COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LAS SOLUCIONES DEL SISTEMA LINEAL CON RETARDO $x'(t) = A(t)x(t - r(t))$

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias
Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

por

CECILIA ANGELICA DONOSO CONCHA

Septiembre, 1992

Director de Tesis: Manuel Pinto Jiménez

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION
TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por la candidata

Cecilia Angélica Donoso Concha

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para optar el grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas.

Director de Tesis
Dr. Manuel Pinto J. ------------------------

Comisión Informante de Tesis

Dr. Raúl Naulín ------------------------

Dr. Manuel Elgueta ------------------------

Dr. Víctor Cortés ------------------------

A mí madre por su entrega

INDICE

Introducción

Sin lugar a dudas una de las áreas de la matemática de mayor importancia en el desarrollo de la ciencia y la tecnología son las ecuaciones diferenciales. Tan vasto es su campo de aplicación que su lado práctico adquiere la misma importancia que su estudio puramente teórico.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias por ejemplo han permitido representar un sin número de fenómenos físicos y químicos, contribuyendo considerablemente en el desarrollo tecnológico por ejemplo de la teoría de ondas, aplicada en la radio, la televisión, el radar, etc. ver [K], [Y].

Un tipo bastante general de ecuaciones diferenciales son las *ecuaciones diferenciales funcionales*. En estas, la derivada y/o las derivadas de la función desconocida se evalúan en argumentos distintos (distintas funciones de t) por ejemplo

i) $x'(t) = -x(t-1)$

ii) $x''(t) = x(t - \frac{1}{t}) + 2x'(t)$

iii) $x'(t) = x(t)x(t-1) + t^2 x(t+2)$

Nuestro propósito es estudiar una clase particular de ecuaciones funcionales, a saber las ecuaciones *diferenciales con retardo*, o (*ecuaciones diferenciales con argumento retardado*). En estas se expresa la derivada de mayor orden de la función en el tiempo t y las derivadas de orden inferior en t y en instantes anteriores, por ejemplo (i) y (ii).

Las ecuaciones tipo (i) es decir cuando el(los) argumento(s) es(son) de la forma $t-r$ con r constante no negativa (retardo constante) se denominan *"ecuaciones diferenciales en diferencias"* y han sido extensamente estudiadas [B], [D-1].

Notemos que la diferencia fundamental que existe entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones con retardo es que en las primeras se supone que el comportamiento de un fenómeno está unicamente determinado por el presente, no así en las últimas en que el pasado ejerce una influencia determinante en su futuro. En la ecuación (i) por ejemplo es necesario conocer x en el intervalo $[-1,0]$, y no sólo el valor de $x(0)$ para determinar $x(t)$ para $t \geq 0$. De hecho los valores que toma x en el intervalo $[0,1]$ dependen continuamente de los que toma en $[-1,0]$.

Si bien, hacia finales del siglo XVIII Bernoulli y Laplace habian encontrado ecuaciones funcionales, no ha sido, sino en los últimos 50 años que la investigación ha adquirido fuerza y continuidad lográndose importantes resultados [K-1], [O], [Q]. Esto se debe en gran medida a sus diversas aplicaciones como por ejemplo en la matemática económica, la teoría de campos eléctrico magnéticos, etc.

El origen de nuestra investigación está en el problema propuesto por R. Bellman en 1965, esto es, determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación escalar

$$x'(t) = ax(t - r(t)) \qquad a > 0 \tag{1}$$

donde $r(t)$ es una función continua, no negativa y tal que $r(t) \to 0$ si $t \to \infty$.

Una pregunta natural es ¿ Se "parecen" en algún sentido las soluciones de (1) (si existen), a las soluciones de la ecuación ordinaria $x'(t) = ax(t)$?. K. Cooke [C-1] estudió el problema suponiendo $r \in L_1$ o $r^{2-\delta} \in L_1$, $\delta > 0$. Demostró la existencia de una solución $u(t)$ de (1) que satisface

$$\lim_{t \to \infty} u(t)e^{-at} = c \tag{2}$$

para alguna constante c y reciprocamente, que para toda constante c existe una solución de (1) que satisface (2).

Sin embargo, este resultado no ha sido generalizado a sistemas de ecuaciones. No se conoce por ejemplo, el comportamiento asintótico de las soluciones de

$$X'(t) = AX(t - r(t))$$

donde A es una matríz constante. Tampoco la validez de un teorema de Levinson para

$$X'(t) = (\Lambda(t) + R(t))X(t - r(t)) \tag{3}$$

donde Λ es una matríz diagonal y $R \in L_1$.

En este trabajo estudiamos el sistema lineal con retardo

$$X'(t) = A(t)X(t - r(t)). \tag{4}$$

Suponemos que A es una matríz continua en $[0, \infty)$ y r es una función continua definida en el intervalo $[0, \infty)$, no negativa y acotada.

Consideramos primero A como una matríz continua en general y luego suponemos que es de la forma $\Lambda(t) + R(t)$ (sistema (3)) donde $\Lambda(t)$ satisface la condición de dicotomía de Levinson y $R \in L_1$ (ver [C]). Estudiamos la existencia de soluciones del sistema (4) que satisfacen la fórmula asintótica

$$X(t) = \Phi(t)[c + o(1)] \quad t \to \infty$$

para algún vector constante c, siendo Φ una matriz fundamental del sistema ordinario

$$Y' = A(t)Y(t)$$

Para el sistema casi diagonal (3) se prueba la fórmula asintótica de Levinson (Cap. I). Todos los resultados obtenidos los presentamos en el Capítulo III.

En el estudio de ambos sistemas empleamos como herramienta fundamental el teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff, considerando como espacio de soluciones el espacio vectorial $C([\tau, \infty), \mathbf{C}^n)$ de las funciones continuas de $[\tau, \infty)$ en $\mathbf{C}^n$ con la topología compacto abierto. Dedicamos el Capítulo I a establecer la notación y, los teoremas y proposiciones que emplearemos en el curso del trabajo.

Consideramos necesario incluir un capítulo sobre teoría de existencia de ecuaciones con retardo (Capítulo II), con el fin de entregar una mejor apreciación del tema y exponer algunos resultados.

Agradezco a todas las personas que contribuyeron de una manera u otra a hacer posible este trabajo. Agradezco especialmente al profesor Manuel Pinto por su dedicación, paciencia y constante apoyo, como director de tesis y como persona.

Cecilia Donoso Concha

CAPITULO I

1 Notación y Definiciones:

Sea μ real positivo. Denotaremos como:

$$\mathcal{C}_\mu = \{f : [-\mu, 0] \to \mathbf{C}^n / f \text{ continua}\}$$

y definamos en este espacio la norma

$$\|f\|_1 = sup_{-\mu \leq \sigma \leq 0} \, |f(\sigma)|$$

Del mismo modo definimos en el espacio $\mathcal{C}_{2\mu}$ la norma

$$\|f\|_2 = sup_{-2\mu \leq \sigma \leq 0} |f(\sigma)|.$$

$(\mathcal{C}_{i\mu}, \| \ \|_i)$ es un espacio de Banach para $i = 1, 2$.
Para $\tau \geq 0$ fijo, denotaremos como

$$\mathcal{C} = \{x : [\tau, \infty) \to \mathbf{C}^n / x \text{ continua}\} = C([\tau, \infty), \mathbf{C}^n)$$

y la bola

$$\mathcal{C}_\mu(\delta) = \{x \in \mathcal{C}_\mu / \|x\|_1 \leq \delta\}.$$

Para cada $t \geq \mu + \tau$, x_t se define como el elemento de $\mathcal{C}_\mu$

$$x_t(\sigma) = x(t + \sigma) \qquad\qquad -\mu \leq \sigma \leq 0.$$

Si $t + \sigma < \tau$, se define $x(t + \sigma) = x(\tau)$.
Para $A = (a_{ij})$ matriz de $n \times n$, y $x = (x_i)$ vector de $\mathbf{C}^n$, $|A|$ y $|x|$ denotaran las normas de A y x respectivamente, que seran precisadas cuando sea necesario.
Si I es un sub-intervalo de $[t_0 - \mu, \infty)$ y $f \in \mathcal{C}$ definimos la seminorma

$$\|f\|_I = sup_{\sigma \in I} |f(\sigma)|$$

2 Resultados Previos

Iniciamos esta sección exponiendo algunos conceptos y resultados básicos de análisis y topología que serán aplicados en el desarrollo del trabajo.

Definición 1 *Sea M un conjunto y d una métrica en M. La topología $\Gamma(d)$, que tiene como base la familia $\{B_d(y,r)/y \in M, r>0\}$ donde $B_d(y,r) = \{x/d(x,y)<r\}$, es la topología en M inducida por la métrica d.*

Definición 2 *Un espacio topológico (M,Γ) se dice que es metrizable si su topología es inducida por una métrica en M.*

Ejemplo: El espacio $\mathcal{C}$ con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $[\tau,\infty)$ es metrizable.

En efecto, a partir de la familia de semi-normas $\{P_n\}_{n=N_0}^{\infty}$, definidas por

$$P_n(x) = sup_{\tau \leq t \leq n}|x(t)|$$

para x en $\mathcal{C}$. Se construye la métrica

$$d(x,y) = \sum_{i=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^i}\frac{P_i(x-y)}{1+P_i(x-y)}, \qquad N_0 = [\tau]+1$$

La topología en $\mathcal{C}$ es inducida por ésta métrica [D].

Proposición 1 *Una función f de un espacio vectorial topológico E metrizable en un espacio vectorial topológico F (no necesariamente metrizable) es continua si y solo si es secuencialmente continua. Es decir, si para toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a un punto x en E, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$ en F.*

Proposición 2 *Sea E un espacio vectorial topológico metrizable. Un subconjunto K de E es compacto si y solo si toda sucesión en K tiene una subsucesión que converge en K.*

La demostración de ambas proposiciones se puede encontrar en [T].

Definición 3 *Una familia F de funciones definidas en un intervalo I con valores en $\mathbf{C}^n$ se dice equicontinua en un punto t_0 de I, si para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ tal que para toda f en F*

$$|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon \quad si \quad |t-t_0|<\delta$$

Una propiedad importante de las familias de funciones equicontinuas es la siguiente:

Lema 1 *(Ascoli): Sea F una familia de funciones uniformemente acotadas y equicontinuas en un intervalo I. Entonces toda sucesión $\{f_n\}$ en F tiene una subsucesión que es uniformemente convergente en cada subintervalo compacto de I.*

La demostración puede verse en [C].

Una herramienta de gran utilidad en la teoría de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, son los teoremas relativos a operadores que tienen la propiedad del punto fijo. Esto es, un operador T definido de un espacio E en si mismo, que deja invariantes uno o más puntos del espacio.

El primer teorema relativo al tema fué establecido por Brouwer en 1912. Demostró que toda función continua T Definida de la bola unitaria cerrada de $\mathbf{R}^m$ en si misma tiene al menos un punto fijo. En 1922, Birkoff y Kellogg usaron este teorema para demostrar la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

Usando como punto de partida el teorema de Brouwer se establecieron posteriormente varios teoremas relativos a esta clase de operadores, por ejemplo los teoremas de Markov-Kakutani y Schauder-Tychonoff [D-2], [E].

En este trabajo usamos como método para demostrar la existencia de soluciones, la aplicación del teorema del punto fijo de Schauder-Tychonoff, que enunciamos a continuación. Este teorema es fundamental para obtener nuestros resultados.

Teorema 1 *(Schauder-Tychonoff): Sea E espacio vectorial topológico, Hausdorff, localmente convexo y completo. Sea A un subconjunto de E no vacío, cerrado y convexo, y sea $\mathcal{N}$ un operador continuo en A y tal que $\mathcal{N}(A) \subseteq A$ y $\mathcal{N}(A)$ es relativamente compacto en E. Entonces $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo en A.*

La demostración puede verse en [E] página 163, Corolario 3.6.2, [D-2].

Un resultado muy importante en teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es el teorema de Levinson. En este trabajo se supone que la matriz del sistema se puede escribir como una suma de dos matrices, Λ y R, donde la primera es una matríz diagonal cuyos valores característicos satisfacen ciertas propiedades de integrabilidad ((3) y (4)) y la matríz R es $L_1[0,\infty)$. Bajo estas condiciones se demuestra la existencia de una solución del sistema y se establece su comportamiento asintótico. Antes de enunciar el teorema veamos algunos hechos sobre sus hipótesis (su demostración puede verse en [C]).

Consideremos el sistema

$$X'(t) = \Lambda(t)X(t) \tag{2.1}$$

donde Λ es una matriz diagonal continua definida en el intervalo $[0,\infty)$. Sean $\lambda_1(t),\cdots,\lambda_n(t)$ sus valores característicos. Supongamos que para algún k fijo, cada j, $1\leq j\leq n$ pertenece a uno de los dos conjuntos I_1 o I_2, donde

$$j\in I_1 \quad \text{si} \quad \int_0^t Re(\lambda_k(\sigma)-\lambda_j(\sigma))d\sigma \to \infty \quad \text{cuando} \quad t\to\infty$$

y

$$\int_{t_1}^{t_2} Re(\lambda_k(\sigma)-\lambda_j(\sigma))d\sigma > -K \quad t_2>t_1\geq 0 \tag{2.2}$$

$j\in I_2$ si

$$\int_{t_1}^{t_2} Re(\lambda_k(\sigma)-\lambda_j(\sigma))d\sigma < K \quad t_2>t_1\geq 0 \tag{2.3}$$

con K constante. Sea $\Phi(t)=exp\int_0^t\Lambda(\sigma)d\sigma$ matriz fundamental de (1). Usando (3) y (2) podemos escribirla en la forma

$$\Phi(t)=\Phi_1(t)+\Phi_2(t)$$

donde $\Phi_1(t)$ y $\Phi_2(t)$ son las matrices diagonales que contienen los elementos de Φ asociados con las columnas de índice j pertenecientes a I_1 e I_2 respectivamente. Sea $P=(P_{ij})$ matríz diagonal con

$$P_{ii}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i\in I_1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad i\in I_2 \end{cases}$$

Entonces P es una proyección y se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \Phi(t)P \\ \Phi_2(t) &= \Phi(t)(I-P) \end{aligned}$$

Si $\varrho(t,s)$ y $\tilde{\varrho}(t,s)$ denotan un elemento cualquiera de las matrices $\Phi(t)P\Phi(s)^{-1}$ y $\Phi(t)(I-P)\Phi(s)^{-1}$ respectivamente de (2) y (3) se deduce

$$|\varrho_\ell(t)|\leq e^K e^{\int_s^t Re\lambda_k(\sigma)d\sigma}, \qquad t\geq s$$

y

$$|\tilde{\varrho}_\ell(t)| \leq e^K e^{-\int_t^s Re\lambda_k(\sigma)d\sigma}, \qquad s \geq t$$

por lo tanto se tiene

$$|\Phi(t)P\Phi(s)^{-1}| \leq Le^{\int_s^t Re\lambda_k(\sigma)d\sigma}, \qquad t \geq s$$

y

$$|\Phi(t)(I-P)\Phi(s)^{-1}| \leq L'e^{-\int_t^s Re\lambda_k(\sigma)d\sigma}, \qquad s \geq t$$

con L y L' constantes positivas.

Se tiene entonces que la propiedad (2) y (3) determina una condición de dicotomía para el sistema (1), llamada *dicotomía de Levinson.*

Teorema 2 *(Levinson): Consideremos el sistema lineal*

$$X'(t) = (\Lambda(t) + R(t))X(t) \tag{2.4}$$

donde Λ *es una matriz diagonal de* $n \times n$, *continua definida en* $[0,\infty)$ *y* R *es una matriz* $L_1[0,\infty)$. *Sean* $\lambda_1(t),\cdots,\lambda_n(t)$ *los valores característicos de* $\Lambda(t)$. *Supongamos que satisfacen la condición (2) y (3). Entonces existe una solución* X_k *del sistema (4) y un* t_0, $0 \leq t_0 < \infty$, *tal que*

$$\lim_{t\to\infty} X_k(t)e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\sigma)d\sigma} = e_k$$

donde e_k *es el vector columna cuyas componentes son todas nulas salvo la* $k-$*ésima que es 1.*

Notemos que el vector e_k es vector característico asociado a $\lambda_k(t)$.

CAPITULO II

El propósito de este capítulo es presentar algunos resultados en teoría de ecuaciones diferenciales con retardo (de primer orden) y los distintos métodos que se han empleado para obtenerlos.

A continuación estableceremos algunos elementos básicos y la notación que usaremos en el curso de este trabajo.

1 Intervalo y función inicial

Consideremos el sistema lineal con retardo

$$X'(t) = A(t)X(t - r(t)) \tag{1.1}$$

donde A es una matriz de $n \times n$ continua definida en $[t_0, \infty)$ y r es una función continua, no negativa, definida en $[t_0, \infty)$, y $r(t) \leq \mu$ para todo t.

Una función continua X que es solución de la ecuación (1) , definida en un intervalo $[t_0, a)$, $(a \leq \infty)$ esta determinada por los valores que tome "antes" de t_0. En efecto, como r es no negativa, continua y $r(t) \neq 0$, existen puntos $\tilde{t} \geq t_0$ tales que

$$\tilde{t} - r(\tilde{t}) < t_0.$$

Luego en el miembro derecho de la ecuación (1), $X(t - r(t))$ está evaluada en puntos menores que t_0, es decir fuera del intervalo de definición $[t_0, \infty)$.

En consecuencia, es necesario establecer una *función inicial*, que prescriba la solución X en un *intervalo inicial* de valores de t y, mediante la cual la solución X puede ser continuada. Denotaremos por g a la función inicial. Suponemos que es continua y está definida en el intervalo inicial $[\tau, t_0]$ donde

$$\tau = inf_{t \geq t_0}(t - r(t)) < t_0.$$

Este valor existe pues r es acotada.

Notemos que la función inicial g no satisface necesariamente la ecuación (1). De acuerdo a lo anterior diremos que una solución de la ecuación (1) definida para $t \geq t_0$ es una función continua X que satisface la ecuación (1) en $t \geq t_0$, sujeta a la condición inicial

$$X(t) = g(t) \qquad\qquad \tau \leq t \leq t_0$$

($X'(t_0)$ es considerada como la derivada por la derecha).

2 Método de los Intervalos

En esta sección presentaremos un resultado correspondiente a la parte básica de la teoría de ecuaciones diferenciales en diferencias (con retardo constante, ver por ejemplo [B], [D-1]).

Teorema 1 *Consideremos la ecuación escalar con retardo constante* r

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-r) = f(t) \tag{2.2}$$

Supongamos que f *es de clase* C^1 *en* $[0,\infty)$ *y* g *es función de clase* C^0 *en* $[0,r]$, a_0, b_0 *y* b_1 *constantes y* $a_0 \neq 0$. *Entonces existe una única función continua* u *definida para* $t \geq 0$ *que satisface* $u(t) = g(t)$ *en* $[0,r]$ *y que es solución de la ecuación (2) para* $t \geq r$. *Esta función* u *es de clase* C^1 *en* (r,∞) *y de clase* C^2 *en* $(2r,\infty)$.

Demostración: Denotemos $v(t) = f(t) - b_1 u(t-r)$. La ecuación (2) podemos escribirla en la forma

$$a_0 u'(t) + b_0 u(t) = v(t),$$

que es equivalente a la ecuación

$$\frac{d}{dt}(a_0 u(t) e^{\frac{b_0}{a_0}t}) = v(t) e^{\frac{b_0}{a_0}t}. \tag{2.3}$$

Integrando (3) tenemos que para $r \leq t \leq 2r$

$$u(t) = g(r) e^{\frac{b_0}{a_0}(t-r)} + \frac{e^{\frac{b_0}{a_0}t}}{a_0} \int_r^t v(s) e^{\frac{b_0}{a_0}s} ds. \tag{2.4}$$

como v es continua en $[r,2r]$, existe una única función continua u definida en $[0,2r]$ que es solución de (2) en $[r,2r]$ y que satisface $u(t) = g(t)$ para $0 \leq t \leq r$. Dado que u es continua en $[r,2r]$, tenemos que v es continua en el intervalo $[r,3r]$ (por su definición) entonces de acuerdo a la ecuación (4), existe una única función continua u definida en $[0,3r]$ que satisface $u(t) = g(t)$ para $0 \leq t \leq r$ y que es solución de (2) en $[r,3r]$. Este proceso puede continuarse hasta el infinito puesto que si u es continua en el intervalo de la forma $[0, nr]$ (con n en $\mathbf{N}$) de la definición de v y la ecuación (4) se deduce que u es la única solución de (2) definida en $[0,(n+1)r]$ que satisface la condición inicial $u(t) = g(t)$ para $0 \leq t \leq r$. Luego hemos establecido la existencia y unicidad de la solución u en $t \geq r$.

