernoulli y John Wallis, pero sin lograr profundizar mucho. En 1819 Lacroix en su tratado de cálculo dedica unas cuantas páginas a tratar generalizaciones de las derivadas de orden entero para polinomios. Así por ejemplo, pasando de la fórmula:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, n \in \mathbb{N}$$

a una generalización utilizando la función Gamma :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha},\ \alpha > 0.$$

Años más tarde, de la pluma de Liouville sale la idea de tomar la generalización de la derivada de la función exponencial

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{cx} = c^m e^{cx}$$

y llevarla a un parámetro α real, para lo cual:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^{cx} = a^\alpha e^{cx},$$

y a partir de eso, considerar la derivada α-ésima de funciones del estilo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{c_k x}$$

como

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c_k^\alpha e^{c_k x}.$$

Es en este momento en ambas ideas entran en conflicto: Si consideramos la serie correspondiente a la función exponencial

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

al tomar derivadas α-ésimas para $\alpha \notin \mathbb{N}$, nos queda que:

$$e^x = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} e^x \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)k!} x^{k-\alpha}$$

Esta contradicción llevó a intentar abordar las derivadas a partir de otro camino, y el mismo Liouville buscó trabajar las ideas que tuvo Abel en la solución del problema de la isocrona, donde aparecían integrales de la forma

$$\int_0^x (x-t)^\alpha f(t)\, dt.$$

Es de estas ideas, y del trabajo de Riemann y de Laurent que sale la idea de la integral fraccionaria de la forma

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

y luego, la idea de derivada fraccionaria fue apoyada en esta integral, tomando la derivada luego de integrar. A saber, si $m = \lceil \alpha \rceil$, entonces:

$$D^\alpha f := \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)\, dt$$

la cual es conocida como la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Esto siembra una nueva idea en el tema de las derivadas fraccionarias: Estas dependen de un dominio, puesto que son integrales.
Años más tarde, cerca de 1960, Caputo descubrió que muchos problemas de la física se describían mejor si la derivada fraccionaria se definiese como

$$\mathbb{D}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_b^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt$$

para $m = \lceil \alpha \rceil$.

1.1.2. Derivada fraccionaria en $\mathbb{R}_+$

Definición 1.2. *Para $\alpha > 0$, definimos la familia de funciones $g_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ como*

$$g_\alpha(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Adoptando la convención $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$, para así definir $g_0(s) = 0$.
Notamos que esta familia de funciones cumple la siguiente propiedad de semigrupo:

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \text{ para } \alpha, \beta > 0.$$

Consideremos ahora $J = [0, b]$, $b > 0$.

Definición 1.3. *Sea $\alpha > 0$. Se define para una función $f \in L^1(J, X)$ el operador integral fraccionario de Riemann-Liouville como*

$$I^\alpha f(t) := \int_0^t g_\alpha(t-s) f(s)\, ds = (g_\alpha * f)(t)$$

y por $I^0 f(t) := f(t)$. Por su definición, es fácil ver, por ejemplo, que $I^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

Definiremos una de sus pseudoinversas:

Definición 1.4. *Para $\alpha > 0$, se define el operador diferencial fraccionario de Caputo de una función $f \in W^{\alpha,p}(J, X)$ como*

$$\mathbb{D}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s)\, ds = (g_{m-\alpha} * f^{(m)})(t)$$

donde $f^{(m)}$ denota la derivada m-ésima de f, con $m = \lceil \alpha \rceil$.

Notamos que en el caso $\alpha \in \mathbb{N}$, las definiciones de derivadas fraccionarias coinciden con las derivadas de orden entero. Para la derivada fraccionaria de Caputo se tiene, por ejemplo, que $\mathbb{D}^\alpha g_\beta = g_{\beta-\alpha}$ si $\beta \neq 1$ pero que $\mathbb{D}^\alpha g_1 = 0$ para todo $\alpha > 0$.

Algunas de las propiedades de estos operadores son:

1. $I^\alpha I^\beta f = I^{\alpha+\beta} f = I^\beta I^\alpha f \quad$ para $f \in L^1(J, X)$.
   En efecto, pues $g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}$, y puesto que la convolución es asociativa y conmutativa, tenemos que

$$I^\alpha I^\beta f = g_\alpha * (g_\beta * f) = \underbrace{(g_\alpha * g_\beta) * f}_{=I^{\alpha+\beta} f} = (g_\beta * g_\alpha) * f = g_\beta * (g_\alpha * f) = I^\beta I^\alpha f$$

2. $\mathbb{D}^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$ para $f \in L^1(J, X)$.
   En efecto, si $m = \lceil \alpha \rceil$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha I^\alpha f(t) &= (g_{m-\alpha} * (I^\alpha f)^{(m)})(t) \\ &= (g_{m-\alpha} * (g_\alpha * f)^{(m)})(t) \\ &= g_m * f^{(m)}(t) = f(t) \end{aligned}$$

3. $I^\alpha \mathbb{D}^\alpha f(t) \neq f(t)$, y de hecho

$$I^\alpha \mathbb{D}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t).$$

En efecto, si $m = \lceil \alpha \rceil$, tenemos que

$$I^\alpha \mathbb{D}^\alpha f = g_\alpha * (g_{m-\alpha} * f^{(m)}) = g_m * f^{(m)}.$$

Luego, integrando por partes m veces llegamos a que

$$(g_m * f^{(m)})(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} g_{k+1}(t) f^{(k)}(0) + f(t),$$

con lo que la propiedad se cumple.

4. $\mathbb{D}^\alpha \mathbb{D}^\beta f \neq \mathbb{D}^\beta \mathbb{D}^\alpha f$.
Consideremos por ejemplo que $\mathbb{D}^{1/2} g_{3/2} = g_1$, por lo que $\mathbb{D}^{1/4}\mathbb{D}^{1/2} g_{3/2} = 0$. Pero, que $\mathbb{D}^{1/4+1/2} g_{3/2} = \mathbb{D}^{3/4} g_{3/2} = g_{3/4}$.

5. $\mathbb{D}^\alpha \mathbb{D}^\beta f \neq \mathbb{D}^{\alpha+\beta} f$.
Considérese por ejemplo que $\mathbb{D}^{1/2} g_{3/2} = g_1$, por lo que $\mathbb{D}^{1/2}\mathbb{D}^{1/2} = 0$, pero $\mathbb{D}^{1/2+1/2} g_{3/2} = \mathbb{D}^1 g_{3/2} = g_{1/2}$.

6. $\mathcal{L}(I^\alpha f)(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^\alpha} \mathcal{L}(f)(\lambda)$.
En efecto, si notamos que $\mathcal{L}(g_\alpha)(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^\alpha}$ y usamos que la transformada de Laplace separa convoluciones en productos, queda que

$$\mathcal{L}(I^\alpha f)(\lambda) = \mathcal{L}(g_\alpha * f)(\lambda) = \mathcal{L}(g_\alpha)(\lambda)\mathcal{L}(f)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}\mathcal{L}(f)(\lambda).$$

7. $\mathcal{L}(\mathbb{D}^\alpha f)(\lambda) = \lambda^\alpha \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \lambda^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0)$.
En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbb{D}^\alpha f)(\lambda) =& \mathcal{L}(g_{m-\alpha} * f^{(m)})(\lambda) \\
=& \mathcal{L}(g_{m-\alpha})(\lambda)\mathcal{L}(f^{(m)})(\lambda) \\
=& \frac{1}{\lambda^{m-\alpha}} \left(\lambda^m \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \lambda^{m-k} f^{(k-1)}(0) \right) \\
=& \lambda^\alpha \mathcal{L}(f)(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \lambda^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0).
\end{aligned}$$

Ahora, procederemos a definir una función bastante útil en el estudio de las ecuaciones fraccionarias de evolución.

Definición 1.5. *Se define la función de* Mittag-Leffler *como*

$$e_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{\alpha-\beta}e^t}{t^\alpha - z}dt, \quad \alpha,\beta>0, z\in\mathbb{C}, \tag{1.1}$$

donde C es un camino que comienza y termina en $-\infty$ y que rodea el disco $\{t\in\mathbb{C} : |t| \leq |z|^{1/\alpha}\}$ en sentido antihorario.

Notemos que esta función es entera, puesto que el radio de convergencia de su definición como serie es infinito

Esta función generaliza la exponencial: $e_{1,1}(z) = e^z$ y la función coseno: $e_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$, y además juega un papel protagónico en las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Por ejemplo, si consideramos la ecuación diferencial fraccionaria

$$\mathbb{D}^\alpha u = \omega u,$$

con $\alpha > 0$ tiene por solución particular $u(t) = e_{\alpha,1}(\omega t^\alpha)$, ya que

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^\alpha e_{\alpha,1}(\omega t^\alpha) =& \mathbb{D}^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+1)} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \mathbb{D}^\alpha \underbrace{\frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)}}_{g_{\alpha n+1}(t)} \\
=& \omega \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{n-1} \underbrace{\frac{t^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}}_{g_{\alpha(n-1)+1}(t)} \\
=& \omega \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)} \\
=& \omega e_{\alpha,1}(\omega t^\alpha).
\end{aligned}$$

Será útil estudiar la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler:

Lema 1.6. *Sea $\omega > 0$. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) > \omega^{1/\alpha}$*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\beta-1} e_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha)dt = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha - \omega}. \tag{1.2}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\beta-1} e_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha) dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{t^{\alpha n+\beta-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta)} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{1}{\lambda^{\alpha n+\beta}} \\
&= \lambda^{-\beta} \frac{1}{1-\frac{\omega}{\lambda^\alpha}} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^\alpha - \omega}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

■

Veamos un ejemplo de una ecuación diferencial que se puede resolver vía Transformada de Laplace. Consideremos, para $1 < \alpha < 2$ la ecuación

$$\mathbb{D}^\alpha u(t) = \omega u(t) + f(t),\ u(0) = x,\ u'(0) = y, \tag{1.4}$$

donde $\omega > 0$. Si a la igualdad anterior tomamos transformada de Laplace, nos quedará que:

$$\lambda^\alpha \mathcal{L}(u)(\lambda) - \lambda^{\alpha-1} x - \lambda^{\alpha-2} y = \omega \mathcal{L}(u)(\lambda) + \mathcal{L}(f)(\lambda).$$

Si despejamos la transformada de Laplace de u, queda que

$$\mathcal{L}(u)(\lambda) = \mathcal{L}(f)(\lambda) \cdot \frac{1}{\lambda^\alpha - \omega} + x \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha - \omega} + y \frac{\lambda^{\alpha-2}}{\lambda^\alpha - \omega}.$$

Por lo cual, deducimos que la solución para (1.4) es de la forma

$$u(t) = (f * \overline{e}_{\alpha,\alpha})(t) + x\overline{e}_{\alpha,1}(t) + y\overline{e}_{\alpha,2}(t),$$

donde $\overline{e}_{\alpha,\beta}(t) = t^{\beta-1} e_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha)$.

1.1.3. Derivada fraccionaria en $\mathbb{R}$

Definición 1.7. *Dado $\alpha > 0$, las integrales fraccionarias de Liouville de orden α, $I_-^\alpha f$ y $I_+^\alpha f$ se definen respectivamente como*

$$I_-^\alpha f := \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

y

$$I_+^\alpha f := \int_t^\infty \frac{(s-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Definimos $I_\pm^0 f(t) = f(t)$. Es condición suficiente para su existencia que $f(t) = O(|t|^{-\alpha-\epsilon})$, para $\epsilon > 0$. Funciones que cumplen con esta propiedad se dice que pertenecen a la clase de Liouville.

Definición 1.8. *Dado $\alpha > 0$, las derivadas fraccionarias de Caputo de orden α laterales, $D_-^\alpha f$ y $D_+^\alpha f$ se definen como:*

$$D_-^\alpha f(t) := I_-^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t) = \int_{-\infty}^{t}\frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}f^{(n)}(s)ds \tag{1.7}$$

$$D_+^\alpha f(t) := I_+^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t) = \int_{t}^{\infty}\frac{(s-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}f^{(n)}(s)ds \tag{1.8}$$

con $n = \lceil\alpha\rceil$, $t \in \mathbb{R}$ y $f \in C^n(\mathbb{R}, X)$. Definimos $D_\pm^0 f(t) = f(t)$.

