UNIVERSIDAD DE CHILE

Reguladores minimales de cuerpos de números de grado pequeño

Tesis
entregada a la
Facultad de Ciencias
de la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
julio, 2015

por

Sergio Astudillo Bustos

Director de Tesis: Dr. Eduardo Friedman

Facultad de Ciencias

Universidad de Chile

Informe de aprobación

Tesis de Magister

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la tesis de Magister presentada por el candidato.

Sergio Andrés Astudillo Bustos

Ha sido aprobada por la comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa privada rendido el día lunes 6 de julio de 2015.

Director de Tesis:

Dr. Eduardo Friedman

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Yves Martin (Presidente)

Dr. Antonio Behn

Dedicada a Elizabeth, Camila, Amanda y Santiago

Agradecimientos

Comienzo agradeciendo a Elizabeth, mi mujer, por la infinita paciencia y apoyo que durante todos estos años me ha dado. Sin ella, dudo haber tenido la fuerza para comenzar y terminar esta gran empresa que nos costó a los dos. A mi hijas e hijo: Camila, Amanda y Santiago por existir y darme la oportunidad de ser padre y amigo.

Agradezco a mis profesores de la época escolar que, aunque dudo lean estas líneas, los recuerdo con cariño por su cariño y buenos consejos: Juanita Painen, Viviana Mell, Jorge Rivas y Profe Isabel entre otros.

A mis profesores de la Umce, Iván Correa y Fernando Córdova, gracias a los cuales me volví a motivar por las matemáticas y por tenderme el puente que necesitaba para comenzar con el Magister.

Finalizo agradeciendo sin duda al más grande de los profesores que he tenido: a Don Eduardo Friedman, quien tuvo la deferencia de aceptarme como tesista, lo cual fue para mi un momento crítico dada la inmensa admiración que le tengo. Por los momentos frente al pizarrón en los cuales pude apreciar la calidad de persona que tenía en frente y experto en esta ciencia que tanto amo.

Índice general

Resumen

Desde hace unos 25 años se conocen las listas rigurosas de todos los cuerpos de números de discriminante pequeño en cada signatura, hasta grado 7. Para grado 8 sólo se conoce el caso totalmente real y el totalmente complejo. Nuestra meta es deducir listas parecidas para reguladores. Es decir, buscamos la lista rigurosa de los reguladores más pequeños en cada una de estas signaturas. Usando métodos geométricos y analíticos introducidos por Remak, Pohst y Friedman, conseguimos nuestro objetivo para cuerpos de todas las signaturas hasta grado 6, para dos signaturas en grado 7, y para el caso óctico totalmemte complejo.

Abstract

Rigorous lists of all number fields of small discriminant up to degree 7 have been known for about 25 years. In degree 8 this holds only for totally real and totally complex fields. Our aim is to deduce analogous lists for regulators. In other words, we seek a rigorous list of the first few smallest regulators for each of these signatures. Using geometric and analytic techniques introduced by Remak, Pohst and Friedman, we succeed for all signatures up to degree 6, for two signatures in degree 7, and for totally complex octic fields.

Introducción

Aplicaremos métodos geométricos y analíticos para encontrar los reguladores mínimos en cada signatura[1] de cuerpos de grado 2 hasta 6. En grado 7 lo lograremos en dos signaturas, y en grado 8 para cuerpos totalmente complejos. En la mayoría de los casos damos los tres primeros reguladores.

Dentro de las aplicaciones que tiene encontrar reguladores mínimos, citamos el método computacional para resolver ciertas ecuaciones diofánticas [Ha] y [PZ], en la cual se necesita encontrar unidades fundamentales del anillo de enteros de un cuerpo de números. Para esto se necesitan cotas inferiores para el regulador.

Remak [Re], usando métodos geométricos, consigue cotas de la forma $|D_k| < f(n, R_k)$ para todo cuerpo k de grado n, discriminante D_k y regulador R_k, salvo el caso en que k es un cuerpo CM.[2] En el caso totalmente real, Pohst [Po1] mejora la cota de Remak para grados $n \leq 11$.

Friedman [Fr1] generaliza el método de Remak, encontrando cotas inferiores para el regulador cuando $k = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, donde los ε_i son un conjunto maximal de unidades independientes de k. Usando también métodos analíticos, Friedman consigue encontrar el menor regulador entre todos los cuerpos de números, a saber: el cuerpo totalmente complejo séxtico de discriminante -10051. Su método analítico es una mejora del de Zimmert [Zi], quien encuentra el menor regulador entre todos los cuerpos totalmente reales, a saber: el cuerpo cuadrático real de discriminante 5.

Nuestra meta es generalizar los resultados de Zimmert y Friedman, pero para cada signatura. Naturalmente, esto sólo es posible si se conoce la lista completa de cuerpos de discriminante hasta cierta cota para la signatura en cuestión. Estas tablas existen para todas las signaturas en grado menor a 8, para dos signaturas en grado 8, y para cuerpos de grado 9 totalmente reales. Para obtener los reguladores más pequeños en cada signatura, inspeccionamos la tabla buscando los tres primeros reguladores. Digamos que estos tres son menores que R_0, y que inten-

[1] La signatura es el par (r_1, r_2), donde r_1 es el número de incrustaciones reales de k y r_2 es el número de pares de incrustaciones complejas conjugadas.

[2] Un cuerpo k se dice CM si es una extensión cuadrática totalmente compleja de un cuerpo de números totalmente real k_+. En este caso es fácil de controlar el regulador de k por el de k_+.

taremos demostrar que todo otro cuerpo en esta signatura tiene regulador mayor que R_0. Los métodos de geometría de números (como mostraran Remak y Pohst) permiten acotar superiormente el discriminante de un cuerpo de números de estas signatura y regulador menor a R_0. Así encontramos que deberíamos inspeccionar todos los cuerpos k en esta signatura de discriminante $|D_k| \leq d_0$. En general esto es imposible, ya que las tablas no son tan extensas. Para solucionar esto, seguimos a Friedman [Fr1]. Por un método analítico descartamos todos los cuerpos con discriminante $d_1 < |D_k| \leq d_0$ con d_1 algo superior al valor absoluto del discriminante mínimo de esa signatura. Es decir,verificamos que las cotas inferiores analíticas del regulador permitan concluir que $R_k > R_0$ si $d_1 < |D_k| \leq d_0$. Sólo entonces nos apoyamos rigurosamente en la tabla para examinar los cuerpos k con $|D_k| \leq d_1$.

Queremos agradecer al profesor Francisco Díaz y Díaz por su inmensa ayuda con los cuerpos ócticos totalmente complejos.

Capítulo 1

Métodos geométricos

En este capítulo, demostramos algunos lemas que culminan con el Lema 3 [Fr1], nuestra herramienta principal para encontrar los reguladores minimales ya que acota superiormente el discriminante de un cuerpo (no CM) con regulador acotado.

Sea k un cuerpo de grado n. Denotamos por $r_1(k)$ y $r_2(k)$ (o simplemente r_1 y r_2 si el contexto es claro), al número de incrustaciones reales y pares de conjugadas complejas de k, respectivamente. En lo que sigue, llamamos signatura del cuerpo k al par (r_1, r_2).

Sea ∞_k el conjunto de lugares arquimedianos de k. Si $L \subseteq k$ y $w \in \infty_k$, denotamos por $e(w) = e_{k/L}(w)$ al índice de ramificación de w (igual a 1 ó 2) en k/L. Para $v \in \infty_L$ definimos:

$$r_2(v) = r_2(v; k/L) = \sum_{\substack{w \in \infty_k \\ w|v}} \big(e_{k/L}(w) - 1\big). \tag{1.1}$$

Notamos que $r_2(v) = 0$ si v es complejo. Si v es real, entonces $r_2(v)$ es el número de lugares complejos $w \in \infty_k$ tal que $w|v$. Para $v \in \infty_L$ y $\alpha \in L$, sea $\|\alpha\|_v$ el valor absoluto normalizado de α en v. Así $\left|N_{L/\mathbb{Q}}(\alpha)\right| = \prod_{v \in \infty_L} \|\alpha\|_v$.

Lema 1. *Supongamos que $k = L(\varepsilon)$, donde ε es una unidad de k. Entonces el discriminante D_k de k satisface:*

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \log |D_k| \leq \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \log |D_L| + \log([k:L]) + \frac{m_k(\varepsilon) A(k/L)}{[k:\mathbb{Q}]}$$

donde

$$m_k(\varepsilon) = \left(\sum_{w \in \infty_k} \left(\log \|\varepsilon\|_w\right)^2 \right)^{1/2},$$

$$A(k/L) = \left(\frac{1}{3} \sum_{v \in \infty_L} \left([k:L]^3 - [k:L] - 4r_2(v)^3 - 2r_2(v) \right) \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

y $r_2(v)$ está dado por (1.1).

Primero demostramos el caso cuando $L = \mathbb{Q}$ para clarificar la idea de la demostración general. Así la desigualdad del Lema 1 toma la forma:

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \log |D_k| \leq \log \left([k:\mathbb{Q}] \right) + \frac{m_k(\varepsilon) A\left(k/\mathbb{Q}\right)}{[k:\mathbb{Q}]}, \tag{1.3}$$

con

$$A(k/\mathbb{Q}) = \left(\frac{1}{3} \left([k:\mathbb{Q}]^3 - [k:\mathbb{Q}] - 4r_2(k)^3 - 2r_2(k) \right) \right)^{1/2}. \tag{1.4}$$

Demostración (para el caso $k = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ [Re]). Sea $\mathscr{S}(k)$ el conjunto de incrustaciones de k a $\mathbb{C}$. Enumeramos los $\tau \in \mathscr{S}(k)$ de la siguiente forma: sea $\{i_\tau\} = \{1, 2, \ldots, N = [k:\mathbb{Q}]\}$ donde $i_\tau \leq i_{\tau'}$ si $|\tau(\varepsilon)| \geq |\tau'(\varepsilon)|$. Si $\tau(\varepsilon) \notin \mathbb{R}$, hacemos que su conjugada compleja sea adyacente, esto es: $|i_\tau - i_{\bar{\tau}}| = 1$. Sea D_ε el discriminante del orden generado por ε sobre $\mathbb{Z}$. Por [Neu], (p. 5) D_k divide a D_ε. En [Neu] (p. 11) se muestra que:

$$D_\varepsilon = \prod_{\substack{\tau \neq \tau' \\ \tau, \tau' \in \mathscr{S}(k)}} \left(\tau(\varepsilon) - \tau'(\varepsilon) \right). \tag{1.5}$$

En [Re] (p. 251) se demuestra:

Proposición 1. *Si $z_1, \ldots, z_n$ son números complejos tales que $|z_1| \geq |z_2| \geq \ldots \geq |z_n|$. Entonces:*

$$\log \left(\prod_{i \neq j} |z_i - z_j| \right) \leq n \log n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) \log |z_i|.$$

