Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Acciones de grupos sobre el espacio de Riemann-Roch

por

Daniela Vásquez Latorre

Director de Tesis Dr. Ángel Carocca
Co-directora de Tesis Dra. Anita M. Rojas

Tesis presentada al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chile en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Diciembre, 2013

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata.

Daniela Andrea Vásquez Latorre

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 6 de Diciembre de 2013.

Director de Tesis
Dr. Ángel Carocca. Angel Carocca

Co-directora de Tesis
Dra. Anita M. Rojas.

Comisión de Evaluación de Tesis

Dr. Antonio Behn. Antonio Behn
Presidente de la Comisión

Dr. Víctor González.

Dra. Rubí Rodríguez. Rubí Rodríguez

BIOGRAFÍA

Nunca he escrito sobre mi, sobre mi historia. Lo haré en unas breves líneas. Nací en la ciudad de Rancagua, en febrero 12 de 1975. Bajo la dictadura militar. Siendo la mayor de dos hermanos. Mi educación básica trancurrió en las ciudades de Rancagua, Copiapó y Santiago. Donde me radicaría hasta completar mi enseñanza media y realizar mis estudios universitarios. Pero sin duda alguna, al lugar que pertenezco es Bahía Inglesa, cerca del mar y de la inmensidad del desierto. Donde he vivido los mejores momentos de mi vida. En el año 1992, comencé a estudiar la carrera de Licenciatura en matemáticas, en la Universidad Católica de Chile, después en la misma institución continué con mis estudios de Maestría, graduándome de esta el año 2000. Durante este periodo, conocí a Guillermo un Colombiano que llegó a estudiar a la PUC, con quién formaría mi propia familia y que sin duda cambiaría el rumbo de mi vida. En el año 1999 nace mi hijo Camilo, mi compañero de siempre, definitivamente lo mejor que me ha pasado en la vida. Después a pricipios del año 2001, me voy a vivir a Cali, Colombia, con el propósito de continuar con nuestra familia Chilena-Colombiana. Allí comienzo a trabajar como profesora en la Universidad del Valle, y mucho tiempo después decido regresar a Chile a realizar un doctorado en matemáticas, un pendiente que tenía en mi vida. La Universidad de Chile me brindó esa oportunidad, terminando mis estudios de doctorado en esa casa de estudios. Luego regresé a Colombia a continuar con mi vida, país que se ha tranformado en mi nuevo hogar. Indudablemente quedan muchos pasajes de la historia de mi vida sin contar, pero como lo dije al principio, sólo eran unas breves líneas.

AGRADECIMIENTOS

Imposible no comenzar agradeciendo a mi hijo Camilo, quién me acompañó, animó, comprendió y que con todo su amor me ayudó sin duda a realizar esta tarea. Por supuesto a mis papás, que cuidaron de Camilo y de mi en todo este proceso, yo se que se sienten orgullosos de todos mis logros. También a Guillermo, quién entendió que hacer un doctorado era un pendiente que tenía en mi vida y no dudo en dejar que Camilo me acompañara en este camino. A mi familia Chilena y Colombiana.

A mi director de tesis, profesor Ángel Carocca, por creer de nuevo en mi, por todo el conocimiento entregado, su infinita paciencia y acompañarme en esta travesía. A mi co-directora, profesora Anita Rojas, mi compañera y amiga en la época en que yo realizaba la maestría y ahora mi profesora. Gracias Anita por enseñarme, escucharme y siempre hacerme sentir que soy capaz. A la profesora Rubí Rodríguez, por lo que me ha enseñado y alentado a continuar con este proyecto. Agradezco también al profesor Luis Arenas Carmona, quién se dio el trabajo de leer minuciosamente una versión preliminar de esta tesis y cuyas observaciones fueron de mucha ayuda para mejorar la claridad de la misma.

Indudablemente, a mis nuevos amigos, Adán (Nico) y Felipe que me han acompañado, cuidado y han estado conmigo todo este tiempo, compartiendo el estudio y la vida misma. Como no mecionar a Patricio, mi primer nuevo amigo. Yo se que a pesar de la distancia nuestra amistad continuará. A Martha Romero, mi amiga, mi compañera de estudio y de tantos viajes, quién mas que ella entiende como he vivido este proceso, sin duda alguna parte importante de este doctorado y que con seguridad compartiremos el futuro que nos espera en nuestra vida académica. A Mariela, quién compartió sus conocimientos conmigo, sus buenas vibras y acompañarme en el viejo mundo. A mis amigas Martha Pinzón, Paulita y Sofi, quienes me acompañan, cuidan y me hacen sentir que no estoy tan lejos de casa. A los viejos amigos, en especial a Carolina Becerra, quién me demostró que a pesar de los años y de la distancia, la amistad perdura.

A CONICYT, por el apoyo otorgado y a la Universidad del Valle, por confiar en mi.

Y como alguién dijo por ahí gracias totales.

Contenido

Lista de símbolos

$\mathcal{X}/G$	:	Superficie cociente de $\mathcal{X}$ por la acción del grupo G.
$H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$	:	Primer grupo de homología en $\mathcal{X}$.
$H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$	:	Espacio de 1-formas diferenciales analíticas en $\mathcal{X}$.
$\overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})}$	:	Espacio dual de $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$.
$\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$	:	Grupo de automorfismos de la superficie $\mathcal{X}$.
$\mathrm{ord}_P\, F$	:	Orden de un punto P por la función F.
$H \leq G$	:	H subgrupo del grupo G.
$\|G\|$	:	orden del G.
$\mathrm{Stab}_G(P)$	:	Estabilizador en G del punto P.
$N_G(H)$	:	Normalizador de H en G.
$g_{\mathcal{X}}$	:	Género de la superficie de Riemann $\mathcal{X}$.

Resumen

Sea G un grupo finito de automorfismos de una curva proyectiva suave $\mathcal{X}$, sobre el cuerpo de los números complejos, y D un divisor no especial de $\mathcal{X}$ invariante bajo la acción de G. En este trabajo estudiaremos el problema de descomposición de la representación natural del grupo G en el espacio de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$, asociado al divisor D. Presentaremos fórmulas explícitas para la multiplicidad de cada factor irreducible, en términos de la multiplicidad de estos factores en la descomposición de la acción de G, en el espacio dual de las 1-formas diferenciales holomorfas sobre $\mathcal{X}$. Generalizando de esta forma las fórmulas conocidas para la multiplicidad de los factores irreducibles para el caso racional.

Introducción

Sea $\mathcal{X}$ una curva proyectiva suave, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica 0, y $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ el cuerpo de funciones racionales de $\mathcal{X}$. Para D un divisor cualquiera sobre la curva $\mathcal{X}$ el espacio de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$ es el $\mathbb{K}$-espacio vectorial dado por

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})^* \;/\; \mathrm{div}(f) \geq D^{-1}\} \cup \{0\}$$

donde $\mathrm{div}(f)$ es el divisor principal de la función f en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$.

Si G es un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ entonces G actúa sobre $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ y sobre el grupo $\mathrm{Div}(\mathcal{X})$ de los divisores de $\mathcal{X}$. Además, si D es un divisor de $\mathcal{X}$ invariante por la acción de G entonces G actúa sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}(D)$. De esta forma, $\mathcal{L}(D)$ tiene estructura de $\mathbb{K}[G]$-módulo, en otras palabras G tiene una representación lineal sobre $\mathcal{L}(D)$.

Nuestro interés, en este trabajo, es estudiar la $\mathbb{K}[G]$-estructura de $\mathcal{L}(D)$, es decir la descomposición de la representación lineal de G en $\mathcal{L}(D)$, como suma de representaciones irreducibles de G.

El problema de estudiar la $\mathbb{K}[G]$-estructura de $\mathcal{L}(D)$ fue considerado originalmente por Hurwitz para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos, D un divisor canónico y G un grupo cíclico. Una generalización de estos resultados, para grupos finitos arbitrarios y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, fue dada por Chevalley-Weil [CW]. Este problema ha sido abordado para otros cuerpos y otros tipos de divisores, por ejemplo se conocen los trabajos de Ellingsrud y Lonsted [EL], Kani [Ka], Nakajima [N], Köck [Ko] y Borne [B].

En trabajos más recientes de Joyner y Ksir [JKV], [JK], se estudia la descomposición, en el caso racional, del espacio $\mathcal{L}(D)$ para determinados divisores sobre una curva $\mathcal{X}$, que son obtenidos a partir del levantamiento de divisores sobre curvas dadas como cocientes intermedios por subgrupos del grupo de automorfismos G. Estos resultados incluyen fórmulas explicitas, en el caso racional, para la multiplicidad de cada factor irreducible en términos de la ramificación de G sobre la curva $\mathcal{X}$.

En este trabajo estudiaremos el problema de descomposición de la representación del grupo G en el espacio $\mathcal{L}(D)$, sobre los números complejos, y presentaremos fórmulas explícitas para la multiplicidad de cada factor irreducible, en términos de la multiplicidad de estos factores en la descomposición de la acción de G en el espacio dual de las 1-formas diferenciales holomorfas sobre $\mathcal{X}$. Además, utilizando estas fórmulas y la representación racional del grupo G sobre el primer grupo de homología de $\mathcal{X}$, obtenemos las fórmulas antes mencionadas para el caso racional.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: El primer capítulo está dedicado a presentar definiciones y resultados sobre curvas y acción de grupos, que serán de utilidad en el desarrollo de este trabajo. El segundo capítulo es dedicado a presentar definiciones, algunos resultados sobre divisores y el espacio de Riemann-Roch. Además, incluímos resultados sobre divisores no especiales que serán de interés en nuestros resultados. Los capítulos siguientes son dedicados a presentar los resultados obtenidos durante nuestra investigación. En el capítulo 3 estudiamos acciones de grupos sobre el espacio de Riemann-Roch. En el capítulo 4 presentamos detalladamente la descomposición del espacio de Riemann-Roch de curvas de Fermat y de algunas curvas p-gonales. Nuestro trabajo concluye con un apéndice que contiene algunos resultados sobre curvas de Catalán y algunos elementos de representaciones de grupos.

CAPÍTULO 1
Preliminares

En este capítulo presentaremos definiciones, propiedades y algunos resultados relevantes para el desarrollo de los capítulos posteriores.

1.1. Superficies de Riemann

Una *superficie de Riemann* $\mathcal{X}$ es un espacio topológico hausdorff, conexo, tal que existe una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de abiertos en $\mathcal{X}$ y $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}\}_{\alpha \in I}$ homeomorfismos, que satisfacen lo siguiente:

- $\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
- si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ entonces la función $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es analítica.

$$\begin{tikzcd}
 & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[dl, "\varphi_\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi_\beta"] & \\
\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\alpha \arrow[rr, "\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}"'] & & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\beta
\end{tikzcd}$$

El par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ se llama carta o coordenada local y el conjunto $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)/\alpha \in I\}$ se denomina atlas complejo o estructura compleja de la superficie $\mathcal{X}$. Si $P \in U_\alpha$ es tal que $\varphi_\alpha(P) = 0$, entonces se dice que $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta centrada en P.

Se observa de la definición, que si $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es analítica en $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ entonces $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es también analítica en $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Note además, que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es una biyección.

Definición 1.1.1. Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann. Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un punto P de $\mathcal{X}$, si existe una carta (U, φ), con $P \in U$, tal que la función $f \circ \varphi^{-1}$ es analítica en $\varphi(P)$. Diremos que f es holomorfa en un abierto $W \subseteq \mathcal{X}$ si es holomorfa en todo punto P de W.

No es difícil ver, debido a que el cambio de cartas es analítico, que f es holomorfa en un punto P de $\mathcal{X}$ si y sólo si para toda carta (U, φ), con $P \in U$, la función $f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(P)$. Además si f es holomorfa en P, se tiene que f es holomorfa en algún abierto que contiene a P.

Usando cartas, el concepto de singularidad removible y polo, para funciones de una variable compleja, ver [GKR], se extiende a superficies de Riemann.

Definición 1.1.2. Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann, P un punto de $\mathcal{X}$ y f una función holomorfa en $W \setminus \{P\}$, donde W es una vecindad de P. Diremos que

1. f tiene una singularidad removible en P si y sólo si existe una carta (U, φ) en $\mathcal{X}$, con $P \in U$, tal que la función $f \circ \varphi^{-1}$ tiene una singularidad removible en $\varphi(P)$.
2. f tiene un polo en P si y sólo si existe una carta (U, φ) en $\mathcal{X}$, con $P \in U$, tal que la función $f \circ \varphi^{-1}$ tiene un polo en $\varphi(P)$.

De igual forma, se puede concluir que f tiene una singularidad removible o un polo en P si y sólo si para toda carta (U, φ) en $\mathcal{X}$, con $P \in U$, la función $f \circ \varphi^{-1}$ tiene una singularidad removible o un polo en $\varphi(P)$, respectivamente.

Definición 1.1.3. Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann. Una función $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ es meromorfa en un punto P de $\mathcal{X}$, si es holomorfa ó tiene una singularidad removible ó tiene un polo en P. Diremos que f es meromorfa en un conjunto abierto $W \subseteq \mathcal{X}$ si es meromorfa en todo punto P de W.

Denotamos por $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ al conjunto

$$\mathbb{K}(\mathcal{X}) = \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{C} \,/\, f \text{ es meromorfa}\}$$

el cual tiene estructura de cuerpo, con la suma y producto usual de funciones, y se denomina el cuerpo de funciones meromorfas de $\mathcal{X}$.

Nos referiremos a algunas propiedades de funciones en superficies de Riemann, para más detalles ver [M].

Sea P un punto de $\mathcal{X}$ y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en $W \setminus \{P\}$, donde W es una vecindad abierta de P. Sea (U, φ) una carta en $\mathcal{X}$, con $P \in U$, donde la coordenada local es $z = \varphi(x)$ para x cercano a P. Así $f \circ \varphi^{-1}$ es analítica en una vecindad abierta de $z_0 = \varphi(P)$, luego localmente es de la forma

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n.$$

Esta expansión se llama *serie de Laurent de f en torno a P, con respecto a φ* (o con respecto a la coordenada local z). Utilizando esta serie, podemos determinar la naturaleza de la singularidad de f en P. Si f es meromorfa, entonces $f \circ \varphi^{-1}$ tiene expansión con un número finito de términos negativos, luego se define el *orden de f en P*, denotado por $\mathrm{ord}_P f$, como

$$\mathrm{ord}_P f = \min\{n \,/\, c_n \neq 0\}.$$

Este número es independiente de la carta (U, φ) seleccionada. Puesto que, si f es una función meromorfa, entonces la expansión en serie Laurent de f en torno a P, con respecto a la coordenada local $z = \varphi(x)$, para x cercano a P y $z_0 = \varphi(P)$ es

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \text{términos de orden superior} \tag{1.1}$$

donde $c_{n_0} \neq 0$. Utilizando esta coordenada local, se tiene que $\mathrm{ord}_P f = n_0$. Sea (U', ϕ) otra carta en $\mathcal{X}$, con $P \in U'$, donde la coordenada local es $w = \phi(x)$ para x cercano a P y $w_0 = \phi(P)$. Consideremos el cambio de cartas $z = T(w) = \varphi \circ \phi^{-1}(w)$, el cual es una función analítica. Como T es invertible en w_0, entonces $T'(w_0) \neq 0$, por tanto la serie de Taylor de T en torno a w_0 es

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n \tag{1.2}$$

donde $a_1 \neq 0$. Luego por (1.1) y (1.2) se tiene que

$$h(w) = f \circ \varphi^{-1} \circ T(w) = c_{n_0} a_1^{n_0} (w - w_0)^{n_0} + \text{términos de orden superior}$$

es la serie de Laurent de f en torno a P, con respecto a la coordenada local w. Como $c_{n_0} \neq 0$ y $a_1 \neq 0$, se tiene que $c_{n_0} a_1^{n_0} \neq 0$. Luego utilizando esta serie de potencias, obtenemos que $\mathrm{ord}_P f = n_0$. Por tanto el orden de f en P es independiente de la carta seleccionada.

La definición de orden dada anteriormente, motiva la siguiente proposición.

Proposición 1.1.4. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann y $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa en un punto P de $\mathcal{X}$. Entonces*

1. *f es holomorfa en P si y sólo si* $\mathrm{ord}_P f \geq 0$.
2. *f tiene un cero en P si y sólo si* $\mathrm{ord}_P f > 0$.
3. *f tiene un polo en P si y sólo si* $\mathrm{ord}_P f < 0$.
4. *f no tiene cero ni polo en P si y sólo si* $\mathrm{ord}_P f = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Se desprende de la definición de orden.

■

Definición 1.1.5. Sea $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa en un punto P de $\mathcal{X}$. Se dice que que f tiene un cero de orden n en P, si $\mathrm{ord}_P f = n \geq 1$. De igual manera se dice que f tiene un polo de orden n en P, si $\mathrm{ord}_P f = -n < 0$.

Definición 1.1.6. Una función $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ entre superficies de Riemann, es holomorfa en $P \in \mathcal{X}$, si y sólo si existen cartas (U_1, φ_1) en $\mathcal{X}$, con $P \in U_1$, y (U_2, φ_2) en $\mathcal{Y}$, con $F(P) \in U_2$, tal que la función $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_1(P)$.

$$\begin{tikzcd}
P \in U_1 \cap F^{-1}(U_2) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F(P) \in U_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\
\varphi_1(U_1 \cap F^{-1}(U_2)) \arrow[r, "\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}"'] & \varphi(U_2)
\end{tikzcd}$$

Diremos que F es holomorfa en un conjunto abierto $W \subseteq \mathcal{X}$ si es holomorfa en todo punto P de W. En particular si $W = \mathcal{X}$ diremos simplemente que F es holomorfa.

Nuevamente, debido a que el cambio de cartas es analílico, se tiene que F es holomorfa en $P \in \mathcal{X}$ si y sólo si para todo par de cartas (U_1, φ_1) en $\mathcal{X}$, con $P \in U_1$, y (U_2, φ_2) en $\mathcal{Y}$, con $F(P) \in U_2$, la función $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_1(P)$. Además si F es holomorfa en P, se tiene que F es holomorfa en alguna vecindad abierta de P. Observamos también que la composición de funciones holomorfas es holomorfa.

La siguiente definición nos permite decir cuando dos superficies de Riemann representa la misma superficie.

Definición 1.1.7. Un *Isomorfismo* (o biholomorfismo) entre superficies de Riemann es una función holomorfa $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, la cual es biyectiva y cuya inversa $F^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es holomorfa. Si existe un isomorfismo entre las superficies $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, diremos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son isomorfas.

Un isomorfismo $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ se llama *Automorfismo* de $\mathcal{X}$, denotamos por $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ al conjunto de todos los automorfismos de $\mathcal{X}$, el cual tiene estructura de grupo con la composición de funciones.

La siguiente proposición nos da cuenta de una propiedad local de funciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Proposición 1.1.8. *Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann y P un punto de $\mathcal{X}$. Entonces existe un único entero $m_P \geq 1$ que satisface lo siguiente: para toda carta (U_2, φ_2) en $\mathcal{Y}$, centrada en $F(P)$, existe una carta (U_1, φ_1) en $\mathcal{X}$, centrada en P, tal que*

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(z) = z^{m_P}$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [M], pág 44. ∎

La unicidad de este número m_P, nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.1.9. El número m_P obtenido en la proposición anterior, se llama *multiplicidad* de F en P y se denota por $\mathrm{mult}_P\, F$. Si $\mathrm{mult}_P\, F \geq 2$ diremos que P es un *punto de ramificación* de F. Si $y \in \mathcal{Y}$ es imagen de un punto de ramificación de F, diremos que y es un *punto rama* de F.

El conjunto de puntos de ramificación de F es un conjunto discreto. Si $\mathcal{X}$ es compacta este conjunto es finito.

En lo que sigue de nuestro trabajo, consideraremos superficies de Riemann compactas, sobre $\mathbb{C}$, las cuales topológicamente se clasifican de acuerdo a su género. Esto es, toda superficie de Riemann compacta $\mathcal{X}$, es topológicamente homoemorfa a la esfera ó a una suma conexa de $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$ toros. Entendiendo que cuando $\mathcal{X}$ es homemorfa a la esfera, $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} = 0$. El número $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$ se llama género de la superficie.

Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas. Como F es continua, se tiene que $F(\mathcal{X})$ es un compacto en $\mathcal{Y}$. Por tanto $F(\mathcal{X})$ es un cerrado. Pero $F(\mathcal{X})$ es un abierto, debido a que F es una función abierta. Luego por la conexidad de Y se concluye que $F(X) = \mathcal{Y}$. Así para cada $y \in \mathcal{Y}$, el conjunto de las preimagenes $F^{-1}(y)$ es no vacío. Además este conjunto es discreto, luego nuevamente por la compacidad de $\mathcal{X}$, se tiene que $F^{-1}(y)$ es un conjunto finito. Así a cada $y \in Y$ podemos asociarle el siguiente número entero

$$d_F(y) = \sum_{P \in F^{-1}(y)} \mathrm{mult}_P\, F.$$

Proposición 1.1.10. *Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas. Entonces el entero $d_F(y)$ es constante e independiente de y.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [M], pág 47. ∎

Definición 1.1.11. Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas. Se define el *grado de* F, denotado por $\deg(F)$, como el entero $d_F(y)$, para cualquier $y \in \mathcal{Y}$.

Enunciamos un importante y conocido teorema para funciones holomorfas, entre superficies de Riemann compactas. Este relaciona los géneros de las superficies, el grado de la función y las multiplicidades de los puntos de ramificación.

Teorema 1.1.12 (Riemann-Hurwitz). *Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas, de géneros $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$ y $\boldsymbol{g}_{\mathcal{Y}}$ respectivamentes. Entonces*

$$2\,\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2 = \deg(F)(2\,\boldsymbol{g}_{\mathcal{Y}} - 2) + \sum_{P \in \mathcal{X}} (\mathrm{mult}_P\, F - 1)$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [M] 4.16 pág 52. ∎

Una función $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compacta se llama *cubrimiento*. Si tiene puntos de ramificación se dice que el cubrimiento es ramificado. Si B es el conjunto de puntos rama del cubrimiento, entonces $F : \mathcal{X} \setminus F^{-1}(B) \to \mathcal{Y} \setminus B$ es un cubrimiento topológico en el sentido usual, es decir, para cada $y \in \mathcal{Y} \setminus B$ existe un abierto V, que contiene a y, tal que $F^{-1}(V)$ es unión disjunta de abiertos $U_i \subseteq \mathcal{X} \setminus F^{-1}(B)$, con $i = 1, ..., \deg(F)$, para los cuales $F\,|_{U_i} : U_i \to V$ es un homemorfismo.

1.2. Acciones de grupos en superficies de Riemann

En esta sección consideraremos G un grupo finito y $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$.

Definición 1.2.1. Un grupo G actúa sobre la superficie de Riemann $\mathcal{X}$, si existe una función

$$\begin{aligned} \phi : G \times \mathcal{X} &\to \mathcal{X} \\ (g, P) &\rightsquigarrow g(P) \end{aligned}$$

que satisface

(a) $e(P) = P$, para todo $P \in \mathcal{X}$.

(b) $(gh)(P) = g(h(P))$, para todo $h, g \in G$ y $P \in \mathcal{X}$.

Para ser más precisos, la definición anterior es llamada acción izquierda de G en $\mathcal{X}$.

Observamos que para un $g \in G$ fijo, la función

$$\begin{aligned} \phi(g,\cdot) : \mathcal{X} &\to \mathcal{X} \\ P &\rightsquigarrow g(P) \end{aligned}$$

es una biyección en $\mathcal{X}$, cuya inversa es $\phi(g^{-1},\cdot)$. Se dice que la acción es continua si la función $\phi(g,\cdot)$ es continua para todo $g \in G$. De igual forma, la acción se dice holomorfa si $\phi(g,\cdot)$ es holomorfa para todo $g \in G$, en este caso $\phi(g,\cdot)$ es un automorfismo de $\mathcal{X}$, para todo $g \in G$.

Sea P un punto de $\mathcal{X}$, la *órbita de P* es el conjunto

$$[P]_G = \{g(P) \,/\, g \in G\}$$

y el *estabilizador de P en G*, es el conjunto

$$G_P = \{g \in G \,/\, g(P) = P\}.$$

No es dífìcl ver, que G_P es un subgrupo de G. Además, si dos puntos pertencen a la misma órbita entonces sus estabilizadores son conjugados, de hecho, $G_{g(P)} = gG_Pg^{-1}$. También como G es finito, se tiene que $|[P]_G||G_P| = |G|$ para todo $P \in \mathcal{X}$.

Para toda ϕ acción holomorfa, se puede definir el homomorfismo asociado naturalmente

$$\begin{aligned} \theta : G &\to \mathrm{Aut}(\mathcal{X}) \\ g &\rightsquigarrow \phi(g,\cdot) \end{aligned}$$

cuyo núcleo es $\ker\theta = \bigcap_{P\in\mathcal{X}} G_P$. Si $\ker\theta = \{e\}$, es decir si θ es inyectivo, se dice que la acción de G es *efectiva*. Observamos también, que el grupo $G/\ker\theta$ actúa en $\mathcal{X}$ con núcleo trivial y con órbitas idénticas a las de la acción de G. Por tanto, asumiremos en lo que sigue, que G actúa de manera holomorfa y efectiva sobre $\mathcal{X}$. En este caso G es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$. Así denotaremos por G a su imagen por θ.

Es oportuno mencionar un importante teorema debido a Hurwitz, que nos proporciona una cota para la cantidad de automorfismos que admite una superficie de Riemann compacta de género mayor o igual a dos.

Teorema 1.2.2 (Hurwitz). *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} \geq 2$. Entonces*

$$|\,\mathrm{Aut}(\mathcal{X})| \leq 84(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 1)$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [FK], pág 242.

■

Sea G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ y P un punto de $\mathcal{X}$. Sea $g \in G_P$ y (U, φ) una carta en $\mathcal{X}$ centrada en P. Como $g(P) = P$, se tiene que la expansión en serie de g en torno a P, con respecto a φ, no tiene término independiente. Así

$$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) z^k$$

donde $c_1(g) \neq 0$, puesto que g es invertible. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma_P : G_p &\to \mathbb{C}^* \\ g &\rightsquigarrow c_1(g) \end{aligned}$$

la cual es un función bien definida, pues el número $c_1(g)$ es independiente de la carta selecionada. Dado que, sea (U', ϕ) otra carta en $\mathcal{X}$, centrada en P, luego el cambio de coordenadas es de la forma

$$z = \varphi \circ \phi^{-1}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i$$

con $a_1 \neq 0$, pues el cambio de cartas es invertible, donde su inversa es de la forma

$$t = \phi \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i$$

con $b_1 \neq 0$. Luego se tiene que $a_1 b_1 = 1$. Entonces la expansión en serie de potencias, de g con respecto a la coordenada t es

$$\begin{aligned} \phi \circ g \circ \phi^{-1}(t) &= (\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \phi^{-1})(t) \\ &= (\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \right) \\ &= \phi \circ \varphi^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \right)^k \right) \\ &= \phi \circ \varphi^{-1}(c_1(g) a_1 t + \text{términos de orden superior}) \\ &= b_1 c_1(g) a_1 t + \text{términos de orden superior}, \end{aligned}$$

pero como $a_1 b_1 = 1$, entonces $b_1 c_1(g) a_1 = c_1(g)$. Luego

$$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(t) = c_1(g) t + \text{términos de orden superior.}$$

Por lo tanto el número $c_1(g)$ es independiente de la carta seleccionada.

Observamos que σ_P es un homomorfismo de grupos. Puesto que, sea $h \in G_P$ y

$$\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(h) z^i$$

la expansión en serie de Laurent de h en torno a P, con respecto a φ, donde $c_1(h) \neq 0$. Luego localmente gh es de la forma

$$\begin{aligned}
\varphi \circ gh \circ \varphi^{-1}(z) &= (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ h \circ \varphi^{-1})(z) \\
&= \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_i(h) z^i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(g) \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_i(h) z^i \right)^k \\
&= c_1(g) c_1(h) z + \text{términos de orden superior.}
\end{aligned}$$

Así $c_1(gh) = c_1(g)c_1(h)$ y por tanto $\sigma_P(gh) = \sigma_P(g)\sigma_P(h)$.

También σ_P es inyectivo. Ya que, sea $g \in G_P$, tal que $\sigma_P(g) = 1$, entonces localmente g es de la forma

$$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(g) z^k.$$

Sea $c_m(g)$, con $m \geq 2$, el primer coeficiente distinto de cero. Así

$$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = z + c_m(g) z^m + \text{términos de orden superior.}$$

Para k entero positivo, se tiene que g^k localmente es de la forma

$$\varphi \circ g^k \circ \varphi^{-1}(z) = z + k c_m(g) z^m + \text{términos de orden superior.}$$

Como G_P es finito, se tiene que el orden de g es finito, luego existe k entero positivo, tal que $g^k = e$. Por tanto $\varphi \circ g^k \circ \varphi^{-1}(z) = z$. De lo que se concluye que $kc_m(g) = 0$ y por tanto $c_m(g) = 0$, lo cual es una contradicción. Así en la expansión de g todos los coeficientes $c_k(g) = 0$ para $k \geq 2$. Por lo tanto g es la identidad. Luego σ_P es inyectivo.

Como σ_P es un homomorfismo inyectivo, se tiene que G_P es isomorfo a un subgrupo finito de $\mathbb{C}^*$, pero todos los subgrupos finitos de $\mathbb{C}^*$ son cíclicos, luego G_P es un subgrupo cíclico de G. En base al análisis realizado, enunciamos la siguiente proposición, que ya está demostrada.

Proposición 1.2.3. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ y P un punto en $\mathcal{X}$. Entonces G_P, el estabilizador de P en G, es un subgrupo cíclico de G.*

Ahora bien, si el orden de G_P es n entonces $\sigma_P(g) = c_1(g)$ es una raíz n-ésima de la unidad, para todo $g \in G_P$. Luego como g es de orden finito, para (U, φ) carta centrada en P, se tiene que g localmente es de la forma

$$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z) = \eta z$$

donde $\eta = c_1(g)$ es una raíz n-ésima de la unidad. Más aún, debido a la inyectividad de σ_P, si g es un generador de G_P, entonces η es una raíz n-esima primitiva de la unidad. Luego si fijamos ξ una raíz n-primitiva de la unidad cualquiera, debido a que σ_P es un homorfismo, existe $h \in G_P$ tal que $\sigma_P(h) = \xi$, donde h es un generador de G_P. Por tanto para cada $g \in G_P$ existe α entero positivo tal que $\sigma_P(g) = \xi^\alpha$.