Es sabido que para funciones en espacios de Schwartz se tiene que $D_\pm^\alpha D_\pm^\beta = D_\pm^{\alpha+\beta}$, $I_\pm^\alpha I_\pm^\beta = I_\pm^{\alpha+\beta}$, $I_\pm^\alpha D_\pm^\beta = I_\pm^{\alpha-\beta}$ si $\alpha \geq \beta$ y $I_\pm^\alpha D_\pm^\beta = D_\pm^{\beta-\alpha}$ si $\alpha < \beta$. Estas propiedades pueden extenderse via densidad a espacios de Sobolev. Además, si $\alpha \in \mathbb{N}$, tenemos que $(-1)^n D_+^n = D_-^n = D^n$, donde D^n denota la derivación entera usual. A modo de ejemplo, notamos que se tienen las relaciones:

$$D_-^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^\alpha e^{\lambda t} \quad I_-^\alpha e^{\lambda t} = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda t}, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

1.2. Espacios UMD

Previo a la definición de un espacio UMD, necesitamos definir qué es una martingala.

Definición 1.9. *Dado (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad, y sea $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de sub-σ-álgebras de Σ. Una sucesión de variables aleatorias $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en este espacio de probabilidad, P integrables y con valores en un espacio Y es una martingala si N_n es Σ_n-medible y*

$$\mathbb{E}[N_n|\Sigma_k] = N_k, \qquad \text{para } 0 \leq k \leq n < \infty$$

donde $\mathbb{E}[N_n|\Sigma_k]$ es la esperanza condicional de N_k en la σ-álgebra Σ_k, esto es, una versión de la familia de variables aleatorias T tales que

$$\int_B N_k\, dP = \int_B T\, dP \qquad \text{para todo } B \in \Sigma_k$$

Para mayor profundidad en cuanto a propiedades de la esperanza condicional y las martingalas, referenciamos el capítulo 9 de [4].

Definición 1.10. *Diremos que un espacio de Banach X posee la propiedad UMD (o que X es un espacio UMD) si para algún $p \in]1, \infty[$, existe constante $c > 0$ tal que*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k(N_k - N_{k-1})\right\|_{L^p(\Omega,\Sigma,P;X)} \leq c\left\|\sum_{k=1}^{n}(N_k - N_{k-1})\right\|_{L^p(\Omega,\Sigma,P;X)} = c||N_n||_{L^p(\Omega,\Sigma,P;X)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$ y para toda martingala $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tomando $N_0 = 0$.

Hacemos notar que Burkhölder y Bourgain demostraron que un espacio de Banach X tiene la propiedad UMD si y sólo si la transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}\phi(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\{|y|>\epsilon\}} \frac{\phi(x-y)}{y}\, dy, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

puede extenderse a un operador acotado a todo $L^p(\mathbb{R}, X)$, para algún $p \in]1, \infty[$. A los espacios que cumplen con esta última propiedad se les llama espacios $\mathcal{HT}$.

Algunas propiedades de los espacios UMD las resumiremos en la siguiente proposición

Proposición 1.11. *1. Si X es UMD, y Y es un subespacio vectorial cerrado, entonces Y y X/Y son UMD.*

2. X es UMD si y sólo si $X^\dagger$ es UMD, donde $X^\dagger$ denota el dual topológico de X.

3. Si X y Y son UMD, entonces $X \bigoplus Y$ es UMD.

4. Todo espacio UMD es reflexivo.

La demostración puede ser vista en [6].

Ejemplos

1. Todo espacio de Hilbert es UMD.
2. Todo espacio $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, para $p \in]1, \infty[$ es UMD.
3. Todo espacio de Bochner $L^p(\Omega, \Sigma, P; X)$, si X es un espacio UMD.
4. Los espacios de Sobolev $W^{\alpha,p}$ son UMD.
5. L^1 y L^∞ NO son espacios UMD, puesto que no son reflexivos.

Capítulo 2

Existencia de soluciones para ecuaciones integro-diferenciales fraccionarias con condiciones no locales

2.1. Introducción

El propósito de esta sección es el abordar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias del tipo

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha[u(t) + e(t, u(t))] &= Au(t) + f\left(t, u(t), \int_0^t k(t, s, u(s))\, ds\right), \quad t \in J \\ u(0) + g(u) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aquí $0 < \alpha < 1$, $J = [0, b]$ con $b > 0$, A es un operador lineal cerrado y no acotado en X, de dominio denso en X, $u_0 \in X$ y las funciones $f : J \times X \times X \to X$, $e : J \times X \to X$, $k : \Omega \times X \to X$, y $g : C(J, X) \to X$ son continuas, siendo $\Omega = \{(t, s) | 0 \leq s \leq t \leq b\}$. En adelante, escribiremos $\mathcal{K}u(t) = \int_0^t k(t, s, u(s))\, ds$. Seguiremos los lineamientos de [3], corrigiendo sus errores y rehaciendo parte de los cálculos.
En esta sección, trabajaremos con funciones completamente continuas, que definimos a continuación.

Definición 2.1. *Una función $f : Y \to Z$ se dice completamente continua si f es continua y si para todo conjunto acotado $B \subset Y$, se tiene que $f(B)$ es precompacto.*

2.2. Problema Fraccionario de Cauchy

Como primer peldaño en el estudio de nuestro problema, consideremos la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^\alpha u(t) &= Au(t) + f(t), \qquad t \in J \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde A es un operador lineal no acotado y cerrado en X y $f \in C(J, X)$. La ecuación (2.2) es equivalente a la siguiente ecuación integral (Ver [8])

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t Au(s)(t-s)^{\alpha-1}\, ds + h(t) \qquad t \in J, \tag{2.3}$$

donde $h(t) := u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\, ds$.
Nuestra objetivo en esta sección es encontrar soluciones **mild** de la ecuación (2.2).

Definición 2.2. *Una función $u \in C(J, X)$ es llamada una solución* **mild** *para la ecuación (2.3) si $\int_0^t u(s)(t-s)^{\alpha-1}\, ds \in D(A)$ para todo $t \in J$, la función $h \in C(J, X)$, y se satisface*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} A \left[\int_0^t u(s)(t-s)^{\alpha-1}\, ds \right] + h(t).$$

Los semigrupos y las familias coseno son fundamentales a la hora de solucionar el problema de Cauchy de primer ($\alpha = 1$) y segundo orden ($\alpha = 2$). Motivados por esto, definiremos una familia de operadores que nos serán fundamentales al trabajar con nuestras ecuaciones diferenciales fraccionarias:

Definición 2.3. *[12] Una familia de operadores acotados $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en X es llamada una familia resolvente para la ecuación (2.2) si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$S(\cdot)x \in C([0, \infty[, X)$ para todo $x \in X$ y $S(0) = I$ el operador identidad en X.*
2. *$S(t)D(A) \subset D(A)$ y $AS(t) = S(t)A$ para todo $t \geq 0$.*
3. *Para todo $x \in D(A)$ y $t \geq 0$ se tiene que*

$$S(t)x = x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t AS(t)x\, (t-s)^{\alpha-1}\, ds. \tag{2.4}$$

Asumiremos, así como en (Capítulo 2, [12]), que la familia resolvente es analítica, y que existe una función $\varphi_A \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ tal que

$$||S'(t)x|| \leq \varphi_A(t) ||x||_{[D(A)]}, \text{ para todo } t > 0.$$

Los siguientes resultados se siguen de [12], Proposición I.1.2, Corolario II.2.6 y Proposición I.1.3.

Lema 2.4. *Supongamos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es una familia resolvente analítica para (2.2).*

1. *Si u es una solución mild de (2.3), entonces la función $t \mapsto \int_0^t S(t-s)h(s)\, ds$ es continuamente diferenciable en J, y además*

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t S(t-s)h(s)\, ds \tag{2.5}$$

para todo $t \in J$.

2. Si $h \in C^{\beta}(J, X)$ para algún $\beta \in]0,1[$, entonces la función

$$\phi(t) = S(t)(h(t) - h(0)) + \int_0^t S'(t-s)[h(s) - h(t)]\,ds + S(t)h(0), \quad t \in J \tag{2.6}$$

es una solución mild de (2.3).

3. Si $h \in C(J, [D(A)])$, entonces la función $\phi : J \to X$ definida por

$$\phi(t) = \int_0^t S'(t-s)h(s)\,ds + h(t) \tag{2.7}$$

es una solución mild de (2.3).

2.3. Nuestro caso

Motivado por los resultados precedente, en esta sección estudiamos la existencia de soluciones **mild** de la ecuación abstracta (2.1).

Definición 2.5. *Una función $u \in C(J, X)$ es llamada una solución* **mild** *para la ecuación (2.1) si $\int_0^t u(s)(t-s)^{\alpha-1}ds \in D(A)$ y satisface la ecuación:*

$$\begin{aligned} u(t) = u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(t, u(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t Au(s)(t-s)^{\alpha-1}ds \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, u(s), \mathcal{K}u(s))(t-s)^{\alpha-1}ds, \quad t \in J. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para estudiar la existencia de soluciones mild, supondremos las siguientes hipótesis:

(H0) Existe una familia de operadores resolventes $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ analítica para (2.1) y que existe una función $\varphi_A \in L^1_{\text{loc}}([0,\infty[, \mathbb{R}_+)$ tal que

$$||S'(t)x|| \leq \varphi_A(t)||x||_{[D(A)]}, \text{ para todo } t > 0.$$

(H1) La función $f : J \times X \times X \to [D(A)]$ es completamente continua y existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$||f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)|| \leq C_1(||x_1 - x_2|| + ||y_1 - y_2||)$$

para todo $t \in J$.

(H2) La función $k : \Omega \times X \to [D(A)]$ es continua, y existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\left|\left|\int_0^t [k(t, s, x_1) - k(t, s, x_2)]ds\right|\right| \leq C_2||x_1 - x_2||,$$

para todo $(t, s) \in \Omega$.

(H3) La función $e : J \times X \to [D(A)]$ es continua, y existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$||e(t, x_1) - e(t, x_2)|| \leq C_3||x_1 - x_2||,$$

para todo $t \in J$.

(H4) La función $g : C(J, X) \to [D(A)]$ es continua, y existe una constante $G > 0$ tal que

$$||g(\varphi_1) - g(\varphi_2)|| \leq G||\varphi_1 - \varphi_2||.$$

(H5) $2(1 + ||\varphi_A||_1)\left(G + C_3 + \dfrac{b^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}C_1(1 + bC_2)\right) \leq 1.$

A modo de abreviación, escribimos $N = \text{máx}_{t\in J}||f(t, 0, 0)||$, $N^* = \text{máx}_{t\in J}||e(t, 0)||$ y $N^{**} = \text{máx}_{t\in J}||\int_0^t k(t, s, 0)\,ds||$.

Siguiendo las ideas del apartado 3 del lema 2.4, la ecuación (2.8) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(t, u(t)) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, u(s), \mathcal{K}u(s))(t - s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \int_0^t S'(t - s)[u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(s, u(s)) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s f(r, u(r), \mathcal{K}u(r))(s - r)^{\alpha-1} dr] ds.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Para probar el resultado principal de esta sección, utilizaremos técnica de punto fijo. Más precisamente, usaremos el siguiente resultado:

Lema 2.6 (Teorema del Punto fijo de Krasnoselskii). *[13] Sea M un conjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Banach Y. Suponga que $H_1, H_2 : M \to Y$ son dos operadores tales que se cumplen las siguientes hipótesis:*

1. *$H_1x + H_2y \in M$, para todo $x, y \in M$.*

2. *H_1 es continuo y $H_1(M)$ está contenido en un conjunto compacto.*

3. *H_2 es una contracción de constante menor a 1.*

Entonces existe $x \in M$ tal que $(H_1 + H_2)(x) = x$.

