Sobre el Método del Parámetro Pequeño en Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos y Soluciones Remotamente Casi Periódicas

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Christopher Humberto Maulén Marchant

Noviembre, 2014

Director de Tesis: **Dr. Manuel Pinto**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Christopher Humberto Maulén Marchant

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 3 de Noviembre de 2014.

Director de Tesis

Dr. Manuel Pinto ______________________

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Verónica Poblete (Presidente) ______________________

Dr. Gonzalo Robledo ______________________

A mis padres, Genesis, Claudia...
Mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todos aquellos que participaron de manera directa o indirecta para que esta tesis llegara a buen término.

Agradezco al Dr. Manuel Pinto por haber aceptado ser mi tutor, por la paciencia y el apoyo durante el desarrollo de esta tesis. Al Dr. Gonzalo Robledo por su total apoyo, consejos y ánimo durante gran parte de mi carrera en el departamento. Al Dr. Sergio Muñoz por sus sabios consejos.

Agradezco a mis amigos: Diego L., Diego J., Francisco, Arnaldo, Ricardo, Boris, Marco, entre otros, por los gratos y divertidos momentos que pasamos estos años.

Agradezco también a Claudia que siempre ha estado presente en mí vida, que me dio ánimos para continuar con este proyecto, que ha confiado en mi y que ha podido sacar lo mejor de mí.

Finalmente quiero dar las gracias a mi familia por confiar en mí. A mis queridos padres que me acompañaron y animaron durante todo este tiempo y ssu permanente entrega. A mi hermana Genesis que siempre con su sonrisa ha podido animarme y traspasarme su alegría.

Gracias a todos.

Mi permanencia en el plan de magíster fue posible gracias a la Beca CONICYT-PCHA/Magíster Nacional/2013-221320155, además este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT, proyecto No. 1120709.

Índice

RESUMEN

Las funciones remotamente casi periódicas han sido poco estudiadas en la literatura. Por esto nuestro objetivo es estudiar las funciones remotamente casi periódicas, introducidas por D. Sarason en 1984. Veremos algunas propiedades y sus aplicaciones en ecuaciones diferenciales ordinarias y con argumento constante a trozos.
Este trabajo consta con la siguiente distribución:
En el Capítulo 1, se define el conjunto de funciones remotamente casi periódicas y se demuestran algunas propiedades básicas. Además se realiza una comparación entre las funciones casi periódicas y remotamente casi periódicas, se estudia la estructura del espacio, el operador de convolución, se extienden resultados conocidos en la teoría de funciones casi periódicas. Se introducen los conceptos de dicotomía exponencial y bi-propiedad, estableciendo algunos casos donde es obtenida, por último se define el conjunto de funciones $\mathbb{Z}$-remotamente casi periódicas.

En el Capítulo 2, se estudian sistemas lineales con dicotomías exponencial y coeficientes remotamente casi periódicos y pequeñas perturbaciones, obteniendo condiciones suficientes para la existencia de soluciones remotamente casi periódicas y se analiza lo que ocurre cuando la perturbación converge a cero. Se enfatiza la importancia de la propiedad Bi-remotamente casi periodicidad integrable, además se presentan algunos ejemplos.

En el Capítulo 3, se estudian sistemas cuasilineales en la familia de ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos y con pequeñas perturbaciones, y bajo condiciones suficientes se establece la existencia de soluciones remotamente casi periódicas. Para ello se analiza la ecuación lineal en diferencias con dicotomía exponencial y coeficientes remotamente casi periódicos, además del sistema lineal con pequeñas perturbaciones.

Concluimos con el Capítulo 4, donde se consideran los modelos Brusselator, Richard-Chapman, Lasota-Wazewska y el metódo de averaging, para aplicar los resultados obtenidos con parámetros y/o perturbaciones remotamente casi periódicas.

ABSTRACT

Remotely almost periodic functions (RAP in short) have barely been studied. Thus, our objective is to study these type of functions that were introduced by D. Sarason in 1984. We are going to study certain properties of them and their applications to ordinary differential equations and with piecewise constant argument .

This work has the following distribution:

In chapter 1, the set of Remotely almost periodic functions is defined and certain elementary properties of this set are proved. Besides, a comparison between almost periodic functions and remotely almost periodic function is carried out. Moreover, we study the convolution operator and we obtain some new results in almost periodic functions theory. The concept of exponential dichotomy and Biproperty are introduced. We obtain those properties in some cases. Finally, the set of $\mathbb{Z}$-Remotely almost periodic functions is defined.

In chapter 2, Linear systems with exponential dichotomy, remotely almost periodic coefficients and small perturbations are studied, obtaining sufficient conditions for existence of solutions of remotely almost periodic equations and the case when the small perturbation tends to zero is analyzed. Also, the importance of the integrable bi-remotely property is emphasized. Some examples are given.

In chapter 3, the family of Quasilinear systems with piecewise constant argument and small perturbations are studied. The existence of remotely almost periodic solutions for these systems is established under sufficient conditions. For this purpose, the difference linear equation defined with exponential property, remotely almost periodic coefficients and small perturbations and the linear system with small pertubations are analized.

Finally, in chapter 4, the Brusselator, Richard-Chapman, Lasota-Wazewska models and the averaging method are considered to apply the previously obtained results with small parameters and/or remotely almost periodic perturbations cases.

Capítulo 1

Introducción

En 1984, D. Sarason [30] introduce una generalización de las funciones casi periódicas, esto es, la noción de función remotamente casi periódica y analiza la estructura de este espacio de funciones. Este espacio nos permite estudiar funciones casi periódicas perturbadas, lo cual no es posible realizar con otros espacios, ya sea el de funciones asintóticamente casi periódicas, entre otros. Algunos trabajos donde se observa la generalidad de este espacio de funciones son [30, 45, 46, 50, 51].
En este capítulo, demostramos algunas propiedades de las funciones remotamente casi periódicas y generalizamos resultados conocidos en la teoría de funciones casi periódicas.

1.1. Definición y Propiedades de las Funciones Remotamente Casi-Periódicas.

1.1.1. Funciones Remotamente Casi Periódicas

En lo que sigue, $\mathcal{BUC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ denota el conjunto de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}$ que toman valores en $\mathbb{R}$ y los lleva a $\mathbb{R}^n$, y $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ son el conjunto de todas las funciones continuas en $\mathbb{R}$, que toman valores en $\mathbb{R}$ y los lleva a $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.1. Un conjunto A se dice **relativamente denso** en $\mathbb{R}$, si existe $L > 0$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene $A \cap [a, a + L] \neq \emptyset$.

Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un un conjunto relativamente denso en $\mathbb{R}$ y basta usar $L \geq 1$.

Definición 1.1.2. Una función $f \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ se dice **remotamente casi periódica** si el conjunto

$$T(f, \epsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} \,\middle|\, \limsup_{|t| \to \infty} \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon \right\}$$

es relativamente denso en $\mathbb{R}$.
El número $\tau \in T(f, \epsilon)$ se conoce como remoto ϵ- número de traslación de f.
Denotamos por $RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el conjunto de estas funciones.

Las siguientes definiciones nos permitirán entender la estructura del conjunto $RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Definición 1.1.3. Una función $f \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ se dice **lentamente oscilante** si para cada $\tau \in \mathbb{R}$

$$\lim_{|t| \to \infty} \|f(t + \tau) - f(t)\| = 0.$$

Denotamos por $\mathcal{SO}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el conjunto de todas estas funciones.

Definición 1.1.4 ([10]). Una función $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ se dice **Bohr casi periódica** si el conjunto

$$T_1(f, \epsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon \right\}$$

es relativamente denso en $\mathbb{R}$.
El número $\tau \in T_1(f, \epsilon)$ es llamado el ϵ-número de traslación de f.
Denotamos por $AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el conjunto de estas funciones.

Las funciones lentamente oscilantes han sido estudiadas en diversos trabajos [18, 42] y en diversas áreas. Para ver lo natural que son las funciones lentamente oscilantes tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.1.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Si f' es integrable sobre $\mathbb{R}$ entonces $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces como $f' \in L^1(\mathbb{R})$ existe $N > 0$ tal que

$$\left| \int_{[-N,N]^c} f' \right| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |f(t+a)-f(t)| &= \left| \int_0^{t+a} f'(s)\,ds + f(0) - \int_0^t f'(s)\,ds - f(0) \right| \\ &= \left| \int_t^{t+a} f'(s)\,ds \right|. \end{aligned}$$

Por (1.1), para $|t| > N$ con $(t, t+a) \subset [-N, N]^c$ se tiene

$$|f(t+a) - f(t)| < \epsilon \qquad \text{con } t+a, t \in [-N, N]^c.$$

Luego $\lim\limits_{|t|\to\infty} |f(t+a) - f(t)| = 0$ y así $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R})$. □

Observaciones.
1. Si $f \in \mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ entonces

$$T_1(f, \epsilon) = \{a \in \mathbb{R} \mid \|f(\cdot + a) - f(\cdot)\|_\infty < \epsilon\}$$

es relativamente denso en $\mathbb{R}$. Como $T_1(f, \epsilon) \subset T(f, \epsilon)$ concluimos $f \in \mathrm{RAP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, es decir, $\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset \mathrm{RAP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Las funciones asintóticamente casi periódicas, $AAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ver [5,16]), son la suma de una función casi periódica y una convergente a cero cuando $|t| \to \infty$. Es fácil ver que $AAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sin embargo afirmamos que $RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \not\subseteq AAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En efecto, sean $h, g \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con $h \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $\lim_{|t|\to\infty} g(t) = \beta \neq 0$. Entonces $\lim_{|t|\to\infty}[g(t) - g(t+\tau)] = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$ y si $\varphi(t) := h(t) + g(t)$, luego para $\tau \in T(h, \epsilon)$ obtenemos

$$|\varphi(t) - \varphi(t+\tau)| < \epsilon + |g(t) - g(t+\tau)|$$

es decir,

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\varphi(t) - \varphi(t+\tau)| < \epsilon.$$

Luego $\varphi \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pero $\varphi \notin AAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. El espacio $\mathrm{AP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ es solamente una pequeña parte de $\mathrm{RAP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Por simplicidad, consideremos el caso $n = 1$ y valores complejos.
En tal caso $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es generado por $\{e^{i\lambda t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Sea $SLP_{0<\alpha<1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (el espacio llamado Strong Limit Power [47–49]) la C^*-subalgebra de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ generada por

$\{e^{i\lambda t^\alpha} \,|\lambda \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha < 1\}$.
Al comparar los conjuntos que generan a $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ y $SLP_{0<\alpha<1}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ podemos ver que es lo mismo que comparar un punto con el intervalo $(0,1)$.

El siguiente lema permitirá relacionar esta comparación con el conjunto $RAP(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Lema 1.1.6. *Sea* $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces* $e^{i\lambda t^\alpha} \in \mathcal{SO}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Demostración. Sea $\tau \in \mathbb{R}$. Es suficiente probar

$$\lim_{|t|\to\infty} (t+\tau)^\alpha - t^\alpha = 0.$$

Notar que

$$\lim_{|t|\to\infty} (t+\tau)^\alpha - t^\alpha = \lim_{|t|\to\infty} \frac{(1+\frac{\tau}{t})^\alpha - 1}{1/t^\alpha},$$

y por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{(1+\frac{\tau}{t})^\alpha - 1}{1/t^\alpha} = \lim_{|t|\to\infty} \tau \frac{1}{t^{1-\alpha}} \left(1+\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} = 0.$$

Luego

$$\lim_{|t|\to\infty} |e^{i\lambda(t+\tau)^\alpha} - e^{i\lambda t^\alpha}| = 0, \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

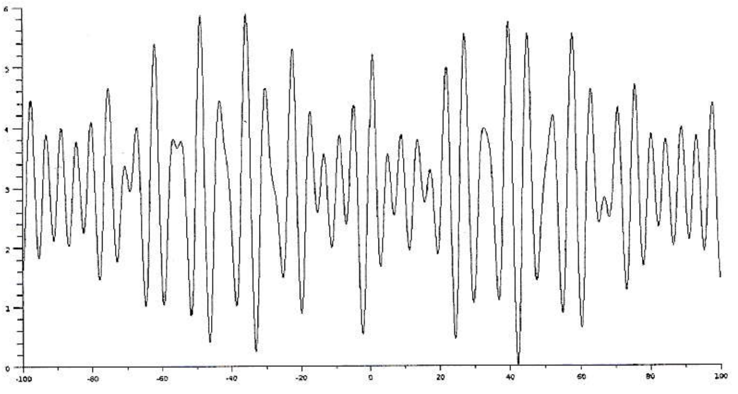
□

Del lema anterior concluimos que $SLP_{0<\alpha<1}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathcal{SO}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Cabe destacar que $AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{SO}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ es exactamente el conjunto de todas las funciones constantes.

Un ejemplo de una función $f \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es la función definida por

$$f(t) = \cos(t) + \cos\left(\sqrt{2}t\right) + \sin(t+\sqrt{|t|}) + \frac{3t^2}{t^2+1}. \tag{1.2}$$

cuya gráfica es



La siguiente definición será necesaria en los capítulos posteriores.

Definición 1.1.7. Una función $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ se dice remotamente casi periódica en t uniformemente en $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$, si para todo subconjunto compacto $W \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$, el conjunto

$$T(g, \epsilon, W) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{|t| \to \infty} |g(t+\tau, x, y) - g(t, x, y)| < \epsilon, \; \forall \, (x, y) \in W \right\} \tag{1.3}$$

es relativamente denso en $\mathbb{R}$ para todo $\epsilon > 0$.
El número τ se conoce como el ϵ-remotamente periodo de g.

El siguiente resultado puede verse en D. Sarason [30], en el cual obtiene una caracterización para las funciones remotamente casi periódicas.

Teorema 1.1.8. *EL conjunto $RAP(\mathbb{R})$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{BUC}(\mathbb{R})$ generada por $AP(\mathbb{R})$ y $\mathcal{SO}(\mathbb{R})$.*

Observación 1.1.9. *Dado $\epsilon > 0$, el teorema anterior asegura que si $f \in RAP(\mathbb{R})$ existen g_1, $g_2 \in AP(\mathbb{R})$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{SO}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\|f - [g_1 + \varphi_1 + g_2\varphi_2]\|_\infty < \epsilon.$$

Observación 1.1.10. *Dados $f \in RAP(\mathbb{R})$ y $\epsilon' > 0$, el teorema anterior afirma que existen g_1, $g_2 \in AP(\mathbb{R})$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{SO}(\mathbb{R})$ tal que $\psi(t) = g_1(t) + \varphi_1(t) + g_2(t)\varphi_2(t)$ es un aproximante de f. Sean*

$$f_\tau(t) = f(t+\tau) \quad y \quad \Delta_\tau f(t) = f_\tau(t) - f(t), \tag{1.4}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|\Delta_\tau f(t)\| &\leq \|f_\tau(t)-\psi_\tau(t)\|+\|f(t)-\psi(t)\|+\|\Delta_\tau\psi(t)\|\\ &\leq 2\epsilon'+\|\Delta_\tau g_1(t)\|+\|\Delta_\tau\varphi_1(t)\|+\|g_2\|_\infty\|\Delta_\tau\varphi_2(t)\|+\|\varphi_2(t)\|_\infty\|\Delta_\tau g_2(t)\|,\end{aligned}$$

y si consideramos $\tau\in T(g_1,\epsilon)\cap T(g_2,\epsilon)$ *se tiene*

$$\|\Delta_\tau f(t)\| \leq 2\epsilon'+(1+\|\varphi_2\|_\infty)\epsilon+\|\Delta_\tau\varphi_1(t)\|+\|g_2\|_\infty\|\Delta_\tau\varphi_2(t)\|. \quad (1.5)$$

Hemos acotado la diferencia de una función remotamente casi periódica con una constante tan pequeña como queramos y una función que converge a cero cuando $|t|\to\infty$, en lo que sigue veremos como aprovechar esta propiedad para extender algunos resultados conocidos en la teoría de funciones casi periódicas.

Proposición 1.1.11. *Sea* $f_i\in RAP\,(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$, $i=1,\cdots,n$. *Entonces para cada* $\epsilon>0$ *el conjunto*

$$T\,(f_1,f_2,\cdots,f_n,\epsilon)=\left\{\tau\in\mathbb{R}\,\middle|\,\limsup_{|t|\to\infty}\|f_i(t+\tau)-f_i(t)\|<\epsilon,\ i=1,\cdots,n\right\}$$

es relativamente denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Aplicando el Teorema 1.1.8 para $f_i\in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$, dado $\epsilon>0$ existen $g_{i1},g_{i2}\in AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ y $\varphi_{i1},\varphi_{i2}\in\mathcal{SO}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$. Luego si $\tau\in T(g_{i1},\epsilon')\cap T(g_{i2},\epsilon')$ con $\epsilon_i'=\epsilon/(1+\|\varphi_{i2}\|_\infty)$, por la observación 1.1.10 tenemos

$$\begin{aligned}\|f_i(t+\tau)-f_i(t)\| &\leq 2\epsilon+(1+\|\varphi_{i2}\|_\infty)\epsilon'\\ &\quad+\|\varphi_{i1}(t+\tau)-\varphi_{i1}(t)\|+\|g_{i2}\|_\infty\|\varphi_{i2}(t+\tau)-\varphi_{i2}(t)\|.\\ &= 3\epsilon+\|\varphi_{i1}(t+\tau)-\varphi_{i1}(t)\|+\|g_{i2}\|_\infty\|\varphi_{i2}(t+\tau)-\varphi_{i2}\|\end{aligned}$$

cualquier ϵ_i'-número de traslación τ de g_{i1} y g_{i2} es un 3ϵ-remoto número de traslación de f_i.
Sea $\epsilon_*=\text{mín}\{\epsilon_i'|1\leq i\leq n\}$. Ya que el conjunto de ϵ_*-número de traslación comunes de $g_{ij}:i=1,2,...,n,\ j=1,2$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$ [[10], Teorema 1.1.19], entonces el conjunto de 3ϵ- número de traslación remotos comunes para $f_i:i=1,2,...,n$ también lo es. La demostración está completa. $\square$

Ahora veremos que el conjunto de las funciones remotamente casi periódicas posee estructura de espacio vectorial.

Teorema 1.1.12. *Sea $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Entonces*

1. *Si $g \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, entonces $f + g \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.*
3. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $f \circ \varphi \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Para demostrar 1 y 2 consideremos $f, g \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$\|\Delta_\tau (\lambda f(t) + \mu g(t))\| \leq |\lambda| \|\Delta_\tau f(t)\| + |\mu| \|\Delta_\tau g(t)\|.$$

Luego

$$\begin{aligned} \limsup_{|t|\to\infty} \|\Delta_\tau (\lambda f(t) + \mu g(t))\| &\leq \limsup_{|t|\to\infty} (|\lambda| \|\Delta_\tau f(t)\| + |\mu| \|\Delta_\tau g(t)\|) \\ &\leq |\lambda| \limsup_{|t|\to\infty} \|\Delta_\tau f(t)\| \\ &\quad + |\mu| \limsup_{|t|\to\infty} \|\Delta_\tau g(t)\| \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $\epsilon_0 = \min\left\{\frac{\epsilon}{2|\mu|}, \frac{\epsilon}{2|\lambda|}\right\}$. Entonces

$$T_1(f, g, \epsilon_0) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{ll} \limsup_{|t|\to\infty} \|f(t+\tau) - f(t)\| & < \epsilon_0 \\ \limsup_{|t|\to\infty} \|g(t+\tau) - g(t)\| & < \epsilon_0 \end{array} \right\}.$$

Por la Proposición 1.1.11 sabemos que este conjunto es relativamente denso en $\mathbb{R}$. Luego si $\tau \in T_1(f, g, \epsilon_0)$, tenemos que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|\Delta_\tau (\lambda f(t) + \mu g(t))\| < \epsilon.$$

Así $\lambda f(\cdot) + \mu g(\cdot) \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.

Para probar 3, consideremos $a \neq 0$. Notemos que

$$\|\Delta_{\tau'} f(at + b)\| = \|f(at + a\tau' + b) - f(at + b)\| = \|f(at + b + a\tau') - f(at + b)\|.$$

Haciendo el cambio de variable $t' = at + b$ vemos que

$$\|\Delta_{\tau'} f(at + b)\| = \|f(t' + a\tau') - f(t')\|.$$

Además, como $f \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ existe $\tau \in T(f,\epsilon)$ tal que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \epsilon.$$

Considerando $\tau' = \frac{\tau}{a}$ se obtiene

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|\Delta_{\tau'} f(at+b)\| = \limsup_{|t'|\to\infty} \|f(t'+\tau) - f(t')\| < \epsilon.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Corolario 1.1.13. *El conjunto $RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{BUC}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$.*

Proposición 1.1.14. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ tal que $f_n \rightrightarrows f$, entonces $f \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que

$$\|f_m(t) - f(t)\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{si } m > n_0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\|\Delta_\tau f(t)\| \leq \|f(t+\tau) - f_m(t+\tau)\| + \|f_m(t+\tau) - f_m(t)\| + \|f_m(t) - f(t)\|,$$

entonces si $m > n_0$ se tiene

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \frac{2}{3}\epsilon + \|f_m(t+\tau) - f_m(t)\|.$$

Luego si $\tau \in T\left(f_m, \frac{\epsilon}{3}\right)$ obtenemos

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $f \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$. $\square$

Del Corolario 1.1.13 y la Proposición 1.1.14 se obtiene lo siguiente:

Corolario 1.1.15. *$\left(RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty\right)$ es un espacio de Banach.*

Este Corolario tiene un papel fundamental, ya que permitirá aplicar el Teorema del punto fijo de Banach en los resultados que se expondrán en los capítulos 2 y 3.

Un punto importante y necesario en nuestro estudio es saber cuándo la integral de una función remotamente casi periódica es remotamente casi periódica, que es una pregunta crucial al momento de estudiar la existencia de soluciones remotamente casi periódicas en ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, si tenemos la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t),$$

donde $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, su solución está dada por

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u)du,$$

por lo que la solución es remotamente casi periódica cuando $\int_0^t f(u)du$ es remotamente casi periódica.

El siguiente resultado es similar al conocido para funciones casi periódicas.

Proposición 1.1.16. *Sea* $f \in RAP(\mathbb{R})$ *y* $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ *la primitiva de* $f(t)$. *Entonces* $F \in RAP(\mathbb{R})$ *si y sólo si* $F(t)$ *es acotada en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Como F es remotamente casi periódica, F es necesariamente acotada. Para la otra implicancia, sea $F(t)$ acotada, sin pérdida de generalidad asumamos que $F(t)$ es una función a valores reales.
Como f es remotamente casi periódica, para $\tau \in T(f, \epsilon)$ tenemos

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon_1;$$

ó equivalentemente, existe $t_0 > 0$ lo suficientemente grande, tal que si $|t| > t_0$, se tiene

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon_1.$$

Tenemos

$$G = \sup_{|t|>t_0} F(t) > \inf_{|t|>t_0} F(t) = g;$$

sean t_1 y t_2 fijos, $|t_1| > t_0$, $|t_2| > t_0$, y asumamos que $t_1 < t_2$, satisfaciendo

$$F(t_1) < g + \frac{\epsilon}{6}, \quad F(t_2) > G - \frac{\epsilon}{6}.$$

Dado que $T(f, \epsilon_1)$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$ todo intervalo I de largo $l = l(\epsilon_1)$ satisface que $I \cap T(f, \epsilon_1) \neq \emptyset$, donde $\epsilon_1 = \epsilon/6d$, $d = |t_1 - t_2|$.
Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tomemos $\tau \in T(f, \epsilon_1) \cap [\alpha - t_1, \alpha - t_1 + l]$.
Ahora, tomemos $s_i = t_i + \tau$ $(i = 1, 2)$, $L = l + d$. Entonces si s_1, $s_2 \in [\alpha, \alpha + L]$, y

$$\begin{aligned} F(s_2) - F(s_1) &= F(t_2) - F(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt + \int_{t_1+\tau}^{t_2+\tau} f(t)\, dt \\ &= F(t_2) - F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} [f(t+\tau) - f(t)]\, dt \\ &> G - g - \frac{\epsilon}{3} - \epsilon_1 d = G - g - \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

se tiene,

$$(F(s_1) - g) + (G - F(s_2)) < \frac{\epsilon}{2}$$

las expresiones en paréntesis de la desigualdad anterior son no negativas, así hay dos números s_1 y s_2 en cualquier intervalo de longitud L satisfaciendo simultáneamente

$$F(s_1) < g + \frac{\epsilon}{2}, \quad F(s_2) > G - \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, tomemos $\epsilon_2 = \epsilon/2L$, y hemos probado que cuando $\tau \in T(f, \epsilon_2)$, $\tau \in T(F, \epsilon)$.
En efecto, para cada $t \in \mathbb{R}$, podemos escoger s_1 y s_2 en el intervalo $[t, t + L]$ satisfaciendo $F(s_1) < g + (\epsilon/2)$ y $F(s_2) > G - (\epsilon/2)$. Por lo que, para $\tau \in T(f, \epsilon_2)$, se tiene, respectivamente,

$$\begin{aligned} \limsup_{|t|\to\infty} (F(t+\tau) - F(t)) &= \limsup_{|t|\to\infty} \left[\Delta_\tau F(s_1) + \int_t^{s_1} f(t)\, dt - \int_{t+\tau}^{s_1+\tau} f(t)\, dt\right] \\ &> g - \left(g + \frac{\epsilon}{2}\right) - \epsilon_2 L = -\epsilon \\ \limsup_{|t|\to\infty} (F(t+\tau) - F(t)) &= \limsup_{|t|\to\infty} \left[\Delta_\tau F(s_2) + \int_t^{s_2} f(t)\, dt - \int_{t+\tau}^{s_2+\tau} f(t)\, dt\right] \\ &< G - \left(G - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon_2 L = \epsilon \end{aligned}$$

Entonces para $\tau \in T(f, \epsilon_2)$, tenemos $\tau \in T(F, \epsilon)$; por lo que $F(t)$ es remotamente casi periódica. $\square$

Cabe destacar, lo primordial que es la existencia del promedio de una función al momento de estudiar ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, por su íntima relación con la existencia de la dicotomía exponencial (sección 1.2) del sistema.

El siguiente resultado nos permitirá asegurar la existencia del promedio para las funciones remotamente casi periódicas.