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Para $P \in \mathcal{X}$ y $g \in G_P$, se define la *constante de rotación* del automorfismo g en el punto P, como el número

$$\sigma_P(g^{-1}) = \sigma_P^{-1}(g)$$

Ejemplo 1.2.5. Sea $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = x^5 + y^5 + 1 = 0\}$ una curva plana afín y

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}(X, Y, Z) = X^5 + Y^5 + Z^5 = 0\}$$

su clasura proyectiva. Se sabe que $\widetilde{\mathcal{X}}$ es una superficie de Riemann compacta, de género

$$g_{\mathcal{X}} = \frac{(5-1)(5-2)}{2} = 6.$$

Sea $\xi_5 = e^{2\pi i/5}$ y $a([X : Y : Z]) = [\xi_5^{-1} X : Y : Z]$ un automorfismo de orden 5 de $\widetilde{\mathcal{X}}$. Sea $P = [0 : \alpha : 1]$, con $\alpha = e^{\pi i/5}$, un punto en $\widetilde{\mathcal{X}}$, fijo por a.

Determinaremos la constante de rotación de a en P. Consideremos el homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \widetilde{\mathcal{X}} \cap U_2 = \{[X : Y : Z] \in \widetilde{\mathcal{X}} : Z \neq 0\} &\to \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = x^5 + y^5 + 1\} \\ [X : Y : Z] &\rightsquigarrow \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \end{aligned}$$

donde $\varphi_2(P) = (0, \alpha)$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \alpha) = 5\alpha^4 \neq 0$, entonces por teorema de la función implícita, existe una vecindad abierta $W \subseteq \mathcal{X}$ de $(0, \alpha)$ y una función analítica g tal que $g(0) = \alpha$, de modo que para algún $r > 0$ se tiene que

$$W = \{(x, g(x)) : x \in B(0, r)\} \subseteq \mathcal{X}$$

Así la carta en P, está dada por

$$\begin{aligned}\phi : \varphi_2^{-1}(W) &\to B(0,r) \subset \mathbb{C}\\ [x : g(x) : 1] &\rightsquigarrow x\end{aligned}$$

Luego, en coordenadas locales, el automorfismo a es de la forma

$$\phi \circ a \circ \phi^{-1}(x) = \phi(a([x : g(x) : 1])) = \phi([\xi_5^{-1}x : g(x) : 1]) = \xi_5^{-1}x = \xi_5^4 x$$

Por tanto $\sigma_P(a) = \xi_5^4$. Luego la constante de rotación de a en P es $\sigma_P(a)^{-1} = \xi_5$.

Observación 1.2.6. Cabe mencionar que los puntos en $\mathcal{X}$ con estabilizador no trivial, forman un conjunto discreto. Luego por la compacidad de $\mathcal{X}$ se tiene que este conjunto en finito.

Sea G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{X}/G = \{[P]_G \,/\, P \in \mathcal{X}\}$, denominado el *espacio de órbitas de* G y la función cociente

$$\begin{aligned}\pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G\\ P &\rightsquigarrow [P]_G\end{aligned}$$

Se dota al espacio $\mathcal{X}/G$ de la topología cociente, es decir V es abierto en $\mathcal{X}/G$ si y sólo si $\pi^{-1}(V)$ es abierto en $\mathcal{X}$. Así π es una función continua y como $\mathcal{X}$ es compacta, se tiene que $\mathcal{X}/G$ es compacta. Además a $\mathcal{X}/G$ se da una estructura compleja, de modo que sea una superficie de Riemann y π sea una función holomorfa. Para más detalles ver [M].

Observación 1.2.7. La función $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ es un cubrimiento, entre superficies de Riemann compactas, de grado $\deg(\pi) = |G|$. Donde $\operatorname{mult}_P \pi = |G_P|$ para todo $P \in \mathcal{X}$. Si $\mathcal{X}$ tiene puntos con estabilizador no trivial, π será un cubrimiento ramificado, y esos puntos con estabilizador no trivial serán los puntos de ramificación del cubrimiento.

Observación 1.2.8. Sea $Q \in \mathcal{X}/G$ un punto rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ y $\pi^{-1}(Q) = \{P_1, P_2..., P_s\}$ la fibra sobre Q. Como los puntos P_i están en la misma órbita, entonces sus estabilizadores son conjugados y por tanto tienen el mismo orden, luego la multiciplicidad de π en los puntos de la fibra sobre Q es la misma. Además si $m = |G_{P_i}| = \operatorname{mult}_{P_i} \pi$ para $i = 1, ..., s$, entonces $\dfrac{|G|}{m} = |G : G_{P_i}| = s = |\pi^{-1}(Q)|$.

Aplicando el teorema de Riemann-Hurwitz 1.1.12 al cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.9 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, G un grupo finito de automorfismos $\mathcal{X}$ y $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ la función cociente. Suponga que existen $Q_1, ..., Q_r \in \mathcal{X}/G$ puntos rama del cubrimiento, donde m_i es la multiplicidad de los $\frac{|G|}{m_i}$ puntos de ramificación arriba de Q_i. Entonces*

$$\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} = |G|(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + 1 + \frac{|G|}{2}\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

Definición 1.2.10. Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ y $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ la proyección canónica. Sea $Q_1, ..., Q_r$ los puntos rama del cubrimiento π. La *firma* de G en $\mathcal{X}$, es el vector $(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}; m_1, m_2, ..., m_r)$, donde m_i es la multiplicidad de los $\frac{|G|}{m_i}$ puntos de ramificación arriba de Q_i.

Definición 1.2.11. Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente sobre una superficie de Riemann compacta $\mathcal{X}$. Un arreglo de $2\,\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + r$ elementos de G, $(a_1, a_2, ..., a_{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}, b_1, b_2, ..., b_{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}, c_1, c_2, ..., c_r)$, se llama *vector generador de tipo* $(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}; m_1, m_2, ..., m_r)$ si satisface:

a) G es generado por los elementos $\{a_1, a_2, ..., a_{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}, b_1, b_2, ..., b_{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}, c_1, c_2, ..., c_r\}$,

b) $|c_i| = m_i$, para $i = 1, ..., r$, y

c) $\displaystyle\prod_{i=1}^{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} c_j = 1.$

Finalizamos esta sección enunciando un teorema que garantiza la existencia de una superficie de Riemann compacta, con acción de un grupo finito dado, bajo ciertas condiciones.

Teorema 1.2.12 (Teorema de Existencia de Riemann). *Un grupo finito G actúa sobre la superficie de Riemann compacta $\mathcal{X}$, de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$, con firma $(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}; m_1, m_2, ..., m_r)$ si y sólo si la ecuación de Riemann-Hurwitz dada en 1.2.9 se satisface, y si G tiene vector generador $(a_1, a_2, ..., a_{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}, b_1, b_2, ..., b_{\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}, c_1, c_2, ..., c_r)$.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [BRT2].

∎

1.3. Representación analítica

Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$, y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. El grupo G actúa sobre el espacio de las 1-formas diferenciales holomorfas de $\mathcal{X}$, denotado $H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})$, dándole a este estructura de G-módulo. Para encontrar la descomposición en factores irreducibles, de la representación compleja asociada a la acción de G en $H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})$, llamada representación analítica de G, utilizaremos el Teorema de Chevalley-Weil [CW]. Este resultado nos proporciona fórmulas explícitas para determinar la multiplicidad de un módulo irreducible, en la descomposición de la acción de G en dicho espacio. En esta sección nos referiremos a la acción analítica de G y a la fórmula de Chevalley-Weil, y mostraremos algunas consecuencias.

En lo que sigue, consideraremos $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$, y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$.

Una 1-forma holomorfa sobre el abierto $V \subseteq \mathbb{C}$, es una expresión ω de la forma $\omega = f(z)dz$, donde f es una función analítica en V. En este caso, decimos que ω es una 1-forma holomorfa en la coordenada z. Para definir una 1-forma holomorfa en una superficie de Riemann, se hace por medio de cartas, definiendo una 1-forma holomorfa en la imagen de cada carta, que es un abierto de $\mathbb{C}$, pero se necesita una condición de compatibilidad cuando dos cartas tienen dominios con intesección no vacía. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Una 1-forma diferencial holomorfa ω en la superficie $\mathcal{X}$, es una colección de 1-formas holomorfas $\{\omega_\varphi\}$, una para cada carta $\varphi : U \to V$ en la coordenada del abierto $V \subseteq \mathbb{C}$, tal que para dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2), con $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, se tiene que la 1-forma asociada a ω_{φ_1} se transforma a ω_{φ_2}, bajo el cambio de coordenadas $z = T(w) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(w)$, es decir, si $\omega_{\varphi_1} = f(z)dz$ entonces $\omega_{\varphi_2} = f(T(w))T'(w)dw$.

Denotamos por $H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})$ al conjunto

$$H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C}) = \{\omega \,/\, \omega \text{ es una 1- forma diferencial holomorfa en } \mathcal{X}\}$$

el cual es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Teorema 1.3.2. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$. Entonces*

$$\dim H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C}) = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [FK] pág 60. ∎

Definición 1.3.3. Sea $g \in G$. La acción de g en $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ se define por

$$g(\omega) = \omega \circ g^{-1}$$

donde ω es un 1-forma diferencial en $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$.

Así, sea (U, φ) una carta en $\mathcal{X}$ centrada en P, donde la 1-forma diferencial holomorfa ω en la coordenada local z de esta carta es $f(z)dz$. Escojamos una carta (U', ϕ) de $\mathcal{X}$ centrada en $g(P)$, con $g^{-1}(U') \subseteq U$, donde la coordenada local es t. Entonces g^{-1} en estas coordenadas es de la forma $z = h(t) = \varphi \circ g^{-1} \circ \phi^{-1}(t)$. Luego $g(\omega)$ en términos de la coordenada local t es $f(h(t))h'(t)dt$. Por tanto $g(\omega)$ es nuevamente una 1-forma diferencial holomorfa en $\mathcal{X}$

La definición anterior nos da una acción de G en el espacio $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, dándole a este espacio estructura de G-módulo. Puesto que:

1. Si e representa el automorfismo identidad, entonces es claro que $e(\omega) = \omega$, para todo $\omega \in H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$.

2. Si $g, h \in G$, entonces

$$(gh)(\omega) = \omega \circ (gh)^{-1} = \omega \circ (h^{-1}g^{-1}) = h(\omega) \circ g^{-1} = g(h(\omega))$$

   para todo $\omega \in H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$.

La función $\rho_a : G \to GL(H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C}))$, asociada a la acción de G en $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, dada por

$$\rho_a(g)(\omega) = g(\omega) = \omega \circ g^{-1}$$

es una representación compleja de G, la cual se llama *representación analítica de G*.

Ejemplo 1.3.4. Sea $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = x^5 + y^5 + 1 = 0\}$ una curva plana afín y

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}(X, Y, Z) = X^5 + Y^5 + Z^5 = 0\}$$

su clasura proyectiva, la cual es una superficie de Riemann compacta de género 6.

Sea $a([X : Y : Z]) = [\xi_5^{-1}X : Y : Z]$, con $\xi_5 = e^{2\pi i/5}$, un automorfismo de orden 5 de $\widetilde{\mathcal{X}}$, y consideremos $G = \langle a \rangle$. Sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{y^4}dx,\ \frac{1}{y^3}dx,\ \frac{1}{y^2}dx,\ \frac{x}{y^4}dx,\ \frac{x}{y^3}dx,\ \frac{x^2}{y^4}dx \right\}$$

una base de $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$.

Usando la carta definida en el ejemplo 1.2.5, obtenemos que a^{-1} en coordenadas locales es de la forma

$$\phi \circ a^{-1} \circ \phi^{-1}(x) = \phi(a^{-1}([x : g(x) : 1])) = \phi([\xi_5 x : g(x) : 1]) = \xi_5 x.$$

Así la acción de a en los elementos de la base $\mathcal{A}$ es

$$a\left(\frac{1}{y^4}dx\right) = \xi_5 \frac{1}{y^4}dx\,, \qquad a\left(\frac{1}{y^3}dx\right) = \xi_5 \frac{1}{y^3}dx\,, \qquad a\left(\frac{1}{y^2}dx\right) = \xi_5 \frac{1}{y^2}dx\,,$$

$$a\left(\frac{x}{y^4}dx\right) = \xi_5^2 \frac{x}{y^4}dx\,, \qquad a\left(\frac{x}{y^3}dx\right) = \xi_5^2 \frac{x}{y^3}dx\,, \qquad a\left(\frac{x^2}{y^4}dx\right) = \xi_5^3 \frac{x^2}{y^4}dx\,.$$

Luego la representación analítica de G está dada por

$$\rho_a(a) = \begin{pmatrix} \xi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Ahora bien, sean $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ representaciones irreducibles de G, donde

$$\rho_k : a \to \xi_5^k$$

y $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones ρ_k respectivas.

Luego por (1.3), se tiene que el espacio $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$ se descompone como G-módulo de la siguiente forma

$$H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C}) \simeq 0V_0 + 3V_1 + 2V_2 + 1V_3 + 0V_4.$$

En general, para encontrar la descomposición en factores irreducibles, de la acción de G en $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, usaremos el teorema de Chevalley-Weil. Enunciaremos este teorema, en la siguiente situación.

Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $g_{\mathcal{X}}$, y G un grupo de orden n de automorfismos de $\mathcal{X}$. Consideremos el cubrimiento

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

de grado $\deg(\pi) = n$.

Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ puntos rama del cubrimiento y ξ_n una raíz n-ésima primitiva de la unidad fija. Para un divisor e de $|G| = n$ se define $\xi_e := \xi_n^{n/e}$, la cual es también una raíz e-ésima primitiva de la unidad.

Para cada punto rama Q_u, con $u \in \{1, ..., r\}$, escojamos P_u un punto de ramificación de π arriba de Q_u, es decir $\pi(P_u) = Q_u$. Sea G_{P_u} el estabilizador en G de P_u, donde $|G_{P_u}| = e_u$. Sea $\theta_{P_u} : G_{P_u} \to \mathbb{C}^*$ el carácter dado por $\theta_{P_u}(g) = \sigma_{P_u}(g^{-1})$, para $g \in G_{P_u}$. Es decir, θ_{P_u} asigna a cada $g \in G_{P_u}$ la constante de rotación de g en P_u. Como σ_{P_u} es un homomorfismo inyectivo entonces existe $\gamma_u \in G_{P_u}$ tal que $\theta_{P_u}(\gamma_u) = \sigma_{P_u}(\gamma_u^{-1}) = \xi_{e_u}$. Además, por el mismo argumento, γ_u es un generador de G_{P_u} y es el único elemento en G_{P_u} cuya imagen por θ_{P_u} es ξ_{e_u}.

Observe que si escogemos otro punto de ramificación $\widetilde{P_u}$ en la fibra de Q_u, entonces existe $h \in G$ tal que $h(P_u) = \widetilde{P_u}$ y $G_{\widetilde{P_u}} = hG_{P_u}h^{-1}$. Por tanto $|G_{\widetilde{P_u}}| = |G_{P_u}| = e_u$. Sea $\theta_{\widetilde{P_u}} : G_{\widetilde{P_u}} \to \mathbb{C}^*$ el caracter que asigna a cada $\widetilde{g} \in G_{\widetilde{P_u}}$ la constante de rotación de $\widetilde{g}$ en $\widetilde{P_u}$, y sea $\widetilde{\gamma_u}$ el único elemento generador de $G_{\widetilde{P_u}}$ cuya imagen por $\theta_{\widetilde{P_u}}$ es ξ_{e_u}. Desde que la constante de rotación de hgh^{-1} en $\widetilde{P_u}$ es la misma que la de g en P_u, para $g \in G_{P_u}$, se tiene que $\widetilde{\gamma_u} = h\gamma_u h^{-1}$. De hecho el caracter $\theta_{\widetilde{P_u}}$ esta relacionado con θ_{P_u} por $\theta_{\widetilde{P_u}}(hgh^{-1}) = \theta_{P_u}(g)$. Así los γ_u están en la misma clase de conjugación. Para más detalle ver [Na].

Sean $\{\rho_0, \rho_1, ..., \rho_s\}$ el conjunto de representaciones irreducibles complejas de G. Sea $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_s\}$ el conjunto de representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G e $\text{Irr}(G) = \{\chi_0, \chi_1, ..., \chi_s\}$ los caracteres irreducibles de G, asociados a las representaciones mencionadas respectivas. Considere χ_0 el caracter de la representación trivial de G.

Puesto que G actúa en $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, se tiene que este espacio se descompone como G-módulo de la siguiente forma

$$H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq n_0V_0 + n_1V_1 + ... + n_sV_s$$

donde n_k son enteros no negativos, para $k = 0, ..., s$.

Por último, $[q]$ para $q \in \mathbb{Q}$, denota la parte entera.

Con las definiciones y notaciones dadas anteriormente, enunciamos el teorema de Chevalley-Weil, que nos proporciona fórmulas explícitas para las multiplicidades n_k.

Teorema 1.3.5 (Chevalley-Weil). *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Si ρ_k es una representación irreducible compleja de G, entonces la multiplicidad n_k de esta representación, en la descomposición de la representación analítica de G en $H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})$ es*

$$n_k = \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \sum_{\alpha=0}^{|G_{P_u}|-1} N_{u\alpha}^k \left\langle \frac{-\alpha}{|G_{P_u}|} \right\rangle + \langle \chi_0, \chi_k \rangle$$

donde $N_{u\alpha}^k$ es la cantidad de valores propios en $\rho_k(\gamma_u)$ iguales a $\xi_{|G_{P_u}|}^{\alpha}$, y $\left\langle \frac{-\alpha}{|G_{P_u}|} \right\rangle = \frac{-\alpha}{|G_{P_u}|} - \left[\frac{-\alpha}{|G_{P_u}|} \right]$.

Demostración: Ver [Na]. ■

Si $\alpha = 0$ entonces $\left\langle \frac{-\alpha}{|G_{P_u}|} \right\rangle = 0$. Si $\alpha \neq 0$ entonces $\left\langle \frac{-\alpha}{|G_{P_u}|} \right\rangle = 1 - \frac{\alpha}{|G_{P_u}|}$.
Observe también que $\langle \chi_0, \chi_k \rangle = 0$ si $k \neq 0$, y $\langle \chi_0, \chi_0 \rangle = 1$. Además $\dim V_0 = 1$.

De lo anterior se desprende que

$$\boxed{n_0 = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}}$$

$$\boxed{n_k = \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} N_{u\alpha}^k \left(1 - \frac{\alpha}{|G_{P_u}|} \right)} \tag{1.4}$$

para $k = 1, ..., s$.

Ejemplo 1.3.6. Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo de orden 7. Por teorema de Existencia de Riemann 1.2.12, existe una superficie de Riemann compacta $\mathcal{X}$, de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} = 3$, que admite acción de G con firma $(0; 7, 7, 7)$ y vector generador (a, a^2, a^4).

Consideremos $\xi_7 = e^{2\pi i/7}$. Sean $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_6$ representaciones irreducibles de G, donde $\rho_k : a \to \xi_7^k$, para $k = 0, 1, ..., 6$. Sea $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_6\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones ρ_k respectivas.

Usaremos el teorema de Chevalley-Weyl para determinar la descomposición de la representación analítica de G en el espacio $H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})$, de dimensión 3.

Tenemos que $n_0 = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} = 0$. Por (1.4) se tiene que

$$n_k = -1 + \sum_{u=1}^{3} \left(\sum_{\alpha=1}^{6} N_{u\alpha}^{k} \left(1 - \frac{\alpha}{7}\right) \right)$$

para $k = 1, ..., 6$. Así

$$\begin{aligned}
n_1 &= -1 + \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(1 - \frac{4}{7}\right) = 1 \\
n_2 &= -1 + \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(1 - \frac{4}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 1 \\
n_3 &= -1 + \left(1 - \frac{3}{7}\right) + \left(1 - \frac{6}{7}\right) + \left(1 - \frac{5}{7}\right) = 0 \\
n_4 &= -1 + \left(1 - \frac{4}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{2}{7}\right) = 1 \\
n_5 &= -1 + \left(1 - \frac{5}{7}\right) + \left(1 - \frac{3}{7}\right) + \left(1 - \frac{6}{7}\right) = 0 \\
n_6 &= -1 + \left(1 - \frac{6}{7}\right) + \left(1 - \frac{5}{7}\right) + \left(1 - \frac{3}{7}\right) = 0
\end{aligned}$$

Por lo anterior obtenemos que

$$\rho_a(a) = \begin{pmatrix} \xi_7 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_7^4 \end{pmatrix}$$

y por tanto la descomposición de $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ como G-módulo es

$$H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq V_1 + V_2 + V_4.$$

También sabemos por teorema de Existencia de Riemann 1.2.12, que existe una superficie de Riemann compacta $\widetilde{\mathcal{X}}$ con acción de G, de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} = 3$ con firma $(0; 7, 7, 7)$ y vector generador (a, a, a^5), la cual no es conformemente isomorfa a $\mathcal{X}$. Del mismo modo usando el teorema de Chevalley-Weyl, se determina la descomposición de la representación analítica de G en el espacio $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$.

Tenemos que $n_0 = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} = 0$. Por (1.4) se tiene que

$$n_k = -1 + \sum_{u=1}^{3} \left(\sum_{\alpha=1}^{6} N_{u\alpha}^{k} \left(1 - \frac{\alpha}{7}\right) \right)$$

para $k = 1, ..., 6$. Así

$$\begin{aligned} n_1 &= -1 + 2\left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{5}{7}\right) = 1 \\ n_2 &= -1 + 2\left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(1 - \frac{3}{7}\right) = 1 \\ n_3 &= -1 + 2\left(1 - \frac{3}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 1 \end{aligned}$$

Como la dimensión de $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$ es 3, se ve facilmente que $n_4 = n_5 = n_6 = 0$. Por lo anterior se tiene que

$$\rho_a(a) = \begin{pmatrix} \xi_7 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_7^3 \end{pmatrix}$$

y por tanto la descomposición de $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$ como G-módulo es

$$H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C}) \simeq V_1 + V_2 + V_3.$$

Ahora bien, continuando nuestro análisis del teorema de Chevalley-Weil, observemos lo siguiente.

Para G_{P_u} consideremos $\mathrm{Irr}(G_{P_u}) = \{\eta_0 = 1_{G_{P_u}}, \eta_1, ..., \eta_{|G_{P_u}|-1}\}$ el conjunto de caracteres irreducibles de G_{P_u}. Donde $\eta_\alpha(\gamma_u) = \xi^\alpha_{|G_{P_u}|}$, para $\alpha = 0, 1, ..., |G_{P_u}| - 1$.

Así para $\chi_k \in \mathrm{Irr}(G)$,

$$\mathrm{Res}^G_{G_{P_u}} \chi_k = a_0\eta_0 + a_1\eta_1 + ... + a_{|G_{P_u}|-1}\eta_{|G_{P_u}|-1}$$

donde a_α es entero no negativo para $\alpha = 0, 1, ..., |G_{P_u}| - 1$.

Luego

$$a_0 = \langle \mathrm{Res}^G_{G_{P_u}} \chi_k, 1_{G_{P_u}} \rangle = \dim V_k^{G_{P_u}} \tag{1.5}$$

$$N^k_{u\alpha} = a_\alpha = \langle \mathrm{Res}^G_{G_{P_u}} \chi_k, \eta_\alpha \rangle \tag{1.6}$$

para $k = 1, ..., s$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} n_k &= \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} a_\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{|G_{P_u}|}\right) \\ &= \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \left(\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} a_\alpha - \frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha a_\alpha \right). \end{aligned}$$

para $k = 1, ..., s$. Por otra parte

$$\dim V_k = \operatorname{Res}^G_{G_{P_u}} \chi_k(1) = \sum_{\alpha=0}^{|G_{P_u}|-1} a_\alpha \eta_\alpha(1).$$

Pero $\eta_\alpha(1) = 1$, para $\alpha = 0, ..., |G_{P_u}| - 1$. Luego

$$\dim V_k = \sum_{\alpha=0}^{|G_{P_u}|-1} a_\alpha. \tag{1.7}$$

Por (1.5) y (1.7) concluimos que

$$\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} a_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{|G_{P_u}|-1} a_\alpha - a_0 = \dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}}.$$

Por lo tanto

$$\boxed{n_k = \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \left(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}} - \frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha N^k_{u\alpha} \right)} \tag{1.8}$$

para $k = 1, ..., s$.

Sea $\overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})}$ el espacio dual de $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, el cual tiene dimensión $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$. Para más detalles ver [BL]. La representación de la acción de G en el espacio $\overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})}$,

$$\overline{\rho_a} : G \to GL(\overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})})$$

está dada por

$$\overline{\rho_a}(g) = \rho_a(g^{-1})^t \tag{1.9}$$

Sea $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ el primer grupo de Homología de $\mathcal{X}$, el cual tiene dimensión $2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$. El grupo G actúa en $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$. Además este espacio se descompone como

$$H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \simeq H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \oplus \overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})}. \tag{1.10}$$

El siguiente teorema nos da la multiplicidad de cada carácter irreducible de G, en la descomposición del caracter de la representación de G en $H_1(X, \mathbb{C})$, en caracteres irreducibles.

Teorema 1.3.7 (Broughton). *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$, y G un grupo de automorfismos de $\mathcal{X}$. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$. Sea $\chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})}$ el caracter de la representación de G en $H_1(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, entonces la multiplicidad del carácter irreducible χ_k de G en $\chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})}$ está dada por*

1. $\langle \chi_0, \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} \rangle = 2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}$
2. $\langle \chi_k, \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} \rangle = (2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 2 + r)\chi_k(1) - \sum_{u=1}^{r} \dim V_k^{G_{P_u}}$

Donde G_{P_u} es el estabilizador de algún punto de ramificación de π en la fibra de Q_u.

Demostración: Ver [BRT1]

∎

Como G actúa en $\overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})}$, entonces este espacio se descompone como G-módulo de la siguiente manera

$$\overline{H^{1,0}(X, \mathbb{C})} \simeq n_0^* V_0 + n_1^* V_1 + ... + n_s^* V_s$$

donde n_k^* es entero no negativo, para $k = 0, ..., s$.

Por teorema 1.3.7 y (1.10) tenemos que

$$n_0 + n_0^* = \langle \chi_0, \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} \rangle = 2\, \boldsymbol{g}_{X/G}$$

y como $n_0 = \boldsymbol{g}_{X/G}$, entonces

$$\boxed{n_0^* = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}} \tag{1.11}$$

Para $k \in \{1, ..., s\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} n_k + n_k^* &= \langle \chi_k, \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} \rangle \\ &= (2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 2 + r)\chi_k(1) - \sum_{u=1}^{r} \dim V_k^{G_{P_u}} \\ &= 2(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) \dim V_k + \sum_{u=1}^{r} (\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}}) \end{aligned}$$

Luego usando (1.8) concluimos que

$$\boxed{n_k^* = \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \left(\frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha N_{u\alpha}^k \right)} \qquad (1.12)$$

CAPÍTULO 2

Divisores y el espacio de Riemann-Roch

En este capítulo nos centraremos en el concepto de divisor de una superficie de Riemann compacta. También nos referiremos al espacio de Riemann-Roch asociado a un divisor y a algunas de sus propiedades, que serán necesarias para el desarrollo de los capítulos siguientes.

Consideraremos $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $g_{\mathcal{X}}$, y $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ el cuerpo de funciones meromorfas de $\mathcal{X}$.

2.1. Divisores

En esta sección trataremos el concepto de divisor y a algunas de sus propiedades. Para más detalles ver [FK].

Definición 2.1.1. Un *divisor* de $\mathcal{X}$ es un símbolo formal

$$D = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\alpha(P)}$$

donde $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ y $\alpha(P) \neq 0$ sólo para finitos $P \in \mathcal{X}$.

Para $D_1 = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\alpha(P)}$ y $D_2 = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\beta(P)}$ dos divisores de $\mathcal{X}$, se define el producto de ellos como

$$D_1 D_2 = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\alpha(P)+\beta(P)}.$$

Con este producto el conjunto de los divisores de $\mathcal{X}$, denotado por $\mathrm{Div}(\mathcal{X})$, es un grupo abeliano. Donde la identidad es $1 = P^0$ y el inverso está dado por $D_1^{-1} = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{-\alpha(P)}$.

Definición 2.1.2. Para un divisor D en $\mathcal{X}$, se define el grado de D como

$$\operatorname{Deg}(D) = \sum_{P \in \mathcal{X}} \alpha(P).$$

Claramente se puede establecer un homomorfismo $\operatorname{Deg} : \operatorname{Div}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}$, del grupo multiplicativo de los divisores de $\mathcal{X}$ sobre el grupo aditivo de los enteros.

Debido a la compacidad de $\mathcal{X}$, el conjunto de ceros y polos de una función meromorfa $f \neq 0$ en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ es finito, esto nos permite definir el siguiente divisor asociado a f.

Definición 2.1.3. Sea f una función meromorfa, no nula en $\mathcal{X}$. El divisor principal asociado a f, se define como

$$\operatorname{div}(f) = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P f}.$$

Del mismo modo, por la compacidad de $\mathcal{X}$, se tiene que

$$\operatorname{Deg}(\operatorname{div}(f)) = \sum_{P \in \mathcal{X}} \operatorname{ord}_P f = 0.$$

La razón es la siguiente, a partir de f podemos definir una función holomorfa $F : \mathcal{X} \to \widehat{\mathbb{C}}$ entre superficies de Riemann compactas, donde $F(x) = f(x)$ para todo x en el cual f es holomorfa, y $F(x) = \infty$ para todo x polo de f. Así los ceros de F son los ceros de f. Luego el grado de F es $\deg(F) = \sum_{P \in F^{-1}(0)} \operatorname{mult}_P F$, y como es independiente del punto elegido en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces también $\deg(F) = \sum_{Q \in F^{-1}(\infty)} \operatorname{mult}_Q F$.