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección:

Teorema 2.7. *Asúmase que $u_0 \in D(A)$, y que las funciones e, f, g, k satisfacen (H0)-(H5). Entonces existe una solución mild de la ecuación (2.1).*

Demostración. La demostración sigue las líneas del caso de la ecuación (2.2). Dado que la función $h(t) = u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(t, u(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, u(s), \mathcal{K}u(s))(t-s)^{\alpha-1} ds$ está en $C(J, [D(A)])$ debido a las hipótesis (H1)-(H4), y motivados por el lema 2.4, apartado 3, demostraremos la existencia de un punto fijo de la función $\Phi : C(J, [D(A)]) \to C(J, [D(A)])$ definida por

$$\begin{aligned}
\Phi u(t) &= u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(t, u(t)) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, u(s), \mathcal{K}u(s))(t-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \int_0^t S'(t-s)[u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(s, u(s)) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s f(r, u(r), \mathcal{K}u(r))(s-r)^{\alpha-1} dr] ds.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Notamos que la función Φ está bien definida, puesto que las integrales convergen gracias a las hipótesis (H1)-(H5), y puesto que por hipótesis $S(t)D(A) \subset D(A)$, por lo que se desprende que $S'(t)D(A) \subset D(A)$. Escribiremos Φ como la suma de $\Phi_1 + \Phi_2$, donde:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 u(t) =& u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(t, u(t)) + \int_0^t S'(t-s)[u_0 - g(u) + e(0, u_0) - e(s, u(s))] ds \\
\Phi_2 u(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, u(s), \mathcal{K}u(s))(t-s)^{\alpha-1} ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t S'(t-s) \int_0^s f(r, u(r), \mathcal{K}u(r))(s-r)^{\alpha-1}\, dr\, ds
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Sea $B := B_r(0, C(J, [D(A)])) = \{\phi \in C(J, [D(A)]) : ||\phi|| \leq r\}$, y escogemos r tal que $r \geq 2[1 + ||\varphi_A||_1](||u_0|| + ||g(0)|| + ||e(0, u_0)|| + N^* + \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} C_1(N^{**} + N))$.
Para $\phi, \psi \in B$, tenemos:

$$||\Phi_1 \phi(t)|| \leq \underbrace{||u_0 - g(\phi) + e(0, u_0) - e(t, \phi(t))||}_{D_1} + \underbrace{\left|\left|\int_0^t S'(t-s)[u_0 - g(\phi) + e(0, u_0) - e(s, \phi(s))] ds\right|\right|}_{D_2}$$

Para acotar D_1:

$$\begin{aligned}
D_1 &\leq ||u_0|| + ||g(\phi) - g(0)|| + ||g(0)|| + ||e(0, u_0)|| + ||e(t, \phi(t)) - e(t, 0)|| + ||e(t, 0)|| \\
&\leq ||u_0|| + G||\phi||_\infty + ||g(0)|| + ||e(0, u_0)|| + C_3||\phi(t)|| + N^* \\
&\leq ||u_0|| + Gr + ||g(0)|| + ||e(0, u_0)|| + C_3 r + N^*.
\end{aligned}$$

Usando la cota para D_1, con D_2 tenemos que:

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \left\| \int_0^t S'(t-s)[u_0 - g(\phi) + e(0,u_0) - e(s,\phi(s))]ds \right\| \\
&\leq \int_0^t ||S'(t-s)|| \underbrace{[||u_0 - g(\phi) + e(0,u_0) - e(s,\phi(s))||]}_{T} ds \\
&\leq ||\varphi_A||_1[||u_0|| + Gr + ||g(0)|| + ||e(0,u_0)|| + C_3 r + N^*].
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
||\Phi_2\psi(t)|| \leq & \underbrace{\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s,\psi(s),\mathcal{K}\psi(s))(t-s)^{\alpha-1}ds \right\|}_{D_3} \\
& + \underbrace{\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t S'(t-s) \int_0^s f(r,\psi(r),\mathcal{K}\psi(r))(s-r)^{\alpha-1}drds \right\|}_{D_4}.
\end{aligned}
$$

Para acotar D_3, usando la desigualdad de Young tenemos que:

$$
\begin{aligned}
D_3 &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s,\psi(s),\mathcal{K}\psi(s))(t-s)^{\alpha-1}ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ||f(s,\psi(s),\mathcal{K}\psi(s)) - f(s,0,0) + f(s,0,0)||(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [||f(s,\psi(s),\mathcal{K}\psi(s)) - f(s,0,0)|| + ||f(s,0,0)||](t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t [||f(s,\psi(s),\mathcal{K}\psi(s)) - f(s,0,0)|| + ||f(s,0,0)||]ds \right] \left[\int_0^t s^{\alpha-1}ds \right] \\
&\leq \frac{b^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t C_1 \left[||\psi(s)|| + \left\| \int_0^s k(s,r,\psi(r))dr \right\| \right] + N\,ds \\
&\leq \frac{b^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t C_1 \left[r + \left\| \int_0^s k(s,r,\psi(r)) - k(s,r,0)\,dr \right\| + \left\| \int_0^s k(s,r,0)dr \right\| \right] + N\,ds \\
&\leq \frac{b^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t C_1 [r + bC_2 r + N^{**}] + N\,ds \\
&\leq \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} (C_1 r(1+bC_2) + C_1 N^{**} + C_1 N).
\end{aligned}
$$

Análogamente, para D_4 tenemos que:

$$\begin{aligned} D_4 &= \left|\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t S'(t-s)\int_0^s f(r,\psi(r),\mathcal{K}\psi(r))(s-r)^{\alpha-1}drds\right|\right| \\ &\leq \int_0^t ||S'(t-s)|| \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\left|\int_0^s ||f(r,\psi(r),\mathcal{K}\psi(r))(s-r)^{\alpha-1}dr\right|\right|}_{D_3} ds \\ &\leq ||\varphi_A||_1 \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}(C_1 r(1+bC_2)+C_1N^{**}+C_1N). \end{aligned}$$

Por lo que, finalmente:

$$\begin{aligned} ||\Phi_1\phi(t)+\Phi_2\psi(t)|| &\leq [1+||\varphi_A||_1][||u_0||+Gr+||g(0)||+||e(0,u_0)||+C_3r+N^*] \\ &+[1+||\varphi_A||_1]\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}(C_1r(1+bC_2)+C_1(N^{**}+N)) \leq r. \end{aligned}$$

De esto deducimos que Φ_1, Φ_2 y Φ llevan a la bola B en sí misma.
Por la cota obtenida para D_2, sabemos que la función $s \mapsto S'(t-s)[u_0 - g(\phi) + e(0,u_0) - e(s,\phi(s))]$ es integrable en para todo $t \in J$. Además, si $\phi, \psi \in C(J,[D(A)])$ usando (H5):

$$\begin{aligned} ||\Phi_1\phi(t)-\Phi_1\psi(t)|| &\leq ||g(\phi)-g(\psi)||+||e(t,\phi(t))-e(t,\psi(t))|| \\ &+\int_0^t ||S'(s-t)||(||g(\phi)-g(\psi)||+||e(t,\phi(t))-e(t,\psi(t))||)ds \\ &\leq G||\phi-\psi||+C_3||\phi-\psi||+||\varphi_A||_1(G||\phi-\psi||+C_3||\phi-\psi||) \\ &= (1+||\varphi_A||_1)(G+C_3)||\phi-\psi|| \\ &\leq ||\phi-\psi||. \end{aligned}$$

Así, tenemos que Φ_1 es una contracción en B.

Ahora, vamos a verificar que Φ_2 es continua. Notamos que, por la cota obtenida para D_4, la función $s \mapsto S'(t-s)\int_0^s f(r,\phi(r),\mathcal{K}\phi(r))(s-r)^{\alpha-1}\,dr$ es integrable para todo $t \in J$.
Además, así como D_3 y D_4, la función Φ_2 es uniformemente acotada.
Sea $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en B tal que $\phi_n \xrightarrow{n\to\infty} \phi$ en B. Como tenemos que f y $\mathcal{K}$ son continuas, tenemos que

$$f(s,\phi_n(s),\mathcal{K}\phi_n(s)) \xrightarrow{n\to\infty} f(s,\phi(s),\mathcal{K}\phi(s)), \text{ para todo } s\in J.$$

Para $t \in J$,

$$\begin{aligned} ||\Phi_2\phi_n(t)-\Phi_2\phi(t)|| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t ||f(s,\phi_n(s),\mathcal{K}\phi_n(s))-f(s,\phi(s),\mathcal{K}\phi(s))||\,ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t ||S(t-s)||\int_0^s ||f(r,\phi_n(r),\mathcal{K}\phi_n(r))-f(r,\phi(r),\mathcal{K}\phi(r))||\,dr\,ds \\ &\leq \frac{b(1+||\varphi_A||_1)}{\Gamma(\alpha)}\sup_{s\in J}||f(s,\phi_n(s),\mathcal{K}\phi_n(s))-f(s,\phi(s),\mathcal{K}\phi(s))|| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

De donde Φ_2 es continua.
Ahora, probaremos que $\Phi_2 B$ está contenido en un conjunto compacto. Para eso, veamos primero que el conjunto $\Lambda = \{\Phi_2\phi(t) \mid \phi \in B\}$ es precompacto en X. Notamos que el conjunto $\{\Phi_2\phi(0) \mid \phi \in B\}$ es compacto. Fijemos $t \in]0, b]$ y $\phi \in B$. Dado $\varepsilon > 0$, definamos el operador:

$$\begin{aligned}\Phi_2^\varepsilon\phi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-\varepsilon} f(s, \phi(s), \mathcal{K}\phi(s))(t-s)^{\alpha-1}ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-\varepsilon} S'(t-s)\int_0^s f(r, \phi(r), \mathcal{K}\phi(r))(s-r)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Como f es completamente continua, el conjunto $\Lambda_\varepsilon = \{\Phi_2^\varepsilon\phi(t) \mid \phi \in B\}$ es precompacto en X para cada ε tal que $0 < \varepsilon < t$. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}||\Phi_2\phi(t) - \Phi_2^\varepsilon\phi(t)|| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\varepsilon}^{t} f(s, \phi(s), \mathcal{K}\phi(s))(t-s)^{\alpha-1}ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t-\varepsilon}^{t} S'(t-s)\int_0^s f(r, \phi(r), \mathcal{K}\phi(r))(s-r)^{\alpha-1} \\ &\leq \varepsilon[1 + ||\varphi_A||_1]\frac{b^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}(C_1 r(1 + bC_2) + C_1(N^{**} + N)).\end{aligned}$$

Esto demuestra que los conjuntos Λ_ε están arbitrariamente cercanos al conjunto Λ. Por ende, Λ es precompacto en X.
A continuación, demostremos que $\Phi_2(B)$ es equicontinuo. Para $\phi \in B$, notemos que la familia $\{\Phi_2\phi(0), \phi \in B\}$ es equicontinua. Para t fijo, y $h > 0$ tal que $0 < t < t + h < b$ tenemos:

$$\begin{aligned}||\Phi_2\phi(t+h) - \Phi_2\phi(t)|| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\left|\int_0^{t+h} f(s, \phi(s), \mathcal{K}\phi(s))(t+h-s)^{\alpha-1}\,ds\right.\right. \\ &\left.\left.- \int_0^t f(s, \phi(s), \mathcal{K}\phi(s))(t-s)^{\alpha-1}\,ds\right|\right| \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}||\int_0^{t+h} S'(t+h-s)\int_0^s f(r, \phi(r), \mathcal{K}\phi(r))(s-r)^{\alpha-1}\,dr\,ds \\ &- \int_0^t S'(t-s)\int_0^s f(r, \phi(r), \mathcal{K}\phi(r))(s-r)^{\alpha-1}\,dr\,ds|| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t ||f(s, \phi(s), \mathcal{K}\phi(s))||\,[(t+h-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}]\,ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{t+h} ||f(s, \phi(s), \mathcal{K}\phi(s))||\,(t+h-s)^{\alpha-1}\,ds \\ &+ \int_0^t ||S'(t+h-s) - S'(t-s)||\int_0^s ||f(r, \phi(r), \mathcal{K}\phi(r))||(s-r)^{\alpha-1}\,dr\,ds \\ &+ \int_t^{t+h} ||S'(t+h-s)||\int_0^s ||f(r, \phi(r), \mathcal{K}\phi(r))||(s-r)^{\alpha-1}\,dr\,ds.\end{aligned}$$

Los últimos 4 sumandos tienden a cero cuando $h \to 0$ por el teorema de convergencia dominada. Luego, el conjunto $\{\Phi_2\phi \mid \phi \in B\}$ es equicontinuo. Por el teorema de Ascoli-Arzelà, $\Phi_2(B)$ es precompacto. Para cualquier conjunto acotado F en $C(J, X)$, existe un radio suficientemente grande para el cual $F \subset B$, de donde $\Phi_2(F)$ es también precompacto, y deducimos que Φ_2 es completamente compacto. Finalmente, al aplicar el Teorema del punto fijo de Krasnoselskii, existe una función $u \in C(J, X)$ tal que $\Phi u = u$. Concluimos que existe una solución mild para la ecuación (2.1).