La ecuación (2) podemos escribirla en la forma

$$a_0 u'(t) = f(t) - b_0 u(t) - b_1 u(t-r) \quad t > r \tag{2.5}$$

Como u es continua en (r, ∞) y f es continua en $[0, \infty)$, se tiene que u' es de clase C^0 en (r, ∞) y por lo tanto u es de clase C^1 en (r, ∞). Para t en el intervalo $(2r, \infty)$, el término derecho de la ecuación (5) es derivable, entonces tenemos que

$$a_0 u''(t) = f'(t) - b_0 u'(t) - b_1 u'(t-r)$$

y como u es de clase C^1 en $(2r, \infty)$, u'' es continua en este intervalo y en consecuencia u es de clase C^2 en $(2r, \infty)$. Lo que completa la demostración del teorema.

En este teorema debemos destacar dos aspectos importantes. Por una parte, el resultado de existencia y unicidad y por otra el método empleado en la demostración (método de los intervalos) que tiene la particularidad de ser constructivo, ya que permite obtener explícitamente la solución u, dada una función inicial g.

Ejemplo: Consideremos la ecuación

$$u'(t) = u(t-1), \tag{2.6}$$

y sea $g(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$. Vamos a determinar una solución de (6) definida para $t \geq 1$ y tal que $u(t) = 1$ si $0 \leq t \leq 1$. Si $1 \leq t \leq 2$

$$u'(t) = 1$$

Luego

$$u(t) = 1 + (t-1)$$

Si $2 \leq t \leq 3$

$$u'(t) = 1 + (t-1)$$

entonces

$$u(t) = 1 + (t-1) + \frac{(t-2)^2}{2}$$

Para $3 \leq t \leq 4$

$$u'(t) = 1 + (t-1) + \frac{(t-2)^2}{2}$$

se tiene

$$u(t) = 1 + (t-1) + \frac{(t-2)^2}{2} + \frac{(t-3)^3}{3!}$$

Continuando con este método podemos demostrar que

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(t-i)^i}{i!}; \quad n \leq t \leq n+1, \qquad n \in \mathrm{N}$$

es la solución de (6) que satisface la condición inicial $u(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$.

3 Teorema de existencia para ecuaciones escalares

El teorema que veremos a continuación es parte de un trabajo realizado por K. Cooke [C-1] sobre el problema propuesto R. Bellman relativo a ecuaciones con retardo (ver introducción). Haremos sólo un esbozo de su demostración, destacando algunos elementos de nuestro interés.

Teorema 2 *Consideremos la ecuación con retardo*

$$u'(t) + au(t - r(t)) = 0 \qquad a \text{ constante} \tag{3.7}$$

donde $r(t)$ *es una función continua no negativa para* $t \geq t_0$ *y satisface las siguientes condiciones:*

i) $r(t) \to 0$ *si* $t \to \infty$

ii) r *es integrable*

$$\int^{\infty} r(s)ds < \infty \tag{3.8}$$

Entonces toda solución continua de la ecuación (7) para $t \geq t_0$ *satisface*

$$\lim_{t\to\infty} u(t)e^{at} = c, \tag{3.9}$$

para alguna constante c. *Más aún, para toda* $c, -\infty < c < \infty$, *existe una solución de la ecuación (7) que satisface (9).*

Esquema de la demostración.

La Ecuación (7) se puede escribir de la forma

$$u'(t) + au(t) = a[u(t) - u(t - r(t))] \qquad t > t_0 \tag{3.10}$$

Toda solución de la ecuación (7) es solución de la ecuación

$$u(t)e^{at} = u(t_0)e^{at_0} + a\int_{t_0}^{t} e^{as}[u(s) - u(s - r(s))]ds. \tag{3.11}$$

Usando el teorema del valor medio y como $r(t)$ es acotada se puede elegir $c_1 \geq 1$ constante (independiente de t_0) tal que

$$|1 - e^{ar(t)}| \leq c_1 r(t) \qquad t \geq t_0$$

y c_2 constante tal que

$$c_2 \geq 1$$

$$c_2 > 4|a|[1 + sup_{t\geq t_0} e^{ar(t)}].$$

La función inicial se denota por $g(t)$ y esta definida en el intervalo inicial $[\tau, t_0]$ donde

$$\tau = inf_{t\geq t_0}(t - r(t)).$$

Se demuestra que para cada función continua g, existe una única solución u de la ecuación (7) que pertenece a cierta clase S_b definida de la siguiente forma.

Se elige b constante tal que

$$b > |g(t_0)|e^{at_0}c_1 \tag{3.12}$$

$$b > max\{|g(t)|e^{at}/\tau \leq t \leq t_0\}.$$

Sea t_1 el mayor t tal que

$$t_1 - r(t_1) = t_0$$

y

$$t - r(t) \geq t_0 \qquad t \geq t_1.$$

S_b se elige como la clase de funciones continuas definidas para $t \geq \tau$ que cumplen las siguientes condiciones:

i) $u(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0$

ii) la estimación

$$|u(t)|e^{at} \leq b \qquad \tau \leq t \tag{3.13}$$

iii) $e^{at}|u(t) - u(t - r(t))| \leq c_2 b r(t) \quad t_1 \leq t.$

Sobre el espacio $\mathcal{C}$, con la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $[\tau, \infty)$ se define el operador

$$\begin{aligned} T: \ \mathcal{C} &\rightarrow \ \mathcal{C} \\ u &\rightarrow \ Tu = v \end{aligned} .$$

donde

$$v(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0 \tag{3.14}$$

$$v(t)e^{at} = g(t_0)e^{at_0} + a\int_{t_0}^{t} e^{as}[u(s) - u(s - r(s))]ds \qquad t \geq t_0$$

Aplicando el teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff se demuestra que este operador tiene un punto fijo en S_b, estableciéndose así la existencia de una solución de la ecuación (7) para $t \geq t_0$, determinada por la función inicial g y que satisface (13). Se demuestra que para cada g fija, esta solución es única, en consecuencia toda solución de (7) satisface (13).

Usando la condición (ii) de (13) se establece el comportamiento asintótico de la solución u. Finalmente mediante una elección adecuada de la función g es posible encontrar una solución de (7) tal que, si

$$c = \lim_{t \to \infty} u(t)e^{at} \cdot$$

entonces $c \neq 0$. Como todo múltiplo de una solución, es también solución de la ecuación, se tiene que para todo c en $\mathbf{R}$ existe una solución que satisface (9).

4 Teorema para ecuaciones retardadas con coeficientes variables

El próximo teorema es parte de un trabajo reciente de M. Pinto [P]. Es una de las primeras extensiones de la fórmula asintótica de Cooke [C-1] a coeficientes variables. Hacemos notar que además de ser un resultado importante su demostración esta basada en argumentos simples y claros. Es allí donde aparece la constante de

Lipschitz ahora variable en el tiempo, que debemos considerar en la clase invariante usada en el Teorema de Schauder-Tichonoff.

Consideremos la ecuación

$$u'(t) = a(t)u(t - r(t,u)) \tag{4.15}$$

(Observemos que en este caso r no depende sólo de t) donde a es una función continua en $[0,\infty)$.

Denotemos por

$$\begin{aligned} < a > (t) &= |a(t)|\,\|a_t\|_1 \\ \beta(t) &= h(t)^{-1}\|h_t\|_2, \qquad h(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \end{aligned} \tag{4.16}$$

y para algún $\delta > 0$ y h acotado sea

$$m(t) = sup_{|v| \leq \frac{\delta}{\|h\|_\infty}} r(t, h(t)v). \tag{4.17}$$

Supongamos que $r = r(t,u)$ satisface la condición

(R) Para algún $\delta > 0$, $\mu > 0$, $r : [0,\infty) \times [-\delta,\delta] \to [0,\mu]$ es una función continua tal que

$$\hat{m} =< a > \cdot \beta \cdot m \text{ es } L_1[0,\infty). \tag{4.18}$$

Sea $g : [t_0 - \mu, t_0] \to \mathbf{R}$ una función continua, tal que $|g(t_0)| \leq \delta$ (g denotará la función inicial). Una solución u de la ecuación (15) definida para $t_0 - \mu \leq t < t_1$, ($t_0 < t_1 < \infty$) es una extensión continua de g tal que

i) $u(t) = g(t) \quad t_0 - \mu \leq t \leq t_0$

ii) u es continua para $t_0 \leq t < t_1$

iii) $|u(t)| < \delta \quad t_0 \leq t < t_1$

iv) $u'(t) = a(t)u(t - r(t,u)) \quad t_0 \leq t < t_1$

Si u es solución de (15) definida en $[t - \mu, t]$ y tal que $\|u_t\|_1 \leq \delta$ entonces

$$|u(t - r(t,u)) - u(t)| \leq |u'(\eta_t)| r(t,u) \tag{4.19}$$

para algún $t - r(t,u) \leq \eta_t \leq t$, y como $0 \leq r(t,u) \leq \mu$ se tiene que

$$|u(t - r(t,u)) - u(t)| \leq \|u_t'\|_1 r(t,u).$$

Si u es solución de (15) definida en $[t-2\mu, t]$ y tal que $\|u_t\|_2 \leq \delta$ se tiene que

$$\|u_t'\|_1 = sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0}|u'(t+\sigma)| \leq sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0}|a(t+\sigma)||u(t+\sigma, r(t+\sigma, u))|$$

luego

$$\|u_t'\|_1 \leq \|a_t\|_1\|u_t\|_2 \tag{4.20}$$

La ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$u'(t) - a(t)u(t) = a(t)(u(t-r(t,u)) - u(t)) \tag{4.21}$$

Denotaremos el término derecho de (21) por $f(t,u)$. Como

$$|f(t,u)| \leq |a(t)||u(t-r(t,u)) - u(t)|$$

de (19) y (20) se tiene que

$$|f(t,u)| \leq < a > (t)r(t,u)\|u_t\|_2 \tag{4.22}$$

para cualquier solución definida en el intervalo $[t-2\tau, t]$ y tal que $\|u_t\|_2 \leq \delta$.

Así la ecuación (15) se escribe de la forma

$$u'(t) = a(t)u(t) + f(t,u) \tag{4.23}$$

donde $f : [0,\infty) \times C_{2\mu}(\delta) \to \mathbf{R}$ es continua definida por (21) y satisface (22).

Teorema 3 *Supongamos que se cumple la condición (R) y que h es acotado. Sea $t_0 \geq 0$. Si*

$$\|u_{t_0}\|_2 \leq \delta\|h_{t_0}\|_2 \cdot \|h\|_\infty^{-1} e^{-\int_{t_0}^\infty \hat{m}(s)ds} \tag{4.24}$$

Entonces la solución u de la ecuación (15) tal que $u(t) = g(t)$ para $t_0 - \mu \leq t \leq t_0$ está definida para todo t en el intervalo $[t_0-\mu, \infty)$, satisface $|u(t)| \leq \delta\|h\|_\infty^{-1}h(t)$ y para alguna constante c

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}[c + 0(\int_t^\infty \hat{m}(s)ds)] \tag{4.25}$$

cuando $t \to \infty$.

Demostración: Sea $t_0 > 0$ y u_{t_0} en $C_\mu(\delta)$. De la ecuación (23) se tiene que

$$h(t)^{-1}u(t) = h(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s)^{-1}f(s, u(s))ds \tag{4.26}$$

denotemos $v(t) = h(t)^{-1}u(t)$. La ecuación (26) se escribe entonces

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} h(s)^{-1}f(s, h(s)v(s))ds \tag{4.27}$$

Notemos que $f(s, h(s)v(s))$ está definida si $|v(s)| \leq \delta\|h\|_\infty^{-1}$, ya que si esto ocurre

$$|h(s)v(s)| \leq |h(s)||v(s)| \leq \|h\|_\infty |v(s)| \leq \delta.$$

Supongamos que $|v(t_0)| < \delta\|h\|_\infty^{-1}$, como v. es continua existe $\tilde{t} > t_0$ tal que para todo $t_0 \leq t < \tilde{t}$ $|v(t)| \leq \delta\|h\|_\infty^{-1}$. Sea t_1 el mayor con esta propiedad. Usando (22) y (27) tenemos

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq |v(t_0)| + \textstyle\int_{t_0}^{t} < a > (s)\beta(s)r(s, h(s)v(s))\|v_s\|_2 ds \\ &\leq |v(t_0)| + \textstyle\int_{t_0}^{t} \hat{m}(s)\|v_s\|_2 ds \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $t_0 \leq t < t_1$

$$\|v_t\|_2 \leq \|v_{t_0}\|_2 + \int_{t_0}^{t} \hat{m}(s)\|v_s\|_2 ds \tag{4.28}$$

aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman en (28) se tiene que

$$\|v_t\|_2 \leq \|v_{t_0}\|_2 e^{\int_{t_0}^{t} \hat{m}(s)ds} \leq \|v_{t_0}\|_2 e^{\int_{t_0}^{\infty} \hat{m}(s)ds}$$

luego si

$$\|v_{t_0}\|_2 \leq \delta\|h\|_\infty^{-1} e^{-\int_{t_0}^{\infty} \hat{m}(s)ds}, \quad \|v_t\|_2 \leq \delta\|h\|_\infty^{-1},$$

entonces $|v(t)| \leq \delta\|h\|_\infty^{-1}$.

Por otra parte $\lim_{t \to t_1^-} v(t)$ existe. Probaremos esto usando el criterio de Cauchy para límites de funciones.

Si $t^* < t_1$ de (18) y (22) se tiene

$$|v(t) - v(t^*)| = |\int_{t^*}^{t} h(s)^{-1}f(s, h(s)v(s))ds| \leq K_1 |\int_{t^*}^{t} \hat{m}(s)ds|$$

con K_1 constante positiva. Como $\hat{m}$ es $L_1[0, \infty)$ $\lim_{t \to t_1} -v(t)$ existe. Entonces $t_1 = \infty$ y si

$$\|v_{t_0}\|_2 < \delta \|h\|_\infty^{-1} e^{-\int_{t_0}^t \hat{m}(s)ds},$$

v y por lo tanto u está definida en $[t_0, \infty)$. Si denotamos por $c = \lim_{t\to\infty} v(t)$ entonces

$$\begin{aligned} |v(t) - c| &= |\textstyle\int_{t_0}^t h(s)^{-1} f(s, h(s)v(s))ds - \int_{t_0}^\infty h(s)^{-1} f(s, h(s)v(s))ds| \\ &\leq \textstyle\int_t^\infty \hat{m}(s)ds \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v(t) = c + 0(\int_t^\infty \hat{m}(s)ds)$$

y se tiene la fórmula

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}(c + 0(\int_t^\infty \hat{m}(s)ds))$$

cuando $t \to \infty$.

CAPITULO III

1 Preliminares

En este capítulo estudiaremos el sistema lineal con retardo

$$Z'(t) = A(t)Z(t - r(t)) \tag{1.1}$$

donde $A(t)$ es una matríz de $n \times n$ y $Z(t)$ es un vector de $\mathbf{C}^n$. Nuestra primera pregunta es ¿bajo que condiciones de la matriz A y de la función r el sistema (1) tiene solución y donde está definida?. Por otra parte, si consideramos el sistema lineal ordinario

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{1.2}$$

naturalmente nos preguntamos ¿será que para $r(t)$ suficientemente pequeño una solución de (1), "se parece" en algún sentido a una solución del sistema (2)?.

A través de todo este capítulo supondremos que A es una matriz continua definida en el intervalo $[0, \infty)$ y r es una función continua no negativa definida para $t \geq 0$ y tal que $r(t) \leq \mu$ para todo $t \geq 0$, con μ constante.

Una solución Z del sistema (1) definida para $t \geq t_0$, $(t_0 \geq 0)$ se considera determinada por una función inicial g continua, definida en un intervalo inicial $[\tau, t_0]$ (capítulo II) donde como siempre

$$\tau = \inf_{t \geq t_0} (t - r(t))$$

Entonces una solución de (1) definida para $t \geq \tau$ es una función continua en el intervalo $[\tau, \infty)$ y tal que

i) $Z(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0$

ii) $Z'(t) = A(t)Z(t - r(t)) \qquad t_0 \leq t$

Los resultados esenciales de nuestro trabajo los presentaremos en 2 teoremas, dedicando una sección del capítulo a cada uno. Esto lo hacemos principalmente debido a los distintos enfoques del problema. En el primer teorema consideramos ciertas condiciones de integrabilidad y uniformidad que garantizan la existencia de una solución del sistema (1) que satisface la fórmula asintótica

$$Z(t) = \Phi(t)(c + o(1)), \quad t \to \infty.$$

Donde Φ es una matriz fundamental de (2) y c un vector constante. Además, se prueba que toda las soluciones Z de (1) poseen este comportamiento asintótico. En el segundo teorema estudiamos el problema de existencia y comportamiento asintótico suponiendo que $A = \Lambda + R$ donde Λ satisface la condición de dicotomía de Levinson. En este caso los valores característicos de la matriz Λ tienen un rol preponderante dentro del problema.

Una serie de resultados previos requeridos para la demostración de estos teoremas. Especial importancia tiene el lema 2 que precisa propiedades muy útiles del operador considerado. Además, sugiere la clase de funciones de Lipschitz invariante por el operador.

En el siguiente lema demostramos que toda solución del sistema (1) está únicamente determinada por su función inicial.

Lema 1 *(Unicidad)*

Sea g una función continua definida en el intervalo $[\tau, t_0]$ $(t_0 \geq 0)$ con valores en $\mathbf{C}^n$. Si Z^1 y Z^2 son dos soluciones de (1) definidas para $t \geq t_0$ y

$$Z^1(t) = Z^2(t) = g(t) \qquad t \in [\tau, t_0]$$

entonces

$$Z^1(t) = Z^2(t) \qquad \textit{para todo} \quad t \geq t_0$$

Demostración: Como Z^1 y Z^2 son soluciones de (1) entonces para $t \geq t_0$

$$Z^1(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s) Z^1(s - r(s)) ds$$

y

$$Z^2(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s) Z^2(s - r(s)) ds$$

Supongamos que $Z^1 \neq Z^2$, luego para algún $t \in [t_0, \infty)$, $Z^1(t) \neq Z^2(t)$. Sea $\tilde{t} = inf\{t \in (t_0, \infty) / Z^1(t) \neq Z^2(t)\}$. Como Z^1 y Z^2 son continuas

$$Z^1(t) - Z^2(t) = 0 \qquad \tau \leq t \leq \tilde{t}.$$

Se tiene que para todo $t \geq t_0$

$$Z^1(t) - Z^2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)(Z^1(s-r(s)) - Z^2(s-r(s)))ds$$

y

$$\begin{aligned} |Z^1(t) - Z^2(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)||Z^1(s-r(s)) - Z^2(s-r(s))|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)||Z_s^1(-r(s)) - Z_s^2(-r(s))|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)|\|Z_s^1 - Z_s^2\|_1 ds \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} |Z^1(t) - Z^2(t)| &\leq Sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0}|Z^1(t+\sigma) - Z^2(t+\sigma)| \\ &= \|Z_t^1 - Z_t^2\|_1. \end{aligned}$$

Si $t+\sigma \leq t_0$

$$Z^1(t+\sigma) - Z^2(t+\sigma) = g(t+\sigma) - g(t+\sigma) = 0$$

entonces

$$|Z^1(t) - Z^2(t)| = 0$$

luego

$$Z^1(t) = Z^2(t).$$

Por otra parte, si $t+\sigma \geq t_0$

$$Z^1(t+\sigma) - Z^2(t+\sigma) = \int_{t_0}^{t+\sigma} A(s)(Z^1(s-r(s)) - Z^2(s-r(s)))ds,$$

luego

$$\begin{aligned} \sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0}|Z^1(t+\sigma) &- Z^2(t+\sigma)| \\ &\leq \sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0}\int_{t_0}^{t+\sigma} |A(s)||Z^1(s-r(s)) - Z^2(s-r(s))|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |A(s)|\|Z_s^1 - Z_s^2\|_1 ds. \end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\|Z_t^1 - Z_t^2\|_1 &\leq \textstyle\int_{t_0}^t |A(s)| \|Z_s^1 - Z_s^2\|_1 ds \\
&= \textstyle\int_{\tilde{t}}^t |A(s)| \|Z_s^1 - Z_s^2\|_1 ds.
\end{aligned}
$$

Denotemos por

$$F(t) = \|Z_t^1 - Z_t^2\|_1,$$

luego se tiene

$$F(t) \leq \int_{\tilde{t}}^t |A(s)| F(s) ds \qquad\qquad t \geq \tilde{t}$$

entonces $F(t) = 0$ y como

$$|Z^1(t) - Z^2(t)| \leq \|Z_t^1 - Z_t^2\|_1 = 0$$

entonces para todo $t \geq \tilde{t}$

$$Z^1(t) - Z^2(t) = 0$$

lo que contradice la definición de $\tilde{t}$. Por lo tanto

$$Z^1(t) = Z^2(t) \qquad\qquad t \geq t_0$$

y se tiene la unicidad.