Por tanto

$$0 = \sum_{P \in F^{-1}(0)} \operatorname{mult}_P F - \sum_{Q \in F^{-1}(\infty)} \operatorname{mult}_Q F = \sum_{P \in \mathcal{X}} \operatorname{ord}_P f.$$

Además, se puede establecer un homomorfismo $\operatorname{div} : \mathbb{K}(\mathcal{X}) \setminus \{0\} \to \operatorname{Div}(\mathcal{X})$, del grupo multiplicativo de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ en el subgrupo de los divisores de $\mathcal{X}$ de grado cero. Como $\operatorname{Div}(\mathcal{X})$ es un grupo abeliano, entonces la imagen de este homomorfismo, que es el conjunto de los divisores principales de $\mathcal{X}$, es un subgrupo normal de $\operatorname{Div}(\mathcal{X})$. Este induce una relación de equivalencia en los divisores de $\mathcal{X}$, a saber:

Dos divisores D_1 y D_2 en $\mathcal{X}$ son equivalentes, denotado $D_1 \sim D_2$, si y sólo si $D_1 D_2^{-1}$ es principal, es decir si existe $f \in \mathbb{K}(\mathcal{X}) \setminus \{0\}$ tal que $D_1 D_2^{-1} = \operatorname{div}(f)$.

Proposición 2.1.4. *Sean D_1 y D_2 divisores en $\mathcal{X}$ tales que $D_1 \sim D_2$. Entonces* $\mathrm{Deg}(D_1) = \mathrm{Deg}(D_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $D_1 \sim D_2$, entonces $D_1 D_2^{-1} = \mathrm{div}(f)$ para algún $f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$. Luego

$$0 = \mathrm{Deg}(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{Deg}(D_1 D_2^{-1}) = \mathrm{Deg}(D_1) - \mathrm{Deg}(D_2).$$

Por tanto $\mathrm{Deg}(D_1) = \mathrm{Deg}(D_2)$.

■

De la misma manera que se definen 1-formas holomorfas en la superficie $\mathcal{X}$, se definen 1-formas meromorfas en $\mathcal{X}$.

Una 1-forma meromorfa sobre un abierto $V \subseteq \mathbb{C}$, es una expresión ω de la forma $\omega = f(z)dz$, donde f es una función meromorfa en V. Así decimos que ω es una 1-forma meromorfa en la coordenada z. Para definir una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$, se hace por medio de cartas, definiendo una 1-forma meromorfa en la imagen de cada carta, que es un abierto de $\mathbb{C}$, pero se necesita una condición de compatibilidad cuando dos cartas tienen dominios con intesección no vacía. Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.1.5. Una 1-forma meromorfa ω en la superficie de Riemann $\mathcal{X}$, es una colección de 1-formas meromorfas $\{\omega_\varphi\}$, una para cada carta $\varphi : U \to V$ en la coordenada del abierto $V \subseteq \mathbb{C}$, tal que para dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2), con $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, se tiene que la 1-forma asociada a ω_{φ_1} se transforma a ω_{φ_2}, bajo el cambio de coordenadas $z = T(w) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(w)$, es decir, si $\omega_{\varphi_1} = f(z)dz$ entonces $\omega_{\varphi_2} = f(T(w))T'(w)dw$.

Sea ω una 1-forma meromorfa en la superficie $\mathcal{X}$ y P un punto de $\mathcal{X}$. Sea (U, φ) una carta en centrada en P, donde la 1-forma asociada a esta carta ω_φ es de la forma $f(z)dz$, con f una función meromorfa en $z = \varphi(P) = 0$. El orden de ω en P, denotado por $\mathrm{ord}_P\, \omega$, se define como el orden de f en $z = 0$. Cabe mencionar que $\mathrm{ord}_P\, \omega$, está bien definido, pues es independiente de la carta seleccionada. Además una 1-forma meromorfa ω es holomorfa en un punto $P \in \mathcal{X}$, si y sólo si $\mathrm{ord}_P\, \omega \geq 0$.

Diremos que P es un cero de orden n de ω, si $\mathrm{ord}_P\, \omega = n > 0$. También diremos que P es un polo de orden n de ω, si $\mathrm{ord}_P\, \omega = -n < 0$. El conjunto de ceros y polos de una 1-forma meromorfa es un conjunto discreto, y como $\mathcal{X}$ es compacta se tiene que este conjunto es finito. Esto nos permite definir el siguiente divisor.

Definición 2.1.6. Sea ω es una 1-forma meromorfa, no nula en $\mathcal{X}$. Se define el divisor asociado a ω, llamado divisor *canónico* como

$$\operatorname{div}(\omega) = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P \omega}.$$

Teorema 2.1.7. *Sea $\mathcal{X}$ es una superficie de Riemann compacta de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$, y $\omega \neq 0$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$. Entonces*

$$\operatorname{Deg}(\operatorname{div}(\omega)) = 2\,\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2$$

Demostración: Ver [FK] pág 74.

■

A continuación nos referiremos al pullback de un divisor y enunciaremos algunas propiedades.

Definición 2.1.8. Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas y $D = \prod_{Q \in \mathcal{Y}} Q^{\alpha(Q)}$ un divisor en $\mathcal{Y}$. Se define el pullback de D a $\mathcal{X}$, denotado por $F^*(D)$, como el divisor de $\mathcal{X}$ dado por

$$F^*(D) = \prod_{Q \in \mathcal{Y}} \left(\prod_{P \in F^{-1}(Q)} P^{\operatorname{mult}_P F} \right)^{\alpha(Q)}$$

De igual forma, si $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa, se define el pullback de f a $\mathcal{X}$, denotado por $F^*(f)$, como

$$F^*(f) = f \circ F$$

el cual es una función meromorfa en $\mathcal{X}$.

Proposición 2.1.9. *Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas y $f : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ una función meromorfa. Entonces*

$$\operatorname{ord}_P F^*(f) = \operatorname{mult}_P F \cdot \operatorname{ord}_{F(P)} f$$

Demostración: Por 1.1.8 existen cartas (U, φ) en $\mathcal{X}$ y (U', ϕ) en $\mathcal{Y}$, centradas en P y en $F(P)$ respectivamente, con $F(U) \subseteq U'$, tal que F localmente es de la forma

$$w = \phi \circ F \circ \varphi^{-1}(z) = z^n \tag{2.1}$$

donde $n = \operatorname{mult}_P F$. Como f es una función meromorfa, entonces su expansión en serie de Laurent en torno a $F(P)$, con respecto a ϕ es

$$f \circ \phi^{-1}(w) = \sum_{k=n_0}^{\infty} c_k w^k \tag{2.2}$$

donde $n_0 = \operatorname{ord}_{F(P)} f$. Así por (2.1) y (2.2), se tiene que localmente $F^*(f) = f \circ F$, alrededor de P es

$$f \circ F \circ \varphi^{-1}(z) = f \circ \phi^{-1}(\phi \circ F \circ \varphi^{-1}(z)) = \sum_{k=n_0}^{\infty} c_k (z^n)^k = \sum_{k=n_0}^{\infty} c_k z^{nk}$$

Luego el $\operatorname{ord}_P F^*(f) = \operatorname{ord}_P(f \circ F) = nn_0 = \operatorname{mult}_P F \cdot \operatorname{ord}_{F(P)} f$.

■

Lema 2.1.10. *Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas y D un divisor en $\mathcal{Y}$. Entonces*

1. *el pullback F^* define un homomorfismo de grupos, $F^* : \operatorname{Div}(\mathcal{Y}) \to \operatorname{Div}(\mathcal{X})$.*
2. *el pullback de un divisor principal es principal. Es decir, si f es una función meromorfa, no nula, en $\mathcal{Y}$ entonces $F^*(\operatorname{div}(f)) = \operatorname{div}(F^*(f)) = \operatorname{div}(f \circ F)$.*
3. $\operatorname{Deg}(F^*(D)) = \deg(F) \operatorname{Deg}(D)$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Es inmediato de la definición de pullback de un divisor y del producto de divisores.

2. Sea f una función meromorfa en $\mathcal{Y}$, tal que $\operatorname{div}(f) = \prod_{Q \in \mathcal{Y}} Q^{\operatorname{ord}_Q f}$. Entonces

$$\begin{aligned} F^*(\operatorname{div}(f)) &= \prod_{Q \in \mathcal{Y}} \Big(\prod_{P \in F^{-1}(Q)} P^{\operatorname{mult}_P F} \Big)^{\operatorname{ord}_Q f} \\ &= \prod_{Q \in \mathcal{Y}} \prod_{P \in F^{-1}(Q)} P^{\operatorname{mult}_P F \cdot \operatorname{ord}_{F(P)} f} \\ &= \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{mult}_P F \cdot \operatorname{ord}_{F(P)} f} \end{aligned}$$

Luego por 2.1.9 se tiene que

$$\prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{mult}_P F \cdot \operatorname{ord}_{F(P)} f} = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P F^*(f)} = \operatorname{div}(F^*(f)).$$

3. Como $\mathcal{X}$ es compacta, se tiene que $|F^{-1}(Q)|$ es finita y además es independiente del punto $Q \in \mathcal{Y}$ elegido. Luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{Deg}(F^*(D)) &= \sum_{Q\in\mathcal{Y}} \Big(\sum_{P\in F^{-1}(Q)} \operatorname{mult}_P F \Big) \alpha(Q) \\
&= \sum_{Q\in\mathcal{Y}} \deg(F)\alpha(Q) \\
&= \deg(F) \sum_{Q\in\mathcal{Y}} \alpha(Q) \\
&= \deg(F) \operatorname{Deg}(D)
\end{aligned}$$

■

Definición 2.1.11. Un divisor $D = \prod_{P\in X} P^{\alpha(P)}$ de $\mathcal{X}$ se llama efectivo, si $\alpha(P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{X}$. Este caso se denota por $D \geq 1$.

Observación 2.1.12. Lo anterior define un orden parcial en los divisores, esto es:

$$D_1 \geq D_2 \text{ si y sólo si } D_1 D_2^{-1} \geq 1.$$

Definición 2.1.13. Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas. Se define el divisor de ramificación de F, denotado $\operatorname{Ram}(F)$, como el divisor de $\mathcal{X}$ dado por

$$\operatorname{Ram}(F) = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{(\operatorname{mult}_P F - 1)}$$

Observe que el divisor de Ramificación de F es un divisor efectivo.

Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas y $\omega \neq 0$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{Y}$. Sea (U', ϕ) una carta en $\mathcal{Y}$, donde ω en la coordenada local z de esta carta, es de la forma $\omega_\phi = f(z)dz$, con f una función meromorfa en $V' = \phi(U')$. Escojamos una carta (U, φ) de $\mathcal{X}$ tal que $F(U) \subseteq U'$, donde la coordenada local de esta carta es t. Así F en estas coordenadas es de la forma $z = h(t) = \phi \circ F \circ \varphi^{-1}(t)$. Luego el pullback de ω, denotado por $F^*(\omega)$, se define como la 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$, tal que con respecto la coordenada local t es de la forma $F^*(\omega)_\varphi = f(h(t))h'(t)dt$.

Lema 2.1.14. *Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ una función holomorfa, no constante, entre superficies de Riemann compactas y $\omega \neq 0$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{Y}$. Entonces*

$$\operatorname{div}(F^*(\omega)) = F^*(\operatorname{div}(\omega)) \cdot \operatorname{Ram}(F)$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [M], pág 135.

∎

Observe que el pullback de un divisor canónico no necesariamente es canónico.

2.2. El espacio de Riemann-Roch

Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta de género $g_{\mathcal{X}}$. Considere f una función meromorfa, no nula, en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ y D un divisor de $\mathcal{X}$ tal que

$$\operatorname{div}(f) = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P f} \geq D = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\alpha(P)}.$$

Entonces $\operatorname{ord}_P f \geq \alpha(P)$, para todo P en $\mathcal{X}$.

Luego f es holomorfa en todos los puntos P donde $\alpha(P) \geq 0$. Además, f tiene ceros en los puntos P donde $\alpha(P) > 0$ y el orden del cero es mayor o igual que $\alpha(P)$. También se concluye, que f puede tener polos en los puntos P tales que $\alpha(P) < 0$ y el orden del polo debe ser a lo más $-\alpha(P)$.

A continuación definiremos el espacio vectorial de funciones meromorfas, con polos acotados por el divisor D, el cual se denomina *Espacio de Riemann-Roch.*

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta y D un divisor de $\mathcal{X}$. Se define el espacio de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$, como

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})^* / \operatorname{div}(f) \geq D^{-1}\} \cup \{0\}.$$

Claramente $\mathcal{L}(D)$ es un espacio vectorial. Además, un hecho conocido es que la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, como $\mathbb{C}$-espacio vectorial es finita.

Las siguientes proposiciones dan cuenta de algunas propiedades del espacio $\mathcal{L}(D)$.

Proposición 2.2.2. *Sean $D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(\mathcal{X})$. Si $D_1 \geq D_2$ entonces $\mathcal{L}(D_2) \subseteq \mathcal{L}(D_1)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in \mathcal{L}(D_2)$, entonces $\operatorname{div}(f) \geq D_2^{-1}$. Como $D_1 \geq D_2$, se tiene que $D_2^{-1} \geq D_1^{-1}$. Luego $\operatorname{div}(f) \geq D_1^{-1}$ y por tanto $f \in \mathcal{L}(D_1)$.

∎

Proposición 2.2.3. $\mathcal{L}(1) = \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $0 \neq f \in \mathcal{L}(1)$, entonces $\operatorname{div}(f) \geq 1$ y por tanto $\operatorname{ord}_P f \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{X}$. Luego f es holomorfa. Como $\mathcal{X}$ es compacta se tiene que f es constante. Por tanto $\mathcal{L}(1) = \mathbb{C}$.

∎

Proposición 2.2.4. *Sea D un divisor de $\mathcal{X}$ tal que* $\operatorname{Deg}(D) < 0$. *Entonces* $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $D = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\alpha(P)}$ un divisor de $\mathcal{X}$ tal que $\operatorname{Deg}(D) = \sum_{P\in\mathcal{X}} \alpha(P) < 0$, y $f \neq 0$ una función en $\mathcal{L}(D)$. Luego $\operatorname{div}(f) = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P f} \geq D^{-1} = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{-\alpha(P)}$, y por tanto $\operatorname{ord}_P f \geq -\alpha(P)$ para todo $P \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es compacta se tiene que

$$0 = \sum_{P\in\mathcal{X}} \operatorname{ord}_P f \geq \sum_{P\in\mathcal{X}} -\alpha(P) = -\operatorname{Deg}(D) > 0$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

∎

El conocido teorema de Riemann-Roch, nos da la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{L}(D)$.

Teorema 2.2.5 (Riemann-Roch). *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$ y D un divisor de $\mathcal{X}$. Entonces*

$$\dim \mathcal{L}(D) = \operatorname{Deg}(D) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} + 1 + \dim \Omega(D)$$

donde $\Omega(D)$ es el espacio vectorial dado por

$$\Omega(D) = \{\omega \,/\, \omega \textit{ es una 1-forma meromorfa tal que } \operatorname{div}(\omega) \geq D\}$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [FK] pág 75.

∎

Observación 2.2.6. El espacio $\Omega(1) = H^{1,0}(\mathcal{X})$. Puesto que si $0 \neq \omega \in \Omega(1)$, entonces $\operatorname{div}(\omega) = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P \omega} \geq 1$. Luego $\operatorname{ord}_P \omega \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{X}$, y por tanto ω es una 1-forma holomorfa en $\mathcal{X}$. Además $\dim \Omega(1) = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$.

Proposición 2.2.7. *Sean D_1 y D_2 dos divisores de $\mathcal{X}$ tales que $D_1 \sim D_2$. Entonces* $\dim \mathcal{L}(D_1) = \dim \mathcal{L}(D_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean D_1 y D_2 divisores de $\mathcal{X}$ tales que $D_1 \sim D_2$, luego existe $0 \neq f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$ tal que $\operatorname{div}(f) = D_1 D_2^{-1}$. Si h es una función en $\mathcal{L}(D_1)$, entonces $\operatorname{div}(h) \geq D_1^{-1}$, luego $\operatorname{div}(hf) = \operatorname{div}(h)\operatorname{div}(f) \geq D_1^{-1} D_1 D_2^{-1} = D_2^{-1}$. Por tanto $hf \in \mathcal{L}(D_2)$.

Consideremos la función $\varphi : \mathcal{L}(D_1) \to \mathcal{L}(D_2)$ dada por $\varphi(h) = hf$. Es fácil ver que φ es una transformación lineal. Además φ es inyectiva, ya que si $h \in \ker \varphi$ entonces $\varphi(h) = hf = 0$. Luego $h = 0$ puesto que $f \neq 0$. También φ es sobreyectiva, ya que si $g \in \mathcal{L}(D_2)$ se tiene que $\operatorname{div}(g) \geq D_2^{-1}$. Como $f \neq 0$, consideremos $\frac{g}{f} \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$, así $\operatorname{div}(\frac{g}{f}) = \operatorname{div}(g)\operatorname{div}(f)^{-1} \geq D_2^{-1}(D_1 D_2^{-1})^{-1} = D_1^{-1}$. Por tanto $\frac{g}{f} \in L(D_1)$. Luego $\varphi(\frac{g}{f}) = g$. Se concluye que φ es un $\mathbb{C}$-isomorfismo y por tanto $\dim \mathcal{L}(D_1) = \dim \mathcal{L}(D_2)$.

■

Lema 2.2.8. *Sean ω_1 y ω_2 1-formas meromorfas de una superficie de Riemann compacta $\mathcal{X}$, con $\omega_1 \neq 0$. Entonces existe una única función meromorfa $f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$ tal que* $\omega_2 = f\omega_1$.

DEMOSTRACIÓN: Ver [M], pág 131.

■

Teorema 2.2.9. *Sea D un divisor en $\mathcal{X}$ y $K = \operatorname{div}(\omega)$ un divisor canónico, donde $\omega \neq 0$ es una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$. Entonces*

$$\dim \mathcal{L}(D^{-1}K) = \dim \Omega(D).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $K = \operatorname{div}(\omega)$ un divisor canónico, donde $\omega \neq 0$ es una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$. Sea $\zeta \in \Omega(D)$, por 2.2.8 se tiene que $\frac{\zeta}{\omega} \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$. Luego $\operatorname{div}(\frac{\zeta}{\omega}) = \operatorname{div}(\zeta)\operatorname{div}(\omega)^{-1} \geq D\operatorname{div}(\omega)^{-1} = (D^{-1}K)^{-1}$. Así $\frac{\zeta}{\omega}$ pertenece a $\mathcal{L}(D^{-1}K)$.

Consideremos la función $\varphi : \Omega(D) \to L(D^{-1}K)$ dada por $\varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{\omega}$. Se puede probar fácilmente que φ es una transformación lineal inyectiva. Sea $g \in \mathcal{L}(D^{-1}K)$, entonces $\operatorname{div}(g) \geq D\operatorname{div}(\omega)^{-1}$. Sea $\zeta_0 = g\omega$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$, luego $\operatorname{div}(g\omega) \geq D\operatorname{div}(\omega)^{-1}\operatorname{div}(\omega) = D$. Así $\zeta_0 \in \Omega(D)$. Como $\varphi(\zeta_0) = \varphi(g\omega) = g$, se concluye que φ es sobreyectiva. Luego φ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por lo tanto $\dim \mathcal{L}(D^{-1}K) = \dim \Omega(D)$.

■

Corolario 2.2.10. *Sean D_1 y D_2 dos divisores de $\mathcal{X}$ tales que $D_1 \sim D_2$. Entonces* $\dim \Omega(D_1) = \dim \Omega(D_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean D_1 y D_2 divisores de $\mathcal{X}$ tales que $D_1 \sim D_2$, entonces existe $0 \neq f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$ tal que $D_1 D_2^{-1} = \operatorname{div}(f)$. Luego $D_1^{-1} D_2 = \operatorname{div}(f)^{-1} = \operatorname{div}(\frac{1}{f})$ y por tanto $D_1^{-1}K \sim D_2^{-1}K$ para $K = \operatorname{div}(\omega)$ divisor canónico, donde $\omega \neq 0$ es una 1-forma meromorfa. Luego por 2.2.9 y 2.2.7 se concluye que

$$\dim \Omega(D_1) = \dim \mathcal{L}(D_1^{-1}K) = \dim \mathcal{L}(D_2^{-1}K) = \dim \Omega(D_2).$$

∎

Ahora bien, sea K un divisor canónico de $\mathcal{X}$. Por 2.1.7 sabemos que $\operatorname{Deg}(K) = 2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2$ y por 2.2.9 se tiene que $\dim \Omega(K) = \dim \mathcal{L}(K^{-1}K) = \dim \mathcal{L}(1) = 1$. Luego

$$\dim \mathcal{L}(K) = \operatorname{Deg}(K) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} + 1 + \dim \Omega(K) = 2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} + 1 + 1 = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}.$$

Es conocido que $\mathcal{L}(K)$ es isomorfo como $\mathbb{C}$-espacio vectorial al espacio $H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$, de las 1-formas diferenciales holomorfas de $\mathcal{X}$.

2.3. Divisores no especiales

Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta de género $\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}}$, y sea G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$.

Definición 2.3.1. Un divisor D de $\mathcal{X}$ se dice no especial si $\dim \mathcal{L}(D^{-1}K) = 0$, para K un divisor canónico de $\mathcal{X}$.

Si D es un divisor de $\mathcal{X}$ no especial, entonces por 2.2.9 se tiene que

$$\dim \Omega(D) = \dim \mathcal{L}(D^{-1}K) = 0$$

para K divisor canónico de $\mathcal{X}$. Luego por 2.2.5 se concluye que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D) = \operatorname{Deg}(D) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} + 1} \tag{2.3}$$

Ahora bien, considereremos el cubrimiento

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

de grado $\deg(\pi) = |G|$.

Sea $D_0 = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} Q^{\alpha(Q)}$ un divisor de $\mathcal{X}/G$ y sea D el pullback de D_0 por π, es decir

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} \left(\prod_{P \in \pi^{-1}(Q)} P^{\operatorname{mult}_P \pi} \right)^{\alpha(Q)}$$

el cual es un divisor $\mathcal{X}$.

Como $\mathcal{X}$ es compacta, entonces por lema 2.1.10 obtenemos que

$$\boxed{\operatorname{Deg}(D) = \deg(\pi) \operatorname{Deg}(D_0) = |G| \operatorname{Deg}(D_0).} \tag{2.4}$$

La siguiente proposición da cuenta de una condición para que el divisor D sea no especial.

Proposición 2.3.2. *Sea $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ la proyección canónica y D un divisor de $\mathcal{X}$, cual es el pullback de un divisor D_0 de $\mathcal{X}/G$. Si $\operatorname{Deg}(D_0) > \dfrac{2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2}{|G|}$ entonces $D = \pi^*(D_0)$ es un divisor no especial de $\mathcal{X}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D_0 \in \operatorname{Div}(\mathcal{X}/G)$ tal que $\operatorname{Deg}(D_0) > \dfrac{2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2}{|G|}$. Sea $\omega \neq 0$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$ y $K = \operatorname{div}(\omega)$. Entonces

$$\operatorname{Deg}(D^{-1}K) = -\operatorname{Deg}(D) + \operatorname{Deg}(K).$$

Por (2.4) sabemos que $\operatorname{Deg}(D) = |G| \operatorname{Deg}(D_0)$, y por teorema 2.1.7 se tiene que $\operatorname{Deg}(K) = 2\, \boldsymbol{g}_X - 2$, luego

$$\operatorname{Deg}(D^{-1}K) = -|G| \operatorname{Deg} D_0 + 2\, \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} - 2 < 0.$$

Se concluye por 2.2.4 que $\mathcal{L}(D^{-1}K) = \{0\}$ y por tanto D es un divisor no especial. ∎

CAPÍTULO 3

Acción de grupo sobre el espacio de Riemann-Roch

En este capítulo estudiaremos la acción inducida por un grupo finito de automorfismos, de una superficie de Riemann compacta, sobre el espacio de Riemann-Roch de un divisor D invariante por la acción del grupo. Centraremos nuestra atención en divisores no especiales, que son el pullback de un divisor de la superficie cociente por la acción del grupo. Nuestro interés es obtener la multiplicidad de las representaciones irreducibles del grupo, en la descomposición de su acción sobre el espacio $\mathcal{L}(D)$.

3.1. Acción en $\mathcal{L}(D)$

Consideremos $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ el cuerpo de funciones meromorfas de la superficie y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$.

Definición 3.1.1. Sea $g \in G$. La acción de g en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$, se define como

$$f^g = f \circ g^{-1}$$

donde f es una función meromorfa de $\mathbb{K}(\mathcal{X})$.

En efecto lo anterior define una acción de G sobre $\mathbb{K}(\mathcal{X})$, puesto que

1. Si e es el automorfismo identidad, entonces $f^e = f$ para todo $f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$.
2. Sean $g, h \in G$ y $f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$, entonces

$$f^{gh} = f \circ (gh)^{-1} = f \circ (h^{-1}g^{-1}) = (f \circ h^{-1}) \circ g^{-1} = (f^h) \circ g^{-1} = (f^h)^g.$$

De igual manera, el grupo G actúa sobre el grupo de los divisores de $\mathcal{X}$. Para $D = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\alpha(P)}$ un divisor en $\mathrm{Div}(\mathcal{X})$ y g un automorfismo en G, la acción de G en $\mathrm{Div}(\mathcal{X})$ está dada por

$$g(D) = \prod_{P\in\mathcal{X}} g(P)^{\alpha(P)}.$$

Proposición 3.1.2. *Sea $f \neq 0$ una función en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$ y $g \in G$. Entonces* $\mathrm{div}(f^g) = g(\mathrm{div}(f))$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in G$ y $f \in \mathbb{K}(\mathcal{X})$. Como g es una biyección, se tiene que

$$g(\mathrm{div}(f)) = g\Big(\prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\mathrm{ord}_P f}\Big) = \prod_{P\in\mathcal{X}} g(P)^{\mathrm{ord}_P f} = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\mathrm{ord}_{g^{-1}(P)} f} = \prod_{P\in\mathcal{X}} P^{\mathrm{ord}_P f\circ g^{-1}} = \mathrm{div}(f^g)$$

■

Considere D un divisor de $\mathcal{X}$ y $f \neq 0$ una función en $\mathcal{L}(D)$. Entonces $\mathrm{div}(f) \geq D^{-1}$. Como G actúa en $\mathrm{Div}(\mathcal{X})$, se tiene que

$$g(\mathrm{div}(f)) \geq g(D)^{-1}$$

para todo $g \in G$. Luego por proposición 3.1.2 se obtiene que

$$\mathrm{div}(f^g) \geq g(D)^{-1}.$$

Por lo tanto $f^g \in \mathcal{L}(g(D))$.

Observación 3.1.3. Si D es un divisor invariante por la acción del grupo G, es decir si $g(D) = D$ para todo $g \in G$, entonces $\mathcal{L}(g(D)) = \mathcal{L}(D)$ para todo $g \in G$. Por tanto G actúa sobre el espacio $\mathcal{L}(D)$, dándole estructura de $\mathbb{K}[G]$-módulo.

3.2. Levantamiento de Divisores

Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $g_{\mathcal{X}}$, y sea G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Considereremos el cubrimiento

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

de grado $\deg(\pi) = |G|$.

Sea $D_0 = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} Q^{\alpha(Q)}$ un divisor de $\mathcal{X}/G$ tal que su pullback $D = \pi^*(D_0)$, dado por

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} \left(\prod_{P \in \pi^{-1}(Q)} P^{\mathrm{mult}_P \pi} \right)^{\alpha(Q)}$$

es un divisor no especial de $\mathcal{X}$.

Como $\mathrm{mult}_P\pi = |G_P|$, donde G_P es el estabilizador de P en G, y los estabilizadores de los puntos en $\pi^{-1}(Q)$ son conjugados, entonces $\mathrm{mult}_{P_i}\pi = \mathrm{mult}_{P_j}\pi$ para todo P_i, P_j en $\pi^{-1}(Q)$. Luego D es un divisor invariante por la acción de G y por tanto G actúa sobre el espacio $\mathcal{L}(D)$, dotándolo de estructura de $\mathbb{K}[G]$-módulo.

Dado que $\mathcal{X}$ es compacta, por lema 2.1.10 se tiene que

$$\boxed{\mathrm{Deg}(D) = \deg(\pi)\,\mathrm{Deg}(D_0) = |G|\,\mathrm{Deg}(D_0).} \tag{3.1}$$

Además como D es un divisor no especial, se tiene por (2.3) que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D) = \mathrm{Deg}(D) - g_{\mathcal{X}} + 1 = |G|\,\mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}} + 1.} \tag{3.2}$$

Nuestro propósito es, dada una representación irreducible compleja de G y V el $\mathbb{C}[G]$-módulo donde se realiza esta representación, encontrar la multiplicidad de V en la descomposición en factores irreducibles de la acción de G en $\mathcal{L}(D)$. Estamos interesados en exhibir fórmulas explícitas para describir dicha multiplicidad.

Sean $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_s$ las representaciones irreducibles complejas de G. Consideremos $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_s\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G y el conjunto $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_0, \chi_1, ..., \chi_s\}$ de caracteres irreducibles de G, correspondientes a las representaciones ρ_k respectivamente. Aquí $\chi_0 = 1_G$ es el caracter trivial de G.

Así la acción de G sobre el espacio $\mathcal{L}(D)$, se descompone en G-módulos irreducibles como

$$\mathcal{L}(D) \simeq m_0V_0 + m_1V_1 + ... + m_sV_s$$

donde los números m_k son enteros no negativos, para $k = 0, 1, ..., s$. Además si

$\chi_{\mathcal{L}(D)}$ es el carácter de la representación de G en $\mathcal{L}(D)$, se tiene que

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} = m_0\chi_0 + m_1\chi_1 + ... + m_s\chi_s.$$

Proporcionaremos fórmulas explícitas para determinar los coeficientes m_k.

Observemos lo siguiente. Sea $\overline{H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})}$, el espacio dual del espacio de las 1-formas analíticas $H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})$. El carácter de la representación de G en este espacio, χ_a^*, se descompone como

$$\chi_a^* = n_0^*\chi_0 + n_1^*\chi_1 + ... + n_s^*\chi_s$$

donde n_k^* es un entero no negativo, para $k = 0, 1, ..., s$. La fórmula dada en (1.11) y (1.12) nos permite determinar de manera explícita los coeficientes n_k^*.