■

2.4. Aplicaciones

Consideremos la siguiente ecuación integrodiferencial

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^\alpha[u(t,x) + a_1(t)u(t,x)] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \int_0^t a_2(t-s)e^{-u(t,x)}\,ds + a_3(t)\sin[u(t,x)], \quad t > 0\\
u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad (t,x) \in [0,b] \times [0,\pi]\\
u(0,x) &+ \sum_{k=0}^{n} \int_0^{t_k} b_k(\tau)u(\tau,x)\,d\tau = z(x),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $0 < \alpha < 1$, $a_k \in L^2(J)$, $k = 1, 2, 3$, y $b_j \in L^2(J, \mathbb{R})$, $j = 1, 2$. Consideremos $X := L^2[0, \pi]$ y sea A el operador definido por $Av(x) = \frac{d^2}{dx^2}v(x)$ con dominio $D(A) := \{v \in X : v \in W^{2,2}([0,\pi]), v(0) = v(\pi) = 0\}$. Es bien sabido que A es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $\{T(t)\}_{t>0}$ en X. Más aún, A tiene espectro discreto, y sus valores propios son de la forma $-n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, cuyos vectores propios normalizados correspondientes vendrían siendo las funciones $\varphi_n(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sin(ns)$. Además, $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de X, y con ella tenemos la siguiente identidad

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle x, \varphi_n\rangle\varphi_n$$

para todo $x \in X$ y $t > 0$. De esta expresión se desprende que el semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$ es uniformemente acotado y compacto, por lo que la resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ es un operador compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$. Es sabido (véase [12]) que la ecuación integral

$$u(t) = f(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t Au(s)(t-s)^{\alpha-1}, \quad s \geq 0$$

tiene una familia de operadores resolventes analítico $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en X dado por

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_\theta} e^{\lambda t}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\,d\lambda, & t > 0\\ I \quad t = 0 \end{cases}$$

donde γ_θ denota el camino que consiste de los rayos $\{re^{i\theta} : r \geq 0\}$ y $\{re^{-i\theta} : r \geq 0\}$, para algún $\theta \in]\pi/2, \pi[$. Es fácil ver que $S(t)$ es diferenciable y que existe una constante $M > 0$ tal que $||S'(t)x|| \leq N||x||$ para $x \in D(A)$ y $t > 0$.
Para representar el problema (2.12) en la forma abstracta de la ecuación (2.1), introduciremos las funciones:

$$\begin{aligned} e(t,w)(x) &= a_1(t)w(x) \\ f(t,w,\mathcal{K}w) &= w(x) + a_3(t)\sin[w(t)] \\ g(u(x)) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{t_k} b_k(\tau)u(\tau,x)\,d\tau. \end{aligned}$$

Notemos que $||g(u(x)) - g(v(x))|| \leq \sum_{k=1}^{n} ||b_k||\,||u-v||$, $C_3 = \sup_{t\in J} ||a_1(t)||$, $||\varphi_A||_1 = N$, $C_1 = 1 + \ sup_{t\in J}||a_3(t)||$, $C_2 = sup_{t\in J}||a_2(t)||$ y $G = \sum_{k=1}^{n} t_k||b_k||$. Escogemos los t_k de manera que $2(1+N)\left(G + C_3 + \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}C_1(1+bC_2)\right) \leq 1$, para que así las condiciones (H0)-(H5) se cumplan, y luego, por el Teorema 2.7 existe una solución mild para (2.12).

Capítulo 3

Regularidad maximal en L^p para ecuaciones diferenciales fraccionarias en todo $\mathbb{R}$

3.1. Introducción

Consideremos la ecuación

$$D_{-}^{\alpha}u(t) = Au(t) + Fu_t + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

donde $\alpha > 0$, A es un operador lineal cerrado en X, $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$, con $1 < p < \infty$, y la derivada es tomada en el sentido de Caputo en toda la recta real. $F : L^p([-r, 0], X) \to X$ es un operador lineal acotado, y $u_t(\cdot) = u(t + \cdot)$. Nuestro cometido en esta sección es buscar condiciones para la existencia de soluciones dependiendo de la función f siguiendo los lineamientos del artículo [10]. Para ello, nos apoyaremos en técnicas de Multiplicadores de Fourier.

Definición 3.1. *Sean X e Y dos espacios de Banach, $1 < p < \infty$. Una función $M \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(X, Y))$ se dice un $L^p_{X,Y}$-multiplicador si existe un operador acotado $T : L^p(\mathbb{R}, X) \to L^p(\mathbb{R}, Y)$ tal que para toda función $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$*

$$Tf \in S(\mathbb{R}, Y), \qquad y\ \mathcal{F}(Tf)(s) = M(s)\mathcal{F}f(s).$$

Definición 3.2. *Una familia de operadores $T \subset \mathcal{B}(X, Y)$ se dice $\mathcal{R}-$acotada si existe una constante $C > 0$ tal que para toda subfamilia finita $\{T_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{T}$ y $\{x_j\}_{j=1}^n$ con $n \in \mathbb{N}$*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) T_j x_j \right\|_Y dt \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\|_X dt$$

donde $\{r_j\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes Bernoulli con valores en $\{-1, 1\}$ en $[0, 1]$. Por ejemplo, las funciones de Rademacher $r_j(t) = sgn(\sin(2^j \pi t))$. El *más pequeño valor de C se dice la $\mathcal{R}-$cota de $\mathcal{T}$ y la denotamos $R_p(\mathcal{T})$.*

Algunas propiedades de familias de operadores $\mathcal{R}-$acotados son compiladas en la siguiente proposición:

Proposición 3.3. *[1] Sean X, Y y Z espacios de Banach. Entonces, se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Cualquier familia finita $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ es $\mathcal{R}$-acotado.*
2. *Si $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ son dos familias de operadores $\mathcal{R}$-acotados, entonces la familia*
$$\mathcal{S} + \mathcal{T} := \{S + T : S \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{T}\}$$
es $\mathcal{R}$-acotada.
3. *Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ y $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(Y, Z)$ son dos familias de operadores $\mathcal{R}$-acotados, entonces la familia*
$$\mathcal{T}\mathcal{S} := \{TS : T \in \mathcal{T}, S \in \mathcal{S}\}$$
es $\mathcal{R}$-acotada.
4. *Para $\Lambda \subset \mathbb{C}$ la familia $\{\lambda I : \lambda \in \Lambda\}$ es $\mathcal{R}$-acotada si el conjunto Λ es acotado.*
5. *Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ es una familia $\mathcal{R}$-acotada, entonces es uniformemente acotada con $\sup\{||T|| : T \in \mathcal{T}\} \leq R_p(\mathcal{T})$.*
6. *Si X y Y son espacios de Hilbert, entonces una familia de operadores $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ es $\mathcal{R}$-acotada si y sólo si es uniformemente acotada.*

Teorema 3.4. *[14] Sean X y Y dos espacios UMD y $1 < p < \infty$. Suponga que $M \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(X, Y))$, y que los conjuntos*

$$\{M(s) : s \in \mathbb{R} - \{0\}\} \quad y \quad \{sM'(s) : s \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

son $\mathcal{R}-$acotados. Entonces M es un $L^p_{X,Y}-$multiplicador.

3.2. Regularidad Maximal

Definición 3.5. *Sea $1 < p < \infty$. Para $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$, una función $u \in L^p(\mathbb{R}, X)$ se dice solución de la ecuación (3.1) si $u \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$ y satisface la ecuación (3.1) para casi todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definición 3.6. *Sea $1 < p < \infty$. Para $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$, una función $u \in L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$ se dice solución débil de la ecuación (3.1) si*

$$\int_{\mathbb{R}} u(t) D^{\alpha}_{+} \phi(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}} (Au(t) + Fu_t + f(t)) \phi(t) \, dt$$

para toda función $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Definición 3.7. *La ecuación* (3.1) *tiene regularidad maximal en* L^p *si para cada función* $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ *existe una única solución* u *para la ecuación* (3.1).

Lema 3.8. *Para* f, g *tales que* $D_-^\alpha f$ *e* $I_+^\alpha g$ *existen, se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} D_-^\alpha f(t) I_+^\alpha g(t)dt.$$

Demostración. Probaremos primero que

$$\int_{\mathbb{R}} I_+^\alpha f(s)g(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(s) I_-^\alpha g(s)\,ds. \tag{3.2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} I_+^\alpha f(s)g(s)\,ds &= \int_{\mathbb{R}} \int_s^\infty \frac{(s-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)\,dt\,g(s)\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_s^\infty \frac{(s-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)g(s)\,dt\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \frac{(s-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)g(s)\,ds\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^t \frac{(s-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(s)\,ds\,f(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_-^\alpha g(t) f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Luego, utilizando (3.2), tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} D_-^\alpha f(t) I_+^\alpha g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} I_-^\alpha D_-^\alpha f(t) g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt.$$

∎

Corolario 3.9. *Para* ϕ, ψ *tales que* $D_+^\alpha \phi$ *y* $D_-^\alpha \psi$ *tengan sentido, se tiene que:*

$$\int_{\mathbb{R}} D_+^\alpha \phi(t)\psi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) D_-^\alpha \psi(t)\,dt.$$

Demostración. Basta considerar $f = D_+^\alpha \phi$ y $g = D_-^\alpha \psi$ en (3.2). ∎

Denotemos por $\epsilon_s(t) = e^{ist}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, y definamos los operadores $\{F_s\}_{s\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(X)$ por

$$F_s x := F(\epsilon_s x), \quad \text{para todos } s \in \mathbb{R} \text{ y } x \in X.$$

Notamos que $\mathcal{F}(Fu_t)(s) = F_s \mathcal{F}u(s)$ para todos $s \in \mathbb{R}$ y $u \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Para $s \in \mathbb{R}$, $(is)^\alpha = |s|^\alpha e^{\frac{\pi\alpha i}{2}\operatorname{sgn}(s)}$. Definimos el conjunto resolvente real $\rho(A, F)$ como

$$\rho(A,F) := \{s \in \mathbb{R} : ((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} \text{ existe y es acotado}\}$$

y al correspondiente espectro real $\sigma(A, F)$ como

$$\sigma(A,F) = \mathbb{R} - \rho(A,F).$$

Proposición 3.10. *Supongamos que $\sigma(A, F) = \varnothing$. Sea $1 < p < \infty$. Consideremos $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$ y $u \in L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$. Son equivalentes:*

a) $u \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X)$ y u es una solución para la ecuación (3.1).

b) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, [D(A)])$ y $\mathcal{F}u(s) = ((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}\mathcal{F}f(s)$ para $s \in \mathbb{R}$.

Demostración.
b) $\Rightarrow$ a) Primero notemos que $\mathcal{F}(D_-^\alpha u)(s) = (is)^\alpha \mathcal{F}u(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Además, usando que $D_+^\alpha(e^{-ist}) = (is)^\alpha e^{-ist}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, junto con el lema 3.9 tenemos que:

$$(is)^\alpha \mathcal{F}u(s) = \int_{\mathbb{R}} (is)^\alpha e^{-ist} u(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} D_-^\alpha u(t)\, dt = \mathcal{F}(D_-^\alpha u)(s).$$

Usando que A es un operador cerradoy $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, [D(A)])$, se sigue que $\mathcal{F}(Au)(s) = A\mathcal{F}(u)(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Por ende, $\mathcal{F}(D_-^\alpha u - Fu_{(\cdot)} - Au)(s) = ((is)^\alpha - F_s - A)\mathcal{F}u(s) = \mathcal{F}f(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Puesto que la transformada de Fourier es inyectiva, obtenemos que $D_-^\alpha - Fu_{(\cdot)} - Au = f$.

a) $\Rightarrow$ b) Sea $u \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$ una solución de la ecuación (3.1). Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi(s)((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}\mathcal{F}f(s)\, ds &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}\mathcal{F}(D_-^\alpha u - Fu_{(\cdot)} - Au)(s)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}((is)^\alpha - F_s - A)\mathcal{F}u(s)\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)\mathcal{F}u(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Al considerar $L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$ como subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, [D(A)])$, tenemos por la igualdad anterior que $\mathcal{F}u(s) = ((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}\mathcal{F}f(s)$ para $s \in \mathbb{R}$, y puesto que por hipótesis $\mathcal{F}f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$, tenemos que $\mathcal{F}u = ((i\cdot)^\alpha - F_{(\cdot)} - A)^{-1}\mathcal{F}f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, [D(A)])$, por lo que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, [D(A)])$. ∎

Lema 3.11. *Sean $\alpha, \beta > 0$. Si φ pertenece a la clase de Liouville, entonces*

$$\begin{aligned}
D_-^\alpha[e^{-\beta|t|}\varphi(t)] &= e^{-\beta|t|}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}(-sgn(t)\beta)^k D_-^{\alpha-k}\varphi(t) \\
&\quad + e^{-\beta|t|}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-sgn(t)\beta)^k I_-^{k-\alpha}\varphi(t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

con $n = \lceil \alpha \rceil$ y $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k-1)}{k!}$.