Proposición 1.1.17. *Sea f remotamente casi periódica. Entonces* $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt$ *converge cuando $T \to +\infty$ uniformemente con respecto a $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir,*

$$\mathcal{M}(f) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt.$$

no depende de α, y éste es llamado el promedio de f

Demostración. Como $f(t) \in \mathrm{RAP}(\mathbb{R})$, entonces $f(t)$ es acotada.
Para todo $\epsilon > 0$, para todo $\tau \in T(f,\epsilon)$, existe $s_0 > 0$, tal que cuando $|t| > s_0$,

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \epsilon.$$

Dado que $T(f,\epsilon)$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$ todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de largo $l = l(\epsilon)$ cumple que $I \cap T(f,\epsilon_1) \neq \emptyset$. Sea $G = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
Tomemos $\tau \in T(f,\epsilon/4) \cap [a, a+l]$; entonces para cualquier a, $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^{a+s} f(t)\,dt - \int_0^s f(t)\,dt\right| &= \left|\left(\int_\tau^{\tau+s} - \int_0^s + \int_{\tau+s}^{a+s} + \int_a^\tau\right) f(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_0^s |\Delta_\tau f(t)|\,dt + \int_{\tau+s}^{a+s} |f(t)|\,dt + \int_0^\tau |f(t)|\,dt \\
&= \int_0^{s_0} |f(t+\tau) - f(t)|\,dt + \int_{s_0}^{s} |f(t+\tau) - f(t)|\,dt \\
&\quad + \int_{\tau+s}^{a+s} |f(t)|\,dt + \int_0^\tau |f(t)|\,dt \\
&\leq \sup_{t\in[s_0,s]} |f(t+\tau) - f(t)| \cdot (s - s_0) + 2G(l + s_0) \\
&< \frac{\epsilon}{4}(s - s_0) + 2G(l + s_0),
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,dt\right| &\leq \frac{\epsilon}{4T}(T-s_0) + \frac{2G(l+s_0)}{T}, && (1.6)\\
\left|\frac{1}{nT}\int_{0}^{nT} f(t)\,dt - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,dt\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T}\left[\int_{(k-1)T}^{kT} f(t)\,dt - \int_{0}^{T} f(t)\,dt\right]\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{4T}(T-s_0) + \frac{2G(l+s_0)}{T}. && (1.7)
\end{aligned}$$

Luego, si consideramos $T \to +\infty$ en (1.7)

$$\left|\mathcal{M}(f) - \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,dt\right| \leq \frac{\epsilon}{4T}(T-s_0) + \frac{2G(l+s_0)}{T}. \tag{1.8}$$

Usando la desigualdad triangular para (1.6) y (1.8), deducimos

$$\left|\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,dt - \mathcal{M}(f)\right| \leq \frac{\epsilon}{2T}(T-s_0) + \frac{2G(l+s_0)}{T} < \epsilon,$$

solo si $T > (8G(l+s_0)/\epsilon) - s_0$. Esto es, cuando $T \to \infty$, $\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt$ converge a $\mathcal{M}(f)$ uniformemente con respecto a $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, notemos que son iguales las ecuaciones

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t+\alpha)\,dt.$$

Esto prueba que el límite no depende de α. $\square$

Para $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{BUC}(\mathbb{R})$ definamos el operador de convolución como

$$\mathcal{L}(\varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-s)\varphi(s)ds \tag{1.9}$$

El siguiente lema nos será útil en lo que sigue

Lema 1.1.18. *Sean $\varphi \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon)$ tal que si $\tau \in T(\varphi,\epsilon')$ se tiene*

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\varphi(t-u+\tau) - \varphi(t-u)|du < \epsilon.$$

Demostración. Sean $M = \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|du$ y $\epsilon > 0$. Ya que $\varphi \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ existen $f_1, f_2 \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $h_1, h_2 \in SO(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que

$$\|\varphi - (f_1 + h_1 + f_2 h_2)\|_\infty < \frac{\epsilon}{4M}.$$

Luego si $\tau \in T(f_1, \epsilon') \cap T(f_2, \epsilon')$ con $\epsilon' = \text{mín}\{\frac{\epsilon}{4}\ , \frac{\epsilon}{4\|h_2\|_\infty}\ , \frac{\epsilon}{4M}\}$ y recordamos que $\Delta_\tau \psi(t) = \psi(t+\tau) - \psi(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\varphi(t-u+\tau) - \varphi(t-u)|du \ &\leq \ \epsilon + \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_1(t-u)|du \\ &\quad + \|f_2\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_2(t-u)|du.\end{aligned}$$

Para que exista $\text{lím}_{t\to\infty} |\Delta_\tau f(t)|$ es suficiente que $\text{lím}_{n\to\infty} |\Delta_\tau f(x_n)|$ exista para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. En tal caso

$$\lim_{t\to\infty} |\Delta_\tau f(t)| = \lim_{n\to\infty} |\Delta_\tau f(x_n)|.$$

Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_i(t-u)|du \leq 2\|h_i\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|du = 2\|h_i\|_\infty M, \ \ i = 1, 2,$$

concluimos que la función $2|g(u)|\|h_i\|_\infty$ es integrable en $\mathbb{R}$. Sea cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, tal que $x_n \to \pm\infty$ cuando $n \to \pm\infty$. Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}\lim_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_i(t-u)|du \ &= \ \lim_{|n|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_i(x_n-u)|du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \lim_{|n|\to\infty} |\Delta_\tau h_i(x_n-u)|du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| \lim_{|t|\to\infty} |\Delta_\tau h_i(t-u)|du \\ &= \ 0.\end{aligned}$$

Luego

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_i(t-u)|du \ = \ \lim_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\Delta_\tau h_i(t-u)|du = 0.$$

Finalmente

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\varphi(t-u+\tau)-\varphi(t-u)|du < \epsilon.$$

Esto concluye la demostración. □

Proposición 1.1.19. *Sean $\varphi \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, entonces el operador* (1.9) *es tal que*

$$\mathcal{L} : RAP(\mathbb{R}) \to RAP(\mathbb{R}).$$

Demostración. Claramente

$$|(\varphi * g)(t+\tau) - (\varphi * g)(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\varphi(t-u+\tau)-\varphi(t-u)|du.$$

Ahora, por el Lema 1.1.18, dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon)$ tal que si $\tau \in T(\varphi, \epsilon')$ se tiene

$$\limsup_{|t|\to\infty} |(\varphi * g)(t+\tau) - (\varphi * g)(t)| \quad < \quad \epsilon$$

Lo anterior concluye la demostración. □

Corolario 1.1.20. *Sea α constante positiva y $f(t) \in RAP(\mathbb{R})$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} f(s)ds \qquad y \qquad \int_{t}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)} f(s)ds$$

son remotamente casi periódicas.

1.1.2. Sucesiones Remotamente Casi Periódicas

Análogamente a las funciones remotamente casi periódicas haremos un breve análisis de las sucesiones remotamente casi periódicas.

Definición 1.1.21. Una sucesión acotada $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ se dice remotamente casi periódica si el conjunto

$$T(x,\epsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \limsup_{|n|\to\infty} \|x(n+\tau) - x(n)\| < \epsilon \right\}$$

es relativamente denso en $\mathbb{Z}$.
El número $\tau \in T(x,\epsilon)$ es llamado el remoto ϵ-número de traslación.
Denotaremos al conjunto de todas estas funciones por $RAP(\mathbb{Z},\mathbb{R}^m)$.

Definición 1.1.22. Una sucesión acotada $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ se dice casi periódica si el conjunto

$$T(x, \epsilon) = \{\tau \in \mathbb{Z} \,|\, \|x(n+\tau) - x(n)\| < \epsilon, \ n \in \mathbb{Z}\}$$

es relativamente denso en $\mathbb{Z}$.
El número $\tau \in T(x, \epsilon)$ es llamado el ϵ-casi periodo.
Denotaremos por $AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ el conjunto de estas funciones.

Definición 1.1.23. Una sucesión acotada $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ se dice lentamente oscilante si para cada $a \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\lim_{|n| \to \infty} \|x(n+a) - x(n)\| = 0.$$

Denotaremos por $SO(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ al conjunto de estas funciones.

Un ejemplo de una sucesión $x \in RAP(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ es

$$x(n) = \cos(n) + \cos\left(\sqrt{2}n\right) + \sin(n + \sqrt{|n|}) + \frac{3n^2}{n^2+1}, \tag{1.10}$$

notemos que es la discretización de la función (1.2). Tenemos el siguiente teorema, para relacionar una sucesión remotamente casi periódica y una función remotamente casi periódica.

Teorema 1.1.24. *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión acotada $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sea remotamente casi periódica es la existencia de $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ tal que $f(n) = u_n$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. La suficiencia. Supongamos que existe $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Por el Teorema 1.1.8, dado $\epsilon > 0$, existen $g_1, g_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in SO(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\|f - [g_1 + \varphi_1 + g_2\varphi_2]\|_\infty < \epsilon/4.$$

Por el Teorema 1.7.3 en [44], $g_1(n), g_2(n) \in AP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$.
Sea $\epsilon' = \min\{\epsilon/4, \epsilon/(4\|\varphi_2\|_\infty)\}$ y sea τ un ϵ'-número de traslación de $g_1(n)$ y $g_2(n)$. Mostraremos que si τ es un $\epsilon'/2$-remoto número de traslación de $g_1(n) + \varphi_1(n) + g_2(n)\varphi_2(n)$ entonces, es un remoto ϵ-número de traslación de $f(n) = u_n$. Ya que

$$\|\Delta_\tau f(n)\| \;\le\; \epsilon/2 + (1 + \|\varphi_2\|_\infty)\epsilon' + \|\Delta_\tau \varphi_1(n)\| + \|g_2\|_\infty \|\Delta_\tau \varphi_2(n)\|.$$

Así

$$\limsup_{|n| \to \infty} \|f(n+\tau) - f(n)\| < \epsilon.$$

Esto muestra que $T(f(n),\epsilon)$ es relativamente denso en $\mathbb{Z}$ y $f(n)$ es remotamente casi periódica.
Ahora para el recíproco, asumamos que u_n es una sucesión remotamente casi periódica. Definamos la función f en $\mathbb{R}$ por

$$f(t) = u_n + (t-n)(u_{n+1}-u_n), \quad (n \leq t < n+1, n \in \mathbb{Z}).$$

Es claro que $f(n) = u_n$. Veremos que $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, solo necesitamos ver que $T(u_n, \epsilon/3) \subset T(f, \epsilon)$. Sea $\tau \in T(u_n, \epsilon/3)$. Si $n \leq t < n+1$, entonces $n + \tau \leq t + \tau < n + \tau + 1$. Ya que

$$\Delta_\tau f(t) = f(n+\tau) - f(n) + (t-n)\{[f(n+\tau+1) - f(n+1)] - [f(n+\tau) - f(n)]\}$$

y $0 \leq t-n < 1$, obtenemos

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \epsilon$$

Así, $\tau \in T(f,\epsilon)$. Con lo cual la prueba esta completa. $\square$

1.2. Dicotomía Exponencial

La dicotomía exponencial será primordial en las demostraciones que siguen, por lo que introduciremos su definición, para ello consideremos las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{1.11}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t) \tag{1.12}$$

Definición 1.2.1. Sea $\Phi(\cdot)$ una matriz fundamental de la ecuación (1.11), entonces (1.11) posee una (α, K, P)-dicotomía exponencial si existen constantes positivas $\alpha, K \geq 1$ y una proyección P $(P^2 = P)$ tal que

$$\|G(t,s)\| \leq Ke^{-\alpha|t-s|}, t, s \in \mathbb{R},$$

donde $G(t,s)$ esta dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)P\Phi^{-1}(s) & \text{si } t \geq s \\ -\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) & \text{si } t < s. \end{cases} \tag{1.13}$$

y la llamaremos el núcleo de Green asociado al sistema (1.11).

El siguiente Lema demostrado en [9] nos permite saber bajo que condiciones al perturbar un sistema diferencial lineal que posee dicotomía exponencial esta se mantiene

Lema 1.2.2 (Roughness). *Si el sistema* (1.11) *posee dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}$ *con constantes positivas* K, α *y la proyección* P. *Si* $\delta = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\| < \frac{\alpha}{4K^2}$. *Entonces la perturbación del sistema*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + B(t)\,x \tag{1.14}$$

posee una $(\alpha - 2K\delta, \frac{5K^2}{2}, Q)$*-dicotomía exponencial, es decir:*

$$\begin{aligned} \left\|\Psi(t)\,Q\Psi^{-1}(s)\right\| &\leq \frac{5K^2}{2}e^{-(\alpha-2K\delta)(t-s)},\ t \geq s \\ \left\|\Psi(t)\,(I-Q)\,\Psi^{-1}(s)\right\| &\leq \frac{5K^2}{2}e^{-(\alpha-2K\delta)(s-t)},\ s > t, \end{aligned}$$

donde $\Psi(t)$ *es la matriz fundamental del sistema perturbado* (1.14) *tal que* $\Psi(0) = I$ *y la proyección* Q *tiene el mismo espacio nulo de la proyección* P.

Por último, enunciaremos algunos Teoremas que nos indican cuando un sistema posee dicotomía exponencial

Teorema 1.2.3 ([13]). *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, *matriz constante. El sistema* (1.12) *posee una única solución* $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *acotada para cada función* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *acotada si y sólo si* A *posee valores propios con parte real distinta de cero.*

Teorema 1.2.4 ([13]). *Sea* $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *acotada. El sistema* (1.11) *posee dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}$ *si y sólo si para toda función* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *acotada el sistema* (1.12) *posee una única solución* $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *acotada.*

1.3. Bi-Propiedad

Una propiedad primordial al momento de estudiar la existencia y unicidad de soluciones del tipo casi periódico es la Bi-casi periodicidad de la función de Green. La cual ha sido omitida o poco enfatizada durante mucho tiempo.
En lo que sigue daremos la definición de Bi-casi periodicidad

Definición 1.3.1 (Bi-casi periodicidad exponencial). Diremos que una función $G = G(t,s)$ es exponencialmente bi-casi periódica si para todo $\epsilon > 0$ existe $T(G,\epsilon)$ relativamente denso, tal que si $\tau \in T(G,\epsilon)$

$$\|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \leq \epsilon c e^{-\alpha'|t-s|}, \ \forall \ t,s \in \mathbb{R}\, c, \alpha' > 0 \,\text{constante}.$$

Definición 1.3.2 (Bi-casi periodicidad Integrable). Diremos que una función $G = G(t,s)$ es bi-casi periódica integrable si para todo $\epsilon > 0$ existe $T(G,\epsilon)$ relativamente denso en $\mathbb{R}$, tal que si $\tau \in T(G,\epsilon)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \, ds \leq \epsilon c, \ \forall \ t \in \mathbb{R}, \ c > 0 \,\text{constante}.$$

Definición 1.3.3 (Bi-casi periodicidad local). Diremos que una función $G = G(t,s)$ es localmente bi-casi periódica si para todo $\epsilon > 0$ existe $T(G,\epsilon)$ relativamente denso, tal que si $\tau \in T(G,\epsilon)$ entonces

$$\|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \leq \epsilon c, \ 0 \leq |t-s| \leq L, \quad L, \ c > 0 \,\text{constantes}.$$

Observación 1.3.4. *Si consideramos* (1.11). *Sea $A \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ basta tomar $\tau \in T(A,\epsilon)$ y con dicotomía exponencial se obtiene la condición de bi-casi periodicidad local [43]. En la práctica, basta la bi-casi periódicidad integrable que es implicada por la bi-casi periodicidad exponencial.*
Si $a \in AP(\mathbb{R})$ y con promedio $\mathcal{M}(a) \neq 0$,

$$x' = a(t)\, x$$

es exponencialmente bi-casi periódica; y además hiperbólico (ver [9]).

Es importante notar que el núcleo de Green no es inmediatamente bi-casi periódico integrable, a pesar de tener la dicotomía exponencial.

Ejemplo 1.3.5. *La ecuación diferencial*

$$x' = -(1 + b(t))\, x + 1, \ \ b(t) > 0,$$

posee dicotomía exponencial. Pero, el núcleo de Green asociado no es bi-casi periodico.
Su solución acotada esta dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t (1+b(r))dr} ds,$$

la cual, en general, no es casi periódica si b no lo es (por ejemplo, bastaría $\lim\limits_{t\to\infty} b(t) = c$ ó b es casi automorfica, etc.).

Necesitaremos propiedades similares a las mencionadas anteriormente, por lo que definiremos la Bi-Remotamente casi periódicidad.

Definición 1.3.6 (α-Exponencialmente Bi-Remotamente casi periodicidad). Diremos que una función $G = G(t,s)$ es α-exponencialmente bi-remotamente casi periódica si para todo $\epsilon > 0$ existe $T(G,\epsilon)$ relativamente denso, tal que si $\tau \in T(G,\epsilon)$

$$\limsup_{t\to\infty} \left\| e^{\alpha(t-s)}(G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)) \right\| \leq \epsilon c,\ t \geq s, \tag{1.15}$$

$$\limsup_{t\to-\infty} \left\| e^{\alpha(s-t)}(G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)) \right\| \leq \epsilon c,\ t \leq s, \tag{1.16}$$

donde α, c son constantes positivas.

Definición 1.3.7 (Bi-remotamente casi periodicidad Integrable). Diremos que una función $G = G(t,s)$ es bi-remotamente casi periódica integrable si para todo $\epsilon > 0$ existe $T(G,\epsilon)$ relativamente denso en $\mathbb{R}$, tal que si $\tau \in T(G,\epsilon)$

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\|\, ds \leq \epsilon.$$

Definición 1.3.8 (Bi-remotamente casi periodicidad local). Diremos que una función $G = G(t,s)$ es localmente bi-remotamente casi periódica si para todo $\epsilon > 0$ existe $T(G,\epsilon)$ relativamente denso, tal que si $\tau \in T(G,\epsilon)$ entonces

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \leq \epsilon,\ 0 \leq |t-s| \leq L,$$

para $L > 0$ fijo.

Consideramos la ecuación escalar

$$x'(t) = a(t)x(t) \tag{1.17}$$

con $\mathcal{M}\{a\} \neq 0$ veremos que el núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable.

Teorema 1.3.9. *[Bi-Remotamente Casi Periodicidad Integrable para a Ergódico] Si a es una función remotamente casi periódica con $\mathcal{M}(a) \neq 0$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\epsilon'(\epsilon) = \epsilon' > 0$, tal que si $\tau \in T(a,\epsilon')$ tenemos que*

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \left| e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(r)dr} - e^{\int_s^t a(r)dr} \right| ds < \epsilon,\quad \mathcal{M}(a) < 0.$$

y

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_t^{\infty} \left| e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(r)dr} - e^{\int_s^t a(r)dr} \right| ds < \epsilon, \quad , \mathcal{M}(a) > 0.$$

Demostración. Sea $\mathcal{M}(a) < -\gamma < 0$, sabemos que $|e^{\int_s^t a(r)dr}| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}$ para $t \geq s$. No es difícil verificar que

$$|e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(r)dr} - e^{\int_s^t a(r)dr}| \leq K^2(t-s)e^{-\gamma(t-s)} \sup_{u\in(s,t)} |a(u+\tau) - a(u)|$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(r)dr} - e^{\int_s^t a(r)dr}| &\leq \int_{-\infty}^{t} K^2(t-s)e^{-\gamma(t-s)} \sup_{u\in(s,t)} |a(u+\tau) - a(u)|ds \\ &\leq \int_0^{\infty} K^2 e^{-\gamma x} x \sup_{u\in(t,t+x)} |a(u-x+\tau) - a(u-x)|ds. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\epsilon' = K^2\gamma^{-1}\epsilon$. Consideremos $t \to \infty$. Sea cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $x_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in(t,\infty)} |a(u-x+\tau) - a(u-x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{u\in(x_n,\infty)} |a(u-x+\tau) - a(u-x)|.$$

Luego por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} x \sup_{u\in(t,\infty)} |\Delta_\tau a(u-x)|dx \;=\; \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} x \lim_{t\to\infty} \sup_{u\in(t,\infty)} |\Delta_\tau a(u-x)|dx.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(r)dr} - e^{\int_s^t a(r)dr}|ds &\leq \limsup_{t\to\infty} \int_0^{\infty} K^2 e^{-\gamma x} x \sup_{u\in(t,\infty)} |\Delta_\tau a(u-x)|dx \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Para $t \to -\infty$ es análogo.
Se concluye de la misma manera el caso $\mathcal{M}(a) > 0$.
Esto prueba teorema. □

El resultado se extiende al sistema

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{1.18}$$

donde la matriz $A(t) = \text{diag}\{a_i(t)\}$ tal que $\text{Re}(\mathcal{M}\{a_i\}) \neq 0$. Tenemos el siguiente resultado

Teorema 1.3.10. *Sea A matriz diagonal $A(t) = diag\{a_i(t)\}$ remotamente casi periódica tal que $Re(\mathcal{M}\{a_i\}) \neq 0$, entonces la matriz fundamental de (1.18) es Bi-remotamente casi periódica integrable.*

Demostración. Sabemos que su matriz fundamental esta dada por

$$e^{\int_s^t A(u)du} = \mathrm{diag}\{e^{\int_s^t a_i(u)du}\}$$

y por el Teorema 1.3.9 se obtiene que cada elemento de la matriz fundamental es Bi-remotamente casi periódica integrable. □

Antes de ver algunos resultados que nos permitirán saber cuando tenemos estas propiedades, demostraremos el siguiente lema técnico

Lema 1.3.11. *Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y Φ matriz fundamental de (1.11). Entonces la matriz de transición $\Phi(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ satisface*

$$\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s) = \int_s^t \Phi(t,u)(A(u+\tau) - A(u))\Phi(u+\tau, s+\tau)du, \ \text{si } t > s,$$

y

$$\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s) = \int_t^s \Phi(t,u)(A(u+\tau) - A(u))\Phi(u+\tau, s+\tau)du, \ \text{si } s > t.$$

Demostración. Definamos $V(t,s) = \Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s)$, y consideremos $t > s$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t+\tau, s+\tau) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,s) \\
&= A(t+\tau)\Phi(t+\tau, s+\tau) - A(t)\Phi(t,s) \\
\frac{\partial V}{\partial t}(t,s) &= A(t)V(t,s) + (A(t+\tau) - A(t))\Phi(t+\tau, s+\tau), \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

de la última igualdad, si $s < t$ tenemos

$$V(t,s) = \int_s^t \Phi(t,u)(A(u+\tau) - A(u))\Phi(u+\tau, s+\tau)du,$$

es decir,

$$\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s) = \int_s^t \Phi(t,u)(A(u+\tau) - A(u))\Phi(u+\tau, s+\tau)du.$$

De manera análoga se concluye para $t < s$. Lo que cual la prueba esta completa. □

Así, tenemos que

Teorema 1.3.12. *Sean $A \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(t,s)$ la matriz fundamental del sistema (1.11) Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\epsilon'(\epsilon) = \epsilon' > 0$ tal que si $\tau \in T(A, \epsilon')$ tenemos que para $0 \leq |t-s| < l$ se satisface*

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s)\| \leq \epsilon. \tag{1.20}$$

Demostración. Consideremos $t > s$. Dado que $\|\Phi(t,s)\| \leq K$ si $0 < |t-s| \leq l$ y por el Lema 1.3.11, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s)\| &\leq \int_s^t \|\Phi(t,u)\| \|A(u+\tau) - A(u)\| \|\Phi(u+\tau, s+\tau)\| du \\
&\leq K^2 \int_s^t \|A(u+\tau) - A(u)\| du \\
&\leq K^2 |t-s| \sup_{u\in(s,t)} \|A(u+\tau) - A(u)\|.
\end{aligned}$$

Dado que $|t-s| < l$ tenemos $t - l \leq s \leq t + l$, por lo que,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s)\| &\leq K^2 l \sup_{u\in(t-l,t)} \|A(u+\tau) - A(u)\|. \\
&\leq K^2 l \sup_{u\in(t,t+l)} \|A(u-l+\tau) - A(u-l)\|. \\
&\leq K^2 l \sup_{u\in(t,\infty)} \|A(u-l+\tau) - A(u-l)\|. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos para $s > t$

$$\|\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s)\| \leq K^2 l \sup_{u\in(-\infty,t)} \|A(u+\tau) - A(u)\|. \tag{1.22}$$

Sea $\tau \in T(A, \frac{\epsilon}{lK^2})$. Por (1.21) y (1.22), obtenemos

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|\Phi(t+\tau, s+\tau) - \Phi(t,s)\| \leq \epsilon.$$

Así, obtenemos que la matriz fundamental de un sistema remotamente casi periódico es localmente bi-remotamente casi periódica. □

Observación 1.3.13. *Cabe destacar que en el Teorema anterior el sistema (1.11) no necesariamente posee dicotomía exponencial, aún cuando se considera $t \to \pm\infty$.*

Consideremos el sistema (1.11). Asumiremos que la matriz $A(t)$ tiene forma diagonal a bloques, $A(t) = \operatorname{diag}(A_+(t), A_-(t))$, por lo que, el sistema se puede escribir de la forma

$$\begin{cases} z'(t) &= A_+(t)z \\ y'(t) &= A_-(t)y \end{cases} \tag{1.23}$$

donde $\Phi_+(t,s), \Phi_-(t,s)$ son las matrices fundamentales asociadas a las ecuaciones para z e y respectivamente, además satisfacen las estimaciones

$$\begin{cases} \|\Phi_+(t,s)\| &\leq Ke^{-\gamma(t-s)} \text{ para } t \geq s \\ \|\Phi_-(t,s)\| &\leq Ke^{\gamma(t-s)} \text{ para } s \geq t. \end{cases} \tag{1.24}$$

con $\gamma > 0$. Denotaremos por $G(t,s)$ a la matriz

$$G(t,s) = \begin{cases} \operatorname{diag}(\Phi_+(t,s), 0) & \text{si } t \geq s \\ \operatorname{diag}(0, \Phi_-(t,s)) & \text{si } t < s. \end{cases} \tag{1.25}$$

Por lo anterior, tenemos

$$\|G(t,s)\| \leq Ke^{-\gamma|t-s|}. \tag{1.26}$$

El siguiente lema nos permitirá demostrar que el núcleo de Green (1.25) asociado a (1.23) es Bi-remotamente casi periódico integrable.

Lema 1.3.14. *Sea $G(t,s)$ definida en (1.25) tal que verifica (1.26), entonces satisface la desigualdad*

$$\|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \leq e^{-\gamma(t-s)} K^2 \int_s^t \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\| du, \ t \geq s.$$

y tenemos

$$\|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \leq e^{\gamma(t-s)} K^2 \int_t^s \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| du, \ s > t.$$

Demostración. En virtud del Lema 1.3.11 se concluye el resultado. □

Así, tenemos unos del resultados principales de esta sección.

Teorema 1.3.15. *Sean A_+ y A_- funciones remotamente casi periódicas tal que el núcleo de Green* (1.25) *asociado a* (1.23) *satisface (1.26). Entonces dado ϵ existe $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon)$ tal que si $\tau \in T(A_+, \epsilon') \cap T(A_-, \epsilon')$ se tiene*

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\|\, ds \leq \epsilon,$$

es decir, G es Bi-remotamente casi periódica integrable.