2 Existencia

Consideremos el sistema (1) donde la matríz A y la función r satisfacen las condiciones planteadas en la sección anterior. Denotamos por $\Phi(t)$ a una matriz fundamental del sistema (2) y

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(t) &= |\Phi(t)^{-1} A(t) \Phi(t)| + |\Phi(t)^{-1} A(t) \Phi(t - r(t))| \\
\beta(t) &= |\Phi(t)^{-1}| \, \|\Phi_t\|_1
\end{aligned}
$$

La ecuación (1) podemos escribirla en la forma

$$Z'(t) - A(t)Z(t) = A(t)\Delta Z(t)$$

donde $\Delta Z(t) = Z(t-r(t)) - Z(t)$. Si una función Z es solución de la ecuación

$$\Phi(t)^{-1}Z(t) = \Phi(t_0)^{-1}Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds, \qquad (2.3)$$

definida para $t \geq t_0$, entonces Z es solución de la ecuación (1).

Luego el problema de determinar una solución de la ecuación diferencial (1) se traduce en determinar una solución para la ecuación integral (3).

Tomemos el espacio vectorial topológico $C([\tau,\infty), \mathbf{C}^n)$ con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $[\tau, \infty)$ (que denotamos por $\mathcal{C}$) A partir de la ecuación (3), para una función continua g, definida en $[\tau, t_0]$, fija definimos el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ Z &\longrightarrow \mathcal{N}Z = Y \end{aligned}$$

donde

$$Y(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0 \qquad (2.4)$$

$$Y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}g(t_0) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds. \quad t \geq t_0$$

Notemos que si $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo Z en $\mathcal{C}$, entonces Z satisface la ecuación (3) y por lo tanto es solución de la ecuación (1). Este hecho es esencial en nuestro problema. En el siguiente lema demostramos tres importantes propiedades de este operador que serán fundamentales en el desarrollo del teorema (1).

Sea $t_1 \geq t_0$ tal que

$$t_1 - r(t_1) = t_0$$

y

$$t - r(t) \geq t_0 \quad \text{para todo} \quad t \geq t_1$$

Lema 2 *Sea* $\mathcal{N} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *definido en (4) donde* g *es una función continua definida en* $[\tau, t_0]$. *Entonces para* $t \geq t_0$

i) $Y \in C^1$ *e* $Y'(t) = A(t)Y(t) + \Delta Z(t)$

ii) $|\Phi(t)^{-1}Y'(t)| \leq \|\tilde{A}_t\|_1(\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1)$

Si $t \geq t_1$ *se tiene además*

iii) $|\Phi(t)^{-1}\Delta Y(t)| \leq \beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t)(\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_2)$

Demostración: Denotemos por $\xi = \Phi(t_0)^{-1}g(t_0)$

i) De la definición de Y tenemos que

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \Phi'(t)\xi + \Phi'(t)\textstyle\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}A(t)\Delta Z(t) \\ &= A(t)\Phi(t)\xi + A(t)\Phi(t)\textstyle\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds + A(t)\Delta Z(t) \\ &= A(t)[\Phi(t)\xi + \Phi(t)\textstyle\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds] + A(t)\Delta Z(t) \\ &= A(t)Y(t) + A(t)\Delta Z(t) \end{aligned}$$

Como las funciones A, Y, Z y r son continuas en $[t_0, \infty)$ luego Y' es continua y entonces $Y \in C^1$.

ii) Usando (i) tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(t)^{-1}Y(t) &= \Phi(t)^{-1}Y(t) + \Phi(t)^{-1}A(t)[Z(t-r(t)) - Z(t)] \\ &= \Phi(t)^{-1}Y(t) + \Phi(t)^{-1}A(t)[\Phi(t-r(t))\Phi(t-r(t))^{-1}Z(t-r(t)) \\ &- \Phi(t)\Phi(t)^{-1}Z(t)] \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que para toda $Y \in \mathcal{C}$ y $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |\Phi(t)^{-1}Y(t)| &\leq \sup_{t-r(t)\leq\sigma\leq t} |\Phi(\sigma)^{-1}Y(\sigma)| \\ &\leq \sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0} |\Phi^{-1}(t+\sigma)Y(t+\sigma)| = \|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} |\Phi(t)^{-1}Y(t)| &\leq |\Phi(t)^{-1}A(t)\Phi(t)|\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + |\Phi(t)^{-1}A(t)\Phi(t-r(t))|\ \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1 \\ &+ |\Phi(t)^{-1}A(t)\Phi(t)|\ \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1 \\ &\leq |\tilde{A}(t)|(\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1) \leq \|\tilde{A}_t\|_1(\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1) \end{aligned}$$

iii) Si $t \geq t_1$

$$\Phi(t)^{-1}\Delta Y(t) = \Phi(t)^{-1}(Y(t-r(t)) - Y(t))$$

Como $Y \in C^1$, podemos aplicar el teorema del valor medio en cada intervalo de la forma $[t-r(t),t]$ entonces para cada t existe η_t, $t-r(t) < \eta_t < t$ tal que

$$|Y'(\eta_t)|r(t) \geq |Y(t-r(t)) - Y(t)|.$$

Luego

$$|\Phi(t)^{-1}\Delta Y(t)| \leq |\Phi(t)^{-1}Y'(\eta_t)|r(t) \leq |\Phi(t)^{-1}\Phi(\eta_t)\Phi| \; |(\eta_t)^{-1}Y'(\eta_t)|r(t)$$

usando (i) tenemos

$$\begin{aligned}
&\leq \; |\Phi(t)^{-1}| \; |\Phi(\eta_t)||\Phi(\eta_t)^{-1}(A(\eta_t)Y(\eta_t) + A(\eta_t)\Delta Z(\eta_t))|r(t) \\
&\leq \; |\Phi(t)^{-1}| \; |\Phi(\eta_t)| \; |\Phi(\eta_t)^{-1}(A(\eta_t)\Phi(\eta_t)\Phi(\eta_t)^{-1}Y(\eta_t) \\
&+ \; A(\eta_t)\Phi(\eta_t - r(\eta_t))\Phi(\eta_t - r(\eta_t))^{-1}Z(\eta_t - r(\eta_t)) \\
&+ \; A(\eta_t)\Phi(\eta_t)\Phi(\eta_t)^{-1}Z(\eta_t)|r(t).
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$|\Phi(\eta_t)| \leq \sup_{t-r(t)\leq\sigma\leq t} |\Phi(\sigma)| \leq \sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0} |\Phi_t(\sigma)| = \|\Phi_t\|_1$$

y

$$|\Phi(\eta_t - r(\eta_t))| \leq \sup_{t-2\mu\leq\sigma\leq t} |\Phi(\sigma)| \leq \sup_{-2\mu\leq\sigma\leq 0} |\Phi_t(\sigma)| = \|\Phi_t\|_2$$

puesto que para $t-r(t) \leq \eta_t \leq t$ y $t \geq t_1$ tenemos

$$t - 2\mu \leq t - (r(t) + r(\eta_t)) \leq \eta_t - r(\eta_t) \leq t - r(\eta_t) \leq t.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}\Delta Y(t)| &\leq |\Phi(t)^{-1}|\ \|\Phi_t\|_1[|\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t)|\ |\Phi(\eta_t)^{-1}Y(\eta_t)| \\
&+ |\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t - r(\eta_t))|\ |\Phi(\eta_t - r(\eta_t))^{-1}Z(\eta_t - r(\eta_t))| \\
&+ |\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t)|\ |\Phi(\eta_t)^{-1}Z(\eta_t)|]r(t) \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}|\|\Phi_t\|_1[|\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t)|\ \|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 \\
&+ |\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t - r(\eta_t))|\ \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1 \\
&+ |\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t)|\ \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1]r(t) \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}|\ \|\Phi_t\|_1[|\Phi(\eta_t)^{-1}A(\eta_t)\Phi(\eta_t)|\ \|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 \\
&+ \tilde{A}(\eta_t)\|\Phi_t^{-1}Z_t\|_1]r(t) \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}|\ \|\Phi_t\|_1\tilde{A}(\eta_t)r(t)(\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_2) \\
&\leq \beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t)(\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_2)
\end{aligned}
$$

y tenemos iii).

Notemos que una propiedad importante del operador $\mathcal{N}$ es llevar funciones continuas en funciones de clase C^1 (propiedad (i)).

Antes de establecer el teorema 1 discutiremos el método que empleamos y fijaremos algunos elementos necesarios en la demostración. Nuestra herramienta esencial es el Teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff, lo aplicaremos en la siguiente forma.

Tomamos el espacio vectorial topológico $C([\tau,\infty),\mathbf{C}^n)$ con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $[\tau,\infty)$. Este espacio es de Hausfdorff, localmente convexo, completo y metrizable (ver [S-1], [S-2]). Definimos un subconjunto S de $\mathcal{C}$ en el cual probamos que $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo lo que determina la existencia de una solución de (1). Notemos que la elección del conjunto S es esencial en el problema puesto que, como veremos en la demostración, toda solución del sistema (1) satisface las propiedades que definen a los elementos de S, hecho que nos permitirá determinar el comportamiento asintótico de tales soluciones.

Teorema 1 *Existencia y comportamiento asintótico de las soluciones de (1)*
Consideremos el sistema (1). Supongamos que

$$\|\tilde{A}\|_{[t-r(t),t]}r(t) \leq \frac{1}{3} \tag{2.5}$$

para t suficientemente grande y

$$\int_0^\infty \lambda(s)ds < \infty \tag{2.6}$$

donde $\lambda(t) = \tilde{A}(t)\|\tilde{A}_t\|_1\beta(t)r(t)$. Entonces existe un t_0 suficientemente grande y una solución continua Z de (1) definida en $[t_0, \infty)$ que satisface $|\Phi(t)^{-1}Z(t)| \leq L$ ($L > 0$ constante) y

$$Z(t) = \Phi(t)(c + o(\int_t^\infty \lambda(s)ds)), \qquad t \to \infty \tag{2.7}$$

para algún vector constante c. Más aún, toda solución continua del sistema (1) satisface (7) para algún vector c constante.

Demostración: Consideremos los siguientes elementos técnicos, como

$$\tau = \inf_{t \geq t_0} t - r(t) \quad \text{y} \quad t_1 - r(t_1) = t_0$$

para $t = t_1$ la condición (5) queda en la forma

$$\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1) < \frac{1}{3}$$

entonces por (5) y (6) podemos elegir t_0 suficientemente grande y tal que

$$\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1) + 2\int_{t_0}^\infty \tilde{A}(s)\beta(s)\|\tilde{A}_s\|_1 r(s)ds \leq \frac{1}{2} \tag{2.8}$$

Sea g una función continua definida en $[\tau, t_0]$ con valores en $\mathbf{C}^n$ y sea L una constante positiva tal que

$$\begin{aligned} |\Phi(t)^{-1}g(t)| &\leq L \qquad \tau \leq t \leq t_0 \\ 2|\Phi(t_0)^{-1}g(t_0)| &\leq L. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sea $S \subseteq C$ definido de la siguiente forma para cada Z en S se cumple

$$Z(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0 \tag{2.10}$$

$$|\Phi(t)^{-1}Z(t)| \leq L \qquad t \geq \tau \tag{2.11}$$

$$|\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t)| \leq 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t) \qquad t \geq t_1 \tag{2.12}$$

y sea

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}:\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ Z & \longrightarrow & \mathcal{N}Z = Y \end{array}$$

el operador definido en (4). Denotaremos por $\xi = \Phi(t_0)^{-1}g(t_0)$.

Vamos a demostrar que $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo Z en el conjunto S. En el Lema 3 probaremos que S es convexo, cerrado y acotado. Para aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff, debemos verificar que

i) $\mathcal{N}$ es continuo

ii) $\mathcal{N}(S) \subseteq S$

iii) $\mathcal{N}(S)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$

(i) $\mathcal{N}$ es continuo.

Como el espacio $\mathcal{C}$ es metrizable,$\mathcal{N}$ es continuo si y solo si es secuencialmente continuo, es decir para toda sucesión $\{Z_n\}$ en $\mathcal{C}$ tal que

$Z_n \longrightarrow Z$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en compactos entonces $\mathcal{N}Z_n \to \mathcal{N}_Z$ uniformemente en compactos.

Así, sea $\{Z_n\}$ sucesión en $\mathcal{C}$ tal que $Z_n \to Z$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $[\tau, \infty)$. Sea K compacto de $[\tau, \infty)$, debemos considerar tres casos

1. $K \subseteq [\tau, t_0]$
2. $K \cap [\tau, t_0] \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$
3. $K \cap [\tau, t_0] = \Phi$

En el primer caso, para cada $t \in K$

$$\|\mathcal{N}Z_n(t) - \mathcal{N}Z(t)\| = \|g(t) - g(t)\| = 0$$

por lo tanto

$$\|\mathcal{N}Z_n - \mathcal{N}Z\|_K < \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, así no hay nada que probar.

Si $K \cap [\tau, t_0] \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$ entonces podemos escribir

$$K = U \cup V$$

y sea

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ Z & \longrightarrow & \mathcal{N}Z = Y \end{array}$$

el operador definido en (4). Denotaremos por $\xi = \Phi(t_0)^{-1}g(t_0)$.

Vamos a demostrar que $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo Z en el conjunto S. En el Lema 3 probaremos que S es convexo, cerrado y acotado. Para aplicar el Teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff, debemos verificar que

i) $\mathcal{N}$ es continuo

ii) $\mathcal{N}(S) \subseteq S$

iii) $\mathcal{N}(S)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$

(i) $\mathcal{N}$ es continuo.

Como el espacio $\mathcal{C}$ es metrizable,$\mathcal{N}$ es continuo si y solo si es secuencialmente continuo, es decir para toda sucesión $\{Z_n\}$ en $\mathcal{C}$ tal que

$Z_n \longrightarrow Z$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en compactos entonces $\mathcal{N}Z_n \to \mathcal{N}_Z$ uniformemente en compactos.

Así, sea $\{Z_n\}$ sucesión en $\mathcal{C}$ tal que $Z_n \to Z$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $[\tau, \infty)$. Sea K compacto de $[\tau, \infty)$, debemos considerar tres casos

1. $K \subseteq [\tau, t_0]$
2. $K \cap [\tau, t_0] \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$
3. $K \cap [\tau, t_0] = \Phi$

En el primer caso, para cada $t \in K$

$$\|\mathcal{N}Z_n(t) - \mathcal{N}Z(t)\| = \|g(t) - g(t)\| = 0$$

por lo tanto

$$\|\mathcal{N}Z_n - \mathcal{N}Z\|_K < \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, así no hay nada que probar.

Si $K \cap [\tau, t_0] \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$ entonces podemos escribir

$$K = U \cup V$$

Así, $\|\mathcal{N}Z_n - \mathcal{N}Z\|_K \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N_0$ entonces $\mathcal{N}Z_n \to \mathcal{N}Z$ uniformemente en compactos de $[\tau, \infty)$. Luego $\mathcal{N}$ es secuencialmente continua y por lo tanto continua.

(ii) $\mathcal{N}(S) \subseteq S$. En esta demostración usamos fundamentalmente el Lema 2. Debemos probar que para cada $Z \in S$, $\mathcal{N}Z = Y$ satisface las condiciones (10), (11) y (12).

Sea $Y = \mathcal{N}Z$, para $\tau \leq t \leq t_0$. (10) se satisface por definición de $\mathcal{N}$ luego

$$Y(t) = g(t) \quad \text{para} \quad t \in [\tau, t_0].$$

Veamos (11). Sea $\tau \leq t \leq t_0$

$$|\Phi(t)^{-1}Y(t)| = |\Phi(t)^{-1}g(t)| \leq L \qquad \text{por (9)}$$

Si $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\Phi(t)^{-1}Y(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}Y(t)| &\leq |\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)[\Phi(s-r(s))\Phi(s-r(s))^{-1}Z(s-r(s)) \\
&- \Phi(s)\Phi(s)^{-1}Z(s)]|ds \\
&\leq |\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s-r(s))|\,|\Phi(s-r(s))^{-1}Z(s-r(s))|ds \\
&+ \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)|\,|\Phi(s)^{-1}Z(s)|ds \\
&\leq |\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)\phi(s-r(s))|\|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]} \\
&+ |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)|)\|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}ds \\
&\leq |\xi| + \|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1)
\end{aligned}$$

por (5) y (10)

$$\leq \frac{L}{2} + L\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1) \leq \frac{L}{2} + \frac{L}{3} \leq L$$

Si $t \geq t_1$

Así, $\|\mathcal{N}Z_n - \mathcal{N}Z\|_K \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N_0$ entonces $\mathcal{N}Z_n \to \mathcal{N}Z$ uniformemente en compactos de $[\tau, \infty)$. Luego $\mathcal{N}$ es secuencialmente continua y por lo tanto continua.

(ii) $\mathcal{N}(S) \subseteq S$. En esta demostración usamos fundamentalmente el Lema 2. Debemos probar que para cada $Z \in S$, $\mathcal{N}Z = Y$ satisface las condiciones (10), (11) y (12).

Sea $Y = \mathcal{N}Z$, para $\tau \leq t \leq t_0$. (10) se satisface por definición de $\mathcal{N}$ luego

$$Y(t) = g(t) \quad \text{para} \quad t \in [\tau, t_0].$$

Veamos (11). Sea $\tau \leq t \leq t_0$

$$|\Phi(t)^{-1}Y(t)| = |\Phi(t)^{-1}g(t)| \leq L \qquad \text{por (9)}$$

Si $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\Phi(t)^{-1}Y(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}Y(t)| &\leq |\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)[\Phi(s-r(s))\Phi(s-r(s))^{-1}Z(s-r(s)) \\
&- \Phi(s)\Phi(s)^{-1}Z(s)]|ds \\
&\leq |\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s-r(s))|\, |\Phi(s-r(s))^{-1}Z(s-r(s))|ds \\
&+ \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)|\, |\Phi(s)^{-1}Z(s)|ds \\
&\leq |\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)\phi(s-r(s))|\|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]} \\
&+ |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)|)\|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}ds \\
&\leq |\xi| + \|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1)
\end{aligned}$$

por (5) y (10)

$$\leq \frac{L}{2} + L\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1) \leq \frac{L}{2} + \frac{L}{3} \leq L$$

Si $t \geq t_1$

$$
\begin{aligned}
\Phi(t)^{-1}Y(t) &= \xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds \\
&= \xi + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds + \int_{t_1}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds \\
&= \xi + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(s)^{-1}A(s)[\Phi(s-r(s))\Phi(s-r(s))^{-1}Z(s-r(s)) \\
&- \Phi(s)\Phi(s)^{-1}Z(s)]ds + \int_{t_1}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)\Delta Z(s)ds.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}Y(t)| &\leq |\xi| + \int_{t_0}^{t_1} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s-r(s))|\ |\Phi(s-r(s))^{-1}Z(s-r(s))|ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)|\ |\Phi(s)^{-1}Z(s)|ds \\
&+ \int_{t_1}^{t} |\Phi(s)A(s)\Phi(s)|\ |\Phi(s)^{-1}\Delta Z(s)|ds \\
&\leq |\xi| + \int_{t_0}^{t_1} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s-r(s))|\ \|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}ds \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Phi(s)|\ \|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}ds + 2L\int_{t_1}^{t} \tilde{A}(s)\beta(s)\|\tilde{A}_s\|_1 r(s)ds \\
&\leq |\xi| + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{A}(s)\|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}ds + 2L\int_{t_1}^{\infty} \tilde{A}(s)\beta(s)\|\tilde{A}_s\|_1 r(s)ds \\
&\leq |\xi| + \|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}\|\Phi^{-1}Z\|_{[\tau,t_1]}r(t_1) + 2L\int_{t_1}^{\infty} \tilde{A}(s)\beta(s)\|\tilde{A}_s\|_1 r(s)ds \\
&\leq \frac{L}{2} + L\|\tilde{A}\|_{[t_0,t_1]}r(t_1) + 2L\int_{t_1}^{\infty} \tilde{A}(s)\beta(s)\|\tilde{A}_s\|_1 r(s)ds \leq L
\end{aligned}
$$

por (8) y (9). Luego para todo $t \geq \tau$ $|\Phi(t)^{-1}Y(t)| \leq L$ y se tiene (ii).