Demostración. Sea $g(x) = e^{-\epsilon x} D_-^\alpha \varphi(x)$. Entonces, $I_-^\alpha[g(x)e^{\epsilon x}] = \varphi(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}
e^{-\epsilon x}\varphi(x) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} e^{\epsilon(t-x)} g(t)dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-\epsilon u} g(x-u)du \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon u)^k}{k!} g(x-u)du \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k}{k!} \int_0^\infty u^{\alpha+k-1} g(u+x)du \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+k)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha+k-1} g(t)dt \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k \Gamma(\alpha+k)}{k!} I_-^{\alpha+k} g(x).
\end{aligned}$$

Aplicando D_-^α a (3.2), tenemos que

$$D_-^\alpha[e^{-\epsilon x}\varphi(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k \Gamma(\alpha+k)}{k!} I_-^k g(x).$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación precedente por $e^{\epsilon x}$, queda

$$\begin{aligned}
e^{\epsilon x} D_-^\alpha[e^{-\epsilon x}\varphi(x)] =& D_-^\alpha \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha) k! \Gamma(k)} e^{\epsilon x} \int_0^\infty u^{k-1} g(x-u)du \\
=& D_-^\alpha \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha) k! \Gamma(k)} e^{\epsilon x} \int_0^\infty u^{k-1} e^{-\epsilon(x-u)} D_-^\alpha \varphi(x-u)du \\
=& D_-^\alpha \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^k \Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha) k! \Gamma(k)} \int_0^\infty u^{k-1} e^{\epsilon u} D_-^\alpha \varphi(x-u)du \\
=& D_-^\alpha \varphi(x) + (-\epsilon) \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!\Gamma(k+1)} (-\epsilon u)^{k-1} e^{\epsilon u} D_-^\alpha \varphi(x-u)du \\
=& D_-^\alpha \varphi(x) + (-\epsilon) \int_0^\infty \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+2)} \frac{(-\epsilon u)^{k-1}}{k!} e^{\epsilon u} D_-^\alpha \varphi(x-u)du \\
=& D_-^\alpha \varphi(x) + (-\epsilon) \int_0^\infty \alpha \Phi(\alpha+1, 2, -\epsilon u) e^{\epsilon u} D_-^\alpha \varphi(x-u)du.
\end{aligned}$$

Notando que $\Phi(a,b,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b+k+1)} \frac{z^k}{k!}$ es la función de Kummer, y se tiene la transformación de Kummer $\Phi(a,b,z) = e^z \Phi(b-a, b, -z)$ (ver [9]). Luego, la igualdad anterior queda

$$\begin{aligned}
e^{\epsilon x} D_-^{\alpha}[e^{-\epsilon x}\varphi(x)] =& D_-^{\alpha}\varphi(x) + (-\epsilon)\int_0^{\infty} \alpha\Phi(-\alpha+1,2,\epsilon u) D_-^{\alpha}\varphi(x-u)du \\
=& D_-^{\alpha}\varphi(x) + (-\epsilon)\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+k)}{(k+1)!}\frac{(\epsilon u)^k}{k!} D_-^{\alpha}\varphi(x-u)du \\
=& D_-^{\alpha}\varphi(x) + (-\epsilon)\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}{(k+1)!}\frac{(-\epsilon u)^k}{k!} D_-^{\alpha}\varphi(x-u)du \\
=& D_-^{\alpha}\varphi(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k+1}(-\epsilon)^{k+1}\int_0^{\infty}\frac{u^k}{\Gamma(k+1)} D_-^{\alpha}\varphi(x-u)du \\
=& D_-^{\alpha}\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-\epsilon)^{k}\int_0^{\infty}\frac{u^{k-1}}{\Gamma(k)} D_-^{\alpha}\varphi(x-u)du \\
=& D_-^{\alpha}\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\epsilon^k I_-^k D_-^{\alpha}\varphi(x) \\
=& \sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}\epsilon^k D_-^{\alpha-k}\varphi(x) + \sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\epsilon^k I_-^{k-\alpha}\varphi(x).
\end{aligned}$$

Multiplicando por $e^{-\epsilon x}$ lo anterior, queda que

$$D_-^{\alpha}[e^{-\epsilon x}\varphi(x)] = e^{-\epsilon x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\alpha}{k}\epsilon^k D_-^{\alpha-k}\varphi(x) + e^{-\epsilon x}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\epsilon^k I_-^{k-\alpha}\varphi(x)$$

Haciendo $\epsilon = \mathrm{sgn}(x)\beta$ en la igualdad anterior y notando que $|x| = \mathrm{sgn}(x)x$ se tiene lo pedido.

∎

Para $\beta > 0$, definimos la siguiente norma

$$||f||_{\beta,p} := \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\beta|t|}||f(t)||^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Y definimos los siguientes espacios con peso:

$$L_\beta^p(\mathbb{R},X) := \{f : \mathbb{R}\to X \text{ medible} : ||f||_{\beta,p} < \infty\}$$

y

$$W_\beta^{\alpha,p}(\mathbb{R},X) := \{f : \mathbb{R}\to X \text{ medible} \,|\, f, f', \ldots f^{(n)} \in L_\beta^p(\mathbb{R},X)\},\ \text{con } n = \lceil\alpha\rceil$$

Notamos que son espacios de Banach con la normas $||\cdot||_{\beta,p}$ y $||\cdot||_{\beta,p} + ||D\cdot||_{\beta,p} + \ldots + ||D^n\cdot||_{\beta,p}$, respectivamente.

Para $f \in L_\beta^p(\mathbb{R},X)$, decimos que $u \in L_\beta^p(\mathbb{R},X)$ es una solución de (3.1) si $u \in L_\beta^p(\mathbb{R},[D(A)])\cap W_\beta^{\alpha,p}(\mathbb{R},X)$ y u satisface la ecuación (3.1) para casi todo $t\in\mathbb{R}$.

El nexo es el siguiente: definamos el siguiente operador

$$\Psi : L^p_\beta(\mathbb{R}, X) \to L^p(\mathbb{R}, X)$$
$$u \mapsto \Psi u, \quad \text{donde } \Psi u(t) := e^{-\beta|t|}u(t).$$

Este operador define un isomorfismo entre $L^p_\beta(\mathbb{R}, X)$ y $L^p(\mathbb{R}, X)$.

Lema 3.12. *Sea $1 < p < \infty$, $\beta > 0$ y $f \in L^p_\beta(\mathbb{R}, X)$. Entonces $u \in L^p_\beta(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R}, X)$ es solución de la ecuación (3.1) si y sólo si Ψu es solución de la ecuación*

$$\begin{aligned} D^\alpha_- \Psi u(t) = A\Psi u(t) + F\Psi u_t + \Psi f(t) &+ e^{-\beta|t|}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{\alpha}{k}(-sgn(t)\beta)^k D^{\alpha-k}_- u(t) \\ &+ e^{-\beta|t|}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-sgn(t)\beta)^k I^{k-\alpha}_- u(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil$.

Demostración. Basta considerar $g = u$ en el lema anterior, y separar el termino $k = 0$ de la primera suma. ■

Lema 3.13. *Si la ecuación (3.1) tiene regularidad maximal en L^p, entonces existe $\beta > 0$ tal que para todo $f \in L^p_\beta(\mathbb{R}, X)$ existe una única solución $u \in L^p_\beta(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R}, X)$ de la ecuación (3.1) y el operador solución $M_\beta : L^p_\beta(\mathbb{R}, X) \to L^p_\beta(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R}, X)$ que lleva una función f a su correspondiente solución de la ecuación (3.1) es un operador lineal acotado.*

Demostración. Sea $f \in L^p_\beta(\mathbb{R}, X)$. Por el lema 3.12, se sigue que $u \in L^p_\beta(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R}, X)$ es solución de la ecuación (3.1) si y sólo si $\Psi u \in L^p(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X)$ es solución de la ecuación (3.4).
Definamos la función $\bar{M}_\beta : W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X) \to W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$ por

$$\bar{M}_\beta(g) := M(-h_g),$$

donde

$$\begin{aligned} h_g(t) =& e^{-\beta|t|}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{\alpha}{k}(-\mathrm{sgn}(t)\beta)^k\beta^{-1}D^{\alpha-k}_-(e^{\beta|t|}g(t)) \\ &+ e^{-\beta|t|}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-\mathrm{sgn}(t)\beta)^k\beta^{-1}I^{k-\alpha}_- u(t) \\ =& \beta^{-1}[D^\alpha_- g(t) - e^{-\beta|t|}D^\alpha_-(e^{\beta|t|}g(t))], \end{aligned}$$

y M es el operador solución de (3.1). Del lema 3.11 se desprende que $h_g \in L^p(\mathbb{R}, X)$, por lo que tenemos que $\bar{M}_\beta$ está bien definido y es acotado. Por otro lado, por (3.4) tenemos que

$$
\begin{aligned}
D_-^\alpha[(1+\beta\bar{M}_\beta)\Psi u](t) =& D_-^\alpha\Psi u(t)+\beta D_-^\alpha\bar{M}_\beta\Psi u(t)\\
=& A\Psi u(t)+F\Psi u_t+\Psi f(t)+\beta h_{\Psi u}(t)+\beta D_-^\alpha\bar{M}_\beta\Psi u(t)\\
=& A\Psi u(t)+F\Psi u_t+\Psi f(t)+\beta h_{\Psi u}(t)+\beta D_-^\alpha[M(-h_{\Psi u})](t)\\
=& A\Psi u(t)+F\Psi u_t+\Psi f(t)+\beta h_{\Psi u}(t)\\
&+\beta[AM(-h_{\Psi u})(t)+F[M(-h_{\Psi u})]_t-h_{\Psi u}(t)]\\
=& A\Psi u(t)+F\Psi u_t+\Psi f(t)+\beta AM(-h_{\Psi u})(t)+\beta F[M(-h_{\Psi u})]_t\\
=& A[\Psi u(t)+\beta M(-h_{\Psi u})(t)]+F\Psi u_t+\beta F[\bar{M}_\beta(\Psi u)]_t+\Psi f(t)\\
=& A[(1+\bar{M}_\beta)\Psi u](t)+F[((1+\bar{M}_\beta)\Psi u)_t]+\Psi f(t)+F\Psi u_t-F(\Psi u)_t\,.
\end{aligned}
$$

Esta última igualdad es puesto que $F((1+\beta\bar{M}_\beta)\Psi u)_t=F(\Psi u)_t+\beta F(\bar{M}_\beta\Psi u)_t$. De esto se obtiene que

$$M(\Psi f+\phi)=(1+\bar{M}_\beta)\Psi u$$

con $\phi(t)=F\Psi u_t-F(\Psi u)_t$. Si escojemos β lo suficientemente pequeño, entonces $(1+\beta\bar{M}_\beta)$ es invertible. Para β tal, tenemos que:

$$M_\beta f:=\Psi^{-1}\bar{M}_\beta f=\Psi^{-1}(1+\beta\bar{M}_\beta)^{-1}M(\Psi f+\phi).$$

Y por el teorema del gráfico cerrado, el operador M_β que lleva $f\in L^p_\beta(\mathbb{R},X)$ en la única solución $u\in L^p_\beta(\mathbb{R},[D(A)])\cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R},X)$ de (3.1) es un operador acotado.

■

Procedemos a abordar el teorema central de esta sección:

Teorema 3.14. *Supongamos que X es un espacio UMD, y $1<p<\infty$. Son equivalentes*

a) La ecuación (3.1) tiene regularidad maximal en $L^p(\mathbb{R},X)$

b) $\sigma(A,F)=\varnothing$ y $\{(is)^\alpha[(is)^\alpha-F_s-A]^{-1}\}_{s\in\mathbb{R}}$ es $\mathcal{R}$-acotado.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Asumamos que la ecuación (3.1) tiene regularidad maximal en $L^p(\mathbb{R},X)$. Primero, verifiquemos que $[(is)^\alpha-F_s-A]^{-1}$ exista.
Sea $s\in\mathbb{R}$ y supongamos que

$$((is)^\alpha-F_s-A)x=0, \tag{3.5}$$

para $x\in D(A)$. Sea $u(t)=e^{ist}x$. Entonces $u\in L^p_\beta(\mathbb{R},[D(A)])\cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R},X)$ para todo $\beta>0$. La función u es una solución de la ecuación (3.1) cuando $f=0$. De hecho, $D_-^\alpha u(t)=(is)^\alpha e^{ist}x$. Además, como $Fu_t=e^{ist}F_sx$, de (3.5) tenemos que

$$Au(t)=e^{ist}Ax=e^{ist}[(is)^\alpha-F_s]x=D_-^\alpha u(t)-Fu_t\,.$$

Luego, escogiendo $\beta>0$ pequeño como en el lema anterior, obtenemos por unicidad que $u=0$, y por ende $x=0$. Por tanto, $((is)^\alpha-F_s-A)$ es inyectiva.
Para ver que $((is)^\alpha-F_s-A)$ es epiyectivo, consideremos $y\in X$ arbitrario. Sea $s\in\mathbb{R}$ y β pequeño como en el lema anterior. Definamos $f_s(t):=e^{ist}y$. Es evidente que $f_s\in L^p_\beta(\mathbb{R},X)$.