Además

$$\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}} = \dim \overline{H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})} = \chi_a^*(1) = \sum_{k=0}^{s} n_k^* \dim V_k \tag{3.3}$$

Por otra parte, sea χ_{regG} el carácter de la representación regular de G. Luego

$$\chi_{regG} = \dim V_0\chi_0 + \dim V_1\chi_1 + ... + \dim V_s\chi_s.$$

Por tanto

$$|G| = \chi_{regG}(1) = \sum_{k=0}^{s} (\dim V_k)^2. \tag{3.4}$$

Luego sustituyendo (3.3) y (3.4) en (3.2) obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{s} m_k \dim V_k = \dim \mathcal{L}(D) = \mathrm{Deg}(D_0)\sum_{k=0}^{s}(\dim V_k)^2 - \sum_{k=0}^{s} n_k^* \dim V_k + 1.$$

Como $\dim V_0 = 1$ y por (1.11) se tiene que $n_0^* = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}$, entonces sustituyendo esto en lo anterior, resulta que

$$\sum_{k=0}^{s} m_k \dim V_k = m_0 + \sum_{k=1}^{s} m_k \dim V_k = \mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1 + \sum_{k=1}^{s}(\mathrm{Deg}(D_0)\dim V_k - n_k^*)\dim V_k$$

En las próximas páginas probaremos que

$$\boxed{\begin{aligned} m_0 &= \mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1 \\ m_k &= \mathrm{Deg}(D_0)\dim V_k - n_k^* \end{aligned}} \tag{3.5}$$

para $k = 1, ..., s$. Y por tanto también probaremos que

$$\boxed{\chi_{\mathcal{L}(D)} = \deg(D_0)\,\chi_{regG} - \chi_a^* + \chi_0} \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.2.1. Sea $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = x^5 + y^5 + 1 = 0\}$ una curva plana afín y

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}(X, Y, Z) = X^5 + Y^5 + Z^5 = 0\}$$

su clasura proyectiva, la cual es una superficie de Riemann compacta de género 6.

Sea $a([X : Y : Z]) = [\xi_5^{-1} X : Y : Z]$, con $\xi_5 = e^{2\pi i/5}$, un automorfismo de orden 5 de $\widetilde{\mathcal{X}}$, y sea $G = \langle a \rangle$. Consideremos el cubrimiento ramificado

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

grado 5, cuyos puntos de ramificación son

$P_0 = [0 : \alpha : 1]$, $P_1 = [0 : \alpha\xi_5 : 1]$, $P_2 = [0 : \alpha\xi_5^2 : 1]$, $P_3 = [0 : \alpha\xi_5^3 : 1]$, $P_4 = [0 : \alpha\xi_5^4 : 1]$,

donde $\alpha = e^{\pi i/5}$. Sean $\{Q_k = [P_k]_G \,/\, k = 0, 1, ..., 4\}$ los puntos rama del cubrimiento y $G_{P_k} = G$ el estabilizador del punto de ramificación P_k.

Por la fórmula de Riemann-Hurwitz 1.2.9 se tiene que $\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0$.

Sea $D_0 = Q_0^3 = [P_0]_G^3$ un divisor en $\widetilde{\mathcal{X}}/G$. Como

$$\mathrm{Deg}(D_0) = 3 > \frac{2\,\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} - 2}{|G|} = \frac{2 \cdot 6 - 2}{5} = 2$$

entonces por 2.3.2, se tiene que $D = \pi^*(D_0)$ es un divisor no especial de $\widetilde{\mathcal{X}}$. Sea

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{P \in \pi^{-1}(Q_0)} (P^{\mathrm{mult}_P \pi})^3 = P_0^{15} = [0 : \alpha : 1]^{15}.$$

Luego el espacio de Riemann-Roch asociado a este divisor es

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{K}(\widetilde{\mathcal{X}})^* / \operatorname{div}(F) \geq [0 : \alpha : 1]^{-15}\} \cup \{0\}$$

y su dimensión es

$$\dim \mathcal{L}(D) = \operatorname{Deg}(D) - g_{\widetilde{\mathcal{X}}} + 1 = 15 - 6 + 1 = 10.$$

Si $0 \neq F \in \mathcal{L}(D)$ entonces $\operatorname{div}(F) = \prod_{P \in \widetilde{\mathcal{X}}} P^{\operatorname{ord}_P F} \geq [0 : \alpha : 1]^{-15}$. De lo que se concluye que F es holomorfa en todo $P \neq [0 : \alpha : 1]$, con $P \in \widetilde{\mathcal{X}}$, y que F puede tener un polo de orden a lo más 15 en $[0 : \alpha : 1]$. Además, si F es holomorfa en todo punto de $\widetilde{\mathcal{X}}$, claramente F pertenece a $\mathcal{L}(D)$, luego como $\widetilde{\mathcal{X}}$ es compacta se tiene que F es constante.

Consideremos el siguiente conjunto de funciones en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$.

$$\mathcal{B} = \left\{1, \frac{Z}{Y - \alpha Z}, \frac{Z^2}{(Y - \alpha Z)^2}, \frac{Z^3}{(Y - \alpha Z)^3}, \frac{X}{Y - \alpha Z}, \frac{XZ}{(Y - \alpha Z)^2}, \frac{XZ^2}{(Y - \alpha Z)^3}, \frac{X^2}{(Y - \alpha Z)^2}, \frac{X^2 Z}{(Y - \alpha Z)^3}, \frac{X^3}{(Y - \alpha Z)^3}\right\}.$$

Observamos que las funciones definidas en $\mathcal{B}$ tienen un único polo en $P_0 = [0 : \alpha : 1]$, a excepción de la función constante $F_1([X : Y : Z]) = 1$. Ahora indicaremos el orden del polo en P_0 de cada una de estas funciones.

1. $F_2([X : Y : Z]) = \dfrac{Z}{Y - \alpha Z}$ tiene un polo de orden 5 en P_0.
2. $F_3([X : Y : Z]) = \dfrac{Z^2}{(Y - \alpha Z)^2}$ tiene un polo en P_0 de orden 10.
3. $F_4([X : Y : Z]) = \dfrac{Z^3}{(Y - \alpha Z)^3}$ tiene en P_0 un polo de orden 15.
4. $F_5([X : Y : Z]) = \dfrac{X}{Y - \alpha Z}$ tiene un polo de orden 4 en P_0.
5. $F_6([X : Y : Z]) = \dfrac{XZ}{(Y - \alpha Z)^2}$ tiene en P_0 un polo de orden 9.

6. $F_7([X:Y:Z]) = \dfrac{XZ^2}{(Y-\alpha Z)^3}$ tiene un polo de orden 14 en P_0.

7. $F_8([X:Y:Z]) = \dfrac{X^2}{(Y-\alpha Z)^2}$ tiene en P_0 un polo de orden 8.

8. $F_9([X:Y:Z]) = \dfrac{X^2Z}{(Y-\alpha Z)^3}$ tiene P_0 un polo de orden 13.

9. $F_{10}([X:Y:Z]) = \dfrac{X^3}{(Y-\alpha Z)^3}$ tiene un polo de orden 12 en P_0.

Por lo anterior se concluye que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(D)$. Como todas las funciones en $\mathcal{B}$ tienen polo de distinto orden en P_0, entonces $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente. Además, como la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es 10, la cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, concluimos que B es una base de $L(D)$.

Sean $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ representaciones irreducibles de G, donde $\rho_k : a \to \xi_5^k$. Sean $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones ρ_k respectivamente.

La acción de a en los elementos de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(D)$ está dada por

$$F_i^a([X:Y:Z]) = F_i \circ a^{-1}([X:Y:Z]) = F_i([\xi_5 X : Y : Z]) \tag{3.7}$$

para $i = 1, 2, ..., 10$. Así

$$F_1^a = F_1 \qquad F_2^a = F_2. \qquad F_3^a = F_3. \qquad F_4^a = F_4 \qquad F_5^a = \xi_5 F_5$$

$$F_6^a = \xi_5 F_6 \qquad F_7^a = \xi_5 F_7 \qquad F_8^a = \xi_5^2 F_8 \qquad F_9^a = \xi_5^2 F_9 \qquad F_{10}^a = \xi_5^3 F_{10}$$

Luego si $\rho_{\mathcal{L}(D)} : G \to GL(\mathcal{L}(D))$ es la representación de G en $\mathcal{L}(D)$, entonces

$$\rho_{\mathcal{L}(D)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_5^3 \end{pmatrix}$$

Así, la acción de G sobre el espacio $\mathcal{L}(D)$, se descompone en G-módulos irreducibles como

$$L(D) \simeq 4V_0 + 3V_1 + 2V_2 + V_3. \tag{3.8}$$

Ahora bien, por el ejemplo 1.3.4 se tiene que la acción de G en el espacio $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$, se descompone en G-módulos irreducibles como

$$H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C}) \simeq 0V_0 + 3V_1 + 2V_2 + 1V_3 + 0V_4.$$

Luego por (1.9) y dado que todas las representaciones de G son de grado 1, se obtiene que la descomposición de la acción G, en el espacio $\overline{H^{1,0}(\widetilde{\mathbf{X}}, \mathbb{C})}$ es

$$\overline{H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})} \simeq 0V_0 + 0V_1 + 1V_2 + 2V_3 + 3V_4 \tag{3.9}$$

Reemplazando los datos obtenidos en (3.5) obtenemos que

$$\begin{aligned}
m_0 &= \operatorname{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1 = 3 - 0 + 1 = 4 \\
m_1 &= \operatorname{Deg}(D_0) \dim V_1 - n_1^* = 3 \cdot 1 - 0 = 3 \\
m_2 &= \operatorname{Deg}(D_0) \dim V_2 - n_2^* = 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\
m_3 &= \operatorname{Deg}(D_0) \dim V_3 - n_3^* = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \\
m_4 &= \operatorname{Deg}(D_0) \dim V_4 - n_4^* = 3 \cdot 1 - 3 = 0
\end{aligned}$$

lo cual coincide con la descomposición de $\mathcal{L}(D)$ obtenida en (3.8).

Para nuestro propósito consideremos la siguiente definición.

Definición 3.2.2. El módulo de ramificación del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ se define como el módulo asociado al carácter

$$\Gamma_G = \sum_{P \in \mathcal{X}_{ram}} \operatorname{Ind}_{G_P}^{G} \left(\sum_{\alpha=1}^{|G_P|-1} \alpha \theta_P^{\alpha} \right)$$

donde $\mathcal{X}_{ram}$ es el conjunto de todos los puntos de ramificación del cubrimiento y $\theta_P : G_P \to \mathbb{C}^*$ el caracter dado por $\theta_P(g) = \sigma_P(g^{-1})$, para $g \in G_P$. Es decir θ_P asigna a cada $g \in G_P$ la constante de rotación de g en P.

Ahora bien, sea V_{Γ_G} un $\mathbb{C}[G]$-módulo donde se realiza Γ_G. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ puntos rama del cubrimiento, P_u punto de ramificación arriba del punto rama Q_u, con

$u \in \{1, ..., r\}$, y G_{P_u} el estabilizador en G de P_u. Entonces la dimensión de V_{Γ_G} es

$$\begin{aligned}
\dim V_{\Gamma_G} &= \Gamma_G(1) \\
&= \sum_{u=1}^{r} |G : G_{P_u}| \operatorname{Ind}_{G_{P_u}}^{G} \left(\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha\theta_{P_u}^{\alpha} \right)(1) \\
&= \sum_{u=1}^{r} |G : G_{P_u}|^2 \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha \\
&= \sum_{u=1}^{r} |G : G_{P_u}|^2 \frac{(|G_{P_u}| - 1)|G_{P_u}|}{2} \\
&= \frac{|G|}{2} \sum_{u=1}^{r} |G : G_{P_u}|(|G_{P_u}| - 1) \\
&= \frac{|G|^2}{2} \sum_{u=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{|G_{P_u}|}\right)
\end{aligned}$$

En resumen

$$\boxed{\dim V_{\Gamma_G} = \frac{|G|^2}{2} \sum_{u=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{|G_{P_u}|}\right)} \tag{3.10}$$

Teorema 3.2.3. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Entonces existe un único $\mathbb{K}[G]$-módulo $V_{\tilde{\Gamma}_G}$ tal que*

$$V_{\Gamma_G} \simeq \underbrace{V_{\tilde{\Gamma}_G} \oplus ... \oplus V_{\tilde{\Gamma}_G}}_{|G|\ veces} = |G| V_{\tilde{\Gamma}_G}$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [Ka].

■

Luego usando (3.10) se concluye que

$$\boxed{\dim V_{\tilde{\Gamma}_G} = \frac{|G|}{2} \sum_{u=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{|G_{P_u}|}\right)} \tag{3.11}$$

que es el número asociado a la ramificación del cubrimiento.

Ejemplo 3.2.4. Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo de orden 7. Por teorema de Existencia de Riemann 1.2.12, existe una superficie de Riemann compacta $\mathcal{X}$, de género $g_{\mathcal{X}} = 3$, que admite acción de G con firma $(0; 7, 7, 7)$ y vector generador (a, a, a^5).

Consideremos $\xi_7 = e^{2\pi i/7}$. Sean $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_6$ representaciones irreducibles de G, donde $\rho_k : a \to \xi_7^k$, para $k = 0, 1, ..., 6$. Sea $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_6\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, y el conjunto $\operatorname{Irr}(G) = \{\chi_0, \chi_1, ..., \chi_6\}$ de caracteres irreducibles de G correspondientes a las representaciones ρ_k respectivamente.

El cubrimiento tiene tres puntos rama y cada uno de ellos tiene único punto de ramificación arriba de el, cada uno con estabilizador de orden 7. Sean P_1, P_2 y P_3 los respectivos puntos de ramificación, ordenados en el sentido del vector generador. Así del vector generador obtenemos la siguiente información:

1. $G_{P_1} = \langle a \rangle$, donde $\theta_{P_1}(a) = \xi_7$
2. $G_{P_2} = \langle a \rangle$, donde $\theta_{P_2}(a) = \xi_7$
3. $G_{P_3} = \langle a^5 \rangle$, donde $\theta_{P_3}(a^5) = \xi_7$

Ahora calcularemos el caracter de ramificación Γ_G.

$$\begin{aligned}\Gamma_G &= 2(\chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3 + 4\chi_4 + 5\chi_5 + 6\chi_6) + \chi_3 + 2\chi_6 + 3\chi_2 + 4\chi_5 + 5\chi_1 + 6\chi_4 \\ &= 7\chi_1 + 7\chi_2 + 7\chi_3 + 14\chi_4 + 14\chi_5 + 14\chi_6 \\ &= 7(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 + 2\chi_5 + 2\chi_6).\end{aligned}$$

Luego como $|G| = 7$ y por la unicidad de $V_{\widetilde{\Gamma_G}}$, se tiene por lo anterior que el caracter, $\widetilde{\Gamma_G}$, correspondiente a la acción de G en $V_{\widetilde{\Gamma_G}}$ es

$$\widetilde{\Gamma_G} = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + 2\chi_4 + 2\chi_5 + 2\chi_6.$$

Observe que $\dim V_{\widetilde{\Gamma_G}} = \widetilde{\Gamma_G}(1) = 9$, lo cual coincide con

$$\frac{|G|}{2} \sum_{u=1}^{3} \left(1 - \frac{1}{|G_{P_u}|}\right) = \frac{7}{2} 3\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 9.$$

Una interesante relación entre el módulo de ramificación y la representación analítica de la acción de G sobre la curva, es dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Si χ_a es el carácter de la representación analítica de G, entonces*

$$\chi_a = \chi_0 + (\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1)\chi_{regG} + \widetilde{\Gamma}_G^*$$

donde $\widetilde{\Gamma}_G^*$ es el carácter asociado al $\mathbb{K}[G]$-módulo dual de $V_{\widetilde{\Gamma}_G}$.

DEMOSTRACIÓN: Ver [Ka]. ∎

Observe que del teorema anterior se desprende la siguiente relación entre el carácter, χ_a^*, de la representación de G en $\overline{H^{1,0}(\mathcal{X},\mathbb{C})}$ y el módulo de ramificación.

$$\chi_a^* = \chi_0 + (\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1)\chi_{regG} + \widetilde{\Gamma}_G.$$

Por tanto

$$\widetilde{\Gamma}_G = \chi_a^* + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G})\chi_{regG} - \chi_0.$$

Ahora, si $\widetilde{\Gamma}_G$ se descompone en irreducibles como

$$\widetilde{\Gamma}_G = b_0\chi_0 + b_1\chi_1 + \ldots + b_s\chi_s$$

donde b_k es un entero no negativo, para $k = 0, 1, \ldots, s$. Entonces

$$\begin{aligned} b_k &= \langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_k \rangle \\ &= \langle \chi_a^*, \chi_k \rangle + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G})\langle \chi_{regG}, \chi_k \rangle - \langle \chi_0, \chi_k \rangle \\ &= n_k^* + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}) \dim V_k - \langle \chi_0, \chi_k \rangle \end{aligned}$$

Como $\dim V_0 = 1$ y por (1.11) se tiene que $n_0^* = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}$, se concluye que

$$\boxed{b_0 = \langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_0 \rangle = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}) - 1 = 0} \tag{3.12}$$

Y también que

$$\boxed{b_k = \langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_k \rangle = n_k^* + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}) \dim V_k} \tag{3.13}$$

para $k = 1, .., s$.

Además, por (1.12) se tiene que

$$n_k^* = \dim V_k(\mathbf{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \left(\frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha N_{u\alpha}^k \right)$$

Luego sustituyendo lo anterior en (3.13), se obtiene que

$$b_k = \sum_{u=1}^{r} \frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha N_{u\alpha}^k$$

para $k = 1, ..., s$.

Una aplicación de la fórmula equivariante de Riemann-Roch dada por Borne, ver [B], [JK], para un divisor D no especial de $\mathcal{X}$, el cual es el pullback de un divisor D_0 de $\mathcal{X}/G$, es la siguiente.

Lema 3.2.6 (Fórmula equivariante de Riemann-Roch). *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ y D un divisor no especial de $\mathcal{X}$, tal que es el pullback de un divisor D_0 de $\mathcal{X}/G$. Entonces el carácter virtual de $\mathcal{L}(D)$ es*

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} = (1 - \mathbf{g}_{\mathcal{X}/G})\chi_{regG} + \mathrm{Deg}(D_0)\chi_{regG} - \widetilde{\Gamma}_G$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [B] y [JK]. ∎

Con estos previos estamos en condiciones de probar las fórmulas dadas en (3.5) y (3.6).

Teorema 3.2.7. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta sobre $\mathbb{C}$ y sea G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Considere D un divisor no especial de $\mathcal{X}$, tal que es el pullback de un divisor D_0 en $\mathcal{X}/G$. Sea χ_k un carácter irreducible complejo de G y V_k un $\mathbb{C}[G]$-módulo irreducible asociado a este caracter. Entonces la multiplicidad m_k del módulo V_k, en la descomposición en factores irreducibles de la acción de G sobre $\mathcal{L}(D)$ es:*

1. *Si χ_0 es el carácter trivial, entonces*

$$m_0 = \mathrm{Deg}(D_0) - \mathbf{g}_{\mathcal{X}/G} + 1$$

2. *Si χ_k es un carácter irreducible no trivial, entonces*

$$m_k = \mathrm{Deg}(D_0) \dim V_k - n_k^*$$

DEMOSTRACIÓN: Sea χ_k un carácter irreducible complejo de G y V_k un $\mathbb{C}[G]$-módulo asociado al cáracter χ_k.

Por lema 3.2.6, se tiene que

$$m_k = \langle \chi_{\mathcal{L}(D)}, \chi_k \rangle = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\langle \chi_{regG}, \chi_k \rangle - \langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_k \rangle$$

Así

$$m_k = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \dim V_k - \langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_k \rangle \tag{3.14}$$

Como $\dim V_0 = 0$ y por (3.12) se tiene que $\langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_0 \rangle = 0$, se concluye que

$$m_0 = \mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1.$$

Si χ_k es un carácter irreducible no trivial, entonces por (3.13) se tiene que

$$\langle \widetilde{\Gamma}_G, \chi_k \rangle = n_k^* + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}) \dim V_k$$

Luego sustituyendo lo anterior en (3.14) se tiene que

$$\begin{aligned} m_k &= (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \dim V_k - (n_k^* + (1 - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}) \dim V_k) \\ &= \mathrm{Deg}(D_0) \dim V_k - n_k^* \end{aligned}$$

∎

Del teorema anterior se desprenden los siguientes corolarios.

Corolario 3.2.8. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta sobre $\mathbb{C}$ y sea G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Considere D un divisor no especial de $\mathcal{X}$, tal que es el pullback de un divisor D_0 en $\mathcal{X}/G$. Entonces el carácter complejo, $\chi_{\mathcal{L}(D)}$, de la acción de G en $\mathcal{L}(D)$ está dado por*

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} = \mathrm{Deg}(D_0)\chi_{regG} - \chi_a^* + \chi_0$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $\chi_0, \chi_1, ..., \chi_s$ caracteres irreducibles complejos de G y $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_s\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles asociados a los caracteres χ_k, respectivamente. Entonces

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} = m_0\chi_0 + m_1\chi_1 + ... + m_s\chi_s$$

donde por 3.2.7 se tiene que

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\chi_0 + \sum_{k=1}^{s} (\mathrm{Deg}(D_0) \dim V_k - n_k^*)\chi_k$$

Como $\dim V_0 = 1$ y por (1.11) se tiene que $n_0^* = \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G}$, entonces aplicando esto en lo anterior resulta

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{L}(D)} &= \sum_{k=0}^{s} (\mathrm{Deg}(D_0) \dim V_k)\chi_k - \sum_{k=0}^{s} n_k^* \chi_k + \chi_0 \\ &= \mathrm{Deg}(D_0) \sum_{k=0}^{s} \dim V_k \chi_k - \sum_{k=0}^{s} n_k^* \chi_k + \chi_0 \\ &= \mathrm{Deg}(D_0)\chi_{regG} - \chi_a^* + \chi_0 \end{aligned}$$

∎

Corolario 3.2.9. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ y D un divisor no especial de $\mathcal{X}$, tal que es el pullback de un divisor D_0 de $\mathcal{X}/G$. Si V_k es un módulo irreducible de G, entonces la multiplicidad de V_k en la descomposición de la acción de G en $\mathcal{L}(D)$ está dada por*

$$m_k = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \dim V_k - \sum_{u=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \frac{\alpha N_{u\alpha}^k}{|G_{P_u}|}.$$

Donde $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ son los puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ y G_{P_u} es el estabilizador de un punto de ramificación P_u arriba de Q_u.

DEMOSTRACIÓN: Si V_k es el módulo trivial, es claro que satisface la propiedad. Si V_k es un módulo irreducible no trivial de G, entonces por (1.12) su multiplicidad en la descomposición en factores irreducibles, de la acción de G sobre $\overline{H^{1,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})}$ es

$$n_k^* = \dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \left(\frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha N_{u\alpha}^k \right)$$

Luego sustituyendo lo anterior en la ecuación proporcionada en 3.2.7, se tiene que

$$\begin{aligned} m_k &= \mathrm{Deg}(D_0) \dim V_k - n_k^* \\ &= \mathrm{Deg}(D_0) \dim V_k - \left(\dim V_k(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) + \sum_{u=1}^{r} \left(\frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha N_{u\alpha}^k \right) \right) \\ &= (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \dim V_k - \sum_{u=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \frac{\alpha N_{u\alpha}^k}{|G_{P_u}|}. \end{aligned}$$

∎

Ahora bien, sea $\chi^*_{\mathcal{L}(D)}$ el carácter de la representación de la acción de G sobre el espacio dual de $\mathcal{L}(D)$, denotado por $\overline{\mathcal{L}(D)}$. Por 3.2.8 se tiene que

$$\chi^*_{\mathcal{L}(D)} = \text{Deg}(D_0)\chi_{regG} - \chi_a + \chi_0$$

Luego

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)} = 2\,\text{Deg}(D_0)\chi_{regG} - \chi_a - \chi^*_a + 2\chi_0$$

Como el carácter de la acción de G en el primer grupo de Homología, $\chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} = \chi_a + \chi^*_a$ se concluye que

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)} = 2\,\text{Deg}(D_0)\chi_{regG} - \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} + 2\chi_0$$

y por tanto este carácter es racional.

Se tiene que $\chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)}$ se descompone en irreducibles como

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)} = a_0\chi_0 + a_1\chi_1 + \ldots + \chi_s\chi_s$$

donde

$$a_k = \langle \chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)}, \chi_k\rangle = 2\,\text{Deg}(D_0)\langle \chi_{regG}, \chi_k\rangle - \langle \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})}, \chi_k\rangle + 2\langle \chi_0, \chi_k\rangle.$$

para $k = 0, 1, \ldots, s$.

Sean $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ los puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ y G_{P_u} el estabilizador de un punto de ramificación P_u arriba de Q_u. Por 1.3.7 se obtiene que

$$a_0 = 2(\text{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \tag{3.15}$$

y también que

$$\begin{aligned} a_k &= 2(\text{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - r\dim V_k - \sum_{u=1}^{r} \dim V_k^{G_{P_u}} \\ &= 2(\text{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

para $k = 1, ..., s$.

Luego por lo anterior, resulta que

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{L}(D) + \dim \overline{\mathcal{L}(D)} &= \chi_{\mathcal{L}(D)}(1) + \chi^*_{\mathcal{L}(D)}(1)\\ &= \sum_{k=0}^{s}\left(2(\mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}})\right)\dim V_k\end{aligned}$$

Como $\dim \mathcal{L}(D) = \dim \overline{\mathcal{L}(D)}$, se concluye que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D) = \sum_{k=0}^{s}\left((\mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}})\right)\dim V_k}$$

3.3. Multiplicidad de un carácter absolutamente irreducible

En esta sección nos referiremos a la multiplicidad de un carácter absolutamente irreducible de G, es decir un carácter irreducible complejo que es equivalente a un carácter racional, en la descomposición del caracter de G en $\mathcal{L}(D)$. Mostraremos resultados que generalizan los obtenidos por Joyner y Ksir [JK], por un método distinto.

Sea G un grupo finito, χ carácter de G y V un $\mathbb{C}[G]-$módulo asociado a χ. Sea $H = \langle h\rangle$ un subgrupo cíclico de G y considere $\mathrm{Irr}(H) = \{\eta_0 = 1_H, \eta_1, ..., \eta_{|H|-1}\}$ caracteres irreducibles de H, donde $\eta_\alpha(h) = \xi^\alpha_{|H|}$, con $\xi_{|H|}$ una raíz $|H|$-ésima primitiva de la unidad y $\alpha = 0, 1, ..., |H| - 1$. Sea $\mathcal{M}(H) = \{W_0, W_1, ..., W_{|H|-1}\}$ representantes de los $\mathbb{C}[H]-$módulos irreducibles de H, todos de dimensión 1, asociados a los caracteres η_α respectivamente.

Así

$$\mathrm{Res}^G_H\,\chi = b_0\eta_0 + b_1\eta_1 + ... + b_{|H|-1}\eta_{|H|-1}$$

donde

$$b_\alpha = \langle \mathrm{Res}^G_H, \eta_\alpha\rangle$$

para $\alpha = 0, ..., |H| - 1$.

Con los elementos antes definidos enunciamos el siguiente lema.

Lema 3.3.1. *Sea H un subgrupo cíclico de G. Considere χ carácter racional de G y V un G-módulo asociado a χ. Entonces*

$$\frac{1}{2}(\dim V - \dim V^H) = \frac{1}{|H|}\sum_{\alpha=1}^{|H|-1} \alpha\langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_\alpha\rangle$$

donde V^H es el subespacio fijo de V por la acción de H.

Demostración: Como χ es carácter racional de G, entonces $\operatorname{Res}_H^G \chi$ es un carácter racional de H, luego por teorema 5.2.2 se tiene que

$$\operatorname{Res}_H^G \chi = \sum_K \frac{a_K}{|N_H(K):K|} \operatorname{Ind}_K^H 1_K$$

donde K recorre todos los subgrupos cíclicos de H y $a_K \in \mathbb{Z}$.

