COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESCALARES DE TIPO POINCARÉ DE ORDEN 2 Y 3

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por

Pablo Figueroa Salgado

Diciembre de 2003

Director de Tesis: Dr. Manuel Pinto Jiménez

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato.

PABLO SALVADOR FIGUEROA SALGADO

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Matemática en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día ....

Director de Tesis:

Dr. Manuel Pinto ....

Comisión de Evaluación de la Tesis:

Dr. Rolando Pomareda Rodríguez ....
Presidente

Dr. Rodrigo Bamón Cabrera ....

Dr. Jorge Soto Andrade ....

Índice General

Resumen

Consideramos la ecuación diferencial lineal escalar

$$y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0$$

y estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones bajo las condiciones $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, donde λ_i, $i = 1, 2$ son las raíces del polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ y $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $i = 0, 1$. Obtenemos los resultados dados por Poincaré y Perron, y mejoramos la fórmula asintótica. Además, con las técnicas usadas se deducen teoremas asintóticos muy generales. También mostramos un resultado cuando $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2$, bajo condiciones sobre las perturbaciones más generales que $r_i \in L^1$.

De la misma manera, para la ecuación diferencial lineal escalar

$$y^{(3)} + (a_2 + r_2(t))y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0$$

obtenemos los resultados dados por Poincaré y Perron, y además mejoramos la fórmula asintótica. Las condiciones son análogas al caso anterior: $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, donde λ_i, $i = 1, 2, 3$ son las raíces del polinomio $\widetilde{P}(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ y $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $i = 0, 1, 2$.

Abstract

We consider the scalar linear differential equation

$$y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0$$

and we study the asymptotic behavior of its solutions under conditions: $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, where λ_i, $i = 1, 2$ are the roots of the polinomial $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ and $r_i \to 0$ as $t \to \infty$ for $i = 0, 1, 2$. We recover results due to Poincaré and Perron, and we improve the asymptotic formula. Furthermore, with the idea used we obtain more general asymptotic theorems. We show a result when $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2$ and more general conditions than $r_i \in L^1$.

In the same way, for the scalar linear differential equation

$$y^{(3)} + (a_2 + r_2(t))y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0,$$

we recover results due for Poincaré and Perron, and we improve the asymptotic formula The conditions are : $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, where λ_i, $i = 1, 2, 3$ are the roots of the polinomial $\widetilde{P}(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ and $r_i \to 0$ as $t \to \infty$ for $i = 0, 1, 2$.

Abstract

We consider the scalar linear differential equation

$$y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0$$

and we study the asymptotic behavior of its solutions under conditions: $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, where λ_i, $i = 1, 2$ are the roots of the polinomial $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ and $r_i \to 0$ as $t \to \infty$ for $i = 0, 1, 2$. We recover results due to Poincaré and Perron, and we improve the asymptotic formula. Furthermore, with the idea used we obtain more general asymptotic theorems. We show a result when $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2$ and more general conditions than $r_i \in L^1$.

In the same way, for the scalar linear differential equation

$$y^{(3)} + (a_2 + r_2(t))y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0,$$

we recover results due for Poincaré and Perron, and we improve the asymptotic formula The conditions are : $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, where λ_i, $i = 1, 2, 3$ are the roots of the polinomial $\widetilde{P}(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ and $r_i \to 0$ as $t \to \infty$ for $i = 0, 1, 2$.

Introducción

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea escalar de orden n

$$x^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)} = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes a_i son constantes. Diremos que la ecuación

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + r_i(t)) y^{(i)} = 0 \tag{2}$$

es una *perturbación* de (1) ó que las funciones r_i, $i = 1, \ldots, n-1$ son las *perturbaciones* de la ecuación, con r_i localmente integrables.

En 1885, Poincaré [12], estableció la existencia de una solución y de la ecuación (2) tal que y'/y converge cuando $t \to \infty$, bajo las hipótesis: todas las raíces λ_i, $i = 1, \ldots, n$ de la ecuación

$$\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = 0 \tag{3}$$

tienen parte real distinta y $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$, para $i = 0, \ldots, n-1$. Perron [9], a principios del siglo XX, mejoró este resultado, bajo las mismas hipótesis, asegurando la existencia de n soluciones y_i, $i = 1, \ldots, n$ de la ecuación (2) tales que y_i'/y_i converge a λ_i cuando $t \to \infty$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Sin embargo, en ambos casos no dan una fórmula más precisa para el comportamiento asintótico de las soluciones.

Una manera de estudiar la ecuación (2) es llevándola a un sistema de ecuaciones diferenciales, es decir,

$$v' = A(t)v,$$

donde A es una matriz $n \times n$ de funciones de $[0, \infty)$ a $\mathbb{C}$ y v es un vector de n coordenadas, y aplicar los distintos resultados que se conocen. Algunos de ellos son los teoremas : de Levinson [3] (teorema 2 en el capítulo 1), de Hartman-Wintner [5, teo. 1.5.1] (teorema 3 en el capítulo 1) y uno de Eastham [5, teo. 1.6.1] (teorema 5 en el capítulo 1). Sin embargo, estos resultados no consideran perturbaciones que tienden a cero. Para estudiar perturbaciones que tienden a cero, en un sistema de ecuaciones diferenciales, hay una nueva técnica (ver [10] y [11]), consistente en un cambio de variables que reduce el orden del sistema, pero a cambio de esto obtenemos una ecuación de Riccati generalizada.