Sea $M_\beta : L^p_\beta(\mathbb{R}, X) \to L^p_\beta(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}_\beta(\mathbb{R}, X)$ el operador acotado que toma una función $f \in L^p_\beta(\mathbb{R}, X)$ y la lleva a la única solución de la ecuación (3.1). Sea $u = M_\beta f_s$. Para $r \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos que las funciones $\phi_1(t) := u(t+r)$ y $\phi_2(t) = e^{isr}u(t)$ son soluciones de la ecuación (3.1) para $f(t) = e^{isr}f_s(t)$. Por unicidad, $\phi_1 = \phi_2$, o sea, $u(t+r) = e^{isr}u(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Sea $x := u(0) \in D(A)$. Si $r = -t$, entonces $u(t) = e^{ist}x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Puesto que $D^\alpha_- u(t) = (is)^\alpha e^{ist}x$, en particular tenemos que $D^\alpha_- u(0) = (is)^\alpha x$, y como u es solución de la ecuación (3.1) con $f(t) = f_s(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, también lo es en cero, por lo que tenemos

$$((is)^\alpha - F_s - A)x = D^\alpha_- u(0) - Fu - Au(0) = f_s(0) = y,$$

luego $((is)^\alpha - F_s - A)$ es epiyectiva para todo $s \in \mathbb{R}$, y por ende $((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}$ existe para todo $s \in \mathbb{R}$. Dado que A es un operador cerrado, por el teorema de gráfico cerrado $((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}$ es acotado para todo $s \in \mathbb{R}$. Luego, $\sigma(A, F) = \varnothing$.

Veamos que $\{(is)^\alpha[(is)^\alpha - F_s - A]^{-1}\}_{s \in \mathbb{R}}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Como el operador solución M de la ecuación (3.1) es acotado, tenemos que si $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$, entonces se sigue de la proposición 3.10 que $u = Mf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, [D(A)])$ y que $\mathcal{F}u(s) = \mathcal{F}(Mf)(s) = ((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}\mathcal{F}f(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Por ende, tenemos que $((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(X, [D(A)])$ es un $L^p_{X,[D(A)]}-$multiplicador, y por ende $\{((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}-$acotado (Véase [5]). Como la familia de operadores $\{F_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ es uniformemente acotada por $||F||$, obtenemos que $\{(F_s)((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Veamos que $\{A((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Como $\{\underbrace{((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}}_{N(s)} : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado, tenemos por definición que, para ciertos $\{s_j\}_{j=1}^n$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) N(s_j) x_j \right\|_{D(A)} dt \le C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\|_X dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) A N(s_j) x_j \right\| dt &\le \int_0^1 \left\| A \sum_{j=1}^n r_j(t) N(s_j) x_j \right\| dt + \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) N(s_j) x_j \right\| dt \\
&= \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) N(s_j) x_j \right\|_{D(A)} dt \\
&\le C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\|_X dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{A((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado, y así, el conjunto $\{(A + F_s)((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado.
Por la identidad

$$(is)^\alpha((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} = I + (A + F_s)((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}$$

se deduce finalmente que $\{(is)^\alpha[(is)^\alpha - F_s - A]^{-1}\}_{s\in\mathbb{R}}$ es $\mathcal{R}$-acotado.

b) $\Rightarrow$ a).
Para $s \in \mathbb{R}$, consideramos el operador $N(s) = ((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}$. Afirmamos que $\{N(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es un $L^p_{(X,[D(A)])}$-multiplicador. Para observar esto, notamos que por hipótesis $N \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{R}(X, [D(A)]))$, y de hecho:

$$\begin{aligned}\frac{N(s) - N(s+h)}{h} &= \frac{N(s)[I - N(s)^{-1}N(s+h)]}{h}\\ &= \frac{N(s)[N(s+h)^{-1} - N(s)^{-1}]N(s+h)}{h}\\ &= \frac{N(s)[(i(s+h))^\alpha - (is)^\alpha - F_{s+h} + F_s]N(s+h)}{h}\end{aligned}$$

Tomando $h \to 0$, y multiplicando por (is) en la igualdad anterior nos queda que:

$$(is)N'(s) = \alpha i(is)^\alpha N(s)N(s) - isN(s)F_s'N(s)$$

$\{F_s' : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado, y como consecuencia $\{isN'(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Veamos que $\{N(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Como por hipótesis $\{(is)N(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado, y el conjunto $\{(is)^{-\alpha}I : |s| \in [1, \infty[\}$ es $\mathcal{R}$-acotado, entonces $\{N(s) : |s| \in [1, \infty[\}$, y como evidentemente el conjunto $\{N(s) : |s| \in]0, 1[\}$ es $\mathcal{R}$-acotado, tenemos que $\{N(s) : s \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Luego, por el teorema 3.4 se tiene que $\{N(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es un $L^p_{(X,[D(A)])}$-multiplicador. Por ende, existe un operador acotado

$$T : L^p(\mathbb{R}, X) \to L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$$

tal que para $f \in \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$, $u := Tf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, [D(A)])$ y $((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}u$, y por ende, por la proposición 3.10, se sigue que u es solución de la ecuación (3.1). Notamos ahora que

$$||u||_{L^p(\mathbb{R},[D(A)])} \leq ||T||||f||_{L^p(\mathbb{R},X)}.$$

Con esto en mente, consideremos $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ una función arbitraria. Dada esta función, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$ tales que $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Definamos $u_n = Tf_n$. Entonces u_n es solución de (3.1) para f_n. Más aún, $u_n \xrightarrow{L^p} u = Tf$. Para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tenemos por el lema 3.8 que

$$\int_{\mathbb{R}} (Au_n(t) + F(u_n)_t + f_n(t))\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} D^\alpha_- u_n\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} u_n D^\alpha_+\phi(t)\,dt.$$

Haciendo tender $n \to \infty$, tenemos que u es una solución débil de (3.1), y luego $D^\alpha_- u = Au + Fu_{(\cdot)} + f$. Esto es, la ecuación (3.1) tiene regularidad maximal en $L^p(\mathbb{R}, X)$. Para ver unicidad, supongamos que

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + Fu_t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

con $u \in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, X) \cap L^p(\mathbb{R}, [D(A)])$.

Si consideramos que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ y si $m = \lceil \alpha \rceil$, tenemos que al hacer integral por partes en derivadas enteras, y luego en derivadas fraccionarias, que:

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\alpha}\widetilde{u}(\lambda) =& \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u(t)\, dt \\
=& \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} u^{(k)}(0) + \lambda^{\alpha-m} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u^{(m)}(t)\, dt \\
=& \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} u^{(k)}(0) + \int_0^{\infty} D_{+}^{\alpha-m}(e^{-\lambda t}) u^{(m)}(t)\, dt \\
=& \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} u^{(k)}(0) + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} D_{-}^{\alpha-m} u^{(m)}(t)\, dt \\
=& \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} u^{(k)}(0) + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} D_{-}^{\alpha} u(t)\, dt \\
=& \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{\alpha-1-k} u^{(k)}(0) + \widetilde{D_{-}^{\alpha} u}(\lambda).
\end{aligned}
$$

Con un cálculo análogo en el caso en que $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ deducimos que:

$$
\widetilde{D_{-}^{\alpha} u}(\lambda) = \lambda^{\alpha}\widetilde{u}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)\lambda^{\alpha-1-k},
$$

para $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. Además, es fácil ver que $\widetilde{u_{(\cdot)}} \in L^p([-r,0],X)$ y que $\widetilde{Fu_{(\cdot)}} = Fg\widetilde{u}(\lambda) + Fgh$ para $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$, donde $g(\theta) = e^{\lambda\theta}$ y $h(\theta) = \int_{\theta}^{0} e^{-\lambda t} u(t)\, dt$.
Aplicando transformada de Carleman en la ecuación (3.6), tenemos que

$$
(\lambda^{\alpha} - Fg - A)\widetilde{u}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)\lambda^{\alpha-1-k} + Fgh
$$

para $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$. Puesto que $\sigma(A,F) = \varnothing$, se sigue que el espectro de Carleman de u es vacío, y por ende por la proposición 1.1, $u = 0$.

∎

A consecuencia del teorema precedente, obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.15. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal cerrado y no acotado. Son equivalentes:*

a) La ecuación (3.1) *tiene regularidad maximal en $L^p(\mathbb{R}, X)$*

b) $\sigma(A,F) = \varnothing$ y $\sup\{||(is)^{\alpha}[(is)^{\alpha} - F_s - A]^{-1}|| : s \in \mathbb{R}\} < \infty$.

Corolario 3.16. *Sean X es un espacio UMD, y $1 < p < \infty$. Supongamos que $\sigma(A, F) = \varnothing$ y $\{(is)^\alpha[(is)^\alpha - F_s - A]^{-1}\}_{s\in\mathbb{R}}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Entonces, $D_-^\alpha u, Au \in L^p(\mathbb{R}, X)$. Más aún, existe una constante $C > 0$ que no depende de $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ tal que*

$$||D_-^\alpha u||_{L^p(\mathbb{R},X)} + ||Au||_{L^p(\mathbb{R},X)} \leq C||f||_{L^p(\mathbb{R},X)}.$$

El siguiente teorema es también conclusión del teorema 3.14.

Teorema 3.17. *Sea A un operador lineal en X un espacio de Banach . Supongamos que la ecuación (3.1) tiene regularidad maximal en L^p, para algún $p \in]1, \infty[$. Entonces $\sigma(A, F) = \varnothing$ y existe una contante $C > 0$ tal que*

$$||((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}|| \leq \frac{C}{1 + |s|^\alpha}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sean $s \in \mathbb{R}$ y $y \in X$. Así como en el teorema 3.14, tenemos que el operador $((is)^\alpha - F_s - A)$ es biyectivo, y por ende existe un elemento $x \in D(A)$ tal que $(is)^\alpha - F_s - A)x = y$. Sea β pequeño como el escogido en el lema 3.13. De la demostración del teorema tenemos que para la función $f_s(t) = e^{ist}y$, la única solución para la ecuación (3.1) es $u_s(t) = e^{ist}x$, y que además, $||u_s||_{\beta,p} = C_{\beta,p}||x||$. Notemos también que:

$$||u_s^{(k)}||_{\beta,p} = |s|^k C_{\beta,p}||x|| \quad \text{para } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 1 \leq k \leq m = \lceil\alpha\rceil$$

Por el lema 3.13 se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n}|s|^k\right)C_{\beta,p}||x|| &= \sum_{k=0}^{n}||u_s^{(k)}||_{\beta,p}\\ &= ||u_s||_{W_\beta^{\alpha,p}(\mathbb{R},X)\cap L_\beta^p(\mathbb{R},[D(A)])}\\ &= ||M_\beta f_s||_{W_\beta^{\alpha,p}(\mathbb{R},X)\cap L_\beta^p(\mathbb{R},[D(A)])}\\ &\leq ||M_\beta||\,||f_s||_{\beta,p}\\ &= CC_{\beta,p}||y||.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}||((is)^\alpha - F_s - A)^{-1}y|| &\leq \frac{C||y||}{\sum_{k=0}^{m}|s|^k}\\ &\leq \frac{C||y||}{1+|s|^\alpha}.\end{aligned}$$

■

3.3. Regularidad Maximal para una ecuación particular

Antes de continuar, vamos a hablar un poco de operadores que acá llamaremos cosectoriales.