Como D_k divide a D_ε, de la Proposición 1 y (1.5) deducimos:

$$\log |D_k| \leq N \log N + 2 \sum_{i_\tau = 1}^{N-1} (N - i_\tau) \log |\tau(\varepsilon)|. \tag{1.6}$$

Notamos que (1.6) no cambia al sumar hasta N y que:

$$\sum_{i_\tau = 1}^{N} \log |\tau(\varepsilon)| = \sum_{\tau \in \mathscr{S}(k)} \log |\tau(\varepsilon)| = 0.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\mathscr{S}(k)} (N-i_\tau)\log|\tau(\varepsilon)| &= -\sum_{\tau\in\mathscr{S}(k)} i_\tau \log|\tau(\varepsilon)| \\ &= -\sum_{w\in\infty_k} j_w \log\|\varepsilon\|_w\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde

$$\begin{aligned} j_w &= i_\tau, \quad \text{si } \tau \text{ es real e induce } w, \\ j_w &= \frac{i_\tau + i_{\overline{\tau}}}{2}, \quad \text{si } \tau \text{ es compleja e induce } w. \end{aligned}$$

Sea

$$S^{(1)} = \{j_w|\, j_w \in \mathbb{N}\}\,, \qquad S^{(2)} = \{j_w|\, j_w \notin \mathbb{N}\}\,, \qquad S = S^{(1)} \cup S^{(2)}.$$

Observemos que:

a) $\{1,2,\ldots,N\} = S^{(1)} \cup \bigcup_{j\in S^{(2)}} \{j-1/2, j+1/2\}$ (unión disjunta)

b) Si j y j' pertenecen a $S^{(2)}$, entonces $|j-j'| \geq 2$, si $j \neq j'$.

c) La cardinalidad de $S^{(2)}$ es $r_2 = r_2(k)$.

Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenemos:

$$\sum_{w\in\infty_k} -j_w \log\|\varepsilon\|_w = \sum_w (\lambda - j_w)\log\|\varepsilon\|_w \leq \left(\sum_w (\lambda-j_w)^2\right)^{1/2} m_k(\varepsilon). \tag{1.8}$$

Usando a) y c) de arriba conseguimos:

$$\begin{aligned}\sum_{j_w\in S} (\lambda-j_w)^2 &= \sum_{i=1}^{N} (\lambda - i)^2 \\ &\quad + \sum_{j_w\in S^{(2)}} \left((\lambda-j_w)^2 - \left(\lambda - (j_w - \frac{1}{2})\right)^2 - \left(\lambda - (j_w+\frac{1}{2})\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}(\lambda-i)^2 - \frac{r_2}{2} - \sum_{j_w\in S^{(2)}} (\lambda-j_w)^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sea t_1 el menor $\lambda - j_w$ para el cual $j_w \in S^{(2)}$, t_2 el siguiente y así sucesivamente. De b) arriba se sigue que $|t_k - t_l| \geq 2|k-l|$. De lo anterior junto con $\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, conseguimos:

$$\sum_{j_w \in S^{(2)}} (\lambda - j_w)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r_2}\left(t_i^2 + t_{r_2+1-i}^2\right) \geq \sum_{i=1}^{r_2}(r_2+1-2i)^2 = \frac{r_2^3 - r_2}{3}. \qquad (1.10)$$

Haciendo $\lambda = \frac{N+1}{2}$ conseguimos:

$$\sum_{i=1}^{N}(\lambda - i)^2 = \frac{N^3 - N}{12}. \qquad (1.11)$$

Poniendo de (1.7) a (1.11) en (1.6), conseguimos (1.3).

Ahora damos la demostración [Fr1] del caso general. Nos referiremos al *caso particular* cada vez que usemos algún paso de la demostración anterior.
Demostración (del Lema 1). Bastará demostrar que:

$$\log\left|N_{L/\mathbb{Q}}\left(D_{k/L}\right)\right| \leq [k:\mathbb{Q}]\log([k:L]) + m_k(\varepsilon)\, A(k/L), \qquad (1.12)$$

donde $D_{k/L}$ es el discriminante relativo de la extensión k/L. Esto porque

$$D_k = \pm D_L^{[k:L]} N_{L/\mathbb{Q}}\left(D_{k/L}\right) \qquad (1.13)$$

([Neu], p. 202).

Sea $\mathscr{S}(L)$ como en el caso particular y $\sigma \in \mathscr{S}(L)$. Escribamos $\tau|\sigma$ si $\tau \in \mathscr{S}(k)$ y $\tau|_L = \sigma$. Denotemos por $D(\varepsilon)$ el discriminante ideal del orden generado por ε sobre el anillo de enteros de L. Entonces $D_{k/L}$ divide a $D(\varepsilon)$ por definición. Para cada $\sigma \in \mathscr{S}(L)$ ordenamos los $\tau|\sigma$ de acuerdo a $|\tau(\varepsilon)|$ como en el caso particular solo que en este caso $\{i_\tau\}_{\tau|\sigma} = \{1, 2, \ldots, N = [k:L]\}$. Dados $\tau|\sigma$, si $\sigma(L) \subset \mathbb{R}$ pero $\tau(k) \not\subset \mathbb{R}$, convenimos que $|i_\tau - i_{\overline{\tau}}| = 1$. Cuando $\sigma(L) \not\subset \mathbb{R}$, ordenamos los $\overline{\tau}|\overline{\sigma}$ exactamente igual que los $\tau|\sigma$, esto es: $i_\tau = i_{\overline{\tau}}$. Denotemos por $\mathscr{S}(k/L)$ las incrustaciones de k que fijan a L, entonces:

$$N_{L/\mathbb{Q}}(D(\varepsilon)) = \prod_{\sigma \in \mathscr{S}(L)} \sigma\Big(\prod_{\substack{\rho \neq \rho' \\ \rho, \rho' \in \mathscr{S}(k/L)}} \left(\rho(\varepsilon) - \rho'(\varepsilon)\right)\Big) = \prod_{\substack{\tau \neq \tau' \\ \tau, \tau' \in \mathscr{S}(k)}} \left(\tau(\varepsilon) - \tau'(\varepsilon)\right),$$

donde esto último es porque si extendemos cada $\sigma \in \mathscr{S}(L)$ a un $\tau \in \mathscr{S}(k)$ y lo aplicamos en cada $\rho(\varepsilon)$, obtenemos $[k:L]\cdot[L:\mathbb{Q}] = [k:\mathbb{Q}]$ distintas composiciones. Es decir, obtenemos todos los $\tau \in \mathscr{S}(k)$. Luego por la Proposición 1 y $|N_{L/\mathbb{Q}}(D_{k/L})| \leq |N_{L/\mathbb{Q}}(D(\varepsilon))|$ conseguimos:

$$\log |N_{L/\mathbb{Q}}(D_{k/L})| \leq \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(L)} N \log N + 2 \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(L)} \sum_{\tau | \sigma} (N - i_\tau) \log |\tau(\varepsilon)|. \qquad (1.14)$$

Calculando la primera suma obtenemos:

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{S}(L)} N \log N = [L : \mathbb{Q}] N \log N = [k : \mathbb{Q}] \log ([k : L]),$$

cantidad que aparece en (1.12). La suma doble en (1.14) corre en todos los $\tau \in \mathscr{S}(k)$ y por idénticos motivos a (1.7) escribimos:

$$\sum_{\tau \in \mathscr{S}(k)} (N - i_\tau) \log |\tau(\varepsilon)| = - \sum_{w \in \infty_k} j_w \log \|\varepsilon\|_w , \qquad (1.15)$$

donde

$$j_w = i_\tau, \quad \text{si } \tau \text{ induce a } w \text{ y } w \text{ no se ramifica en } k/L$$
$$j_w = \frac{i_\tau + i_{\bar{\tau}}}{2}, \quad \text{si } \tau \text{ induce a } w \text{ y se ramifica en } k/L.$$

Para cada $v \in \infty_L$ definimos al conjunto $S_v = \{j_w\}_{w|v}$ igual al conjunto S en el caso particular, con las mismas observaciones salvo que la cardinalidad de $S_v^{(2)}$ es $r_2(v)$.

Adaptamos (1.8) escribiendo:

$$\sum_w (\lambda - j)^2 = \sum_{v \in \infty_L} \sum_{j \in S_v} (\lambda - j)^2.$$

Ponemos $S = S_v$ en la suma doble y razonamos como en (1.9), con $r_2 = r_2(v)$. Repetimos los siguientes pasos de (1.10) y (1.11) en el caso particular obteniendo $A(k/L)$. Juntamos todas las relaciones obtenidas en (1.14), para conseguir (1.12) y con ello el Lema 1. □

Con el Lema anterior podemos acotar al discriminante de un cuerpo k cuando tiene una unidad como elemento primitivo. El siguiente lema [Fr1] generaliza al caso en que el cuerpo está generado por más unidades independientes.

Lema 2. *Supongamos $\mathbb{Q} = L_0 \subseteq L_1 = L_0(\varepsilon_1) \subseteq L_2 = L_1(\varepsilon_2) \subseteq \ldots \subseteq L_{T+1} = L_T(\varepsilon_{T+1})$, donde ε_i es una unidad de L_i. Entonces, con $k = L_{T+1}$ y la notación del Lema 1, tenemos:*

$$\frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \log |D_k| \leq \log([k : \mathbb{Q}]) + \sum_{i=1}^{T+1} \frac{m_{L_i}(\varepsilon_i) A(L_i/L_{i-1})}{[L_i : \mathbb{Q}]}.$$

Demostración. Usamos induccion sobre T y el Lema 1. El caso $T = 0$ es el caso particular del Lema 1 en que $k = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, y el Lema 1 también da el paso inductivo. $\square$

Sea Λ_k la imagen de las unidades de un cuerpo de números k bajo la incrustación logarítmica usual

$$\ell_k : k - \{0\} \to \mathbb{R}^{r_1+r_2} \tag{1.16}$$

dado por $(\ell_k(\varepsilon))_w = \log \|\varepsilon\|_w$ para $w \in \infty_k$. Por el teorema de unidades de Dirichlet, Λ_k es un retículo de rango $r = r_1+r_2-1$ y $(r+1)^{1/2}R_k$ es el volumen de un paralelepípedo fundamental ([BS], p. 115). Sean $0 < m_k(\varepsilon_1) \leq m_k(\varepsilon_2) \leq \ldots \leq m_k(\varepsilon_r)$ los mínimos sucesivos de m_k sobre el retículo Λ_k ([Ma], p. 49), asumidos en las unidades independientes ε_i de k. Aplicando el teorema de Minkowski sobre los mínimos sucesivos ([Ma], p. 50) obtenemos:

$$m_k(\varepsilon_1)^r \leq \prod_{i=1}^{r} m_k(\varepsilon_i) \leq \gamma_r^{r/2}(r+1)^{1/2}R_k, \tag{1.17}$$

donde γ_r es la constante de Hermite en dimensión r. Usaremos los valores [Ma, p. 473]

$$\gamma_1 = 1,\ \ \gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ \gamma_3 = 2^{1/3},\ \ \gamma_4 = \sqrt{2},\ \ \gamma_5 = 2^{3/5},\ \ \gamma_6 = \frac{2}{\sqrt[6]{3}},\ \ \gamma_7 = 2^{6/7}. \tag{1.18}$$

Como la cota obtenida para $|D_k|$ en el lema 1 depende de las unidades, se podría preguntar: ¿Es posible acotar $|D_k|$ por R_k? El siguiente lema [Fr1] responderá afirmativamente esta pregunta, exceptuando el caso CM.