Probaremos que $Y = \mathcal{N}Z$ satisface (12).

Sea $t \geq t_1$, usando la condición (iii) del Lema 2 tenemos que

$$
|\Phi(t)^{-1}\Delta Y(t)| \leq \beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t) \quad (\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 + \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_2)
$$

como Y y Z satisfacen la condición (11), entonces

$$
\|\Phi_t^{-1}Y_t\|_1 \leq L \quad \text{y} \quad \|\Phi_t^{-1}Z_t\|_2 \leq L
$$

luego

$$
|\Phi(t)^{-1}\Delta Y(t)| \leq 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t)
$$

Entonces $\mathcal{N}(Z)$ satisface (10), (11) y (12) para todo $Z \in S$, por lo tanto $\mathcal{N}(S) \subseteq S$.

(iii) $\mathcal{N}(S)$ es relativamente compacto en S. Esto es equivalente a probar que $\mathcal{N}(S)$ es relativamente secuencialmente compacto ya que $\mathcal{C}$ es metrizable (Cap. I).

Sea B un subconjunto acotado en S.

Luego para todo K compacto de $[\tau, \infty)$, existe $c = c(K)$ constante tal que para toda $Z \in B$, $\|Z\|_K \leq c$.

Sea $a > \tau$ fijo y sea c_a constante tal que para toda $Z \in B$

$$\|Z\|_{[\tau,a]} \leq c_a$$

Por lo tanto el conjunto B es uniformemente acotado para todo $t \in [\tau, a]$.

Sea B_a el conjunto de funciones en B restringidas al intervalo $[\tau, a]$. Probaremos que la familia de funciones $\mathcal{N}(B_a)$ definidas en $[\tau, a]$ es uniformemente acotada y equicontinua.

$\mathcal{N}(B_a)$ es uniformemente acotado.

Sea $f \in \mathcal{N}(B_a)$, entonces existe $h \in B_a$ tal que $f(t) = \mathcal{N}h(t)$ para cada $t \in [\tau, a]$.

Luego $f(t) = g(t) \quad t \in [\tau, t_0]$ y

$$f(t) = \Phi(t_0)\xi + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)ds \qquad t \geq t_0$$

Si $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{[t_0,a]} &\leq \|\Phi\|_{[t_0,a]}|\xi| + \|\Phi\|_{[t_0,a]} \textstyle\int_{t_0}^{a} |\Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)|ds \\
&\leq \|\Phi\|_{[t_0,a]}|\xi| + \|\Phi\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]} \textstyle\int_{t_0}^{a} |h(s-r(s))| + |h(s)|ds \\
&\leq \|\Phi\|_{[t_0,a]}|\xi| + \|\Phi\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[\tau,a]}(a-t_0)
\end{aligned}$$

luego como $h \in B_a$

$$\|f\|_{[t_0,a]} \leq \|\Phi\|_{[t_0,a]}|\xi| + 2\|\Phi\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]}(a-t_0)c_a$$

Sea

$$M = max\{\|g\|_{[\tau,t_0]}, \|\Phi\|_{[t_0,a]}(|\xi| + 2\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]}c_a(a-t_0))\}$$

entonces para todo $f \in \mathcal{N}(B_a)$

$$\|f\|_{[\tau,a]} \leq M$$

y $\mathcal{N}(B_a)$ es uniformemente acotado.

$\mathcal{N}(B_a)$ es equicontinuo.

Sea $f \in \mathcal{N}(B_a)$ entonces existe $h \in B_a$ tal que $f = \mathcal{N}h$.

Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$ tal que, para toda $f \in \mathcal{N}(B_a)$

$$|t - \tilde{t}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(t) - f(\tilde{t})| < \varepsilon$$

Como Φ es continua, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$|t - \tilde{t}| < \delta \quad \text{entonces} \quad 2(|\xi| + 2c_a\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]})|\Phi(t) - \Phi(\tilde{t})| < \varepsilon$$

Sin perder generalidad podemos suponer $t \geq \tilde{t}$, ya que en caso contrario la demostración es equivalente.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos

$$\delta' = min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2(\|\Phi\|_{[\tau,a]}\|\Phi^{-1}A\|_{[\tau,a]}2c_a)}\right\}$$

luego $\delta' = \delta'(\varepsilon)$ y tenemos que para cada $f \in \mathcal{N}(B_a)$, si $|t - \tilde{t}| < \delta'$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(\tilde{t})| &= |\Phi(t)\xi + \Phi(t)\textstyle\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)ds - \Phi(\tilde{t})\xi \\
&- \Phi(\tilde{t})\textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)ds| \leq |\Phi(t) - \Phi(\tilde{t})|\ |\xi| \\
&+ |\Phi(t)\textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)ds - \Phi(\tilde{t})\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)ds| \\
&+ |\Phi(t)\textstyle\int_{\tilde{t}}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta h(s)ds| \leq |\Phi(t) - \Phi(\tilde{t})|\ |\xi| \\
&+ |\Phi(t) - \Phi(\tilde{t})|\textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} |\Phi(s)^{-1}A(s)|\ |\Delta h(s)|ds \\
&+ |\Phi(t)|\textstyle\int_{\tilde{t}}^{t} |\Phi(s)^{-1}A(s)|\ |\Delta h(s)|ds \leq |\Phi(t) - \Phi(\tilde{t})| \\
&\quad [|\xi| + \textstyle\int_{t_0}^{a} |\Phi(s)^{-1}A(s)|(|h(s - r(s))| + |h(s)|)ds \\
&+ \|\Phi\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]}2c_a(t - \tilde{t})] \\
&\leq |\Phi(t) - \Phi(\tilde{t})|[|\xi| + \|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]}2c_a] + 2c_a\|\Phi\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}A\|_{[t_0,a]}(t - \tilde{t}) \\
&< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces si $|t - \tilde{t}| < \delta'$ entonces $|f(t) - f(\tilde{t})| < \varepsilon$ para toda $f \in \mathcal{N}(B_a)$. Por lo tanto $\mathcal{N}(B_a)$ es equicontinuo. Entonces, por el Lema de Ascoli (Cap. I) toda sucesión en $\mathcal{N}(B_a)$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en $[\tau, a]$. Usando este hecho vamos a demostrar que toda sucesión en $\mathcal{N}(B)$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ sucesión en $\mathcal{N}(B)$. Sean $Z_n \in B$ tal que

$$\mathcal{N} Z_n = Y_n \qquad\qquad n \geq 1$$

La sucesión $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ restringida al intervalo $[\tau, \tau + 1]$ pertenece al conjunto $B_{\tau+1}$ y su imagen bajo $\mathcal{N}$ a $\mathcal{N}(B_{\tau+1})$ que es uniformemente acotado y equicontinuo, por lo tanto $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión $\{Y_n^1\}_{n\geq 1}$ que converge uniformemente en $[\tau, \tau + 1]$.

Sean Z_n^1 tales que $Y_n^1 = \mathcal{N} Z_n^1 \qquad\qquad n \geq 1.$

Considerando las restricciones de Z_n^1 a $[\tau, \tau + 2]$, pertenecientes a $B_{\tau+2}$, se tiene que el conjunto $\mathcal{N}(B_{\tau+2})$ es uniformemente acotado y equicontinuo, luego $\{Y_n^1\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión $\{Y_n^2\}_{n\geq 1}$ que converge uniformemente en $[\tau, \tau + 2]$. Continuando con este proceso tenemos que la sucesión $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada compacto de $[\tau, \infty)$.

Entonces, para todo subconjunto B de $\mathcal{C}$ acotado, $\mathcal{N}(B)$ es relativamente secuencialmente compacto, como $\mathcal{C}$ es metrizable, $\mathcal{N}(B)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$. En particular como S es acotado, $\overline{\mathcal{N}(S)}$ es compacto en $\mathcal{C}$ y tenemos iii).

Dado que el conjunto S y el operador $\mathcal{N}$ satisfacen las condiciones necesarias en el teorema de Schauder-Tichonoff hemos probado que $\mathcal{N}$ tiene un punto fijo en S. Entonces existe $Z \in S$ tal que

$$\mathcal{N} Z(t) = Z(t) \qquad\qquad t \geq \tau$$

es decir

$$Z(t) = g(t) \qquad\qquad t \in [\tau, t_0]$$

y

$$Z(t) = \Phi(t)\xi + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} A(s) \Delta Z(s) ds \qquad\qquad t \geq t_0$$

Luego Z es una solución de la ecuación (1) para $t \geq t_0$. Como $Z \in S$, entonces satisface las condiciones (11) y (12). Usando el Lema 1 de unicidad, concluimos que para toda función continua g definida en $[\tau, t_0]$ existe una única función continua Z, que es solución de (1) para $t \geq t_0$ y tal que $Z(t) = g(t)$ para $t \in [\tau, t_0]$.

Por otra parte, supongamos que $\tilde{Z}$ es otra solución del sistema (1) definida para $t \geq \tilde{t} \geq 0$.

Entonces para cada $t \geq \tilde{t}$

$$\tilde{Z}'(t) = A(t)\tilde{Z}(t - r(t))$$

sea $\tilde{\tau} = \inf_{t \geq \tilde{t}} t - r(t)$.

La función $\tilde{Z}$ está definida para $t \geq \tilde{\tau}$ y es solución de (1) en $[\tilde{t}, \infty)$.

Sean

$$t' = max\{\tilde{t}, t_0\} \qquad \text{y} \qquad \tau' = \inf_{t \geq t'} t - r(t)$$

Tomemos como la función inicial g a la solución $\tilde{Z}$ definida en el intervalo $[\tau', t']$. Entonces por lo ya probado para $\tilde{Z}$ continua en $[\tau', t']$ existe una única solución Z de (1) definida en el intervalo $[t', \infty)$ tal que $Z(t) = \tilde{Z}(t)$ $t \in [\tau', t']$ y satisfaciendo (1).

Como $\tilde{Z}(t)$ es solución para $t \geq t'$ se tiene que $\tilde{Z}(t) = Z(t)$ para todo $t \geq t'$. Por lo tanto toda solución de (1) definida para todo t suficientemente grande satisface las desigualdades (11) y (12).

Como toda solución Z de (3) es solución de la ecuación (1), y puesto que $|\Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)| \leq \lambda(s)$ de (12) y (6) tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds$$

converge cuando $t \to \infty$. Entonces

$$\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}A(s)\Delta Z(s)ds = c + o(\int_{t}^{\infty} \lambda(s)ds)$$

Así,

$$\Phi(t)^{-1}Z(t) = c + o(\int_{t}^{\infty} \lambda(s)ds) \qquad t \geq t_0$$

lo que completa la demostración del teorema.

Es obvio que la clase usada por Cooke [C-1] en el caso $A(t)$ escalar y constante no puede aplicarse aquí. Esta clase, por ser invariante por el operador $\mathcal{N}$, debe deducirse de las propiedades del rango de $\mathcal{N}$. Allí, lema 2 es fundamental. La primera luz sobre la constante-variable de Lipschitz $\lambda(t)$ aparece en [P].

De hecho, notemos la similitud entre las funciones $\tilde{A}(t)$, $\beta(t)$, $\lambda(t)$ que obtenemos en nuestros cálculos, con las funciones $< a > (t)$, $\beta(t)$ y $\hat{m}(t)$ (respectivamente) obtenidas por M. Pinto [P] en el estudio de la ecuación $u'(t) = a(t)u(t - r(t, u))$ (Sección 4, Cap. II). Este hecho es consecuencia de que ambas ecuaciones tienen coeficientes variables no obstante ser de distinto tipo

Notemos que el teorema 1 se puede aplicar a un sistema de la forma

$$Z'(t) = A(t)Z + B(t)\Delta Z.$$

En este caso, tomamos

$$\tilde{A}(t) = |\Phi(t)^{-1}B(t)\Phi(t)| + |\Phi(t)^{-1}B(t)\Phi(t - r(t))|.$$

Finalizamos esta sección demostrando las propiedades del conjunto S que quedaron pendientes en el Teorema 1.

Lema 3 S *es convexo, cerrado y acotado en* $\mathcal{C}$.

Demostración: S es convexo.

Sean u, v en S, α y β reales no negativos y tal que $\alpha + \beta = 1$.

Sea $Z(t) = \alpha u(t) + \beta v(t)$, si $t \in [\tau, t_0]$

$$Z(t) = \alpha u(t) + \beta v(t) = \alpha g(t) + \beta g(t) = (\alpha + \beta)g(t) = g(t)$$

luego Z satisface (10).

Sea $t \geq \tau$, si $t \leq t_0$, $Z(t) = g(t)$

$$|\Phi(t)^{-1}Z(t)| = |\Phi(t)^{-1}g(t)| \leq L$$

si $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}Z(t)| &= |\Phi(t)^{-1}\alpha u(t) + \Phi(t)^{-1}(1-\alpha)v(t)| \\
&\leq \alpha|\Phi(t)^{-1}u(t)| + (1-\alpha)|\Phi(t)^{-1}v(t)| \\
&\leq \alpha L + (1-\alpha)L = L
\end{aligned}$$

Si $t \geq t_1$

$$
\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t)| &= |\Phi(t)^{-1}(Z(t-r(t))-Z(t))| \\
&= |\Phi(t)^{-1}(\alpha u(t-r(t))+(1-\alpha)v(t-r(t))) \\
&- \Phi(t)^{-1}(\alpha u(t)+(1-\alpha)v(t))| \\
&= |\alpha\Phi(t)^{-1}\Delta u(t)+(1-\alpha)\Phi(t)^{-1}\Delta v(t)| \\
&\leq \alpha|\Phi(t)^{-1}\Delta u(t)|+(1-\alpha)|\Phi(t)^{-1}\Delta v(t)| \\
&\leq \alpha 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t)+(1-\alpha)2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t) \\
&= 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $Z \in S$ y S es convexo.

S es cerrado.

Sea $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en S, tal que $Z_n \to Z$ uniformemente en subconjuntos compactos de $[\tau,\infty)$.

Luego para todo $K \subset [\tau,\infty)$ compacto y $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$
\sup_{t\in K}|Z_n(t)-Z(t)| < \varepsilon \qquad\qquad n \geq N_0
$$

Probaremos que Z satisface (10), (11) e (12). Sea $t \in [\tau, t_0]$ y $K \subset [\tau, t_0]$

$$
\begin{aligned}
|Z(t)-g(t)| &= |Z(t)-Z_n(t)+Z_n(t)-g(t)| \\
&\leq |Z(t)-Z_n(t)|+|Z_n(t)-g(t)|,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\sup_{t\in K}|Z(t)-g(t)| \leq \sup_{t\in K}|Z(t)-Z_n(t)|+\sup_{t\in K}|Z_n(t)-g(t)|.
$$

Ahora

$$
Z_n(t) = g(t) \qquad\qquad n \geq N_0 \ \text{ y } \ t \in [\tau, t_0],
$$

por lo tanto

$$
\sup_{t\in K}|Z(t)-g(t)| \leq \sup_{t\in K}|Z(t)-Z_n(t)| \leq \varepsilon.
$$

En particular para $K = [\tau, t_0]$ luego para todo $\varepsilon > 0$

$$|Z(t) - g(t)| < \varepsilon \qquad\qquad t \in [\tau, t_0]$$

entonces

$$Z(t) = g(t) \qquad\qquad t \in [\tau, t_0]$$

Sea $t \geq \tau$. Si $t \leq t_0$, $Z(t) = g(t)$ y

$$|\Phi(t)^{-1}Z(t)| = |\Phi(t)^{-1}g(t)| \leq L$$

Si $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}Z(t)| &= |\Phi(t)^{-1}Z(t) - \Phi(t)^{-1}Z_n(t) + \Phi(t)^{-1}Z_n(t)| \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}(Z(t) - Z_n(t))| + |\Phi(t)^{-1}Z_n(t)| \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}|\,|Z(t) - Z_n(t)| + L.
\end{aligned}$$

Como $Z_n \to Z$ uniformemente en compactos, para todo compacto K de $[t_0, \infty)$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que

$$\|\Phi^{-1}\|_K \|Z - Z_n\|_K < \varepsilon.$$

Luego

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}Z(t)| &\leq Sup_{t\in K}|\Phi(t)^{-1}Z(t)| \\
&\leq Sup_{t\in K}|\Phi(t)^{-1}|\,|Z(t) - Z_n(t)| + L \\
&\leq \|\Phi^{-1}\|_K \|Z - Z_n\|_K + L < \varepsilon + L
\end{aligned}$$

y entonces

$$|\Phi(t)^{-1}Z(t)| \leq L \qquad\qquad t \geq t_0.$$

Así tenemos que

$$|\Phi(t)^{-1}Z(t)| \leq L \qquad\qquad t \geq \tau$$

y Z satisface (11).

Sea $t \geq t_1$

$$
\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t)| &= |\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t) - \Phi(t)^{-1}\Delta Z_n + \Phi(t)^{-1}\Delta Z_n(t)| \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}|[|Z(t-r(t)) - Z_n(t-r(t))| + |Z(t) - Z_n(t)|] \\
&+ |\Phi(t)^{-1}\Delta Z_n(t)|.
\end{aligned}
$$

Podemos elegir un compacto $K = [t_0, a]$. Para cada $t \in K$, $t - r(t) \in K$ pues $t_1 \leq t \leq a$ implica que $t_0 \leq t - r(t) \leq a$.

Para cada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que

$$
2\|\Phi^{-1}\|_K \sup_{t\in K} |Z_n(t) - Z(t)| < \varepsilon \qquad\qquad n \geq N_0
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t)| &\leq |\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t) - \Phi(t)^{-1}\Delta Z_n(t) + \Phi(t)^{-1}\Delta Z_n(t)| \\
&\leq |\Phi(t)^{-1}(Z(t-r(t)) - Z_n(t-r(t)))| + |\Phi(t)^{-1}(Z(t) - Z_n(t))| \\
&+ |\Phi(t)^{-1}\Delta Z_n(t)| \\
&\leq \|\Phi^{-1}\|_K\|Z - Z_n\|_K + \|\Phi^{-1}\|_K\|Z - Z_n\|_K \\
&+ |\Phi(t)^{-1}\Delta Z_n(t)| \\
&\leq 2\|\Phi^{-1}\|_K\|Z - Z_n\|_K + 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t) \\
&< \varepsilon + 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
|\Phi(t)^{-1}\Delta Z(t)| \leq 2L\beta(t)\|\tilde{A}_t\|_1 r(t) \qquad\qquad t \geq t_1
$$

y Z satisface (12). Luego S es cerrado.

S es acotado en $\mathcal{C}$.

Debemos probar que para todo $K \subset [\tau, \infty)$ compacto, existe $c = c(K)$ constante tal que

$$
\|Z\|_K \leq c \qquad\qquad \text{para todo } Z \text{ en } S.
$$

(c es independiente de Z).

Sea K compacto, elijamos $c \geq \|\Phi\|_K \cdot L$ entonces

$$\|Z\|_K = \|\Phi \cdot \Phi^{-1} Z\|_K \leq \|\Phi\|_K \|\Phi^{-1} Z\|_K \leq \|\Phi\|_K \cdot L \leq c$$

para toda $Z \in S$. Por lo tanto S es acotado lo que completa la demostración.

3 Teorema de Levinson para un sistema lineal con retardo

En esta sección presentaremos un resultado sobre existencia de soluciones del sistema (1) donde suponemos que la matriz A es de la forma $\Lambda + R$ donde Λ es una matriz diagonal que satisface la condición de dicotomia de Levinson. Al igual que en el teorema 1 usaremos como herramienta fundamental el teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff para obtener nuestro resultado.