Demostración. Aplicando el Lema 1.3.14, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\|\, ds &\leq \int_{-\infty}^{t} K^2 e^{-\gamma(t-s)} \int_s^t \|\Delta_\tau A_+(u)\| du ds \\ &+ \int_t^{\infty} K^2 e^{-\gamma(s-t)} \int_t^s \|\Delta_\tau A_-(u)\| du ds.\end{aligned}$$

Realizando los cambios de variables adecuados, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\|\, ds &\leq K^2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \int_{t-x}^{t} \|\Delta_\tau A_+(u)\| du dx \\ &+ K^2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma y} \int_t^{t+y} \|\Delta_\tau A_-(u)\| du dy\end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \int_{t-x}^{t} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\| du dx \\ I_2(t) &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \int_t^{t+x} \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| du dx \end{aligned}$$

Primeramente consideremos $t \to \infty$.
Tenemos que

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} x \sup_{u\in[t-x,t]} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\| dx \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} x \sup_{u\in[t-x,\infty)} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\| dx. \end{aligned}$$

Dado que $\sup_{t\in\mathbb{R}}\{\|A_+\|_\infty, \|A_-\|_\infty\} \leq M$, tenemos que

$$|e^{-\gamma x} x \sup_{u\in[t-x,\infty)} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|| \leq 2M|e^{-\gamma x} x|.$$

Notemos que $h(x) = e^{-\gamma x}x$ es integrable en $[0, \infty)$, es decir,

$$\int_0^\infty h(x)dx \leq M_1.$$

Además, $\sup_{u\in[t-x,\infty)} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|$ es una sucesión monótona en t y acotada, por lo que podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
Sea cualquier sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $t_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Si consideramos $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M_1}$ y $\tau \in T(A_+, \epsilon') \cap T(A_-, \epsilon')$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in[t,\infty)} \|\Delta_\tau A_+(u-x)\| &= \lim_{n\to\infty} \sup_{u\in[t_n,\infty)} \|\Delta_\tau A_+(u-x)\| \\
&\leq \epsilon'
\end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t-x,\infty)} \|\Delta_\tau A_+(u)\|dx &= \int_0^\infty h(x) \lim_{t\to\infty} \sup_{u\in[t,\infty)} \|\Delta_\tau A_+(u-x)\|dx \\
&\leq \epsilon' M_1 = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Concluimos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} I_1(t) &\leq \limsup_{t\to\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t-x,\infty)} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t-x,\infty)} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos $t \to -\infty$.
Por lo que,

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t-x,t]} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|dx \\
&\leq \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in(-\infty,t]} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|dx.
\end{aligned}$$

Notemos que $\sup_{u\in(-\infty,t]} \|A_+(u+\tau) - A_+(u)\|$ es una sucesión monótona decreciente cuando $t \to -\infty$ y acotada. Sea cualquier sucesión $\{t'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $t'_n \to -\infty$

cuando $n \to \infty$. Así de la misma manera podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty}\int_0^\infty h(x)\sup_{u\in(-\infty,t]}\|\Delta_\tau A_+(u)\|dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty h(x)\sup_{u\in(-\infty,t'_n]}\|\Delta_\tau A_+(u)\|dx\\
&= \int_0^\infty h(x)\lim_{n\to\infty}\sup_{u\in(-\infty,t'_n]}\|\Delta_\tau A_+(u)\|dx\\
&= \int_0^\infty h(x)\lim_{t\to-\infty}\sup_{u\in(-\infty,t]}\|\Delta_\tau A_+(u)\|dx\\
&\leq \epsilon' M_1.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to-\infty} I_1(t) &\leq \limsup_{t\to-\infty}\int_0^\infty h(x)\sup_{u\in(-\infty,t]}\|A_+(u+\tau)-A_+(u)\|dx\\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_0^\infty h(x)\sup_{u\in(-\infty,t]}\|A_+(u+\tau)-A_+(u)\|dx\\
&\leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ahora para I_2, primero consideremos $t \to \infty$.
Por esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq \int_0^\infty h(x)\sup_{u\in[t,t+x]}\|A_-(u+\tau)-A_-(u)\|dx\\
&\leq \int_0^\infty h(x)\sup_{u\in[t,\infty)}\|A_-(u+\tau)-A_-(u)\|dx.
\end{aligned}$$

Notemos que $\sup_{u\in[t,\infty]}\|A_-(u+\tau)-A_-(u)\|$ es una sucesión monótona decreciente cuando $t \to \infty$. De la misma manera que en I_1, podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty h(x)\sup_{u\in[t,\infty)}\|\Delta_\tau A_-(u)\|dx &= \int_0^\infty h(x)\lim_{t\to\infty}\sup_{u\in[t,\infty)}\|A_-(u+\tau)-A_-(u)\|dx\\
&\leq \epsilon' M_1.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} I_2(t) &\leq \limsup_{t\to\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t,\infty)} \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t,\infty)} \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos $t \to -\infty$.
Por lo que,

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in[t,t+x]} \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| dx \\
&\leq \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in(-\infty,t+x]} \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| dx.
\end{aligned}$$

Notemos que $\sup_{u\in(-\infty,t+x]} \|A_-(u+\tau)-A_-(u)\|$ es una sucesión monótona decreciente cuando $t \to -\infty$. De la misma manera podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in(-\infty,t]} \|\Delta_\tau A_-(u+x)\| dx &= \int_0^\infty h(x) \lim_{t\to-\infty} \sup_{u\in(-\infty,t]} \|\Delta_\tau A_-(u+x)\| dx \\
&\leq \epsilon' M_1.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to-\infty} I_2(t) &\leq \limsup_{t\to-\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in(-\infty,t+x]} \|A_-(u+\tau) - A_-(u)\| dx \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_0^\infty h(x) \sup_{u\in(-\infty,t]} \|A_-(u+x+\tau) - A_-(u+x)\| dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente concluimos

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\| \, ds \leq \epsilon$$

$\square$

Observación 1.3.16. *Si el sistema* (1.11) *posee* (α, K, P)*-dicotomía exponencial. Notemos que si* P *conmuta con la matriz fundamental* $\Phi(t)$ *de* (1.11) *es posible diagonalizar el sistema*

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Dado que

$$\begin{aligned} x' &= (xP)' + (x(I-P))' \\ &= A(t)xP + A(t)x(I-P). \end{aligned}$$

Entonces la matriz de transición $\Phi(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ *satisface*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t,s) &= \frac{d}{dt}\Phi(t,s)P + \frac{d}{dt}\Phi(t,s)(I-P) \\ &= A(t)P\Phi(t,s)P + A(t)(I-P)\Phi(t,s)(I-P) \qquad (1.27) \end{aligned}$$

Definamos $A_+(t) = A(t)P$ *y* $A_-(t) = A(t)(I-P)$*. Ahora, multiplicando* (1.27) *por* P *y luego por* $(I-P)$*, obtenemos que la separación esta dada por*

$$y' = A_+(t)y \qquad (1.28)$$
$$z' = A_-(t)z, \qquad (1.29)$$

donde $\Phi_+(t,s) = \Phi(t,s)P$ *y* $\Phi_-(t,s) = \Phi(t,s)(I-P)$ *son matrices soluciones de* (1.28) *y* (1.29)*, respectivamente. Al poder diagonalizar el sistema, concluimos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.3.15, es decir, si* P *conmuta con la matriz fundamental el núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable.*

Del Teorema 1.3.15 y la observación anterior se desprende el siguiente corolario

Corolario 1.3.17. *Si el sistema* (1.11) *es remotamente casi periódico y exponencialmente estable en el infinito (ó respectivamente, en el menos infinito) el núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable.*

Demostración. La demostración se obtiene de la observación 1.3.16. Ya que, cuando $P = I$ tenemos que $P - I = 0$, es decir, el sistema posee la clásica estabilidad exponencial en ∞.
De la misma manera, si $P = 0$ tenemos que $P - I = -I$, es decir, el sistema es exponencialmente estable en $-\infty$. □

Consideremos la siguiente propiedad general

(PG) Existe una transformación remotamente casi periódica invertible $x = S(t)\omega$, $\omega = (z, y)$, tal que bajo la transformación el sistema lineal remotamente casi periódico (1.11) es de la forma (1.23) satisfaciendo (1.26).

Corolario 1.3.18. *Todo sistema* (1.11) *para el cual vale* (PG) *su núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable.*

1.4. Composición de Funciones Remotamente Casi Periódicas

En capítulos posteriores estudiaremos sistemas donde la composición de funciones es relevante. Necesitamos estudiar bajo que condiciones estas composiciones pertenecerán al conjunto de las funciones remotamente casi periódicas.
En [10] podemos ver resultados de composición para funciones casi periódicas.
Comenzaremos, recordando la siguiente definición:

Definición 1.4.1. Sea $K \subset \mathbb{X}$, $I \subset \mathbb{R}$, una función continua $f : I \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ es uniformemente continua sobre K uniformemente para $t \in I$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in K$ con

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(t, x) - f(t, y)\| < \epsilon \ \forall t \in I.$$

Denotaremos el conjunto de estas funciones por $C_K(I \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Lema 1.4.2. *Sea* $y \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $K = \overline{\{y(t) | t \in \mathbb{R}\}}$ *y* $f \in RAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X}) \cap C_K(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, *entonces* $f(\cdot, y(\cdot)) \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f existe $\epsilon > \delta > 0$ tal que

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| < \epsilon \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $f \in RAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ y $y \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, sea $\tau \in T(f, \delta/2) \cap T(y, \delta/2)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{|t| \to \infty} \|f(t + \tau, y(t + \tau)) - f(t, y(t))\| &\leq \limsup_{|t| \to \infty} \|f(t + \tau, y(t + \tau)) - f(t + \tau, y(t))\| \\
&\quad + \limsup_{|t| \to \infty} \|f(t + \tau, y(t)) - f(t, y(t))\| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

□

Observación 1.4.3. *El resultado anterior, es válido cuando f forma parte de una familia más restrictiva. Así, tenemos la siguiente proposición: Sea $f \in RAP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X}) \cap C_K(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ Lipschitz en la segunda variable, es decir:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \forall x, y \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}$$

Si $y \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ entonces $f(\cdot, y(\cdot)) \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
Esta observación es inmediata dado que la condición de Lipschitz implica continuidad uniforme.

1.4.1. Funciones $\mathbb{Z}$-Remotamente Casi Periódicas

Dada la función continua $f(t)$ es evidente que la función $f([t])$ es discontinua. Con esto observamos que para la función $\varphi \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la función $\varphi([t])$ no es remotamete casi periódica, ya que no cumple con la continuidad uniforme. Como es natural de esperar las discontinuidades se dan en los números enteros, además es notorio que los límites laterales existen para todo $n \in \mathbb{Z}$. En [51] no se precisa lo que se entiende por remotamente casi periodicidad de la función, no necesariamente continua, $f(t, x(t), x([t]))$, lo que lleva a algunas imprecisiones.
Análogo al concepto introducido en el ámbito de las funciones casi periódicas y casi automorficas por E. Ait Dads y L. Lachimi [2] y A. Chávez, S. Castillo y M. Pinto [4], respectivamente. Veremos más adelante que es suficiente considerar las funciones $\mathbb{Z}$ – remotamente casi periódicas para estudiar las soluciones de las DEPCA.

Definiremos un subconjunto de las funciones acotadas

$$\begin{aligned} BR(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \triangleq \; & \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n | f \text{ es acotada, continua en } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ & \text{y tiene límites laterales finitos en } \mathbb{Z}\} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Definición 1.4.4. Una función $f \in BR(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, diremos que es $\mathbb{Z}$-casi periódica si existe un conjunto $T(f, \epsilon) \cap \mathbb{Z}$ relativamente denso en $\mathbb{R}$ y para $\tau \in T(f, \epsilon) \cap \mathbb{Z}$ se satisface

$$\|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_\infty < \epsilon. \tag{1.31}$$

Denotaremos el conjunto de estas funciones por $\mathbb{Z}AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Definición 1.4.5. Una función $f \in BR(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, diremos que es $\mathbb{Z}$-remotamente casi periódica si existe un conjunto relativamente denso $T_1(f, \epsilon) \cap \mathbb{Z}$, tal que, si $\tau \in T_1(f, \epsilon) \cap \mathbb{Z}$ entonces

$$\limsup_{|t| \to \infty} \|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon, \; t \in \mathbb{R}. \tag{1.32}$$

Denotaremos el conjunto de estas funciones por $\mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.4.6. *El conjunto de las funciones $\mathbb{Z}AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ es subconjunto $\mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Si $f \in \mathbb{Z}\mathrm{AP}\,(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ entonces el conjunto

$$T_1\,(f,\epsilon) \cap \mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{R} \mid \|f\,(\cdot + a) - f\,(\cdot)\| < \epsilon\} \cap \mathbb{Z}$$

es relativamente denso en $\mathbb{R}$. Ya que $T_1\,(f,\epsilon) \subset T\,(f,\epsilon)$, tenemos que $f \in \mathbb{Z}\mathrm{RAP}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. $\square$

Observación 1.4.7. *Las funciones $\mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ son localmente integrables.*

Recordemos que

Lema 1.4.8. *Sea $f \in AP(\mathbb{R})$ entonces $T(f,\epsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ y es relativamente denso.*

La demostración del Lema anterior se puede ver en [11].

Lema 1.4.9. *Sea $f \in RAP(\mathbb{R})$ entonces $T(f,\epsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ y es relativamente denso.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.8, dado $\epsilon > 0$ existe $\psi(t) = g_1(t) + \varphi_1(t) + g_2(t)\varphi_2(t)$, donde $g_1, g_2 \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in OS(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, tal que

$$|f(t) - \psi(t)| \leq \epsilon/4.$$

Consideremos $\tau \in T(g_1,\epsilon/3) \cap T(g_2,\epsilon/3) \cap \mathbb{Z}$, con $\epsilon' = \min\{\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4\|\varphi_2\|_\infty}\}$, sabemos que este conjunto es no vacío por el Lema 1.4.8. Por lo que tenemos

$$\begin{aligned} |f(t+\tau) - f(t)| &\leq |f(t+\tau) - \psi(t+\tau)| + |\psi(t+\tau) - \psi(t)| + |\psi(t) - f(t)| \\ &\leq \epsilon/2 + |\Delta_\tau\varphi_1(t)| + \|g_2\|_\infty|\Delta_\tau\varphi_2(t)| + \|\varphi_2\|_\infty|\Delta_\tau g_2(t)|. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t+\tau) - f(t)| \leq \epsilon$$

Así, tenemos que $\tau \in T(f,\epsilon) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 1.4.10. *Si f es una función remotamente casi periódica entonces $f([\cdot]) \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$*

Demostración. Consideremos $\tau \in T(f,\epsilon) \cap \mathbb{Z}$, por el Lema 1.4.9 sabemos que es no vacío. Dado que $[t+\tau] = [t] + \tau$. Finalmente,

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|f([t]+\tau) - f([t])\| \leq \epsilon.$$

Por lo que, $f([\cdot]) \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ $\square$

Lema 1.4.11. *Sea $f \in RAP(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ y Lipschitz de constante K en la segunda variable, $\varphi \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, entonces $f(\cdot,\varphi(\cdot)) \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La demostración es directa. Si consideramos $\tau \in T(f,\epsilon') \cap T(\varphi,\epsilon') \cap \mathbb{Z}$, donde $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1+K}$ se sigue

$$\begin{aligned}
\|f(t+\tau,\varphi(t+\tau)) - f(t,\varphi(t))\| &\leq \|f(t+\tau,\varphi(t+\tau)) - f(t+\tau,\varphi(t))\| \\
&\quad + \|f(t+\tau,\varphi(t)) - f(t,\varphi(t))\| \\
&\leq K\|\Delta_\tau\varphi(t)\| + \|f(t+\tau,\varphi(t)) - f(t,\varphi(t))\|
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\limsup_{|t|\to\infty} \|f(t+\tau,\varphi(t+\tau)) - f(t,\varphi(t))\| &\leq \limsup_{|t|\to\infty} K\|\Delta_\tau\varphi(t)\| \\
&\quad + \limsup_{|t|\to\infty} \|f(t+\tau,\varphi(t)) - f(t,\varphi(t))\| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

Lema 1.4.12. *Sea $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ remotamente casi periódica y Lipschitz en la segunda y tercera variable, $\varphi \in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, entonces $f(\cdot,\varphi(\cdot),\varphi([\cdot])) \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. La demostración es directa. $\square$

Lema 1.4.13. *Sea f una función $\mathbb{Z}$-remotamente casi periódica. Si f es continua en $\mathbb{R}$, entonces f es remotamente casi periódica.*

Demostración. Es inmediato, ya que la función f es continua. Y por ser $\mathbb{Z}$-remotamente casi periódica existe un conjunto relativamente denso $T(f,\epsilon)$ tal que si $\tau \in T(f,\epsilon)$, tenemos que

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t+\tau) - f(t)| \leq \epsilon.$$

$\square$

Capítulo 2

Funciones Remotamente Casi Periódicas y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El problema de buscar soluciones del tipo casi periódicas para ecuaciones diferenciales ordinarias ha sido tratado por muchos autores, obteniendo diversos resultados que podemos encontrar en la literatura sobre existencia y unicidad, estabilidad, aplicaciones en diversos modelos biologicos, etc (ver [8, 10, 11, 41]).

2.1. Existencia de Soluciones Remotamente Casi Periódicas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Tenemos el siguiente teorema para poder describir las soluciones remotamente casi periódicas, de la ecuación escalar

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t), \tag{2.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ función remotamente casi periódica.

Teorema 2.1.1. *Si la función $f(t)$ es remotamente casi periódica, entonces toda solución acotada, en $\mathbb{R}$, de la ecuación (2.1) es remotamente casi periódica. A saber,*

(I) Si $Re(\lambda) < 0$, la solución remotamente casi periódica esta dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds. \tag{2.2}$$

(II) *Si* $Re(\lambda) > 0$, *la solución remotamente casi periódica esta dada por*

$$x(t) = -\int_t^{\infty} e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds. \tag{2.3}$$

(III) *Finalmente cuando* $\lambda = iv$, *las soluciones remotamente casi periódicas están dadas por*

$$x(t) = e^{ivt}\left[c + \int_0^t e^{-ivs} f(s)\, ds\right]. \tag{2.4}$$

Demostración. Por el Lema 1.1.18 tenemos que (2.2) y (2.3) son remotamente casi periódicas. Ahora, en el caso (III) la solución es remotamente casi periódica cuando $x(t)$ es acotada para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto ocurre cuando

$$\int_0^t e^{\lambda s} f(s)\, ds$$

es acotada en $\mathbb{R}$, luego por el Teorema 1.1.16 se concluye que es remotamente casi periódica, ya que $e^{ivs} f(s)$ es remotamente casi periódica. □

Observación 2.1.2. *En esta demostración no resalta la importancia de la propiedad Bi-remotamente casi periódicidad integrable del núcleo de Green asociado, ya que esta dado por* $G(t,s) = G(t-s) = e^{\lambda(t-s)} = G(t+\tau, s+\tau)$ *el cual trivialmente es Bi-remotamente casi periódica integrable (e inclusive es Bi- periódica).*

Ahora, estudiaremos la ecuación diferencial escalar lineal no-autónoma no homogénea

$$x'(t) = a(t)\, x(t) + f(t) \tag{2.5}$$

Tenemos el siguiente teorema,

Teorema 2.1.3. *Sea* $a(t), f(t)$ *funciones remotamente casi periódicas tal que* $Re(\mathcal{M}(a)) \neq 0$ *entonces la ecuación* (2.5) *tiene una única solución* $\eta(t)$ *remotamente casi periódica, dada por*

$$\eta(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^{\infty} e^{\int_s^t a(u)du} f(s)\, ds, & Re(\mathcal{M}(a)) > 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a(u)du} f(s)\, ds, & Re(\mathcal{M}(a)) < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado. Supongamos que $\mathrm{Re}\,(\mathcal{M}\,(a)) < -\gamma < 0$, dado que el otro caso se demuestra de la misma manera. Consideremos

$$\begin{aligned}
|\eta(t+\tau)-\eta(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{t} e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(u)du} f\,(s+\tau)\,ds - \int_{-\infty}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(u)du} f\,(s)\,ds\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(u)du} - e^{\int_{s}^{t} a(u)du}||f\,(s+\tau)\,|ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(u)du}||f\,(s+\tau) - f(s)|ds.
\end{aligned}$$

Dado que $\mathrm{Re}\,(\mathcal{M}\,(a)) < -\gamma < 0$, tenemos $|e^{\int_s^t a(u)du}| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}$. Por lo que,

$$\begin{aligned}
|\eta(t+\tau)-\eta(t)| &\leq M\int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(u)du} - e^{\int_{s}^{t} a(u)du}|ds \\
&\quad + K\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}|f\,(s+\tau) - f(s)|ds
\end{aligned}$$

Sean

$$I_1(t) = M\int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(u)du} - e^{\int_{s}^{t} a(u)du}|ds \tag{2.7}$$

$$I_2(t) = K\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)}|f\,(s+\tau) - f(s)|ds \tag{2.8}$$

Aplicando a I_1 el Teorema 1.3.9, tenemos que la función de Green asociada es Bi-remotamente casi periódica integrable, es decir, existe $\epsilon''(\epsilon) = \epsilon''$, tal que si $\tau \in T(a, \epsilon'')$ tenemos que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \int_{-\infty}^{t} |e^{\int_{s+\tau}^{t+\tau} a(u)du} - e^{\int_{s}^{t} a(u)du}|ds \leq \epsilon$$

Ahora, aplicando el Lema 1.1.18 a I_2 existe $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon)$ tal que si $\tau \in T(f, \epsilon')$ se tiene que

$$\limsup_{|t|\to\infty} I_2(t) < \epsilon.$$

Finalmente, sea $\tilde{\epsilon} = \min\{\epsilon', \epsilon''\}$ y $\tau \in T(a, \tilde{\epsilon}) \cap T(f, \tilde{\epsilon})$ tenemos que

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\eta(t+\tau) - \eta(t)| \leq \epsilon.$$

Se demuestra de manera análoga para $\mathrm{Re}\,(\mathcal{M}\,(a)) > \gamma > 0$. Esto concluye la demostración. □

Consideremos las ecuaciones

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{2.9}$$

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \tag{2.10}$$

Teorema 2.1.4. *Sea $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, suponga que el sistema homogéneo (2.9) tiene una (α, K, P)-dicotomía exponencial y el núcleo de Green asociada es Bi-remotamente casi periódica integrable. Entonces la única solución acotada de (2.10) es remotamente casi periódica.*

Demostración. Sea $G(t,s)$ la función de Green asociada a (2.9), tal que satisface $|G(t,s)| \le Ke^{-\alpha|t-s|}$, $t, s \in \mathbb{R}$. Por la fórmula de variación de parámetro, la única solución acotada de (2.10) es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds,$$

con cota $\|y\|_\infty \le \frac{2K}{\alpha}\|f\|_\infty$.
En efecto, es remotamente casi periódica.
Sabemos que $\|f\|_\infty < M$. Consideremos

$$\begin{aligned}
\|y(t+\tau) - y(t)\| &\le \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s))f(s+\tau)ds \right\| \\
&\quad + \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)(f(s+\tau) - f(s))ds \right\| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} M\|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\|ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\alpha|t-s|}\|f(s+\tau) - f(s)\|ds
\end{aligned}$$

Definamos

$$I_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M\|G(t+\tau, s+\tau) - G(t,s)\|ds \tag{2.11}$$

$$I_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\alpha|t-s|}\|f(s+\tau) - f(s)\|ds. \tag{2.12}$$

Notemos que para I_1 es importante que el núcleo de Green sea Bi-remotamente casi periódica integrable; en I_2 es esencial la dicotomía exponencial junto con que la función f sea remotamente casi periódica. Tenemos que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|y(t+\tau) - y(t)\| \le \limsup_{|t|\to\infty} I_1(t) + \limsup_{|t|\to\infty} I_2(t)$$

Aplicando el Lema 1.1.18 a (2.12), existe $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon)$ tal que si $\tau \in T(f, \epsilon')$ se tiene

$$\limsup_{|t|\to\infty} I_2(t) < \epsilon.$$

Dado que el nucléo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable, existe $\epsilon''(\epsilon) = \epsilon''$, tal que si $\tau \in T(G, \epsilon''/M)$ tenemos

$$\limsup_{|t|\to\infty} I_1(t) < \epsilon.$$

Finalmente, sea $\tilde{\epsilon} = \min\{\epsilon', \epsilon''/M\}$ y $\tau \in T(G, \tilde{\epsilon}) \cap T(f, \tilde{\epsilon})$ tenemos que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|y(t+\tau) - y(t)\| \;\leq\; \epsilon,$$

es decir, y es una función remotamente casi periódica. Esto concluye la demostración.

$\square$

Además, cuando $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular tenemos

Teorema 2.1.5. *Sea $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ y $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular tal que $Re(\mathcal{M}(a_{ii})) \neq 0$. Entonces el sistema* (2.10) *posee una única solución acotada la cual es remotamente casi periódica.*

Demostración. Sin perdida de generalidad supondremos que la matriz A es triangular superior.
Tenemos:

$$\begin{array}{lllllll} x_1' = & a_{11}(t)x_1+ & a_{12}(t)x_2+ & a_{13}(t)x_3+ & \cdots+ & a_{1n}(t)x_n+ & f_1(t) \\ x_2' = & & a_{22}(t)x_2+ & a_{23}(t)x_3+ & \cdots+ & a_{2n}(t)x_n+ & f_2(t) \\ \vdots & & & & & & \\ x_n' = & & \cdots & & & a_{nn}(t)x_n+ & f_n(t). \end{array} \tag{2.13}$$

La última ecuación escalar en (2.13) ha sido estudiada en el Teorema 2.1.3, dado que se satisfacen las hipótesis, existe una única solución $x_n \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dada por (2.6). Sustituyendo $x_n \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en la penúltima ecuación en (2.13), obtenemos para x_{n-1} la ecuación

$$x_{n-1}' = a_{n-1\ n-1}(t)x_{n-1} + a_{n-1\ n}(t)x_n(t) + f_{n-1}(t).$$

Notando que $a_{n-1\ n}(t)x_n(t) + f_{n-1}(t)$ es una función remotamente casi periódica. Nuevamente, por el Teorema 2.1.3, existe una única solución $x_{n-1} \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Entonces, el resultado para el sistema triangular se concluye iterando de esta manera.

$\square$

Ahora, consideremos el sistema

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \tag{2.14}$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada constante, y $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))^T$ donde $f_i \in RAP(\mathbb{R})$ para $i = 1, 2, ..., n$.
Tengamos en consideración el siguiente Lema, cuya demostración se puede ver en [20]

Lema 2.1.6. *Dada una matriz cuadrada arbitraria $A = (a_{ij})$, existe una matriz $\alpha = (\alpha_{ij})$ del mismo orden, tal que*

1. $\det \alpha \neq 0$

2. $B = \alpha^{-1}A\alpha$ *es triangular, es decir,*

$$\alpha^{-1}A\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A.