Los resultados antes mencionados (de Levinson y de Hartman-Wintner), consideran sistemas asintóticamente diagonales, es decir, un sistema de la forma

$$v' = (\Lambda(t) + R(t))v, \tag{4}$$

donde $\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$, $R \in L^p$, con $p = 1$ y $p \in (1,2]$ respectivamente; y Λ cumple condiciones de dicotomía, distintas en cada uno de los teoremas. Por su parte, Harris y Lutz [8, 1] extienden este resultado para $p \geq 1$, indicando un método para obtener una fórmula para las soluciones. Todos ellos aseguran la existencia de un sistema fundamental de soluciones v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que

$$v_i(t) \exp\Big(- \int_{t_0}^{t} \widetilde{\lambda}_i(s)\, ds \Big) \to e_i, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty;$$

dicho de otra forma

$$v_i(t) = (e_i + o(1)) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \widetilde{\lambda}_i(s)\, ds \Big) \quad \text{cuando } t \to \infty, \tag{5}$$

donde $\widetilde{\lambda}_i = \widetilde{\lambda}_i(\lambda_i, R)$ y e_i es el vector que en su coordenada i-ésima tiene valor 1 y en el resto 0.

Otro teorema importante ya mencionado es de Eastham [5, teo.1.6.1] en el cual se supone que

$$(\lambda_j - \lambda_i)^{-1} R \to 0, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty \quad \text{y} \quad [(\lambda_j - \lambda_i)^{-1} R]' \in L^1, \; i \neq j.$$

Sin embargo, este resultado tiene una desventaja, pues en la fórmula asintótica (5), los $\widetilde{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, n$ son los valores propios de $\Lambda + R$, los cuales podrían ser difíciles de calcular.

Una desventaja de usar esta teoría para estudiar (2), es que al llevarla a un sistema debemos diagonalizar la matriz involucrada (ver secciones 2.4.2 y 3.4.1).

Otra manera de estudiar la ecuación (2), de la cual poco se conoce, es con el cambio de variables $z = (y'/y) - \lambda$, con λ alguna raíz de la ecuación (3) (ver [2, cap. 6]). A partir de esto, llegamos a una ecuación de tipo Riccati de orden $n-1$. Para estudiar esta ecuación es necesario conocer las raíces características de la "parte lineal", que pueden ser encontradas de manera algebraica.

Varios resultados son mostrados por Bellman en [2, cap. 6], usando el cambio de variables anteriormente mencionado, para la ecuación de orden 2

$$y'' \pm (1 + \phi(t))y = 0. \tag{6}$$

No obstante, estudia perturbaciones con condiciones integrables para el caso con signo positivo y perturbaciones que tienden a cero para el otro caso, donde además pide $\phi \in L^2$, y con esto obtiene una fórmula más precisa. También considera la hipótesis $\phi' \in L^1$, que de alguna manera se relaciona con el teorema antes comentado de Eastham. Sin embargo, para la ecuación de orden 3 usa el cambio de variables tipo Riccati, y como no conoce las raíces características de la parte lineal, no obtiene resultados.

En [4] existen resultados para la ecuación de orden 2, específicamente para la ecuación

$$(\psi y')' \pm \varphi y = 0,$$

estableciendo un equivalencia asintótica entre (6) y esta última, para deducir estos resultados aplica el teorema de Levinson.

Hemos estudiado la situación dada por Poincaré y Perron, o sea, la ecuación (2), para los casos $n = 2, 3$; usando una ecuación de Riccati [2, cap. 6] para n=2 y una ecuación que llamamos de tipo Riccati para $n=3$. Hemos obtenido una fórmula más explícita y precisa para el comportamiento asintótico de las soluciones de (2).

Algunas de las hipótesis que consideramos para el caso $n=2$ son que $\mathrm{Re}(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$ ó $\mathrm{Re}(\lambda_2-\lambda_1)=0$, donde λ_1 y λ_2 son las raíces características de (2). Para el caso $n=3$ pedimos que las raíces características, λ_1, λ_2 y λ_3, de (2) tengan partes reales distintas, o sea, $\mathrm{Re}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$ para todo $i\neq j$. En otras palabras, se tiene que para cada i, el conjunto $\mathcal{N}(i)=\{1,2,3\}\setminus\{i\}$ se escriba como unión de dos conjuntos disjuntos, $\mathcal{N}_1(i)$ y $\mathcal{N}_2(i)$, tales que $\mathrm{Re}(\lambda_j-\lambda_i)>0$, si $j\in\mathcal{N}_1(i)$; y $\mathrm{Re}(\lambda_j-\lambda_i)<0$, si $j\in\mathcal{N}_2(i)$.

Junto con estas condiciones están las distintas perturbaciones : $r_i\to 0$ cuando $t\to\infty$, $r_i\in L^p$ o r_i condicionalmente integrable, $i=0,\ldots,n-1$, para el primer caso. Para el caso $n=2$ y $\mathrm{Re}(\lambda_2-\lambda_1)=0$ es necesario manejar cuidadosamente cada término, pues aparecen expresiones de la forma e^{it}. Sin embargo, hemos obtenido un resultado que considera condiciones más generales que $r_i\in L^1$, llevando la ecuación a un sistema de ecuaciones y usando una idea de Farkas [6] en la ecuación de Riccati generalizada.

Por otro lado, la ecuación (1) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma $x_i(t)=e^{\lambda_i t}$, $i=1,2,\ldots,n$ con λ_i raíz de (3), cuando las raíces son todas distintas. Luego, para la ecuación (2) con $n=2,3$ se tendrá un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_i(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\widehat{\lambda}_i(s)\,ds\right),$$

donde $\widehat{\lambda}_i=\widehat{\lambda}_i(\lambda_i,\mathcal{R})$, con $\mathcal{R}=\{r_i\}_{i=0}^{n}$. Dependiendo de la condición que satisfagan las perturbaciones r_i, $i=0,\ldots,n$ podemos conocer de manera bastante precisa el comportamiento asintótico de $\widehat{\lambda}_i$. Por ejemplo, hemos obtenido una fórmula explícita para el caso $r_i\in L^p$ para cualquier $p\geq 1$, mejorando el método indicado por Harris y Lutz.