Ya que H es abeliano, se tiene que $N_H(K) = H$, luego

$$\operatorname{Res}_H^G \chi = \sum_K \frac{a_K}{|H:K|} \operatorname{Ind}_K^H 1_K.$$

Si consideramos $\widetilde{a_K} = a_K|K|$ obtenemos que

$$\operatorname{Res}_H^G \chi = \sum_K \frac{\widetilde{a_K}}{|H|} \operatorname{Ind}_K^H 1_K. \tag{3.17}$$

Así

$$\langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_\alpha\rangle = \sum_K \frac{\widetilde{a_H}}{|H|} \langle \operatorname{Ind}_K^H 1_K, \eta_\alpha\rangle$$

para $\alpha = 0, 1, ..., |H|-1$. Por reciprocidad de Frobenius 5.2.1

$$\langle \operatorname{Ind}_K^H 1_K, \eta_\alpha\rangle = \langle 1_K, \operatorname{Res}_K^H \eta_\alpha\rangle = \dim W_\alpha^K$$

luego

$$\langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_\alpha\rangle = \frac{1}{|H|}\sum_K \widetilde{a_K} \dim W_\alpha^K \tag{3.18}$$

y por tanto

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\alpha=1}^{|H|-1} \alpha\langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_\alpha\rangle = \frac{1}{|H|^2}\sum_K \widetilde{a_K} \sum_{\alpha=1}^{|H|-1} \alpha \dim W_\alpha^K. \tag{3.19}$$

Sabemos que $\dim W_\alpha^K$ es 0 ó 1, pues $\dim W_\alpha = 1$. Para cada K escojamos t de manera que $K = \langle h^t \rangle$, t divide a $|H|$ y $t|K| = |H|$. Ya que $\eta_\alpha(h^t) = \xi_{|H|}^{t\alpha}$ y $\dim W_\alpha = 1$, se obtiene que

$$\dim W_\alpha^K = \begin{cases} 1 & \text{si } |K| \text{ divide a } \alpha \\ 0 & \text{si } |K| \text{ no divide a } \alpha \end{cases}$$

Como $|K| \leq |H|$ y $\alpha = 0, 1, ..., |H| - 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|H|^2} \sum_K \widetilde{a_K} \sum_{\alpha=1}^{|H|-1} \alpha \dim W_\alpha^K &= \frac{1}{|H|^2} \sum_K \widetilde{a_K}(|K| + 2|K| + ... + (|H| - |K|)) \\
&= \frac{1}{|H|^2} \sum_K \widetilde{a_K}|K|(1 + 2 + ... + (|H : K| - 1)) \\
&= \frac{1}{|H|^2} \sum_K \widetilde{a_K}|K| \frac{1}{2} (|H : K| - 1)|H : K| \\
&= \frac{1}{2} \sum_K \frac{\widetilde{a_K}}{|H|}(|H : K| - 1).
\end{aligned}$$

Por tanto sustituyendo lo anterior en la igualdad (3.19), resulta que

$$\frac{1}{|H|} \sum_{\alpha=1}^{|H|-1} \alpha \langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_\alpha \rangle = \frac{1}{2} \sum_K \frac{\widetilde{a_K}}{|H|}(|H : K| - 1). \tag{3.20}$$

Por otra parte $\dim V^H = \langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_0 \rangle$, luego por (3.18)

$$\dim V^H = \frac{1}{|H|} \sum_K \widetilde{a_K} \dim W_0^K = \frac{1}{|H|} \sum_K \widetilde{a_K}.$$

Además por (3.17) se tiene que

$$\dim V = \operatorname{Res}_H^G \chi(1) = \sum_K \frac{\widetilde{a_K}}{|H|} \operatorname{Ind}_K^H 1_K(1) = \sum_K \frac{\widetilde{a_K}}{|H|} |H : K|.$$

Luego

$$\frac{1}{2}(\dim V - \dim V^H) = \frac{1}{2} \sum_K \frac{\widetilde{a_K}}{|H|}(|H : K| - 1). \tag{3.21}$$

Se concluye de (3.20) y (3.21) que

$$\frac{1}{2}(\dim V - \dim V^H) = \frac{1}{|H|} \sum_{\alpha=1}^{|H|-1} \alpha \langle \operatorname{Res}_H^G \chi, \eta_\alpha \rangle.$$

■

Teorema 3.3.2. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Considere D un divisor no especial de $\mathcal{X}$, tal que es el pullback de un divisor D_0 de $\mathcal{X}/G$. Si χ es un carácter absolutamente irreducible de G, entonces la multiplicidad m de χ en la descomposición del carácter, $\chi_{\mathcal{L}(D)}$, de la representación de G en $\mathcal{L}(D)$, está dada por*

$$m = (\mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}(\dim V - \dim V^{H_j})R_j$$

donde V es el $\mathbb{C}[G]$-módulo correspondiente a χ, $\{H_j\}$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos cíclicos de G, $j = 1, ..., M$ y R_j es el número de puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$, arriba del cual los estabilizadores de los puntos de ramificación son conjugados a H_j.

Demostración: Sea ρ representación absolutamente irreducible de G, χ su carácter y V el $\mathbb{C}[G]$-módulo asociado a la representación ρ. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ los puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$. Sea P_u un punto de ramificación arriba de Q_u y G_{P_u} el estabilizador de P_u en G.

Sea $\xi_{|G|}$ una raíz $|G|$-ésima primitiva de la unidad y $\xi_{|G_{P_u}|} = \xi_{|G|}^{|G|/|G_{P_u}|}$, la cual es una raíz $|G_{P_u}|$-ésima primitiva de la unidad.

Si χ es el carácter trivial, entonces por 3.2.7 se satisface claramente la propiedad.

Si χ es un carácter no trivial, entonces por 3.2.9 se tiene que la multiplicidad de χ en $\chi_{\mathcal{L}(D)}$ es

$$m = (\mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V - \sum_{u=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1}\frac{\alpha N_{u\alpha}^{\rho}}{|G_{P_u}|}.$$

Sea $\mathrm{Irr}(G_{P_u}) = \{\eta_0, \eta_1, ..., \eta_{|G_{P_u}|-1}\}$ el conjunto de caracteres irreducibles de $G_{P_u} = \langle\gamma_u\rangle$, donde $\eta_\alpha(\gamma_u) = \xi_{|G_{P_u}|}^{\alpha}$, con $\alpha \in \{0, 1, ..., |G_{P_u}|-1\}$, y sea $\mathcal{M}(G_{P_u}) = \{W_0, W_1, ..., W_{|G_{P_u}|-1}\}$ un conjunto de representantes de los $\mathbb{C}[G_{P_u}]-$módulos irreducibles de G_{P_u} correspondientes los caracteres η_α respectivos.

Por (1.6) sabemos que

$$N_{u\alpha}^{\rho} = \langle \mathrm{Res}_{G_{P_u}}^{G}\chi, \eta_\alpha\rangle$$

para $\alpha = 0, 1, ..., |G_{P_u}| - 1$. Así

$$\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1}\frac{\alpha N_{u\alpha}^{\rho}}{|G_{P_u}|} = \frac{1}{|G_{P_u}|}\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1}\alpha\langle \mathrm{Res}_{G_{P_u}}^{G}\chi, \eta_\alpha\rangle.$$

Dado que χ es racional y G_{P_u} cíclico, entonces por lema 3.3.1 se concluye que

$$\sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \frac{\alpha N_{u\alpha}^{\rho}}{|G_{P_u}|} = \frac{1}{|G_{P_u}|} \sum_{\alpha=1}^{|G_{P_u}|-1} \alpha \langle \mathrm{Res}_{G_{P_u}}^{G} \chi, \eta_\alpha \rangle = \frac{1}{2}(\dim V - \dim V^{G_{P_u}}).$$

Por tanto

$$m = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \dim V - \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{r} (\dim V - \dim V^{G_{P_u}})$$

Si H_j es un subgrupo cíclico de G tal que G_{P_u} es conjugado a H_j, entonces $\dim V^{G_{P_u}} = \dim V^{H_j}$. Por lo tanto

$$m = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1) \dim V - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M} (\dim V - \dim V^{H_j}) R_j$$

donde $\{H_j\}$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos cíclicos de G, con $j = 1, ..., M$ y R_j es el número de puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$, arriba del cual los estabilizadores de los puntos de ramificación son conjugados a H_j.

■

Una demostración alternativa para el teorema anterior, usando el teorema de Broughton 1.3.7 es la siguiente.

Sea χ un carácter absolutamente irreducible, no trivial de G, y V un $\mathbb{C}[G]$-módulo asociado a χ. Consideremos $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$. Sea P_u un punto de ramificación arriba de Q_u y G_{P_u} el estabilizador de P_u en G.

Sean n y n^* la multiplicidad de χ en la descomposición en factores irreducibles de χ_a y χ_a^* respectivamente. Como χ es racional se tiene que $n = n^*$. Luego $2n$ es la multiplicidad de χ en la descomposición en irreducibles del carácter $\chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})}$, correspondiente a la acción de G en el primer grupo de Homología de $\mathcal{X}$. Por 1.3.7 se tiene que

$$\begin{aligned} 2n &= \langle \chi, \chi_{H_1(\mathcal{X},\mathbb{C})} \rangle \\ &= (2\,\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 2 + r)\chi(1) - \sum_{u=1}^{r} \dim V^{G_{P_u}} \\ &= 2(\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1) \dim V + \sum_{u=1}^{r} (\dim V - \dim V^{G_{P_u}}) \end{aligned}$$

De lo que se concluye que

$$n^* = n = (\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1)\dim V + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(\dim V - \dim V^{G_{P_u}}).$$

Sea m la multiplicidad de χ en la descomposición en factores irreducibles de $\chi_{\mathcal{L}(D)}$. Luego por 3.2.7 se tiene que

$$\begin{aligned} m &= \mathrm{Deg}(D_0)\dim V - n^* \\ &= \mathrm{Deg}(D_0)\dim V - \left((\boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} - 1)\dim V + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(\dim V - \dim V^{G_{P_u}})\right) \\ &= (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(\dim V - \dim V^{G_{P_u}}). \end{aligned}$$

3.4. Levantamiento de divisores en cocientes intermendios

Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, de género $\mathbf{g}_{\mathcal{X}}$, y G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$. Consideremos el cubrimiento

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

de grado $\deg(\pi) = |G|$.

Para H un subgrupo de G, consideremos los cubrimientos π_H y φ_H dados por

$$\begin{aligned} \pi_H : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/H \\ P &\rightsquigarrow [P]_H \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \varphi_H : \mathcal{X}/H &\to \mathcal{X}/G \\ [P]_H &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

cuyos grados son $\deg(\pi_H) = |H|$ y $\deg(\varphi_H) = |G : H|$ respectivamente. Observamos que en general φ_H no es un cubrimiento de Galois.

El diagrama siguiente ilustra la situación

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[dr, "\pi_H"] \arrow[dd, "\pi"'] & \\ & \mathcal{X}/H \arrow[dl, "\varphi_H"] \\ \mathcal{X}/G & \end{tikzcd}$$

Sea $D_0 = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} Q^{\alpha(Q)}$ un divisor de $\mathcal{X}/G$ tal que el pullback $D = \pi^*(D_0)$ es un divisor no especial de $\mathcal{X}$ y sea $D_H = \varphi_H^*(D_0)$ un divisor de $\mathcal{X}/H$, dado por

$$D_H = \varphi_H^*(D_0) = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} \left(\prod_{[P]_H \in \varphi_H^{-1}(Q)} [P]_H^{\mathrm{mult}_{[P]_H} \varphi_H} \right)^{\alpha(Q)}.$$

Por lema 2.1.10 se tiene que

$$\boxed{\mathrm{Deg}(D_H) = \deg(\varphi_H)\,\mathrm{Deg}(D_0) = |G : H|\,\mathrm{Deg}(D_0)} \tag{3.22}$$

Proposición 3.4.1. *Sea D_0 un divisor de $\mathcal{X}/G$ tal que el pullback $D = \pi^*(D_0)$ es un divisor no especial de $\mathcal{X}$. Sea D_H el divisor de $\mathcal{X}/H$ definido anteriormente. Entonces D_H es un divisor no especial de $\mathcal{X}/H$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\omega_{\mathcal{X}/H} \neq 0$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}/H$ y $\omega_{\mathcal{X}} = \pi_H^*(\omega_{\mathcal{X}/H})$ una 1-forma meromorfa en $\mathcal{X}$.

Consideremos el divisor de ramificación de π_H, $\mathrm{Ram}(\pi_H) = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{(\mathrm{mult}_P \pi_H - 1)}$, el cual es un divisor de $\mathcal{X}$ efectivo. Por lema 2.1.14 se tiene que

$$\mathrm{div}(\omega_{\mathcal{X}}) = \mathrm{div}(\pi_H^*(\omega_{\mathcal{X}/H})) = \pi_H^*(\mathrm{div}(\omega_{\mathcal{X}/H})) \cdot \mathrm{Ram}(\pi_H). \tag{3.23}$$

Sea $K_{\mathcal{X}} = \mathrm{div}(\omega_{\mathcal{X}})$ y $K_{\mathcal{X}/H} = \mathrm{div}(\omega_{\mathcal{X}/H})$. Como $D = \pi^*(D_0) = \pi_H^*(\varphi_H^*(D_0)) = \pi_H^*(D_H)$ y por (3.23), se tiene que

$$\begin{aligned} D^{-1}K_{\mathcal{X}} &= \pi_H^*(D_H)^{-1} \cdot \pi_H^*(K_{\mathcal{X}/H}) \cdot \mathrm{Ram}(\pi_H) \\ &= \pi_H^*(D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H}) \cdot \mathrm{Ram}(\pi_H). \end{aligned}$$

Sea $0 \neq f$ una función en $\mathcal{L}(D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H})$, entonces $\mathrm{div}(f) \geq (D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H})^{-1}$. Luego

$$\pi_H^*(\mathrm{div}(f)) \geq \pi_H^*(D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H})^{-1}.$$

Pero por lema 2.1.10 se tiene que $\pi_H^*(\mathrm{div}(f)) = \mathrm{div}(\pi_H^*(f)) = \mathrm{div}(f \circ \pi_H)$. Y como $\mathrm{Ram}(\pi_H) \geq 1$, se tiene que

$$\mathrm{div}(f \circ \pi_H^*) \geq \pi_H^*(D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H})^{-1} \geq \pi_H^*(D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H})^{-1} \cdot \mathrm{Ram}(\pi_H)^{-1} = (D^{-1}K_{\mathcal{X}})^{-1}.$$

Pero $f \circ \pi_H$ es una función meromorfa en $\mathcal{X}$. Luego $0 \neq f \circ \pi_H \in \mathcal{L}(D^{-1}K_{\mathcal{X}})$. Lo cual contradice el hecho que D es un divisor no especial de $\mathcal{X}$. Por lo tanto $f = 0$ y $\mathcal{L}(D_H^{-1}K_{\mathcal{X}/H}) = 0$. De lo que se concluye que D_H es un divisor no especial de $\mathcal{X}/H$.

■

Como $\mathcal{X}/H$ es una superficie de Riemann compacta y D_H un divisor en $\mathcal{X}/H$, entonces el espacio de Riemann-Roch asociado a D_H es

$$\mathcal{L}(D_H) = \{f \in \mathbb{K}(\mathcal{X}/H)^* / \operatorname{div}(f) \geq D_H^{-1}\} \cup \{0\}.$$

Luego como D_H es no especial, se tiene por 2.3 y (3.22) que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D_H) = \operatorname{Deg}(D_H) - \mathrm{g}_{\mathcal{X}/H} + 1 = |G:H| \operatorname{Deg}(D_0) - \mathrm{g}_{\mathcal{X}/H} + 1}$$

Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_r$ puntos rama del cubrimiento $\pi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ y consideremos G_{P_u} el estabilizador de un punto de ramificación P_u arriba de Q_u.

La fórmula de género del cociente intermedio dada en [R], nos dice que

$$\boxed{g_{\mathcal{X}/H} = |G:H|(g_{\mathcal{X}/G} - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(|G:H| - |H\backslash G/G_{P_u}|)} \tag{3.24}$$

donde $|H\backslash G/G_{P_u}|$ es la cardinalidad del conjunto $H\backslash G/G_{P_u}$ de representantes de las clases dobles. Así $G = \bigcup_{t \in H\backslash G/G_{P_u}} HtG_{P_u}$.

Luego por (3.24) se tiene que

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{L}(D_H) &= |G:H| \operatorname{Deg}(D_0) - \mathrm{g}_{\mathcal{X}/H} + 1 \\
&= |G:H| \operatorname{Deg}(D_0) - |G:H|(g_{\mathcal{X}/G} - 1) - 1 - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(|G:H| - |H\backslash G/G_{P_u}|) + 1 \\
&= |G:H| \operatorname{Deg}(D_0) - |G:H|(g_{\mathcal{X}/G} - 1) - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(|G:H| - |H\backslash G/G_{P_u}|)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D_H) = (\operatorname{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1)|G:H| - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(|G:H| - |H\backslash G/G_{P_u}|)} \tag{3.25}$$

Sean $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_s$ las representaciones irreducibles complejas de G. Consideremos $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_s\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G y el conjunto $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_0, \chi_1, ..., \chi_s\}$ de caracteres irreducibles de G, correspondientes a las representaciones ρ_k respectivamente. Donde $\chi_0 = 1_G$ es el carácter trivial de G.

Sea 1_H la representación trivial de H, entonces

$$\mathrm{Ind}_H^G 1_H = a_0\chi_0 + a_1\chi_1 + ... + a_s\chi_s$$

donde

$$a_k = \langle \mathrm{Ind}_H^G 1_H, \chi_k \rangle$$

para $k = 0, 1, ..., s$. Por Reciprocidad de Frobenius 5.2.1 se tiene que

$$a_k = \langle \mathrm{Ind}_H^G 1_H, \chi_k \rangle = \langle 1_H, \mathrm{Res}_H^G \chi_k \rangle = \dim V_k^H \tag{3.26}$$

Como $\dim \mathrm{Ind}_H^G 1_H = |G : H|$ entonces por lo anterior, resulta que

$$\boxed{|G : H| = \sum_{k=0}^{s} \dim V_k^H \dim V_k} \tag{3.27}$$

Ahora bien, dado que $\mathrm{Ind}_{G_{P_u}}^G 1_{G_{P_u}} = \sum_{k=0}^{s} (\dim V_k^{G_{P_u}})\chi_k$ y $\mathrm{Ind}_H^G 1_H = \sum_{k=0}^{s} (\dim V_k^H)\chi_k$, entonces

$$\langle \mathrm{Ind}_{G_{P_u}}^G 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Ind}_H^G 1_H \rangle = \sum_{k=0}^{s} \dim V_k^{G_{P_u}} \dim V_k^H. \tag{3.28}$$

Por otra parte, usando Reciprocidad de Frobenius 5.2.1 se tiene que

$$\langle \mathrm{Ind}_{G_{P_u}}^G 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Ind}_H^G 1_H \rangle = \langle 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Res}_{G_{P_u}}^G (\mathrm{Ind}_H^G 1_H) \rangle. \tag{3.29}$$

Ahora bien, consideremos $T = H \backslash G / G_{P_u}$ conjunto de representantes de las clases dobles, luego por teorema de Mackey 5.2.3 se tiene que

$$\mathrm{Res}_{G_{P_u}}^G (\mathrm{Ind}_H^G 1_H) = \sum_{t \in T} \mathrm{Ind}_{H^t \cap G_{P_u}}^{G_{P_u}} (\mathrm{Res}_{H^t \cap G_{P_u}}^{H^t} 1_H^t)$$

Como $1_H^t(h^t) = 1_H(h) = 1$ para todo $h^t \in H^t \cap G_{P_u}$, entonces $\mathrm{Res}_{H^t \cap G_{P_u}}^{H^t} 1_H^t = 1_{H^t \cap G_{P_u}}$. Luego se obtiene que

$$\mathrm{Res}_{G_{P_u}}^{G}(\mathrm{Ind}_H^G 1_H) = \sum_{t \in T} \mathrm{Ind}_{H^t \cap G_{P_u}}^{G_{P_u}} 1_{H^t \cap G_{P_u}}$$

Aplicando esta igualdad en (3.29) resulta que

$$\langle 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Res}_{G_{P_u}}^{G}(\mathrm{Ind}_H^G 1_H)\rangle = \langle 1_{G_{P_u}}, \sum_{t \in T} \mathrm{Ind}_{H^t \cap G_{P_u}}^{G_{P_u}} 1_{H^t \cap G_{P_u}}\rangle = \sum_{t \in T}\langle 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Ind}_{H^t \cap G_{P_u}}^{G_{P_u}} 1_{H^t \cap G_{P_u}}\rangle$$

Nuevamente usando Reciprocidad de Frobenius 5.2.1, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in T}\langle 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Ind}_{H^t \cap G_{P_u}}^{G_{P_u}} 1_{H^t \cap G_{P_u}}\rangle &= \sum_{t \in T}\langle \mathrm{Res}_{H^t \cap G_{P_u}}^{G_{P_u}} 1_{G_{P_u}}, 1_{H^t \cap G_{P_u}}\rangle \\
&= \sum_{t \in T}\langle 1_{H^t \cap G_{P_u}}, 1_{H^t \cap G_{P_u}}\rangle \\
&= \sum_{t \in T} 1 \\
&= |T|
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\langle \mathrm{Ind}_{G_{P_u}}^{G} 1_{G_{P_u}}, \mathrm{Ind}_H^G 1_H\rangle = |H \backslash G / G_{P_u}|$$

Luego por (3.28) se concluye que

$$\boxed{|H \backslash G / G_{P_u}| = \sum_{k=0}^{s} \dim V_k^H \dim V_k^{G_{P_u}}} \tag{3.30}$$

Así sustituyendo (3.27) y (3.30) en la ecuación (3.25), obtenemos que

$$\dim \mathcal{L}(D_H) = (\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\sum_{k=0}^{s} \dim V_k^H \dim V_k - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}\left(\sum_{k=0}^{s}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}}) \dim V_k^H\right)$$

Luego se concluye que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D_H) = \sum_{k=0}^{s}\left((\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}})\right)\dim V_k^H} \tag{3.31}$$

Ahora bien, consideremos el carácter $\chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)}$, luego por (3.15) y (3.16) se tiene que este carácter se descompone en irreducibles como

$$\chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)} = a_0\chi_0 + a_1\chi_1 + \ldots + a_s\chi_s.$$

donde

$$a_k = 2(\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}}) \tag{3.32}$$

para $k = 0, \ldots, s$.

Ahora bien, sabemos por reciprocidad de Frobenius 5.2.1 que

$$\dim \mathcal{L}(D)^H = \langle \mathrm{Res}_H^G\, \chi_{\mathcal{L}(D)}, 1_H\rangle = \langle \chi_{\mathcal{L}(D)}, \mathrm{Ind}_H^G\, 1_H\rangle$$

y también que

$$\dim \overline{\mathcal{L}(D)}^H = \langle \mathrm{Res}_H^G\, \chi^*_{\mathcal{L}(D)}, 1_H\rangle = \langle \chi^*_{\mathcal{L}(D)}, \mathrm{Ind}_H^G\, 1_H\rangle$$

Además, se tiene que

$$\dim \mathcal{L}(D)^H = \dim \overline{\mathcal{L}(D)}^H$$

Luego por (3.32) y por (3.26) obtenemos que

$$\begin{aligned}
2\dim \mathcal{L}(D)^H &= \langle \chi_{\mathcal{L}(D)}, \mathrm{Ind}_H^G\, 1_H\rangle + \langle \chi^*_{\mathcal{L}(D)}, \mathrm{Ind}_H^G\, 1_H\rangle \\
&= \langle \chi_{\mathcal{L}(D)} + \chi^*_{\mathcal{L}(D)}, \mathrm{Ind}_H^G\, 1_H\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{s}\left(2(\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}})\right)\dim V_k^H
\end{aligned}$$

Luego se concluye que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D)^H = \sum_{k=0}^{s}\left((\mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\mathcal{X}/G} + 1)\dim V_k - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{r}(\dim V_k - \dim V_k^{G_{P_u}})\right)\dim V_k^H} \tag{3.33}$$

y por tanto usando (3.31) y (3.33) se concluye que

$$\boxed{\dim \mathcal{L}(D_H) = \dim \mathcal{L}(D)^H} \tag{3.34}$$

Proposición 3.4.2. *Sea $\mathcal{X}$ una superficie de Riemann compacta, G un grupo finito de automorfismos de $\mathcal{X}$ y D un divisor no especial de $\mathcal{X}$, tal que es el pullback de un divisor D_0 de $\mathcal{X}/G$. Sea H subgrupo de G y D_H el divisor no especial de $\mathcal{X}/H$ definido anteriormente. Entonces*

$$\mathcal{L}(D_H) \simeq \mathcal{L}(D)^H$$

donde $\mathcal{L}(D)^H$ es el subespacio de $\mathcal{L}(D)$ fijo por la acción de H.

Demostración: Sea $\mathcal{L}(D)^H = \{f \in \mathcal{L}(D) \, / \, f^h = f \quad \text{para toda} \quad h \in H\}$. Consideremos la aplicación

$$\phi : \mathcal{L}(D)^H \to \mathcal{L}(D_H)$$

dada por $\phi(f)([P]_H) = f(P)$. Mostraremos que ϕ es una función bien definida. Observamos primero que $\phi(f)$ pertenece a $\mathbb{K}(\mathcal{X}/H)$, puesto que si $P, P_1 \in [P]_H$ entonces existe $h \in H$ tal que $P_1 = h(P)$, así $\phi(f)([P_1]_H) = f(P_1) = f(h(P)) = f(P) = \phi(f)([P]_H)$, esto debido a que si $f \in \mathcal{L}(D)^H$ entonces $f^h = f \circ h^{-1} = f$ por tanto $f = f \circ h$ para todo $h \in H$. Luego $\phi(f)$ es un función de $\mathcal{X}/H$ a $\mathbb{C}$, además como f es meromorfa, entonces se tiene que $\phi(f) \in \mathbb{K}(\mathcal{X}/H)$.

Ahora probaremos que $\phi(f)$ pertenece a $\mathcal{L}(D_H)$. Si $\phi(f) \neq 0$, entonces $\operatorname{div}(f) \geq D^{-1}$, es decir

$$\operatorname{div}(f) = \prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P f} \geq D^{-1} = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} \left(\prod_{P \in \pi^{-1}(Q)} P^{\operatorname{mult}_P \pi} \right)^{-\alpha(Q)}$$

pero $\displaystyle\prod_{P \in \mathcal{X}} P^{\operatorname{ord}_P f} = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} \left(\prod_{P \in \pi^{-1}(Q)} P^{\operatorname{ord}_P f} \right)$, luego se tiene que

$$\operatorname{ord}_P f \geq -\operatorname{mult}_P \pi \cdot \alpha(Q) \tag{3.35}$$

para todo $P \in \pi^{-1}(Q)$.

El divisor principal asociado a $\phi(f)$ está dado por

$$\operatorname{div}(\phi(f)) = \prod_{[P]_H \in \mathcal{X}/H} [P]_H^{\operatorname{ord}_{[P]_H} \phi(f)} = \prod_{Q \in \mathcal{X}/G} \left(\prod_{[P]_H \in \varphi_H^{-1}(Q)} [P]_H^{\operatorname{ord}_{[P]_H} \phi(f)} \right).$$

En tanto que el divisor D_H de $\mathcal{X}/H$ está dado por

$$D_H = \varphi_H^*(D_0) = \prod_{Q\in\mathcal{X}/G}\left(\prod_{[P]_H\in\varphi_H^{-1}(Q)} [P]_H^{\operatorname{mult}_{[P]_H}\varphi_H}\right)^{\alpha(Q)}.$$

Se quiere probar que $\operatorname{div}(\phi(f)) \geq D_H^{-1}$, para eso basta probar que

$$\operatorname{ord}_{[P]_H}\phi(f) \geq -\operatorname{mult}_{[P]_H}\varphi_H \cdot \alpha(Q)$$

para todo $[P]_H \in \varphi_H^{-1}(Q)$, es decir para todo $P \in \pi^{-1}(Q)$.

Sea $Q \in \mathcal{X}/G$ y $[P]_H \in \varphi_H^{-1}(Q)$, así $P \in \pi^{-1}(Q)$. Como $\phi(f)([P]_H) = f(P)$ es decir $\phi(f)\circ\pi_H = f$, entonces dado que $\phi(f)$ es meromorfa y π_H holomorfa, se tiene por 2.1.9 que

$$\operatorname{ord}_P f = \operatorname{ord}_P(\phi(f)\circ\pi_H) = \operatorname{mult}_P\pi_H \cdot \operatorname{ord}_{\pi_H(P)}\phi(f).$$

Como $\operatorname{mult}_P\pi \geq 1$, se tiene que $\operatorname{ord}_{[P]_H}\phi(f) = \dfrac{\operatorname{ord}_P f}{\operatorname{mult}_P\pi_H}$.

Luego por (3.35) se concluye que

$$\operatorname{ord}_{[P]_H}\phi(f) = \frac{\operatorname{ord}_P f}{\operatorname{mult}_P\pi_H} \geq -\frac{\operatorname{mult}_P\pi\cdot\alpha(Q)}{\operatorname{mult}_P\pi_H}.$$

Dado que $\pi = \varphi_H\circ\pi_H$ y φ_H y π_H son funciones holomorfas no constantes, entonces

$$\operatorname{mult}_P\pi = \operatorname{mult}_P(\varphi_H\circ\pi_H) = \operatorname{mult}_P\pi_H\cdot\operatorname{mult}_{\pi_H(P)}\varphi_H = \operatorname{mult}_P\pi_H\cdot\operatorname{mult}_{[P]_H}\varphi_H$$

luego se tiene que

$$-\frac{\operatorname{mult}_P\pi\cdot\alpha(Q)}{\operatorname{mult}_P\pi_H}\cdot = -\frac{\operatorname{mult}_P\pi_H\cdot\operatorname{mult}_{[P]_H}\varphi_H\cdot\alpha(Q)}{\operatorname{mult}_P\pi_H}\cdot = -\operatorname{mult}_{[P]_H}\varphi_H\alpha(Q).$$

Por lo tanto

$$\operatorname{ord}_{[P]_H}\phi(f) \geq -\operatorname{mult}_{[P]_H}\varphi_H\alpha(Q).$$

Se concluye que $\phi(f)$ pertence a $\mathcal{L}(D_H)$, para toda $f \in \mathcal{L}(D)^H$.

No es difícil probar que ϕ es una transfomación lineal. Además es inyectiva, puesto que si $f \in \ker\phi$, entonces $\phi(f)([R]_H) = f(R) = 0$ para todo $R \in \mathcal{X}$, luego $f = 0$. Como por (3.34) se tiene que $\dim\mathcal{L}(D_H) = \dim\mathcal{L}(D)^H$, entonces ϕ es sobreyectiva. Luego ϕ es un $\mathbb{C}$-isomorfismo entre espacios vectoriales y por tanto $\mathcal{L}(D_H) \simeq \mathcal{L}(D)^H$.

∎

Para H un subgrupo de G, consideremos

$$p_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h$$

un elemento idempotente central en el álgebra de grupo $\mathbb{K}[H]$, el cual corresponde a la representación trivial del subgrupo H. Se conoce que

$$\mathcal{L}(D)^H \simeq p_H(\mathcal{L}(D)),$$

para más detalles ver [CR].

Luego por 3.4.2 se tiene que

$$\mathcal{L}(D_H) \simeq \mathcal{L}(D)^H \simeq p_H(\mathcal{L}(D)).$$

Con estos elementos y siguiendo las ideas de Carocca y Rodríguez en [CR], se puede estudiar la acción del álgebra de Hecke en $\mathcal{L}(D_H)$. Donde el álgebra de Hecke sobre $\mathbb{K}$ de H en G, es la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{H}_{H,\mathbb{K}} = p_H\mathbb{K}[G]p_H = \mathbb{K}[H\backslash G/H]$, la cual es una subálgebra de $\mathbb{K}[G]$, que consiste de las funciones de G en $\mathbb{K}$, que son constantes en cada clase doble HgH de H en G.

CAPÍTULO 4

Curvas de Fermat y curvas p-gonales

En este capítulo estudiaremos el espacio de Riemann-Roch para las familias de curvas de Fermat y algunas curvas p-gonales. Exhibiremos bases para el espacio de Riemann-Roch de ciertos divisores no especiales, invariantes por la acción de un grupo cíclico finito G de automorfismos de la curva. Las bases encontradas son de tal forma que dejan de manifiesto, la descomposición en irreducibles de la acción de G en dicho espacio de Riemann-Roch. Además aplicaremos el teorema 3.2.7 para obtener su descomposición.