Corolario 2.1.7. *Sea $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))^T$, si las funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2, ...n$, son remotamente casi periódicas, entonces toda solución acotada (en la recta real) del sistema (2.14) es remotamente casi-periódica.*

Demostración. Se puede asumir sin perdida de generalidad que la matriz A es triangular superior, ya que realizando el cambio de variable $y(t) = \alpha^{-1}x(t)$ y $\tilde{f}(t) = \alpha^{-1}f(t)$ en (2.14), obtenemos

$$\dot{y}(t) = By(t) + \tilde{f}(t),$$

donde B es una matriz triangular. Aplicando el Teorema 2.1.5 tenemos que la solución acotada es remotamente casi periódica. Luego, la transformación $x(t) = \alpha y(t) \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. Esto concluye la demostración. $\square$

Corolario 2.1.8. *Sea $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$, si la funciones $f_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, son remotamente casi periódicas y la matriz $A = (a_{ij})$ no posee valores propios con parte real cero, entonces para el sistema (2.14) existe una única solución*

remotamente casi periódica.
Si $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ *es la solución remotamente casi periódica, y*

$$\|f\|_\infty = \max_{i\in\{1,\cdots,n\}} \left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_i(t)| \right\},$$

entonces

$$\|x\| \leq K\|f\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n. \tag{2.15}$$

donde K *es una constantes positiva, dependiente solo de la matriz* A.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, consideraremos el sistema (2.14) en su forma triangular

$$\begin{array}{lllllll} y_1' = & \lambda_1 y_1 + & b_{12}y_2 + & b_{13}y_3 + & \cdots + & b_{1n}y_n + & \tilde{f}_1(t) \\ y_2' = & & \lambda_2 y_2 + & b_{23}y_3 + & \cdots + & b_{2n}y_p + & \tilde{f}_2(t) \\ \vdots & & & & & & \\ y_n' = & & & \cdots & & \lambda_n y_n + & \tilde{f}_n(t), \end{array} \tag{2.16}$$

ya que la transformación $x(t) = \alpha y(t)$. Así, por el Corolario 2.1.7 tenemos la existencia y unicidad de la solución remotamente casi periódica. Por lo que probaremos la desigualdad (2.15). Sea $\mu > 0$ tal que

$$|\mathrm{Re}\ (\lambda_i)| \geq \mu, i = 1, 2, ..., n.$$

Dado que los valores propios no poseen parte real cero, las soluciones están dadas por (2.3) ó (2.2), por lo que

$$|y_n(t)| \leq \frac{\|\tilde{f}\|_\infty}{\mu} = K_n\|\tilde{f}\|_\infty. \tag{2.17}$$

Consideremos la ecuación dada para $y_{n-1}(t)$

$$y_{n-1}'(t) = \lambda_{n-1}y_{n-1}(t) + b_{n-1n}y_n(t) + \tilde{f}_{n-1}(t)$$

Tenemos que la solución esta dada por

$$y_{n-1}(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^\infty e^{\lambda_{n-1}(t-s)}(b_{n-1n}y_n(s) + \tilde{f}_{n-1}(s))ds, & \mathrm{Re}\,(\lambda_{n-1}) > 0. \\ \displaystyle\int_{-\infty}^t e^{\lambda_{n-1}(t-s)}(b_{n-1n}y_n(s) + \tilde{f}_{n-1}(s)ds), & \mathrm{Re}\,(\lambda_{n-1}) < 0. \end{cases}$$

Estimando, la ecuación anterior tenemos que

$$|y_{n-1}(t)| \leq \frac{1}{\mu}\left(|b_{n-1n}|\frac{\|\tilde{f}\|_\infty}{\mu} + \|\tilde{f}\|_\infty\right) = K_{n-1}\|\tilde{f}\|_\infty.$$

Si continuamos con este procedimiento, obtenemos

$$|y_i(t)| \leq K_i\|\tilde{f}\|_\infty,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Si consideramos $K = \text{máx}_{i=1,...,n}\{K_i\}$, se sigue que

$$|y_i(t)| \leq K\|\tilde{f}\|_\infty,\ i = 1, 2, ..., n,\ t \in \mathbb{R}.$$

Así

$$\|y\| \leq K\|\tilde{f}\|_\infty$$

Con lo que concluye la demostración. □

Observación 2.1.9. *El siguiente ejemplo muestra la necesidad de la hipótesis $Re\{\lambda_i\} \neq 0, i = 1, \cdots, n$, para el Corolario 2.1.8.*
Consideremos $\lambda = iv$ y la ecuación

$$y'(t) = ivy + g(t) \tag{2.18}$$

con $g \in RAP(\mathbb{R})$, en particular tomemos $g(t) = e^{iv(t+\sqrt[3]{t})}$. Tenemos que la solución esta dada por

$$y(t) = c_1e^{itv} - \frac{3it^{2/3}e^{iv(t+\sqrt[3]{t})}}{v} + \frac{6\sqrt[3]{t}e^{iv(t+\sqrt[3]{t})}}{v^2} + \frac{6ie^{iv(t+\sqrt[3]{t})}}{v^3},\ \text{con } c_1 \in \mathbb{C}.$$

Podemos ver que la ecuación (2.18), cuando $v \neq 0$, no posee solución acotada sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.10. *Consideremos el sistema triangular*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix},\ a, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

y las funciones $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son remotamente casi periódicas $i = 1, 2$. Además, sean $Re(\lambda_1) > 0$ y $Re(\lambda_2) < 0$. Así, para resolver este sistema primero resolveremos la ecuación

$$y' = \lambda_2 y + f_2(t),$$

tenemos que la solución acotada es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_2(t-s)} f_2(s)ds.$$

Obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda_1 x + ay + f_1(t) \\ &= \lambda_1 x + a\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_2(t-s)} f_2(s)ds + f_1(t) \end{aligned}$$

y su solución acotada es

$$x(t) = -a\int_{t}^{\infty} e^{\lambda_1(t-u)} \int_{-\infty}^{u} e^{\lambda_2(u-s)} f_2(s)dsdu - \int_{t}^{\infty} e^{\lambda_1(t-u)} f_1(u)du.$$

Por lo que, la solución remotamente casi periódica del sistema esta dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\int_{t}^{\infty}\int_{-\infty}^{u} e^{\lambda_1 t - \lambda_2 s - u(\lambda_1 - \lambda_2)} f_2(s)dsdu - \int_{t}^{\infty} e^{\lambda_1(t-u)} f_1(u)du \\ \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_2(t-s)} f_2(s)ds \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.11. *Consideremos la ecuación*

$$x''(t) + 2ax'(t) + bx(t) = f(t) \tag{2.19}$$

con $f \in RAP(\mathbb{R})$, notemos que se trata de un oscilador armónico con una perturbación $f \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ cuando $a, b > 0$. La ecuación anterior es equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Los valores propios de la matriz anterior son $\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}$ y $\lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - b}$. Luego por el Corolario 2.1.7, cuando $a \neq 0$ ó $a = 0$ y $b < 0$, existe una única solución remotamente casi periódica. Si $a < \sqrt{a^2 - b}$, tenemos que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, por lo que la solución acotada de (2.20) esta dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

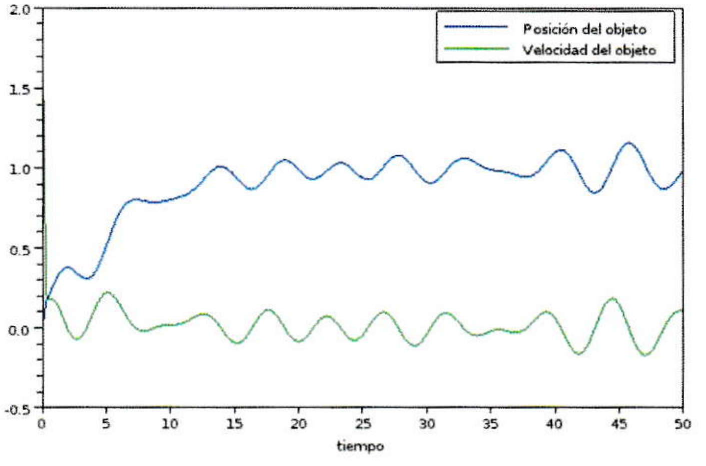
donde

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{(-a-\sqrt{a^2-b})(t-s)}f(s)ds + \int_{t}^{\infty} e^{(-a+\sqrt{a^2-b})(t-s)}f(s)ds\right)\\
z(t) &= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2\sqrt{a^2-b}}\int_{-\infty}^{t} e^{(-a-\sqrt{a^2-b})(t-s)}f(s)ds\\
&\quad -\frac{-a+\sqrt{a^2-b}}{2\sqrt{a^2-b}}\int_{t}^{\infty} e^{(-a+\sqrt{a^2-b})(t-s)}f(s)ds
\end{aligned}
$$

Así, la única solución remotamente casi periódica de (2.19) *es*

$$
x(t) = -\frac{1}{2\sqrt{a^2-b}}\left(\int_{-\infty}^{t} e^{(-a-\sqrt{a^2-b})(t-s)}f(s)ds + \int_{t}^{\infty} e^{(-a+\sqrt{a^2-b})(t-s)}f(s)ds\right).
$$

Si consideramos $a = 7$, $b = 3$ *y la función* f *dada por* (1.2), *tenemos que las gráficas de la solución del sistema son*



Ejemplo 2.1.12. *Consideremos el sistema triangular superior*

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ 0 & a_2(t) & a_{23}(t) \\ 0 & 0 & a_3(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}
$$

donde $a_{12}, a_{12}, a_{23}, a_{i,}, f_i\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ i = 1,2,3$ *son funciones remotamente casi periódicas. Además, consideremos* $\mathcal{M}\{a_1\}, \mathcal{M}\{a_3\} < 0$ *y* $\mathcal{M}\{a_2\} > 0$.
Tenemos que

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\int_s^t a_3(u)du} f_3(s)ds.$$

$$y(t) = -\int_t^{\infty}\int_{-\infty}^{s} e^{\int_s^t a_2(u)du} e^{\int_v^s a_3(u)du} a_{23}(s) f_3(v)dvds - \int_t^{\infty} e^{\int_s^t a_2(u)du} f_2(s)ds.$$

$$\begin{aligned} x(t) \ &= \int_{-\infty}^{t}\int_{\varsigma}^{\infty}\int_{-\infty}^{s} e^{\int_\varsigma^t a_1(u)du+\int_s^\varsigma a_2(u)du+\int_v^\varsigma a_3(u)du} a_{12}(\varsigma)a_{23}(s)f_3(v)dvdsd\varsigma \\ &+ \int_{-\infty}^{t} e^{\int_\varsigma^t a_1(u)du} f_1(\varsigma)d\varsigma + \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\varsigma} e^{\int_\varsigma^t a_1(u)du+\int_s^\varsigma a_3(u)du} a_{23}(\varsigma)f_3(s)dsd\varsigma \\ &- \int_{-\infty}^{t}\int_{\varsigma}^{\infty} e^{\int_\varsigma^t a_1(u)du+\int_s^\varsigma a_2(u)du} f_2(s)dsd\varsigma \end{aligned}$$

Por lo que, la solución remotamente casi periódica del sistema esta dada por

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

2.2. Soluciones Remotamente Casi Periódicas de Ciertos Sistemas Perturbados

Cuando un proceso es descrito por ecuaciones diferenciales, estamos pasando de un objeto real (proceso) a un modelo idealizado. Cada idealización matemática implica, en cierta medida, omitir pequeñas cantidades. Por tanto, la manera en que se introduce distorsión en el fenómeno resulta ser muy importante. Llegando así al problema matemático donde las soluciones de la ecuación diferencial dependen de parámetros pequeños. Para simplificar, solo tendremos en cuenta los problemas que implican un solo parámetro.

Existen variados problemas matemáticos que hacen un amplio uso de un parámetro pequeño. Probablemente el primero en describir este tipo de problemas fue J. H. Poincaré (1854-1912) como parte de sus investigaciones en mecánica celeste [29] (el parámetro pequeño, en este contexto, es por lo general la relación de dos masas). Por ejemplo, el problema de la tierra - luna - nave espacial.

En [19], Hale considera los siguientes sistemas periódicos que contienen un parámetro pequeño ν de la forma

$$x' = Ax + \nu g(t, x), \quad x' = A(t)x + \nu g(t, x), \quad x' = A(t)x + g(t, x, \nu).$$

Con algunas condiciones suficientes obtiene la existencia de soluciones ω-periódicas de estos sistemas. Sin embargo, dado que hay muchos sistemas que poseen multiples períodos no se puede esperar la existencia de soluciones periódicas, por lo que el estudio de soluciones casi periódicas nace de forma natural. En 1974 Fink [15] investiga el sistema perturbado

$$x' = A(t)x + \nu g(t, x, \nu).$$

Y bajo algunas condiciones suficientes obtiene la existencia y únicacidad de soluciones casi periódicas. Basado en estos trabajos Xia et. al. [39], obtiene la existencia de soluciones casi periódicas para los sistemas

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + f(t, x) + \nu g(t, x, \nu) \\ x' &= A(t, \nu)x + f(t, x) + \nu g(t, x, \nu). \end{aligned}$$

Motivados por estos trabajos, estudiaremos la existencia de soluciones remotamente casi periódicas, ya que dichas funciones son más realista y más generales, además nos permiten perturbar funciones casi periódicas de una manera más amplia.

En esta sección consideraremos los sistemas

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\,z, \tag{2.22}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + f(t,y), \tag{2.23}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t,x) + g_\nu(t,x). \tag{2.24}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A(t)$ es remotamente casi periódica, $g_\nu(t,x) = g(t,x,\nu)$ es remotamente casi periódica en t uniformemente con respecto a x, ν es un parámetro real pequeño, además $g_0(t,x) = g(t,x,0) \equiv 0$.

Consideremos las siguientes hipótesis:

(H_1) $A(t)$ es remotamente casi periódico. El sistema (2.22) posee una (α, K, P)-dicotomía exponencial, además el núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable.

(H_2) Sea $f(t,x)$ remotamente casi periódica en t uniformemente con respecto a x en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, y satisface la condición de Lipschitz, es decir, para todo $(t,x),(t,y) \in \mathbb{R}\times B[0,r], r \in \mathbb{R}_+$, existe una constante positiva $M(r)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq M(r)\,\|x-y\|,\ t\in\mathbb{R};\ \|x\|,\|y\| \leq r.$$

Además, asumamos que $M(r) < \frac{\alpha}{2K}$.

(H_3) Sea $f(t,x) \in \mathrm{C}^{(2)}$ en x, y la derivada parcial de segundo orden es localmente Lipschitz en x. Además, asumiremos que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))$ es remotamente casi-periódica y $\delta = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))\right\| < \frac{\alpha}{4K^2}$. Donde ξ es la única solución remotamente casi periódica de (2.23).

(H_4) Sea $g_\nu(t,x) = g(t,x,\nu)$ remotamente casi periódica en t uniformemente para $(x,\nu) \in B_r(0)\times[0,\nu_0]$, y para cada parámetro ν real fijo pequeño es uniformemente acotada con respecto a x. Y satisface localmente la condición de Lipschitz

$$\|g_\nu(t,x) - g_\nu(t,y)\| \leq M_1(r,\nu)\,\|x-y\|.$$

donde $(t,x),(t,y) \in \mathbb{R}\times B[0,r]$ y $\nu \in [0,\nu_0]$, tal que

$$\|g_\nu\|_r = \sup_{t\in\mathbb{R},\|x\|\leq r} \|g_\nu(t,x)\| \to 0 \text{ y } M_1(r,\nu) \to 0 \text{ cuando } \nu \to 0$$

para todo $r > 0$ fijo.

Veamos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. *Si se satisface* $(H_1) - (H_4)$. *Entonces existe* r *constante y* $\nu_0 = \nu_0(r)$ *lo suficientemente pequeño tal que el sistema* (2.24) *posee una única solución remotamente casi-periódica* $\psi_\nu(t)$ *en una* r*-vecindad de* $\xi(t)$, *donde* ξ *es la única solución remotamente casi periódica de* (2.23), *para todo* $\nu \in [0, \nu_0]$. *Además, si* $g_\nu(t,x)$ *es uniformemente continua para* $(t,x) \in \mathbb{R} \times B[0,r]$ *y* $\nu \in [0,\nu_0]$, *entonces* $\psi_\nu(t)$ *es continua en* ν *y tenemos que* $\lim_{\nu\to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t)$.

Demostración. Por cálculo diferencial,

$$f(t, y+v) - f(t,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,v) + f_2(t,y)$$

donde

$$f_2(t,y,v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} y_j y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \theta y + v), \quad 0 < \theta < 1. \tag{2.25}$$

Por las hipótesis sobre $f(t,x)$ y $g_\nu(t,x)$, tenemos que para cada r existe $\nu_0 = \nu_0(r)$, $N_i(r)$, $i = 1,2$ y $M_1(r,\nu_0)$, tal que:

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t) + \theta y) \right\| \leq N_1(r), \quad i,j = 1,2,\cdots,n \tag{2.26}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t) + \theta y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t) + \theta \hat{y}) \right\| \leq \theta N_2(r) \|y - \hat{y}\|, \tag{2.27}$$

$$\|g_\nu(t,y) - g_\nu(t,\hat{y})\| \leq M_1(r,\nu_0) \|y - \hat{y}\|. \tag{2.28}$$

para $t \in \mathbb{R}$, $\|y\|, \|\hat{y}\| \leq r$, donde $M_1(r,\nu)$ es acotada y $N_i(r)$, $i = 1,2$, pueden escogerse como funciones no decrecientes en r, respectivamente.
Por lo que,

$$\begin{aligned}
\|f_2(t,y)\| &\leq \left\| \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} y_j y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t) + \theta y) \right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} |y_j y_i| N_1(r) \\
&\leq \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} \left| y_j^2 + y_i^2 \right| N_1(r) \\
&\leq n r^2 N_1(r), \text{ para } \|y\| \leq r.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ahora, veamos que f_2 es Lipschitz,

$$\begin{aligned}
\|f_2(t,y)-f_2(t,\hat{y})\| &= \left\| \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)\,y_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,\theta y+\xi(t)) \right. \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(y_j-\hat{y}_j)\,\hat{y}_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,\theta\hat{y}+\xi(t)) \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}y_i\hat{y}_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[f(t,\theta y+\xi(t))-f(t,\theta\hat{y}+\xi(t))\right]\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(nrN_1(r)+nrN_1(r)+r^2N_2(r)\,\theta\right)\|y-\hat{y}\| \\
&\leq \left(nrN_1(r)+r^2N_2(r)\right)\|y-\hat{y}\|, \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

para $\|y\|,\|\hat{y}\|\leq r$ y $t\in\mathbb{R}$.
Sea $u(t)=x(t)-\xi(t)$; tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= A(t)\,u+f(t,u+\xi(t))-f(t,\xi(t))+g_\nu(t,u+\xi(t)) \qquad (2.31)\\
&= A(t)\,u+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))\,u+H_\nu(t,u(t)), \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

donde

$$H_\nu(t,u(t),\xi(t))=f_2(t,u,\xi(t))+g_\nu(t,u+\xi(t)) \qquad (2.33)$$

Por el Lema 1.2.2, y (H_3), nos permiten concluir que el sistema lineal

$$\frac{du}{dt}=A(t)\,u+\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t))\,u \qquad (2.34)$$

es remotamente casi-periódico y posee dicotomía exponencial satisfaciendo

$$\left\|\tilde{G}(t,s)\right\| \leq \frac{5K^2}{2}e^{-(\alpha-2K\delta)|t-s|},$$

donde $\tilde{G}$ es la matriz de Green asociada al correspondiente sistema (2.34), por lo que tiene la forma

$$\tilde{G}(t,s)=\begin{cases} Y(t)\,QY(s) & ,t\geq s \\ -Y(t)\,(I-Q)\,Y(s) & ,t<s \end{cases},$$

y además es, bi-remotamente casi periódica integrable.
Sea:

$$\widetilde{B} = \widetilde{B}(r,\nu) \;=\; \{\varphi_\nu(t)\,|\varphi_\nu(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, E^n), \text{remotamente casi periódica en } t \text{ para cualquier valor } \nu \in [0,\nu_0], \|\varphi_\nu(t)\| \leq r\}$$

$\widetilde{B}$ es un espacio métrico completo en E^n con $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

Sea $\varphi_\nu(t) \in \widetilde{B}$, consideremos la siguiente ecuación

$$u' = A(t)\,u + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))\,u + H_\nu(t, \varphi_\nu(t)), \tag{2.35}$$

que tiene por solución

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t,s)\,H_\nu(s, \varphi_\nu(s))\,ds, \tag{2.36}$$

Luego, dado que $\varphi_\nu(t) \in \widetilde{B}$, φ_ν es remotamente casi periódica y $H_\nu(t,u)$ es remotamente casi periódica en t uniformemente con respecto a u. Por lo que, $H_\nu(\cdot, \varphi_\nu(\cdot))$ es remotamente casi periódica. Por el Teorema 2.1.4 sabemos que (2.36) es la única solución remotamente casi periódica de (2.35).

Definamos el operador T por

$$T\varphi_\nu(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t,s)\,H_\nu(s, \varphi_\nu(s))\,ds,$$

Recordando (2.33) y por (2.29), tenemos que

$$\begin{aligned} \|H_\nu(t,u)\| &\leq \|f_2(t,u) + g_\nu(t, u + \xi(t))\| \\ &\leq r^2 n N_1(r) + \|g_\nu\|_{\tilde{r}}, \; \|u\| \leq r, \; t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde $\tilde{r}(r) = r + \|\xi\|_\infty$
Además, notemos que H_ν es una función de Lipschitz con

$$L^*(r,\nu_0) = \left(nrN_1(r) + nr^2N_2(r) + M_1(\tilde{r},\nu)\right)$$

la constante de Lipschitz, es decir,

$$\|H_\nu(t,u) - H_\nu(t,\hat{u})\| \leq L^*(r,\nu)\,\|u - \hat{u}\|, \tag{2.38}$$

para $\|u\|, \|\hat{u}\| \leq r$ y $t \in \mathbb{R}$.

Dado que $N_i(r)$, $i=1,2$ son funciones no decrecientes en r, podemos empequeñecer $rnN_i(r)$ tanto como queramos. Luego, para r fijo podemos empequeñecer $\|g_\nu\|_{\tilde{r}}$ tanto como queramos, por la continuidad de g_ν en ν, escogiendo un ν_1 lo suficientemente pequeño. Así, podemos escoger r y $\nu_1(r)$ lo suficientemente pequeño tal que:

$$\left(r^2N_1(r)+\|g_\nu\|_{\tilde{r}}\right)<\frac{(\alpha-2K\delta)}{5K^2}r. \tag{2.39}$$

Luego, dado que $M_1(\tilde{r},\nu)\to 0$ cuando $\nu\to 0$, para r fijo, tenemos que existe ν_2 tal que

$$L^*(r,\nu_0)<\frac{\alpha-2K\delta}{5K^2}, \tag{2.40}$$

donde K, α y δ están definidos en las hipótesis, escogiendo $\nu_0=\text{mín}\{\nu_1,\nu_2\}$ se satifacen ambas desigualdades.
Por (2.39) y (2.37), tenemos

$$\begin{aligned}\|T\varphi_\nu(t)\| &\le \int_{\mathbb{R}}\left\|\tilde{G}(t,s)\right\|\|H_\nu(s,\varphi_\nu(s))\|\,ds\\ &=\sup_{s\in\mathbb{R}}\|H_\nu(s,\varphi_\nu(s))\|\int_{\mathbb{R}}\left\|\tilde{G}(t,s)\right\|ds\\ &\le\frac{5K^2}{(\alpha-2K\delta)}\frac{(\alpha-5K\delta)}{5K^2}r=r.\end{aligned}$$

Nos queda ver la contractividad, para esto consideraremos $\phi_\nu,\varphi_\nu\in\tilde{B}$, por (2.38), tenemos que:

$$\begin{aligned}\|T\phi_\nu(t)-T\varphi_\nu(t)\| &\le\int_{\mathbb{R}}\left\|\tilde{G}(t,s)\right\|\|H_\nu(s,\phi_\nu(s))-H_\nu(s,\varphi_\nu(s))\|\,ds\\ &\le L^*(r,\nu_0)\int_{\mathbb{R}}\left\|\tilde{G}(t,s)\right\|\|\phi_\nu(s)-\varphi_\nu(s)\|\,ds\\ &\le L^*(r,\nu_0)\|\phi_\nu-\varphi_\nu\|_\infty\int_{\mathbb{R}}\left\|\tilde{G}(t,s)\right\|ds\\ &\le\frac{5K^2}{\alpha-2K\delta}L^*(r,\nu_0)\|\phi_\nu-\varphi_\nu\|_\infty,\end{aligned}$$

con $L^*(r,\nu)$ la constante de Lipschitz de H_ν, por (2.40)

$$\frac{5K^2}{\alpha-2K\delta}L^*(r,\nu_0)<\frac{5K^2}{\alpha-2K\delta}\cdot\frac{\alpha-2K\delta}{5K^2}=1.$$

Así, obtenemos que $T : \tilde{B} \to \tilde{B}$ es un operador contractivo. Luego, por el teorema del punto fijo de Banach, existe un único punto fijo $\varphi_\nu(t) \in \tilde{B}$ tal que $T\varphi_\nu(t) = \varphi_\nu(t)$. Donde $\varphi_\nu(t) = x(t) - \xi(t)$ es la única solución remotamente casi-periódica de (2.32), luego $\psi_\nu = \varphi_\nu(t) + \xi(t)$ es solución de (2.24), además satisface $\|\psi_\nu(t) - \xi(t)\| \leq r$.

Por último, veremos que $\lim_{\nu\to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t)$. Dado que φ_ν es solución de (2.31), tenemos que

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = A(t)\varphi_\nu + f(t, \varphi_\nu(t) + \xi(t)) - f(t, \xi(t)) + g_\nu(t, \varphi_\nu(t) + \xi(t)),$$

por lo que φ_ν puede ser expresada por

$$\varphi_\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t,s)\left(f(s, \varphi_\nu(s) + \xi(s)) - f(s, \xi(s)) + g_\nu(s, \varphi_\nu(s) + \xi(s))\right) ds.$$

De lo anterior se obtiene

$$\|\varphi_\nu\|_\infty \leq \left(1 - \frac{2KM(r)}{\alpha}\right)^{-1} \frac{2K}{\alpha} \|g_\nu(s, \varphi_\nu(s) + \xi(s))\|_{\tilde{r}}.$$

Recordando que $\varphi_\nu = \psi_\nu - \xi$, tenemos que

$$\lim_{\nu\to 0} \|\psi_\nu - \xi\| = 0.$$

Se concluye

$$\lim_{\nu\to 0} \psi_\nu = \xi.$$

□

Observación 2.2.2. *Notemos que el teorema anterior es válido para funciones $g_\nu(t,x) = \nu g(t,x)$, en este caso, podemos escoger explícitamente ν_0.*

A continuación, analizaremos el sistema perturbado forzado más general:

$$\frac{dx}{dt} = A_\nu(t)x + f(t,x) + g_\nu(t,x) \tag{2.41}$$

donde $A_\nu(t) = A(t,\nu)$ es una matriz cuadrada de orden n, remotamente casi periódica definida en $\mathbb{R}$, con $\nu \in [0, \nu_0]$. f y g como en el teorema anterior.
Además, consideremos los sistemas:

$$\frac{dv}{dt} = A_0(t)v \tag{2.42}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t,z) \tag{2.43}$$

donde $A_0(t)$ es una función matricial remotamente casi-periódica definida en $\mathbb{R}$.

Consideremos la hipótesis:

(H_1') El sistema (2.42) satisface posee (α, K, P)-dicotomía exponencial tal que el núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable. Además, tenemos que $A_\nu \rightrightarrows A_0$ en $\mathbb{R}$, cuando $\nu \to 0$.

Así, obtenemos el siguiente Corolario

Corolario 2.2.3. *Si se satisface* $(H_1'), (H_2), (H_3)$ *y* (H_4). *Entonces existe* r *constante y* $\nu_0 = \nu_0(r)$ *lo suficientemente pequeño tal que el sistema* (2.41) *posee una única solución remotamente casi-periódica* $\psi_\nu(t)$ *en una* r*-vecindad de* $\xi(t)$, *donde* ξ *es la única solución remotamente casi periódica de* (2.43), *para todo* $\nu \in [0, \nu_0]$. *Además, si* $g_\nu(t,x)$ *es uniformemente continua para* $(t,x) \in \mathbb{R} \times B[0,r]$ *y* $\nu \in [0, \nu_0]$, *entonces* $\psi_\nu(t)$ *es continua en* ν *y tenemos que* $\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t)$.

Demostración. Sea $y(t) = x(t) - \xi(t)$; Por cálculo diferencial, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= A_0(t)y + [A_\nu(t) - A_0(t)](y + \xi(t)) + f(t, y + \xi(t)) - f(t, \xi(t)) \\
&\quad + g_\nu(t, y + \xi(t)) \\
&= A_0(t)y + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))y + H_\nu(t, y(t)),
\end{aligned}$$

donde

$$H_\nu(t, y(t)) = [A_\nu(t) - A_0(t)](y + \xi(t)) + f_2(t, y) + g_\nu(t, y + \xi(t)) \tag{2.44}$$

y f_2 esta dada por (2.25). Por lo que, la ecuación anterior queda:

$$\frac{dy}{dt} = A_0(t)y + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))y + H_\nu(t, y(t)).$$

Notemos que H_ν es una función de Lipschitz, dado que es suma de funciones de Lipschitz, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|H_\nu(t,y) - H_\nu(t,\hat{y})\| &\le \|f_2(t,y) - f_2(t,\hat{y})\| + \|[A_\nu(t) - A_0(t)](y - \hat{y})\| \\
&\quad + \|g_\nu(t, y + \xi(t)) - g_\nu(t, \hat{y} + \xi(t))\| \\
&\le \left(\|A_\nu(\cdot) - A_0(\cdot)\|_\infty + nrN_1(r) + r^2 N_2(r) + M_1(\nu_0)\right)\|y - \hat{y}\|
\end{aligned}$$

Notemos, que la hipótesis de convergencia $A_\nu \rightrightarrows A_0$ cuando $\nu \to 0$, nos permite asegurar que la constante de Lipschitz se empequeñece lo suficiente.
Se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1, en consecuencia se obtiene el corolario.