Consideremos el sistema lineal

$$Z'(t) = (\Lambda(t) + R(t))Z(t - r(t)) \tag{3.13}$$

donde Λ es una matriz diagonal, continua definida en el intervalo $[0, \infty)$ y R es una matriz continua definida para $t \geq 0$. Sean $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t), \cdots, \lambda_n(t)$ los valores característicos de $\Lambda(t)$, y supongamos que para algún k fijo , $k \in \{1, \cdots, n\}$ cada j, $1 \leq j \leq n$ pertenece a uno de los conjuntos I_1 o I_2 donde

$$\begin{array}{lll} j \in I_1 & \text{si} \ \int_0^t Re(\lambda_k(\alpha) - \lambda_j(\alpha) d\alpha \longrightarrow \infty \quad \text{cuando} & t \to \infty \\ & \int_{t_1}^{t_2} Re(\lambda_k(\alpha) - \lambda_j(\alpha)) d\alpha > -K & t_2 > t_1 \geq 0 \end{array} \tag{3.14}$$

$$j \in I_2 \quad \text{si} \quad \int_{t_1}^{t_2} Re(\lambda_k(\alpha) - \lambda_j(\alpha)) d\alpha < K \qquad t_2 > t_1 \geq 0 \tag{3.15}$$

Con K constante.

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema lineal ordinario

$$X'(t) = \Lambda(t) X(t) \tag{3.16}$$

tal que $\Phi(t_0) = I_n$, es decir $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \Lambda(\alpha) d\alpha$, $t_0 \geq 0$. Para k fijo e I_1 e I_2 los conjuntos definidos en (14) y (15) podemos escribir la matriz

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t)$$

donde las matrices diagonales Φ_1 y Φ_2 contienen los elementos de Φ asociados con las columnas de índice j pertenecientes a I_1 e I_2 respectivamente. Denotaremos

$$h(t) = e^{\int_{t_0}^{t} Re\lambda_k(\alpha)d\alpha}.$$

Si $\varrho_\ell(t,s)$ es un elemento cualquiera de la matriz $\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\varrho_\ell(t,s) &= e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_\ell(\alpha)d\alpha - \int_{t_0}^{s} \lambda_\ell(\alpha)d\alpha} \\
&= e^{\int_{s}^{t} \lambda_\ell(\alpha)d\alpha - \int_{s}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha + \int_{s}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha} \\
&= e^{-\int_{s}^{t}(\lambda_k(\alpha)-\lambda_\ell(\alpha))d\alpha} e^{\int_{s}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha}.
\end{aligned}$$

Como $\ell \in I_1$, de (14) tenemos que:

$$\begin{aligned}
|\varrho_\ell(t,s)| &\leq e^{-\int_{s}^{t} Re(\lambda_k(\alpha)-\lambda_\ell(\alpha))d\alpha} e^{\int_{s}^{t} Re\lambda_k(\alpha)d\alpha} \\
&\leq e^{K} e^{\int_{s}^{t} Re\lambda_k(\alpha)d\alpha},
\end{aligned}$$

luego

$$|\varrho_\ell(t,s)| \leq e^{K} h(t)h(s)^{-1} \qquad t_0 \leq s \leq t. \tag{3.17}$$

Del mismo modo, si $\tilde{\varrho}_\ell(t,s)$ es un elemento de la matriz diagonal $\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varrho}_\ell(t,s) &= e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_\ell(\alpha)d\alpha - \int_{t_0}^{s} \lambda_\ell(\alpha)d\alpha} \\
&= e^{-\int_{t}^{s} \lambda_\ell(\alpha)d\alpha - \int_{t}^{s} \lambda_k(\alpha)d\alpha + \int_{t}^{s} \lambda_k(\alpha)d\alpha} \\
&= e^{\int_{t}^{s}(\lambda_k(\alpha)-\lambda_\ell(\alpha))d\alpha} \cdot e^{-\int_{t}^{s} \lambda_k(\alpha)d\alpha},
\end{aligned}$$

por lo tanto de (15) tenemos:

$$\begin{aligned}
|\tilde{\varrho}_\ell(t,s)| &\leq e^{\int_{t}^{s} Re(\lambda_k(\alpha)-\lambda_\ell(\alpha))d\alpha} \cdot e^{-\int_{t}^{s} \lambda_k(\alpha)d\alpha} \\
&\leq e^{K} e^{-\int_{t}^{s} Re\lambda_k(\alpha)d\alpha}.
\end{aligned}$$

Luego

$$|\tilde{\varrho}_\ell(t,s)| \leq e^K h(t)h(s)^{-1} \qquad t \leq s \tag{3.18}$$

La ecuación (13) podemos escribirla como

$$Z'(t) - \Lambda(t)Z(t) = \Lambda(t)(Z(t-r(t)) - Z(t)) + R(t)Z(t-r(t)). \tag{3.19}$$

Abreviaremos $\Delta Z(t) = Z(t-r(t)) - Z(t)$. A partir de la ecuación (19) y de (14) y (15) tenemos que si una función Z es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} Z(t) &= \Phi(t)c + \textstyle\int_{t_0}^t \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds - \int_t^\infty \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds \\ &+ \textstyle\int_{t_0}^t \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds - \int_t^\infty \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde $c = \Phi(t_0)^{-1}g(t_0)$, $z = g$ sobre $[\tau, t_0]$ (provisto que todas las integrales existan), entonces es solución de la ecuación (13).

De manera similar a lo que hicimos en la demostración del teorema 1, nuestro propósito es, a partir de la ecuación (19) definir un operador $\mathcal{M}$ sobre algún espacio apropiado y demostrar que éste tiene la propiedad del punto fijo.

Consideremos el espacio $\mathcal{C} = C([\tau,\infty), \mathbf{C}^n)$ con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $[\tau,\infty)$. Sea g una función continua definida en el intervalo $[\tau, t_0]$, y sea $G \subseteq \mathcal{C}$ definido de la siguiente manera.

Si $Z \in G$, entonces satisface:

$$Z(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0 \tag{3.21}$$

$$h(t)^{-1}|Z(t)| \leq L \qquad \tau \leq t \tag{3.22}$$

$$h(t)^{-1}|\Delta Z(t)| \leq Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2 \; (3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1) \qquad t \geq t_1, \tag{3.23}$$

(t_1 definido en la página 20). Para este conjunto tenemos el siguiente lema:

Lema 4 *Sea $G \subseteq \mathcal{C}$ tal que toda Z en G satisface (21), (22) y (23), donde g es una función continua y tal que $h(t)^{-1}|g(t)| \leq L$ para todo $t \in [\tau, t_0]$. Entonces G es convexo, cerrado y acotado.*

$-G$ es convexo.

Sean $u, v \in G$, y sea $Z = au + bv$ donde a y b son reales no negativos y tal que $a + b = 1$. Vamos a demostrar que $Z \in G$. Si $t \in [\tau, t_0]$ entonces

$$Z(t) = au(t) + bv(t) = ag(t) + bg(t) = (a + b)g(t) = g(t)$$

luego Z cumple (21).

Sea $t \geq \tau$.

Si $t \leq t_0$, $\qquad Z(t) = g(t)$

y

$$h(t)^{-1}|Z(t)| = h(t)^{-1}|g(t)| \leq L$$

si $t \geq t_0$, entonces

$$\begin{aligned}
h(t)^{-1}|Z(t)| &= h(t)^{-1}|au(t) + bv(t)| \\
&= h(t)^{-1}|(1-b)u(t) + bv(t)| \leq h(t)^{-1}(1-b)|u(t)| + h(t)^{-1}b|v(t)| \\
&\leq (1-b)h(t)^{-1}|u(t)| + bh(t)^{-1}|v(t)| \\
&\leq (1-b)L + bL = L
\end{aligned}$$

entonces $h(t)^{-1}|Z(t)| \leq L$ para todo $t \geq \tau$ y tenemos (22).

Si $t \geq t_1$

$$\begin{aligned}
h(t)^{-1}|\Delta Z(t)| &= h(t)^{-1}|Z(t - r(t)) - Z(t)| \\
&= h(t)^{-1}|au(t - r(t)) + bv(t - r(t)) - au(t) - bv(t)| \\
&= h(t)^{-1}|a(u(t - r(t)) - u(t)) + b(v(t - r(t)) - v(t))| \\
&\leq ah(t)^{-1}|\Delta u(t)| + bh(t)^{-1}|\Delta v(t)| \\
&\leq (a + b)Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1) \\
&= Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1)
\end{aligned}$$

por lo tanto se cumple (23) y entonces $Z \in G$ y G es convexo.

G es cerrado.

Sea $\{Z_n\} \in G$ sucesión tal que $Z_n \to Z$ uniformemente en subconjuntos compactos de $[\tau, \infty)$.

Entonces para todo K compacto y $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(K, \varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que

$$\|Z_n - Z\|_K < \varepsilon \qquad\qquad n \geq N_0$$

debemos probar que Z satisface (21), (22) y (23). Sea $t \in [\tau, t_0]$ y $K \subseteq [\tau, t_0]$

$$\begin{aligned} |Z(t) - g(t)| &= |Z(t) - Z_n(t) + Z_n(t) - g(t)| \\ &\leq |Z(t) - Z_n(t)| + |Z_n(t) - g(t)| \end{aligned}$$

como $Z_n \in G$, satisface (21) por lo tanto

$$|Z(t) - g(t)| \leq |Z(t) - Z_n(t)|$$

así

$$\sup_{t \in K} |Z(t) - g(t)| \leq \|Z - Z_n\|_K < \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$ y K compacto, en particular para $K = [\tau, t_0]$ luego para todo $t \in K$

$$|Z(t) - g(t)| \leq \|Z - g\|_K < \varepsilon$$

entonces $Z(t) = g(t)$ para $t \in [\tau, t_0]$.

Sea $t \geq \tau$

si $t \leq t_0$, $\qquad Z(t) = g(t)$, luego

$$h(t)^{-1}|Z(t)| = h(t)^{-1}|g(t)| \leq L$$

si $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} h(t)^{-1}|Z(t)| &= h(t)^{-1}|Z(t) - Z_n(t) + Z_n(t)| \\ &\leq h(t)^{-1}|Z(t) - Z_n(t)| + h(t)^{-1}|Z_n(t)| \end{aligned}$$

como $Z_n \to Z$ uniformemente en compactos, para todo K compacto y $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\|h^{-1}\|_K \|Z - Z_n\|_K < \varepsilon \qquad\qquad n \geq N_0$$

entonces para todo $t \in K$

$$h(t)^{-1}|Z(t)| \leq Sup_{t\in K}h(t)^{-1}|Z(t)| \leq \|h^{-1}\|_K\|Z_n - Z\|_K + L < \varepsilon + L$$

luego

$$h(t)^{-1}|Z(t)| \leq L \qquad \cdot \; t \geq t_0$$

y tenemos que:

$$h(t)^{-1}|Z(t)| \leq L \qquad t \geq \tau$$

así Z satisface (22).

Sea $t \geq t_1$

$$\begin{aligned}
h(t)^{-1}|\Delta Z(t)| &= h(t)^{-1}|Z(t-r(t)) - Z(t)| \\
&= h(t)^{-1}|Z(t-r(t)) - Z_n(t-r(t)) + Z_n(t-r(t)) - Z_n(t) \\
&+ Z_n(t) - Z(t)| \leq h(t)^{-1}|Z(t-r(t)) - Z_n(t-r(t))| \\
&+ h(t)^{-1}|Z_n(t-r(t)) - Z_n(t)| + h(t)^{-1}|Z_n(t) - Z(t)| \\
&\leq h(t)^{-1}|Z(t-r(t)) - Z_n(t-r(t))| + h(t)^{-1}|Z(t) - Z_n(t)| \\
&+ Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 +.\|R_t\|_1)
\end{aligned}$$

Sea K un compacto de la forma $[t_0, a]$ de manera que, como $t \geq t_1$, $t - r(t) \geq t_0$, por lo tanto si $t \in K$, $t - r(t) \in K$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$

$$2\|h^{-1}\|_K\|Z - Z_n\|_K < \varepsilon$$

luego, para todo $t \in K$ y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
h(t)^{-1}|\Delta Z(t)| &\leq Sup_{t\in K}h(t)^{-1}|Z(t-r(t)) - Z_n(t-r(t))| \\
&+ Sup_{t\in K}h(t)^{-1}|Z(t) - Z_n(t)| \\
&+ Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|) \\
&\leq 2\|h^{-1}\|_K\|Z - Z_n\|_K + Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1) \\
&< \varepsilon + Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1)
\end{aligned}$$

entonces

$$h(t)^{-1}|\Delta Z(t)| \leq Lr(t)h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\| + \|R_t\|_1)$$

para cada $t \geq t_1$.

Por lo tanto G es cerrado.

G es acotado en $\mathcal{C}$.

Debemos probar que para cada K compacto en $[\tau, \infty)$, existe $c = c(K) > 0$ tal que

$$\|Z\|_K \leq c \quad \text{para todo} \quad Z \in G$$

Sea K compacto, y tomemos $c = \|h\|_K L$ luego

$$\|Z\|_K = \|h \cdot h^{-1} Z\|_K \leq \|h\|_K \|h^{-1} Z\|_K \leq \|h\|_K L < c$$

para todo $Z \in G$, luego G es acotado.

Lo que concluye la demostración.

Antes de establecer nuestro próximo resultado (versión del teorema de Levinson para sistemas lineales con retardo) daremos brevemente el argumento de su demostración. Al igual que en la demostración del teorema 1 aplicaremos el teorema del punto fijo de Schauder-Tichonoff considerando un subconjunto G del espacio vectorial $\mathcal{C} = C([\tau, \infty), \mathbf{C}^n)$ con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $[\tau, \infty)$ y un operador $\mathcal{M}$ que posee la propiedad del punto fijo. Sin perder generalidad podemos suponer que:

$$|\lambda_j| \leq |diag\{\lambda_i\}|,$$

En este caso el operador $\mathcal{M}$ a considerar está definido solo en G.

Teorema 2 *(Levinson para sistemas de ecuaciones con retardo)*

Consideremos el sistema (13). Supongamos que los valores característicos $\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)$ *de la matriz* $\Lambda(t)$ *satisfacen las condiciones (14) y (15) y que para algún* $t_0 \geq 0$

$$\|\Lambda\|_{[t-r(t),t]} r(t) \leq m \qquad t \geq t_0 \tag{3.24}$$

donde $m = min\{1, \frac{1}{e^{K+4}}\}$ *y*

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\|\Lambda_t\|_1 dt < \infty \tag{3.25}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\|R_t\|_1 dt < \infty \tag{3.26}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t)^{-1}h(t-r(t))|R(t)|dt < \infty \tag{3.27}$$

donde

$$\varphi(t) = h(t)^{-1}\|h_t\|_2|\Lambda(t)|r(t).$$

Entonces existe una solución continua Z_k *de (13) definida en* $[t_0, \infty)$ $(t_0$ *que será precisado en la demostración) que satisface*

$$h(t)^{-1}|Z_k(t)| \leq L \quad (L > 0 \ constante)$$

y tal que

$$Z_k(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_k(u)du}(e_k + o(1)) \qquad t \geq t_0 \tag{3.28}$$

donde e_k *es el vector columna cuyos elementos son todos nulos salvo el* $k-$ *ésimo que es igual a 1.*

Demostración: Definamos primero algunos elementos técnicos.

Sea como antes

$$\tau = inf_{t \geq t_0} t - r(t)$$

y sea $t_1 \geq t_0$ tal que

$$t_1 - r(t_1) = t_0$$

y

$$t - r(t) \geq t_0 \qquad\qquad \text{para todo} \quad t \geq t_1$$

De las condiciones (25), (26) y (27) podemos elegir t_0 suficientemente grande tal que

$$\|\Lambda\|_{[t-r(t),t]}r(t) \leq m$$

y

$$\begin{aligned} 3e^K \textstyle\int_{t_0}^{\infty} \varphi(s)\|\Lambda_s\|_1 ds \; &+ \; e^K \textstyle\int_{t_0}^{\infty} \varphi(s)\|R_s\|_1 ds \\ &+ \; e^K \textstyle\int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|ds < \tfrac{1}{4} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Notemos que para todo k, $1 \leq k \leq n$, y $t \geq t_0$

$$\|Re\lambda_k\|_{[t-r(t),t]} \leq \|\Lambda\|_{[t-r(t),t]}$$

luego para cada $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} h(t)^{-1}h(t-r(t)) &= e^{-\int_{t_0}^{t} Re\lambda_k(u)du+\int_{t_0}^{t-r(t)} Re\lambda_k(u)du} \\ &= e^{-\int_{t-r(t)}^{t} Re\lambda_k(u)du} \leq e^{\|Re\lambda_k\|_{[t-r(t),t]}r(t)} \\ &\leq e^{\|\Lambda\|_{[t-r(t),t]}r(t)} \end{aligned}$$

entonces

$$h(t)^{-1}h(t-r(t)) \leq e^{m} \tag{3.30}$$

Sea g una función continua definida en $[\tau, t_0]$ y tal que $g(t_0) = e_k$ y sea L una constante positiva que satisface

$$L \geq max\{2, \|h^{-1}g\|_{[\tau,t_0]}\} \tag{3.31}$$

Sea G el subconjunto de $\mathcal{C}$ definido por las condiciones (21), (22) y (23). De acuerdo al Lema 4, G es convexo, cerrado y acotado en $\mathcal{C}$. Ahora ocupamos la ecuación (20) para definir el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : G &\rightarrow G \\ Z &\rightarrow \mathcal{M}Z = Y \end{aligned}$$

donde

$$y(t) = g(t) \qquad \tau \leq t \leq t_0 \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha}e_k + \textstyle\int_{t_0}^{t} \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds \\ &- \textstyle\int_{t}^{\infty} \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds + \int_{t_0}^{t} \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds \\ &- \textstyle\int_{t}^{\infty} \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds \qquad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vamos a demostrar que este operador tiene un punto fijo en G. Luego debemos probar i) $\mathcal{M}$ es continua con la topología compacto abierta, ii) $\mathcal{M}(G) \subset G$ y iii) $\mathcal{M}(G)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}$.

(i) $\mathcal{M}$ es continuo.

Como $\mathcal{C}$ es metrizable, basta demostrar que $\mathcal{M}$ es secuencialmente continuo. Sea $\{Z_n\}$ sucesión en G tal que $Z_n \to Z$ uniformemente en cada subconjunto compacto de $[\tau, \infty)$. Sea K compacto de $[\tau, \infty)$ consideremos los casos

a) $K \subseteq [\tau, t_0]$

b) $K \cap [\tau, t_0] \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$

c) $K \cap [\tau, t_0] = \Phi$

En el caso a), para todo $t \in K$

$$|\mathcal{M}Z_n(t) - \mathcal{M}Z(t)| = |g(t) - g(t)| = 0$$

luego

$$\|\mathcal{M}Z_n(t) - \mathcal{M}Z(t)\|_K < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0$$

Si $K \cap [\tau, t_0] \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \phi$, caso b) podemos escribir $K = U + \bar{V}$ donde

$$U = K \cap [\tau, t_0]$$

$$V = K - [\tau, t_0)$$

U y $\bar{V}$ son subconjuntos compactos de $[\tau, \infty)$ y si $t \in U$

$$|\mathcal{M}Z_n(t) - \mathcal{M}Z(t)| = 0$$

entonces

$$\|\mathcal{M}Z_n - \mathcal{M}Z\|_K = \|\mathcal{M}Z_n - \mathcal{M}Z\|_{\bar{V}}$$

luego basta probarlo en el caso c). Entonces supongamos $K \cap [\tau, t_0] = \Phi$ como K es compacto existe $a > 0$ tal que $K \subset [t_0, a]$.