4.1. El espacio de Riemann-Roch para curvas de Fermat

Sea $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = x^N + y^N + 1 = 0\}$ una curva plana afín y

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}(X, Y, Z) = X^N + Y^N + Z^N = 0\}$$

su clasura proyectiva. Se sabe que $\widetilde{\mathcal{X}}$ es una superficie de Riemann compacta de género

$$g_{\widetilde{\mathcal{X}}} = \frac{(N-1)(N-2)}{2}.$$

Sea $a([X : Y : Z]) = [\xi_N^{-1} X : Y : Z]$, donde $\xi_N = e^{2\pi i/N}$, y $G = \langle a \rangle$ un subgrupo de orden N de los automorfismos de $\widetilde{\mathcal{X}}$.

Considere el cubrimiento ramificado

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

de grado N, cuyos puntos de ramificación son

$$\{P_k = [0 : \alpha\, \xi_N^k : 1] \,/\, \alpha = e^{\pi i/N},\ k = 0, 1, ..., N-1\}.$$

Sean $\{Q_k = [P_k]_G \,/\, k = 0, 1, ..., N-1\}$ los puntos rama del cubrimiento y $G_{P_k} = G$ el estabilizador del punto de ramificación P_k.

La fórmula de Riemann-Hurwitz 1.2.9 nos dice que

$$g_{\widetilde{\mathcal{X}}} = |G|(g_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} - 1) + 1 + \frac{|G|}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1 - \frac{1}{|G_{P_k}|}\right)$$

luego reemplazando los valores obtenidos se tiene que

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} = N(g_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} - 1) + 1 + \frac{N}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

$$(N-1)(N-2) = 2N(g_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} - 1) + 2 + N^2\left(\frac{N-1}{N}\right)$$

despejando $g_{\mathcal{X}/G}$ de la ecuación resulta que

$$g_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0.$$

Escojamos un divisor $D_0 \in \mathrm{Div}(\widetilde{\mathcal{X}}/G)$ tal que $D = \pi^*(D_0)$ sea un divisor en $\widetilde{\mathcal{X}}$ no especial. Por 2.3.2 basta tomar D_0 de manera que

$$\mathrm{Deg}(D_0) > \frac{2\, g_{\widetilde{\mathcal{X}}} - 2}{|G|} = \frac{(N-1)(N-2) - 2}{N} = \frac{N^2 - 3N}{N} = N - 3.$$

Sea $D_0 = Q_0^M = [P_0]_G^M$ un divisor de grado M, donde $M > N - 3$. Así el pullback de este divisor es

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{P \in \pi^{-1}(Q_0)} (P^{\mathrm{mult}_P \pi})^M = P_0^{NM} = [0 : \alpha : 1]^{NM}.$$

El espacio de Riemann-Roch asociado a este divisor es

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{K}(\widetilde{\mathcal{X}})^* /\ \mathrm{div}(F) \geq [0 : \alpha : 1]^{-NM}\} \cup \{0\}$$

cuya dimensión es

$$\dim \mathcal{L}(D) = \mathrm{Deg}(D) - g_{\widetilde{\mathcal{X}}} + 1 = NM - \frac{(N-1)(N-2)}{2} + 1 = \frac{N(2M - N + 3)}{2}.$$

Si $0 \neq F \in \mathcal{L}(D)$ entonces

$$\mathrm{div}(F) = \prod_{P \in \widetilde{\mathcal{X}}} P^{\mathrm{ord}_P F} \geq [0 : \alpha : 1]^{-NM}$$

de lo que se concluye que F es holomorfa en todo $P \neq [0 : \alpha : 1]$, con $P \in \widetilde{\mathcal{X}}$, y que F puede tener un polo de orden a lo más NM en $[0 : \alpha : 1]$. Ahora bien, si F es holomorfa en todo punto de $\widetilde{\mathcal{X}}$, claramente F pertenece a $\mathcal{L}(D)$, observamos que como $\widetilde{\mathcal{X}}$ es compacta entonces F es constante.

Buscamos una base para $\mathcal{L}(D)$. Para ello exhibiremos un conjunto linealmente independiente de funciones en $\mathcal{L}(D)$, de cardinal igual la dimensión de $\mathcal{L}(D)$. Primero observemos lo siguiente:

1. La función $H_1([X : Y : Z]) = X$ tiene ceros de orden 1 en $P_k = [0 : \alpha\,\xi_N^k : 1]$, para $k = 0, 1, ..., N-1$.
2. La función $H_2([X : Y : Z]) = Z$ tiene ceros de orden 1 en $R_k = [\alpha\,\xi_N^k : 1 : 0]$, para $k = 0, 1, ..., N-1$.
3. La función $H_3([X : Y : Z]) = Y - \alpha Z$ tiene un único cero de orden N en $P_0 = [0 : \alpha : 1]$.

Tomando en cuenta lo anterior, consideremos el siguiente conjunto de funciones en $\mathbb{K}(\mathcal{X})$.

$$1, \frac{Z}{Y-\alpha Z}, \frac{Z^2}{(Y-\alpha Z)^2}, \frac{Z^3}{(Y-\alpha Z)^3}, \quad \cdots \quad, \frac{Z^M}{(Y-\alpha Z)^M}, \quad \Big\} M+1$$

$$\frac{X}{Y-\alpha Z}, \frac{XZ}{(Y-\alpha Z)^2}, \frac{XZ^2}{(Y-\alpha Z)^3}, \quad \cdots \quad, \frac{XZ^{M-1}}{(Y-\alpha Z)^M}, \quad \Big\} M$$

$$\frac{X^2}{(Y-\alpha Z)^2}, \frac{X^2 Z}{(Y-\alpha Z)^3}, \quad \cdots \quad, \frac{X^2 Z^{M-2}}{(Y-\alpha Z)^M}, \quad \Big\} M-1$$

$$\vdots$$

$$\frac{X^{N-2}}{(Y-\alpha Z)^{N-2}}, \frac{X^{N-2}Z}{(Y-\alpha Z)^{N-1}}, \ldots, \frac{X^{N-2}Z^{M-N+2}}{(Y-\alpha Z)^M}, \quad \Big\} M-(N-3)$$

$$\frac{X^{N-1}}{(Y-\alpha Z)^{N-1}}, \frac{X^{N-1}Z}{(Y-\alpha Z)^{N}}, \ldots, \frac{X^{N-1}Z^{M-N+1}}{(Y-\alpha Z)^M}. \quad \Big\} M-(N-2)$$

Observe que la última fila de este conjunto tiene sentido cuando $M > N-2$. El conjunto escrito por comprensión resulta ser

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{X^l Z^r}{(Y-\alpha Z)^{l+r}} \Big/ \, l, r \in \mathbb{Z},\ 0 \le l \le N-1,\ 0 \le r \le M \ y \ l + r \le M \right\}$$

y su cardinalidad es

$$|\mathcal{B}| = \sum_{i=-1}^{N-2} M - i = NM + 1 - \sum_{i=1}^{N-2} i = NM + 1 - \frac{(N-2)(N-1)}{2} = \frac{N(2M - N + 3)}{2},$$

la cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$.

Si $F([X : Y : Z]) = \dfrac{X^l Z^r}{(Y - \alpha Z)^{l+r}} \in \mathcal{B}$, entonces F tiene ceros de orden r en $R_k = [\alpha\, \xi_N^k : 1 : 0]$, para $k = 0, 1, ..., N-1$, ceros de orden l en $P_k = [0 : \alpha\, \xi_N^k : 1]$, para $k = 1, ..., N-1$, y un único polo de orden $Nr + l(N-1)$ en $P_0 = [0 : \alpha : 1]$. Observe que $Nr + l(N-1) = N(r+l) - l \leq NM - l \leq NM$, luego $F \in \mathcal{L}(D)$ y por tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}(D)$.

Sean F y F' funciones en $\mathcal{B}$, supongamos que en P_0 tienen un polo del mismo orden, es decir $Nr + l(N-1) = Nr' + l'(N-1)$, luego

$$(N-1)(l - l') = N(r' - r) \;\Rightarrow\; r' - r = \frac{N-1}{N}(l - l').$$

Como $r' - r$ es entero, entonces N divide a $l - l'$. Pero $0 \leq |l - l'| \leq N - 1$, luego $l = l'$ y por tanto $r = r'$. Concluimos que $F = F'$. Esto nos dice que las funciones en $\mathcal{B}$ tienen polo de distinto orden en P_0, luego $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente. Además ya que el cardinal de $\mathcal{B}$ es igual a la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, concluimos entonces que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Sean $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{N-1}$ representaciones irreducibles de G, donde

$$\rho_k : a \to \xi_N^k$$

y $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_{N-1}\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{N-1}$ respectivamente.

La acción de a en los elementos de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(D)$ esta dada por

$$F^a([X : Y : Z]) = F \circ a^{-1}([X : Y : Z]) = F([\xi_N X : Y : Z]) = \xi_N^l \frac{X^l Z^r}{(Y - \alpha Z)^{l+r}} \quad (4.1)$$

Luego por (4.1), se obtiene que el espacio $\mathcal{L}(D)$ se descompone como G-módulo de la siguente manera

$$\boxed{\mathcal{L}(D) \simeq (M+1)V_0 + MV_1 + (M-1)V_2 + ... + (M - (N-3))V_{N-2} + (M - (N-2))V_{N-1}} \quad (4.2)$$

Sea $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$ el espacio vectorial de las 1-formas holomorfas de $\widetilde{\mathcal{X}}$. Sabemos que G actúa sobre $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$ por medio de la acción $a(\omega) = \omega \circ a^{-1}$, donde ω una 1-forma diferencial holomorfa en $\widetilde{\mathcal{X}}$. Sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \omega_{r,s} = x^{r-1}\frac{dx}{y^{N-s}} \,/\, r, s \in \mathbb{Z},\ r, s \geq 1,\ r + s \leq N - 1 \right\}$$

una base de $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$.

Por otra parte, $a^{-1}(P_0) = P_0$. Determinaremos una carta centrada en P_0 para exhibir la forma local del automorfismo a^{-1}.

Sea

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \widetilde{\mathcal{X}} \cap U_2 = \{[X : Y : Z] \in \widetilde{\mathcal{X}} : Z \neq 0\} &\to \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = x^N + y^N + 1\} \\ [X : Y : Z] &\rightsquigarrow \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \end{aligned}$$

un homemeomorfismo, donde $\varphi_2(P) = (0, \alpha)$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \alpha) = N\alpha^{N-1} \neq 0$, entonces por teorema de la función implícita, existe una vecindad abierta $W \subseteq \mathcal{X}$ de $(0, \alpha)$, una función analítica g tal que $g(0) = \alpha$, y $t > 0$ de modo que

$$W = \{(x, g(x)) : x \in B(0, t)\} \subseteq \mathcal{X}.$$

Así la carta en P_0, está dada por

$$\begin{aligned} \phi : \varphi_2^{-1}(W) &\to \mathbb{C} \\ [x : g(x) : 1] &\rightsquigarrow x \end{aligned}$$

Luego, en coordenadas locales, el automorfismo a^{-1} es de la forma

$$\phi \circ a^{-1} \circ \phi^{-1}(x) = \phi(a^{-1}([x : g(x) : 1])) = \phi([\xi_N x : g(x) : 1]) = \xi_N x$$

Por tanto la acción de a en los elementos de la base $\mathcal{A}$ de $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$ es

$$a(\omega_{r,s}) = \omega_{r,s} \circ a^{-1} = (\xi_N x)^{r-1}\frac{1}{y^{N-s}}\,\xi_N dx = \xi_N^r x^{r-1}\frac{dx}{y^{N-s}} = \xi_N^r\,\omega_{r,s}. \tag{4.3}$$

Luego por (4.3) se obtiene que el espacio $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$, se descompone como G-módulo de la siguiente manera

$$\boxed{H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C}) \simeq 0V_0 + (N-2)V_1 + (N-3)V_2 + ... + 1V_{N-2} + 0V_{N-1}}$$

Además, por (1.9) y dado que todas las representaciones de G son de grado 1, se obtiene que la descomposición de la acción G, en el espacio $\overline{H^{1,0}(\widetilde{\mathbf{X}}, \mathbb{C})}$ es

$$\boxed{\overline{H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})} \simeq 0V_0 + 0V_1 + 1V_2 + ... + (N-3)V_{N-2} + (N-2)V_{N-1}} \tag{4.4}$$

De esta descomposición (4.4), obtenemos que $n_0^* = 0$ y $n_k^* = k-1$, para $k = 1, ..., N-1$.

Ahora bien, por 3.2.7 sabemos que si $\mathcal{L}(D) = m_0V_0 + m_1V_1 + ... + m_{N-1}V_{N-1}$ entonces

$$\begin{aligned} m_0 &= \mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1 \\ m_k &= \mathrm{Deg}(D_0)\dim V_k - n_k^* \end{aligned}$$

para $k = 1, ..., N-1$. Luego sustituyendo los valores obtenidos, resulta que

$$\begin{aligned} m_0 &= M - 0 + 1 = M + 1 \\ m_k &= M \cdot 1 - (k-1) = M - (k-1) \end{aligned}$$

para $k = 1, ..., N-1$. Lo cual coincide con la descomposición obtenida en (4.2) de $\mathcal{L}(D)$.

4.2. Espacio de Riemann-Roch para un tipo de curvas p-gonales

Sea $\mathcal{X} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / f(x,y) = y^p - x(x-1)(x-\lambda) = 0\}$ una curva plana afín, donde $p > 3$ es un número primo y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

Consideremos $x = \dfrac{X}{Z}$ e $y = \dfrac{Y}{Z}$, así $f\left(\dfrac{X}{Z}, \dfrac{Y}{Z}\right) = \dfrac{Y^p}{Z^p} - \dfrac{X}{Z}\left(\dfrac{X}{Z} - 1\right)\left(\dfrac{X}{Z} - \lambda\right)$.
Sea

$$\widetilde{f}([X:Y:Z]) = Z^p f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = Y^p - XZ^{p-3}(X-Z)(X-\lambda Z).$$

Luego la clausura proyectiva de $\mathcal{X}$ es

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X:Y:Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}([X:Y:Z]) = Y^p - XZ^{p-3}(X-Z)(X-\lambda Z)\},$$

la cual tiene una una singularidad en el punto $P_\infty = [1:0:0]$. Luego normalizamos la curva y obtenemos que $\widetilde{\mathcal{X}}$ es una superficie de Riemann compacta.

Sea $a([X : Y : Z]) = [X : \xi_p^{-1}Y : Z]$, donde $\xi_p = e^{2\pi i/p}$, un automorfismo de orden p de $\widetilde{\mathcal{X}}$ y $G = \langle a \rangle$.

Consideremos el cubrimiento ramificado de grado p

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

cuyos puntos de ramificación son

$$P_1 = [0 : 0 : 1],\ P_2 = [1 : 0 : 1],\ P_3 = [\lambda : 0 : 1] \text{ y } P_\infty = [1 : 0 : 0].$$

El estabilizador de cada punto de ramificación es G. Los puntos $Q_i = [P_i]_G$, con $i = 1, 2, 3$, y $Q_\infty = [P_\infty]_G$ son los puntos rama del cubrimiento.

Sabemos que $\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0$, luego por la fórmula de Riemann-Hurwitz 1.2.9, se tiene que

$$\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} = -p + 1 + \frac{p}{2}\, 4\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1. \tag{4.5}$$

Escojamos un divisor D_0 de $\widetilde{\mathcal{X}}/G$ de manera que su pullback $D = \pi^*(D_0)$, sea un divisor no especial de $\widetilde{\mathcal{X}}$. Por 2.3.2 basta tomar D_0 de manera que

$$\operatorname{Deg}(D_0) > \frac{2\,\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} - 2}{|G|} = \frac{2(p-1) - 2}{p} = 2 - \frac{4}{p}.$$

Como $p \geq 5$, basta elegir D_0 de modo que $\operatorname{Deg}(D_0) \geq 2$.

Sea $N \geq 2$ un número entero y $D_0 = Q_1^N$, así

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{P \in \pi^{-1}(Q_1)} (P^{\operatorname{mult}_P \pi})^N = P_1^{Np} = [0 : 0 : 1]^{Np}$$

luego el espacio de Riemann-Roch asociado a este divisor es

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{C}^*(\widetilde{\mathcal{X}}) /\ \operatorname{div}(F) \geq [0 : 0 : 1]^{-Np}\} \cup \{0\}$$

y su dimensión es

$$\dim \mathcal{L}(D) = \operatorname{Deg}(D) - \boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} + 1 = Np - (p-1) + 1 = (N-1)p + 2. \tag{4.6}$$

Si $0 \neq F \in \mathcal{L}(D)$ entonces

$$\operatorname{div}(F) = \prod_{P \in \widetilde{\mathcal{X}}} P^{\operatorname{ord}_P F} \geq P_1^{-Np} = [0 : 0 : 1]^{-Np}.$$

Luego F es holomorfa en todo $P \neq P_1$, con $P \in \widetilde{\mathcal{X}}$, y puede tener un polo de orden a lo mas Np en P_1. Claramente si F es holomorfa en $\widetilde{\mathcal{X}}$ entonces F pertenece a $\mathcal{L}(D)$, y como $\widetilde{\mathcal{X}}$ es compacta se tiene que F es constante.

Buscamos una base para $\mathcal{L}(D)$, para ello exhibiremos un conjunto linealmente independiente de funciones en $\mathcal{L}(D)$ de cardinal igual la dimensión de $\mathcal{L}(D)$. Primero observemos lo siguiente:

1. La función $H_1([X:Y:Z]) = X$ tiene un único cero en $P_1 = [0:0:1]$ de orden p.
2. La función $H_2([X:Y:Z]) = Y$ tiene ceros de orden 1 en $P_1 = [0:0:1]$, $P_2 = [1:0:1]$ y $P_3 = [\lambda:0:1]$, y de orden $(p-3)$ en $P_\infty = [1:0:0]$.
3. La función $H_3([X:Y:Z]) = Z$ tiene un único cero en $P_\infty = [1:0:0]$ de orden p.

Sean i, j números enteros tal que $0 \leq i \leq p-1$. Consideremos la función racional

$$F([X:Y:Z]) = \frac{Y^i}{X^{i-j}Z^j}.$$

Para que F pertenezca a $\mathcal{L}(D)$, esta debe ser constante ó tener un único polo en P_1, de orden a lo más Np. Para que esto ocurra y teniendo en cuenta las observaciones anteriores, se debe cumplir que

$$0 \leq p(i-j) - i = (p-1)i - jp \leq Np \quad \text{y} \quad 0 \leq (p-3)i - pj. \tag{4.7}$$

note que el orden del polo de F en P_1 es $p(i-j) - i$.

De las desigualdades de (4.7), obtenemos que

$$\frac{(p-1)}{p}i - N \leq j \leq \frac{(p-3)}{p}i$$

es decir, $-\frac{i}{p} + (i-N) \leq j \leq i - \frac{3}{p}i$ y por tanto $-\frac{i}{p} + (i-N) \leq j \leq (i-N) + \left(N - \frac{3}{p}i\right)$. Luego si $0 \leq i \leq \min\{p-1, \frac{Np}{3}\}$, entonces existe j entero tal que

$$(i-N) \leq j \leq i - \frac{3}{p}i. \tag{4.8}$$

En conclusión, si el par i, j de enteros es tal que

$$0 \leq i \leq \min\left\{p-1, \frac{Np}{3}\right\} \ \text{y} \ (i-N) \leq j \leq i - \frac{3}{p}i$$

entonces la función $F([X:Y:Z]) = \dfrac{Y^i}{X^{i-j}Z^j}$ pertenece a $\mathcal{L}(D)$.

Si $N \geq 3$ entonces $\min\{p-1, \frac{Np}{3}\} = p-1$. Ya que si $N \geq 3$, se tiene que $Np \geq 3p > 3(p-1)$. Luego $\frac{Np}{3} \geq p > p-1$.

Si $N = 2$ entonces $\min\{p-1, \frac{2p}{3}\} = \frac{2p}{3}$. Como $p \geq 5$, se tiene $\frac{1}{2}(p-1) \geq 2$. Luego $\frac{3}{2}(p-1) \geq (p-1)+2 > p$. Por tanto $(p-1) > \frac{2p}{3}$.

Analizaremos cada situación por separado.

• Sea $N \geq 3$. Como $p > 3$ primo, entonces $p = 3l+1$ ó $p = 3l+2$ para algún $l > 1$ entero. Exhibiremos una base de $\mathcal{L}(D)$, considerando p en cada caso.

Si $p = 3l+1$ entonces $0 \leq i \leq 3l$. Usando la desigualdad (4.8) podemos concluir lo siguiente:

1. Si $i = 0$ entonces $-N \leq j \leq 0$.
2. Si $1 \leq i \leq l$ entonces $i - N \leq j \leq i-1$.
   Ya que si $1 \leq i \leq l$ entonces $0 < \frac{3}{3l+1}i \leq \frac{3}{3l+1}l < 1$. Luego $0 < \frac{3}{p}i < 1$. Por tanto $i-N \leq j \leq i-1$.
3. Si $l+1 \leq i \leq 2l$ entonces $i-N \leq j \leq i-2$.
   Puesto que si $l+1 \leq i \leq 2l$ entonces $\frac{3l+3}{3l+1} \leq \frac{3}{3l+1}i \leq \frac{6l}{3l+1}$. Luego $1+\frac{2}{p} \leq \frac{3}{p}i \leq 2-\frac{2}{p}$. Por lo tanto $i-N \leq j \leq i-2$.
4. Si $2l+1 \leq i \leq 3l$ entonces $i-N \leq j \leq i-3$.
   Desde que $2l+1 \leq i \leq 3l$, se tiene que $\frac{6l+3}{3l+1} \leq \frac{3}{3l+1}i \leq \frac{9l}{3l+1}$. Luego $2+\frac{1}{p} \leq \frac{3}{p}i \leq 3-\frac{3}{p}$. De lo que se concluye que $i-N \leq j \leq i-3$.

Así para i, j y l enteros definidos anteriormente, consideremos $\mathcal{B}$ el siguiente subconjunto de $\mathcal{L}(D)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{Y^i}{X^{i-j}Z^j} \Bigg/ \begin{array}{ll} -N \leq j \leq 0 & \text{si } i = 0 \\ i-N \leq j \leq i-1 & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ i-N \leq j \leq i-2 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l \\ i-N \leq j \leq i-3 & \text{si } 2l+1 \leq i \leq 3l \end{array} \right\}.$$

Luego su cardinalidad es

$$|\mathcal{B}| = (N+1)+lN+l(N-1)+l(N-2) = 3lN+N-3l+1 = (N-1)(3l+1)+2 = (N-1)p+2$$

la cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$.

Las funciones en $\mathcal{B}$ son linealmente independientes, pues todas tienen un único polo en P_1 de distinto orden. Ya que si existen pares (i,j) e (i',j') tales que las funciones en $\mathcal{B}$ determinadas por ellos, tienen un polo del mismo orden en P_1, entonces $p(i-j)-i = p(i'-j')-i'$, luego

$$(p-1)i-(p-1)i' = jp - j'p$$

y por tanto

$$(p-1)(i-i') = p(j-j').$$

Así p divide a $(p-1)(i-i')$. Como p es primo, se tiene que p divide a $(i-i')$. Pero $|i-i'| \leq p-1$, por tanto $i=i'$ y por ende $j=j'$.

Ya que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente cuya cardinalidad es igual a la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Si $p = 3l+2$. Entonces $0 \leq i \leq 3l+1$. De igual manera que en el caso anterior, usando la desigualdad (4.8), podemos concluir que:

1. si $i=0$ entonces $-N \leq j \leq 0$.
2. si $1 \leq i \leq l$ entonces $i-N \leq j \leq i-1$.
   Ya que si $1 \leq i \leq l$, se tiene que $0 < \frac{3}{p}i \leq \frac{3}{3l+2}l < 1$. Por tanto $i-N \leq j \leq i-1$.
3. si $l+1 \leq i \leq 2l+1$ entonces $i-N \leq j \leq i-2$.
   Puesto que si $l+1 \leq i \leq 2l+1$, entonces $\frac{3l+3}{3l+2} \leq \frac{3}{3l+2}i \leq \frac{6l+3}{3l+2}$. Luego $1+\frac{1}{p} \leq \frac{3}{p}i \leq 2-\frac{1}{p}$. Por lo tanto $i-N \leq j \leq i-2$.
4. si $2l+2 \leq i \leq 3l+1$ entonces $i-N \leq j \leq i-3$.
   Como $2l+2 \leq i \leq 3l+1$, se tiene que $\frac{6l+6}{3l+2} \leq \frac{3}{3l+2}i \leq \frac{9l+3}{3l+2}$. Luego $2+\frac{2}{p} \leq \frac{3}{p}i \leq 3-\frac{3}{p}$. De lo que se concluye que $i-N \leq j \leq i-3$.

De igual manera, considerando los enteros i, j y l definidos anteriomente, definimos el siguiente subconjunto de $\mathcal{L}(D)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{Y^i}{X^{i-j}Z^j} \Bigg/ \begin{array}{ll} -N \leq j \leq 0 & \text{si } i=0 \\ i-N \leq j \leq i-1 & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ i-N \leq j \leq i-2 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l+1 \\ i-N \leq j \leq i-3 & \text{si } 2l+2 \leq i \leq 3l+1 \end{array} \right\}$$

Observe que la cardinalidad de este conjunto es

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= (N+1) + lN + (l+1)(N-1) + l(N-2) \\ &= 3lN + 2N - 3l \\ &= (N-1)(3l+2) + 2 \\ &= (N-1)p + 2 \end{aligned}$$

la cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$. Como las funciones en $\mathcal{B}$ son linealmente independiente, pues tienen polo de distinto orden en P_1 y $|\mathcal{B}| = \dim \mathcal{L}(D)$, se concluye que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

• Supongamos que $N = 2$, luego $0 \leq i \leq \frac{2p}{3}$. Como $p = 3l + 1$ ó $p = 3l + 2$ para algún $l > 1$ entero, buscaremos una base de $\mathcal{L}(D)$ en cada caso.

Si $p = 3l + 1$, entonces $\frac{2p}{3} = 2l + \frac{2}{3}$. Luego $0 \leq i \leq 2l$. Usando la desigualdad (4.8) podemos concluir:

1. Si $i = 0$ entonces $-2 \leq j \leq 0$.
2. Si $1 \leq i \leq l$ entonces $i - 2 \leq j \leq i - 1$.
   Ya que si $1 \leq i \leq l$, se tiene que $0 < \frac{3}{p}i \leq \frac{3}{3l+1}l < 1$. Por tanto $i - 2 \leq j \leq i - 1$.
3. Si $l + 1 \leq i \leq 2l$ entonces $j = i - 2$.
   Desde que $l+1 \leq i \leq 2l$, se tiene que $\frac{3l+3}{3l+1} \leq \frac{3}{3l+1}i \leq \frac{6l}{3l+1}$. Luego $1+\frac{2}{p} \leq \frac{3}{p}i \leq 2-\frac{2}{p}$.
   De lo que se concluye que $j = i - 2$.

Sean i, j y l los enteros definidos anteriormente, definimos el siguiente subconjunto de $\mathcal{L}(D)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{Y^i}{X^{i-j}Z^j} \middle/ \begin{array}{ll} -2 \leq j \leq 0 & \text{si } i = 0 \\ i - 2 \leq j \leq i - 1 & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ j = i - 2 & \text{si } l + 1 \leq i \leq 2l \end{array} \right\}$$

cuya cardinalidad de es

$$|\mathcal{B}| = 3 + 2l + l = 3l + 3 = p + 2 = \dim \mathcal{L}(D).$$

Por los mismos argumentos que en los casos anteriores, se prueba que el conjunto $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Si $p = 3l + 2$, entonces $\frac{2p}{3} = 2l + \frac{4}{3}$. Por tanto $0 \leq i \leq 2l + 1$, luego usando la desigualdad (4.8) se concluye que:

1. Si $i = 0$ entonces $-2 \leq j \leq 0$.
2. Si $1 \leq i \leq l$ entonces $i - 2 \leq j \leq i - 1$.
   Puesto que si $1 \leq i \leq l$, se tiene que $0 < \frac{3}{p}i \leq \frac{3}{3l+2}l < 1$. Por tanto $i-2 \leq j \leq i-1$.
3. Si $l + 1 \leq i \leq 2l + 1$ entonces $j = i - 2$.
   Como $l+1 \leq i \leq 2l+1$, se tiene que $\frac{3l+3}{3l+2} \leq \frac{3}{3l+2}i \leq \frac{6l+3}{3l+2}$. Luego $1+\frac{1}{p} \leq \frac{3}{p}i \leq 2-\frac{1}{p}$.
   Por tanto lo $j = i - 2$.

Para i, j y l enteros definidos anteriormente, se define se define el siguiente subconjunto de $\mathcal{L}(D)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{Y^i}{X^{i-j}Z^j} \Bigg/ \begin{array}{ll} -2 \leq j \leq 0 & \text{si } i = 0 \\ i-2 \leq j \leq i-1 & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ j = i-2 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l+1 \end{array} \right\}$$

La cardinalidad de dicho conjunto es

$$|\mathcal{B}| = 3 + 2l + (l+1) = 3l + 4 = p + 2 = \dim \mathcal{L}(D)$$

Nuevamente, por el mismo argumento que en los casos anteriores, el conjunto $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Sean ρ_0, ρ_1, ..., ρ_{p-1} representaciones irreducibles de G, donde

$$\rho_k : a \to \xi_p^k \quad ; \quad \text{con } \xi_p = e^{2\pi i/p}.$$

y $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_{p-1}\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{p-1}$ respectivamente.

Como D es un divisor invariante por la acción de G, entonces G actúa en el espacio $\mathcal{L}(D)$.

Si $F([X:Y:Z]) = \dfrac{Y^i}{X^{i-j}Z^j}$ es un elemento de la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}(D)$, entonces la acción de $G = \langle a \rangle$ en el espacio $\mathcal{L}(D)$ esta dada por

$$F^a([X:Y:Z]) = F \circ a^{-1}([X:Y:Z]) = F([X:\xi_p Y:Z] = \xi_p^i \frac{Y^i}{X^{i-j}Z^j} \tag{4.9}$$

Dado esto, el espacio $\mathcal{L}(D)$ se descompone como G-módulo, en factores irreducibles como

$$\mathcal{L}(D) \simeq m_0 V_0 + m_1 V_1 + ... + m_{p-1} V_{p-1}$$

donde m_i son enteros no negativos, para $i = 0, 1, ..., p-1$. Usando (4.9) y la forma particular que tiene la base exhibida para $\mathcal{L}(D)$, junto con que las representaciones irreducibles de G son todas de dimensión 1, determinaremos los coeficientes m_i. Lo haremos por casos.