□

Consideremos la hipótesis:

(H_4') Sea $g(t, x, z)$ remotamente casi periódica en t uniformemente con respecto a $(x, z) \in B_r(0)$. Y satisface localmente la condición de Lipschitz

$$\|g(t, x, y) - g(t, z, v)\| \leq M_1(r)\left[\|x - z\| + \|y - v\|\right].$$

donde $(t, x, y), (t, z, v) \in \mathbb{R} \times B[0, r] \times B[0, r]$, para todo $r > 0$ fijo.

Teorema 2.2.4. *Consideremos el sistema con retardo*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + h(t) + \nu g(t, y(t), y(t - \alpha)), \quad \alpha > 0 \text{ fijo}, \tag{2.45}$$

y ξ es la única solución remotamente casi periódica de

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z + h(t), \tag{2.46}$$

tal que se satisface (H_1), $h \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ y se satisface (H_4'). Entonces para todo r fijo existe $\nu_0 = \nu_0(r)$ lo suficientemente pequeño tal que el sistema (2.45) posee una única solución remotamente casi-periódica $\psi_\nu(t)$ en una r-vecindad de $\xi(t)$, para todo $\nu \in [0, \nu_0]$. Además $\psi_\nu(t)$ es continua en ν tal que

$$\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t).$$

Demostración. Consideremos $u(t) = y(t) - \xi(t)$, por lo que

$$\frac{du}{dt} = A(t)\, u + \nu g(t, u(t) + \xi(t), u(t - \alpha) + \xi(t - \alpha)),$$

Para r fijo. Sea

$$\tilde{B}(r) = \{\varphi_\nu \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi_\nu\| \leq r\}$$

Sea $\nu_0(r) = \min\left\{\frac{r\alpha}{2K\|g\|_\infty}, \frac{\alpha}{4KM_1(r)}\right\}$. Consideremos

$$\frac{dv}{dt} = A(t)\, v + \nu g(t, \varphi_\nu(t) + \xi(t), \varphi_\nu(t - \alpha) + \xi(t - \alpha)),$$

sabemos que la solución esta dada por

$$v(t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) g(s, \varphi_\nu(s) + \xi(s), \varphi_\nu(s - \alpha) + \xi(s - \alpha))\, ds$$

y además es remotamente casi periódica.
Consideremos el operador

$$T\varphi_\nu(t)=\nu\int_{-\infty}^{\infty}G(t,s)g\left(s,\varphi_\nu\left(s\right)+\xi\left(s\right),\varphi_\nu\left(s-\alpha\right)+\xi\left(s-\alpha\right)\right)ds.$$

Por ver que $T:\tilde{B}\to\tilde{B}$.
Ya sabemos que $T\varphi_\nu\in RAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Por lo que veremos que $\|T\varphi_\nu(t)\|\le r$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|T\varphi_\nu(t)\| &= \nu\int_{-\infty}^{\infty}\|G(t,s)\|\left\|g\left(s,\varphi_\nu\left(s\right)+\xi\left(s\right)\varphi_\nu\left(s-\alpha\right)+\xi\left(s-\alpha\right)\right)\right\|ds\\ &\le \nu 2\frac{K}{\alpha}\|g\|_\infty\le r.\end{aligned}$$

Veremos que el operador es contractivo. Sean $\varphi_\nu,\psi_\nu\in\tilde{B}$, tenemos

$$\|T\varphi_\nu(t)-T\psi_\nu(t)\| \le \nu\frac{4K}{\alpha}M_1(r)\|\varphi_\nu-\psi_\nu\|_\infty.$$

Por lo que es contractivo, y el Teorema concluye igual que el Teorema 2.2.1. □

Por último, consideraremos los siguientes sistemas no lineales y no autónomos

$$\frac{dz}{dt}=f\left(t,z\right) \tag{2.47}$$

$$\frac{dy}{dt}=f\left(t,y\right)+\nu g\left(t,y\left(t\right),y\left(t-\alpha\right)\right),\quad \alpha>0\,\text{fijo}, \tag{2.48}$$

junto con las hipótesis (H_1), (H_3) y

(H_2'') El sistema variacional

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(t,\xi\left(t\right)\right)z \tag{2.49}$$

es remotamente casi periódico, posee (α,K,P)-dicotomía exponencial y el núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable. Donde $\xi\left(t\right)$ es la única solución remotamente casi periódica de (2.47).

Teorema 2.2.5. *Si se cumple (H_1), (H_2'') y (H_3) (H_4'). Entonces existe r constante y $\nu_0=\nu_0\left(r\right)$ lo suficientemente pequeños tal que el sistema (2.48) posee una única solución remotamente casi-periódica $\psi_\nu\left(t\right)$ en una r-vecindad de $\xi\left(t\right)$, para todo $\nu\in\left[0,\nu_0\right]$. Además, si $g_\nu\left(t,x,z\right)$ es uniformemente continua para $\left(t,x,z\right)\in\mathbb{R}\times B\left[0,r\right]\times B\left[0,r\right]$, entonces $\psi_\nu\left(t\right)$ es continua en ν y tenemos que $\lim_{\nu\to0}\psi_\nu\left(t\right)=\xi(t)$.*

Demostración. Consideremos $u(t) = y(t) - \xi(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= f(t, u + \xi(t)) - f(t, u) + \nu g(t, u(t) + \xi(t), u(t-\alpha) + \xi(t-\alpha)), \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t))\, x + f_2(t, u) + \nu g(t, u(t) + \xi(t), u(t-\alpha) + \xi(t-\alpha))
\end{aligned}$$

donde f_2 esta dada por (2.25). Aplicando el Teorema 2.2.4 se concluye el resultado. $\square$

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos y Soluciones Remotamente Casi Periódicas

El estudio de las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos comenzó en 1983 con los trabajos de J. Wiener y Myshkis, en ellos se observó que no existía una teoría sustancial para ecuaciones diferenciales con argumentos constantes a trozos o continua a trozos con retardo. El estudio de las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos (ó DEPCA por sus siglas en inglés) fue iniciado por Wiener [36–38], Myshkis [24], Cooke y Wiener [7], y el Shah y Wiener [31]. El estudio de las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos es de gran interés aplicado, ya que un retardo proporciona un modelo matemático para un sistema físico o biológico en el que la velocidad de cambio del sistema depende de su historia pasada (ver [6, 12, 26–28]).

En este capítulo, estudiaremos la existencia de soluciones remotamente casi periódicas en las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos.

3.1. Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos

Una ecuación diferencial con argumento constante a trozos, es una ecuación con argumento discontinuo del siguiente tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x([t])), \tag{3.1}$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ es continua en $\mathbb{R}^q$ y $[\cdot]$ indica la función parte entera. Notemos que la ecuación es no autónoma.

Las DEPCA son ecuaciones diferenciales híbridas, esto es, gozan de una estructura de sistemas dinámicos continuos sobre los intervalos $]n, n+1[,\ n \in \mathbb{Z}$, y de sistemas dinámicos discretos sobre $\mathbb{Z}$, combinando las propiedades de ambos, diferenciales y en diferencias. Denotaremos por $|\cdot|$ la norma Euclideana.

Es natural definir la solución de una DEPCA, como

Definición 3.1.1. Una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ es un solución de (3.1), si se satisfacen las siguientes condiciones:

(*i*) x es continua en $\mathbb{R}$;

(*ii*) la derivada x' de x existe en $\mathbb{R}$ excepto posiblemente en los puntos $t = n$, $n \in \mathbb{Z}$ donde existen las derivadas laterales;

(*iii*) x satisface (3.1) en el intervalo $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} z'(t) &= A(t)z(t) && (3.2)\\ y'(t) &= A(t)y(t) + B(t)y([t]) && (3.3)\\ x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)x([t]) + f(t), && (3.4) \end{aligned}$$

donde $A(t), B(t) \in M_{q\times q}(\mathbb{R})$ son matrices continuas y $f \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$. Además, sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de (3.2) y la matriz de transición definida por $\Phi(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

Usando la formula de variación de parámetros en $[n, n+1)$, la solución de (3.4) satisface

$$x(t) = \left[\Phi(t,n) + \int_n^t \Phi(t,u)B(u)du\right] x(n) + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du \tag{3.5}$$

$$t \in \mathbb{R},\ n = [t], n \le t < n+1.$$

Definamos

$$
\begin{aligned}
J(t,s) &= I + \int_s^t \Phi(s,u)B(u)du && (3.6)\\
Z(t,s) &= \Phi(t,s)J(t,s). && (3.7)
\end{aligned}
$$

se requiere J invertible, ver [6, 27, 28].
Por la Definición 3.1.1 tenemos que (3.5) es continua en $t = n+1$, por lo que si consideramos $t \to (n+1)^-$, obtenemos

$$
x(n+1) = C(n)x(n) + h(n), \qquad (3.8)
$$

la ecuación discreta asociada a (3.4), donde

$$
\begin{aligned}
C(n) &= \Phi(n+1,n) + \int_n^{n+1} \Phi(n+1,u)B(u)du = Z(n+1,n) && (3.9)\\
h(n) &= \int_n^{n+1} \Phi(n+1,u)f(u)du. && (3.10)
\end{aligned}
$$

Por la continuidad de la solución de una DEPCA hemos obtenido una ecuación en diferencias, es decir, tenemos una fórmula de recursividad para cada $n \in \mathbb{Z}$, así logra pasar de un intervalo a su consecutivo. Finalmente, podemos concluir que para resolver una DEPCA debemos resolver una ecuación en diferencias. Ahora, aplicando la variación de parámetros en la ecuación (3.8), obtenemos

$$
\begin{aligned}
x(k) &= \left(\prod_{i=s}^{k-1} C(i)\right) x(s) + \left(\prod_{m=s}^{k-1} C(m)\right)\left(\sum_{i=s}^{k-1}\left(\prod_{j=s}^{i} C(j)\right)^{-1} h(i)\right)\\
x(k) &= \left(\prod_{i=s}^{k-1} Z(i+1,i)\right) x(s) + \left(\sum_{i=s}^{k-1}\prod_{j=i+1}^{k-1} Z(j+1,j)h(i)\right) && (3.11)
\end{aligned}
$$

con $s \in \mathbb{Z}$ fijo.
Ahora, si reemplazamos (3.11) en (3.5), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Z(t,n)\left(\left(\prod_{i=s}^{n-1} Z(i+1,i)\right)x(s) + \left(\sum_{i=s}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(j+1,j)h(i)\right)\right) \\
&\quad + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du \\
&= Z(t,n)\left(\prod_{i=s}^{n-1} Z(i+1,i)\right)x(s) + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du \\
&\quad + Z(t,n)\left(\sum_{i=s}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(j+1,j)\int_i^{i+1} \Phi(i+1,u)f(u)du\right) \\
&= Z(t,n)\left(\prod_{i=s}^{n-1} Z(i+1,1)\right)x(s) + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du \\
&\quad + \sum_{i=s}^{n-1}\int_i^{i+1}\left(\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(t,n)Z(j+1,j)\Phi(i+1,u)\right)f(u)du
\end{aligned}
$$

Así, tenemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Z(t,n)\left(\prod_{i=s}^{n-1} Z(i+1,i)\right)x(s) + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du \\
&\quad + \sum_{i=s}^{n-1}\int_i^{i+1}\left(\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(t,n)Z(j+1,j)\right)\Phi(i+1,u)f(u)du. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Ahora, si $s \notin \mathbb{Z}$, sabemos que $[s] \leq s \leq [s]+1$. De (3.5), tenemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left[\Phi(t,s) + \int_s^t \Phi(t,u)B(u)du\right]x(s) + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du \\
&\qquad t \in \mathbb{R},\ [s] \leq t < [s]+1.
\end{aligned}
$$

Por lo que, si $t \to ([s]+1)$

$$
x([s]+1) = Z([s]+1,s)x(s) + \int_s^{[s]+1} \Phi([s]+1,u)f(u)du \qquad (3.13)
$$

Luego, reemplazando (3.13) en (3.12), obtenemos

$$\begin{aligned}
x(t) &= Z(t,n)\prod_{i=[s]+1}^{n-1} Z(i+1,i)\left(Z([s]+1,s)x(s)+\int_s^{[s]+1}\Phi([s]+1,u)f(u)du\right)\\
&\quad+\sum_{i=[s]+1}^{n-1}\int_i^{i+1}\left(\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(t,n)Z(j+1,j)\right)\Phi(i+1,u)f(u)du+\int_n^t \Phi(t,u)f(u)du\\
&= Z(t,n)\left(\prod_{i=[s]+1}^{n-1} Z(i+1,i)\right)Z([s]+1,s)x(s)\\
&\quad+\int_s^{[s]+1} Z(t,n)\left(\prod_{i=[s]+1}^{n-1} Z(i+1,i)\right)\Phi([s]+1,u)f(u)du\\
&\quad+\sum_{i=[s]+1}^{n-1}\int_i^{i+1}\left(\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(t,n)Z(j+1,j)\right)\Phi(i+1,u)f(u)du+\int_n^t \Phi(t,u)f(u)du
\end{aligned}$$

Luego, consideremos

$$R(t,s) = \begin{cases} Z(t,n)\left(\prod_{i=s}^{n-1} Z(i+1,i)\right) & \text{si } s\in\mathbb{Z}\\ Z(t,n)\left(\prod_{i=[s]+1}^{n-1} Z(i+1,i)\right)Z([s]+1,s) & \text{si } s\notin\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Además, si $s\in\mathbb{Z}$

$$\overline{G}(t,u) = \begin{cases} \Phi(t,u) & \text{si } [t]<u\le t\\ Z(t,s)\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(j+1,j)\Phi(i,u) & \text{si } i<u<i+1\le[t]<t \end{cases}, \tag{3.15}$$

y si $s\notin\mathbb{Z}$

$$\tilde{G}(t,u) = \begin{cases} \Phi(t,u) & \text{si } [t]<u\le t\\ Z(t,[t])\prod_{j=i+1}^{n-1} Z(j+1,j)\Phi(i,u) & \text{si } i<u<i+1\le[t]\\ Z(t,[t])\prod_{i=[s]+1}^{n-1} Z(i+1,i)\Phi([s]+1,u) & \text{si } s\le u\le[s]+1 \end{cases} \tag{3.16}$$

Así,

$$G(t,u) \;=\; \begin{cases} \overline{G}(t,u) & \text{si } s \in \mathbb{Z} \\ \tilde{G}(t,u) & \text{si } s \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Finalmente, obtenemos una variación de parámetros para la ecuación diferencial con argumento constante por trozos, dada por

$$x(t) = R(t,s)x(s) + \int_s^t G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

En el siguiente ejemplo, veremos como utilizar la variación de parámetros

Ejemplo 3.1.2. *Consideremos la ecuación lineal escalar con coeficientes constantes*

$$x'(t) = ax(t) + bx([t]) + c, \tag{3.18}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$, *tal que* $x(0) = x_0$.
Tenemos que $\Phi(t,s) = e^{a(t-s)}$, *recordando* (3.6) *y* (3.7), *tenemos que*

$$\begin{aligned} J(t,s) &= 1 + \frac{b}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) \\ Z(t,s) &= e^{a(t-s)} + \frac{b}{a}(e^{a(t-s)} - 1). \end{aligned}$$

Así, por los operadores definidos en (3.14) *y* (3.17), *obtenemos*

$$R(t,0) = (e^{a(t-n)} + \frac{b}{a}(e^{a(t-n)} + 1))\left(e^a + \frac{b}{a}(e^a - 1)\right)^n, \; t \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

y,

$$G(t,u) = \begin{cases} e^{a(t-u)} & si\ [t] < u \leq t \\ (e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)) \displaystyle\prod_{j=i+1}^{n-1} (e^a + \frac{b}{a}(e^a - 1))e^{a(i-u)} & si\ i < u < i + 1 \leq [t] \end{cases} \tag{3.20}$$

Luego la solución esta dada por

$$x(t) = R(t,0)x_0 + c\int_0^t G(t,\tau)d\tau.$$

ó representada por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (e^{a(t-[t])} + \frac{b}{a}(e^{a(t-[t])} - 1))\left(e^a + \frac{b}{a}(e^a - 1)\right)^{[t]} x_0 \\
&+ \sum_{i=0}^{[t]-1} c \int_i^{i+1} \left(e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)\right) \prod_{j=i+1}^{[t]-1} (e^a + \frac{b}{a}(e^a - 1))e^{a(i-u)} du \\
&+ c \int_{[t]}^{t} e^{a(t-u)} du.
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, estudiaremos primero las soluciones remotamente casi periódicas en ecuaciones en diferencias.

3.1.1. Soluciones Remotamente Casi Periódicas en Ecuaciones en Diferencias

Las ecuaciones en diferencias surgen de manera natural en la matemática discreta y juega un papel clave en diversas áreas, ya sea probabilidad, informática, métodos numéricos de ecuaciones diferenciales, teoría del control (ver [1, 22, 25]). Las propiedades de estas ecuaciones y sus aplicaciones a sistemas dinámicos discretos y ecuaciones diferenciales con argumentos a trozos constantes han sido estudiados recientemente por varios autores.

En esta subsección estudiaremos la ecuación

$$
\begin{aligned}
x(n+1) &= C(n)x(n), && (3.21) \\
y(n+1) &= C(n)y(n) + h(n) && (3.22)
\end{aligned}
$$

donde tanto $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{q\times q}$ la matriz cuadrada invertible, como $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^q$ son sucesiones remotamente casi periódicas.
El sistema (3.22) es ampliamente estudiado en [34].

Nuestra prioridad se basa en la ecuación (3.22) ya que no han sido estudiadas en la literatura para el caso de soluciones remotamente casi periódicas discretas. La versión casi periódica se puede ver en [44].

En el Capítulo anterior, la dicotomía exponencial fue importante para el estudio de soluciones remotamente casi periódicas en ecuaciones diferenciales no-autónomas, principalmente nos permite obtener una solución acotada dependiente del núcleo de Green asociado al sistema. La siguiente definición describe la versión discreta de dicotomía exponencial.

Definición 3.1.3. Diremos que la ecuación (3.21) tiene una (α, K, P)-dicotomía exponencial en $\mathbb{Z}$ si existen constantes positivas α, $K \geq 1$ y una proyección P $(P^2 = P)$, tal que

$$\|\tilde{G}(n,m)\| \leq Ke^{-\alpha|n-m|},$$

donde $\tilde{G}(n,m)$ es la función de Green discreta dada por

$$\tilde{G}(n,m) = \begin{cases} \Phi(n) P \Phi^{-1}(m) & n \geq m \\ -\Phi(n)(I-P)\Phi^{-1}(m) & n < m \end{cases}$$

donde $\Phi(n)$ es la matriz fundamental del sistema (3.21) tal que $\Phi(0) = I$.

En lo que sigue estudiaremos la ecuación en diferencias (3.22) y la existencia de soluciones remotamente casi periódicas. Tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.1.4. *Sea $h \in RAP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q)$. Supongamos que la ecuación en diferencias* (3.21) *posee una (α, K, P)-dicotomía exponencial en $\mathbb{Z}$ y la función de Green $\tilde{G}(\cdot,\cdot)$ es Bi-remotamente casi periódica sumable, i.e. para todo $\epsilon > 0$ existe $T\left(\tilde{G}, \epsilon\right)$ relativamente denso en $\mathbb{Z}$, tal que si $\tau \in T\left(\tilde{G}, \epsilon\right)$*

$$\limsup_{|n|\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\tilde{G}(n+\tau, k+\tau) - \tilde{G}(n,k)\right\| \leq \epsilon. \tag{3.23}$$

Entonces la ecuación en diferencias (3.22) *tiene una única solución $y(n)$ remotamente casi periódica, dada por*

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(n,k)h(k), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Además, esta uniformemente acotada por

$$\|y(n)\| \leq K\left(1+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)^{-1}\|h\|_\infty, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. En el Teorema 5.7 en [44] se puede ver que la única solución acotada de la ecuación discreta (3.22) es

$$y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{G}(n,k)h(k).$$

Por lo que, solo probaremos que ésta solución es remotamente casi periódica.
En efecto, consideremos

$$
\begin{aligned}
\|y(n+\tau)-y(n)\| &= \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{G}(n+\tau,k+\tau)h(k+\tau)-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{G}(n,k)h(k)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\tilde{G}(n+\tau,k+\tau)-\tilde{G}(n,k))h(k+\tau)\right\| \\
&\quad+\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{G}(n,k)(h(k+\tau)-h(k))\right\| \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|\tilde{G}(n+\tau,k+\tau)-\tilde{G}(n,k)\right\|\|h(k+\tau)\| \\
&\quad+K\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\alpha|n-k|}\|h(k+\tau)-h(k)\|.
\end{aligned}
$$

Aprovechando que la función de Green es Bi-remotamente casi periódica sumable, que la función h es remotamente casi periódica y la dicotomía exponencial, obtendremos el resultado. Definamos

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\|\tilde{G}(n+\tau,k+\tau)-\tilde{G}(n,k)\|\|h(k+\tau)\| && (3.25)\\
S_2(n) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\alpha|n-k|}\|h(k+\tau)-h(k)\|. && (3.26)
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\|h\|_\infty < M$. Estudiemos solamente cuando $n\to\infty$. La situación para $n\to-\infty$ es análoga.
Dado $\epsilon>0$, consideremos $\epsilon' = \min\{\epsilon(2\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\alpha|n-k|}+4M)^{-1},\epsilon(2M)^{-1}\}$, existe $n_1>0$ tal que si $\tau\in T(h,\epsilon')$

$$\|h(n+\tau)-h(n)\|<\epsilon',\ \text{si } |n|\geq n_1. \qquad (3.27)$$

Notemos que

$$\sum_{-n_1}^{n_1}e^{\alpha k}<M_1,$$

dado que es una suma finita.
Además, existe $n_2>0$ tal que

$$e^{-\alpha n}M_1<\epsilon',\ \text{si } n\geq n_2 \qquad (3.28)$$

Sea $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Luego si $n > n_0$, para ,

$$\begin{aligned}
S_2(n) &= \left(\sum_{-\infty}^{-n_1} + \sum_{-n_1}^{n_1} + \sum_{n_1}^{\infty}\right) e^{-\alpha|n-k|}\,\|h(k+\tau) - h(k)\| \\
&\leq \sup_{k\in(-\infty,-n_1]} \|h(k+\tau) - h(k)\| \sum_{-\infty}^{-n_1} e^{-\alpha|n-k|} \\
&\quad + \sum_{-n_1}^{n_1} e^{-\alpha|n-k|}\,\|h(k+\tau) - h(k)\| \\
&\quad + \sup_{k\in[n_1,\infty)} \|h(k+\tau) - h(k)\| \sum_{n_1}^{\infty} e^{-\alpha|n-k|} \\
&\leq 2\epsilon' \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n-k|} + 2M \sum_{-n_1}^{n_1} e^{-\alpha(n-k)} \\
&\leq 2\epsilon' \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n-k|} + 2Me^{-\alpha n} \sum_{k=-n_1}^{n_1} e^{\alpha k} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Por (3.27) y (3.28), tenemos que

$$S_2(n) < \frac{\epsilon}{2}, \quad |n| > n_0.$$

Luego concluimos que

$$\limsup_{|n|\to\infty} S_2(n) < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego, si consideramos $\tau \in T(h,\epsilon') \cap T(\tilde{G},\epsilon') \cap \mathbb{Z}$, tenemos para (3.25)

$$S_1(n) \leq M \sum_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{G}(n+\tau, k+\tau) - \tilde{G}(n,k)\|.$$

Utilizando que el núcleo de Green satisface (3.23), obtenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{|n|\to\infty} S_1(n) &\leq M \limsup_{|n|\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{G}(n+\tau, k+\tau) - \tilde{G}(n,k)\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Así, finalmente tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|y(n+\tau)-y(n)\| \; < \; \epsilon,$$

es decir, y es una función remotamente casi periódica. Esto concluye la demostración. □

Observación 3.1.5. *Se pueden dar condiciones similares a las expuestas en la sección 1.3 para que* (3.23) *se satisfaga.*

Del resultado anterior, se desprende el siguiente corolario

Corolario 3.1.6. *Sea $h \in RAP(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q)$. Supongamos que $C(n) \equiv C$ en* (3.22) *tiene valores propios fuera del circulo unitario (es decir, con módulo distinto de* 1*). Entonces la ecuación en diferencias* (3.22) *tiene una única solución $y(n)$ remotamente casi periódica.*

Observación 3.1.7. *El criterio de Schur-Cohn [21] da condiciones necesarias y suficientes para que los valores propios de una matriz cuadrada no pertenezcan al circulo unitario.*

Por último consideremos el sistema lineal no homogéneo

$$y(n+1) = C(n)y(n) + h(n) + f_\nu(n, y(n)) \tag{3.29}$$

tal que $f_\nu(n,z) = f(n,z,\nu)$ y además $\|f_\nu\| \to 0$ cuando $\nu \to 0$ uniformemente en $(n,z) \in \mathbb{Z} \times B_r(0)$. Consideremos las siguientes hipótesis

(D1) La ecuación en diferencias (3.21) posee una (α, K, P)-dicotomía exponencial en $\mathbb{Z}$ y la función de Green $\widetilde{G}(\cdot,\cdot)$ es Bi-remotamente casi periódica sumable, es decir, se satisface (3.23).

(D2) Sea $f_\nu(n,z) = f(n,z,\nu)$ sucesión remotamente casi periódica en n para $(z,\nu) \times B_r(0) \times [0,\nu_0]$, y para cada parámetro ν real fijo pequeño es uniformemente acotada con respecto a z. Y satisface la condición de Lipschitz

$$\|f_\nu(n,x) - f_\nu(n,z)\| \le M_1(r,\nu)\|x-z\|,$$

donde $(n,x),(n,z) \in \mathbb{Z} \times B_r(0)$ y $M_1(r,\nu) \to 0$ y $\|f_\nu\| \to 0$ cuando $\nu \to 0$ para r fijo.

Así, tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.1.8. *Sea $\xi(n)$ la única solución remotamente casi periódica de la ecuación en diferencias lineal no homogénea (3.22) y si se satisfacen (D1) y (D2). Entonces dado r existe $\nu_0 = \nu_0(r) > 0$ lo suficientemente pequeño tal que el sistema (3.29) tiene una única solución remotamente casi periódica $\psi_\nu(n)$ en una $r-$vecindad de $\xi(n)$ para cada $\nu \in [0, \nu_0]$ fijo. Además, si $f_\nu(n, z)$ es uniformemente continua en $t \in \mathbb{R}$ con $[0, \nu_0(r)]$, entonces ψ_ν es continua en ν y tenemos que*

$$\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(n) = \xi(n).$$

Demostración. Sea $z(n) = y(n) - \xi(n)$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} z(n+1) &= y(n+1) - \xi(n+1) \\ &= C(n)y(n) + h(n) + f_\nu(n, y(n)) - C(n)\xi(n) - h(n) \\ z(n+1) &= C(n)z(n) + f_\nu(n, z(n) + \xi(n)) \end{aligned}$$

Consideremos

$$\tilde{B}(r) = \{\varphi_\nu \in \mathrm{RAP}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q) | \|\varphi_\nu\|_\infty \leq r\}. \tag{3.30}$$

Luego, si consideramos

$$z(n+1) = C(n)z(n) + f_\nu(n, \varphi_\nu(n) + \xi(n)).$$

Por el Teorema 3.1.4 tenemos que la solución remotamente casi periódica esta dada por

$$T\varphi_\nu(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(n, k) f_\nu(k, \varphi_\nu(k) + \xi(k)),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Además, tenemos que

$$\|T\varphi_\nu(n)\| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} K e^{-\alpha|n-k|} \|f_\nu\|_\infty$$

escogemos ν_1 tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} K e^{-\alpha|n-k|} \|f_\nu\|_\infty < r.$$

Sean $\varphi_\nu, \psi_\nu \in \tilde{B}(r)$ tenemos que

$$\|T\varphi_\nu(n) - T\psi_\nu(n)\| \leq M_1(r, \nu) \sum_{k \in \mathbb{Z}} K e^{-\alpha|n-k|} \|\varphi_\nu - \psi_\nu\|_\infty$$

Escogemos ν_2 y r lo suficientemente pequeños tal que

$$M_1(r,\nu)\sum_{k\in\mathbb{Z}} Ke^{-\alpha|n-k|} < 1.$$

Para $\nu_0 = \min\{\nu_1, \nu_2\}$ obtenemos que $T : \tilde{B} \to \tilde{B}$ es un operador contractivo. Luego, existe un único punto fijo $\varphi_\nu(t) \in \tilde{B}$ tal que $T\varphi_\nu(n) = \varphi_\nu(n)$. Donde $\varphi_\nu(n) = y(n) - \xi(n)$ es la única solución remotamente casi-periódica de (3.31), luego $\psi_\nu(n) = \varphi_\nu(n) + \xi(n)$ es solución de (3.29), además satisface $|\psi_\nu(t) - \xi(t)| \leq r$. Esto concluye la demostración. □

3.2. Existencia de Soluciones Remotamente Casi Periódicas para DEPCA

En [51] buscan soluciones remotamente casi periódicas para (3.4) con A, B matrices constantes. Además en [43] se estudia la existencia de soluciones casi periódicas para (3.4). A continuación trataremos el caso con A, B matrices remotamente casi periódicas.