El trabajo esta estructurado de la siguiente manera. En el primer capítulo aparecen los teoremas más importantes en la teoría de integración asintótica en sistemas de ecuaciones diferenciales como son el teorema de Levinson (teorema 2 del capítulo 1) y el de Hartman-Wintner (teorema 3 del capítulo 1). Además, se muestra una nueva forma de estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales asintóticamente diagonal. Esta forma es a través de una ecuación de Riccati generalizada. Con esta herramienta se mejora el teorema de Perron [7](teorema 1 del capítulo 1) y el resultado dado por Harris y Lutz (teorema 4 del capítulo 1). Todo lo mostrado en este capítulo ayuda a comprender de que forma se estudia la ecuación (2) y que tipo de resultados esperamos conseguir.

En el segundo capítulo mostramos los resultados conseguidos para la ecuación de orden 2, es decir, la ecuación (2) para $n=2$. Estos se consiguen de dos maneras: usando la teoría presentada en el capítulo 1 y la otra es usando una ecuación de Riccati que se obtiene con el cambio de variables $z=(y'/y)-\lambda$, con λ alguna raíz de la ecuación (3) para $n=2$. Esta última sigue las ideas presentadas en [2, cap. 6] y en el capítulo 1 para la ecuación de Riccati, aunque aquí consideramos la ecuación (2) para $n=2$ que es más general que la ecuación (6) que aparece en [2, cap. 6] (de hecho, tiene dos perturbaciones) y no usamos tantas condiciones sobre las perturbaciones (ver sección 2.4.1). Sin embargo, una desventaja de esta técnica es que no se deducen buenos resultados para el caso $\mathrm{Re}(\lambda_1-\lambda_2)=0$; aunque en el caso contrario, es decir, $\mathrm{Re}(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$, se deducen mejores resultados que por sistemas. Debido a esta desventaja usamos la teoría de sistemas para obtener resultados en el caso

$\mathrm{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$.

En el capítulo 3 mostramos los resultados conseguidos para la ecuación de orden 3, es decir, la ecuación (2) para $n = 3$. Estos se consiguen de dos maneras: usando la teoría presentada en el capítulo 1 y la otra es usando una ecuación de tipo Riccati que se obtiene con el cambio de variables $z = (y'/y) - \lambda$, con λ alguna raíz de la ecuación (3) para $n = 3$. Sólo consideramos el caso $\mathrm{Re}(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ para todo $i \neq j$. Obtenemos resultados análogos a los mostrados en el capítulo 2, a pesar de la apariencia poco amable de la ecuación de tipo Riccati. Aquí, podemos observar que usando la teoría de sistemas se deducen resultados con fórmulas más complicadas que las que se deducen con la ecuación de tipo Riccati.

Capítulo 1

Integración asintótica

1.1 Introducción

En este capítulo, veremos algunos resultados importantes en integración asintótica para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Algunos de ellos son: el teorema de Levinson, el teorema de Hartman-Wintner, el teorema de Perron y un sistema asintóticamente diagonal con una perturbación que pertenece a L^p con $p \geq 1$, que fue estudiado por Harris y Lutz. Además, mostramos un resultado que mejora el dado por Perron, y para esto introducimos el estudio de una ecuación de Riccati generalizada. Con las técnicas usadas abordamos el problema resuelto por Harris y Lutz y mostramos un resultado distinto que mejora el resultado anteriormente nombrado, ya que obtenemos una fórmula explícita para el comportamiento de las soluciones.

1.2 Preliminares

Primero veremos algunas definiciones para simplificar el lenguaje y un resultado que motiva el estudio de una ecuación de Riccati generalizada.

Consideremos el sistema diferencial

$$y' = A(t)y, \tag{1.1}$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

La norma de una matriz $m \times n$ será

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Definición 1. Sea X la matriz fundamental del sistema (1.1). Diremos que la ecuación (1.1) tiene *Dicotomía Ordinaria* si existe una proyección $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con $P^2 = P$ y un real $K > 0$ tal que

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq K, \quad \forall t \geq s,$$

$$\|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \leq K, \quad \forall t \leq s.$$

Definición 2. Bajo las mismas condiciones que en la definición anterior, diremos que el sistema (1.1) tiene una *Dicotomía Exponencial* si además existe una real $\gamma > 0$ tal que

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad \forall t \geq s,$$

$$\|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{\gamma(t-s)}, \quad \forall t \leq s.$$

En este caso diremos que el sistema tiene dicotomía exponencial con constantes K y γ.

Es claro que dicotomía exponencial implica dicotomía ordinaria. Además, en el caso exponencial, se puede verificar fácilmente que las soluciones acotadas tienden a cero exponencialmente.

Definición 3. Dado el sistema (1.1) con dicotomía ordinaria o exponencial, definimos la función G como

$$G(t,s) = \begin{cases} X(t)PX^{-1}(s), & t \geq s \\ X(t)(I-P)X^{-1}(s), & t < s \end{cases}$$

y la llamaremos *Función de Green* del sistema (1.1).

Además, si decimos que G es la función de Green del sistema (1.1), supondremos implícitamente que el sistema (1.1) tiene dicotomía ordinaria o exponencial.

Por comodidad, diremos que el conjunto de vectores $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$, donde e_k tiene el valor 1 en la coordenada k-ésima y ceros en las otras coordenadas, es la base canónica en $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definimos

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Diremos que una función r definida en $[t_0, \infty)$ es condicionalmente integrable en $[t_0, \infty)$ si existe la integral

$$\int_{t_0}^{\infty} r(s)\, ds$$

pero $r \notin L^1[t_0, \infty)$.

Veamos ahora el siguiente resultado que usaremos más adelante.