Lema 3. *Sean ε_i unidades del cuerpo $k = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ dadas arriba como en el teorema de Minkowski. Con la notación $L_0 = \mathbb{Q}$ y $L_i = L_{i-1}(\varepsilon_i)$, sea $T \geq 0$ el menor entero para el cual $L_{T+1} = k$. Pongamos $\delta = (r+1)^{1/2}\gamma_r^{r/2}R_k$. Entonces se cumplen las siguientes desigualdades:*

I)

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\log|D_k| \leq \log([k:\mathbb{Q}]) + \sum_{i=1}^{T+1} \frac{\left(\delta m_k(\varepsilon_1)^{1-i}\right)^{\frac{1}{r+1-i}} A\left(L_i/L_{i-1}\right)}{\left([k:\mathbb{Q}][L_i:\mathbb{Q}]\right)^{1/2}} \tag{1.19}$$

II)

$$\frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\log|D_k| \leq \log([k:\mathbb{Q}]) + \sum_{i=1}^{T+1} \left(\delta \prod_{j=1}^{i-1} m_k(\varepsilon_j)^{-1}\right)^{\frac{1}{r+1-i}} \frac{A\left(L_i/L_{i-1}\right)}{[L_i:\mathbb{Q}]} \frac{m_{L_i}(\varepsilon_i)}{m_k(\varepsilon_i)}.$$

Demostración . Si $L \subseteq k$ es cualquier subcuerpo conteniendo una unidad ε, entonces

$$\begin{aligned} m_k(\varepsilon)^2 = \sum_{w \in \infty_k} (\log \|\varepsilon\|_w)^2 &= \sum_{v \in \infty_L} (\log \|\varepsilon\|_v)^2 \sum_{\substack{w|v \\ w \in \infty_k}} e(w)^2 \\ &= m_L(\varepsilon)^2 \sum_{\substack{w|v \\ w \in \infty_k}} e(w)^2, \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde $e(w) = e_{k/L}(w)$ es el índice de ramificación. Pero $\sum_{w|v} e(w)^2 \geq \sum_{w|v} e(w) = [k : L]$, de donde conseguimos

$$\frac{m_L(\varepsilon)}{m_k(\varepsilon)} \leq \frac{1}{[k : L]^{1/2}} \tag{1.21}$$

Notemos que

$$[L_i : \mathbb{Q}][k : L_i]^{1/2} = ([k : \mathbb{Q}][L_i : \mathbb{Q}])^{1/2}$$

Esto, junto a $\prod_{j=1}^{i-1} m_k(\varepsilon_j)^{-1} \leq m_k(\varepsilon_1)^{1-i}$, muestra que II) implica I). Pero II) sigue del Lema 2 y (1.17) da

$$m_k(\varepsilon_i)^{r+1-i} \leq \prod_{j=i}^{r} m_k(\varepsilon_j) \leq \delta \prod_{j=1}^{i-1} m_k(\varepsilon_j)^{-1}.$$

□

Observación: Si k no es CM entonces k satisface la hipótesis $k = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, donde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ es un conjunto maximal de unidades independientes de k. En efecto, supongamos que el cuerpo k no satisface la hipótesis y pongamos $L = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$. Sea $[k : L] = j \geq 2$ y (a, b) la signatura de k. Entonces tenemos las igualdades, con $r_1 = r_1(L)$, $r_2 = r_2(L)$,

$$j(r_1 + 2r_2) = a + 2b, \qquad r_1 + r_2 - 1 = a + b - 1.$$

De $b \leq r_1 + r_2$ y $j \geq 2$ conseguimos $0 \leq r_1(j-2) + 2r_2(j-1) \leq 0$, que sólo se satisface cuando $j = 2$, $r_2 = 0$ y $a = 0$. Es decir, k es CM.

Notemos además que si $L_i = L_{i-1}$ entonces $A(L_i/L_{i-1}) = 0$, así solo cuerpos distintos contribuyen en las sumas de I) y II) del Lema 3.

Capítulo 2

Método analítico

Para el regulador R_k de un cuerpo k, en [Fr1] (Th. A, p. 599) se demuestra la fórmula:

$$\frac{R_k}{\omega_k} = \sum_{\mathfrak{a}} g\left(\frac{\mathrm{N}\mathfrak{a}^2}{|D_k|}\right) + \sum_{\mathfrak{b}} g\left(\frac{\mathrm{N}\mathfrak{b}^2}{|D_k|}\right), \tag{2.1}$$

donde ω_k es el número de raíces de la unidad en k, $\mathfrak{a}$ corre sobre los ideales principales integrales de k, $\mathfrak{b}$ corre sobre los ideales integrales de la clase de ideales del diferente de k, N denota la norma, D_k es el discriminante de k y $g : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ está definida por:

$$g(x) = g_{r_1(k),r_2(k)}(x) := \frac{1}{2^{r_1}4\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} (\pi^n 4^{r_2} x)^{-s/2}(2s-1)\Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\, ds. \tag{2.2}$$

Notemos que la primera suma del lado derecho de (2.1) contiene el ideal trivial, de norma 1, lo que da el primer término $g(1/|D_k|)$ en la suma, y que todos los otros términos son de la forma $g(m/|D_k|)$ con $m \geq 1$. Friedman [Fr2] demuestra (para $r = r_1 + r_2 - 1 > 0$) que $g(x)$ tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, y tiende a cero desde valores positivos cuando $x \to +\infty$. Además demuestra que g tiene un único cero en $(0, \infty)$, y lo mismo ocurre con su derivada. Con esto concluye que si $g(1/|D_k|) > 0$, entonces todos los otros términos $g(m/|D_k|)$ en las sumas de (2.1) son positivos, lo que demuestra que $R_k/\omega_k \geq g(1/|D_k|)$. Como además g no tiene ningún mínimo local (puesto que g tiene un único punto crítico), tenemos

$$\frac{R_k}{\omega_k} \geq g(1/|D_k|) \geq \min\big(g(1/d_1), g(1/d_2)\big) \qquad \text{si} \qquad d_1 \leq |D_k| \leq d_2, \tag{2.3}$$

que será en la práctica como aplicaremos el método analítico.

Notamos que la desigualdad (2.3) es inútil si $g(1/d_1) < 0$ ó $g(1/d_2) < 0$, lo que hace que sea útil sólo para discriminantes hasta cierto límite. Discriminantes más allá de ese límite los tendremos que tratar con los métodos geométricos del capítulo anterior.

Capítulo 3

Mejoras de las cotas anteriores

Como nuestro objetivo es buscar cotas minimales para el regulador en cuerpos de grado pequeño, necesitaremos usar el Lema 3 sólo cuando $T = 0, T = 1$ y $T = 2$. En algunos casos es posible mejorar las cotas de los Capítulos 1 y 2. Mantenemos la notación del Lema 3.

1. Cuando $T = 0$, del Lema 3 parte I) obtenemos:

$$\log |D_k| \leq n \log n + (r+1)^{1/(2r)} \gamma_r^{1/2} \left(\frac{n^3 - n - 4r_2^3 - 2r_2}{3} \right)^{1/2} R_k^{1/r}. \quad (3.1)$$

2. Cuando $T = 1$, el Lema 3 parte I) nos da, con $\delta = (r+1)^{1/2} \gamma_r^{r/2} R_k$,

$$\log |D_k| \leq [k : \mathbb{Q}] \log [k : \mathbb{Q}] + \delta^{1/r} A(L_1/\mathbb{Q}) [k : L_1]^{1/2}$$
$$+ \left(\delta m_k(\varepsilon_1)^{-1} \right)^{1/(r-1)} A(k/L_1), \quad (3.2)$$

pero aquí necesitamos una cota superior para $m_k(\varepsilon_1)^{-1}$. Mostramos ahora tres formas de conseguir esto:

A) Supongamos que $L = \mathbb{Q}(\varepsilon) \subset k$ tiene exactamente dos lugares arquimedianos, v_1 y v_2, es decir $r(L) = 1$. Entonces, por (1.20) y $\log \|\varepsilon\|_{v_1} + \log \|\varepsilon\|_{v_2} = 0$, tenemos:

$$m_k(\varepsilon)^2 = \left(\log \|\varepsilon\|_{v_1} \right)^2 \sum_{w \in \infty_k} \left(e_{k/L_1}(w) \right)^2 \geq R_{L_1}^2 \sum_{w \in \infty_k} \left(e_{k/L_1}(w) \right)^2. \quad (3.3)$$

B) Supongamos que $L = \mathbb{Q}(\varepsilon) \subset k$, con ε una unidad, y $r(L) = 2$. Para un número algebraico α de grado n, sea $M(\alpha)$ su medida de Mahler

$$M(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \text{máx}(1, |\alpha_i|)$$

donde los α_i son los conjugados de α.

Hacemos tres observaciones:

1) Smyth [Sm] demostró que si α no es recíproco, entonces $M(\alpha) \geq 1,3247$.[1]
2) Si $\alpha \neq \pm 1$ es recíproco, entonces $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ es par.[2]
3) Boyd [Bo, p. 1373] demostró que si α es recíproco y de grado 4, entonces $M(\alpha) > 1,722$.