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental de (3.2) tal que $\Phi(0) = I$, donde I es la matriz identidad. Si $x(t)$ es una solución de (3.4) entonces $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ satisface la ecuación en diferencias no homogénea (3.22) donde $C(n)$ y $h(n)$ están dados por (3.9) y (3.10), respectivamente.

En lo que sigue $A(t)$, $B(t)$ serán matrices remotamente casi periódicas y la función $f(t)$ es remotamente casi periódica, salvo que se diga lo contrario y consideraremos $\max\{\|A\|_\infty, \|B\|_\infty, \|f\|_\infty\} \leq M$.

Lema 3.2.1. *Sean A matriz remotamente casi periódica, $f(t) \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ y $\Phi(t)$ una matriz fundamental de (3.2), entonces se tiene lo siguiente:*

1. *La matriz $\Phi(n+1, n)$ es remotamente casi periódica discreta.*
2. *La sucesión $h(n) = \int_n^{n+1} \Phi(n+1, u)f(u)du$ es remotamente casi periódica discreta.*

Demostración. (1) Se concluye del Teorema 1.3.12 con $t = n+1$, $s = n$.

(2) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_\tau h(n)\| &= \left\| \int_n^{n+1} \Phi(n+\tau+1, u+\tau) f(u+\tau) du - \int_n^{n+1} \Phi(n+1,u) f(u) du \right\| \\
&\leq \int_n^{n+1} \|\Phi(n+\tau+1,u+\tau) f(u+\tau) - \Phi(n+1,u) f(u)\| \, du \\
&\leq \int_n^{n+1} \|\Phi(n+\tau+1,u+\tau) - \Phi(n+1,u)\| \, \|f(u+\tau)\| \, du \\
&\quad + \int_n^{n+1} \|\Phi(n+1,u)\| \, \|f(u+\tau) - f(u)\| \, du \\
&\leq M \sup_{u\in[n,n+1]} \|\Phi(n+\tau+1,u+\tau) - \Phi(n+1,u)\| \\
&\quad + k_0 \sup_{u\in[n,n+1]} \|f(u+\tau) - f(u)\| .
\end{aligned}
$$

Por el Teorema 1.3.12 tenemos que para $\epsilon > 0$, existe $\epsilon'(\epsilon) = \epsilon'$ tal que si $\tau \in T(A, \epsilon'/M)$ tenemos que

$$\limsup_{|n|\to\infty} M\|\Phi(n+\tau+1,u+\tau) - \Phi(n+1,u)\| \leq \epsilon, \text{si} \ , \ 0 \leq |n+1-u| < 1.$$

Luego, ya que

$$\sup_{u\in[n,n+1]} \|f(u+\tau) - f(u)\| \leq \sup_{u\in[n,\infty)} \|f(u+\tau) - f(u)\|$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sup_{u\in[n,n+1]} \|f(u+\tau) - f(u)\| &\leq \limsup_{n\to\infty} \sup_{u\in[n,\infty)} \|f(u+\tau) - f(u)\| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \|f(n+\tau) - f(n)\| .
\end{aligned}
$$

Sea $\epsilon'' = \min\{\epsilon'/2M, \epsilon/2k_0\}$, donde $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M+k_0}$. Consideremos $\tau \in T(\Phi,\epsilon'') \cap T(f,\epsilon'') \cap \mathbb{Z}$, luego para $n \to \infty$

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \int_{n+\tau}^{n+\tau+1} \Phi(n+\tau+1,u) f(u) du - \int_n^{n+1} \Phi(n+1,u) f(u) du \right\| \leq \epsilon.$$

La situación para $n \to -\infty$ es análoga. Esto concluye la demostración. □

El siguiente lema, nos ayudará a relacionar las soluciones $\mathbb{Z}RAP$ con soluciones RAP en la ecuación (3.4).

Lema 3.2.2. *Sea $A(\cdot), B(\cdot), f(\cdot)$ funciones acotadas, localmente integrables. Entonces, toda solución acotada de (3.4) es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $y(\cdot)$ una solución acotada de (3.4), como $A(\cdot), B(\cdot)$ y $f(\cdot)$ son acotadas, entonces existe $M_0 > 0$, tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)y(t) + B(t)y([t]) + f(t)\| < M_0.$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\|y(t) - y(s)\| \leq \left\| \int_s^t (A(u)y(u) + B(u)y([u]) + f(u))du \right\| \leq M_0|t-s|.$$

Por lo que es una función de Lipschitz, en particular es uniformemente continua. □

Así, podemos enunciar uno de los resultados principales de este Capítulo.

Teorema 3.2.3. *Supongamos que $A(t)$, $B(t)$ son funciones remotamente casi periódicas, $f(t) \in \mathbb{Z}RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$ y la ecuación discreta asociada posee dicotomía exponencial tal que el núcleo de Green asociada a ella es bi-remotamente casi periódica sumable. Entonces (3.4) tiene una única solución remotamente casi periódica $\tilde{y}(t)$.*

Demostración. Usando la fórmula de variación de parámetros en el intervalo $[n, n+1)$, sabemos que la solución de (3.4) satisface

$$\tilde{y}(t) = \left[\Phi(t,n) + \int_n^t \Phi(t,u)B(u)du\right]\tilde{y}(n) + \int_n^t \Phi(t,u)f(u)du,$$
$$t \in \mathbb{R},\ n = [t], n \leq t < n+1.$$

De la expresión anterior obtenemos la ecuación en diferencias no homogénea (3.22) con $C(n)$ y $h(n)$ dadas por (3.9) y (3.10), respectivamente.

Por el Lema 3.2.1 podemos aplicar el Teorema 3.1.4, lo que nos permite concluir que la ecuación en diferencias no homogénea (3.22) posee una única solución remotamente casi periódica $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, además, $|y(n)| \leq \gamma, \forall n \in \mathbb{Z}$. Ahora, mostraremos que la solución $\tilde{y}(t)$ de (3.4) con $\tilde{y}(n) = y(n), n \in \mathbb{Z}$, es remotamente casi periódica.

Si $\tau \in \mathbb{Z}$, sabemos que $[t+\tau]=[t]+\tau$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y}(t+\tau)-\tilde{y}(t)\| &\leq \| \left[\Phi(t+\tau,[t]+\tau)-\Phi(t,[t])\right] y([t]+\tau)\| \\
&\quad +\|\Phi(t,[t]) \left[y([t]+\tau)-y([t])\right] \| \\
&\quad +\left\| \int_{[t]}^{t} (\Phi(t+\tau,u+\tau)B(u+\tau)-\Phi(t,u)B(u))\, du \; y([t]+\tau) \right\| \\
&\quad +\left\| (y([t]+\tau)-y([t])) \int_{[t]}^{t} \Phi(t,u)B(u)du \right\| \\
&\quad +\left\| \int_{[t]}^{t} (\Phi(t+\tau,u+\tau)f(u+\tau)-\Phi(t,u)f(u))\, du \right\| \\
&\leq \|\Phi(t+\tau,[t]+\tau)-\Phi(t,[t])\| \, \|y([t]+\tau)\| \\
&\quad +\|\Phi(t,[t])\| \, \|y([t]+\tau)-y([t])\| \\
&\quad +\|y([t]+\tau)-y([t])\| \int_{[t]}^{t} \|\Phi(t,u)B(u)\|\, du \\
&\quad +\int_{[t]}^{t} \|\Phi(t+\tau,u+\tau)\| \, \|B(u+\tau)-B(u)\|\, du \, \|y([t]+\tau)\| \\
&\quad +\int_{[t]}^{t} \|\Phi(t+\tau,u+\tau)-\Phi(t,u)\| \, \|B(u)\|\, du \, \|y([t]+\tau)\| \\
&\quad +\int_{[t]}^{t} \|\Phi(t+\tau,u+\tau)\| \, \|f(u+\tau)-f(u)\|\, du \\
&\quad +\int_{[t]}^{t} \|\Phi(t+\tau,u+\tau)-\Phi(t,u)\| \, \|f(u)\|\, du
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.3.12 tenemos que $\Phi(t,s)$ es localmente Bi-remotamente casi periódica, la sucesión $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es remotamente casi periódica y por hipótesis B, f son funciones remotamente casi periódicas y $\mathbb{Z}$ remotamente casi periódica, respectivamente.

Dado que f es una función $\mathbb{Z}$-remotamente casi periódica, si $\tau \in T(f,\epsilon)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \sup_{u\in[\,[t],t]} \|f(u+\tau)-f(u)\| &\leq \limsup_{t\to\infty} \sup_{u\in[t,\infty)} \|f(u+\tau)-f(u)\| \\
&= \limsup_{t\to\infty} \|f(t+\tau)-f(t)\| < \epsilon
\end{aligned}$$

Sea $\epsilon' = \epsilon(\gamma+k_0+k_0M+\beta k_0+M\beta+k_0+M)^{-1}$, si $\tau \in T(y,\epsilon')\cap T(A,\epsilon')\cap T(B,\epsilon')\cap$

$T(f,\epsilon')\cap\mathbb{Z}$ y recordando que $\|\Phi(t,s)\| < k_0$ cuando $0 \le |t-s| \le 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y}(t+\tau)-\tilde{y}(t)\| \ \le\ & \|\Phi(t+\tau,[t]+\tau)-\Phi(t,[t])\|\gamma + k_0\|y([t]+\tau)-y([t])\| \\
& + \|y([t]+\tau)-y([t])\|\, k_0 M + \gamma k_0 \sup_{u\in[\,[t],t]} \|B(u+\tau)-B(u)\| \\
& + M\gamma \sup_{u\in[\,[t],t]} \|\Phi(t+\tau,u+\tau)-\Phi(t,u)\| \\
& + k_0 \sup_{u\in[\,[t],t]} \|f(u+\tau)-f(u)\| \\
& + M \sup_{u\in[\,[t],t]} \|\Phi(t+\tau,u+\tau)-\Phi(t,u)\|\,.
\end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \|\tilde{y}(t+\tau)-\tilde{y}(t)\| \ \le\ \epsilon,$$

es decir, la solución $\tilde{y}$ es $\mathbb{Z}$-remotamente casi periódica y es única dado que la sucesión $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ determina univocamente la solución de la ecuación diferencial con argumento constante a trozos.
Por los Lemas 1.4.13 y 3.2.2, concluimos que la solución es remotamente casi periódica. □

3.3. Existencia de Soluciones Remotamente Casi Periódicas para DEPCA Perturbadas

En [40], Xia et. al. considera los siguientes sistemas casi periódicos con argumento constante a trozo que contienen un parámetro pequeño ν de la forma

$$\begin{aligned}
x' &= A(t)x(t)+B(t)x([t])+f(t)+\nu g(t,x(t),x([t]),\nu), \\
x' &= \tilde{f}(t.x(t),x([t]))+\nu g(t,x(t),x([t]),\nu).
\end{aligned}$$

Con algunas condiciones suficientes obtiene la existencia de soluciones casi periódicas de estos sistemas. Siendo este uno de los pocos trabajos que estudian ecuaciones de esta forma.

Motivados por estos trabajos, estudiaremos la existencia de soluciones remotamente casi periódicas en ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos, corrigiendo errores existentes en la literatura, como por ejemplo [40].

En esta sección estudiaremos las ecuaciones diferencial no homogéneas con argumento constante a trozos de la forma

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y([t]) + f(t) + g_\nu(t, y(t), y([t])), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.31)$$

$$z'(t) = \widetilde{f}(t, z(t), z([t])) + g_\nu(t, z(t), z([t])), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.32)$$

donde $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{q\times q}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, $\tilde{f}, g_\nu : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, además $g_\nu(t, x_1, x_2) = g(t, x_1, x_2, \nu)$ tal que $g(t, x_1, x_2, 0) = 0$
Usaremos la dicotomía exponencial y el principio de contracción, con algunas condiciones obtendremos la existencia y unicidad de soluciones x_ν remotamente casi periódicas, tal que $\lim_{\nu\to 0} x_\nu$ existe y es el correspondiente.

Consideremos las ecuaciones diferenciales con argumento constante a trozos (3.3),(3.4) y (3.31), donde $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{q\times q}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$, $g_\nu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ son continuas y $\nu \in [0, \nu_0]$.
En lo que sigue, asumiremos que $\max\{\|A\|_\infty, \|B\|_\infty, \|f\|_\infty\} \leq M$.

Consideremos las siguientes hipótesis:

(H_1) Sean $A(t)$, $B(t)$ y $f(t)$ funciones remotamente casi periódicas. La ecuación discreta asociada a (3.3) posee dicotomía exponencial tal que el núcleo de Green asociada a ella es bi-remotamente casi periódica sumable.

(H_2) Sea $g_\nu(t, y_1, y_2)$, una función remotamente casi periódica en t uniformemente para $(y_1, y_2, \nu) \in B_r(0) \times B_r(0) \times [0, \nu_0]$ y para cada parámetro ν real fijo pequeño fijo es uniformemente acotada. Y satisface localmente la condición de Lipschitz

$$\|g_\nu(t, x_1, y_1) - g_\nu(t, x_2, y_2)\| \leq M_0(r, \nu)\left[\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\right],$$

donde $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in \mathbb{R}\times B_r(0)\times B_r(0)$ y $\nu \in [0, \nu_0]$, tal que $M_0(r, \nu) \to 0$ y $\|g_\nu\|_r = \sup\limits_{\substack{\|x\|,\|y\|\leq r,\\ t\in\mathbb{R}}} \|g_\nu(t, x, y)\| \to 0$ cuando $\nu \to 0$ para todo r fijo.

Teorema 3.3.1. *Sea $\xi(t)$ la única solución remotamente casi periódica de la ecuación diferencial lineal no homogénea con argumento constante a trozos* (3.4)*. Si se satisface (H_1) y (H_2), entonces existe r y $\nu_0 = \nu_0(r) > 0$ lo suficientemente pequeños tal que el sistema* (3.31) *posee una única solución remotamente casi periódica $\psi_\nu(t)$*

en una $r-$vecindad de $\xi(t)$ para cada $\nu \in [0, \nu_0]$. Además, si $g_\nu(t, x, y)$ es uniformemente continua en $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times B_r(0) \times B_r(0)$, entonces ψ_ν es continua en ν y tenemos

$$\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t).$$

Demostración. Sea $x(t) = y(t) - \xi(t)$; tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} \\ &= A(t)x(t) + B(t)x([t]) + g_\nu(t, x(t) + \xi(t), x([t]) + \xi([t])). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Denotaremos por:

$$\begin{aligned} B = B(r,\nu) = & \{\varphi(t,\nu) \,|\, \varphi(t,\nu) = \varphi_\nu(t) \in C(\mathbb{R} \times [0,\nu_0], \mathbb{R}^q), \ RAP \text{ en} \\ & t \text{ para todo } \ \nu \in [0,\nu_0] \text{ fijo }, |\varphi_\nu(t)| \le r\} \end{aligned}$$

es un subespacio métrico completo de $RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^q)$.
Para cada $\nu \in [0, \nu_0]$ fijo, sea $\varphi_\nu \in B$, aplicando el Teorema 3.2.3, la siguiente ecuación

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x([t]) + g_\nu(t, \varphi_\nu(t) + \xi(t), \varphi_\nu([t]) + \xi([t])), \quad (3.34)$$

tiene una única solución remotamente casi periódica $T\varphi_\nu(t)$.

Usando la formula de variación de parámetros en $[n, n+1)$, la solución $T\varphi_\nu(t)$ puede representarse por:

$$\begin{aligned} T\varphi_\nu(t) &= \left[\Phi(t,n) + \int_n^t \Phi(t,u)B(u)\,du\right] T\varphi_\nu(n) \\ &\quad + \int_n^t \Phi(t,u)\,g_\nu(u, \varphi_\nu(u) + \xi(u), \varphi_\nu(n) + \xi(n))\,du, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$t \in \mathbb{R}$, $n = [t]$, $n \le t < n+1$.
Además, la sucesión $\{T\varphi_\nu(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es la única solución remotamente casi periódica de la ecuación en diferencias no homogénea asociada a (3.34), es decir, de

$$y(n+1) = C(n)y(n) + h_\nu(n) \quad (3.36)$$

donde

$$h_\nu(n) = \int_n^{n+1} \Phi(n+1,u)\,g_\nu(u, \varphi_\nu(u) + \xi(u), \varphi_\nu(n) + \xi(n))\,du.$$

y C esta dado por (3.9), las cuales son remotamente casi periódicas por el Lema 3.2.1.
Por el Teorema 3.1.4, tenemos que la sucesión satisface la desigualdad

$$\|T\varphi_\nu(n)\| \leq K\left(1+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)^{-1}\|h_\nu\|_\infty, \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{3.37}$$

Ahora, mostraremos que $T\varphi_\nu \in B$.
Primero probaremos que $\|T\varphi_\nu(t)\| \leq r$.
Por $(H2)$, tenemos que $\|g_\nu(t,x_1,y_1)\|_{\tilde{r}} \to 0$ cuando $\nu \to 0$ para $(t,x_1,y_1)\in\mathbb{R}\times B_{\tilde{r}}(0)\times B_{\tilde{r}}(0)$ con $\tilde{r}=r+\|\xi\|_\infty$, luego escogemos $\nu_1(r)$ lo suficientemente pequeño tal que

$$2K_0\left[K_0(M+1)K\left(1+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)^{-1}+1\right]\|g_\nu\|_{\tilde{r}} \leq r, \tag{3.38}$$

para $\nu\in[0,\nu_1(r)]$, donde K_0 es tal que $\|\Phi(t,s)\| < K_0$ para $0\leq|t-s|\leq 1$.
Notemos que la constante de Lipschitz $M_0(r,\nu)$ se puede escoger como una función no decreciente en ν además $M_0(\tilde{r},\nu)\to 0$ cuando $\nu\to 0$ para r fijo, por lo que, existe $\nu_0(r)$ lo suficientemente pequeño, tal que $\nu_0(r)\leq\nu_1$, y además

$$2K_0\left[K_0(M+1)K\left(1+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)^{-1}+1\right]M_0(\tilde{r},\nu) < 1, \tag{3.39}$$

para $\nu\in[0,\nu_0(r)]$. Notemos que

$$\begin{aligned}\|h_\nu(n)\| &= \left|\int_n^{n+1}\Phi(n+1,u)\,g_\nu(u,\varphi_\nu(u)+\xi(u),\varphi_\nu(n)+\xi(n))\,du\right| \\ &\leq K_0\|g_\nu\|_{\tilde{r}}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Entonces para cada $\varphi_\nu\in B$, $\nu\in[0,\nu_0(r)]$, se sigue por (3.35), (3.37), (3.38) y (3.40) que

$$\begin{aligned}\|T\varphi_\nu(t)\| &\leq K_0(1+M)\|T\varphi_\nu(n)\| + K_0\|g_\nu\|_{\tilde{r}} \\ &\leq 2K_0\left[K_0(M+1)K\frac{(1+e^{-\alpha})}{(1-e^{-\alpha})}+1\right]\|g_\nu\|_{\tilde{r}} \leq r, \end{aligned} \tag{3.41}$$

para $\nu\in[0,\nu_0(r)]$. Concluimos que $T\varphi_\nu\in B$.

Por último, probaremos que T es un operador contractivo. En efecto, para cada $\psi_\nu,\varphi_\nu\in B$, $\nu\in[0,\nu_0(r)]$, tenemos

$$\begin{aligned}T\varphi_\nu(t)-T\psi_\nu(t) = & \left[\Phi(t,n)+\textstyle\int_n^t\Phi(t,u)B(u)\,du\right][T\varphi_\nu(n)-T\psi_\nu(n)] \\ & +\textstyle\int_n^t\Phi(t,u)\left[g_\nu(u,\varphi_\nu(u)+\xi(u),\varphi_\nu(n)+\xi(n))\right. \\ & \left.-g_\nu(u,\varphi(u)+\xi(u),\varphi_\nu(n)+\xi(n))\right]du, \quad n\leq t<n+1.\end{aligned}$$

Se sigue

$$\|T\varphi_\nu - T\psi_\nu\|_\infty \leq 2K_0\left[K_0\,(M+1)\,K\frac{(1+e^{-\alpha})}{(1-e^{-\alpha})}+1\right]M_0\,(\tilde{r},\nu)\,\|\varphi_\nu - \psi_\nu\|_\infty.$$

Entonces, por (3.39) obtenemos que $T : B \to B$ es un operador contractivo. Luego, por el Teorema del punto fijo de Banach tenemos que existe un único punto fijo $\varphi_\nu\,(t) \in B$ tal que $T\varphi_\nu\,(t) = \varphi_\nu\,(t)$. Dado que $\varphi_\nu\,(t) = x\,(t) - \xi\,(t)$ es la única solución remotamente casi-periódica de (3.34), luego $\psi_\nu = \varphi_\nu\,(t) + \xi\,(t)$ es solución de (3.31), además satisface $\|\psi_\nu\,(t) - \xi\,(t)\| \leq r$. Por último, veremos que $\lim_{\nu\to 0}\psi_\nu\,(t) = \xi(t)$. Para esto notemos que

$$\lim_{\nu\to 0}\|h_\nu(n)\| = 0 \tag{3.42}$$

Luego por el Teorema 3.1.8, tenemos que

$$\lim_{\nu\to 0}\|\varphi_\nu(n)\| = 0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to 0}\|\varphi_\nu(t)\| &\leq \lim_{\nu\to 0}\left\|\Phi\,(t,n) + \int_n^t \Phi\,(t,u)\,B\,(u)\,du\right\|\,\|\varphi_\nu\,(n)\,\| \\
&\quad + \lim_{\nu\to 0}\int_n^t \|\Phi\,(t,u)\,\|\|g_\nu\,(u,\varphi_\nu\,(u)+\xi\,(u)\,,\varphi_\nu\,(n)+\xi\,(n))\,\|du \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{\nu\to 0}\|\varphi_\nu\,(n)\,\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\nu\to 0}\|g_\nu\,(u,\varphi_\nu\,(u)+\xi\,(u)\,,\varphi_\nu\,(n)+\xi\,(n))\,\| = 0.$$

Podemos concluir que

$$\lim_{\nu\to 0}\psi_\nu(t) = \xi(t).$$

Lo que concluye la demostración. □

A continuación, estudiaremos el sistema perturbado:

$$\frac{dx}{dt} = A_\nu\,(t)\,x + B_\nu(t)x([t]) + f(t) + g_\nu\,(t, x(t), x([t])) \tag{3.43}$$

donde $A_\nu(t), B_\nu(t)$ son matrices cuadradas de orden q, remotamente casi periódicas definidas en $\mathbb{R}$, con $\nu \in [0, \nu_0]$. Además, $A_\nu \rightrightarrows A_0$ y $B_\nu \rightrightarrows B_0$ cuando $\nu \to 0$. f y g son como en el teorema anterior.
Además, consideraremos los siguientes sistemas

$$\frac{dy}{dt} = A_0(t)\,y(t) + B_0(t)y([t]) \tag{3.44}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_0(t)\,z(t) + B_0(t)z([t]) + f(t) \tag{3.45}$$

donde $A_0(t), B_0(t)$ son funciones (matriciales) remotamente casi periódicas definidas en $\mathbb{R}$.

Considere las siguientes hipótesis:

(H_1') Sea $\xi(t)$ la única solución remotamente casi periódica de (3.45). El sistema (3.44) satisface (H_1). Además, supongamos que $A_\nu \rightrightarrows A_0$ y $B_\nu \rightrightarrows B_0$ en $\mathbb{R}$, cuando $\nu \to 0$.

Corolario 3.3.2. *Se satisface $(H_1'), (H_2), (H_3)$ y (H_4). Entonces existe r y $\nu_0 = \nu_0(r)$ lo suficientemente pequeños tal que el sistema (3.43) posee una única solución remotamente casi periódicas $\psi_\nu(t)$ en una r-vecindad de $\xi(t)$, para cada $\nu \in [0, \nu_0]$ fijo. Además, si $g_\nu(t, x, y)$ es uniformemente continua para $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times B_r(0) \times B_r(0)$, con $\nu \in [0, \nu_0]$, entonces $\psi_\nu(t)$ es continua en ν y tenemos que*

$$\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t).$$

Demostración. Sea $u(t) = x(t) - \xi(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} u'(t) &= A_0(t)\,u(t) + B_0(t)u([t]) \\ &\quad + g_\nu(t, \xi(t) + u(t), \xi([t]) + u([t])) \\ &\quad + (A_\nu(t) - A_0(t))(u(t) + \xi(t)) + (B_\nu([t]) - B_0([t]))(u([t]) + \xi([t])) \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} G_\nu(t, u(t), u([t])) &= g_\nu(t, \xi(t) + u(t), \xi([t]) + u([t])) + (A_\nu(t) - A_0(t))(u(t) + \xi(t)) \\ &\quad + (B_\nu([t]) - B_0([t]))(u([t]) + \xi([t])). \end{aligned}$$

Es fácil verificar que las hipótesis del Teorema 3.3.1 se satisfacen. Esto concluye el corolario. $\square$

Consideremos el sistema con retardo

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + h(t) + \nu g\left(t, y(t), y(t-\alpha), y([t])\right), \quad \alpha > 0 \,\text{fijo}, \tag{3.46}$$

además, ξ es la única solución remotamente casi periódica de

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\,z + h(t) \tag{3.47}$$

Consideremos la siguiente hipótesis:

(H_2') Sea $g(t,x,y,z)$ remotamente casi periódica en t uniformemente con respecto a $(x,y,z) \in B_r(0) \times B_r(0) \times B_r(0)$. Y satisface localmente la condición de Lipschitz

$$\|g(t,x_1,x_2,x_3) - g(t,y_1,y_2,y_3)\| \leq M_1(r)\left[\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| + \|x_3 - y_3\|\right],$$

donde $(t,x_1,x_2,x_3), (t,y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R} \times B_r(0) \times B_r(0) \times B_r(0)$, para todo $r > 0$ fijo.