Lema 1. *Consideremos el sistema diferencial* (1.1), *donde* $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ *para cada* t. *Entonces se tiene un conjunto de soluciones* y_k, $k = 1, \ldots, n$ *de la forma*

$$y_k(t) = (e_k + L_k v_k(t)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [a_{kk}(s) + \langle A_{kk+1}(s), v_k(s)\rangle]\, ds\right), \tag{1.2}$$

donde $L_k = (l_{ijk})$ *es una matriz* $(n-1) \times n$ *con valores*

$$l_{ijk} = \begin{cases} 1 & i = j < k \\ 1 & i = j+1 > k \\ 0 & \text{en todos los otros casos} \end{cases},$$

y v_k *satisface la ecuación diferencial*

$$v' = A_{k+1k} + (A_{k+1k+1} - a_{kk}I)\, v - \langle A_{kk+1}, v\rangle\, v, \tag{1.3}$$

donde

$$A_{kk+1}(t) = (a_{k1}(t), a_{k2}(t), \ldots, a_{kk-1}(t), a_{kk+1}(t), \ldots, a_{kn}(t)),$$
$$A_{k+1k}(t) = (a_{1k}(t), a_{2k}(t), \ldots, a_{k-1k}(t), a_{k+1k}(t), \ldots, a_{nk}(t))$$

ambos en $\mathbb{R}^{n-1}$ *para cada* t *y* $A_{k+1k+1}(t) = (\tilde{a}_{ijk}(t)) \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ *para cada* t *con*

$$\tilde{a}_{ijk}(t) = \begin{cases} a_{ijk}(t) & 1 \le i,j \le k-1 \\ a_{ij+1k}(t) & 1 \le i \le k-1,\ k \le j \le n-1 \\ a_{i+1jk}(t) & k \le i \le n-1,\ 1 \le j \le k-1 \\ a_{i+1j+1k}(t) & k \le i,j \le n-1 \end{cases}.$$

Demostración: La demostración consiste en verificar que la función dada por (1.2) satisface la ecuación diferencial (1.1). Luego,

$$y_k' = [L_k v_k' + (e_k + L_k v_k)(a_{kk} + \langle A_{kk+1}, v_k\rangle)] \exp\left(\int_{t_0}^t [a_{kk} + \langle A_{kk+1}, v_k\rangle]\right).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} L_k v_k' + (e_k + L_k v_k)(a_{kk} + \langle A_{kk+1}, v_k\rangle) &= L_k A_{k+1k} + L_k(A_{k+1k+1} - a_{kk} I) v_k \\ &\quad - L_k\langle A_{kk+1}, v_k\rangle v_k + e_k a_{kk} + e_k\langle A_{kk+1}, v_k\rangle \\ &\quad + L_k v_k a_{kk} + L_k v_k \langle A_{kk+1}, v_k\rangle \\ &= L_k A_{k+1k} + L_k A_{k+1k+1} v_k + e_k a_{kk} + e_k\langle A_{kk+1}, v_k\rangle \\ &= Ae_k + AL_k v_k = A(e_k + L_k v_k), \end{aligned}$$

ya que $L_k A_{k+1k} + e_k a_{kk} = Ae_k$ y $L_k A_{k+1k+1} v_k + e_k\langle A_{kk+1}, v_k\rangle = AL_k v_k$.

Por lo tanto,

$$y_k' = A(e_k + L_k v_k) \exp\left(\int_{t_0}^t [a_{kk} + \langle A_{kk+1}, v_k\rangle]\right) = Ay_k.$$

□

Observamos que el enunciado es extenso, sin embargo, su demostración es bastante corta. A pesar de esto, este resultado es bastante importante, pues nos da una forma de las soluciones (la ecuación (1.2)) de (1.1) conociendo las soluciones de (1.3). Luego, analizando la ecuación (1.3) se pueden obtener propiedades de (1.1) y (1.2) Se puede considerar que la ecuación (1) separa la diagonal del resto.

Notemos que la ecuación (1.3) es una ecuación de Riccati generalizada.

Se subentiende en el lema que cuando $k = 1$ o $k = n$ los términos $k-1$ y $k+1$ respectivamente, significa que las expresiones con esos subindices no aparecen.

1.3 Operador ℓ

Ahora veremos un operador que se usará en el estudio de la ecuación de Riccati generalizada, en la ecuación de Riccati presentada en el capítulo 2, en la ecuación de tipo Riccati del capítulo 3 y en la demostración de dos de los teoremas asintóticos mostrados en este capítulo. Este operador involucra distintas situaciones que podemos resumir en un sólo resultado.

Lema 2. *Sean*

$$\ell_1(r,\gamma,t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \quad y$$

$$\ell_2(r,\gamma,t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds,$$

para $\gamma > 0$ y r una función definida en $[t_0,\infty)$ y localmente integrable.

1. *Si $r \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces $\ell_1(r,\gamma,\cdot)$, $\ell_2(r,\gamma,\cdot) \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

2. *Si r es condicionalmente integrable en $[t_0,\infty)$ entonces $\ell_1(r,\gamma,\cdot), \ell_2(r,\gamma,\cdot) \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

3. *Si $r \in L^p[t_0,\infty)$, $p \geq 1$ entonces $\ell_1(r,\gamma,\cdot)$, $\ell_2(r,\gamma,\cdot) \to 0$ cuando $t \to \infty$; y $\ell_1(r,\gamma,\cdot)$, $\ell_2(r,\gamma,\cdot) \in L^q[t_0,\infty)$, para todo $q \geq p$.*