De lo anterior concluimos que si $\alpha \neq \pm 1$ tiene grado 3 ó 4, entonces

$$\sum_{v \in \infty_{\mathbb{Q}(\alpha)}} \log^+ \|\alpha\|_v > \log(1,3247) > 0,28, \tag{3.4}$$

donde $\log^+ x = \log x$ si $x > 1$ y $\log^+ x = 0$ en caso contrario. Sea $\infty_L = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $t_i = \log \|\varepsilon\|_{v_i}$. Como

$$\sum_{i=1}^{3} t_i = \log \left| N_{L/\mathbb{Q}}(\varepsilon) \right| = 0,$$

los posibles signos del triple (t_1, t_2, t_3) son (re-numerando si es necesario) $(+,-,-)$ ó $(+,+,-)$. Reemplazando ε por $1/\varepsilon$, podemos reducir el segundo caso al primero. En este caso, por (3.4) tenemos $|t_1| > 0,28$ y $|t_2| + |t_3| > 0,28$. Por (1.20) $m_k(\varepsilon)^2 = \sum_{i=1}^{3} b_i t_i^2$, donde $b_i = \sum_{w|v_i} e(w)^2$ y $e(w) = e_{k/L}(w)$. Multiplicando por $(b_2 + b_3)$, conseguimos:

$$m_k(\varepsilon)^2 (b_2 + b_3) = t_1^2 b_1 (b_2 + b_3) + b_2 b_3 (t_2^2 + t_3^2) + b_2^2 t_2^2 + b_3^2 t_3^2. \tag{3.5}$$

De $(b_2 t_2 - b_3 t_3)^2 \geq 0$ conseguimos $b_2^2 t_2^2 + b_3^2 t_3^2 \geq 2 b_2 b_3 t_2 t_3$. Poniéndolo en (3.5) y dividiendo por $(b_2 + b_3)$ obtenemos:

$$m_k(\varepsilon)^2 > (0,28)^2 \left(b_1 + \frac{b_2 b_3}{b_2 + b_3} \right). \tag{3.6}$$

C) Supongamos que $L_T = L(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_T) \subset k$ satisface $r(L_T) = T$ (en general solo se tiene $r(L_T) \geq T$). Usando la notación del párrafo que contiene (1.16), definamos Λ_0 como el subgrupo de Λ_k generado por $\ell_k(\varepsilon_1)$,

[1] Un número algebraico de grado n se dice recíproco si su polinomio minimal $P(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ satisface $P(x) = x^n P(1/x)$.

[2] En efecto, si α es recíproco y $\alpha \neq \alpha^{-1}$, sea $P(x)$ su polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$. Entonces $P(\alpha^{-1}) = 0$, por lo que $\alpha^{-1} \in k = \mathbb{Q}(\alpha)$ es un conjugado de α. Por lo tanto, el cuerpo k tiene un automorfismo Δ que lleva α a α^{-1}. Como $\Delta^2 = \mathrm{Id}$, el grupo $G = \{\mathrm{Id}, \Delta\}$ tiene dos elementos. Sea $L = k^G = \{\gamma \in k | \Delta(\gamma) = \gamma\}$ = cuerpo fijo por G. Por el teorema de Artin sobre cuerpos fijos por un grupo finito de automorfismos, $[k : L] = 2$. Luego 2 divide a $[k : \mathbb{Q}]$.

$\ldots, \ell_k(\varepsilon_T)$ y sea Λ_1 el sub-retículo de Λ_{L_T} generado por $\ell_{L_T}(\varepsilon_1), \ldots, \ell_{L_T}(\varepsilon_T)$. Sea $\alpha : \mathbb{R}^{r(L_T)+1} \to \mathbb{R}^{r(k)+1}$ la función lineal inducida por la inclusión $i : L_T \to k$ (es decir, $\alpha \circ \ell_{L_T} = \ell_k \circ i$). Ya que (1.21) muestra que α expande longitudes por un factor de a lo más $[k : L_T]^{1/2}$, se sigue que α expande volúmenes en dimensión $r(L_T)$ en a lo más $[k : L_T]^{r(L_T)/2}$. Así si llamamos $V(\Lambda)$ al volumen (en dimensión T) de un paralelepípedo fundamental de un retículo Λ de rango $r(L_T)$, encontramos:

$$\begin{aligned} V(\Lambda_0) =& V(\alpha(\Lambda_1)) \geq [k : L_T]^{r(L_T)/2} V(\Lambda_1) \\ \geq& [k : L_T]^{r(L_T)/2} \left(r(L_T) + 1\right)^{1/2} R_{L_T}. \end{aligned}$$

Ya que $m_k(\varepsilon_i)$ es la longitud Euclideana de $\ell_k(\varepsilon_i)$, de la desigualdad de Hadamard se sigue:

$$\prod_{j=1}^{T} m_k(\varepsilon_j) \geq V(\Lambda_0) \geq [k : L_T]^{r(L_T)/2} \left(r(L_T) + 1\right)^{1/2} R_{L_T}. \tag{3.7}$$

3. Si k es un cuerpo CM entonces

$$R_k = 2^{[k_+:\mathbb{Q}]-1} R_{k_+}/Q \geq 2^{[k_+:\mathbb{Q}]-2} R_{k_+} \tag{3.8}$$

donde k_+ es el máximo subcuerpo totalmente real ([Re], p. 250), y $Q := [\Lambda_k : \Lambda_{k_+}] = 1$ o 2. Así el caso CM se reduce esencialemte a examinar el caso totalmente real.

Si nos ponemos en el caso especial en que el subgrupo de torsión de las unidades de k y k_+ coinciden (es decir, ambas se reducen a ± 1), concluimos que

$$R_k = 2^{[k_+:\mathbb{Q}]-1} R_{k_+}, \tag{3.9}$$

excepto si existe una unidad totalmente positiva $\gamma \in k_+$ que no sea un cuadrado en k_+ y tal que $\sqrt{-\gamma} \in k$.

4. Sea $\varepsilon \in k$ una unidad de orden infinito. Entonces descartamos la signatura $(0, 1)$ (que corresponde a un cuerpo imaginario cuadrático) para $L = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, porque el rango de las unidades $r(L) > 0$ ya que $\varepsilon \in L$.

5. Para cuerpos totalmente reales de la forma $H = \mathbb{Q}(\varepsilon)$, siendo ε una unidad de grado $n = [H : \mathbb{Q}] \leq 11$, Pohst ([Po1], p. 471) mejora las cotas de la Proposición 1, con lo que obtiene

$$|D_H| \leq 4^{[n/2]} \prod_{i=1}^{n-1} |\tau_i(\varepsilon)|^{2(n-i)},$$

donde $[x] = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x\}$ y los τ_i están ordenados de modo que $|\tau_1(\varepsilon)| \geq |\tau_2(\varepsilon)| \geq \cdots \geq |\tau_n(\varepsilon)|$. Esto mejora el Lema 1, de modo que (1.3) toma la forma:

$$\log|D_H| \leq [n/2]\log 4 + m_H(\varepsilon)A(H/\mathbb{Q}).$$

Como $m_H(\varepsilon_1)^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n-1} m_H(\varepsilon_i)$ y (1.17) conseguimos:

$$\log|D_H| \leq [n/2]\log 4 + n^{1/(2(n-1))}\gamma_{n-1}^{1/2}\left(\frac{n^3-n}{3}\right)^{1/2} R_H^{1/(n-1)}. \tag{3.10}$$

6. Sea $\overline{\partial}_k$ la clase ideal del diferente de k y supongamos que $\overline{\partial}_k$ es trivial. En este caso el lado derecho de la ecuación (2.1) contiene dos sumas idénticas, lo que permite multiplicar por 2 la cota (2.3). Como el número de raíces de la unidad $\omega_k \geq 2$, tenemos

$$R_k \geq 4g\,(1/|D_k|) \quad \text{si } \overline{\partial}_k \text{ es trivial.}$$

$$R_k \geq 2g\,(1/|D_k|) \quad \text{sea } \overline{\partial}_k \text{ trivial o no.}$$

Tal como en (2.3), en la práctica usaremos para $g = g_{r_1(k),r_2(k)}$ definido por (2.2)

$$R_k \geq 4\,\text{mín}\big(g(1/d_1), g(1/d_2)\big) \quad \text{si } \overline{\partial}_k \text{ es trivial y} \quad d_1 \leq |D_k| \leq d_2. \tag{3.11}$$

$$R_k \geq 2\,\text{mín}\big(g(1/d_1), g(1/d_2)\big) \quad \text{si} \quad d_1 \leq |D_k| \leq d_2. \tag{3.12}$$

En general no podemos saber si $\overline{\partial}_k$ es trivial, pero afortunadamente para nosotros, si no lo es, en la práctica el discriminante es relativamente grande para la signatura dada.

Para explicar esto, apelamos a la teoría de cuerpos de clase. Ésta demuestra que para cualquier cuerpo de números k, existe una extension K/k no ramificada tal que $[K:k] = h_k$, donde h_k es el orden del grupo de clases de ideales de k ([Neu], p. 399). Como la extensión K/k no es ramificada,

$$D_K^{1/[K:\mathbb{Q}]} = D_k^{1/[k:\mathbb{Q}]}, \qquad \frac{r_1(k)}{[k:\mathbb{Q}]} = \frac{r_1(K)}{[K:\mathbb{Q}]}.$$

En ([He], p. 234) se demuestra que $\overline{\partial}_k$ es un cuadrado en el grupo de clases de ideales. De aquí, si $\overline{\partial}_k$ no es trivial, entonces $h_k \geq 3$.

Odlyzko (ver un resumen y bibliografía en [Od]) demostró cotas inferiores para $|D_K|^{1/[K:\mathbb{Q}]}$ que mejoran sustancialmente a medida que el grado $[K:\mathbb{Q}]$ crece (manteniendo $r_1(K)/[K:\mathbb{Q}]$ constante).

El método de Odlyzko fue simplificado enormemente por Serre y Poitou [Poi]. En la siguiente tabla aplicamos [Poi] para obtener cotas inferiores para $|D|^{1/n} = |D_k|^{1/[k:\mathbb{Q}]}$ en los grados y signaturas que nos interesan. En particular, la cota inferior de la Tabla 1 es válida si la clase de ideales del diferente de k no es trivial.

Tabla 1. Cotas inferiores para $|D_k|^{1/[k:\mathbb{Q}]}$, asumiendo $h_k \geq 3$.

n	r_1	$\lvert D\rvert^{1/n} >$	y	n	r_1	$\lvert D\rvert^{1/n} >$	y
2	2	7,941	1,2	6	0	9,305	0,82
3	1	7,558	1,1	6	2	11,968	0,74
3	3	11,823	0.92	6	4	15,536	0,68
4	0	7,412	1,02	6	6	20,314	0,64
4	2	10,468	0,88	7	1	11,204	0,73
4	4	15,121	0,78	7	3	14,036	0,67
5	1	9,747	0,85	7	5	17,686	0,62893
5	3	13,136	0,76	7	7	22,389	0,59
5	5	17,919	0,7	8	0	10,668	0,71

Nota. En la Tabla 1, D es el discriminante del cuerpo k de grado n, r_1 es el número de incrustaciones reales de k, y h_k es el orden del grupo de clases de ideales de k. Para obtener la cota usamos el valor del parámetro y dado en la Tabla 1 para la función auxiliar $x \to f(x\sqrt{y})$, con $f(x) = \left(3(\text{sen}(x) - x\cos(x))/x^3\right)^2$ (ver la desigualdad (13) de [Poi]). Elegimos el factor de escala y en cada caso para optimizar la cota. Como $h_k \geq 3$, podemos multiplicar n y r_1 por 3 al aplicar [Poi, eq(13)]. Si $h_k > 3$ la cota inferior sigue siendo válida ya que las cotas para la raíz del discriminante mejoran cuando el grado aumenta (mientras r_1/n no cambie).