- Si $N \geq 2$ y $p = 3l + 1$, entonces

$$\boxed{m_i = \begin{cases} N+1 & \text{si } i = 0 \\ N & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ N-1 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l \\ N-2 & \text{si } 2l+1 \leq i \leq 3l \end{cases}} \tag{4.10}$$

- Si $N \geq 2$ y $p = 3l + 2$, entonces

$$\boxed{m_i = \begin{cases} N+1 & \text{si } i = 0 \\ N & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ N-1 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l+1 \\ N-2 & \text{si } 2l+2 \leq i \leq 3l+1 \end{cases}} \tag{4.11}$$

Observe que para $N \geq 2$ y $p > 3$ primo, el subespacio de $\mathcal{L}(D)$ fijo por G, $\mathcal{L}(D)^G$, es generado por el conjunto
$$\left\{1, \frac{Z}{X}, \frac{Z^2}{X^2}, \ldots, \frac{Z^N}{X^N}\right\}.$$

4.3. Aplicación del teorema de descomposición

Consideremos la curva definida en la sección anterior.

Sea $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = y^p - x(x-1)(x-\lambda)\}$ una curva plana afín, donde $p > 3$ es un número primo y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Sea $\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}([X : Y : Z]) = Y^p - XZ^{p-3}(X - Z)(X - \lambda Z)\}$, su clausura proyectiva, la cual tiene una singularidad en el punto $P_\infty = [1 : 0 : 0]$. Luego normalizamos la curva y obtenemos que $\widetilde{\mathcal{X}}$ es una superficie de Riemann compacta.

Sea $a([X : Y : Z]) = [X : \xi_p^{-1} Y : Z]$, donde $\xi_p = e^{2\pi i/p}$, un automorfismo de orden p de $\widetilde{\mathcal{X}}$ y $G = \langle a \rangle$.

Consideremos el cubrimiento ramificado de grado p

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

cuyos puntos de ramificación son

$$P_1 = [0:0:1],\ P_2 = [1:0:1],\ P_3 = [\lambda:0:1] \text{ y } P_\infty = [1:0:0].$$

El estabilizador de cada punto de ramificación es G. Los puntos $Q_i = [P_i]_G$, con $i = 1, 2, 3$, y $Q_\infty = [P_\infty]_G$ son los puntos rama del cubrimiento.

Sabemos que $\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0$ y por (4.5) tenemos que $\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} = p - 1$.

Sea $N \geq 2$ un número entero y $D_0 = Q_1^N$ un divisor de $\mathcal{X}/G$. Luego su pullback $D = \pi^*(D_0)$ dado por

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{P \in \pi^{-1}(Q_1)} (P^{\mathrm{mult}_P \pi})^N = P_1^{Np} = [0:0:1]^{Np}$$

el cual es un divisor no especial de $\mathcal{X}$, hecho probado en la sección anterior. El espacio de Riemann-Roch asociado a este divisor es

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{C}^*(\widetilde{\mathcal{X}}) /\ \mathrm{div}(F) \geq [0:0:1]^{-Np}\} \cup \{0\}$$

cuya dimensión por (4.6) es

$$\dim \mathcal{L}(D) = (N-1)p + 2.$$

Ahora determinaremos la descomposición de la acción G en el espacio $\overline{H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})}$, en términos de las representaciones irreducibles de G.

Como $\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0$ y el cubrimiento tiene cuatro puntos rama, donde cada punto de ramificación arriba de cada punto rama tiene estabilizador de orden p, se sigue que, la firma del cubrimiento es $(0; p, p, p, p)$.

Buscamos el vector generador de G, para eso eligimos para cada punto rama del cubrimiento un punto de ramificación arriba de el y determinamos la constante de rotación del generador de su respectivo estabilizador.

El punto $P_1 = [0:0:1]$ tiene por estabilizador a $G_1 = \langle a \rangle$. Sea

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \widetilde{\mathcal{X}} \cap U_2 = \{[X:Y:Z] \in \widetilde{\mathcal{X}} : Z \neq 0\} &\to \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 / f(x,y) = y^p - x(x-1)(x-\lambda)\} \\ [X:Y:Z] &\rightsquigarrow \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \end{aligned}$$

homemeomorfismo, donde $\varphi_2(P_1) = (0,0)$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$, entonces por teorema de la función implícita, existe vecidad abierta W de $(0,0)$, una función analítica h tal que $h(0) = 0$ y $t > 0$ de modo que

$$W = \{(h(y), y) : y \in B(0,t)\} \subseteq \mathcal{X}.$$

Luego la carta en P_1 está dada por

$$\begin{aligned} \phi : \varphi_2^{-1}(W) &\to \mathbb{C} \\ [h(y) : y : 1] &\rightsquigarrow y \end{aligned}$$

Así, localmente en P_1, el automorfismo a luce como

$$\phi \circ a \circ \phi^{-1}(y) = \phi \circ a([h(y) : y : 1]) = \phi([h(y) : \xi_p^{-1} y : 1]) = \xi_p^{-1} y = \xi_p^{p-1} y$$

de donde $\sigma_{P_1}(a) = \xi_p^{p-1}$. Por lo tanto la constante de rotación de a en P_1 es $\sigma_{P_1}^{-1}(a) = \xi_p$, donde $\frac{2\pi}{p}$ es el ángulo de rotación de a en P_1.

De manera similar encontramos la constante de rotación para a en los puntos P_2 y P_3, así

$$\sigma_{P_2}(a) = \xi_p^{p-1} \quad y \quad \sigma_{P_3}(a) = \xi_p^{p-1}$$

y por tanto

$$\sigma_{P_2}^{-1}(a) = \xi_p \quad y \quad \sigma_{P_3}^{-1}(a) = \xi_p.$$

La información anterior es suficiente para encontrar el vector generador, pues el cubrimiento tiene cuatro puntos rama. Conseguimos este vector de la siguiente manera: como $\sigma_{P_i}(a) = \xi_p^{p-1}$, para $i = 1, 2, 3$, buscamos α en $\mathbb{Z}$, con $0 < \alpha < p$ tal que

$$\alpha \cdot (p-1) \equiv 1 \bmod p\,,$$

luego el vector generador es $(a^{-\alpha}, a^{-\alpha}, a^{-\alpha}, a^{\beta})$, donde $\beta \in \mathbb{Z}$ es tal que $-3\alpha + \beta \equiv 0 \bmod p$. Así $\alpha = p - 1$ y $\beta = p - 3$. Por tanto el vector generador es

$$(a, a, a, a^{p-3}).$$

Ahora que ya tenemos el vector generador, determinaremos la descomposición de la acción G en el espacio $H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})$, en términos de las representaciones irreducibles de G.

Sean ρ_0, ρ_1, ..., ρ_{p-1} representaciones irreducibles de G, donde

$$\rho_k : a \to \xi_p^k \quad ; \quad \text{con } \xi_p = e^{2\pi i/p}.$$

y $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_{p-1}\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{p-1}$ respectivamente.

Sea

$$\overline{H^{1,0}(\widetilde{\mathcal{X}}, \mathbb{C})} \simeq n_0^* V_0 + n_1^* V_1 + ... + n_{p-1}^* V_{p-1},$$

donde los coeficientes n_i^* son enteros no negativos, para $i = 0, 1, ..., p-1$. Luego usando las ecuaciones dadas en (1.11) y (1.12), junto con que $\dim V_i = 1$, para $i = 0, 1, ..., p-1$, obtenemos que

$$n_0^* = \boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0$$

$$n_i^* = -1 + \frac{3}{p} i + \frac{1}{p} \overline{i(p-3)} \tag{4.12}$$

para $i = 1, 2, ..., p-1$. Donde $\overline{i(p-3)}$ es el resto de la división de $i(p-3)$ por p.

Ya que p es de la forma $3l + 1$ ó $3l + 2$, para algún $l > 1$ en $\mathbb{Z}$, obtenemos el valor de n_i^* en cada caso.

- Si $p = 3l + 1$ entonces $1 \leq i \leq 3l$. Por (4.12) se concluye que:

  1. Si $1 \leq i \leq l$ entonces $n_i^* = 0$.
  Como $i \leq l$ sigue que $3i \leq 3l < 3l + 1 = p$. Luego $0 < p - 3i < p$. Además, ya que $i(p-3) \equiv p - 3i \bmod p$ entonces se tiene que $n_i^* = -1 + \frac{3}{p} i + \frac{1}{p}(p - 3i) = 0$.

  2. Si $l + 1 \leq i \leq 2l$ entonces $n_i^* = 1$.
  Ya que $l + 1 \leq i \leq 2l$ entonces $3l + 3 \leq 3i \leq 6l$. Así $p + 2 \leq 3i \leq 2p - 2$ y por tanto $2 \leq 2p - 3i \leq p - 2$. Ahora bien, como $i(p-3) \equiv 2p - 3i \bmod p$, se concluye que $n_i^* = -1 + \frac{3}{p} i + \frac{1}{p}(2p - 3i) = 1$.

  3. Si $2l + 1 \leq i \leq 3l$ entonces $n_i^* = 2$.
  Debido a que $2l+1 \leq i \leq 3l$, se tiene que $6l+3 \leq 3i \leq 9l$. Así $2p+1 \leq 3i \leq 3p-3$, luego $3 \leq 3p - 3i \leq p - 1$. Ya que $i(p-3) \equiv 3p - 3i \bmod p$, obtenemos que $n_i^* = -1 + \frac{3}{p} i + \frac{1}{p}(3p - 3i) = 2$.

En resumen

$$\boxed{n_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq l \\ 1 & \text{si } l + 1 \leq i \leq 2l \\ 2 & \text{si } 2l + 1 \leq i \leq 3l \end{cases}}$$

- Si $p = 3l + 2$ entonces $1 \leq i \leq 3l + 1$. De la misma manera que el caso anterior, usando (4.12) concluimos que:

1. Si $1 \leq i \leq l$ entonces $n_i^* = 0$.
   Como $i \leq l$ sigue que $3i \leq 3l < 3l + 2 = p$. Luego $0 < p - 3i < p$. Además $i(p-3) \equiv p - 3i \bmod p$, por tanto $n_i^* = -1 + \frac{3}{p}i + \frac{1}{p}(p-3i) = 0$.

2. Si $l + 1 \leq i \leq 2l + 1$ entonces $n_i^* = 1$.
   Desde que $l+1 \leq i \leq 2l+1$ entonces $3l+3 \leq 3i \leq 6l+3$. Así $p+1 \leq 3i \leq 2p-1$ y por tanto $1 \leq 2p - 3i \leq p - 1$. Como $i(p-3) \equiv 2p - 3i \bmod p$, se tiene que $n_i^* = -1 + \frac{3}{p}i + \frac{1}{p}(2p - 3i) = 1$.

3. Si $2l + 2 \leq i \leq 3l + 1$ entonces $n_i^* = 2$.
   Ya que $2l+2 \leq i \leq 3l+1$ entonces $6l+6 \leq 3i \leq 9l+3$. Luego $2p+2 \leq 3i \leq 3p-3$ y por tanto $3 \leq 3p - 3i \leq p - 2$. Además, como $i(p-3) \equiv 3p - 3i \bmod p$, obtenemos que $n_i^* = -1 + \frac{3}{p}i + \frac{1}{p}(3p - 3i) = 2$.

En resumen

$$\boxed{n_i^* = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq l \\ 1 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l+1 \\ 2 & \text{si } 2l+2 \leq i \leq 3l+1 \end{cases}}$$

Ahora bien, si la descomposición en factores irreducibles del espacio $\mathcal{L}(D)$ como G-módulo es

$$\mathcal{L}(D) \simeq m_0 V_0 + m_1 V_1 + ... + m_{p-1} V_{p-1},$$

donde m_i son enteros no negativos para $i = 0, ..., p-1$. Entonces por 3.2.7, se tiene que

$$m_0 = \text{Deg}(D_0) - g_{X/G} + 1 = N + 1$$

$$m_i = \text{Deg}(D_0) \dim V_i - n_i^* = N - n_i^*$$

para $i = 1, ..., p-1$.

Luego usando los coeficiente n_i^* obtenidos anteriormente, se concluye que:

1. Si $p = 3l + 1$ para algún $l > 0$ en $\mathbb{Z}$, entonces

$$\boxed{m_i = \begin{cases} N+1 & \text{si } i = 0 \\ N & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ N-1 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l \\ N-2 & \text{si } 2l+1 \leq i \leq 3l \end{cases}}$$

2. Si $p = 3l + 2$ para algún $l > 0$ en $\mathbb{Z}$, entonces

$$\boxed{m_i = \begin{cases} N+1 & \text{si } i = 0 \\ N & \text{si } 1 \leq i \leq l \\ N-1 & \text{si } l+1 \leq i \leq 2l+1 \\ N-2 & \text{si } 2l+2 \leq i \leq 3l+1 \end{cases}}$$

Lo cual coincide con los coeficientes de la descomposición de la acción de G en $\mathcal{L}(D)$, exhibidos anteriormente en (4.10) y (4.11).

CAPÍTULO 5

Apéndice

En este capítulo desarrollaremos ejemplos en conocidas curvas de Catalán. Además incluiremos algunos resultados de representaciones de grupos, utilizados en nuestro trabajo.

5.1. Espacio de Riemann-Roch en algunas curvas de Catalán

Consideremos $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = y^q - x^p + 1 = 0\}$ una curva plana afín donde p y q son números primos, con $p > q$. Sea

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \{[X : Y : Z] \in \mathbb{CP}^2 / \widetilde{f}(X, Y, Z) = Y^q Z^{p-q} - X^p + Z^p = 0\}$$

su clasura proyectiva.

F tiene singularidad en el punto $P_\infty = [0 : 1 : 0]$, luego normalizamos la curva, así resulta ser una superficie de Riemann compacta.

Se conoce que el género de $\widetilde{\mathcal{X}}$ es

$$g_{\widetilde{\mathcal{X}}} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Sea $a([X, Y, Z]) = [\xi_p X : \xi_q Y : Z]$ un automorfismo de $\widetilde{\mathcal{X}}$, de orden pq, donde $\xi_p = e^{2\pi i/p}$ y $\xi_q = e^{2\pi i/q}$, y sea $G = \langle a \rangle$.

Consideremos el cubrimiento ramificado

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{X} &\to \mathcal{X}/G \\ P &\rightsquigarrow [P]_G \end{aligned}$$

de grado $\deg(\pi) = pq$.

Los puntos de ramificación del cubrimiento son

- $P_\infty = [0 : 1 : 0]$ con estabilizador $G_{P_\infty} = \langle a \rangle$, de orden pq.
- $P_j = [\xi_p^j : 0 : 1]$ con estabilizador $G_{P_j} = \langle a^p \rangle$ de orden q, para $j = 0, 1, ..., p-1$.
- $Q_k = [0 : \alpha\xi_q^k : 1]$ con estabilizador $G_{Q_k} = \langle a^q \rangle$ de orden p, donde $\alpha = e^{\pi i/q}$ y $k = 0, 1, ..., q-1$.

Los puntos rama son $R_1 = [P_\infty]_G$, $R_2 = [P_0]_G$ y $R_3 = [Q_0]_G$, donde $[P_\infty]_G = \{P_\infty\}$, $[P_0]_G = \{P_0, P_1, ..., P_{p-1}\}$ y $[Q_0]_G = \{Q_0, Q_1, ..., Q_{q-1}\}$.

Por la fórmula de Riemann-Hurwitz 1.2.9, se tiene que

$$\frac{(p-1)(q-1)}{2} = pq(\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} - 1) + 1 + \frac{pq}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{pq}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\right)$$

luego despejando $\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G}$ de la ecuación , obtenemos que

$$\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}/G} = 0.$$

De lo anterior se desprende que la firma del cubrimiento es $(0; pq, p, q)$. Buscamos ahora el vector generador de G, para eso eligimos por cada punto rama un punto de ramificación arriba de el y determinamos la constante de rotación del generador de su respectivo estabilizador.

Consideremos el punto $P_0 = [1 : 0 : 1]$, el cual tiene estabilizador $G_{P_0} = \langle a^p \rangle$, donde $a^p([X : Y : Z]) = [X : \xi_q^p Y : Z]$, es un automorfimo de orden q. Sea

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \widetilde{\mathcal{X}} \cap U_2 = \{[X : Y : Z] \in \widetilde{\mathcal{X}} : Z \neq 0\} &\to X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / f(x, y) = y^q - x^p + 1\} \\ [X : Y : Z] &\rightsquigarrow \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \end{aligned}$$

homemeomorfismo, donde $\varphi_2([1 : 0 : 1]) = (1, 0)$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) \neq 0$, entonces por teorema de la función implícita, existe vecindad abierta W de $(1, 0)$, una función analítica g tal que $g(0) = 1$ y $t > 0$ de modo que

$$W = \{(g(y), y) : y \in B(0, t)\} \subseteq \mathcal{X}$$

luego la carta en P_0 está dada por

$$\begin{aligned} \phi : \varphi_2^{-1}(W) &\to \mathbb{C} \\ [g(y) : y : 1] &\rightsquigarrow y \end{aligned}$$

Así localmente en P_0, el automorfismo a^p luce como

$$\phi \circ a^p \circ \phi^{-1}(y) = \phi \circ a^p([g(y) : y : 1]) = \phi([g(y) : \xi_q^p y : 1]) = \xi_q^p y.$$

Como $p > q$, existen n y r enteros positivos tales que $p = nq + r$, con $r < q$, luego

$$\sigma_{P_0}(a^p) = \xi_q^r.$$

Así la constante de rotación de a^p en P_0 es $\sigma_{P_0}(a^p)^{-1} = \xi_q^{-r}$, donde $\frac{2\pi r}{q}$ es el ángulo de rotación de a^p en P_0.

De manera similar encontramos la constante de rotación para el automorfismo $a^q([X : Y : Z]) = [\xi_p^q X : Y : Z]$ en el punto $Q_0 = [0 : \alpha : 1]$, así

$$\sigma_{Q_0}(a^q) = \xi_p^q$$

luego la constante de rotación de a^q en Q_0 es $\sigma_{Q_0}(a^q)^{-1} = \xi_p^{-q}$, donde $\frac{2\pi q}{p}$ es el ángulo de rotación de a^q en Q_0.

A continuación determinaremos la constante de rotación del automorfismo $a([X : Y : Z]) = [\xi_p X : \xi_q Y : Z]$ en el punto $P_\infty = [0 : 1 : 0]$, el cual tiene estabilizador $G_{P_\infty} = \langle a \rangle$. Primero exhibiremos la carta en P_∞. Sea

$$\varphi_1 : \widetilde{\mathcal{X}} \cap U_1 = \{[X : Y : Z] \in \widetilde{\mathcal{X}} : Y \neq 0\} \to \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / x^p = y^{p-q}(1 + y^q)\}$$
$$[X : Y : Z] \rightsquigarrow \left(\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right)$$

homemeomorfismo, donde $\varphi_1([0 : 1 : 0]) = (0, 0)$. Observamos que la curva $\mathcal{C}$ tiene singularidad en $(0, 0)$.

Ahora bien, $h(y) = 1 + y^q$ es analítica y $h(0) = 1$, entonces existe k función analítica tal que $k^{p-q}(y) = 1 + y^q$, luego $x^p = [yk(y)]^{p-q}$, por lo tanto $(0, 0)$ es una singularidad de tipo $(p, p - q)$.

Llamemos $z = x$ y $\eta = yk(y)$. Luego sea $\mathcal{C}_1$ la curva dada por

$$\mathcal{C}_1 = \{(z, \eta) \in \mathbb{C}^2 \,/\, z^p = \eta^{p-q}\}.$$

Como el máximo comun divisor entre p y $p - q$, $(p, p - q) = 1$, entonces existen $b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $(p, p - q) = 1 = cp + b(p - q)$. Consideremos las funciones

$$\begin{array}{ll} s : \mathcal{C}_1 \to \mathbb{C} & r : Im(s) \to \mathcal{C}_1 \\ (z, \eta) \rightsquigarrow s(z, \eta) = z^b \eta^c & \qquad t \rightsquigarrow r(t) = (t^{p-q}, t^p) \end{array} \tag{5.1}$$

Se verifica que $r \circ s = id$ y $s \circ r = id$.

$$\begin{array}{ccc} (z, \eta) & \qquad & (t^{p-q}, t^p) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle s} & & \Big\uparrow{\scriptstyle r} \\ t = z^b \eta^c & & t \end{array}$$

Pero $k^{p-q}(0) = 1$, por tanto $k(0) \neq 0$. Luego

$$k(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + t.o.s$$

donde $a_0 = k(0) \neq 0$. Así

$$\eta = yk(y) = a_0 y + a_1 y^2 + a_2 y^3 + t.o.s... = j(y),$$

con $a_i \in \mathbb{C}$ y $a_0 \neq 0$.

Tenemos que $y = l(\eta)$, donde l es una función analítica, además $y = 0$ si y solo sí $\eta = 0$. Luego $l(0) = 0$ y por tanto

$$y = l(\eta) = b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + t.o.s...,$$

con $b_i \in \mathbb{C}$, además $y = l(j(y))$. Luego derivando obtenemos que $1 = l'(j(y))j'(y)$, así

$$1 = l'(j(0))j'(0) = l'(0)j'(0) = b_1 a_0 \tag{5.2}$$

y por tanto $b_1 = \frac{1}{a_0} \neq 0$. Así

$$y = b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + t.o.s... = \eta(b_1 + b_2\eta + b_3\eta^2 + t.o.s...) = \eta\widetilde{l}(\eta),$$

donde $\widetilde{l}(\eta) = b_1 + b_2\eta + b_3\eta^2 + t.o.s...$ es una función analítica, con $\widetilde{l}(0) = b_1 \neq 0$.

Por tanto $x = z$ e $y = \eta\widetilde{l}(\eta)$. Como por (5.1) se tiene que $z = t^{p-q}$ y $\eta = t^p$, entonces $x = t^{p-q}$ e $y = t^p\widetilde{l}(t^p)$. Luego

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & & (t^{p-q}, t^p\widetilde{l}(t^p)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{s}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \widetilde{r}} \\ t = x^b(yk(y))^c & & t \end{array}$$

Así $\widetilde{s}$ es carta en $(0,0)$ y $\widetilde{r}$ es su inversa. Luego la carta en P_∞ está dada por

$$\begin{aligned} \phi : U \subseteq U_1 \cap \widetilde{\mathcal{X}} &\to \mathbb{C} \\ [x:1:y] &\rightsquigarrow t = x^b(yk(y))^c \end{aligned}$$

Así, usando la definición de ϕ y $\widetilde{r}$, se puede ver que localmente en P_∞ el automorfismo

a luce como

$$\begin{aligned}
\phi\circ a\circ\phi^{-1}(t) &= \phi\circ a([t^{p-q}:1:t^p\widetilde{l}(t^p)])\\
&= \phi([\xi_p t^{p-q}:\xi_q:t^p\widetilde{l}(t^p)])\\
&= \phi\left(\left[\frac{\xi_p}{\xi_q}t^{p-q}:1:\frac{1}{\xi_q}t^p\widetilde{l}(t^p)\right]\right)\\
&= \left(\frac{\xi_p}{\xi_q}\right)^b t^{(p-q)b}\left[\frac{1}{\xi_q}t^p\widetilde{l}(t^p)k\left(\frac{1}{\xi_q}t^p\widetilde{l}(t^p)\right)\right]^c\\
&= \xi_p^b\,\xi_q^{(-c-b)}t^{(p-q)b+cp}\left[\widetilde{l}(t^p)k\left(\frac{1}{\xi_q}t^p\widetilde{l}(t^p)\right)\right]^c
\end{aligned}$$

Como $(p,p-q)=1=cp+b(p-q)$ y por definición de las funciones k y $\widetilde{l}$, se concluye que

$$\begin{aligned}
\phi\circ a\circ\phi^{-1}(t) &= \xi_p^b\,\xi_q^{(-c-b)}t\left[\widetilde{l}(t^p)k\left(\frac{1}{\xi_q}t^p\widetilde{l}(t^p)\right)\right]^c\\
&= \xi_p^b\,\xi_q^{(-c-b)}t[a_0b_1+a_0b_2t^p+t.o.s]^c\\
&= \xi_p^b\,\xi_q^{(-c-b)}t[a_0b_1+a_0b_2t^p+t.o.s]^c
\end{aligned}$$

Pero por (5.2) se tiene que $a_0b_1=1$, luego

$$\sigma_{P_\infty}(a)=\xi_p^b\,\xi_q^{(-c-b)}=\xi_{pq}^{qb-p(c+b)}=\xi_{pq}^{-cp-(p-q)b}=\xi_{pq}^{-1}=\xi_{pq}^{pq-1}$$

Así la constante de rotación de a en P_∞ es $\sigma_{P_\infty}(a)^{-1}=\xi_{pq}$, donde $\frac{2\pi}{pq}$ es el ángulo de rotación de a en P_∞.

En resumen, tenemos que $\sigma_{Q_0}(a^q)=\xi_p^q$, $\sigma_{P_0}(a^p)=\xi_q^r$, y $\sigma_{P_\infty}(a)=\xi_{pq}^{pq-1}$. Sabemos que existen α, β y γ en $\mathbb{Z}$, tales que:

$$\alpha\cdot q\equiv 1 \bmod p$$

$$\beta\cdot r\equiv 1 \bmod q$$

$$\gamma\cdot(pq-1)\equiv 1 \bmod pq$$

con $0<\alpha<p$, $0<\beta<q$ y $0<\gamma<pq$. Observe que $\gamma=pq-1$. Luego el vector generador de G es

$$(a,a^{-q\alpha},a^{-p\beta}) \tag{5.3}$$

Note que $1-q\alpha-p\beta\equiv 1 \bmod pq$.

Elijamos $D_0 \in \mathrm{Div}(\widetilde{\mathcal{X}}/G)$ de manera que $D = \pi^*(D_0)$ sea un divisor no especial en $\widetilde{\mathcal{X}}$. Para eso, por 2.3.2, basta escoger D_0 de modo que

$$\deg(D_0) > \frac{2\,\boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} - 2}{|G|} = \frac{1}{pq}((p-1)(q-1)-2) = \frac{1}{pq}(pq-p-q-1).$$

Luego basta tomar D_0 de forma que $\deg(D_0) \geq 1$.

Sea $D_0 = [P_\infty]_G$ un divisor de grado 1 de $\widetilde{\mathcal{X}}/G$ y D el pullback de D_0, así

$$D = \pi^*(D_0) = \prod_{P \in \pi^{-1}([P_\infty]_G)} P^{\mathrm{mult}_P \pi} = P_\infty^{pq} = [0:1:0]^{pq}.$$

Considere

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{C}^*(\widetilde{\mathcal{X}}) / \operatorname{div}(F) \geq D^{-1} = [0:1:0]^{-pq}\} \cup \{0\}$$

el espacio de Riemann-Roch del divisor D. Así por (3.2) se tiene que

$$\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) - \boldsymbol{g}_{\widetilde{\mathcal{X}}} + 1 = pq - \frac{(p-1)(q-1)}{2} + 1 = \frac{(p+1)(q+1)}{2}. \tag{5.4}$$

Primero notemos lo siguiente:

Observación 5.1.1. La función:

1. $H_1([X:Y:Z]) = X$ tiene cero de orden 1 en $Q_k = [0 : \alpha\xi_q^k : 1]$, para $k = 0, 1, ..., q-1$. También tiene cero de orden $p - q$ en $P_\infty = [0:1:0]$.

2. $H_2([X:Y:Z]) = Y$ tiene cero de orden 1 en $P_j = [\xi_p^j : 0 : 1]$, para $j = 0, 1, ..., p-1$.

3. $H_3([X:Y:Z]) = Z$ tiene un único cero en $P_\infty = [1:0:0]$ de orden p.

Consideremos las siguientes funciones:

$$F_1([X:Y:Z]) = 1 \text{ y } F_2([X:Y:Z]) = \frac{\prod_{k=0}^{q-1}(Y - \alpha\xi_q^k Z)}{Z^q}$$

La función F_1 es constante, por tanto pertence a $\mathcal{L}(D)$. La función F_2 tiene un cero de orden p en $Q_k = [0 : \alpha\,\xi_q^k : 1] \in \widetilde{\mathcal{X}}$, para $k = 0, 1, ..., q-1$, y por las observaciones anteriores también tiene un único polo de orden pq en P_∞. Por tanto F_2 pertence a $\mathcal{L}(D)$.

Sean ρ_0, ρ_1, ..., ρ_{pq-1} representaciones irreducibles de G, donde

$$\rho_k : a \to \xi_{pq}^k \quad ; \quad \text{con } \xi_{pq} = e^{2\pi i/pq}.$$

y $\mathcal{M}(G) = \{V_0, V_1, ..., V_{pq-1}\}$ representantes de los $\mathbb{C}[G]$-módulos irreducibles de G, todos de dimensión 1, correspondientes a las representaciones $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{pq-1}$, respectivamente.

Como D es un divisor invariante por la acción de G, entonces G actúa en el espacio $\mathcal{L}(D)$.

Ahora bien, si $F_2([X : Y : Z]) = \dfrac{\prod_{k=0}^{q-1}(Y - \alpha\xi_q^k Z)}{Z^q}$, entonces el automorfismo a, actúa sobre F_2 como

$$\begin{aligned}
F_2^a([X : Y : Z]) &= F \circ a^{-1}([X : Y : Z]) \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{q-1}(\xi_q^{-1}Y - \alpha\xi_q^k Z)}{Z^q} \\
&= (\xi_q^{-1})^q \frac{\prod_{k=0}^{q-1}(Y - \alpha\xi_q^{k+1} Z)}{Z^q} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{q-1}(Y - \alpha\xi_q^k Z)}{Z^q} \\
&= F_2([X : Y : Z])
\end{aligned}$$

Es claro también que $F_1^a = F_1$. Por tanto F_1, F_2 pertenecen a $\mathcal{L}(D)^G$. Pero por 3.2.7, se tiene que $\dim \mathcal{L}(D)^G = m_0 = \mathrm{Deg}(D_0) - g_{\mathcal{X}/G} + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$. Por lo tanto $\mathcal{L}(D)^G$ es generado por F_1 y F_2.