Demostración: Primero observemos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, ds = \frac{1-e^{-\gamma(t-t_0)}}{\gamma} \leq \frac{1}{\gamma} \quad \text{y} \quad \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\, ds = \frac{1}{\gamma}$$

para todo $t \geq t_0$, y que ambas desigualdades no dependen de t_0. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$; por la siguiente desigualdad

$$|\ell_1(r,\gamma,t)| = \left|\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, |r(s)|\, ds$$

y

$$|\ell_2(r,\gamma,t)| = \left|\int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds\right| \leq \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\, |r(s)|\, ds.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $T_1 \geq t_0$ tal que $r(s) \leq \gamma\varepsilon/2$ para todo $s \geq T_1$, entonces para $t \geq T_1$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds &= \int_{t_0}^{T_1} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds + \int_{T_1}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_1} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds + \frac{\gamma\varepsilon}{2}\int_{T_1}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, ds \\
&\leq e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{T_1} e^{\gamma s}\, r(s)\, ds + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

escojamos ahora T_2 tal que

$$e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{T_1} e^{\gamma s}\, r(s)\, ds \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para $t \geq T_2$, entonces para $t \geq \max\{T_1, T_2\}$ tenemos

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \leq \varepsilon.$$

Y para la otra integral escogemos T_3 tal que $r(s) \leq \gamma\varepsilon$ para todo $s \geq T_3$ entonces

$$\int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \leq \gamma\varepsilon\int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} ds = \varepsilon$$

para $t \geq T_3$.

Por lo tanto, se concluye que $\ell_1(r,\gamma,\cdot), \ell_2(r,\gamma,\cdot) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

El punto 2 se deduce de lo siguiente

$$\begin{aligned}
\ell_1(r,\gamma,t) &= \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \\
&= e^{-\gamma t}\left(-e^{\gamma s}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} \gamma e^{\gamma s}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\, ds\right) \\
&= e^{-\gamma t}\left(-e^{\gamma t}\int_t^\infty r(s)\, ds + e^{\gamma t_0}\int_{t_0}^\infty r(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} \gamma e^{\gamma s}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\, ds\right) \\
&= -\int_t^\infty r(s)\, ds + e^{-\gamma(t-t_0)}\int_{t_0}^\infty r(s)\, ds + \gamma\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\, ds
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\ell_2(r,\gamma,t) = \int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds &= e^{\gamma t}\left(-e^{-\gamma s}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\Big|_t^\infty - \int_t^\infty \gamma e^{-\gamma s}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\, ds\right) \\
&= e^{\gamma t}\left(e^{-\gamma t}\int_t^\infty r(s)\, ds - \int_t^\infty \gamma e^{-\gamma s}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\, ds\right) \\
&= \int_t^\infty r(s)\, ds - \gamma\int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}\int_s^\infty r(\tau)\, d\tau\, ds.
\end{aligned}$$

Luego, por el punto 1 se tiene.

Para el punto 3 basta suponer que $r(s) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$. Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; por Hölder obtenemos

$$\int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \leq \left(\int_t^\infty e^{\gamma q(t-s)})\, ds\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty [r(s)]^p\, ds\right)^{1/p}$$

y esta función tiende a cero cuando t tiende a infinito. Además,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds &\leq e^{-\frac{\gamma t}{2}}\int_{t_0}^{t/2} r(s)\, ds + \int_{t/2}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\, r(s)\, ds \\
&\leq e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(\frac{t}{2} - t_0\right)^{1/q}\left(\int_{t_0}^\infty [r(s)]^p\, ds\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\int_{t/2}^{t} e^{-\gamma q(t-s)}\, ds\right)^{1/q}\left(\int_{t/2}^\infty [r(s)]^p\, ds\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

que también tiende a cero.

Para ver cada $\ell_i(r,\gamma,\cdot) \in L^q[t_0,\infty)$, $i = 1,2$, $q \geq p$, basta ver que están en $L^p[t_0,\infty)$, ya que son acotadas. Usamos la desigualdad de Minkowski y obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{t_0}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-u)}\, r(u)\, du\right)^p dt\right)^{1/p} &= \left(\int_{t_0}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_0)}\, \tilde{r}(t-s+t_0)\, ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_0)}\left(\int_{t_0}^{\infty}[\tilde{r}(t-s+t_0)]^p\, dt\right)^{1/p} ds \\
&\leq \frac{1}{\gamma}\left(\int_{t_0}^{\infty}[r(s)]^p\, ds\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} r(t), & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{t_0}^{\infty}\left(\int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-u)}\, r(u)\, du\right)^p dt\right)^{1/p} &= \left(\int_{t_0}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_0)}\, r(t+s-t_0)\, ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\gamma(s-t_0)}\left(\int_{t_0}^{\infty}[r(t+s-t_0)]^p\, dt\right)^{1/p} ds \\
&\leq \frac{1}{\gamma}\left(\int_{t_0}^{\infty}[r(s)]^p\, ds\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

□

1.4 Ecuación de Riccati generalizada

Aquí estudiamos una ecuación de Riccati generalizada, aunque algunos resultados se pueden obtener para una ecuación de la forma

$$x' = A(t) + B(t)\, x + f(t,x). \tag{1.4}$$

Estos tienen que ver con el comportamiento asintótico de una solución de la ecuación (1.4).

Lema 3. *Consideremos la ecuación diferencial* (1.4), *con* A, B *y* $f(\cdot, x)$, *para cada* $x \in \mathbb{C}^n$, *definidas sobre* $[t_0, \infty)$ *y localmente integrables, para algún* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Supongamos que :*

1. $f(t, 0) = 0$ *para todo* $t \in [t_0, \infty)$.
2. *Para cada* $M > 0$, *existe* $k_M : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ *tal que para todo* $t \geq t_0$ *se tiene que* $\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \leq k_M(t)\|x_1(t) - x_2(t)\|$, *si* $\|x_1(t)\|$, $\|x_2(t)\| \leq M$ *para todo* $t \geq t_0$.
3. $\mathcal{L}(\|A\|)$, $\mathcal{L}(k_M) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$ *para todo* $M > 0$, *donde*

$$\mathcal{L}(r)(t) = \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\|\, r(s)\, ds,$$

con G *la función de Green del sistema* $y' = B(t)\, y$.