Al considerar $g_\nu(t,x_1,x_2,x_3) = \nu g(t,x_1,x_2,x_3)$, se tiene de manera inmediata que $\|g_\nu\| \rightrightarrows 0$ cuando $\nu \to 0$. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.3. *Si la parte lineal de* (3.46) *posee dicotomía exponencial y su núcleo de Green asociado es Bi-remotamente casi periódico integrable , $h(t)$ es remotamente casi periódica y se satisface (H_2'). Entonces para todo $r > 0$ fijo existe $\nu_0 = \nu_0(r)$ lo suficientemente pequeño tal que el sistema (3.46) posee una única solución remotamente casi-periódica $\psi_\nu(t)$ en una r-vecindad de $\xi(t)$, para todo $\nu \in [0,\nu_0]$. Además, $\psi_\nu(t)$ es continua en ν y tenemos que*

$$\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t).$$

Demostración. Sea $u(t) = y(t) - \xi(t)$, tenemos

$$u'(t) = A(t)u + \nu g\left(t, \xi(t) + u(t), \xi(t-\alpha) + u(t-\alpha), \xi([t]) + u([t])\right).$$

Consideremos $\nu_0 = \min\{\frac{2\alpha r}{K\|g\|_\infty}, \frac{2KM_1(r)}{\alpha}\}$. Sea

$$\tilde{B} = \{\varphi_\nu(t) \,|\, \varphi_\nu(t) \in \text{RAP}, \|\varphi_\nu(t)\| \leq r, \ \nu \in [0,\nu_0]\}.$$

Consideremos, $\varphi_\nu \in \tilde{B}$, tenemos que

$$\frac{du}{dt} = A(t)\, u + \nu g\left(t, \xi(t) + \varphi_\nu(t), \xi(t-\alpha) + \varphi_\nu(t-\alpha), \xi([t]) + \varphi_\nu([t])\right). \quad (3.48)$$

Tenemos que su solución es

$$T\varphi_\nu(t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s) g\left(s, \xi(s) + \varphi_\nu(s), \xi(t-\alpha) + \varphi_\nu(s-\alpha), \xi([s]) + \varphi_\nu([s])\right) ds.$$

Es fácil ver que $T : \tilde{B} \to \tilde{B}$ y además es contractivo. Luego, por el Teorema del punto fijo de Banach tenemos que existe un único punto fijo $\varphi_\nu(t) \in B$ tal que $T\varphi_\nu(t) = \varphi_\nu(t)$. Dado que $\varphi_\nu(t) = x(t) - \xi(t)$ es la única solución remotamente casi-periódica de (3.48), luego $\psi_\nu = \varphi_\nu(t) + \xi(t)$ es solución de (3.46), además satisface $\|\psi_\nu(t) - \xi(t)\| \leq r$. $\square$

Observación 3.3.4. *Notemos que la gran diferencias entre este teorema y los otros, se debe a que en este resultado dada una constante $r > 0$ existe $\nu_0 > 0$, es decir, no existe la complicidad de r y ν_0 como en los teoremas anteriores.*

Finalmente, consideraremos los siguientes sistemas

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x([t])) \quad (3.49)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), y([t])) + g_\nu(t, y(t), y([t])), \quad (3.50)$$

Bajo las hipótesis

(C_1) La ecuación (3.49) tiene una única solución remotamente casi periódica $\xi(t)$.

(C_2) $f(t,x,y) \in C^2$ en x e y, y las derivadas parciales de segundo orden satisfacen la condición de Lipschitz en x e y.

(C_3) La ecuación discreta asociada a la ecuación variacional con argumento constante a trozos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), \xi([t]))z(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t), \xi([t]))z([t]) \quad (3.51)$$

posee dicotomía exponencial tal que el núcleo de Green asociada a ella es Biremotamente casi periódica sumable, donde $\xi(t)$ esta definido en (C_1). Además, $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y))$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y)$ son funciones remotamente casi periódicas en la primera variable.

Teorema 3.3.5. *Si se satisfacen (C_1), (C_2), (C_3) y (H_2) entonces existe $r > 0$ y $\nu_0 = \nu_0(r)$ lo suficientemente pequeños tal que el sistema (3.50) posee una única solución remotamente casi-periódica $\psi_\nu(t)$ en una r-vecindad de $\xi(t)$ para todo $\nu \in [0, \nu_0]$.*
Además, si $g_\nu(t, x, z)$ es uniformemente continua para $(t, x, z) \in \mathbb{R} \times B[0, r] \times B[0, r]$, con $\nu \in [0, \nu_0]$, entonces $\psi_\nu(t)$ es continua en ν y tenemos que

$$\lim_{\nu \to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t).$$

Demostración. Por cálculo sabemos que

$$\begin{aligned}
f(t, x(t) + \xi(t), y([t]) + \xi([t])) - f(t, \xi(t), \xi([t])) = \\
\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), \xi([t]))x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t), \xi([t]))y([t]) \\
+ \frac{1}{2}(x(t) \cdot \nabla_x + y([t]) \cdot \nabla_y)^2 f(t, \theta x(t) + \xi(t), \theta y([t]) + \xi([t])),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

donde $\theta \in [0, 1)$, "$\cdot$" denota el producto escalar y "∇" es el operador hamiltoniano. Sea $z(t) = y(t) - \xi(t)$, entonces de (3.50) y (3.49) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}(t) &= f(t, z(t) + \xi(t), z([t]) + \xi([t])) - f(t, \xi(t), \xi([t])) \\
&\quad + \nu g(t, z(t) + \xi(t), z([t]) + \xi([t])),
\end{aligned}$$

por (3.52), tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), \xi([t]))z(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t), \xi([t]))z([t]) \\
&\quad + \frac{1}{2}(x(t) \cdot \nabla_x + y([t]) \cdot \nabla_y)^2 f(t, \theta z(t) + \xi(t), \theta z([t]) + \xi([t])) \\
&\quad + \nu g(t, z(t) + \xi(t), z([t]) + \xi([t]))
\end{aligned}$$

Sean $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), \xi([t]))$, $B(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t), \xi([t]))$ y

$$F(t, z(t), z([t])) = \frac{1}{2}(x(t) \cdot \nabla_x + y([t]) \cdot \nabla_y)^2 f(t, \theta z(t) + \xi(t), \theta z([t]) + \xi([t])),$$

sin perdida de generalidad podemos asumir que $\max\{\|A\|_\infty, \|B\|_\infty\} \leq M$. Obtenemos el siguiente sistema

$$\frac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t) + B(t)z([t]) + F(t, z(t), z([t])) + \nu g(t, z(t) + \xi(t), z([t]) + \xi([t]))$$

Por (C_2), tenemos que existen $r > 0$ y ν^0, $N_i(r)$, $i = 1, 2$ y $M_0(\nu_0)$, tal que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \theta z(t) + \xi(t), \theta z([t]) + \xi([t]))\right\| & \leq & N_1(r) \\ \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(t, \theta z(t) + \xi(t), \theta z([t]) + \xi([t]))\right\| & \leq & N_1(r) \\ \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(t, \theta z(t) + \xi(t), \theta z([t]) + \xi([t]))\right\| & \leq & N_1(r) \end{array}\right. \tag{3.53}$$

para $i, j = 1, 2, \cdots, q,\ t \in \mathbb{R}$ y $\|z\| \leq r$ y

$$\begin{array}{lcl} \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \theta z(t), \theta z([t])) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, \theta \tilde{z}(t), \theta \tilde{z}([t]))\right\| & \leq & 2\theta N_2(r)\,\|z(t) - \tilde{z}(t)\| \\ \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(t, \theta z(t), \theta z([t])) - \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(t, \theta \tilde{z}(t), \theta \tilde{z}([t]))\right\| & \leq & 2\theta N_2(r)\,\|z(t) - \tilde{z}(t)\| \\ \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(t, \theta z(t), \theta z([t])) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(t, \theta \tilde{z}(t), \theta \tilde{z}([t]))\right\| & \leq & 2\theta N_2(r)\,\|z(t) - \tilde{z}(t)\| \end{array}$$

para $i, j = 1, 2, \cdots, q,\ t \in \mathbb{R}$ y $\|z\| \leq r$, $N_2(r)$ es acotada y $N_1(r), M_0(\nu)$ se pueden escoger como funciones no decrecientes de r y ν, respectivamente. Se sigue que

$$\|F(t, z(t), z([t]))\| \leq 3r^2 N_1(r) \text{ para } \|z\| \leq r \tag{3.54}$$

y

$$\|F(t, z(t), z([t])) - F(t, \tilde{z}(t), \tilde{z}([t]))\| \leq 6(qrN_1(r) + r^2 N_2(r))\|z - \tilde{z}\| \tag{3.55}$$

para $\|z\|, \|\tilde{z}\| \leq r$ y $t \in \mathbb{R}$.
Luego, dado que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.3.1 se concluye el Teorema.

□

Capítulo 4

Aplicaciones y Ejemplos

4.1. Sistema Brusselator

4.1.1. Presentación del Modelo Brusselator

La reacción mecánica a estudiar, comunnmente llamada el Brusselator, es un modelo teórico para un tipo de reacción autocatalítica. El modelo Brusselator fue propuesto por Ilya Prigogine y sus colaboradores de la Universidad Libre de Bruselas. Es un acrónimo en inglés de Brussels ("Bruselas") y oscillator ("oscilador").

Una reacción autocatalítica es tal que actúa una especie para aumentar la velocidad de su reacción de producción. En muchos sistemas autocatalíticos se han visto dinámicas complejas, que incluyen múltiples estados estables y órbitas periódicas.

La dinámica y la química de las reacciones oscilantes han sido objeto de estudio durante los últimos 50 años, comenzando con el trabajo de Boris Belousov. Belousov estaba estudiando el ciclo de Krebs, cuando se encontro con un sistema oscilante, fue testigo de una mezcla de ácido cítrico, bromato y catalizador de cerio en una solución de ácido sulfúrico la cúal sufrío cambios periódicos de color. Estos cambios indican la formación cíclica y el agotamiento de las especies de cerio oxidados de forma diferente. La comunidad científica de la época creía que las oscilaciones en un sistema químico contradecia las leyes de la termodinámica, por lo que el trabajo de Belousov permaneció inédito durante años.

En 1961, diez años después de los experimentos iniciales de Belousov, un nuevo trabajo fue iniciado por A. M. Zhabotinskii. En el cual se reproducen los resultados de Belousov, y pronto comenzó a trabajar en un sistema similar utilizando ácido málico o ácido malónico como reductores.

Este sistema de reacción, comúnmente referido como reacción Belousov-Zhabotinskii se ha estudiado fuertemente desde perspectivas tanto químicas y matemáticas [32]. También ha inspirado a nuevas áreas de estudio, en sistemas químicos similares y en la predicción del comportamiento de los mecanismos de reacción complejas.

En la actualidad hay un gran número de sistemas que permiten conocer el comportamiento complejo de los sistemas oscilantes autocatalíticos. Entre ellos están los modelos Lotka-Volterra, Oregonator, Edelstein, y Horn-Jackson.

4.1.2. Existencia y Unicidad de Soluciones Remotamente Casi Periódicas

El modelo Brusselator, esta dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+1)\,x + x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y, \end{cases} \tag{4.1}$$

el cual posee un único punto crítico en $\left(a, \frac{b}{a}\right)$. Consideremos la perturbación del sistema (4.1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+1)\,x + x^2 y + \alpha \cos\left(\omega t + \sqrt[3]{t}\right) + \beta\sqrt{\alpha}\sin(\omega_1 t + \sqrt[5]{t}), \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y + \gamma\sqrt{\alpha}\sin\left(\omega t + \sqrt[3]{t}\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

Notemos que para $\alpha = 0$ del sistema (4.2) obtenemos (4.1). Sean

$$x = a + \nu u, \;\; y = \frac{b}{a} + \nu v, \;\; \nu = \sqrt{\alpha}.$$

Entonces, considerando los cambios de variables, reescribimos el sistema (4.2), obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b-1)\,u + a^2 v + \beta\sin(\omega_1 t + \sqrt[5]{t}) + \nu\left(\cos(\omega t + \sqrt[3]{t}) + \frac{b}{a}u^2 + 2auv + \nu u^2 v\right), \\ \frac{dv}{dt} = -bu - a^2 v + \gamma\sin(\omega t + \sqrt[3]{t}) - \nu\left(\frac{b}{a}u^2 + 2auv + \nu u^2 v\right). \end{cases} \tag{4.3}$$

Cuando $\nu = 0$, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b-1)\,u + a^2 v + \beta\sin(\omega_1 t + \sqrt[5]{t}), \\ \frac{dv}{dt} = -bu - a^2 v + \gamma\sin(\omega t + \sqrt[3]{t}). \end{cases} \tag{4.4}$$

Así, $f(t) = \left(\beta \sin(\omega_1 t + \sqrt[5]{t}), \gamma \sin(\omega t + \sqrt[3]{t})\right)^T$ es la perturbación de la parte homógenea de (4.4), es decir,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b-1)\,u + a^2 v, \\ \frac{dv}{dt} = -bu - a^2 v. \end{cases} \tag{4.5}$$

Además, este sistema tiene como valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a^2 + b - 1 \pm \sqrt{(a^2 - b + 1)^2 - 4a^2}\right).$$

Si $a^2 - b + 1 \neq 0$, entonces tenemos $\mathrm{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, así (4.5) posee dicotomía exponencial con proyección $P = \mathrm{diag}\,(1,1) = I$ si $a^2 - b + 1 > 0$, y $P = \mathrm{diag}\,(0,0)$ si $a^2 - b + 1 < 0$. Podemos tomar $K = 1$, $\alpha_{1,2} = \mathrm{Re}\lambda_{1,2}$. Por lo que obtenemos el siguiente Teorema

Proposición 4.1.1. *Si $a^2 - b + 1 \neq 0$, entonces el sistema no homógeneo (4.4) tiene una única solución acotada $\xi = (u_o, v_o)^T$, que es remotamente casi-periódica y satisface*

$$\begin{cases} u_0\,(t,\beta,\gamma) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-Re\lambda_1(t-s)}\beta \sin(\omega_1 s + \sqrt[5]{s})ds \\ v_0\,(t,\beta,\gamma) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-Re\lambda_2(t-s)}\gamma \sin(\omega s + \sqrt[3]{t})ds \end{cases},$$

si $a^2 - b + 1 > 0$, además el punto de equilibrio $(0,0)$ es estable. Y

$$\begin{cases} u_0\,(t,\beta,\gamma) = -\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-Re\lambda_1(t-s)}\beta \sin(\omega_1 s + \sqrt[5]{s})ds \\ v_0\,(t,\beta,\gamma) = -\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-Re\lambda_2(t-s)}\gamma \sin(\omega s + \sqrt[3]{s})ds \end{cases},$$

si $a^2 - b + 1 < 0$, además el punto de equilibrio $(0,0)$ es inestable.

Sea $r_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|(u_0, v_0)^T\right|$, entonces por el Teorema 2.2.1 tenemos

Teorema 4.1.2. *Si $a^2 - b + 1 \neq 0$, Entonces para cualquier constante r, existe un $\nu^0 = \nu^0(r)$ lo suficientemente pequeño tal que el sistema (4.3) posee una única solución remotamente casi-periódica $\psi_\nu(t) = (u_\nu(t,\beta,\gamma), v_\nu(t,\beta,\gamma))^T$ en una r-vecindad de $\xi(t) = (u_0(t,\beta,\gamma), v_0(t,\beta,\gamma))^T$ para todo $\nu \in [0,\nu^0]$ con $\|\varphi_\nu(t) - \xi(t)\| \leq r$. Además, $\psi_\nu(t)$ es continua en $\nu \in [0,\nu^0]$ por lo que tenemos $\lim_{\nu\to 0} \psi_\nu(t) = \xi(t)$.*

4.2. Modelo Richard-Chapman

4.2.1. Presentación del Modelo Richard-Chapman

L. Von Bertalanffy en 1938 fue uno de los primeros en formular una teoría sobre el crecimiento orgánico basada en principios biológicos. Sus principales hallazgos se encuentran resumidos en su libro "Teoría General de los Sistemas" [3]. Para el autor

> "El crecimiento se basa en la acción encontrada de procesos anabólicos y catabólicos. El organismo crece cuando la formación sobrepasa a la degradación, y se detiene cuando se equilibran ambos procesos".

También puede suponerse que, en muchos organismos, el catabolismo es proporcional al volumen (peso) y el anabolismo es proporcional a la superficie. Sus ideas parten de considerar a los sistemas vivos como sistemas abiertos (es decir, recibe influencia del medio por lo que es capaz de intercambiar materia y energía).

Para su teoría del crecimiento animal von Bertalanffy propuso la ecuación

$$x'(t) \quad = \quad \eta(x(t))^{\theta} - \gamma x(t),$$

donde x es el peso o volumen de un organismo, γ es la constante de catabolismo, η es la constante de anabolismo y el exponente θ esta dado por la relación alométrica. En la mayoría de los animales estudiados por él, la relación alométrica producía un exponente $\theta \sim 2/3$. Por esto von Bertalanffy, trabaja con la ecuación

$$x'(t) \quad = \quad \eta(x(t))^{2/3}\left[1 - \frac{\gamma}{\eta}(x(t))^{1/3}\right] \tag{4.6}$$

Sin embargo, advirtió que 2/3 no puede considerarse como un "número mágico".

Richards al aplicar la ecuación de crecimiento de von Bertalanffy al crecimiento de plantas, y Chapman al de animales, encontraron que el exponente θ debería conservarse variable ya que para diversas especies se alejaban considerablemente de 2/3. Así, tenemos que la ecuación de Richard-Chapman es

$$x'(t) = rx(t)\left[1 - \frac{1}{K}\left(x(t)\right)^{\theta}\right],$$

La ecuación tiene una considerable flexibilidad, en [17,33] se realiza un arduo estudio sobre estas ecuaciones.

Una justificación para el uso de esta familia de ecuaciones es la relación alométrica ($Y = \frac{1}{K}(x)^{\theta}$) que se encuentra con tanta frecuencia entre dos características de

crecimiento correlacionados, por ejemplo, longitud y ancho de una hoja.
Por último, analizaremos algunos valores de θ.
Cuando $\theta = 1$, obtenemos

$$x'(t) = rx(t)\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right], \text{ecuación de Verhulst.}$$

Para $\theta = 0$, tenemos

$$x'(t) = \left[1 - \frac{1}{K}\right] rx(t), \text{ecuación de Malthus.}$$

4.2.2. Existencia y Unicidad de Soluciones Positivas Remotamente Casi Periódicas

Consideramos la ecuación de Richard-Chapman con una perturbación externa f

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = x\,(t)\left[a\,(t) - b\,(t)\,x^{\theta}\,(t)\right] + f\,(t)\,. \tag{4.7}$$

Antes de comenzar con nuestro resultado principal, demostraremos los siguientes resultados. En lo que sigue supondremos que f es una función continua y acotada. Consideremos las siguientes hipótesis

(H_1) $a\,(t)\,, b\,(t)\,, f\,(t)$ son todas funciones continuas remotamente casi periódicas.

(H_2) $0 < \alpha \leq a(t) \leq A$, $0 < \beta \leq b(t) \leq B$, $0 < f(t) < F$, $0 \leq \theta$ es una constante.

(H_3) Sean $\omega = \frac{1}{A}[\beta - \gamma^{(1+\theta)/\theta}F]$, $\gamma = B/\alpha$, tal que $\left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)\frac{F}{\alpha}\gamma^{1/\theta} < 1$ y $\frac{\beta}{B}\frac{1+\theta}{\theta} > 1$.

El siguiente lema nos permite asegurar la existencia de soluciones positivas

Lema 4.2.1. *Consideremos* (4.7)*; si* $f\,(t) \geq 0$ *entonces el dominio* $\mathbb{R}_+$ *es un invariante positivo con respecto* (4.7).

Demostración. Como $f\,(t) \geq 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dx\,(t)}{dt} &= x\,(t)\left[a\,(t) - b\,(t)\,x^{\theta}\,(t)\right] + f\,(t) \\ &\geq x\,(t)\left[a\,(t) - b\,(t)\,x^{\theta}\,(t)\right], \end{aligned}$$

así, tenemos

$$x(t) \geq x(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \left[a(s) - b(s)\, x^{\theta}(s)\right] ds\right\},$$

luego si $x(t_0) > 0$ tenemos que $x(t) > 0$. Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 4.2.2. *Si las hipotesis* (H_1), (H_2) *y* (H_3) *se satisfacen entonces* (4.7) *posee una única solución remotamente casi periódica* $\phi^*(t)$, *y satisface* $\gamma^{-1/\theta} \leq \phi^*(t) \leq \omega^{-1/\theta}$.

Demostración. Sea $u(t) = 1/x^{\theta}(t)$, solo consideraremos las soluciones positivas de (4.7), podemos escribir el sistema como:

$$\frac{du}{dt} = -\theta a(t)\, u(t) + \theta b(t) - \theta u^{(1+\theta)/\theta}(t)\, f(t). \tag{4.8}$$

Definamos

$$\tilde{B} = \{\varphi(t)\,|\varphi(t) \in \mathrm{RAP},\, \omega \leq \varphi(t) \leq \gamma\}.$$

Sabemos que $\left(\tilde{B}, \|\cdot\|_{\infty}\right)$ es un espacio métrico completo. Dado $\varphi \in \tilde{B}$, consideremos la siguiente ecuación:

$$\frac{du}{dt} = -\theta a(t)\, u(t) + \theta b(t) - \theta \varphi^{(1+\theta)/\theta}(t)\, f(t), \tag{4.9}$$

por el Teorema 2.1.3, sabemos que (4.9) posee una única solución remotamente casi periódica $\eta(t)$, dada por:

$$\eta(t) = \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} \left[b(s) - \varphi^{(1+\theta)/\theta}(s)\, f(s)\right] ds. \tag{4.10}$$

Definiremos el operador T, por

$$T\varphi(t) = \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} \left[b(s) - \varphi^{(1+\theta)/\theta}(s)\, f(s)\right] ds, \tag{4.11}$$

notemos que

$$\begin{aligned} T\varphi(t) &\leq \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du}\, |b(s)|\, ds \\ &\leq \frac{B}{\alpha} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos

$$T\varphi(t) \leq \frac{B}{\alpha} = \gamma.$$

Además,

$$\begin{aligned} T\varphi(t) &= \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} \left[b(s) - \varphi^{(1+\theta)/\theta}(s) f(s)\right] ds \\ &\geq \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} \left[\beta - \gamma^{(1+\theta)/\theta} f(s)\right] ds. \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} T\varphi(t) &\geq \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} \left[\beta - \gamma^{(1+\theta)/\theta} f(s)\right] ds \\ &\geq \frac{1}{A}\left(\beta - \gamma^{(1+\theta)/\theta} F\right) = \omega. \end{aligned}$$

Por lo que, $T\varphi(t) \in \tilde{B}$; luego, $T : \tilde{B} \to \tilde{B}$. Para todo $\varphi, \psi \in \tilde{B}$, se sigue que

$$|T\varphi(t) - T\psi(t)| \leq \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} |f(s)| \left|\psi^{(1+\theta)/\theta}(s) - \varphi^{(1+\theta)/\theta}(s)\right| ds.$$

Recordando el teorema del valor medio, obtenemos

$$|\psi^{(1+\theta)/\theta} - \varphi^{(1+\theta)/\theta}| \leq \frac{1+\theta}{\theta}\gamma^{1/\theta}|\psi - \varphi|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |T\varphi(t) - T\psi(t)| &\leq \theta \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta \int_s^t a(u)du} |f(s)| \frac{1+\theta}{\theta}\gamma^{\frac{1}{\theta}} |\psi(s) - \varphi(s)| ds \\ &\leq \frac{F}{\alpha}\left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)\gamma^{1/\theta} \|\psi - \varphi\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Entonces, T es una contracción que mapea $\tilde{B}$ en $\tilde{B}$, esto nos dice que, T posee un único punto fijo en $\tilde{B}$. Por lo que el único punto fijo es la única solución positiva remotamente casi periódica $\phi(t)$ de (4.7), y $\omega \leq \phi(t) \leq \gamma$. Por último, tenemos que $u(t) = 1/x^{\theta}(t)$, y, por el Lema 2.1.3, (4.7) posee una única solución positiva remotamente casi periódica $\phi^*(t) = [\phi(t)]^{-1/\theta}$, y $1/\gamma^{1/\theta} \leq \phi^*(t) \leq 1/\omega^{1/\theta}$. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

4.3. Modelo Lasota-Wazewska

4.3.1. Presentación del Modelo Lasota-Wazewska con Parte Entera

El modelo Lasota-Wazewska es una ecuación diferencial autónoma de la forma

$$y'(t) = -\delta y(t) + pe^{-\gamma y(t-\tau)}, \; t \geq 0. \tag{4.12}$$

Ha sido utilizado por Wazewska-Czyzewska y Lasota [35] para describir la supervivencia de las glóbulos rojos en la sangre de un animal. En esta ecuación, $y(t)$ describe el número de glóbulos rojos en la sangre en el tiempo t, $\delta > 0$ es la probabilidad de muerte de las glóbulos rojos; p, γ son constantes positivas relacionadas con la producción de glóbulos rojos por unidad de tiempo y τ es el tiempo requerido para producir glóbulos rojos.
La ecuación (4.12) modela variadas situaciones en la vida real, ver [23].
En [14] proponen una variación de este modelo, modificando el retardo

$$y'(t) = -\delta y(t) + pe^{-\gamma y([t])}, \; t \geq 0. \tag{4.13}$$

4.3.2. Existencia y Unicidad de Soluciones Remotamente Casi Periódicas

Estudiaremos el siguiente modelo con retardo

$$y'(t) = -\delta(t)y(t) + p(t)f(y([t])), \tag{4.14}$$

donde $\delta(\cdot)$, $p(\cdot)$ son funciones positivas remotamente casi periódicas y $f(\cdot)$ es una función positiva que satisface una γ condición de Lipschitz, es decir, se satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Asumiremos la siguiente condición

(LW_1) El promedio de δ satisface $M(\delta) > \delta_- > 0$.

(LW_2) Las funciones $\delta(\cdot)$, $p(\cdot)$ son funciones positivas remotamente casi periódicas y $f(\cdot)$ es una función positiva que satisface una γ condición de Lipschitz.

El principal resultado es el siguiente Teorema:

Teorema 4.3.1. *Si se satisfacen* (LW_1) *y* (LW_2)*, para* γ *suficientemente pequeño, la ecuación* (4.13) *posee una única solución remotamente casi periódica.*

Demostración. Sea $\psi(t)$ una función real remotamente casi periódica, por el Lema 1.4.12, se tiene que $\psi([t])$ es romatemente casi periódica, y consideremos la ecuación

$$y'(t) = -\delta(t)y(t) + p(t)f(\psi([t])). \tag{4.15}$$

Entonces, la única solución acotada de (4.15) satisface

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_u^t \delta(s)ds} p(u)f(\psi([u]))du.$$

La parte homogénea de la ecuación (4.15) posee dicotomía exponencial, por lo que por el Teorema 1.3.9 sabemos que $e^{-\int_u^t \delta(s)ds}$ es Bi-remotamente casi periódica. Luego, aplicando el Teorema 2.1.3 concluimos el resultado. □

Tomando $f(x) = e^{-\gamma x}$, $\gamma > 0$, tenemos el modelo Lasota-Wazewska:

$$y'(t) = -\delta(t)y(t) + p(t)e^{-\gamma y([t])}, \; t \geq 0. \tag{4.16}$$

Así tenemos que

Corolario 4.3.2. *Si se satisfacen* (LW_1) *y* (LW_2) *entonces para* γ *suficientemente pequeño el modelo Lasota-Wazewska con argumento constante a trozos* (4.16)*, posee una única solución remotamente casi periódica.*

4.4. Principio del Promedio para Ecuaciones Remotamente Casi Periódicas

4.4.1. Teoría cualitativa del Método del Promedio

Para $\nu_0 > 0$ sea $f : \mathbb{R} \times W \times [0, \nu_0] \to \mathbb{R}^n$ continua, donde W es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Denotemos la función $f(t, x, \nu) = f_\nu(t, x)$ y supongamos que para cada $\nu \in [0, \nu_0]$ es uniformemente remotamente casi periódica en t y $\partial f_\nu/\partial x$ es continua en $x \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. Además, $f_\nu(t, x) \to 0$ y $\frac{\partial f_\nu}{\partial x}(t, x) \to 0$ cuando $\nu \to 0$ uniformemente para $(t, x) \in \mathbb{R} \times W$.

Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = \nu f_\nu(t, x), \tag{4.17}$$

para el cual encontraremos soluciones remotamente casi periódicas.

Ahora explicaremos la idea básica del método del promedio para el sistema (4.17) (ver [5,13]). En la sección anterior , los sistemas poseían una parte lineal y dicotomía exponencial. El sistema (4.17) no posee una parte lineal obvia, por esto no podemos utilizar las técnicas o resultados anteriores.
Consideremos el sistema promediado

$$\frac{dx}{dt} = \nu f_0(x), \tag{4.18}$$

donde

$$f_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_0(t,x)dt, x \in B_r(0). \tag{4.19}$$

El sistema autónomo (4.18) es mucho más simple que el sistema no autónomo (4.17). El sistema (4.18) puede tener soluciones naturales, que son las soluciones constantes $x(t) = x_0$ donde $f_0(x_0) = 0$. Intentaremos usar las soluciones de (4.18) para aproximar soluciones de (4.17). Por lo que veremos como conectar los sistemas (4.17) y (4.18), encontraremos un cambio de variable $x = y + \nu U(t, y, \nu)$ invertible, remotamente casi periódico y cercano a la identidad, tal que (4.17) se transforma en

$$\frac{dy}{dt} = \nu f_0(y) + g_\nu(t, y) \tag{4.20}$$

donde $g_0(t, y) = 0$ para todo $(t, y) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$.
Si existe $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f_0(y_0) = 0$, entonces con el cambio de variable $y = y_0 + z$ podemos ver que (4.20) es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \nu \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_0)z + \nu \left(f_0(y_0 + z) - f_0(y_0) - \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_0)z + g_\nu(t, y_0 + z) \right) \\ &= \nu \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_0)z + \nu F_\nu(t, z)\end{aligned}$$

Ya que los dos cambios de variables son invertibles y remotamente casi periódicos, al resolver este último sistema obtenemos una solución remotamente casi periódica para (4.17). Podemos ver que es crucial que el cambio de varibale $x = y + \nu U(t, y, \nu)$ cumpla con las propiedades mencionadas.

Así, tenemos la siguiente definición y los lemas:

Definición 4.4.1. Una función $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ diremos que es ergódica si $M(f)$ existe.

Lema 4.4.2. *Sea $f \in C(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R})$. Definamos $F : \mathbb{R} \times \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{C}$ por*

$$F(t, x, \nu) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\nu(t-s)} f(s, x) ds. \tag{4.21}$$

Además sean

$$h(u, x) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{u} \int_0^u f(s-t, x) dt \right| \tag{4.22}$$

$$\xi(x, r) = r^2 \int_0^\infty h(u, x) u e^{-ru} du. \tag{4.23}$$

Entonces tenemos

1. $|F(t, x, \nu)| \leq \nu^{-1} \xi(x, \nu)$;
2. $|\frac{\partial F}{\partial t}(t, x, \nu) - f(t, x)| \leq \xi(x, \nu)$
3. *Si f es ergódica, F lo es también. Con $M(F)(x) = \nu^{-1} M(f)(x)$, para $\nu > 0$ fijo.*
4. *Si $f \in RAP(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R})$, entonces $F \in RAP(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R})$ para $\nu > 0$.*

Demostración. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$, sea

$$\tilde{f}_t(u) = \int_0^u f(t - r, x) dr.$$

Tenemos por (4.22),

$$|\tilde{f}_t(u, x)| \leq h(u, x) u.$$

En (4.21), sea $u = t - s$. Entonces tenemos

$$F(t, x, \nu) = \int_0^\infty e^{-\nu u} f(t - u, x) du. \tag{4.24}$$

Integrando por partes, tenemos

$$\begin{aligned} F(t, x, \nu) &= \int_0^\infty e^{-\nu u} f(t - u, x) du \\ &= \tilde{f}_t(u) e^{-\nu u} \Big|_0^\infty + \nu \int_0^\infty e^{-\nu u} \tilde{f}_t(u, x) du \\ &= \nu \int_0^\infty e^{-\nu u} \tilde{f}_t(u, x) du. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} |F(t,x,\nu)| &\leq \nu^{-1}\left[\nu^2\int_0^\infty |e^{-\nu u}\tilde{f}_t(u,x)|du\right] \\ &\leq \nu^{-1}\left[\nu^2\int_0^\infty e^{-\nu u}uh(u,x)du\right] = \nu^{-1}\xi(x,\nu). \end{aligned}$$

Notemos que F satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,\nu) - f(t) = -\nu F(t,x,\nu).$$

Entonces

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,x,\nu) - f(t)\right| \leq |\nu F(t,x,\nu)| \leq \xi(x,\nu)$$

Por lo tanto (1) y (2) se cumple.
Ahora veamos (3). Dado que f es ergódica

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+s-u,x)dt = M(f_x)$$

Consideremos

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(t+r,x,\nu)dt - \frac{1}{\nu}M(f_x) \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{t+r} e^{-\nu(t+r-s)}f(s,x)dsdt - \frac{1}{\nu}M(f_x). \end{aligned}$$

Sea $u = t+r-s$ y notemos que $\int_0^\infty e^{-\nu u}du = 1/\nu$ entonces

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_0^\infty e^{-\nu u}f(t+r-u,x)dudt - \frac{1}{\nu}M(f_x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\nu u}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+r-u,x)dt - \frac{1}{\nu}M(f_x)\right]du \end{aligned}$$

Por lo que $I(x) \to 0$ cuando $T \to \infty$, para $\nu > 0$ fijo. Con esto concluimos que $M(F_x) = \nu^{-1}M(f_x)$. Lo que concluye la demostración. $\square$

Lema 4.4.3. *Si f_ν satisface las condiciones mencionadas en el primer párrafo de esta subsección. Sea f_0 como en (4.19). Entonces para todo $r < r_0$ existe $\nu_0 > 0$ y una función continua U en $\mathbb{R} \times B_r(0) \times (0,\infty)$ tal que*

1. *Para cada* $\nu \in (0,\infty)$, $U \in RAP(\mathbb{R} \times B_r(0), \mathbb{R}^n)$ *y es ergódica, es decir su promedio existe.*

2. $\frac{\partial U}{\partial t}$ *es continua en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *y las derivadas de un orden arbitrario con respecto a* $x \in \mathbb{R}^n$*son continuas para cada* $\nu \in (0,\infty)$. $\frac{\partial U}{\partial t}$ *y las derivadas son remotamente casi periódicas y ergódicas.*

3. *Sea* $G(t,x,\nu) = \frac{\partial U}{\partial t}(t,x,\nu) - f_0(t,x) + f_0(x)$ *entonces todas las funciones* νU, $\nu \frac{\partial U}{\partial x}$, G *y* $\frac{\partial G}{\partial x}$ *tienden a cero cuando* $\nu \to 0$ *uniformemente en* $\mathbb{R} \times B_r(0)$

4. *El cambio de variable*

$$x = y + \nu U(t,y,\nu) \text{ con } (t,y,\nu) \in \mathbb{R} \times B_r(0) \times [0,\nu_0] \tag{4.25}$$

es invertible y transforma (4.17) *en*

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \nu f_0(y) + \nu F_\nu(t,y) \tag{4.26}$$

donde F_ν *satisface las mismas propiedades que* f_ν *en* $\mathbb{R} \times B_r(0) \times [0,\nu_0]$ *y además* $F_0(t,y) = 0$ *para todo* $(t,y) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$.

Demostración. Sea $H : \mathbb{R} \times B_r(0) \to \mathbb{C}^n$ por

$$H(t,x) = f_0(t,x) - f_0(x).$$

Entonces $H \in RAP(\mathbb{R} \times B_r(0), \mathbb{R}^n)$. Como f es ergódica, se sigue de (4.19) que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H(t+s,x)dt = 0$$

uniformemente con respecto $x \in B_r(0)$ y $s \in \mathbb{R}$. Tenemos que H es ergódica y $\mathcal{M}(H_x) = 0$. Definamos la función

$$h(t,x) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{t} \int_0^t H(s-u,x)du \right|$$

Para la función

$$\xi(x,t) = t^2 \int_0^\infty e^{-tu} u h(u,x) du$$

no es difícil ver que $\xi(x,t) \to 0$ cuando $t \to 0$, uniformemente con respecto a $x \in B_r(0)$. Por lo que, definiremos $\xi(x,0) = 0$ para $x \in B_r(0)$.
Consideremos $\overline{H} : \mathbb{R} \times B_r(0) \times (0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ la solución acotada de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{H}(t,x,\nu) - H(t,x) = -\nu\overline{H}(t,x,\nu),$$

dada por

$$\overline{H}(t,x,\nu) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\nu(t-s)}H(s,x)ds.$$

Por el Lema 4.4.2, tenemos que

$$|\overline{H}(t,x,\nu)| \leq \nu^{-1}\xi(\nu,x), \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.27}$$

Además $\overline{H} \in RAP(\mathbb{R} \times B_r(0), \mathbb{R}^n)$ y es ergódica con $\mathcal{M}(H_x) = 0$ para $\nu \in (0,\infty)$ fijo. Es fácil ver que $\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \in RAP(\mathbb{R} \times B_r(0), \mathbb{R}^n)$ y es ergódica para $\nu \in (0,\infty)$. Por (4.27)

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\overline{H}(t,x,\nu) - H(t,x)\right| \leq \xi(\nu,x), \ t \in \mathbb{R}.$$

Para $a > 0$ fijo y algún entero $q \geq 1$, definiremos Δ_a en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} d_a(1 - a^{-2}|x|^2)^{2q} & \text{si } |x| \leq a, \\ 0 & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

donde la constante d_a es determinada por

$$\int_{B_a} \Delta_a(x)dx = 1.$$

Definamos la función $U : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ por

$$U(t,x,\nu) = \int_{B_a} \Delta_a(x-y)\overline{H}(t,y,\nu)dy.$$

La función U es continua. $U \in RAP(\mathbb{R} \times B_a)$ para $\nu \in (0,\infty)$ y U es ergódica dado que $\overline{H}$ lo es. Por lo que 1 se satisface.

Para probar 2. La función $\Delta_a(x-y)$ posee derivadas parciales continuas de orden superior a $2q-1$ con respecto a x que son acotadas, en norma, por una función $A(a)$ (el aréa de integración) donde A es continua en $(0,\infty)$. De (4.27) se sigue que la función U tiene derivadas parciales con respecto a x de orden superior a $2q-1$ que son acotadas por $A(a)\xi(y,\nu)\nu^{-1}$, $y \in B_r(0)$. Como q es un entero arbitrario , el número de derivadas con respecto a x puede ser tan grande como deseemos. $\frac{\partial U}{\partial t}$ y la derivada son remotamente casi periódicas y son ergódicas para cada $\nu \in (0,\infty)$. Así, tenemos que 2 se satisface.

Para probar 3. Escojamos $a = a(\nu)$ es una función de ν tal que $a(\nu) \to 0$, $A(a(\nu))\xi(y,\nu) \to 0$ uniformemente con respecto a $y \in B_r(0)$ cuando $\nu \to 0$. Entonces $\nu U \to 0$ y $\nu\frac{\partial U}{\partial x} \to 0$ cuando $\nu \to 0$ uniformemente con respecto a $x \in B_r(0)$ y $t \in \mathbb{R}$ dado que νU y $\nu\frac{\partial U}{\partial x}$ son acotadas por $A(a(\nu))\xi(y,\nu)$. Para todo número $r < r_0$ escogemos ν_0 lo suficientemente pequeño tal que $r + a(\nu) < r_0$ para todo $\nu \in (0,\nu_0)$. Se sigue de la definición de $\Delta_a(x)$ que

$$\int_{B_{r_0}} \Delta_{a(\nu)}(x-y)dy = 1, \;\; x \in B_r(0), \;\; \nu \in (0,\nu_0).$$

Notemos que

$$G(t,x,\nu) = \frac{\partial U}{\partial t}(t,x,\nu) - H(t,x).$$

Sea

$$\overline{G}(t,x,\nu) = G(t,x,\nu) + \nu U(t,x,\nu).$$

Dado que

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x,\nu) = \int_{B_r(0)} \Delta_{a(\nu)}(x-y)[H(t,y) - \nu\overline{H}(t,y,\nu)]dy,$$

tenemos

$$\overline{G}(t,x,\nu) = \int_{B_r(0)} \Delta_{a(\nu)}(x-y)[H(t,y) - H(t,x)]dy.$$

Por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} \|\overline{G}(t,x,\nu)\| &\leq \sup_{0\leq\|x-y\|\leq a(\nu)} \|H(t,y) - H(t,x)\| \\ &= \sup_{0\leq\|x-y\|\leq a(\nu)} \left\|\frac{\partial H}{\partial x}(t,\theta_y(y-x))\right\| \|y-x\|, \end{aligned}$$

donde $\theta_y \in (0,1)$. Ya que $\frac{\partial H}{\partial x}$ es continua en x, uniformemente en $t \in \mathbb{R}$, la función $\frac{\partial H}{\partial x}$ es acotada en $\mathbb{R} \times B_r(0)$. Así, $\overline{G}(t,x,\nu) \to 0$ cuando $\nu \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R} \times B_r(0)$. Luego

$$G(t,x,\nu) \to 0 \text{ cuando } \nu \to 0$$

uniformemente en $\mathbb{R} \times B_r(0)$. Tenemos que

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial x}(t,x,\nu) = \int_{B_{r_0}} \Delta_{a(\nu)}(x-y)[\frac{\partial H}{\partial x}(t,y) - \frac{\partial H}{\partial x}(t,x)]dy,$$

Utilizando el argumento usado para $\overline{G}$, se muestra que

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial x}(t,x,\nu) \to 0 \text{ cuando } \nu \to 0$$

uniformemente con respecto a $(t,x) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$. Luego,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t,x,\nu) \to 0 \text{ cuando } \nu \to 0$$

uniformemente con respecto a $(t,x) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$. Esto prueba 3.

Ya que las cuatro funciones en 3 se convergen a cero cuando $\nu \to 0$ uniformemente con respecto a $(t,x) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$, podemos definirlas como cero para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$ cuando $\nu = 0$. Para $\nu_1 > 0$, sea

$$\Omega_1 = \{x \ : \ x = y + \nu U(t,y,\nu), \ (t,y,\nu) \in \mathbb{R} \times B_r(0) \times [0,\nu_1]\}$$

un subconjunto compacto de $\mathbb{C}^n$.
Notemos que $\nu \frac{\partial U}{\partial y} \to 0$ cuando $\nu \to 0$ uniformemente con respecto a $(t,y) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$.
Escojamos $\nu_2 > 0$ tal que $I + \nu \frac{\partial U(t,y,\nu)}{\partial y}$ posee una inversa acotada para $(t,y,\nu) \in \mathbb{R} \times B_{a(\nu_2)}(0) \times [0,\nu_2]$. Luego, por el Teorema de la función inversa, el cambio de variable (4.25) posee a lo más una solución $y \in B_{a(\nu_2)}(0)$ para cada $(x,t,\nu) \in \mathbb{R} \times \Omega_1 \times [0,\nu_2]$. Para cualquier $x_0 \in \Omega_1$ existe $\nu_3(x_0) > 0$ tal que el cambio de variable (4.25) tenga una única solución $y = y(t,x,\nu)$ definida y continua para $|y - x_0| \le \nu_3(x_0)$, $|x - x_0| \le \nu_3(x_0)$ y $0 \le \nu \le \nu_3(x_0)$.
Ya que Ω_1 es compacto, podemos escoger $\nu_4 > 0$ independiente de x_0 tal que cumpla con las mismas propiedades que $\nu_3(x_0)$.

Si $\nu_0 = \text{mín}\{\nu_1, \nu_2, \nu_4\}$ entonces el cambio de variable define un homeomorfismo. La transformación esta bien definida para $(t, y, \nu) \in \mathbb{R} \times B_r(0) \times [0, \nu_0]$. Por (4.25), tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \nu\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \nu\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Entonces, por (4.17) tenemos

$$\begin{aligned}
\left(I + \nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \nu\frac{\partial U}{\partial t} \\
&= \nu f_\nu(t, y + \nu U(t, y, \nu)) - \nu\frac{\partial U}{\partial t} \\
&= \nu f_0(y) + \nu\left[f_0(t, y) - f_0(y) - \frac{\partial U}{\partial t}\right] \\
&\quad +\nu\left[f(t, y + \nu U(t, y, \nu)) - f_0(t, y)\right] \\
&= \nu f_0(y) + \nu\tilde{f}_\nu(t, y)
\end{aligned}$$

Podemos ver que $\tilde{f}$ posee las mismas propiedades que f tiene en $\mathbb{R} \times B_r(0) \times [0, \nu_0]$, además, $f_0(t, y) = 0$ para todo $(t, y) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$. Nuevamente, por 3 tenemos que $\nu\frac{\partial U}{\partial x} \to 0$ cuando $\nu \to 0$ uniformemente en $(t, x) \in \mathbb{R} \times B_r(0)$. Podemos escoger ν_0 lo suficientemente pequeño tal que

$$\left\|\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right\| \leq \delta < 1, \ \nu \in [0, \nu_0].$$

Entonces,

$$\left[I - \left(-\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)^k.$$

Notemos que $\frac{\partial U}{\partial y}$ es remotamente casi periódica, y $[I - (-\nu\partial U/\partial y)]^{-1}$ tambien es remotamente casi periódica. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \left[I - \left(-\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]^{-1}(\nu f_0(y) + \nu\tilde{f}_\nu(t, y)) \\
&= \left(I + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\nu\frac{\partial U}{\partial y}\right)^k\right)(\nu f_0(y) + \nu\tilde{f}_\nu(t, y)) \\
&= \nu f_0(y) + \nu\tilde{\tilde{f}}_\nu(t, y)
\end{aligned}$$

Podemos ver que $\tilde{\tilde{f}}_\nu$ posee las mismas propiedades que f, es decir, es remotamente casi periódica y $\tilde{\tilde{f}}_\nu \to 0$.

Esto completa la demostración. $\square$

Aplicando el Lema 4.4.3 obtenemos el siguiente Teorema:

Teorema 4.4.4. *Supongamos que f_ν satisface las condiciones mencionadas en el primer párrafo de la subsección. Si f_0 definida en (4.19) es tal que existe $x_0 \in B_r(0)$ con $f_0(x_0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ posee valores propios con parte real distinta de cero. Entonces existen r_0 y $\nu_0 > 0$ lo suficientemente pequeños tal que para $\nu \in (0, \nu_0]$ la ecuación (4.17) posee una única solución φ_ν remotamente casi periódica continua en $\mathbb{R} \times (0, \nu_0]$ tal que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_\nu(t) - x_0| \leq r_0. \tag{4.28}$$

Demostración. Por el Lema 4.4.3, podemos reducir (4.17) a (4.26).
Por lo que si realizamos el cambio de variable $y = z + x_0$ obtenemos

$$z'(t) = \nu A z + \nu \tilde{F}_\nu(t, z) \tag{4.29}$$

donde $A = \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_0)$ y

$$\tilde{F}_\nu(t, z) = f_0(z + x_0) - f_0(x_0) - \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_0) z + \tilde{\tilde{f}}_\nu(t, z + x_0)$$

Así podemos ver que $\tilde{F}_\nu$ satisface las mismas propiedades que f_ν.
Sean $s = t\nu$, $z_\nu(s) = z(s\nu^{-1})$ y $\overline{F}_\nu(s, z_\nu(s)) = \tilde{F}_\nu(s\nu^{-1}, z_\nu(s))$. Entonces de la ecuación (4.29) se sigue

$$\frac{dz_\nu}{ds} = A z_\nu + \overline{F}_\nu(s, z_\nu(s)),$$

donde $\overline{F}$ es una función remotamente casi periódica en la primera variable dado que $\tilde{F}$ lo es. Ya que A no posee valores propios con parte real igual a cero, tenemos que la solución satisface la ecuación integral dada por

$$z_\nu(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s, u) \overline{F}_\nu(u, z_\nu(u)) du.$$

Sea

$$B_{r_0} = \{\psi_\nu \in RAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | \|\psi_\nu\|_\infty \leq r_0\}.$$

Podemos ver que el operador definido por

$$T\psi_\nu(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s,u)\overline{F}_\nu(u,\psi_\nu(u))du$$

mapea B_{r_0} en B_{r_0} al escoger r_0 y ν_0 lo suficientemente pequeños. Luego la demostración concluye del teorema del punto fijo de Banach. $\square$

Referencias

[1] R.P. Agarwal, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York, (1992).

[2] E. Ait Dads, L. Lhachimi, Pseudo almost periodic solutions for equation with piecewise constant argument, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 371, Issue 2, 2010, Pages 842-854.

[3] L. V. Bertalanffy, Teoría General de los Sistemas. *Editorial Fondo de Cultura Económica.* México, 1976.

[4] A. Chávez, S. Castillo, M. Pinto,Discontinuous almost automorphic functions and almost automorphic solutions of differential equations with piecewise constant arguments. *Electron. J. Differential Equations*, 2014, No. 56, 13 pp.

[5] D. Cheban, Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations, New York (2009).

[6] K.S. Chiu , M. Pinto, J-C. Jeng, Existence and global convergence of periodic solutions in the current neural network with a general piecewise alternately advanced and retarded argument. *Acta Appl. Math.* doi:10.1007/s10440-013-9863-y.

[7] K. L. Cooke, J. Wiener, Retarded differential equations with piecewise constant delays, *J. Math. Anal. Appl.*, 99 (1984), 265-297.

[8] W.A. Coppel, Almost periodic properties of ordinary differential equations, *Ann. Math. Pura Appl.*, 76 (1967) 27 - 50.

[9] W. A. Coppel, Dichotomies in stability theory, Springer-Verlag, 1978.

[10] C. Corduneanu, N. Gheorghiu, V. Barbu, Almost Periodic Functions, Chelsea Publishing Company, 1989.

[11] C. Corduneanu, Almost Periodic Oscillations and Waves, Springer, New York (2009).

[12] L. Dai, Nonlinear Dynamics of Piecewise Constant Systems and Implementation of Piecewise Constant Arguments, World Scientific Publishing Company (2008).

[13] Yu. L. Daletskii, M. G. Krein, Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, Nonlinear Analysis and Its Applications Series, Nauka, Moscow, Russia, 1970, English translation: Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1974.

[14] Q. Feng, R. Yuan, On the Lasota-Wazewska model with piecewise constant argument, *Acta Mathematica Scientia*, 2006, 26B(2): 371-378.

[15] A.M. Fink, Almost differential equations, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 377, Springer, Berlin, 1974.

[16] M. Fréchet, Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques, *Revue Scientifique*, vol.79, no.7-8, pp. 341-354, 1941.

[17] K. Gopalsamy, Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics, *Mathematics and its Applications*, Volumen 74, Kluwer Academic, Dordrecht, (1992).

[18] Y. Guo, C. Zhang, Slowly oscillating solutions for differential equations with strictly monotone operator, *Journal of Inequalities and Applications*, Vol. 2007, Article ID 60239, 9 pages.

[19] J.K. Hale, Ordinary Differential Equations, Krieger, Huntington, 1980.

[20] R. L. Devaney, M. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

[21] V.L. Kocic ,G. Ladas , Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications, Kluwer, 1993.

[22] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, Theory of Differential Equations Numerical Method and Applications, Academic Press, New York, (1988).

[23] E. Liz, C. Martínez, S. Trofimchuk, Attractivity properties of infinite delay Mackey-Glass type equations, *Differential and Integral Equations*, Vol. 15 (2002), 875-869.

[24] A. D. Myshkis, On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument, *Russ. Math. Surv.*, 32 (1977), 173-202.

[25] G. Papaschinopoulos, On exponential trichotomy of linear difference equations, *Applicable Analysis*, 40 (1991), pp. 89-109.

[26] M. Pinto, Asymptotic equivalence of nonlinear and quasi linear differential equations with piecewise constant arguments, *Math. Comput. Modelling*, 49 (2009), no. 9-10, 1750-1758.

[27] M. Pinto, Cauchy and Green matrices type and stability in alternately advanced and delayed differential systems, *J. Difference Equ. Appl.*, 17 (2011), no. 2, 235-254.

[28] M. Pinto, G. Robledo, Controllability and Observability for a Linear Time Varying System with Piecewise Constant Delay, *Acta. Appl. Math.*, doi:10.1007/s10440-014-9954-4.

[29] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Céleste II (1892) (available New York: Dover, 1957).

[30] D. Sarason, Remotely almost periodic function, *Contemp. Math.*, 32 (1984) 237-342.

[31] S. M. Shah, J. Wiener, Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 6 (1983), 671-703.

[32] E. Trofimchuk, M. Pinto, S. Trofimchuk, Traveling waves for a model of the Belousov-Zhabotinsky reaction, *J. Differential Equations*, 254 (2013) 3690-3714.

[33] A. Tsoularis, J. Wallace, Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences* 179 (2002) 21-55.

[34] H. Jialin, The almost periodic type difference equations, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 28, Issue 12, December 1998, Pages 21-31.

[35] M. Wazewska-Czyzewska and A. Lasota, Mathematical problems of the red-blood cell system, *Ann. Polish Math. Soc. Ser. III, Appl. Math.*, 6 (1976) 23-40.

[36] J. Wiener, Generalized Solutions of Functional Differential Equations, World Scientific (1993).

[37] J. Wiener, Differential equations with piecewise constant delays, in Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations, ed. V. Lakshmikantham (Marcel Dekker, New York, 1983) pp. 547-552.

[38] J. Wiener, Pointwise initial-value problems for functional differential equations, in Differential Equations, eds. I. W. Knowles and R. T. Lewis (North-Holland, New York, 1984) pp. 571-580.

[39] Y.H. Xia, M. Lin, J. Cao, The existence of almost periodic solutions of certain perturbation system, *J. Math. Anal. Appl.*, 310 (1) (2005), pp. 81- 96.

[40] Y. Xia, Z. Huang, M. Han, Existence of almost periodic solutions for forced perturbed system with piecewise constant argument, *J. Math. Anal. Appl.*, 333 (2007) 798- 816.

[41] Y. Xia, F. Chen, A. Chen, J. Cao, Existence and global attractivity of an almost periodic ecological model, *Appl. Math. Comput.*, 157 (2004) 449- 475.

[42] F. Yang, C. Zhang, Slowly oscillating solutions of parabolic inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 335 (2007) 1238-1258.

[43] R. Yuan, J. Hong, The existence of almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument, *Nonlinear Anal.*, 8 (1997) 1439-1450.

[44] C. Zhang, Almost Periodic Type Functions and Ergodicity, Sciences Press, Kluwer, London, New York, 2003.

[45] C. Zhang, F. Yang, Remotely almost periodic solutions of parabolic inverse problems, *Nonlinear Analysis*, 65 (2006) 1613-1623.

[46] F. Yang, C. Zhang, Remotely almost periodic solutions to parabolic boundary value inverse problems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 15 (2011) Vol 1, pp. 43-57.

[47] C. Zhang, New Limit Power Function Spaces. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49 (2004), no. 5, 763-766.

[48] C. Zhang, C. Meng, C^*-Algebra of Strong Limit Power Functions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 51, No. 5, 2006.

[49] C. Zhang, Strong Limit Power Functions, *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. 12, Issue 3, 2006.

[50] S. Zhang, D. Piao, Time remotely almost periodic viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *ISRN Mathematical Analysis*, Vol. 2011, Article ID 415358, 13 pages.

[51] C. Zhang, L. Jiang, Remotely almost periodic solutions to systems of differential equations with piecewise constant argument. *Applied Mathematics Letters*, 21 (2008) 761-768.