Definición 3.18. *Un operador $A : D(A) \subset X \to X$ cerrado y de dominio denso en X es cosectorial de ángulo $\beta \in]0, \pi[$ si su espectro $\sigma(A)$ está contenido en la clausura del recinto $\Sigma_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \beta\}$ y si para todo $\eta \in]\beta, \pi[$ se cumple que*

$$\sup_{z \in \mathbb{C} - \Sigma_\eta} ||z(z - A)^{-1}|| < \infty.$$

Definimos también el ángulo cosectorial $\omega(A)$ como

$$\omega(A) := \inf\{\beta \in]0, \pi[: A \text{ es cosectorial de ángulo } \beta\}.$$

Para $\beta \in]0, \pi[$ definimos

$$H^\infty(\Sigma_\beta) := \{f : \Sigma_\beta \to \mathbb{C} : ||f||_{H^\infty} := \sup_{z \in \Sigma_\beta} |f(z)| < \infty\}$$

y

$$H_0^\infty(\Sigma_\beta) := \left\{ f \in H^\infty(\Sigma_\beta) : \text{ existe } \zeta > 0 \text{ tal que } \sup_{z \in \Sigma_\beta} |f(z)| \left| \frac{1 + z^2}{z} \right|^\zeta < \infty \right\}.$$

Si A es un operador cosectorial de ángulo $\beta \in]0, \pi[$, entonces

$$\Phi_A(f) := f(A) := \int_{\partial \Sigma_\eta} f(z)(z - A)^{-1}\, dz$$

define un cálculo funcional de $H_0^\infty(\Sigma_\eta)$ a $\mathcal{B}(X)$ para cada $\eta > \beta$. Este cálculo funcional puede ser extendido de manera natural para definir potencias fraccionarias del operador A, A^ε, para $\varepsilon > 0$. Para mayor referencia, véase [7].
Diremos que un operador cosectorial A admite un cálculo funcional acotado en H^∞ de ángulo $\beta \in [\omega(A), \pi[$ si el cálculo funcional en $H_0^\infty(\Sigma_\eta)$ se extiende a un operador lineal acotado en $H^\infty(\Sigma_\eta)$ para todo $\eta \in]\beta, \pi[$. El ínfimo de tales η es denotado por $\omega_H(A)$. Ejemplos bien conocidos de clases de operadores cerrados con cálculos funcionales que son acotados en H^∞ son los generadores de C_0-semigrupos en espacios L^p.
Un operador A admite un cálculo funcional acotado en H^∞ $\mathcal{R}$-acotado de ángulo $\beta \in [\omega_H(A), \pi[$ si además, para cada $\eta \in]\beta, \pi[$ el conjunto

$$\{f(A) : ||f||_{H^\infty} \leq 1\}$$

es $\mathcal{R}$-acotado.

En esta sección, estudiaremos la siguiente ecuación

$$D^\alpha u(t) + A^\varepsilon u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

para un operador A cosectorial, $1 < \alpha < 2$ y $\varepsilon > 0$.
El resultado importante de esta sección es el siguiente

Teorema 3.19. *Sea A un operador cosectorial el cual un admite un cálculo funcional acotado en H^∞ $\mathcal{R}$-acotado de ángulo $\omega \in]0, \frac{\pi}{\varepsilon}(1 - \frac{\alpha}{2})[$ en un espacio de Banach UMD, donde $1 < \alpha < 2$ y $\varepsilon > 1$. Si $0 \in \rho(A)$ y $1 < p < \infty$, entonces la ecuación (3.7) posee regularidad maximal en L^p.*

Demostración. Como $\omega \in]0, \frac{\pi}{\varepsilon}(1-\frac{\alpha}{2})[$, puedo escojer β tal que $\omega < \beta < \frac{\pi}{\varepsilon}(1-\frac{\alpha}{2})$. Para cada $z \in \Sigma_\beta$ y $s \in \mathbb{R} - \{0\}$, definamos

$$F(is, z) = \frac{(is)^\alpha}{(is)^\alpha + z^\varepsilon}.$$

Notemos que $\frac{z^\varepsilon}{(is)^\alpha}$ pertenece a la región $\Sigma_{\frac{\pi\alpha}{2}+\beta\varepsilon}$, y que $\frac{\pi\alpha}{2}+\beta\varepsilon < \pi$, por lo que la distancia entre la región $\Sigma_{\frac{\pi\alpha}{2}+\beta\varepsilon}$ y -1 es siempre positiva. Por ende, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|F(is, z)| = \left| \frac{1}{1 + \frac{z^\varepsilon}{(is)^\alpha}} \right| \leq M.$$

Como A admite un cálculo funcional acotado en H^∞ $\mathcal{R}$-acotado de ángulo ω se sigue que el conjunto $\{F(is, A) : s \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Como A es invertible, los operadores $((is)^\alpha + A^\varepsilon)^{-1}$ existen para todo $s \in \mathbb{R}$, por lo que $\{F(is, A) : s \in \mathbb{R}\}$ es $\mathcal{R}$-acotado. Concluimos por el teorema 3.14 que la ecuación (3.7) tiene regularidad maximal en L^p. ∎

Recordamos que un operador A se dice no negativo si $]-\infty, 0[\subset \rho(A)$ y existe una constante $K > 0$ tal que

$$||\lambda(\lambda - A)^{-1}|| < M \qquad \text{para todo } \lambda < 0,$$

y A se dice positivo si es no negativo y en adición es invertible.
Puesto que cada operador autoadjunto y positivo admite un cálculo funcional acotado en H^∞ $\mathcal{R}$-acotado de ángulo 0, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.20. *Sea A un operador autoadjunto y positivo definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $1 < \alpha < 2$ y $\varepsilon > 1$. Entonces, para cada función $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ existe una única función $u \in L^p(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ tal que la ecuación (3.7) se cumple para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Como $A := -\Delta$ de dominio $D(A) := \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f'' \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})\}$ es un operador autoadjunto y positivo, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.21. *Sea $1 < \alpha < 2$ y $\varepsilon > 1$. Entonces, para cada función $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ existe una única función $u \in L^p(\mathbb{R}, [D(A)]) \cap W^{\alpha,p}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ tal que la ecuación*

$$D^\alpha u(t) + (-\Delta)^\varepsilon u(t) = f(t)$$

es válida para todo $t \in \mathbb{R}$.

3.4. Aplicaciones

Consideremos la siguiente ecuación diferencial con retardo

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + \int_{-1}^{0} g(\theta) u(\theta + t, x)\, d\theta + f(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $1 < \alpha < 2$, $g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Asumiremos que la función definida por $t \mapsto f(\cdot, t) \in X := L^2([0, \pi])$ está en $L^p(\mathbb{R}, X)$. En X, definamos el operador A por $Av(x) = \frac{d^2}{dx^2}v(x)$ con dominio $D(A) := \{v \in X : v \in W^{2,2}([0, \pi]), v(0) = v(\pi)\}$.
El operador de retardo se define por

$$F(\phi) = \int_{-1}^{0} g(\theta)\phi(\theta)\, d\theta, \qquad \phi \in L^p([-1, 0], X).$$

Con estas notaciones, tenemos que el problema de valores iniciales (3.8) tiene la forma de la ecuación (3.1).
Es bien sabido que el operador A es un generador infinitesimal de un semigrupo analítico de espectro discreto, y que los valores propios de A son de la forma $-n^2, n \in \mathbb{N}$, cuyos vectores propios correspondientes son las funciones normalizadas definidas por $\varphi_n(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(ns)$. Además, $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de X, por lo que

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

para todo $x \in D(A)$. Luego,

$$((is)^\alpha - A)^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(is)^\alpha + n^2} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

para todo $x \in X$. Notar que

$$|(is)^\alpha + n^2| \geq |\mathrm{Im}[(is)^\alpha]| = |s|^\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \quad (s \neq 0)$$

y por ende,

$$||((is)^\alpha - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{|s|^\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2}} \quad (s \neq 0)$$

y además, $||F|| \leq ||g||_\infty := C < \infty$ Puesto que la identidad

$$(is)^\alpha((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} = (I - ((is)^\alpha - A)^{-1}F_s)^{-1}(is)^\alpha((is)^\alpha - A)^{-1}$$

es válida para todo $s \in \mathbb{R}$, tenemos que $(is)^\alpha((is)^\alpha - F_s - A)^{-1} < \infty$ si $\dfrac{C}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} < 1$ y $1 < \alpha < 2$. Por el teorema 3.14 se desprende que el problema (3.8) tiene regularidad maximal en L^p para $1 < p < \infty$. Más aún, la solución u del problema (3.8) satisface que $D^\alpha u$ y $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ están en $L^p(\mathbb{R}, L^2([0, \pi]))$.

Capítulo 4

Comportamiento asintótico y estabilidad de la Función de Mittag-Leffler generalizada

4.1. Introducción

En esta sección, consideraremos para $1 < \alpha < 2$, la ecuación diferencial

$$\mathbb{D}^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t),\ u(0) = x,\ u'(0) = y,\ t \geq 0, \tag{4.1}$$

con $x, y \in X$, $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal no-acotado.
Utilizando técnicas de Transformadas de Laplace análogas a los usados en la ecuación (1.4), se obtiene como solución $u(t) = E_{\alpha,1}(t)x + E_{\alpha,2}(t)y + \int_0^t E_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0$ donde

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-\beta}(\lambda^{\alpha} - A)^{-1}d\lambda$$

es la función de Mittag-Leffler generalizada. La integración se realiza por un camino γ conveniente en donde la resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ tenga sentido.

Siguiendo los lineamientos de [11], en esta sección estudiaremos las propiedades de la familia de operadores $E_{\alpha,\beta}$, y en particular, de la solución de la ecuación (4.1), afinando las condiciones para que dichas soluciones estén en L^p.

Definición 4.1. *Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal no-acotado densamente definido. A se dice $\omega-$sectorial de ángulo θ si existe $\theta \in [0, \pi/2[$ y $\omega \in \mathbb{R}$ tal que su resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ existe en el sector*

$$\omega + S_{\theta} := \{\omega + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, |\arg(\lambda)| < \pi/2 + \theta\} - \{\omega\}$$

y existe $M > 0$ tal que

$$||(\lambda - A)^{-1}|| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \lambda \in S_{\theta} + \omega.$$

4.2. Regularidad de $E_{\alpha,\beta}$

Teorema 4.2. *Sea $1 < \alpha < 2$, $1 < \beta < 2$, y $\omega < 0$. Supongamos que A es un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$. Entonces, existe una constante $K > 0$ que depende sólo de α y β tal que*

$$||E_{\alpha,\beta}(t)|| \leq \frac{Kt^{\beta-1}}{(1+t^{\alpha}|\omega|)}$$

para $t \geq 0$.

Demostración. Como A es ω-sectorial de ángulo θ, si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, se tiene que $\lambda^{\alpha} \in \rho(A)$, y por ende

$$||(\lambda^{\alpha} - A)^{-1}|| \leq \frac{M}{|\lambda^{\alpha} - \omega|}.$$

Fijemos $t > 0$, y consideremos

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-\beta}(\lambda^{\alpha} - A)^{-1} d\lambda, \tag{4.2}$$

donde γ es una curva orientada positiva que va dentro del sector $\omega + S_{\theta}$, que pasa por la región Γ que consiste de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que λ^{α} está en la frontera de $S_{\phi} \cup \{t^{-\alpha} + |\omega| + S_{\theta}\}$, donde $0 < \phi < \theta$. Escribiremos γ como el pegado de dos caminos: γ_1 es el camino que tiene por soporte $\Gamma \cap S_{\phi}$, y γ_2 es el camino que tiene por soporte $\Gamma \cap \{t^{-\alpha} + |\omega| + S_{\theta}\}$. Entonces, escribiremos $E_{\alpha,\beta}(t) = I_1(t) + I_2(t)$, donde

$$I_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-\beta}(\lambda^{\alpha} - A)^{-1} d\lambda, \qquad j \in \{1, 2\}.$$

Ahora, estimaremos las cantidades $||I_1(t)||$ e $||I_2(t)||$. Si denotamos por z_t y $\overline{z_t}$ a los puntos en común de γ_1 y γ_2, tenemos que para $\lambda \in \Gamma$

$$|\lambda^{\alpha} - \omega| \geq |\lambda^{\alpha} - z_t| \geq |z_t|\cos(\phi) = |z_t - (\omega + t^{-\alpha})|\cos(\theta) \geq \cos(\theta)(|\omega| + t^{-\alpha}),$$

y por tanto

$$\frac{1}{|\lambda^{\alpha} - \omega|} \leq \frac{t^{\alpha}}{\cos(\theta)(1 + t^{\alpha}|\omega|)}.$$

Acotando $||I_1(t)||$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
||I_1(t)|| \leq & \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} |e^{\lambda t}||\lambda|^{\alpha-\beta}||(\lambda^\alpha - A)^{-1}||\,|d\lambda| \\
\leq & \frac{M}{2\pi}\int_{\gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|\lambda|^{\alpha-\beta}}{|\lambda^\alpha - \omega|}|d\lambda| \\
\leq & \frac{Mt^\alpha}{2\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)}\int_{\gamma_1} e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|\lambda|^{\alpha-\beta}|d\lambda| \\
\leq & \frac{Mt^\alpha}{\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)}\int_0^\infty e^{-s\sin(\phi)t}s^{\alpha-\beta}ds \\
\leq & \frac{Mt^\alpha}{\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)[t\sin(\phi)]^{\alpha-\beta+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-\beta}du \\
= & \frac{Mt^{\beta-1}\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)[\sin(\phi)]^{\alpha-\beta+1}},
\end{aligned}$$

mientras que, acotando $||I_2(t)||$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
||I_2(t)|| \leq & \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1} |e^{\lambda t}||\lambda|^{\alpha-\beta}||(\lambda^\alpha - A)^{-1}||\,|d\lambda| \\
\leq & \frac{M}{2\pi}\int_{\gamma_1} \frac{e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|\lambda|^{\alpha-\beta}}{|\lambda^\alpha - \omega|}|d\lambda| \\
\leq & \frac{Mt^\alpha}{2\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)}\int_{\gamma_1} e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|\lambda|^{\alpha-\beta}|d\lambda| \\
\leq & \frac{Mt^\alpha C}{\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)}\int_0^\infty e^{-s\sin(\theta)t}s^{\alpha-\beta}ds \\
\leq & \frac{Mt^\alpha C}{\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)[t\sin(\theta)]^{\alpha-\beta-1}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-\beta}du \\
= & \frac{Mt^{\beta-1}C\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\pi\cos(\theta)(1+t^\alpha|\omega|)[\sin(\theta)]^{\alpha-\beta-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que existe una constante $K > 0$, que depende sólo de α y β tal que

$$||E_{\alpha,\beta}(t)|| \leq \frac{Kt^{\beta-1}}{1+t^\alpha|\omega|}$$

para $t \geq 0$.