Entonces existe una solución x de la ecuación (1.4) tal que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Aquí denotamos que

$$\mathcal{L}(\|A\|)(t) = \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\| \, \|A(s)\| \, ds.$$

Demostración: Sabemos que G es la función de Green del sistema $y' = B(t)\,y$. Luego, por variación de parámetros tenemos que la ecuación diferencial es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[A(s) + f(s, x(s))] \, ds.$$

Por otro lado, observemos que 1 y 2 implican

$$\|f(t, x_1(t))\| \leq k_M(t) \|x_1(t)\| \leq M k_M(t)$$

tomando $x_2 = 0$.

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{C}[t_0, \infty) = \{g : [t_0, \infty) \to \mathbb{C}^n \mid g \text{ es continua y acotada}\}$ con la norma del supremo, es decir,

$$\|g\|_\infty = \sup\{\|g(t)\| \mid t \in [t_0, \infty)\}.$$

Ahora definamos el operador T como

$$Tx(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[A(s) + f(s, x(s))] \, ds.$$

Claramente T esta bien definida, es decir, dado $x \in \mathcal{C}[t_0, \infty)$ entonces $Tx \in \mathcal{C}[t_0, \infty)$, ya que si $\|x\|_\infty = N$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|Tx(t)\| &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\| \, \|A(s) + f(s, x(s)\| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\| \, \|A(s)\| \, ds + N \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\| k_N(s) \, ds \\
&\leq \mathcal{L}(\|A\|)(t) + N\mathcal{L}(k_N)(t),
\end{aligned}$$

entonces por la hipótesis 3, T esta bien definida. Supongamos que $x \in B[0, M]$ entonces

$$\|Tx(t)\| \leq \mathcal{L}(\|A\|)(t) + M\mathcal{L}(k_M)(t).$$

Además, si x_1, $x_2 \in B$ entonces

$$\begin{aligned}
\|Tx_1(t) - Tx_2(t)\| &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\| \, \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\| \, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\| \, k_M(s) \, \|x_1(s) - x_2(s)\| \, ds \\
&\leq \mathcal{L}(k_M)(t) \, \|x_1 - x_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ahora tomamos t_0 tal que $\mathcal{L}(\|A\|)(t) + M\mathcal{L}(k_M)(t) \leq M$ y $\mathcal{L}(k_M)(t) \leq \alpha < 1$ para todo $t \geq t_0$. Con esto, tenemos que

$$\|Tx\|_\infty \leq M \quad \text{y} \quad \|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \leq \alpha \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

Así, $T(B) \subseteq B$ y T es contractivo. Por lo tanto, existe un único $x \in B$ tal que

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[A(s) + f(s, x(s))]\, ds.$$

Además, $x \to 0$ cuando $t \to \infty$ puesto que

$$\|x(t)\| \leq \mathcal{L}(\|A\|)(t) + M\mathcal{L}(k_M)(t).$$

□

Notemos que este resultado también se obtiene suponiendo que $\mathcal{G}(A) \to 0$ cuando $t \to \infty$, donde

$$\mathcal{G}(A) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\, A(s)\, ds.$$

Ahora apliquemos este resultado a la ecuación de Riccati generalizada

$$x' = A(t) + (B_1(t) + B(t))\, x + \langle C(t), x \rangle x. \tag{1.5}$$

Corolario 1. *Consideremos la ecuación (1.5) con A, B y C definidas en $[t_0, \infty)$ y localmente integrables. Supongamos que $\mathcal{L}(\|A\|), \mathcal{L}(\|B\|)$ y $\mathcal{L}(\|C\|) \to 0$ cuando $t \to \infty$, donde*

$$\mathcal{L}(r)(t) = \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\|\, r(s)\, ds,$$

con G la función de Green del sistema $y' = B_1(t)\, y$. Entonces existe una solución x de la ecuación (1.5) tal que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Demostración: Basta verificar las hipótesis del lema anterior para la función $f(t,x) = B(t)\, x + \langle C(t), x \rangle x$. Luego, tenemos:

1. Claramente $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in [t_0, \infty)$.

2. $$\begin{aligned} \|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| &= \|B(t)(x_1(t) - x_2(t)) + \langle C(t), x_2(t) \rangle\, x_2(t) \\ &\quad - \langle C(t), x_1(t) \rangle\, x_1(t)\| \\ &\leq \|B(t)\|\, \|x_1(t) - x_2(t)\| \\ &\quad + \|C(t)\|\, \|x_1(t) - x_2(t)\|\, (\|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|). \end{aligned}$$

   Así, para cada $M > 0$ tomamos

   $$k_M(t) = \|B(t)\| + 2M\|C(t)\|$$

   y entonces

   $$\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \leq k_M(t)\|x_1(t) - x_2(t)\|$$

   para todo $t \geq t_0$, si $\|x_1(t)\|$ y $\|x_2(t)\| \leq M$ para todo $t \geq t_0$.

3. Además, $\mathcal{L}(k_M) \to 0$ cuando $t \to \infty$ puesto que $\mathcal{L}(k_M) = \mathcal{L}(\|B\|) + 2M\mathcal{L}(\|C\|)$.

$\square$

Ahora veamos un resultado que nos da una estimación de la solución que nos entrega el corolario.