7. En el próximo capítulo necesitaremos tablas completas de todos los cuerpos de números (en cada signatura que tratamos) hasta cierta cota del discriminante. En el sitio `megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/numberfields` el lector encontrará archivos con tablas extensas de cuerpos de números, hasta grado 7. Estas listas son completas en cada signatura hasta el discriminante final dado. Por otro lado, siempre haremos también referencia a una publicación donde se determina una tabla completa para la signatura en cuestión, aunque muchas veces no citamos la primera lista rigurosa aparecida históricamente.

Capítulo 4

Cotas óptimas para cada signatura

Pasamos ahora a aplicar los resultados de los capítulos anteriores a cuerpos de grado 2 a 6 en todas sus signaturas, de grado 7 en signaturas $(7,0)$ y $(1,3)$, y de grado 8 totalmente complejos.

Antes de analizar cada signatura, describimos el método que aplicaremos en cada caso. En primer lugar, y fuera de la demostración formal, inspeccionamos los reguladores del comienzo de la lista rigurosa de todos los cuerpos de discriminante pequeño para la signatura que nos hemos fijado (digamos $|D_k| < d_0$). De esta inspección surge una lista presunta de los tres o cuatro cuerpos con los reguladores más pequeños, digamos menores a R_0, con lo que nos proponemos demostrar que $R_k \geq R_0$ a menos que k figure entre los cuerpos con $|D_k| < d_0$. Así obtenemos la lista completa de cuerpos con regulador menor a R_0, lo que da una cota inferior optimal del regulador en la signatura dada.

Para demostrar que $|D_k| < d_0$ si $R_k < R_0$, usamos el Lema 3 del Capítulo 1. Esto nos da una cota del tipo $|D_k| < d_1$. Para ser más precisos, sean $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r$ unidades de k donde se asumen los mínimos sucesivos de m_k sobre el retículo de unidades. Dejando de lado por ahora el caso CM (que se reduce al caso totalmente real en grado $[k:\mathbb{Q}]/2$), tenemos $k = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$. Definimos $L_i = \mathbb{Q}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_i)$, y $T \geq 0$ como el menor entero tal que $k = L_{T+1}$. Para cada signatura examinamos los valores posibles de T, y obtenemos una cota superior de $|D_k|$ del Lema 3.

Excepto en grados pequeños, la cota $|D_k| < d_1$ que da el Lema 3 resulta en un d_1 enorme, muy por encima de los discriminantes tabulados. Afortunadamente, el método analítico del Capítulo 2 nos permite deducir que $R_k > R_0$ si $d_0 \leq |D_K| \leq d_1$, aunque debemos trabajar separadamente el caso en que la clase del diferente no es trivial. Esto falla para las signaturas $r_1 = 3$ y $r_1 = 5$ en grado 7, y para cuerpos ócticos totalmente reales con $T > 0$, por lo que nos hemos visto obligados a excluirlos de nuestro trabajo a pesar de contar con listas rigurosas de cuerpos de discriminante pequeño en estas signaturas.

Pasamos ahora a examinar cada signatura.

4.1. Cuerpos de grado 2

Teorema 1. *Entre los cuerpos cuadráticos reales, el de discriminante* 5 *tiene el regulador minimal igual a* $0,481211\ldots$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 8 *y* 13, *con reguladores iguales a* $0,881373\ldots$ *y* $1,194763\ldots$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo real cuadrático con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 1,31$.

Demostración. Este caso se puede hacer a mano, pero aplicaremos el método general para practicar con un caso sencillo. Supongamos que $R_k \leq 1,31$. Por ser $[k : \mathbb{Q}] = 2$ un primo, el único caso posible del Lema 3 es $T = 0$. Como $r = 1$ y $\gamma_1 = 1$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 54,95$. La Tabla 1 nos dice que la clase del diferente es trivial, ya que de lo contrario $|D_k| > 63$. El método analítico, es decir la desigualdad (3.11), da $|D_k| < 21$, ya que $4g_{2,0}(1/21) = 1,3301\ldots$ y $4g_{2,0}(1/54) = 1,6183\ldots$. Inspeccionando los cinco cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 21$ ([Co], p. 515), vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

4.2. Cuerpos de grado 3

Como 3 es primo, sólo $T = 0$ es la única posibilidad en el Lema 3.

Teorema 2. *Entre los cuerpos cúbicos totalmente reales, el de discriminante* 49 *tiene el regulador minimal igual a* $0,525454\ldots$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 81 *y* 169, *con reguladores iguales a* $0,849287\ldots$ *y* $1,365049\ldots$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo cúbico totalmente real con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 1,6$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 1,6$. Como $r = 2$ y $\gamma_1 = 2/\sqrt{3}$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 630,14$. La Tabla 1 nos dice que la clase del diferente es trivial, ya que de lo contrario $|D_k| > 1652$. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 304$, ya que $4g_{3,0}(1/630) = 2.085\ldots$ y $4g_{3,0}(1/304) = 1,6015\ldots$. Inspeccionando los seis cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 304$ [Co], p. 512, vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

Teorema 3. *Entre los cuerpos cúbicos de signatura* $(1,1)$, *el de discriminante* -23 *tiene el menor regulador igual a* $0,281199...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* -31 *y* -44, *con reguladores iguales a* $0,382245...$ *y* $0,609377...$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo cúbico de signatura* $(1,1)$ *con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,7$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,7$. Como $r = 1$ y $\gamma_1 = 1$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 305,13$. La Tabla 1 nos dice que la clase del diferente es trivial, ya que de lo contrario $|D_k| > 431$. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 91$, ya que $4g_{1,1}(1/305) = 1.0285...$ y $4g_{1,1}(1/91) = 0,7006...$. Inspeccionando los siete cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 91$ [Co, p. 509], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

4.3. Cuerpos de grado 4

Las posibles signaturas para los cuerpos cuárticos son $(4,0)$, $(2,1)$ y $(0,2)$. El valor de T en el Lema 3 puede ser 0 ó 1. Usaremos las tablas de [CDO] para los discriminantes de cuerpos cuárticos.

Teorema 4. *Entre los cuerpos cuárticos totalmente reales, el de discriminante* 725 *tiene el menor regulador igual a* $0,825068...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 1 125 *y* 1 600 *con reguladores iguales a* $1,165455...$ *y* $1,542505...$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo cúartico totalmente real con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 1,8$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 1,8$. Comenzamos con el caso $T = 0$. Como $r = 3$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 35\,102,7$. La Tabla 1 nos dice que la clase del diferente es trivial, ya que de lo contrario $|D_k| > 52\,278$. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 2\,630$, ya que $4g_{4,0}(1/35\,102) = 4,9449...$ y $4g_{4,0}(1/2630) = 1,8002...$. Inspeccionando los diez cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 2\,630$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema.

Si $T = 1$, la única posibilidad de signatura para L_1 es $(2,0)$. Por (3.3) y el Teorema 1, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,96$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = 2$, con lo que de (3.2) obtenemos $D_k < 799\,362,51$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 52\,278,37$. Como $2g_{4,0}(1/799\,362) = 4,031...$ y $2g_{4,0}(1/52\,279) = 2,74...$, por (3.12) podemos concluir que la clase del diferente es trivial. Como $4g_{4,0}(1/799\,362) = 8,062...$ y ya vimos que $4g_{4,0}(1/2\,630) = 1,8002...$, por (3.12) nuevamente concluimos que $|D_k| < 2\,630$. □

Teorema 5. *Entre los cuerpos cuárticos de signatura* $(2,1)$, *el de discriminante* -275 *tiene el menor regulador igual a* $0,369184\ldots$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* -283 *y* -331 *con reguladores iguales a* $0,378199\ldots$ *y* $0,432203\ldots$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo cúartico de signatura* $(2,1)$ *con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,5$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,5$ y comencemos con el caso $T = 0$. Como $r = 2$ y $\gamma_2 = 2/\sqrt{3}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 17\,815,39$. Si la clase del diferente no es trivial, entonces por la Tabla 1 tenemos $|D_k| > 12\,007$. Como $2g_{2,1}(1/17\,815) = 1,0581\ldots$ y $2g_{2,1}(1/12\,008) = 0,983\ldots$, por (3.12) podemos concluir que la clase del diferente es trivial. Como $4g_{2,1}(1/428) = 0,5003\ldots$ y $4g_{4,0}(1/17\,815) = 2,1163\ldots$, por (3.11) concluimos que $|D_k| < 428$. Inspeccionando los cuatro cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 428$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema.

Si $T = 1$, entonces L_1 tiene signatura $(2,0)$. Por (3.3) y el Teorema 1, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,48\sqrt{6}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{2}$, con lo que de (3.2) obtenemos $D_k < 6\,298,01$. Como vidéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 12\,0007$, por lo que podemos suponer que la clase del diferente es trivial. Como $4g_{2,1}(1/6\,298) = 1,6844\ldots$ y ya vimos que $4g_{2,1}(1/428) = 0,5003\ldots$, por (3.12) nuevamente concluimos que $|D_k| < 428$. □

Teorema 6. *Entre los cuerpos cuárticos totalmente complejos el de discriminante* 229 *tiene el menor regulador igual a* $0,337377\ldots$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 257 *y* 117 *con reguladores iguales a* $0,442137\ldots$ *y* $0,543535\ldots$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo cúartico totalmente complejo con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,6$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,6$. En primer lugar descartaremos que k sea un cuerpo CM. Si su subcuerpo cuadrático real $k_+ \neq \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, entonces el Teorema 1 y la desigualdad (3.8) dan $R_k > 0,88$. Si $k_+ = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, entonces toda unidad totalmente positiva de k_+ es un cuadrado, por lo que en (3.9) tenemos $R_k = 2R_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} > 0,96$, con lo que el caso CM queda descartado.