■

Observemos que el teorema precedente implica que la familia $\{E_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ es asintóticamente estable. Es decir, que $||E_{\alpha,\beta}(t)|| \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

Corolario 4.3. *Sea X un espacio de Banach. Si $1 < \alpha < 2$ y $1 < \beta < 2$, $\omega < 0$ y A es un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$, entonces $\{E_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ es asintóticamente estable.*

Definición 4.4. *Una familia fuertemente continua de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se dice uniformemente p-integrable, para $1 \leq p < \infty$ si*

$$||S(t)||_p = \left(\int_0^\infty ||S(t)||^p\, dt\right)^{1/p} < \infty.$$

Corolario 4.5. *Sea X un espacio de Banach. Si $1 \leq \beta < \alpha < 2$, $\omega < 0$ y A es un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$, entonces $\{E_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente 1-integrable.*

Demostración. Por el Teorema 4.2, existe una constante $K > 0$ tal que

$$||E_{\alpha,\beta}(t)|| \leq \frac{Kt^{\beta-1}}{(1+t^\alpha|\omega|)}$$

para $t \geq 0$. Por ende,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ||E_{\alpha,\beta}(t)||dt \leq \int_0^\infty \frac{Kt^{\beta-1}}{(1+t^\alpha|\omega|)}\, dt &= \frac{K}{|\omega|^{\beta/\alpha}} \int_0^\infty \frac{u^{\beta-1}}{1+u^\alpha}\, du \\ &= \frac{K}{\alpha|\omega|^{\beta/\alpha}} \int_0^\infty \frac{v^{(\beta-\alpha)/\alpha}}{1+v}\, dv \\ &= \frac{K}{\alpha|\omega|^{\beta/\alpha}} B\left(\frac{\beta}{\alpha}; 1-\frac{\beta}{\alpha}\right),\end{aligned}$$

donde $B(\cdot\,;\cdot)$ es la función beta. ■

Para el siguiente corolario, utilizaremos un lema cuya demostración puede ser hallada en [2], Proposición 1.3.5.b.

Lema 4.6. *Sean X y Y dos espacios de Banach. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$, y $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X,Y)$ una familia de operadores fuertemente continua. Si $1 \leq p, q \leq \infty$ satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\int_0^\infty ||T(t)||^p dt < \infty$ y $f \in L^q(\mathbb{R}_+, X)$, entonces $T * f \in C(\mathbb{R}, Y)$ y $||(T * f)(t)|| \xrightarrow{t\to\infty} 0$.*

Corolario 4.7. *Sea X un espacio de Banach. $1 < \alpha < 2$, $\omega < 0$ y A un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$, entonces la solución u de la ecuación* (4.1) *verifica que $u(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.*

Demostración. Observemos que la solución de la ecuación (4.1) está dada por

$$u(t) = E_{\alpha,1}(t)x + E_{\alpha,2}(t)y + \int_0^t E_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Replicando los cálculos del teorema 4.2, es fácil ver que la familia $\{E_{\alpha,\alpha}(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continua. Luego, por el corolario 4.3 y por el lema 4.6 se sigue que $E_{\alpha,\alpha} * f$ es continua y $||(E_{\alpha,\alpha} * f)(t)|| \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Además,

$$||u(t)|| \leq ||E_{\alpha,1}(t)||\,||x|| + ||E_{\alpha,2}(t)||\,||y|| + ||(E_{\alpha,\alpha} * f)(t)|| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

■

En la siguiente proposición damos condiciones para que la solución de (4.1) esté en $L^p(\mathbb{R}, X)$

Proposición 4.8. *Sea $1 < \alpha < 2$, y $1 \leq \beta \leq 2$, $\omega < 0$ y A un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$. Si $(\beta-1)p - \alpha p < -1$, entonces $E_{\alpha,\beta}$ es uniformemente p-integrable. En particular, $E_{\alpha,\alpha}$ es uniformemente p-integrable.*

Demostración. Por el Teorema 4.2 existe una constante $K > 0$ tal que

$$||E_{\alpha,\beta}(t)|| \leq \frac{Kt^{\beta-1}}{(1+t^{\alpha}|\omega|)}$$

para $t \geq 0$. Por ende,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} ||E_{\alpha,\beta}(t)||^p\, dt &\leq K^p \int_0^{\infty} \frac{t^{(\beta-1)p}}{(1+t^{\alpha}|\omega|)^p}\, dt \\
&= \frac{K^p}{|\omega|^{\frac{(\beta-1)p+1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} \frac{u^{(\beta-1)p}}{(1+u^{\alpha})^p}\, du \\
&= \frac{K^p}{\alpha|\omega|^{\frac{(\beta-1)p+1}{\alpha}}} \int_0^{\infty} \frac{v^{\frac{(\beta-1)p+1}{\alpha}-1}}{(1+v)^p}\, dv \\
&= \frac{K^p}{\alpha|\omega|^{\frac{(\beta-1)p+1}{\alpha}}} B\left(\frac{(\beta-1)p+1}{\alpha}; p - \frac{(\beta-1)p+1}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

∎

Los próximos dos corolarios son fruto de la proposición 4.8, el corolario 4.3, del lema 4.6 y la desigualdad de Young para familias de operadores:

Lema 4.9. *Sean X y Y espacios de Banach. Sea $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tales que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Sea $f \in L^q(\mathbb{R}_+, X)$ y sea $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ una familia de operadores fuertemente continua y p-uniformemente integrable. Entonces, $T * f \in L^q(\mathbb{R}_+, Y)$ y*

$$||T * f||_r \leq ||f||_q \left(\int_0^{\infty} ||T(t)||^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Para una demostración de esta versión de la desigualdad de Young, véase [2].

Corolario 4.10. *Sea $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < 2$, $\omega < 0$, y A un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$. Si $f \in L^q(\mathbb{R}_+, X)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, la solución u de la ecuación (4.1) verifica que $||u(t)|| \xrightarrow{t\to\infty} 0$.*

Corolario 4.11. *Sea $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < 2$, $\omega < 0$, y A un operador ω-sectorial de ángulo $\theta = \frac{(\alpha-1)\pi}{2}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}_+, X)$ y $p - \alpha p < -1$, entonces la solución u del problema (4.1) pertenece a $L^p(\mathbb{R}_+, X)$.*

Demostración. Por la desigualdad de Young (Lema 4.9), tenemos que

$$||E_{\alpha,\alpha} * f||_p \leq ||f||_1 \left(\int_0^{\infty} ||E_{\alpha,\alpha}(t)||^p\, dt\right)^{1/p} < \infty.$$

Dado que la solución de (4.1) está dado por

$$u(t) = E_{\alpha,1}(t)x + E_{\alpha,2}(t)y + \int_0^t E_{\alpha,\alpha}(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Se tiene por la proposición 4.8 que $u \in L^p(\mathbb{R}_+, X)$. ∎

Ejemplo 4.12. *Sea $\tau < 0$. Consideremos el problema*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_t^\alpha u(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \tau u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) &= g(x), \qquad u'(x,0) = h(x), \qquad x \in [0,2\pi] \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $\mathbb{D}_t^\alpha$ denota derivada fraccionaria de Caputo con respecto a la variable t, $g, h \in X := L^2[0,2\pi]$, y $1 < \alpha < 2$. Consideremos el operador $Au := \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \tau u$ con dominio $D(A) := \{u \in L^2[0,2\pi] : u'' \in L^2[0,2\pi]; u(0) = u(2\pi) = 0\}$. Entonces, A es un operador τ-sectorial de ángulo $\pi/2$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}_+, L^2[0,2\pi])$, entonces por el Teorema 4.2 y los corolarios 4.7 y 4.11 la solución u de la ecuación (4.3) verifica que $||u(t)|| \xrightarrow{t\to\infty} 0$, y $u \in L^p(\mathbb{R}_+, L^2[0,2\pi])$ para $1 < p < \infty$.

Conclusiones

En esta tesis obtuvimos los siguientes resultados:

1. La existencia de soluciones de la ecuación (2.1) via técnicas de punto fijo. Nosotros logramos refinar los cálculos en la demostración del teorema 2.7, corrigiendo varios errores del artículo [3].

2. Condiciones necesarias y suficientes para la regularidad maximal en L^p de la ecuación (3.1). Se muestran los cálculos del todos los lemas del artículo [10].

3. Encontramos condiciones para la estabilidad asintótica y la p-integrabilidad de la función de Mittag-Leffler generalizada. Además, refinamos las condiciones para la estabilidad asintótica y la p-integrabilidad de las soluciones de la ecuación (4.1) vistas en [11].

Entre los desafíos que podrían seguir de esta tesis, están:

1. Verificar si el teorema 2.7 se sigue teniendo al debilitar algunas de las hipótesis (H0)-(H5).

2. Buscar mejores cotas para el módulo de la función de Mittag-Leffler generalizada.

3. Verificar si se pueden extrapolar las propiedades de la función de Mittag-Leffler generalizada y de las soluciones de la ecuación (4.1) si $0 < \alpha < 1$.

4. Investigar si la función de Mittag-Leffler generalizada es asintóticamente estable y p-integrable para operadores ω-sectoriales para $\omega \geq 0$.

Bibliografía

[1] R. Agarwal, C. Cuevas, and C. Lizama. Regularity of Difference Equations on Banach Spaces. *Springer International*, 2014.

[2] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander. Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. *Springer Basel AG*, 2000.

[3] K. Balachandran and S. Kiruthika. Existence results for fractional integrodifferential equaions with nonlocal condition via resolvent operators. *Computers and Mathematics with Applications*, 62:1350–1358, 2011.

[4] K. L. Chung. A Course in Probability Theory. *Academic Press*, 2001.

[5] P. Clément and J. Prüss. An operator-valued Transference Principle and Maximal Regularity on Vector-Valued L^p-spaces. *Evolution equations and their applications in physical and life sciences*, pages 67–87, 2001.

[6] R. Denk, M. Hieber, and J. Prüss. $\mathcal{R}$-Boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 166(788), 2003.

[7] M. Haase. The functional calculus for sectorial operators. *Operator Theory: Advances and applications*, 2006.

[8] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *Elsevier*, 2006.

[9] E. Kummer. De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (en Latín)*, 17:228–242, 1837.

[10] V. Poblete and R. Ponce. Maximal L^p-regularity for fractional differential equations on the line. *(Sometido)*.

[11] R. Ponce. Asymptotic behavior and uniform integrability of the generalized Mittag-Leffler function and its applications to fractional differential equations. *(Sometido)*.

[12] J. Prüss. Evolutionary Integral Equations and Applications. *Birkhäuser Verlag*, 1993.

[13] D.R. Smart. Fixed Point Theorems. *Cambridge University Press*, 1974.

[14] L. Weis. Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L^p property. *Math. Ann.*, (319):735–738, 2001.