Lema 4. *Consideremos la ecuación (1.5) y las hipótesis del corolario 1. Supongamos que $A \neq 0$, el sistema $y' = B_1(t)y$ tiene dicotomía exponencial con constantes K y γ, dado $0 < \alpha < \gamma$ y $\widetilde{K}$ tal que*

$$0 < \widetilde{K} < \frac{1}{3K + 3KM},$$

donde x es la solución que nos asegura el corolario 1 y $\|x\|_\infty \leq M$, se satisface que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)}\|B(s)\|\,ds &\leq \widetilde{K}, \\ \int_{t}^{\infty} e^{(\gamma-\alpha)(t-s)}\|B(s)\|\,ds &\leq \widetilde{K} \end{aligned} \tag{1.6}$$

y que para C se satisfacen la mismas desigualdades, para todo $t \geq t_0$. Entonces x la solución de (1.5) que nos entrega el corolario 1 satisface que

$$x(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)\|A(s)\|\,ds\right),$$

donde

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & si\; t \geq s \\ e^{\alpha(t-s)} & si\; t \leq s \end{cases}.$$

Demostración: Sabemos que existe una solución x de (1.5) tal que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$, satisface la ecuación

$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[A(s) + B(s)z(s) + \langle C(s), x(s)\rangle x(s)\big]\,ds$$

y $\|x\|_\infty \leq M$.

Tomemos la sucesión dada por $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = Tx_n$ para $n \geq 0$, donde T es el operador definido en la demostración del lema 3 con $f(t,x) = B(t)\,x + \langle C(t), x\rangle x$. Sabemos que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, ya que T es contractivo. Observemos que la condición sobre B equivale a que se satisfaga

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\gamma-\alpha)s}\|B(s)\|\,ds \leq \widetilde{K}e^{(\gamma-\alpha)t}$$

y

$$\int_{t}^{\infty} e^{-(\gamma-\alpha)s}\|B(s)\|\,ds \leq \widetilde{K}e^{-(\gamma-\alpha)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para C. Además, notemos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\gamma+\alpha)(t-s)}\|B(s)\|\,ds \leq \int_{t_0}^{t} e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)}\|B(s)\|\,ds \leq \widetilde{K}$$

y

$$\int_t^{\infty} e^{(\gamma+\alpha)(t-s)}\|B(s)\|\,ds \leq \int_t^{\infty} e^{(\gamma-\alpha)(t-s)}\|B(s)\|\,ds \leq \widetilde{K}$$

puesto que $0 < \gamma - \alpha \leq \gamma \leq \gamma + \alpha$. Así, concluimos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds \leq \widetilde{K}e^{(\gamma+\alpha)t}$$

y

$$\int_t^{\infty} e^{-(\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds \leq \widetilde{K}e^{-(\gamma+\alpha)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para C.

Además, tenemos que $\|G(t,s)\| \leq \rho(t,s)$ para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ donde

$$\rho(t,s) = \begin{cases} Ke^{-\gamma(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ Ke^{\gamma(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}.$$

Ahora probaremos por inducción que para todo $t \geq t_0$

$$|x_n(t)| \leq N\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)\|A(s)\|\,ds\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con

$$N \geq \frac{K}{1 - 3K\widetilde{K} - 3K\widetilde{K}M}.$$

Para $n = 0, 1$ claramente es cierto. Supongamos que es cierto para $n = k$, y veamos que sucede para $n = k+1$, entonces

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\|\,\|A(s) + B(s)z(s) + \langle C(s), x(s)\rangle x(s)\|\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} \rho(t,s)\left[\|A(s)\| + \|B(s)\|\,\|x_k(s)\| + \|C(s)\|\,\|x_k(s)\|^2\right] ds \\
&\leq \int_{t_0}^{\infty} \rho(t,s)\|A(s)\|\,ds + N\int_{t_0}^{\infty} \rho(t,s)\|B(s)\| \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds \\
&\quad + MN\int_{t_0}^{\infty} \rho(t,s)\|C(s)\| \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} Ke^{-\gamma(t-s)}\|A(s)\|\,ds + N\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\left[\|B(s)\|\right. \\
&\quad \left. + M\|C(s)\|\right] ds + \int_t^{\infty} Ke^{\gamma(t-s)}\|A(s)\|\,ds \\
&\quad + N\int_t^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\left[\|B(s)\| + M\|C(s)\|\right] ds
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\|B(s)\| \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &= \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\|B(s)\| \int_{t_0}^{s} e^{-\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\|B(s)\| \int_{s}^{\infty} e^{\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds.
\end{aligned}$$

Para el primer término tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\|B(s)\|\int_{t_0}^{s} e^{-\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &= e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} e^{(\gamma-\alpha)s}e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,d\tau\,ds\\
&= e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{t} e^{(\gamma-\alpha)s}e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,ds\,d\tau\\
&= e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\int_{\tau}^{t} e^{(\gamma-\alpha)s}\|B(s)\|\,ds\,d\tau\\
&\le \widetilde{K}e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|e^{(\gamma-\alpha)t}\,d\tau\\
&= \widetilde{K}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|A(s)\|\,ds;
\end{aligned}$$

y para el segundo tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\|B(s)\|\int_{s}^{\infty} e^{\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &= e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty} e^{(\gamma+\alpha)s}e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,d\tau\,ds\\
&= e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} e^{(\gamma+\alpha)s}e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,ds\,d\tau\\
&\quad + e^{-\gamma t}\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t} e^{(\gamma+\alpha)s}e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,ds\,d\tau\\
&= e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\int_{t_0}^{\tau} e^{(\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds\,d\tau\\
&\quad + e^{-\gamma t}\int_{t}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\int_{t_0}^{t} e^{(\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds\,d\tau\\
&\le e^{-\gamma t}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\widetilde{K}e^{(\gamma+\alpha)\tau}\,d\tau\\
&\quad + e^{-\gamma t}\int_{t}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\widetilde{K}e^{(\gamma+\alpha)t}\,d\tau\\
&= \widetilde{K}\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\\
&\quad + \widetilde{K}\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau.
\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\|B(s)\|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &\le \widetilde{K}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|A(s)\|\,ds\\
&\quad + \widetilde{K}\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)\|A(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\|B(s)\|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &= \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\|B(s)\|\int_{t_0}^{s} e^{-\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds\\
&\quad + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\|B(s)\|\int_{s}^{\infty} e^{\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds,
\end{aligned}$$