Como k no es CM, podemos aplicar el Lema 3. Sólo puede darse el caso $T = 0$, ya que si $T = 1$ el cuerpo k sería CM. Como $r = 1$ y $\gamma_1 = 1$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 2\,821,93$. La clase del diferente es trivial, ya que en caso contrario la Tabla 1 da $|D_k| > 3\,018,15$. Como $4g_{0,2}(1/2\,821) = 0,7545\ldots$ y $4g_{0,2}(1/1107) = 0,600007\ldots$, por (3.11) concluimos que $|D_k| < 1\,107$. Inspeccionando los 44 cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 1\,107$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

4.4. Cuerpos de grado 5

Sólo el caso $T = 0$ es posible en grado 5. Las tablas quínticas están en [SPD].[1]

Teorema 7. *Entre los cuerpos de grado 5 totalmente reales, el de discriminante* 14 641 *tiene regulador minimal igual a* $1,635694...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 24 217 *y* 38 569 *con reguladores iguales a* $2,399421...$ *y* $3,155437...$, *respectivamente. Si k es un cuerpo quíntico totalmente real con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 3,5$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 3,5$. Como $r = 4$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_4 = \sqrt{2}$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 4\,650\,322,93$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 1\,847\,433,6$. Como $2g_{5,0}(1/1\,847\,434) = 6,509...$ y $2g_{5,0}(1/4\,650\,322) = 8,2304...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 58\,800$, ya que $4g_{5,0}(1/4\,650\,322) = 16,46...$ y $4g_{5,0}(1/58\,800) = 3,5009...$. Inspeccionando los cuatro cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 58\,800$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

Teorema 8. *Para los cuerpos de grado 5 y signatura* $(3,1)$, *el de discriminante* $-4\,511$ *tiene regulador minimal igual a* $0,628579...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* $-4\,903$ *y* $-5\,519$ *con reguladores iguales a* $0,668925...$ *y* $0,732128...$, *respectivamente. Si k es un cuerpo quíntico de signatura* $(3,1)$ *con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,75$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,75$. Como $r = 3$, y $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 8\,604\,833,12$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 391\,125,11$. Como $2g_{3,1}(1/391\,126) = 2,1588...$ y $2g_{3,1}(1/8\,604\,833) = 3,4264...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 6\,055$, ya que $4g_{3,1}(1/8\,604\,833) = 6,8528...$ y $4g_{3,1}(1/6\,055) = 0,75007...$. Inspeccionando los cuatro cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 6\,055$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

Teorema 9. *Para los cuerpos de grado 5 y signatura* $(1,2)$, *el de discriminante* 1 609 *tiene regulador minimal igual a* $0,268355...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 1 649 *y* 1 777 *con reguladores iguales a* $0,273599...$ *y* $0,290415...$, *respectivamente. Si k es un cuerpo quíntico de signatura* $(1,2)$ *con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,3$.

[1] No se dan los reguladores en [SPD]. Éstos aparecen en `megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/numberfields`.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,3$. Como $r = 2$, y $\gamma_2 = 2/\sqrt{3}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 188\,333,54$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 87\,974,09$. Como $2g_{1,2}(1/87\,975) = 0,751...$ y $2g_{1,2}(1/188\,333) = 0,8686...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 1\,935$, ya que $4g_{1,2}(1/188\,333) = 1,7373...$ y $4g_{1,2}(1/1\,935) = 0,3001....$ Inspeccionando los tres cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 1\,935$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

4.5. Cuerpos de grado 6

En la literatura encontramos tablas para cuerpos séxticos dependiendo si es primitivo [Ol1] o imprimitivo [BMO] con subcuerpos cuadráticos o con subcuerpos cúbicos [Ol2]. Recordamos que buscamos los reguladores mínimos solo dependiendo la signatura sin importar si son o no primitivos.

Teorema 10. *Entre los cuerpos de grado 6 totalmente reales, el de discriminante* $300\,125$ *tiene regulador minimal igual a* $3,277562....$ *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* $371\,293$ *y* $434\,581$ *con reguladores iguales a* $3,774500...$ *y* $4,187943...$*, respectivamente. Si* k *es un cuerpo séxtico totalmente real con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 4,3$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 4,3$. Sólo puede darse $T = 0$, 1 ó 2. Comenzamos por el caso $T = 0$. Como $r = 5$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_5 = \sqrt[5]{8}$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 933\,484\,006,57$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 70\,270\,442,55$. Como $2g_{6,0}(1/933\,484\,006) = 31,79...$ y $2g_{6,0}(1/70\,270\,443) = 16,7...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 498\,300$, ya que $4g_{6,0}(1/933\,484\,006) = 63,58...$ y $4g_{6,0}(1/498\,300) = 4,3001....$ Inspeccionando los cinco cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 498\,300$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema.

Cuando $T = 1$, para L_1 las signaturas posibles son $(2,0)$ ó $(3,0)$. Consideramos primero el caso $(2,0)$. Por (3.3) y el Teorema 1, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,48\sqrt{6}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = 4$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 46\,110\,687\,068,7$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 70\,270\,442,55$. Como $2g_{6,0}(1/46\,110\,687\,068) = 49,33...$ y $2g_{6,0}(1/70\,270\,443) = 16,7...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 498\,300$, ya que $4g_{6,0}(1/46\,110\,687\,068) = 98,66...$ y $4g_{6,0}(1/498\,300) = 4,3001....$ Este rango de discriminante da los tres reguladores del teorema, como vimos si $T = 0$.

Supongamos ahora que L_1 tiene signatura $(3,0)$. Por (3.6), con $(b_1, b_2, b_3) = (2,2,2)$, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,28\sqrt{3}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{6}$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 118\,062\,130\,449,55$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 70\,270\,442,55$. Como $2g_{6,0}(1/118\,062\,130\,449)$=47, 57... y $2g_{6,0}(1/70\,270\,443) = 16,7...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 498\,300$, ya que $4g_{6,0}(1/118\,062\,130\,449) = 95,14...$ y $4g_{6,0}(1/498\,300)$=4, 3001....

En el caso $T = 2$, la única posibilidad es que $L_1 = L_2$ y $(r_1(L_1), r_2(L_2)) = (3,0)$. Como $r(L_2) = 2$, podemos usar (3.7) y el Teorema 2, encontrando que

$$m_k(\varepsilon_1)m_k(\varepsilon_2) \geq 2\sqrt{3} \cdot 0,525 > 1,818.$$

El Lema 3, parte II con $A(L_1/\mathbb{Q}) = \sqrt{8}$, $A(k/L_2) = \sqrt{6}$, da $|D_k| < 62\,511\,368\,048,2$.[2] Si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 70\,270\,442,55$. De (3.12), de $2g_{6,0}(1/62\,511\,368\,048) = 49,19...$ y de $2g_{6,0}(1/70\,270\,443)$=16, 7..., concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 498\,300$, ya que $4g_{6,0}(1/62\,511\,368\,048) = 98,38...$ y $4g_{6,0}(1/498\,300)$ =4, 3001.... □

Teorema 11. *Entre los cuerpos de grado 6 y signatura* $(4,1)$, *el de discriminante* $-92\,779$ *tiene el menor regulador igual a* $1,262710...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* $-94\,363$ *y* $-103\,243$ *con reguladores iguales a* $1,277066...$ *y* $1,359897...$, *respectivamente. Si* k *es un cuerpo séxtico de signatura* $(4,1)$ *con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 1,37$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 1,37$. Nuevamente sólo puede darse $T = 0$, 1 ó 2, y comenzamos por $T = 0$. Como $r = 4$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_4 = \sqrt{2}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 20\,105\,148\,649,39$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 14\,061\,617,34$. Como $2g_{4,1}(1/20\,105\,148\,649) = 8,83...$ y $2g_{4,1}(1/14\,061\,618) = 5,26...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 110\,200$, ya que $4g_{4,1}(1/110\,200) = 1,3704...$ y $4g_{4,1}(1/20\,105\,148\,649) = 17,67...$. Inspeccionando los cinco cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 110\,200$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema.

Cuando $T = 1$, para L_1 las signaturas posibles nuevamente son $(2,0)$ ó $(3,0)$. Consideraremos en primer lugar el caso $(2,0)$. Por (3.3) y el Teorema 1, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,48\sqrt{8}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{14}$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 1\,066\,366\,211,07$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| \geq 14\,061\,618$. Como $2g_{4,1}(1/1\,066\,366\,211)$ $= 11,35...$ y $2g_{4,1}(1/14\,061\,618) = 5,26...$, por (3.12) concluimos que la clase

[2] Como mencionáramos al final del Capítulo 1, $A(L_2/L_1) = 0$ ya que $L_1 = L_2$.

del diferente es trivial. Como $4g_{4,1}(1/1\,066\,366\,211)$ =22,71... y $4g_{4,1}(1/110\,200)$ $= 1,3704...$, la desigualdad (3.11) da $|D_k| < 110\,200$. Este rango de discriminante da los tres reguladores del teorema, como ya vimos.

Supongamos ahora que L_1 tiene signatura $(3,0)$. Por (3.6), con $(b_1, b_2, b_3) = (4,2,2)$ ó $(2,4,2)$,[3] tenemos (tomando el peor caso) $m_k(\varepsilon_1) > 0,28\sqrt{10/3}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = 2$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 2\,453\,219\,654,02$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 14\,061\,618$. Como $2g_{4,1}(1/2\,453\,219\,654) = 11,66...$ y $2g_{4,1}(1/14\,061\,618) = 5,26...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 110\,200$, ya que $4g_{4,1}(1/2\,453\,219\,654)$ =23,32... y $4g_{4,1}(1/110\,200)$ =1,3704....

En el caso $T = 2$, la única posibilidad es que $L_1 = L_2$ y $\big(r_1(L_1), r_2(L_2)\big) = (3,0)$. Como $r(L_2) = 2$, podemos usar (3.7) y el Teorema 2, encontrando que

$$m_k(\varepsilon_1)m_k(\varepsilon_2) \geq 2\sqrt{3} \cdot 0,525 > 1,818.$$

El Lema 3, parte II con $A(L_1/\mathbb{Q}) = \sqrt{8}$, $A(k/L_2) = 2$, da $|D_k| < 992\,046\,125,12$. Si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| \geq 14\,061\,618$. Por (3.12) , y observando que $2g_{4,1}(1/992\,046\,125)$ =11,3.. y $2g_{4,1}(1/14\,061\,618)$ =5,26..., concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 110\,200$, ya que $4g_{4,1}(1/992\,046\,125) = 22,6...$ y $4g_{4,1}(1/110\,200)$ =1,3704.... □

Teorema 12. *Entre los cuerpos de grado 6 y signatura* $(2,2)$, *el de discriminante* $28\,037$ *tiene el menor regulador igual a* $0,478924....$ *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* $29\,077$ *y* $29\,189$ *con reguladores iguales a* $0,491602...$ *y* $0,492916...$, *respectivamente. En esta signatura, todos los demás cuerpos* k, *cumplen con* $R_k > 0,5$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,5$. Sólo puede darse $T = 0$, 1 ó 2. Supongamos en primer lugar que $T = 0$. Como $r = 3$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 240\,678\,624,97$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 2\,938\,525,63$. Como $2g_{2,2}(1/240\,678\,624) = 2,9...$ y $2g_{2,2}(1/2\,938\,526) = 1,71...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 30\,890$, ya que $4g_{2,2}(1/30\,890) = 0,5001...$ y $4g_{2,2}(1/240\,678\,624) = 5,8....$ Inspeccionando los cuatro cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 30\,890$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema.