Recordemos que G es cerrado y por lo tanto $Z \in G$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}Z_n(t) - \mathcal{M}Z(t)| &\leq \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)(\Delta Z_n(t) - \Delta Z(s))|ds \\
&+ \textstyle\int_{t}^{\infty} |\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)(\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s))|ds \\
&+ \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}R(s)(Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s)))|ds \\
&+ \textstyle\int_{t}^{\infty} |\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}R(s)(Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s)))|ds
\end{aligned}$$

de (17) y (18) tenemos:

$$\begin{aligned}
&\leq \; e^K h(t) \int_{t_0}^{t} h(s)^{-1} |\Lambda(s)| \; |\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)| ds \\
&+ \; e^K h(t) \int_{t_0}^{t} h(s)^{-1} |R(s)| \; |Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))| ds \\
&+ \; e^K h(t) \int_{t}^{\infty} h(s)^{-1} |\Lambda(s)| \; |\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)| ds \\
&+ \; e^K h(t) \int_{t}^{\infty} h(s)^{-1} |R(s)| \; |Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))| ds
\end{aligned}$$

para las dos primeras integrales tenemos

$$\begin{aligned}
e^K h(t) \quad & [\int_{t_0}^{t} h(s)^{-1} |\Lambda(s)| \; |\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)| ds \\
+ \quad & \int_{t_0}^{t} h(s)^{-1} |R(s)| \; |Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))| ds] \\
\leq \quad & e^K \|h\|_{[t_0,a]} [\int_{t_0}^{a} h(s)^{-1} |\Lambda(s)| \; |\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)| ds \\
+ \quad & \int_{t_0}^{a} h(s)^{-1} |R(s)| \; |Z_n(s - r(s)) - Z(s - r(s))| ds]
\end{aligned}$$

notemos que

$$|\Delta Z_n(t) - \Delta Z(t)| \leq |Z_n(t - r(t)) - Z(t - r(t))| + |Z_n(t) - Z(t)|. \tag{3.34}$$

Entonces

$$\leq \; e^K \|h\|_{[t_0,a]} [\|h^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]} \|\Delta Z_n - \Delta Z\|_{[\tau,a]} + \|h^{-1}R\|_{[t_0,a]} \|Z_n - Z\|_{[\tau,a]}](a - t_0)$$

$$\leq \; e^K (2\|\Lambda\|_{[t_0,a]} + \|R\|_{[t_0,a]}) \|Z_n - Z\|_{[\tau,a]} (a - t_0)$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que

$$e^K (2\|\Lambda\|_{[t_0,a]} + \|R\|_{[t_0,a]})(a - t_0) \|Z_n - Z\|_{[\tau,a]} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para cada $n \geq N_1$.

Veamos las dos integrales restante, denotemos por

$$H_n(t) = h(t)^{-1} |\Lambda(t)| \; |\Delta Z_n(t) - \Delta Z(t)|$$

$$T_n(t) = h(t)^{-1} |R(t)| \; |Z_n(t - r(t)) - Z(t - r(t))|$$

Obs.: Podemos suponer que $t \geq t_1$, puesto que en caso contrario, se tiene que:

$$\int_t^{\infty} H_n(s)ds = \int_t^{t_1} H_n(s)ds + \int_{t_1}^{\infty} H_n(s)ds$$

y la primera integral de esta suma tiende a cero cuando $n \to \infty$ ya que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_t^{t_1} H_n(s)ds &\leq \textstyle\int_{t_0}^{t_1} H_n(s)ds \\ &\leq \|h^{-1}\Lambda\|_{[t_0,t_1]}\|\Delta Z_n - \Delta Z\|_{[\tau,t_1]}r(t_1) \\ &\leq \|h^{-1}\Lambda\|_{[t_0,t_1]}r(t_1)\|Z_n - Z\|_{[\tau,t_1]}. \end{aligned}$$

De igual modo ocurre para $\int_t^{\infty} T_n(s)ds$.

Tenemos que para cada $t \geq t_1$, de (34)

$$H_n(t) \leq h(t)^{-1}|\Lambda(t)|(|Z_n(t - r(t)) - Z(t - r(t))| + |Z_n(t) - Z(t)|)$$

y

$$T_n(t) \leq h(t)^{-1}|R(t)|\,|Z_n(t - r(t)) - Z(t - r(t))|.$$

Como $Z_n \to Z$ uniformemente en compactos, cuando $n \to \infty$, entonces

$$|Z_n(t) - Z(t)| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

por lo tanto

$$H_n(t) \to 0 \quad \text{y} \quad T_n(t) \to 0$$

para cada $t \geq t_1$ (convergencia puntual).

Por otra parte de (23) tenemos que

$$\begin{aligned} H_n(t) &\leq |\Lambda(t)|h(t)^{-1}|\Delta Z_n(t)| + |\Lambda(t)|h(t)^{-1}|\Delta Z(t)| \\ &\leq 2Lr(t)|\Lambda(t)|h(t)^{-1}\|h_t\|_2(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1) \\ &\leq 2L\varphi(t)(3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1), \end{aligned}$$

y

$$\int_t^{\infty} H_n(s)ds \leq \int_{t_0}^{\infty} H_n(s)ds.$$

De (25) y (26) tenemos que la sucesión $\{H_n\}_{n\geq 1}$, está dominada por una función $L_1[0,\infty)$, entonces del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{\infty} H_n(s)ds = 0$$

Luego para $\varepsilon > 0$ existe $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que

$$e^K \|h\|_{[t_0,a]} \int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\,|\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)|ds \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq N_2$.

De manera similar tenemos que

$$\begin{aligned} T_n(t) &\leq h(t)^{-1}|R(t)|(|Z_n(t-r(t))| + |Z(t-r(t))|) \\ &\leq h(t)^{-1}h(t-r(t))|R(t)|(h(t-r(t))^{-1}|Z_n(t-r(t))| \\ &+ h(t-r(t))^{-1}|Z(t-r(t))|). \end{aligned}$$

De (22) resulta

$$T_n(t) \leq 2Lh(t)^{-1}h(t-r(t))|R(t)|.$$

Por (27) la sucesión $\{T_n\}_{n\geq 1}$ está dominada por una función $L_1[0,\infty)$, y

$$\int_t^{\infty} T_n(s)ds \leq \int_{t_0}^{\infty} T_n(s)ds$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{\infty} T_n(s)ds = 0$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tal que

$$e^K \|h\|_{[t_0,a]} \int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|R(s)|\,|Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))|ds < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq N_3$.

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, sea $N_0 = max\{N_1, N_2, N_3\}$ usando estas tres estimaciones se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}Z_n(t) - \mathcal{M}Z(t)| &\leq e^K(2\|\Lambda\|_{[t_0,a]} + \|R\|_{[t_0,a]})(a-t_0)\|Z_n - Z\|_{[\tau,a]} \\ &+ e^K\|h\|_{[t_0,a]} \textstyle\int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\,|\Delta Z_n(s) - \Delta Z(s)|ds \\ &+ e^K\|h\|_{[t_0,a]} \textstyle\int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|R(s)|\,|Z_n(s-r(s)) - Z(s-r(s))|ds \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq N_0$. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es continuo en G.

(ii) $\mathcal{M}(G) \subseteq G$.

Debemos probar que toda $Y \in \mathcal{M}(G)$ satisface las condiciones (21), (22) y (23).

Sea Y en $\mathcal{M}(G)$, entonces existe una función Z en G tal que $Y = \mathcal{M}(Z)$. Luego Y satisface las condiciones (32) y (33).

$Y = \mathcal{M}Z$ satisface (21) por definición.

Veamos la condición (22). Sea $t \geq \tau$

Si $\tau < t < t_0$, $\quad Y(t) = g(t)$ y

$$h(t)^{-1}|Y(t)| \leq h(t)^{-1}|g(t)| \leq \|h^{-1}\|_{[\tau,t_0]}\|g\|_{[\tau,t_0]} \leq L$$

si $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} |Y(t)| \quad &\leq \quad h(t) + \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}|\; |\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds \\ &+ \quad \textstyle\int_{t}^{\infty} |\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}|\; |\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds \\ &+ \quad \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}|\; |R(s)Z(s-r(s))|ds \\ &+ \quad \textstyle\int_{t}^{\infty} |\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}|\; |R(s)Z(s-r(s))|ds \end{aligned}$$

de (17) y (18) tenemos:

$$\begin{aligned} |Y(t)| \quad &\leq \quad h(t) + e^K h(t) \textstyle\int_{t_0}^{t} h(s)^{-1}|\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds \\ &+ \quad e^K h(t) \textstyle\int_{t}^{\infty} h(s)^{-1}|\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds \\ &+ \quad e^K h(t) \textstyle\int_{t_0}^{t} h(s)^{-1}|R(s)Z(s-r(s))|ds \\ &+ \quad e^K h(t) \textstyle\int_{t}^{\infty} h(s)^{-1}|R(s)Z(s-r(s))|ds \end{aligned}$$

entonces

$$h(t)^{-1}|Y(t)| \leq 1 + e^K \int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds + e^K \int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|R(s)Z(s-r(s))|ds$$

esta desigualdad podemos escribirla como

$$
\begin{aligned}
h(t)^{-1}|Y(t)| &\leq 1+e^K\int_{t_0}^{t_1} h(s)^{-1}|\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds \\
&+ e^K\int_{t_1}^{\infty} h(s)^{-1}|\Lambda(s)\Delta Z(s)|ds \\
&+ e^K\int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}|R(s)|\,|Z(s-r(s))|ds \\
&\leq 1+e^K\int_{t_0}^{t_1} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\,|Z(s)|ds \\
&+ e^K\int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}h(s-r(s))|\Lambda(s)|h(s-r(s))^{-1}|Z(s-r(s))|ds \\
&+ e^K\int_{t_1}^{\infty} |\Lambda(s)|h(s)^{-1}|\Delta Z(s)|ds \\
&+ e^K\int_{t_0}^{\infty} h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|h(s-r(s))^{-1}|Z(s-r(s))|ds
\end{aligned}
$$

por las condiciones (22) y (23) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\leq 1+e^K L\|\Lambda\|_{[t_0,t_1]}r(t_1)+e^K L\|\Lambda\|_{[t_0,t_1]}Sup_{t_0\leq s\leq t_1}\|h^{-1}(s)h(s-r(s))\|r(t_1) \\
&+ Le^K\int_{t_1}^{\infty}|\Lambda(s)|r(s)h(s)^{-1}\|h_s\|_2(3\|\Lambda_s\|_1+\|R_s\|_1)ds \\
&+ Le^K\int_{t_0}^{\infty}h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|ds.
\end{aligned}
$$

Notemos que de la condición (24) resulta que para todo $t\geq t_0$

$$h(t)^{-1}h(t-r(t))\leq e^{\|\Lambda\|_{[t-r(t),t]}r(t)}\leq e,$$

entonces

$$e^K\|\Lambda\|_{[t_0,t_1]}r(t_1)(1+sup_{t_0\leq s\leq t_1}\|h(s)^{-1}h(s-r(s))\|)$$

$$\leq e^K\frac{1}{e^{k+4}}[1+e]=\frac{1}{e^4}+\frac{1}{e^3}\leq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},$$

luego usando (29) y (31)

$$
\begin{aligned}
h(t)^{-1}|Y(t)| &\leq 1+L\tfrac{1}{4}+Le^K\int_{t_1}^{\infty}\varphi(\dot{s})(3\|\Lambda_s\|_1+\|R_s\|_1)ds \\
&+ Le^K\int_{t_0}^{\infty}h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|ds \\
&\leq 1+\tfrac{L}{4}+\tfrac{L}{4}=1+\tfrac{L}{2}\leq L
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq t_0$.

Por lo tanto

$$h(t)^{-1}|Y(t)| \leq L \qquad\qquad t \geq \tau$$

Falta probar que $Y = \mathcal{M}Z$ satisface (23). Sea $t \geq t_1$ usando la definición de Y tenemos que

$$|\Delta Y(t)| = |Y(t) - Y(t - r(t))| \leq |Y'(\eta_t)|r(t)$$

para algún η_t, $t - r(t) \leq \eta_t \leq t$ y

$$Y'(\eta_t) = \Lambda(\eta_t)Y(\eta_t) + \Lambda(\eta_t)\Delta Z(\eta_t) + R(\eta_t)Z(\eta_t - r(\eta_t))$$

Las dos últimas afirmaciones se pueden verificar sin dificultad con la ayuda del Lema 2.

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(t)^{-1}|\Delta Y(t)| &\leq h(t)^{-1}[|\Lambda(\eta_t)Y(\eta_t)| + |\Lambda(\eta_t)\Delta Z(\eta_t)| \\
&+ |R(\eta_t)Z(\eta_t - r(\eta_t))|]r(t) \\
&\leq r(t)h(t)^{-1}[|\Lambda(\eta_t)|h(\eta_t)h(\eta_t)^{-1}|Y(\eta_t)| \\
&+ h(\eta_t)|\Lambda(\eta_t)|\ |Z(\eta_t)|h(\eta_t)^{-1} \\
&+ |\Lambda(\eta_t)|h(\eta_t - r(\eta_t))h(\eta_t - r(\eta_t))^{-1}|Z(\eta_t - r(\eta_t))| \\
&+ h(\eta_t - r(\eta_t))|R(\eta_t)|h(\eta_t - r(\eta_t))^{-1}|Z(\eta_t - r(\eta_t))|]
\end{aligned}$$

usando (22) y (23) resulta:

$$\begin{aligned}
h(t)^{-1}|\Delta Y(t)| &\leq h(t)^{-1}r(t)[|\Lambda(\eta_t)|h(\eta_t)L + h(\eta_t)|\Lambda(\eta_t)|L \\
&+ |\Lambda(\eta_t)|h(\eta_t - r(\eta_t))L + h(\eta_t - r(\eta_t))|R(\eta_t)|L] \\
&\leq h(t)^{-1}r(t)L[3\|\Lambda_t\|_1\|h_t\|_2 + \|h_t\|_2\|R_t\|_1] \\
&\leq Lh(t)^{-1}\|h_t\|_2 r(t)[3\|\Lambda_t\|_1 + \|R_t\|_1] \qquad\qquad t \geq t_1
\end{aligned}$$

Luego $Y = \mathcal{M}Z$ satisface (21), (22) y (23) por lo tanto

$$\mathcal{M}(G) \subseteq G$$

(iii) Falta verificar que $\mathcal{M}(G)$ es relativamente compacto en G. Como $\mathcal{C}$ es metrizable basta demostrar que $\mathcal{M}(G)$ es relativamente secuencialmente compacto.

Sea $\{Y_n\}$ sucesión en $\mathcal{M}(G)$. Vamos a demostrar que $\{Y_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada sub intervalo compacto de $[\tau, \infty)$. Para cada Y_n, existe un Z_n en G tal que

$$Y_n(t) = \mathcal{M} Z_n(t) \qquad\qquad t \geq \tau$$

- $\{Y_n\}$ es uniformemente acotada.

Si $t \in [\tau, t_0]$,

$$|Y_n(t)| \leq h(t)L \leq \|h\|_{[\tau,t_0]}L$$

Sea K compacto de $[t_0, \infty)$, entonces existe $a > 0$ tal que $K \subset [t_0, a]$. Tenemos que para cada n, por (33)

$$\begin{aligned}
|Y_n(t)| &\leq h(t) + e^K h(t) \textstyle\int_{t_0}^t h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)| ds \\
&+ e^K h(t) \textstyle\int_t^\infty h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)| ds \\
&+ e^K h(t) \textstyle\int_{t_0}^t h(s)^{-1}|R(s)|\, |Z_n(s - r(s))| ds \\
&+ e^K h(t) \textstyle\int_t^\infty h(s)^{-1}|R(s)|\, |Z_n(s - r(s)| ds
\end{aligned}$$

luego para cada $t \in K$

$$\begin{aligned}
|Y_n(t)| &\leq \|h\|_{[t_0,a]} + e^K \|h\|_{[t_0,a]}[\textstyle\int_{t_0}^a h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)| ds \\
&+ \textstyle\int_{t_0}^a h(s)^{-1}|R(s)|\, |Z_n(s - r(s))| ds \\
&+ \textstyle\int_{t_0}^\infty h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)| ds \\
&+ \textstyle\int_{t_0}^\infty h(s)^{-1}|R(s)|\, |Z_n(s - r(s))| ds].
\end{aligned}$$

De (22) y (23) resulta

$$\leq \|h\|_{[t_0,a]} + e^K\|h\|_{[t_0,a]}[\int_{t_0}^a h(s)^{-1}h(s-r(s))|\Lambda(s)|h(s-r(s))|Z_n(s-r(s))|ds$$

$$+ \int_{t_0}^a |\Lambda(s)|h(s)^{-1}|Z_n(s)|ds + \int_{t_0}^a h(s)^{-1}h(s-\dot{r}(s))|R(s)|h(s-r(s))^{-1}$$

$$|Z_n(s-r(s))|ds$$

$$+ L\int_{t_0}^\infty |\Lambda(s)|r(s)h(s)^{-1}\|h_s\|_2(3\|\Lambda_s\|_1 + \|R_s\|_1)|ds$$

$$+ \int_{t_0}^\infty h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|h(s-r(s))^{-1}|Z_n(s-r(s))|ds.$$

Usando las condiciones (22) y (29) tenemos

$$\begin{aligned} |Y_n(t)| &\leq \|h\|_{[t_0,a]} + e^K\|h\|_{[t_0,a]}[\|\Lambda\|_{[t_0,a]}L(1+e^m)(a-t_0)] + \tfrac{1}{4} \\ &\leq L[\|h\|_{[t_0,a]} + e^K\|h\|_{[t_0,a]}\|\Lambda\|_{[t_0,a]}(1+e^m)(a-t_0)+1] \end{aligned}$$

para cada n y para todo $t \in K \subseteq [t_0, a]$ como

$$|Y_n(t)| \leq \|h\|_{[\tau,t_0]}L$$

para cada $t \in [\tau, t_0]$ entonces $\{Y_n\}$ es uniformemente acotada en cada sub intervalo compacto de $[\tau, \infty)$.

- $\{Y_n\}$ es equicontinua.

Sabemos que cada Y_n es continua en $[\tau, \infty)$, luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, n) \in \mathbf{N}$ tal que

$$|t-\tilde{t}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |Y_n(t) - Y_n(\tilde{t})| < \varepsilon$$

Vamos a demostrar que la sucesión $\{Y_n\}$ es equicontinua en cada subintervalo compacto $[\tau, a]$ de $[\tau, \infty)$.

Sin perder generalidad podemos suponer $\tilde{t} < t$.

Sea K compacto, si $K \cap [\tau, t_0] \neq \phi$, para todo $t \in K$ $(\tilde{t} < t_0)$ y para cada n

$$|Y_n(t) - Y_n(\tilde{t})| = |g(t) - g(\tilde{t})| = 0$$

entonces $\{Y_n\}$ es equicontinua en todo subintervalo compacto de $[\tau, t_0]$.

Si $K \cap [\tau, t_0) \neq \Phi$ y $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$ podemos reducirnos solo al caso $K \cap [t_0, \infty) \neq \Phi$ ya que $Y_n(t) = g(t)$ para todo n y todo $t \in [\tau, t_0]$.

Entonces supongamos $K \subset [t_0, \infty)$ compacto. Para cada n y $t \in K$ tenemos

$$
\begin{aligned}
|Y_n(t) - Y_n(\tilde{t})| &\leq |e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha} - e^{\int_{t_0}^{\tilde{t}} \lambda_k(\alpha)d\alpha}| \\
&+ |\Phi_1(t) \textstyle\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds \\
&- \Phi_1(\tilde{t}) \textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds| \\
&+ |\Phi_1(t) \textstyle\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s - r(s))ds \\
&- \Phi_1(\tilde{t}) \textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s - r(s))ds| \\
&+ |\Phi_2(t) \textstyle\int_{t}^{\infty} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds \\
&- \Phi_2(\tilde{t}) \textstyle\int_{\tilde{t}}^{\infty} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds| \\
&+ |\Phi_2(t) \textstyle\int_{t}^{\infty} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s - r(s))ds \\
&- \Phi_2(\tilde{t}) \textstyle\int_{\tilde{t}}^{\infty} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s - r(s))ds|
\end{aligned}
$$

Veamos separadamente cada una de las integrales de ésta desigualdad .