Nuestro propósito es encontrar una base para el espacio de Riemann-Roch $\mathcal{L}(D)$, y dada esta base determinar la descomposición, en factores irreducibles, de la acción de G en este espacio. Para luego verificar que dicha descomposición satisface el teorema 3.2.7. Por simplicidad de los cálculos, exhibiremos bases para algunos primos p y q dados.

• Sea $p = 5$ y $q = 3$. Así $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / y^3 = x^5 - 1\}$.

Luego

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{C}^*(\widetilde{\mathcal{X}}) / \operatorname{div}(F) \geq D^{-1} = [0:1:0]^{-15}\} \cup \{0\}$$

Por 5.4, sabemos que

$$\dim \mathcal{L}(D) = \frac{(5+1)(3+1)}{2} = 12$$

Consideremos las siguientes funciones que tienen un único polo en P_∞, excepto la función $F_1 = 1$. Además por 5.1.1 determinaremos el orden de dicho polo.

1. $F_1 = 1$.
2. $F_2 = \dfrac{\prod_{k=0}^{2}(Y - \alpha\xi_3^k Z)}{Z^3}$. (Polo de orden 15 en P_∞).
3. $F_3 = \dfrac{X}{Z}$. (Polo de orden 3 en P_∞).
4. $F_4 = \dfrac{X^2}{Z^2}$. (Polo de orden 6 en P_∞).
5. $F_5 = \dfrac{X^3}{Z^3}$. (Polo de orden 9 en P_∞).
6. $F_6 = \dfrac{X^4}{Z^4}$. (Polo de orden 12 en P_∞).
7. $F_7 = \dfrac{Y}{Z}$. (Polo de orden 5 en P_∞).
8. $F_8 = \dfrac{Y^2}{Z^2}$. (Polo de orden 10 en P_∞).
9. $F_9 = \dfrac{XY}{Z^2}$. (Polo de orden 8 en P_∞).
10. $F_{10} = \dfrac{X^2Y}{Z^3}$. (Polo de orden 11 en P_∞).
11. $F_{11} = \dfrac{X^3Y}{Z^4}$. (Polo de orden 14 en P_∞).
12. $F_{12} = \dfrac{XY^2}{Z^3}$. (Polo de orden 13 en P_∞).

Así el conjunto $\mathcal{B} = \{F_t \,/\, t = 1, ..., 12\}$ es un subconjunto de $\mathcal{L}(D)$, pues todas tienen un único polo en P_∞ de orden menor o igual a 15. Además $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, pues todas las funciones tienen un polo en P_∞ de distinto orden. Ahora bien, como la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es 12, lo cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, entonces se concluye que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Sabemos que $F_1^a = F_1$ y que $F_2^a = F_2$. Observe que en general si $F = \dfrac{X^iY^l}{Z^{i+l}}$, entonces por 5.1.1 F tiene un único polo en P_∞ de orden $iq + lp$, además

$$\begin{aligned} F^a([X:Y:Z]) &= F \circ a^{-1}([X:Y:Z]) \\ &= \frac{\xi_p^{-i} X^i \xi_q^{-l} Y^l}{Z^{i+l}} \\ &= \xi_{pq}^{-iq-pl} \frac{X^iY^l}{Z^{i+l}} \\ &= \xi_{pq}^{pq-(iq+pl)} \frac{X^iY^l}{Z^{i+l}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F^a([X:Y:Z]) = \xi_{pq}^{pq-(iq+pl)} F([X:Y:Z]) \tag{5.5}$$

De lo anterior se concluye que

$$\begin{array}{lllll} F_3^a = \xi_{15}^{12} F_3 \;, & F_5^a = \xi_{15}^{6} F_5 \;, & F_7^a = \xi_{15}^{10} F_7 \;, & F_9^a = \xi_{15}^{7} F_9 \;, & F_{11}^a = \xi_{15}^{1} F_{11} \;, \\ F_4^a = \xi_{15}^{9} F_4 \;, & F_6^a = \xi_{15}^{3} F_6 \;, & F_8^a = \xi_{15}^{5} F_8 \;, & F_{10}^a = \xi_{15}^{4} F_{10} \;, & F_{12}^a = \xi_{15}^{2} F_{12}. \end{array}$$

Por tanto el espacio $\mathcal{L}(D)$ se descompone como G-módulo en factores irreducibles como

$$\mathcal{L}(D) \simeq 2V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_9 + V_{10} + V_{12}.$$

Ahora verificaremos que se obtiene lo mismo aplicando el teorema 3.2.7.

Se tiene por (5.3) que el vector generador de esta curva es $(a, a^{-3\alpha}, a^{-5\beta})$, donde $3\alpha \equiv 1 \bmod 5$ y $2\beta \equiv 1 \bmod 3$. Por tanto $\alpha = 2$ y $\beta = 2$. De lo que se concluye que el vector generador es (a, a^9, a^5).

Si

$$\mathcal{L}(D) \simeq m_0V_0 + m_1V_1 + m_2V_2 + ... + m_{14}V_{14}.$$

entonces por teorema 3.2.7 se tiene que

$$m_0 = \mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\tilde{\mathcal{X}}/G} + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$$

y que

$$m_k = \mathrm{Deg}(D_0)\dim V_k - n_k^* = 1 - n_k^*$$

para $k = 1, ..., 14$.

Ahora calcularemos n_k^* para $k = 1, ..., 14$. Por 1.12 y dado que $\dim V_k = 1$ y $g_{\tilde{X}/G} = 0$, se tiene que

$$n_k^* = -1 + \frac{1}{15}\sum_{\alpha=1}^{14}\alpha N_{1\alpha}^k + \frac{1}{5}\sum_{\alpha=1}^{4}\alpha N_{2\alpha}^k + \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{2}\alpha N_{3\alpha}^k$$

De lo que se concluye que:

$$n_1^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 0.$$

$$n_2^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 0.$$

$$n_3^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 3 + \frac{1}{5}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0.$$

$$n_4^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 0.$$

$$n_5^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 5 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 0.$$

$$n_6^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 6 + \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0.$$

$$n_7^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 7 + \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 0.$$

$$n_8^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 8 + \frac{1}{5}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 1.$$

$$n_9^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 9 + \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0.$$

$$n_{10}^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 10 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 0.$$

$$n_{11}^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 11 + \frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 1.$$

$$n_{12}^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 12 + \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = 0.$$

$$n_{13}^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 13 + \frac{1}{5}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 1.$$

$$n_{14}^* = -1 + \frac{1}{15}\cdot 14 + \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 2 = 1.$$

Con esta información podemos obtener m_k, ya que $m_k = 1 - n_k^*$. Así

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 1 \quad m_3 = 1 \quad m_4 = 1 \quad m_5 = 1 \quad m_6 = 1 \quad m_7 = 1$$

$$m_8 = 0 \quad m_9 = 1 \quad m_{10} = 1 \quad m_{11} = 0 \quad m_{12} = 1 \quad m_{13} = 0 \quad m_{14} = 0$$

Por lo tanto se concluye que

$$\mathcal{L}(D) \simeq 2V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_9 + V_{10} + V_{12}.$$

Lo cual coincide con la descomposición obtenida anteriormente.

- Sea $p = 7$ y $q = 3$. Así $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / y^3 = x^7 - 1\}$.

Luego el espacio $\mathcal{L}(D)$ está dado por

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{C}^*(\widetilde{\mathcal{X}}) / \operatorname{div}(F) \geq D^{-1} = [0 : 1 : 0]^{-21}\} \cup \{0\}$$

Por (5.4), se tiene que

$$\dim \mathcal{L}(D) = \frac{(7+1)(3+1)}{2} = 16$$

A continuación listamos 16 funciones que tienen un único polo en P_∞, a excepción de la función $F_1 = 1$. Además determinamos el orden del polo usando 5.1.1.

1. $F_1 = 1$.
2. $F_2 = \dfrac{\prod_{k=0}^{2}(Y - \alpha\xi_3^k Z)}{Z^3}$. (Polo de orden 21 en P_∞).
3. $F_3 = \dfrac{X}{Z}$. (Polo de orden 3 en P_∞).
4. $F_4 = \dfrac{X^2}{Z^2}$. (Polo de orden 6 en P_∞).

5. $F_5 = \dfrac{X^3}{Z^3}$. (Polo de orden 9 en P_∞).

6. $F_6 = \dfrac{X^4}{Z^4}$. (Polo de orden 12 en P_∞).

7. $F_7 = \dfrac{X^5}{Z^5}$. (Polo de orden 15 en P_∞).

8. $F_8 = \dfrac{X^6}{Z^6}$. (Polo de orden 18 en P_∞).

9. $F_9 = \dfrac{Y}{Z}$. (Polo de orden 7 en P_∞).

10. $F_{10} = \dfrac{Y^2}{Z^2}$. (Polo de orden 14 en P_∞).

11. $F_{11} = \dfrac{XY}{Z^2}$. (Polo de orden 10 en P_∞).

12. $F_{12} = \dfrac{X^2Y}{Z^3}$. (Polo de orden 13 en P_∞).

13. $F_{13} = \dfrac{X^3Y}{Z^4}$. (Polo de orden 16 en P_∞).

14. $F_{14} = \dfrac{X^4Y}{Z^5}$. (Polo de orden 19 en P_∞).

15. $F_{15} = \dfrac{XY^2}{Z^3}$. (Polo de orden 17 en P_∞).

16. $F_{16} = \dfrac{X^2Y^2}{Z^4}$. (Polo de orden 20 en P_∞).

Luego el conjunto $\mathcal{B} = \{F_t \,/\, t = 1, ..., 16\}$ es un subconjunto de $\mathcal{L}(D)$, pues todas tienen un único polo en P_∞ de orden menor o igual a 21. También $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, pues todas las funciones tienen un polo en P_∞ de distinto orden. Como la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es 16, lo cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, entonces se tiene que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Sabemos que $F_1^a = F_1$ y que $F_2^a = F_2$. Además por (5.5) se tiene también que

$$F_3^a = \xi_{21}^{18} F_3. \qquad F_4^a = \xi_{21}^{15} F_4. \qquad F_5^a = \xi_{21}^{12} F_5. \qquad F_6^a = \xi_{21}^{9} F_6.$$

$F_7^a = \xi_{21}^6 F_7.$ $F_8^a = \xi_{21}^3 F_8.$ $F_9^a = \xi_{21}^{14} F_9.$ $F_{10}^a = \xi_{21}^7 F_{10}.$

$F_{11}^a = \xi_{21}^{11} F_{11}.$ $F_{12}^a = \xi_{21}^8 F_{12}.$ $F_{13}^a = \xi_{21}^5 F_{13}.$ $F_{14}^a = \xi_{21}^2 F_{14}.$

$F_{15}^a = \xi_{21}^4 F_{14}.$ $F_{16}^a = \xi_{21}^1 F_{12}.$

Dado lo anterior, se concluye que el espacio $\mathcal{L}(D)$ se descompone como G-módulo, en factores irreducibles como

$$\mathcal{L}(D) \simeq 2V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{11} + V_{12} + V_{14} + V_{15} + V_{18}.$$

Ahora verificaremos que se obtiene lo mismo aplicando el teorema 3.2.7.

Se tiene por (5.3) que el vector generador de esta curva es $(a, a^{-3\alpha}, a^{-7\beta})$, donde $3\alpha \equiv 1 \bmod 7$ y $\beta \equiv 1 \bmod 3$. Por tanto $\alpha = 5$ y $\beta = 1$. De lo que se concluye que el vector generador es (a, a^6, a^{14}).

Si

$$\mathcal{L}(D) \simeq m_0 V_0 + m_1 V_1 + m_2 V_2 + ... + m_{20} V_{20}.$$

entonces por teorema 3.2.7 se tiene que

$$m_0 = \operatorname{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\tilde{\mathcal{X}}/G} + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$$

y que

$$m_k = \operatorname{Deg}(D_0) \dim V_k - n_k^* = 1 - n_k^*$$

para $k = 1, ..., 20$.

Calcularemos ahora los números n_k^* para $k = 1, ..., 20$. Por 1.12 y dado que $\dim V_k = 1$ y $\boldsymbol{g}_{\tilde{\mathcal{X}}/G} = 0$, se tiene que

$$n_k^* = -1 + \frac{1}{21}\sum_{\alpha=1}^{20} \alpha N_{1\alpha}^k + \frac{1}{7}\sum_{\alpha=1}^{6} \alpha N_{2\alpha}^k + \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{2} \alpha N_{3\alpha}^k$$

Por lo anterior se obtiene que:

$$n_1^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 1 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 0$$

$$n_2^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 2 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$n_3^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$n_4^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 4 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 0$$

$$n_5^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 5 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$n_6^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 6 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$n_7^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 7 + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 0$$

$$n_8^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 8 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$n_9^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 9 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$n_{10}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 10 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1$$

$$n_{11}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 11 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$n_{12}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 12 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$n_{13}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 13 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1$$

$$n_{14}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 14 + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0$$

$$n_{15}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 15 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$n_{16}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 16 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1$$

$$n_{17}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 17 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$$

$$n_{18}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 18 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$n_{19}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 19 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1$$

$$n_{20}^* = -1 + \frac{1}{21} \cdot 20 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$$

Como $m_k = 1 - n_k^*$ para $k = 1, ..., 20$, obtenemos que

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 1 \quad m_3 = 1 \quad m_4 = 1 \quad m_5 = 1 \quad m_6 = 1 \quad m_7 = 1$$

$$m_8 = 1 \quad m_9 = 1 \quad m_{10} = 0 \quad m_{11} = 1 \quad m_{12} = 1 \quad m_{13} = 0 \quad m_{14} = 1$$

$$m_{15} = 1 \quad m_{16} = 0 \quad m_{17} = 0 \quad m_{18} = 1 \quad m_{19} = 0 \quad m_{20} = 0$$

Por lo tanto se concluye que

$\mathcal{L}(D) \simeq 2V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{11} + V_{12} + V_{14} + V_{15} + V_{18}$.

Lo cual coincide con la descomposición obtenida anteriormente.

- Sea $p = 7$ y $q = 5$. Así $\mathcal{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / y^5 = x^7 - 1\}$.

Luego el espacio $\mathcal{L}(D)$ esta dado por

$$\mathcal{L}(D) = \{F \in \mathbb{C}^*(\widetilde{\mathcal{X}}) / \operatorname{div}(F) \geq D^{-1} = [0:1:0]^{-35}\} \cup \{0\}$$

Por (5.4), se tiene que

$$\dim \mathcal{L}(D) = \frac{(7+1)(5+1)}{2} = 24$$

Listamos a continuación 24 funciones que tienen un único polo en P_∞, a excepción de la función $F_1 = 1$. Además determinamos el orden del polo usando 5.1.1.

1. $F_1 = 1$.
2. $F_2 = \dfrac{\prod_{k=0}^{4} (Y - \alpha \xi_5^k Z)}{Z^5}$. (Polo de orden 35 en P_∞).
3. $F_3 = \dfrac{X}{Z}$. (Polo de orden 5 en P_∞).
4. $F_4 = \dfrac{X^2}{Z^2}$. (Polo de orden 10 en P_∞).
5. $F_5 = \dfrac{X^3}{Z^3}$. (Polo de orden 15 en P_∞).

6. $F_6 = \dfrac{X^4}{Z^4}$. (Polo de orden 20 en P_∞).

7. $F_7 = \dfrac{X^5}{Z^5}$. (Polo de orden 25 en P_∞).

8. $F_8 = \dfrac{X^6}{Z^6}$. (Polo de orden 30 en P_∞).

9. $F_9 = \dfrac{Y}{Z}$. (Polo de orden 7 en P_∞).

10. $F_{10} = \dfrac{Y^2}{Z^2}$. (Polo de orden 14 en P_∞).

11. $F_{11} = \dfrac{Y^3}{Z^3}$. (Polo de orden 21 en P_∞).

12. $F_{12} = \dfrac{Y^4}{Z^4}$. (Polo de orden 28 en P_∞).

13. $F_{13} = \dfrac{XY}{Z^2}$. (Polo de orden 12 en P_∞).

14. $F_{14} = \dfrac{X^2Y}{Z^3}$. (Polo de orden 17 en P_∞).

15. $F_{15} = \dfrac{X^3Y}{Z^4}$. (Polo de orden 22 en P_∞).

16. $F_{16} = \dfrac{X^4Y}{Z^5}$. (Polo de orden 27 en P_∞).

17. $F_{17} = \dfrac{X^5Y}{Z^6}$. (Polo de orden 32 en P_∞).

18. $F_{18} = \dfrac{XY^2}{Z^3}$. (Polo de orden 19 en P_∞).

19. $F_{19} = \dfrac{X^2Y^2}{Z^4}$. (Polo de orden 24 en P_∞).

20. $F_{20} = \dfrac{X^3Y^2}{Z^5}$. (Polo de orden 29 en P_∞).

21. $F_{21} = \dfrac{X^4Y^2}{Z^6}$. (Polo de orden 34 en P_∞).

22. $F_{22} = \dfrac{XY^3}{Z^4}$. (Polo de orden 26 en P_∞).

23. $F_{23} = \dfrac{X^2Y^3}{Z^5}$. (Polo de orden 31 en P_∞).

24. $F_{24} = \dfrac{XY^4}{Z^5}$. (Polo de orden 33 en P_∞).

Así el conjunto $\mathcal{B} = \{F_t \,/\, t = 1, ..., 24\}$ es un subconjunto de $\mathcal{L}(D)$, pues todas tienen un único polo en P_∞ de orden menor o igual a 35. Además $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, pues todas las funciones tienen un polo en P_∞ de distinto orden. Como la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es 24, lo cual coincide con la dimensión de $\mathcal{L}(D)$, entonces se tiene que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{L}(D)$.

Sabemos que $F_1^a = F_1$ y que $F_2^a = F_2$. Además por (5.5) se tiene también que

$$F_3^a = \xi_{35}^{30} F_3. \quad F_4^a = \xi_{35}^{25} F_4. \quad F_5^a = \xi_{35}^{20} F_5. \quad F_6^a = \xi_{35}^{15} F_6. \quad F_7^a = \xi_{35}^{10} F_7.$$

$$F_8^a = \xi_{35}^{5} F_8. \quad F_9^a = \xi_{35}^{28} F_9. \quad F_{10}^a = \xi_{35}^{21} F_{10}. \quad F_{11}^a = \xi_{35}^{14} F_{11}. \quad F_{12}^a = \xi_{35}^{7} F_{12}.$$

$$F_{13}^a = \xi_{35}^{23} F_{13}\ , \quad F_{14}^a = \xi_{35}^{18} F_{14}\ , \quad F_{15}^a = \xi_{35}^{13} F_{15}\ , \quad F_{16}^a = \xi_{35}^{8} F_{16}\ , \quad F_{17}^a = \xi_{37}^{3} F_{17}\ ,$$

$$F_{18}^a = \xi_{35}^{16} F_{18}\ , \quad F_{19}^a = \xi_{35}^{11} F_{19}\ , \quad F_{20}^a = \xi_{35}^{6} F_{20}\ , \quad F_{21}^a = \xi_{35}^{1} F_{21}\ , \quad F_{22}^a = \xi_{35}^{9} F_{22}\ ,$$

$$F_{23}^a = \xi_{35}^{4} F_{23}\ , \quad F_{24}^a = \xi_{35}^{2} F_{24}\ ,$$

Dado lo anterior, se concluye que el espacio $\mathcal{L}(D)$ se descompone como G-módulo, en factores irreducibles como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D) \simeq\, & 2V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{13} + \\ & V_{14} + V_{15} + V_{16} + V_{18} + V_{20} + V_{21} + V_{23} + V_{25} + V_{28} + V_{30}.\end{aligned}$$

Ahora verificaremos que se obtiene lo mismo aplicando el teorema 3.2.7.

Se tiene por (5.3) que el vector generador de esta curva es $(a, a^{-5\alpha}, a^{-7\beta})$, donde $35\alpha \equiv 1 \bmod 7$ y $2\beta \equiv 1 \bmod 5$. Por tanto $\alpha = 3$ y $\beta = 3$. De lo que se concluye que el vector generador es (a, a^{20}, a^{14}).

Si

$$\mathcal{L}(D) \simeq m_0V_0 + m_1V_1 + m_2V_2 + ... + m_{34}V_{34}.$$

entonces por teorema 3.2.7 se tiene que

$$m_0 = \mathrm{Deg}(D_0) - \boldsymbol{g}_{\tilde{\mathcal{X}}/G} + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$$

y que

$$m_k = \mathrm{Deg}(D_0)\dim V_k - n_k^* = 1 - n_k^*$$

para $k = 1, ..., 34$.

Calcularemos ahora los números n_k^* para $k = 1, ..., 34$. Por 1.12 y dado que $\dim V_k = 1$ y $\boldsymbol{g}_{\tilde{\mathcal{X}}/G} = 0$, se tiene que

$$n_k^* = -1 + \frac{1}{35}\sum_{\alpha=1}^{34} \alpha N_{1\alpha}^k + \frac{1}{7}\sum_{\alpha=1}^{6} \alpha N_{2\alpha}^k + \frac{1}{5}\sum_{\alpha=1}^{4} \alpha N_{3\alpha}^k$$

Por tanto obtenemos que:

$$n_1^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 1 + \frac{1}{7}\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot 2 = 0$$

$$n_2^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 2 + \frac{1}{7}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 4 = 0$$

$$n_3^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 3 + \frac{1}{7}\cdot 5 + \frac{1}{5}\cdot 1 = 0$$

$$n_4^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 4 + \frac{1}{7}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 3 = 0$$

$$n_5^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 5 + \frac{1}{7}\cdot 6 + \frac{1}{5}\cdot 0 = 0$$

$$n_6^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 6 + \frac{1}{7}\cdot 3 + \frac{1}{5}\cdot 2 = 0$$

$$n_7^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 7 + \frac{1}{7}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 4 = 0$$

$$n_8^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 8 + \frac{1}{7}\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot 1 = 0$$

$$n_9^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 9 + \frac{1}{7}\cdot 1 + \frac{1}{5}\cdot 3 = 0$$

$$n_{10}^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 10 + \frac{1}{7}\cdot 5 + \frac{1}{5}\cdot 0 = 0$$

$$n_{11}^* = -1 + \frac{1}{35}\cdot 11 + \frac{1}{7}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 2 = 0$$

$$n_{12}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 12 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{5} \cdot 4 = 1$$

$$n_{13}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 13 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 1 = 0$$

$$n_{14}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 14 + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 0$$

$$n_{15}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 15 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

$$n_{16}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 16 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 0$$

$$n_{17}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 17 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 4 = 1$$

$$n_{18}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 18 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 1 = 0$$

$$n_{19}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 19 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1$$

$$n_{20}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 20 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

$$n_{21}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 21 + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 0$$

$$n_{22}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 22 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 4 = 1$$

$$n_{23}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 23 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 = 0$$

$$n_{24}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 24 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1$$

$$n_{25}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 25 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

$$n_{26}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 26 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 1$$

$$n_{27}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 27 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 4 = 1$$

$$n_{28}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 28 + \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 1 = 0$$

$$n_{29}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 29 + \frac{1}{7} \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1$$

$$n_{30}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 30 + \frac{1}{7} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

$$n_{31}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 31 + \frac{1}{7} \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 2 = 1$$

$$n_{32}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 32 + \frac{1}{7} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 4 = 1$$

$$n_{33}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 33 + \frac{1}{7} \cdot 6 + \frac{1}{5} \cdot 1 = 1$$

$$n_{34}^* = -1 + \frac{1}{35} \cdot 34 + \frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1$$

Como $m_k = 1 - n_k^*$ para $k = 1, ..., 34$, entonces por lo anterior se obtiene que

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 1 \quad m_3 = 1 \quad m_4 = 1 \quad m_5 = 1 \quad m_6 = 1 \quad m_7 = 1$$

$$m_8 = 1 \quad m_9 = 1 \quad m_{10} = 1 \quad m_{11} = 1 \quad m_{12} = 0 \quad m_{13} = 1 \quad m_{14} = 1$$

$$m_{15} = 1 \quad m_{16} = 1 \quad m_{17} = 0 \quad m_{18} = 1 \quad m_{19} = 0 \quad m_{20} = 1 \quad m_{21} = 1$$

$$m_{22} = 0 \quad m_{23} = 1 \quad m_{24} = 0 \quad m_{25} = 1 \quad m_{26} = 0 \quad m_{27} = 0 \quad m_{28} = 1$$

$$m_{29} = 0 \quad m_{30} = 1 \quad m_{31} = 0 \quad m_{32} = 0 \quad m_{33} = 0 \quad m_{34} = 0$$

Por lo tanto se concluye que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D) \simeq & 2V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9 + V_{10} + V_{11} + V_{13} + \\ & V_{14} + V_{15} + V_{16} + V_{18} + V_{20} + V_{21} + V_{23} + V_{25} + V_{28} + V_{30}.\end{aligned}$$

Lo cual coincide con la descomposición obtenida anteriormente.

Para otros valores de p y q, se procede de la misma manera, no incluiremos más ejemplo, pues mientras mas grandes los valores de p y q, más grande es la dimensión del espacio $\mathcal{L}(D)$ y por tanto aumentan los calculos a desarrollar.

5.2. Algunos elementos de representaciones de grupos

En esta sección presentaremos algunos resultados conocidos de representaciones de grupos, utilizados en nuestro trabajo. Todos los grupos aquí considerados son finitos.

Lema 5.2.1 (Reciprocidad de Frobenius). *Sea H un subgrupo del grupo G, φ carácter de H y ψ carácter de G, entonces*

$$\langle \varphi, \operatorname{Res}_H^G \psi \rangle = \langle \operatorname{Ind}_H^G \varphi, \psi \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN: Ver [I], lema (5.2) pág. 62. ∎

Teorema 5.2.2 (Artin). *Sea χ un carácter racional de G. Entonces*

$$\chi = \sum_H \frac{a_H}{|N_G(H) : H|} \operatorname{Ind}_H^G 1_H,$$

donde H recorre todos los subgrupos cíclicos de G y $a_H \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN: Ver [I], teorema (5.21) pág. 72. ∎

Sea G un grupo finito y H, K subgrupos de G. Si T es un conjunto de representantes de las clases dobles, entonces

$$G = \bigcup_{t \in T} HtK$$

donde esta unión es disjunta. A continuación enunciamos el teorema de Mackey, ver [BR] pág 24.

Teorema 5.2.3 (Mackey). *Sea G un grupo finito y H, K subgrupos de G. Si φ es un carácter de H entonces $\operatorname{Res}_K^G(\operatorname{Ind}_H^G \varphi)$ se descompone como*

$$\operatorname{Res}_K^G(\operatorname{Ind}_H^G \varphi) = \sum_{t \in T} \operatorname{Ind}_{H^t \cap K}^K (\operatorname{Res}_{H^t \cap K}^{H^t} \varphi^t), \tag{5.6}$$

donde T es un conjunto de representantes de las clases dobles y $\varphi^t(h^t) = \varphi(h)$ para todo $h \in H$.

Bibliografía

[BL] Ch. Birkenhake, H. Lange. *Complex Abelian Varieties.* 2nd ed., Grundl. Math. Wiss. **302**, Springer, (2004)).

[B] N. Borne. *Une formule de Riemann-Roch equivariante pour des courbes.* Can. J. Math. **55** (2003), 693-710. MR1994069 (2004f:14022).

[BR] T. Breuer. *Characters and automorphism groups of compact Riemann surfaces.* London Mathematical Society Lecture Note Series 280. Cambridge University Press (2000).

[BRT1] S. A. Broughton. *The homology and higher representations of automorphism group of Riemann surface.* Transactions of the American mathematical Society. Volume **300** (1987). No 1, 153-158.

[BRT2] S.A. Broughton. *Classifying finite group actions on surfaces of low genus.* J. Pure and Aplied Algebra, Volume **69** (1990), 233-270.

[CR] A. Carocca, R. E. Rodríguez. *Abelian varieties with Hecke algebra action.* Preprint. (2013).

[MC] M.Carvacho. *Equivalence of group actions on Riemann surfaces.* Ph.D. thesis, Universidad de Chile, (2010).

[CW] C. Chevalley, A Weil. *Über das Verhalten der Integrale erster Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1934), 358-361.

[EL] G. Ellingsrud and K. Lönsted. *An equivariante Lefschetz formula for finite reductive groups.* Math Ann **251** (1980), 253-261. MR589254 (81k:14039).

[FK] H. Farkas, I. Kra. *Riemann Surfaces.* Graduate Text in Mathematics, **V.71**, Springer-Verlag (1980).

[I] I. M. Isaacs. *Character Theory of Finite Groups.* Dover Publications, Inc. (1994).

[JK] D. Joyner and A. Ksir. *Decomposing representations of finite groups on Riemann-Roch spaces.* Proc. AMS, **135**, (2007), 3465-3476.

[JKV] D. Joyner, A. Ksir and R. Vogeler. *Group Representations on Riemann-Roch spaces of some Hurwitz curves.* preprint (2008).

[Ka] E. Kani. *The Galois-module structure of the space of holomorphic differential of a curve.* J Reine Angew. Math. **367** (1986), 187-206. MR839131 (88f:14024).

[Ko] B. Köck. *Computing the equivariant Euler characteristic of Zariski and étale sheaves on curves.* Homology Homotopy Appl. **7** No. 3. (2005), 83-98. MR2205171 (2006k:14025).

[M] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* Graduate Studies in, **V.5**, American Mathematical Society (1995).

[Na] R. Naeff. *The Chevalley-Weil formula: On the Galois Module Structure of the Space of Regular Differentials of a Curve in Case it is Semi-Simple.* Master's Thesis under supervision of dr. B.J.J. Moonen. University of Amsterdam, Faculty of Science (2005).

[N] S. Nakajima. *Galois module structure of cohomology groups for tamely ramified coverings of algebraic varieties.* J. Number Theory **22**(1986), 115-123. MR821138 (87i:14010)

[GKR] R. E. Rodríguez, J. P. Gilman, I. Kra. *Complex Analysis.* Graduate Text in Mathematics, **V.245**, Second Ed, Springer (2013).

[R] A. Rojas. *Group actions on Jacobian varieties.* Revista Matemática Iberoamericana. Vol. **23** No.2 (2007), 397-420.

[S] M. Suzuki. *Group Theory I.* Springer-Verlag (1982).