Cuando $T = 1$, para L_1 las signaturas posibles son $(2,0)$, $(1,1)$ ó $(3,0)$. Consideraremos en primer lugar el caso $(2,0)$. Por (3.3) y el Teorema 1, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,48\sqrt{10}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{12}$, con lo que de (3.2)

[3] La desigualdad (3.6) es simétrica con respecto a b_2 y b_3, pero no b_1.

obtenemos $|D_k| < 20\,660\,156,86$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 2\,938\,526$. Como $2g_{2,2}(1/20\,660\,156)$ $= 2,55...$ y $2g_{2,2}(1/2\,938\,526) = 1,71...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 30\,890$, ya que $4g_{2,2}(1/30\,890)$ $= 0,5001...$ y $4g_{2,2}(1/20\,660\,156) = 5,1...$. Este rango de discriminante da los tres reguladores del teorema, como ya vimos.

El caso de signatura $(1,1)$ para L_1 es parecido ya que nuevamente las unidades de L_1 tienen rango 1. Damos ahora los detalles. Por (3.3) y el Teorema 3, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,28 \cdot 2$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = 2$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 54\,688\,779,27$. Como $2g_{2,2}(1/54\,688\,779) = 2,84...$ y $2g_{2,2}(1/2\,938\,526)$ $= 1,71...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 30\,890$, ya que $4g_{2,2}(1/30\,890) = 0,5001...$ y $4g_{2,2}(1/54\,688\,779)$ $= 5,68...$, con lo que volvemos a nuestros tres discriminantes.

Supongamos ahora que L_1 tiene signatura $(3,0)$. Por (3.6), con $(b_1, b_2, b_3) =$ $(4,4,2)$ ó $(2,4,4)$, tenemos (tomando el peor caso) $m_k(\varepsilon_1) > 0,28 \cdot 2$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{2}$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 39\,341\,685,37$. Como $2g_{2,2}(1/39\,341\,685) = 2,75...$ y $2g_{2,2}(1/2\,938\,526) = 1,71...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 30\,890$, ya que $4g_{2,2}(1/30\,890) = 0,5001...$ y $4g_{2,2}(1/39\,341\,685) = 5,51...$, con lo que volvemos a nuestros tres discriminantes y concluimos el caso $T = 1$.

En el caso $T = 2$, nuevamente la única posibilidad es que $L_1 = L_2$ y $r_1(L_1) = 3$ y $r_2(L_2) = 0$. Tal como en los casos sécticos anteriores, $m_k(\varepsilon_1)m_k(\varepsilon_2) \geq 2\sqrt{3} \cdot 0,525 > 1,818$. El Lema 3, parte II con $A(L_1/\mathbb{Q}) = \sqrt{8}$, $A(k/L_2) = \sqrt{2}$, da $|D_k| <$ $12\,490\,950,99$. Como $2g_{2,2}(1/12\,490\,950) = 2,35...$ y $2g_{2,2}(1/2\,938\,526) = 1,71...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 30\,890$, ya que $4g_{2,2}(1/30\,890) = 0,5001...$ y $4g_{2,2}(1/12\,490\,950) = 4,71...$, con lo que volvemos a nuestros tres discriminantes y concluimos el caso $T = 2$. □

En el caso séxtico totalmente complejo, Friedman [Fr1] demostró que los tres primeros reguladores son los más pequeños de cualquier signatura, y que cualquier otro regulador es mayor que $1/4$. Nosotros demostraremos un poco más, pero limitándonos a esta signatura.

Teorema 13. *Entre los cuerpos de grado 6 totalmente complejos, el de discriminante* $-10\,051$ *tiene el menor regulador, aproximadamente igual a* $0,205216...$. *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* $-10\,571$ *y* $-12\,167$ *con reguladores iguales a* $0,213209...$ *y* $0,237219...$, *respectivamente. En esta signatura, todos los demás cuerpos* k, *cumplen con* $R_k >$ $0,27$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,27$. Entonces k no puede ser CM ya que $R_k \geq 2R_{k_+} \geq 2 \cdot 0,525$, por el Teorema 2 y (3.8). Supongamos ahora que $T = 0$.

Como $r = 2$ y $\gamma_2 = 2/\sqrt{3}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 2\,980\,133,79$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 649\,080,05$. Como $2g_{0,3}(1/2\,980\,133) = 0,76...$ y $2g_{0,3}(1/649\,081) = 0,58...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 16\,420$, ya que $4g_{0,3}(1/16\,420) = 0,2701...$ y $4g_{0,3}(1/2\,980\,133) = 1,52...$. Inspeccionando los ocho cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 16\,420$ [CDO], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema.

Como ya hemos excluido el caso CM, el único caso que nos queda es $T = 1$, con L_1 de signatura $(1,1)$.[4] Por (3.3) y el Teorema 1, tenemos $m_k(\varepsilon_1) > 0,28\sqrt{6}$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{2}$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 1\,811\,385,28$. Como viéramos ya en el caso $T = 0$, si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 649\,081$. Por (3.12), $2g_{0,3}(1/649\,081) = 0,58...$ y $2g_{0,3}(1/1\,811\,385) = 0,71...$, concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 16\,420$, ya que $4g_{0,3}(1/16\,420) = 0,2701...$ y $4g_{0,3}(1/1\,811\,385) = 1,42...$, lo que nos devuelve a los tres discriminantes del Teorema. □

4.6. Cuerpos de grado 7

Las referencias para tablas que utilizaremos son [Di1], [Po2] y [Vo]. Como 7 es primo, sólo $T = 0$ es posible.

Teorema 14. *Entre los cuerpos de grado 7 totalmente reales, el de discriminante* 20 134 393 *tiene regulador minimal igual a* 14, 446932.... *Los dos reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 25 367 689 *y* 28 118 369 *con reguladores iguales a* 16, 005863... *y* 18, 127843..., *respectivamente. Si k es un cuerpo de grado 7 totalmente real con discriminante distinto de los tres anteriores, entonces su regulador cumple $R_k > 19,1$.*

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 19,1$. Como $r = 6$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_6 = 2/\sqrt[6]{3}$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 16\,245\,835\,774\,084,6$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 2\,819\,959\,521,51$. Como $2g_{7,0}(1/2\,819\,959\,522) = 45,15...$ y $2g_{7,0}(1/16\,245\,835\,774\,084) = 191,9...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 49\,400\,000$, ya que $4g_{7,0}(1/16\,245\,835\,774\,084) = 383,9...$ y $4g_{7,0}(1/49\,400\,000) = 19,103...$. Inspeccionando los 19 cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 49\,400\,000$ [Vo], vemos que los tres primeros reguladores son los del teorema. □

[4] Un cuerpo séxtico totalmente complejo no puede contener un subcuerpo real cuadrático, ya que un cuerpo totalmente real L no tiene extensión k totalmente compleja de grado $[k : L]$ impar.

Teorema 15. *Entre los cuerpos de grado 7 y signatura* $(1,3)$*, el de discriminante* $-184\,607$ *tiene regulador minimal igual a* $0,380447...$*. Si* k *es un cuerpo de grado 7 y signatura* $(1,3)$ *con discriminante distinto del anterior, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,3836$.

Entre los cuerpos de grado 7 y signatura $(1,3)$*, el de discriminante* $-184\,607$ *tiene regulador minimal, aproximadamente igual a* $0,3804$*. Si* k *es un cuerpo de grado 7 y signatura* $(1,3)$ *con discriminante distinto del anterior, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,3836$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,3836$. Como $r = 3$, y como por (1.18) tenemos $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$, de (3.1) obtenemos $|D_k| < 5\,683\,255\,810,86$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 22\,162\,140,35$. Como $2g_{1,3}(1/22\,162\,141) = 1,37...$ y $2g_{1,3}(1/5\,683\,255\,810) = 2,26...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 196\,128$, ya que $4g_{1,3}(1/196\,128) = 0,383607...$ y $4g_{1,3}(1/5\,683\,255\,810) = 4,52...$. Inspeccionando los cuatro cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 196\,128$ [Di1], vemos que el primer regulador es es del teorema. □

4.7. Signaturas no logradas en grado 7

El lector se preguntará qué sucede con las dos signaturas restantes en grado 7. Para la signatura $(5,1)$, tenemos que el método analítico es inútil si $|D_k| > 81,9^7$, ya que $g_{5,1}(1/81,9^7) < 0$, y por lo tanto $g_{5,1}(1/x) < 0$ para $x > 81,9^7$. El menor regulador conocido en esta signatura es de aproximadamente 2,8846, correspondiente al cuerpo con discriminante $-2\,306\,599$, minimal para esta signatura. Desgraciadamente la cota geométrica (3.1) en este caso da $|D_K| < 107,05^7$ si $R_k < 2,8846$. Como $107,05 > 81,9$, el método analítico fracasa.

Lo mejor que podemos demostrar para todo k en esta signatura es $R_k > 1,689$ puesto que, por (3.1), si $R_k \leq 1,689$ entonces $|D_k| < 81,1561^7$. Si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 541\,261\,759,21$ por la Tabla 1. Como $2g_{5,1}(1/541\,261\,760) = 13,74...$ y $2g(1/81,1561^7) = 1,700092...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. Como $2g(1/81,1561^7) = 1,700092...$ y $4g(1/2\,306\,599) = 2,78...$, obtenemos la contradicción que demuestra $R_k > 1,689$.

El regulador más pequeño conocido en signatura $(3,2)$ es de aproximadamente 1,0043..., correspondiente al cuerpo de discriminante 612 233, minimal para esta signatura. Lo mejor que podemos demostrar para todo k con signatura $(3,2)$ es $R_k > 0,8727$. En efecto, supongamos que $R_k \leq 0,8727$. Entonces (3.10) da $|D_k| < 1\,046\,873\,034\,826,2$. Si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 107\,325\,647,38$ por la Tabla 1. Por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial ya que $2g_{3,2}(1/107\,325\,648) = 4,28...$ y $2g_{3,2}(1/1\,046\,873\,034\,826) = 0,874...$.

Concluimos verificando que $4g(1/1\,046\,873\,034\,826) = 1,748...$ y $4g(1/612\,233) = 0,9763....$

4.8. Cuerpos de grado 8 totalmente complejos

En el caso óctico totalmente complejo, Díaz y Díaz [Di2] determinó los primeros 15 discriminantes minimales, pero no publicó sus ecuaciones ni reguladores.[5] El Profesor Díaz y Díaz gentilmente re-calculó los polinomios necesarios y nos hizo llegar la tabla que transcribimos en el Capítulo 5.

Notamos que en [Di2] se demuestra que hay 15 cuerpos de grado 8 totalmente complejos con discriminante menor a 1 656 110. Como hemos verificado que los 15 cuerpos en la tabla efectivamente tienen la signatura, grado, y discriminante señalados, queda claro que la lista es completa.

Teorema 16. *Entre los cuerpos de grado 8 totalmente complejos, el cuerpo de discriminante* 1 282 789 *tiene el menor regulador, aproximadamente igual a* $0,3135$*. Los tres reguladores en esta signatura que le siguen corresponden a los cuerpos de discriminante* 1 361 513, 1 385 533 *y* 1 424 293 *con reguladores aproximados de* $0,3264$, $0,3311$ *y* $0,3367$*, respectivamente. Si k es un cuerpo óctico totalmente complejo con discriminante distinto de los cuatro anteriores, entonces su regulador cumple* $R_k > 0,344$.