En la primera tenemos:

$$
|\Phi_1(t) \textstyle\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds - \Phi_1(\tilde{t}) \int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds|
$$

$$
\begin{aligned}
&= |\Phi_1(t) \textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds \\
&- \Phi_1(\tilde{t}) \textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds + \Phi_1(t) \int_{\tilde{t}}^{t} \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds|
\end{aligned}
$$

de (17) y (18)

$$
\begin{aligned}
&\leq |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})| \textstyle\int_{t_0}^{\tilde{t}} |\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)|ds \\
&+ e^K h(t) \textstyle\int_{\tilde{t}}^{t} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds \\
&\leq |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})| \textstyle\int_{t_0}^{a} |\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)|(|Z_n(s - r(s))| + |Z_n(s)|)ds \\
&+ e^K \|h\|_{[t_0,a]} \textstyle\int_{\tilde{t}}^{t} |\Lambda(s)| h(s)^{-1}|\Delta Z_n(s)|ds \\
&+ e^K \|h\|_{[t_0,a]} \textstyle\int_{\tilde{t}}^{t} |\Lambda(s)| h(s)^{-1}|Z_n(s - r(s))|ds
\end{aligned}
$$

usando (22)

$$\leq \ |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})|2\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}\|Z_n\|_{[t_0,a]} + e^K\|h\|_{[t_0,a]}L\|\Lambda\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}|$$

$$+ \ e^K\|h\|_{[t_0,a]}\|\Lambda\|_{[t_0,a]}\int_{\tilde{t}}^t h(s)h(s-r(s))Lds$$

$$\leq \ |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})|2\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}\|h\|_{[t_0,a]}L + Le^K\|h\|_{[t_0,a]}\|\Lambda\|_{[t_0,a]}(1+e^m)|t-\tilde{t}| \tag{3.35}$$

Como Φ_1 es continua, luego para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que si $|t - \tilde{t}| < \delta_1$, entonces

$$|\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})|2\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}\|h\|_{[t_0,a]}L < \frac{\varepsilon}{9} \tag{3.36}$$

En la segunda expresión:

$$|\Phi_1(t)\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s-r(s))ds - \Phi_1(\tilde{t})\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s-r(s))ds|$$

$$= \ |\Phi_1(t)\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s-r(s))ds - \Phi_1(\tilde{t})\int_{\tilde{t}}^{t} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s-r(s))ds$$

$$- \ \Phi_1(\tilde{t})\int_{t_0}^{\tilde{t}} \Phi(s)^{-1}R(s)Z_n(s-r(s))ds|$$

de (17) y (18)

$$\leq \ |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})|\int_{t_0}^{\tilde{t}} |\Phi(s)^{-1}\ R(s)|\ |Z_n(s-r(s))|ds$$

$$+ \ e^K h(t)\int_{\tilde{t}}^t h(s)^{-1}|R(s)|\ |Z_n(s-r(s))|ds$$

$$\leq \ |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})|\int_{t_0}^{a} |\Phi(s)^{-1}\ R(s)|\ |Z_n(s-r(s))|ds$$

$$+ \ e^K\|h\|_{[t_0,a]}\int_{\tilde{t}}^t h(s)^{-1}|R(s)|\ |Z_n(s-r(s))|ds$$

usando (22) y (30)

$$\leq |\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})|\ \|\Phi^{-1}R\|_{[t_0,a]}L\|h\|_{[t_0,a]} + e^K\|h\|_{[t_0,a]}e^m\|R\|_{[t_0,a]}L|t-\tilde{t}|$$

Como Φ_1 es continua, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|t-\tilde{t}| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad L\|\Phi^{-1}R\|_{[t_0,a]}\|h\|_{[t_0,a]}|\Phi_1(t) - \Phi_1(\tilde{t})| < \frac{\varepsilon}{9} \tag{3.37}$$

Antes de ver las siguientes desigualdades notemos que cada factor $\gamma(t,s)$ de la matriz diagonal

$$\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1} - \Phi_2(\tilde{t})\Phi(s)^{-1}$$

es de la forma

$$\begin{aligned}
\gamma_j(t,s) &= e^{-\int_t^s \lambda_j(\alpha)d\alpha} - e^{-\int_{\tilde{t}}^s \lambda_j(\alpha)d\alpha} \\
&= e^{-\int_t^s \lambda_j(\alpha)d\alpha} - e^{-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_j(\alpha)d\alpha - \int_t^s \lambda_j(\alpha)d\alpha} \\
&= e^{-\int_t^s \lambda_j(\alpha)d\alpha}(1 - e^{-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_j(\alpha)d\alpha}) \\
&= e^{-\int_t^s \lambda_j(\alpha)d\alpha + \int_t^s \lambda_k(\alpha)d\alpha - \int_t^s \lambda_k(\alpha)d\alpha}(1 - e^{-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_j(\alpha)d\alpha}) \\
&= e^{\int_t^s \lambda_k(\alpha)-\lambda_j(\alpha)d\alpha} e^{-\int_t^s \lambda_k(\alpha)d\alpha}(1 - e^{-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_j(\alpha)d\alpha})
\end{aligned}$$

Entonces para cada $s \geq t$, de (15) tenemos

$$|\gamma_j(t,s)| \leq e^K h(t)h(s)^{-1}|1 - e^{-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_j(\alpha)d\alpha}| \tag{3.38}$$

Denotemos

$$\psi(t) = \sum_{j\in I_2} |1 - e^{-\int_{\tilde{t}}^t \lambda_j(\alpha)d\alpha}| \tag{3.39}$$

Luego

$$|\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1} - \Phi_2(\tilde{t})\Phi(s)^{-1}| \leq e^K h(t)h(s)^{-1}\psi(t).$$

Para el tercer factor

$$\begin{aligned}
& |\Phi_2(t)\textstyle\int_t^\infty \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds - \Phi_2(\tilde{t})\int_{\tilde{t}}^\infty \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds| \\
= & |\Phi_2(t)\textstyle\int_t^\infty \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds - \Phi_2(\tilde{t})\int_{\tilde{t}}^t \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds| \\
- & \Phi_2(\tilde{t})\textstyle\int_t^\infty \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds| \\
\leq & |\textstyle\int_t^\infty(\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1} - \Phi_2(\tilde{t})\Phi(s)^{-1})\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds \\
- & \Phi_2(\tilde{t})\textstyle\int_{\tilde{t}}^t \Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)ds| \\
\leq & \textstyle\int_t^\infty |\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1} - \Phi_2(\tilde{t})\Phi(s)^{-1}|\,|\Lambda(s)|\,|\Delta Z_n(s)|ds \\
+ & |\Phi_2(\tilde{t})|\textstyle\int_{\tilde{t}}^t |\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z_n(s)|ds
\end{aligned}$$

usando (22) y (38)

$$
\begin{aligned}
&\leq e^K h(t)\psi(t) \int_t^\infty h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}| \\
&\leq e^K\|h\|_{[t_0,a]}\psi(t) \int_t^\infty h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}|
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

si $t \leq t_1$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\leq e^K\|h\|_{[t_0,a]}\psi(t)[\int_t^{t_1} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds \\
&+ \int_{t_1}^t h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds] \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}| \\
&\leq e^K\|h\|_{[t_0,a]}\psi(t)[\int_{t_0}^{t_1} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds \\
&+ \int_{t_1}^\infty h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, |\Delta Z_n(s)|ds] \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}|
\end{aligned}
$$

de (22) y (23) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\leq e^K\|h\|_{[t_0,a]}\psi(t)[\int_{t_0}^{t_1} h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\, (|Z_n(s-r(s))|+|Z_n(s)|)ds \\
&+ L\int_{t_1}^\infty |\Lambda(s)|h(s)^{-1}\|h_s\|_2 r(s)(3\|\Lambda_s\|_1+\|R_s\|_1)ds] \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}| \\
&\leq e^K\|h\|_{[t_0,a]}\psi(t)[\|h^{-1}\|_{[t_0,t_1]}\|\Lambda\|_{[t_0,t_1]}2\|Z_n\|_{[t_0,t_1]}r(t_1) \\
&+ L\int_{t_1}^\infty |\Lambda(s)|h(s)^{-1}\|h_s\|_2 r(s)(3\|\Lambda_s\|_1+\|R_s\|_1)ds] \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}2\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}|
\end{aligned}
$$

usando (22) y (29)

$$
\begin{aligned}
&\leq e^K\|h\|_{[t_0,a]}\psi(t)\left[\|\Lambda\|_{[t_0,t_1]}2Lr(t_1)+\tfrac{L}{4e^k}\right] \\
&+ L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}\|h\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}|
\end{aligned}
$$

Por la continuidad de λ_j, para cada $j, 1 \leq j \leq n$, si $t \to \tilde{t}$ entonces

$$\psi(t) = \sum_{j \in I_2} |1 - e^{-\int_{\tilde{t}}^{t} \lambda_j(\alpha) d\alpha}| \to 0 \tag{3.41}$$

Tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ tal que si

$$|t - \tilde{t}| < \delta_3$$

entonces

$$\psi(t) e^K \|h\|_{[t_0,t_1]} L(\|\Lambda\|_{[t_0,t_1]} 2r(t_1) + \frac{1}{4e^K}) < \frac{\varepsilon}{9} \tag{3.42}$$

Si $t_1 \leq t$ de (23), tenemos que (40) es menor o igual

$$\leq \; e^K \|h\|_{[t_0,a]} \psi(t) L \int_t^\infty |\Lambda(s)| h(s)^{-1} \|h_s\|_2 r(s)(3\|\Lambda_s\|_1 + \|R_s\|_1) ds$$

$$+ \; L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]} \cdot \|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]} 2\|h\|_{[t_0,a]} |t - \tilde{t}|$$

$$\leq \; e^K \|h\|_{[t_0,a]} \psi(t) L \int_{t_0}^\infty |\Lambda(s)| h(s)^{-1} \|h_s\|_2 r(s)(3\|\Lambda_s\|_1 + \|R_s\|_1) ds$$

$$+ \; L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]} \|\phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]} 2\|h\|_{[t_0,a]} |t - \tilde{t}|,$$

de (29) resulta

$$\leq \|h\|_{[t_0,a]} \psi(t) \frac{1}{4} + L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]} \|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]} 2\|h\|_{[t_0,a]} |t - \tilde{t}|.$$

Por (41) tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon)$ tal que si

$$|t - \tilde{t}| < \delta_4$$

entonces

$$\psi(t) \frac{L}{4} \|h\|_{[t_0,a]} < \frac{\varepsilon}{9} \tag{3.43}$$

Para la última expresión

$$|\Phi_2(t) \int_t^\infty \Phi(s)^{-1} R(s) Z_n(s - r(s)) ds - \Phi_2(\tilde{t}) \int_{\tilde{t}}^\infty \Phi(s)^{-1} R(s) Z_n(s - r(s)) ds|$$

$$= \; |\Phi_2(t) \int_t^\infty \Phi(s)^{-1} R(s) Z_n(s - r(s)) ds - \Phi_2(\tilde{t}) \int_{\tilde{t}}^t \Phi(s)^{-1} R(s) Z_n(s - r(s)) ds$$

$$- \; \Phi_2(\tilde{t}) \int_t^\infty \Phi(s)^{-1} R(s) Z_n(s - r(s)) ds|$$

$$\leq \; \int_t^\infty |\Phi_2(t)\Phi(s)^{-1} - \Phi_2(\tilde{t})\Phi(s)^{-1}| \, |R(s)| \, |Z_n(s - r(s))| ds$$

$$+ \; \int_{\tilde{t}}^t |\Phi_2(\tilde{t})\Phi(s)^{-1}| \, |R(s)| \, |Z_n(s - r(s))| ds$$

usando (18) y (39)

$$\leq \; e^K\psi(t)h(t)\int_t^\infty h(s)^{-1}|R(s)|\;|Z_n(s-r(s))|ds + e^K h(\tilde{t})\int_{\tilde{t}}^t h(s)^{-1}|R(s)|$$

$$|Z_n(s-r(s))|ds$$

$$\leq \; e^K\psi(t)\|h\|_{[t_0,a]}\int_{t_0}^\infty h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|h(s-r(s))^{-1}|Z_n(s-r(s))|ds$$

$$+ \; e^K\|h\|_{[t_0,a]}\int_{\tilde{t}}^t h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|h(s-r(s))^{-1}|Z_n(s-r(s))|ds$$

por (23)

$$\leq \; e^K\psi(t)\|h\|_{[t_0,a]}L\int_{t_0}^\infty h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|ds$$

$$+ \; e^K\psi(t)\|h\|_{[t_0,a]}L\int_{\tilde{t}}^t h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|ds.$$

De (29) tenemos

$$\leq \psi(t)\|h\|_{[t_0,a]}\frac{L}{4} + e^K\|h\|_{[\tau,a]}\|R\|_{[t_0,a]}|t-\tilde{t}|.$$

Por (41), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) > 0$ tal que si

$$|t-\tilde{t}| < \delta_5$$

entonces

$$\psi(t)\|h\|_{[t_0,a]}\frac{L}{4} < \frac{\varepsilon}{9}. \tag{3.44}$$

Finalmente tenemos que de la continuidad de λ_k, para cada $\varepsilon > 0$ hay $\delta_6 = \delta_6(\varepsilon) > 0$ tal que si

$$|t-\tilde{t}| < \delta_6$$

entonces

$$\left| e^{\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha} - e^{\int_{t_0}^{\tilde{t}} \lambda_k(\alpha)d\alpha} \right| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

Luego dado $\varepsilon > 0$ sea

$$\delta \;=\; min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{9Le^K(1+e^m)\|h\|_{[t_0,a]}\|\Lambda\|_{[t_0,a]}}, \qquad \delta_2, \frac{\varepsilon}{9Le^K(e^m)\|h\|_{[t_0,a]}\|R\|_{[t_0,a]}},$$

$$\delta_3, \frac{\varepsilon}{9L\|\Phi_2\|_{[t_0,a]}\|\Phi^{-1}\Lambda\|_{[t_0,a]}\|h\|_{[t_0,a]}}, \qquad \delta_4, \qquad \delta_5, \frac{\varepsilon}{9e^K\|h\|_{[\tau,a]}\|R\|_{[t_0,a]}}, \qquad \delta_6\}$$

De (36), (37), (42), (43) y (44), tenemos que para todo n si

$$|t-\tilde{t}|<\delta$$

entonces

$$|Y_n(t)-Y_n(\tilde{t})|<\varepsilon.$$

Por lo tanto la sucesión $\{Y_n\}$ es equicontinua. Entonces, $\{Y_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en todo subintervalo compacto $[\tau,a]$.

Si $B_i=[\tau,\tau+i]$ con $i\geq 1$, $i\in \mathbf{N}$ aplicando el Lema de Ascoli tenemos que $\{Y_n\}$ restringida a B_1 tiene una subsucesión $\{Y_n^1\}$ que converge uniformemente en este intervalo. La sucesión $\{Y_n^1\}$ restringida a $B_2=[\tau,\tau+2]$ es uniformemente acotada y equicontinua por lo tanto tiene una subsucesión $\{Y_n^2\}$ que converge uniformemente en B_2 siguiendo con este proceso, tenemos que $\{Y_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subintervalo compacto de $[\tau,\infty)$.

Entonces toda sucesión en $\overline{\mathcal{M}(G)}$ tiene una subsucesión convergente, como el conjunto es cerrado, $\overline{\mathcal{M}(G)}$ es secuencialmente compacto por lo tanto es compacto.

Aplicando el teorema de Schauder-Tichonoff tenemos que $\mathcal{M}$ tiene un punto fijo en G. Es decir, existe Z en G tal que $\mathcal{M}Z=Z$, y por lo tanto Z es una solución del sistema (13) definida para $t\geq t_0$ y tal que $Z(t)=g(t)$ para $t\in[\tau,t_0]$. Como $Z\in G$, satisface las condiciones (22) y (23) y por lo tanto

$$h(t)^{-1}|Z(t)|\leq L \qquad\qquad t\geq t_0$$

Por otra parte se tiene para cada $t\geq t_0$

$$\begin{aligned}
e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha}Z(t) &= e_k+e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha}\int_{t_0}^t \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds\\
&+ e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha}\int_{t_0}^t \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds\\
&- e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha}\int_t^{\infty} \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds\\
&- e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha}\int_t^{\infty} \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Denotemos por J_1,J_2,J_3 y J_4 a la primera, segunda, tercera y cuarta integral del término derecho de (45). Tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
|J_1| &= |e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_0}^t \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds| \\
&\leq e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_0}^t |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}|\,|\Lambda(s)\ \ |\Delta Z(s)|ds.
\end{aligned}
$$

De las condiciones (23), (25) y (26) para cada $\varepsilon > 0$ podemos elegir un t_2 suficientemente grande, tal que

$$
e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_2}^{\infty} |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}|\,|\Lambda(s)|\,|\Delta Z(s)|ds < \frac{\varepsilon}{2}
$$

Por lo tanto

$$
|J_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_0}^{t_2} |\Phi_1(t)|\,|\Phi(s)^{-1}|\,|\Lambda(s)|\,|\Delta Z(s)|ds
$$

De (14) se tiene que para cada $j \in I_1$

$$
e^{\int_{t_0}^t Re(\lambda_k(\alpha)-\lambda_k(\alpha))d\alpha} \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty
$$

Luego

$$
e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)}|\Phi_1(t)| \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \tag{3.46}
$$

y entonces

$$
|J_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + o(1). \tag{3.47}
$$

Para la segunda integral se tiene

$$
\begin{aligned}
|J_2| &= |e^{-\int_{t_0}^t \lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_0}^t \Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds| \\
&\leq e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_0}^t |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))|ds
\end{aligned}
$$

de (22) y (27) tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe t_3 suficientemente grande tal que

$$
e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_{t_3}^{\infty} |\Phi_1(t)\Phi(s)^{-1}|\,|R(s)|\,|Z(s-r(s))|ds < \frac{\varepsilon}{2}
$$

Luego

$$
|J_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + e^{-\int_{t_0}^t Re\lambda_k(\alpha)d\alpha}|\Phi_1(t)| \int_{t_0}^{t_3} |\Phi(s)^{-1}|\,|R(s)|\,|Z(s-r(s))|ds
$$

y de (45) tenemos que

$$|J_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + o(1). \tag{3.48}$$

Para J_3 y J_4

$$\begin{aligned}
|J_3| + |J_4| &= |e^{-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_t^\infty \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}\Lambda(s)\Delta Z(s)ds| \\
&+ |e^{-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha} \int_t^\infty \Phi_2(t)\Phi(s)^{-1}R(s)Z(s-r(s))ds| \\
&\leq e^K \int_t^\infty h(s)^{-1}|\Lambda(s)|\,|\Delta Z(s)|ds + e^K \int_t^\infty h(s)^{-1}|R(s)|\,|Z(s-r(s))|ds \\
&\leq e^K L \int_t^\infty |\Lambda(s)|r(s)h(s)^{-1}\|h_s\|_2(3\|\Lambda_s\|_1 + \|R_s\|_1)ds \\
&+ Le^K \int_t^\infty h(s)^{-1}h(s-r(s))|R(s)|ds
\end{aligned}$$

Luego de (25) y (26) se tiene que cuando $t \to \infty$

$$|J_3| + |J_4| \to 0 \tag{3.49}$$

De (47), (48) y (49) resulta

$$e^{-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha} Z(t) = e_k + o(1)$$

y entonces cuando $t \to \infty$

$$Z(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\alpha)d\alpha}(e_k + o(1))$$

Lo que completa la demostración del teorema.

4 Aplicaciones y Ejemplos

Comenzaremos esta sección viendo una aplicación del teorema 1 para ecuaciones lineales de segundo orden.

Aplicación 1: Consideremos la ecuación escalar

$$y"(t) = -y(t - r(t)) \tag{4.50}$$

podemos escribirla

$$y"(t) + y(t) = \Delta y(t) \tag{4.51}$$

donde $\Delta y(t) = y(t) - y(t - r(t))$ haciendo el cambio

$$z_1 = y$$

$$z_2 = y'$$

La ecuación (51) podemos escribirla como el sistema

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta z_1 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

el sistema (52) queda de la forma

$$Z' = AZ + B\Delta Z \tag{4.53}$$

y el sistema lineal ordinario asociado a (53) es

$$X' = AX(t) \tag{4.54}$$

Una matriz fundamental de (54) es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar el Teorema 1 al sistema (53), tomando como $\tilde{A})(t)$ a

$$\tilde{B}(t) = |\Phi(t)^{-1}B\Phi(t)| + |\Phi(t)^{-1}B\Phi(t - r(t))|$$

(Véase nota el pie del teorema 1).