Demostración. Supongamos que $R_k \leq 0,344$. Entonces k no puede ser CM ya que $R_k \geq 4R_{k_+} \geq 4 \cdot 0,824 = 3,996$, por el Teorema 4 y (3.8). Supongamos ahora que $T = 0$. Como $r = 3$ y $\gamma_3 = \sqrt[3]{2}$, de (3.10) obtenemos $|D_k| < 118\,538\,811\,875,16$. La Tabla 1 nos dice que si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| > 167\,750\,589,93$. Como $2g_{0,4}(1/118\,538\,811\,875) = 1,61...$ y como $2g_{0,4}(167\,750\,590) = 1,109...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 1\,644\,000$, ya que $4g_{0,4}(1/1\,644\,000) = 0,3441...$ y $4g_{0,4}(1/118\,538\,811\,875) = 3,224....$ Inspeccionando los quince cuerpos en esta signatura con $|D_k| < 1\,644\,000$ en la Tabla 2, capítulo 5, vemos que los cuatro primeros reguladores son los del teorema, y que todos los otros son mayores que 0,344.

Como ya hemos excluido el caso CM, los únicos casos que nos quedan es $T = 1$ ó $T = 2$. El cuerpo L_1 no puede tener signatura $(2,0)$ puesto que, por (3.3), $m_k(\varepsilon_1) > 4 \cdot 0,48 = 1,92$, lo que contradice la desigualdad $m_k(\varepsilon_1) < 0.991$ implicada por (1.17). Las posibles signaturas de L_1 son entonces $(0,2)$ o $(2,1)$.

Supongamos ahora $T = 1$. Para la signatura $(0,2)$, la desigualdad (3.3) y el Teorema 6 dan $m_k(\varepsilon_1) > 2 \cdot 0,337 = 0,674$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = 2$, con lo

[5] Nos explicó que su razón fue que estos cuerpos había sido descubiertos antes por Lenstra [Le]. Sin embargo, Lenstra tampoco dió las ecuaciones, ya que describió sus cuerpos como ciertas extensiones abelianas de otros cuerpos ya conocidos.

que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 9\,765\,910\,895,74$. Por (3.12), $2g_{0,4}(1/9\,765\,910\,895) = 2,151...$ y $2g_{0,4}(1/167\,750\,590) = 1,109...$, concluimos que la clase del diferente es trivial. La desigualdad (3.11) da $|D_k| < 1\,644\,000$, ya que $4g_{0,4}(1/1\,644\,000) = 0,34411...$ y $4g_{0,4}(1/9\,765\,910\,895) = 4,303...$, lo que nos devuelve a los cuatro discriminantes del Teorema.

En la signatura $(2,1)$, tomando el peor caso $(b_1, b_2, b_3) = (2,4,4)$, la desigualdad (3.6) da $m_k(\varepsilon_1) > 2 \cdot 0,28 = 0,56$. Usando (1.2) tenemos $A(k/L_1) = \sqrt{2}$, con lo que de (3.2) obtenemos $|D_k| < 41\,340\,603\,952,08$. Por (3.12), $2g_{0,4}(1/41\,340\,603\,952) = 2,048...$ y $2g_{0,4}(1/167\,750\,590) = 1,109...$, concluimos que la clase del diferente es trivial. Tal como en el caso anterior, terminamos viendo la Tabla 2.

Veamos ahora el caso $T = 2$. Si $L_1 \subsetneq L_2$, L_1 sería real cuadrático, caso que ya descartamos. Si $L_1 = L_2$, su signatura es necesariamente $(2,1)$. Como $r(L_2) = 2$, podemos usar (3.7) y el Teorema 5, encontrando que

$$m_k(\varepsilon_1)m_k(\varepsilon_2) \geq 2\sqrt{3} \cdot 0,369 > 1,278.$$

El Lema 3, parte II da $|D_k| < 18\,810\,448\,265,82$ ya que $A(L_1/\mathbb{Q}) = \sqrt{18}$ y $A(k/L_2) = \sqrt{2}$. Si la clase del diferente no es trivial, entonces $|D_k| \geq 167\,750\,590$. Como $2g_{0,4}(1/18\,810\,448\,265){=}2,16...$ y $2g_{0,4}(1/167\,750\,590){=}1,109...$, por (3.12) concluimos que la clase del diferente es trivial. Como antes, volvemos a concluir que k tiene que ser uno de los 4 cuerpos del teorema. $\square$

Capítulo 5

Cuerpos de signatura $(0, 4)$ (F. Díaz y Díaz)

A continuación damos la lista de todos los cuerpos ócticos totalmente complejos k con discriminante $D_k < 1\,656\,110$. En la columna izquierda aparece D_k, en la columna central damos el polinomio $p(x)$ tal que $p(\alpha) = 0$ y $k = \mathbb{Q}(\alpha)$, y en la columna derecha damos R_k. Esta lista nos fue gentilmente facilitada por Francisco Díaz y Díaz.

Tabla 2. Cuerpos ócticos totalmente complejos con discriminante menor a $1\,656\,110$.

Discriminante	Polinomio	Regulador
1257728	$x^8 - 2x^7 + 4x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x + 1$	$0,6188866$
1265625	$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$	$4,66182$
1282789	$x^8 - x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	$0,3135398$
1327833	$x^8 - x^7 + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1$	$0,963$
1342413	$x^8 - x^7 + x^6 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$	$0,9707274$
1361513	$x^8 - x^7 + 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$	$0,326412$
1385533	$x^8 - 2x^7 + 3x^6 - 3x^5 + x^4 + 1$	$0,3311125$
1424293	$x^8 - 2x^7 + 2x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$0,3367$
1474013	$x^8 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$	$0,3451$
1492101	$x^8 - x^7 + x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$	$1,04325557$
1513728	$x^8 - 2x^7 + x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$	$2,106944$
1520789	$x^8 - x^7 - x^6 + x^4 - x^2 + x + 1$	$0,353845$
1578125	$x^8 - 2x^7 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 + 2x + 1$	$1,811959$
1590773	$x^8 - x^7 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$	$0,363609$
1601613	$x^8 - 2x^6 - 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$	$1,10095849$

El orden aparentemente caótico del regulador en la Tabla 2 se explica por la presencia de $\omega > 2$ raíces de la unidad. Si tabuláramos R/ω, veríamos una relación monótona de R_k/ω_k con D_k en este rango, como ocurre frecuentemente con los discriminantes más pequeños en cada signatura. Los cuerpos en la lista con reguladores pequeños (menores que 0,4) contienen sólo dos raíces de la unidad. Los otros contienen 4, 6, 10 ó 30 raíces de la unidad. El regulador y discriminante han sido calculados con el programa PARI GP, disponible libremente en `pari.math.u-bordeaux.fr/download.html`.

Bibliografía

[BMO] Bergé, A.-M., Martinet, J. y Olivier, M., The computation of sextic fields with a quadratic subfield. Math. Comp. 54 (1990) 869–884.

[BS] Borevich, Z.I. y Shafarevich, I.R.: Number Theory. Academic Press, New York (1966).

[Bo] Boyd, D., Reciprocal polynomials having small measure, Math. Comp. 35 (1980) 1361–1377.

[Ca] Cassels, J., An Introduction to the Geometry of Numbers. Springer, Berlín (1959).

[CDO] Cohen, H., Diaz y Diaz, F. y Olivier, M., Constructing complete tables of quartic fields using Kummer theory, Math. Comp. 72 (2003) 941–951.

[Co] Cohen, H., A Course in Computational Algebraic Number Theory. Springer, Berlín (1996).

[Cu] Cusick, T. W. y Schoenfeld, L., A table of fundamental pairs of units in totally real cubic fields, Math. Comp. 48 (1957) 147–158.

[Di1] Diaz y Diaz, F., Valeurs minima du discriminant des corps de degré 7 ayant une seule place réelle, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983) 137–139.

[Di2] Diaz y Diaz, F., Petits discriminants des corps de nombres totalement imaginaries de degré 8, J. Number Theory 25 (1987) 34–52.

[Fr1] Friedman, E., Analytic formulas for the regulator of a number field, Invent. Math. 98 (1989) 599–622.

[Fr2] Friedman, E., Regulators and total positivity, Publ. Mat., Proceedings of the Primeras Jornadas de Teoría de Números (2007) 119–130 .

[Ha] Hanrot, G., Solving Thue equations without the full unit group, Math. Comp. 69 (2000) 395–405.

[He] Hecke, E., Lectures on the Theory of Algebraic Numbers. Springer, Berlín (1981).

[Le] Lenstra, H. W., Euclidean number fields of large degree, Invent. Math. 38 (1976) 237–254.

[Ma] Martinet, J., Perfect Lattices in Euclidean Spaces. Springer, Berlín (2003).

[Neu] Neukirch, J., Algebraic Number Theory. Springer, Berlín (1999).

[Od] Odlyzko, A. M., Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions: a survey of recent results. Sém. Théor. Nombres Bordeaux 2 (1990) 119–141 .

[Ol1] Olivier, M., Corps sextiques primitifs. Ann. Inst. Fourier 40 (1991) 757–767.

[Ol2] Olivier, M., The computation of sextic fields with a cubic subfield and no quadratic subfield, Math. Comp. 58 (1992) 419 - 432.

[PMD] Pohst, M., Martinet, J., y Diaz y Diaz, F., The minimum discriminant of totally real octic fields, J. Number Theory 36 (1990) 145–159.

[Po1] Pohst, M., Regulatorabschätzungen für total relle algebraische Zahlkörper, J. Number Theory 9 (1977) 459–492.

[Po2] Pohst, M., The minimum discriminant of seventh degree totally real algebraic number fields. En: Number Theory and Algebra, pp. 235–240. Academic Press, New York (1977).

[Poi] Poitou, G., Sur les petits discriminants, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres) 9 (1976-1977), no. 6.

[PZ] Pohst, M., Zassenhaus, H., Algorithmic Algebraic Number Theory. Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[Re] Remak, R., Über Grössenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers, Compos. Math. 10 (1952) 245–285.

[Sm] Smyth, C. J., On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. Bull. London Math. Soc. 3 (1971) 169–175.

[SPD] Schwarz, A., Pohst, M., y Diaz y Diaz, F., A table of quintic number fields, Math. Comp. 63 (1994) 361–376.

[Vo] Voight, J., Enumeration of totally real number fields of bounded root discriminant. En: Algorithmic Number Theory (ANTS VIII, Banff, 2008), A. van der Poorten y A. Stein, eds., Lecture Notes in Comp. Sci., vol. 5011, Springer, Berlín (2008) 268–281.

[Zi] Zimmert, R., Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung, Invent. Math. 62 (1981) 367–380.