Sea

$$\tilde{B}(t) = |\Phi(t)^{-1}B\Phi(t)| + |\Phi(t)^{-1}B\Phi(t - r(t))|$$

y

$$\lambda(t) = \tilde{B}(t)\|\tilde{B}_t\|_1\ \beta(t)r(t).$$

tenemos que

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{it} & -ie^{-it} \\ e^{it} & ie^{it} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t)^{-1}B\Phi(t) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \Phi(t)^{-1}B\Phi(t-r(t)) = \begin{pmatrix} ie^{-ir(t)} & 0 \\ 0 & -ie^{ir(t)} \end{pmatrix}$$

Vamos a usar para una matríz $A = (a_{ij})$ la norma

$$|A| = \sum_{ij} |a_{ij}|.$$

El resultado es equivalente si usamos

$$|A| = \sup_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Entonces tenemos

$$\tilde{B}(t) = \left|\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} ie^{-ir(t)} & 0 \\ 0 & -ie^{ir(t)} \end{pmatrix}\right| = 4$$

Luego

$$\|\tilde{B}_t\|_1 = \sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0} |\tilde{B}(t+\sigma)| = 4$$

(donde $\mu \geq r(t)$ para cada t) y

$$\beta(t) = |\Phi(t)^{-1}|\ \|\Phi_t\|_1 = 2\cdot 4 = 8$$

Entonces las hipótesis del teorema 1 son en este caso

$$\|\tilde{B}\|_{[t-r(t),t]}r(t) = 4r(t) \leq \frac{1}{3} \qquad \text{para} \quad t \geq t_0$$

$$\int^{\infty} \lambda(s)ds = \int^{\infty} 128r(s)ds < \infty$$

Luego si para t suficientemente grande

$$r(t) < \frac{1}{12}$$

y

$$\int^{\infty} r(s)ds < \infty.$$

Entonces por teorema 1 existe una solución Z del sistema (52) tal que cuando $t \to \infty$

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)(c + o(\int_{t_0}^{\infty} r(s)ds)).$$

Luego la ecuación (50) tiene soluciones $y_\pm$ tal que cuando $t \to \infty$

$$y_\pm(t) = e^{\pm it}(1 + o(\int_t^{\infty} r(s)ds))$$

$$y'_\pm(t) = \pm ie^{\pm it}(1 + o(\int_t^{\infty} r(s)ds))$$

Aplicación 2: Consideremos la ecuación lineal escalar

$$y"(t) = y(t - r(t)) \tag{4.55}$$

la escribiremos en la forma

$$y"(t) - y(t) = -\Delta y(t). \tag{4.56}$$

Haciendo la transformación

$$z_1 = y$$

$$z_2 = y'$$

La ecuación (56) se puede escribir como el sistema

$$Z' = AZ + B\Delta Z \tag{4.57}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \qquad Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},$$

siguiendo el esquema del ejercicio 1 tenemos que

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental del sistema lineal ordinario asociado a (57),

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X(t)$$

Denotaremos

$$\tilde{B}(t) = |\Phi(t)^{-1}B\Phi(t)| + |\Phi(t)^{-1}B\Phi(t-r(t))|$$

y

$$\lambda(t) = \tilde{B}(t)\|\tilde{B}_t\|_1\beta(t)r(t)$$

En este caso tenemos que

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi(t)^{-1}B\phi(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-1} & -e^{-2t} \\ e^{2t} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi(t)^{-1}B\phi(t-r(t)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-r(t)} & -e^{-2t+r(t)} \\ e^{2t-r(t)} & e^{r(t)} \end{pmatrix}$$

Solo para simplicar los cálculos usaremos en este caso la norma para $A = (a_{ij})$

$$|A| = \sup_i \sum |a_{ij}|$$

ya que si tomamos la misma norma que en el caso anterior nos vemos obligados a arrastrar una gran cantidad de constantes, lo que en esencia no cambia las condiciones de existencia para una solución de la ecuación (55).

Tenemos que, para $r(t) \leq \mu$ y para cada t

$$
\begin{aligned}
|\Phi(t)^{-1}B(t)\Phi(t)| &\leq \tfrac{1}{2}\sup_{t\geq 0}\{1+e^{2t}, 1+e^{-2t}\} \\
&\leq \tfrac{1+e^{2t}}{2} \\
|\Phi(t)^{-1}B(t)\Phi(t-r(t))| &\leq \tfrac{1}{2}\sup_{t\geq 0}\{e^{-r(t)}+e^{-2t+r(t)}, e^{2t-r(t)}+e^{r(t)}\} \\
&\leq \tfrac{e^{2t}+e^{\mu}}{2}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}(t) &\leq e^{2t}+\tfrac{(1+e^{\mu})}{2} \\
\|\tilde{B}_t\|_1 &\leq \sup_{-\mu\leq\sigma\leq 0}(e^{2t}+\tfrac{(1+e^{\mu})}{2}) \leq e^{2t}+\tfrac{(1+e^{\mu})}{2}
\end{aligned}
$$

y

$$
\beta(t) = |\Phi(t)^{-1}|\ \|\Phi_t\|_1 \leq 2e^t(e^t+e^{-t-\mu})
$$

y tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lambda(t) &\leq r(t)(2e^{6t}+e^{4t}2(1+e^{\mu}+e^{-\mu}) \\
&+ e^{2t}\tfrac{1}{2}(e^{2\mu}+2e^{\mu}+4e^{-\mu}+5)+\tfrac{e^{-\mu}(1+e^{\mu})^2}{2})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si

$$
[e^{2t}+\frac{(1+e^{\mu})}{2}]r(t) < \frac{1}{3} \quad \text{para} \quad t \geq t_0 \tag{4.58}
$$

y

$$
\int_0^{\infty} e^{6t}r(t)dt < \infty \tag{4.59}
$$

si la última integral es finita, se tiene que

$$
\int_0^{\infty} \lambda(t)dt < \infty
$$

ya que el resto de los factores de la suma que acota a λ son todos positivos y menores que e^{6t}.

Entonces si las condiciones (58) y (59) se satisfacen, el sistema (57) tiene una solución Z tal que para cada $t \geq t_0$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} (c + o(\int_t^\infty e^{6s} r(s)ds))$$

Entonces la ecuación (55) tiene soluciones $y_\pm$ tal que

$$y_\pm(t) = e^{\pm t}(1 + o(\int_t^\infty e^{6s} r(s)ds))$$

$$y'_\pm(t) = \pm e^{\pm t}(1 + o(\int_t^\infty e^{6s} r(s)ds))$$

A continuación veremos algunos ejemplos de sistemas lineales en los cuales aplicando los teoremas 1 o 2 podemos determinar la existencia de una solución y su comportamiento asintótico.

Ejemplo 1: Consideremos el sistema

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2+\ell nt}{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2t^2+3}{t^2+1} & e^{-t} \\ 0 & \frac{1}{t^3} & -1 \end{pmatrix} Z(t - \frac{1}{t^2+1}) \tag{4.60}$$

definido para $t \geq 1$.

Podemos escribirlo en la forma

$$Z'(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\ell nt}{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2+1} & e^{-t} \\ 0 & \frac{1}{t^3} & 0 \end{pmatrix} \right] Z(t - \frac{1}{t^2+1})$$

La matriz Λ en este caso es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores característicos son 1, 2 y -1, denotemos por $\lambda_1 = 1$ (λ_1 lo elegimos como λ_k del teorema) entonces para $\lambda_3 = -1$

$$\int_0^t (1-(-1))ds = 2t \to \infty \quad \text{si} \quad t \to \infty$$

y

$$\int_{t_1}^{t_2} (1-(-1))ds = 2(t_2 - t_1) > -1 \qquad t_2 > t_1 \geq 0$$

para $\lambda_2 = 2$

$$\int_{t_1}^{t_2} (1-2)ds = -(t_2 - t_1) < -1 \qquad t_2 > t_1 \geq 0$$

Entonces, de acuerdo a la notación que usamos en el Teorema 1, para $K = 1$ se satisfacen las condiciones (14) y (15). Para este sistema tenemos con respecto al valor propio $\lambda_1 = 1$

$$h(t) = e^{\int_{t_0}^{t} ds} = e^t$$

$$|A| = \sum_{ij} |a_{ij}|$$

tenemos entonces para cada $t \geq t_0$

$$|\Lambda(t)| = 4 \quad \text{luego} \quad \|\Lambda_t\|_1 = 4$$

$$|R(t)| = \frac{\ell n t}{t^2} + \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^3} + e^{-t}$$

por otra parte, $r(t) = \frac{1}{t^2+1}$ entonces podemos tomar $u = \frac{1}{2}$ ya que $0 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{2}$. Luego como cada sumando en $|R(t)|$ para t suficientemente grande es monótono decreciente tenemos que:

$$\|R_t\|_1 = \sup_{-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0} |R(t+\sigma)| \leq \frac{\ell n(t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+1} + \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^3} + e^{-t-\frac{1}{2}}$$

y

$$\|h_t\|_2 = \sup_{-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0} |h(t+\sigma)| = \sup_{-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 0} e^{t+\sigma} = e^t$$

Entonces, las condiciones (24), (25), (26) y (27) del teorema quedan en la forma

$$\|\Lambda\|_{[t-r(t),t]}r(t) = \frac{4}{t^2+1} < \frac{1}{e^5} \qquad t \geq t_0$$

(esta desigualdad se tiene para cada $t > 4e^5$).

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \varphi(t)\|\Lambda_t\|_1 dt &\leq 4\int_1^\infty \tfrac{1}{t^2+1}dt < \infty \\
\int_1^\infty \varphi(t)\|R_t\|_1 &= 4\int_1^\infty \left(\tfrac{\ell n(t-\frac{1}{2})}{t-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+1} + \tfrac{1}{(t-\frac{1}{2})^2} + e^{-t+\frac{1}{2}}\right)\tfrac{1}{t^2+1}dt < \infty \\
\int_1^\infty h(t)^{-1}h(t-r(t))|R(t)|dt &= \int_1^\infty \tfrac{-1}{e^{t^2+1}}\left(\tfrac{\ell nt}{t^2+1} + \tfrac{1}{t^2+1} + \tfrac{1}{t^3} + e^{-t}\right)dt < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe una solución Z del sistema (60) tal que para cada $t \geq t_0$ t_0 suficientemente grande

$$Z(t) = e^t(e_k + o(1))$$

Ejemplo 2: Consideremos el sistema

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3+t+1}{t^2+1} & \frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}} \\ 0 & \frac{t^2-t}{(t+1)(t^2+1)} \end{pmatrix} Z(t - \frac{1}{t^4}) \tag{4.61}$$

definido para $t \geq 1$.

Podemos escribirlo en la forma

$$Z'(t) = \left[\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2+1} & \frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}} \\ 0 & -\frac{1}{t^2+1} \end{pmatrix}\right] Z(t - \frac{1}{t^4})$$

En este caso la matriz diagonal $\Lambda(t)$ tiene valores característicos $\lambda_1(t) = t$ y $\lambda_2(t) = \frac{1}{t+1}$ con respecto al valor propio $\lambda_1(t) = t$ (tomado como $\lambda_k(t)$) tenemos que

$$\int_0^t \left(s - \frac{1}{s+1}\right) ds = \frac{t^2}{2} - \ell n|t+1| \to \infty \quad \text{si} \quad t \to \infty$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(s - \frac{1}{s+1}\right) ds = (\frac{t_2^2}{2} - \frac{t_1^2}{2}) - \ell n|t_2+1| + \ell n|t_1+1| > -1 \quad t_2 > t_1 \geq 0$$

tomemos $K = 1$. Luego los valores característicos de $\Lambda(t)$ satisfacen las condiciones (14) y (15).

Usaremos para $A = (a_{ij})$

$$|A| = \sum_{ij} |a_{ij}|$$

tenemos que

$$h(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$h(t)^{-1} h(t - \frac{1}{t^4}) = e^{-\frac{1}{t^4} + \frac{1}{2t^7}}$$

y para $t \geq t_0$, t_0 suficientemente grande

$$\|\Lambda\|_{[t-\frac{1}{t^4}, t]} \frac{1}{t^4} = (t + \frac{t^3}{t^4 - 1}) \frac{1}{t^4} = \frac{t^4 + t^2 - 1}{t^3(t^4 - 1)} < \frac{1}{e^5}$$

como

$$0 < \frac{1}{t^4} \leq 1 \quad \text{sea} \quad \mu = 1$$

Luego

$$\|h_t\|_2 = \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} e^{\frac{(t+\sigma)^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Así,

$$\varphi(t) = h(t)^{-1} \|h_t\|_2 |\Lambda(t)| r(t) = (t + \frac{1}{t+1}) \frac{1}{t^4} = \frac{t^2 + t + 1}{t^4(t+1)}$$

$$|R(t)| = \frac{2}{t^2 + 1} + \frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}}$$

y

$$\|R_t\|_1 = \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} |R(t + \sigma)| \leq \frac{2}{t^2 - 2t + 2} + \frac{1}{2(t+2)\sqrt{t+1}}$$

$$\|\Lambda_t\|_1 = \sup_{-1 \leq \sigma \leq 0} |\Lambda(t + \sigma)| \leq t + \frac{1}{t}$$

Tenemos que para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
\|\Lambda\|_{[t-\frac{1}{t^4},t]}\tfrac{1}{t^4} &= \tfrac{t^4+t^2-1}{t^3(t^4-1)} < \tfrac{1}{e^5} \\
\int_1^\infty \varphi(t)\|\Lambda_t\|_1 dt &\leq \int_1^\infty (t+\tfrac{1}{t+1})(t+\tfrac{1}{t})\tfrac{1}{t^4}dt \\
&\leq \int_1^\infty \tfrac{5}{t(t+1)}dt < \infty \\
\int_1^\infty \varphi(t)\|R_t\|_1 dt &\leq \int_1^\infty \tfrac{(t^2+t+1)}{t^4(t+1)}[\tfrac{2}{t^2-2t+2} + \tfrac{1}{2(t+2)\sqrt{t+1}}]dt
\end{aligned}$$

como $\frac{t^2+t+1}{t^4(t+1)} \leq 1$ para cada $t \geq 1$. Luego la última integral es

$$\leq \int_1^\infty \frac{2}{t^2-2t+2}dt + \int_1^\infty \frac{dt}{2(t+2)\sqrt{t+1}} < \infty$$

y para la condición (27) tenemos

$$\int_1^\infty h(t)^{-1}h(t-r(t))|R(t)| \leq \int_1^\infty e^{-\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^7}}(\frac{2}{t^2+1} + \frac{1}{2(t+3)\sqrt{t+2}})dt < \infty$$

En consecuencia existe una solución Z de (61) tal que

$$Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}(e_k + o(1)) \quad \text{para} \quad t \geq t_0.$$

Ejemplo 3: Consideremos el sistema

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2t\sqrt{t}} \end{pmatrix} Z(t - \frac{1}{t^2}) \tag{4.62}$$

definido para $t \geq 1$.

Tenemos que $r(t) = \frac{1}{t^2}$, y $0 < \frac{1}{t^2} \leq 1$ para todo $t \geq 1$ luego tomamos $\mu = 1$. Vamos a usar para $A = (a_{ij})$ la norma

$$|A| = \sum_{ij} |a_{ij}|$$

Una matriz fundamental $\Phi(t)$ del sistema ordinario asociado a (62)

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2t\sqrt{t}} \end{pmatrix} Z(t)$$

es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{t}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{t^2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}} \end{pmatrix}$$

Entonces, de acuerdo a la notación del teorema 1 para $t \geq t_0$ suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(t) &\leq \left(\tfrac{1}{t^2} + \tfrac{1}{2t\sqrt{t}}\right) + \frac{e^{\frac{1}{t\sqrt{t^3-1}}}}{t^2}\frac{e^{\frac{2t}{\sqrt{t^3-1}}}}{2t\sqrt{t}} \\
&\leq \tfrac{1}{t^2} + \tfrac{1}{2t\sqrt{t}} + \tfrac{e}{t^2} + \tfrac{e}{2t\sqrt{t}} \\
&\leq \tfrac{2e}{t^2} + \tfrac{e}{t\sqrt{t}} \leq \tfrac{3e}{t\sqrt{t}} \\
\|\tilde{A}_t\|_1 &= \sup_{-1\leq\sigma\leq 0}|\tilde{A}(t+\sigma)| \leq \sup_{-1\leq\sigma\leq 0}\tfrac{3e}{(t+\sigma)\sqrt{(t+\sigma)}} \leq \tfrac{3e}{(t-1)\sqrt{t-1}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= |\Phi(t)^{-1}|\,\|\Phi_t\|_1 = (e^{\frac{1}{t}} + e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}})\sup_{-1\leq\sigma\leq 0}|\Phi(t+\sigma)| \\
&\leq (e^{\frac{1}{t}} + e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}})\sup_{-1\leq\sigma\leq 0}(e^{\frac{1}{t+\sigma}} + e^{\frac{-1}{\sqrt{t+\sigma}}}) \\
&\leq (e^{\frac{1}{t}} + e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}})(e^{\frac{1}{t-1}} + e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}}) \\
&\leq 2e^{\frac{1}{t}}\cdot 2e^{\frac{1}{t-1}} = 4e^{\frac{2t-1}{t(t-1)}}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \tilde{A}(t)\|\tilde{A}_t\|_1\beta(t)r(t) \\
&\leq \tfrac{3e}{t\sqrt{t}}\cdot\tfrac{3e}{(t-1)\sqrt{t-1}}\cdot 4e^{\frac{2t-1}{t(t-1)}}\tfrac{1}{t^2} \\
&= \frac{36e^2e^{\frac{2t-1}{t(t-1)}}}{t^3(t-1)\sqrt{t^2-t}} \leq \frac{36e^4}{t^3(t-1)\sqrt{t^2-t}}
\end{aligned}$$

y

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{36e^4}{t^3(t-1)\sqrt{t^2-t}}dt < \infty$$

Luego se satisface la condición (6) del teorema 1. La condición (5) , para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}\|_{[t-r(t),t]}r(t) &= \|\tilde{A}\|_{[t-\frac{1}{t^2},t]}\frac{1}{t^2} \\ &\leq \frac{3e}{(t-\frac{1}{t^2})\sqrt{t-\frac{1}{t^2}}}\frac{1}{t^2} \\ &\leq \frac{3et^3}{(t^3-1)\sqrt{t^3-1}} \cdot \frac{1}{t^2} \\ &\leq \frac{3et}{(t^3-1)\sqrt{t^3-1}} < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una solución del sistema (62) $Z(t)$ tal que si $t \to \infty$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{-1/t} & 0 \\ 0 & e^{1/\sqrt{t}} \end{pmatrix} (c + o(1)) \tag{4.63}$$

con c vector constante. Más aún, toda solución del sistema (62) satisface (63) cuando $t \to \infty$.

Bibliografía

[B] R. Bellman, K. Cooke, "Differential-Difference Equations", Academic Press. New York, 1963.

[C] E. Coddington, N. Levinson, "Theory of Ordinary Differential Equations". TATA Mc Graw-Hill Publishing C.O. New Delhi 1955.

[C-1] K. Cooke, Functional differential equations with asymptotically vanishing lag. Rend. Circ. Mat. Palermo 16 (1967), 39-56.

[C-2] W. A. Coppel, "Dichotomies in Stability Theory". Springer-Verlag, New York, 1978.

[C-3] K. Cooke, Asymptotic equivalence of an ordinary and a functional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 51 (1) 1975, 187-207.

[D] J. Dugundji, "Topology". Allyn and Bacon, Boston 1965.

[D-1] R. Driver, "Ordinary and Delay Differential Equations". Springer-Verlag, New York, 1977.

[D-2] N. Dunford, J. T. Schwartz, "Linear Operators". Interscience Publishess, New York, 1963. J. M. A. A.

[E] R. E. Edwards, "Functional Analysis". Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[K] M. Kells, "Ecuaciones Diferenciales Elementales", Mc Graw-Hill Book Company, INC New York, 1965.

[K-1] T. Krisztin, On stability properties for one-dimensional functional differential equations. Funkcialaj Ekvacioj. Vol. 34 (2), 1991.

[O] O. Arino, I. Gyori and A. Jawhari, Oscillations criteria in delay equations, J. Diff. Eqs. 53 (1984), 115-123.

[P] M. Pinto, Asymptotic integration of the functional differential equation $y'(t) = a(t)y(t - r(t, y))$. J.Math. Anal. Appl. (To appear)

[Q] Q. Huang, Comparison theorems for first order retarded functional differential equations and their applications. Differential and Integral Equations, Vol. 4 (5), 1991.

[S-1] A. Stokes, The applications of a fixed point theorem to a variety of nonlinear stability problems, Contribution to the theory of Nonlinear Oscillations, Vol. 5 pp. 173-184.

[S-2] A. Stokes, Functional analysis and some fixed point problems. Dissertation, Univ. of Notre dame, 1958.

[T] F. Treves, "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels". Academic Press, New York, 1967.

[Y] T. Yoneyama, Uniform asymptotic stability for n-dimentional delay differential equations. Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 34 (3) 1991. pp. 495-504