y nuevamente para el segundo término tenemos

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}\|B(s)\| \int_s^\infty e^{\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &= e^{\gamma t}\int_t^\infty \int_s^\infty e^{(-\gamma+\alpha)s}e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,d\tau\,ds \\
&= e^{\gamma t}\int_t^\infty \int_t^\tau e^{(-\gamma+\alpha)s}e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\|B(s)\|\,ds\,d\tau \\
&= e^{\gamma t}\int_t^\infty e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\| \int_t^\tau e^{(-\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds\,d\tau \\
&\le \widetilde{K}e^{\gamma t}\int_t^\infty e^{-\alpha\tau}\|A(\tau)\|e^{(-\gamma+\alpha)t}\,d\tau \\
&= \widetilde{K}\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}\|A(s)\|\,ds;
\end{aligned}$$

y para el primer término

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}\|B(s)\| \int_{t_0}^s e^{-\alpha(s-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &= e^{\gamma t}\int_t^\infty \int_{t_0}^s e^{-(\gamma+\alpha)s}e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\|B(s)\|\,d\tau\,ds \\
&= e^{\gamma t}\int_{t_0}^t \int_t^\infty e^{-(\gamma+\alpha)s}e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\|B(s)\|\,ds\,d\tau \\
&\quad + e^{\gamma t}\int_t^\infty \int_\tau^\infty e^{-(\gamma+\alpha)s}e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\|B(s)\|\,ds\,d\tau \\
&= e^{\gamma t}\int_{t_0}^t e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\| \int_t^\infty e^{-(\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds\,d\tau \\
&\quad + e^{\gamma t}\int_t^\infty e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\| \int_\tau^\infty e^{-(\gamma+\alpha)s}\|B(s)\|\,ds\,d\tau \\
&\le e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\widetilde{K}e^{-(\gamma+\alpha)t}\,d\tau \\
&\quad + e^{\gamma t}\int_t^\infty e^{\alpha\tau}\|A(\tau)\|\,\widetilde{K}e^{-(\gamma+\alpha)\tau}\,d\tau \\
&= \widetilde{K}\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau \\
&\quad + \widetilde{K}\int_t^\infty e^{\gamma(t-\tau)}\|A(\tau)\|\,d\tau.
\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}\|B(s)\| \int_{t_0}^\infty \phi(s,\tau)\|A(\tau)\|\,d\tau\,ds &\le \widetilde{K}\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}\|A(s)\|\,ds \\
&\quad + \widetilde{K}\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)\|A(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Y para C tenemos la misma desigualdad. Luego,

$$\begin{aligned}
|x_{k+1}(t)| &\le K\big(1+3\widetilde{K}N+3\widetilde{K}MN\big)\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)\|A(s)\|\,ds \\
&\le N\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)\|A(s)\|\,ds.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$N \geq \frac{K}{1 - 3K\widetilde{K} - 3K\widetilde{K}M}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} N(1 - 3K\widetilde{K} - 3K\widetilde{K}M) &\geq K \\ N - 3K\widetilde{K}N - 3K\widetilde{K}MN &\geq K \\ K + 3K\widetilde{K}N + 3K\widetilde{K}MN &\leq N. \end{aligned}$$

Notemos que $N > 0$ ya que

$$0 < \widetilde{K} < \frac{1}{3K + 3KM},$$

además, tenemos que

$$0 < 3K\widetilde{K} + 3K\widetilde{K}M < 1$$

y con esto $1 - 3K\widetilde{K} - 3K\widetilde{K}M > 0$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq t_0$ tenemos que

$$|x_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds,$$

entonces podemos decir que

$$|x(t)| \leq N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds.$$

Luego,

$$x(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds\right).$$

□

Observemos que la definición de ϕ depende de la proyección P que aparece en la función de Green. Luego, si $P = I$ entonces convendremos en poner

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}.$$

y si $P = 0$ pondremos

$$\phi(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > s \\ e^{\alpha(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}.$$

El siguiente resultado se usará en el caso que no se tenga una dicotomía exponencial. Aquí se ocupa una idea de Farkas [6] para la ecuación (1.4)

Lema 5. *Consideremos la ecuación diferencial* (1.4), *con* A, B *y* $f(\cdot, x)$ *definidas sobre* $[t_0, \infty)$ *para algún* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Supongamos que :*

1. $f(t, 0) = 0$ *para todo* $t \in [t_0, \infty)$.

2. *Para cada* $M > 1$ *existen* $a : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$ *y* $k_M : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ *tales que para todo* $t \geq t_0$ *se tiene que* $\|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \leq k_M(t)\|x_1(t) - x_2(t)\|$*, si* $\|x_1(t)\|$, $\|x_2(t)\| \leq Ma(t)$ *para cada* $t \geq t_0$*, donde*
$$\left\| \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)\, A(s)\, ds \right\| \leq a(t).$$

3. $\int_{t_0}^{\infty} \|G(\cdot, s)\|\, a(s) k_M(s)\, ds = o(a)$ *cuando* $t \to \infty$ *, donde* G *es la función de Green del sistema* $y' = B(t)y$.

Entonces existe una solución x*, de la ecuación* (1.4) *tal que* $x = O(a)$.

Demostración: Sabemos que la ecuación diferencial (1.4) es equivalente a la ecuación integral
$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)[A(s) + f(s, x(s))]\, ds.$$

Por otro lado, observemos que 1 y 2 implican
$$\|f(t, x_1(t))\| \leq k_M(t)\|x_1(t)\| \leq Ma(t)k_M(t)$$
tomando $x_2 = 0$.

Consideremos el espacio vectorial
$$\mathcal{A} = \{g : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n \mid g \text{ es continua y } g = O(a)\}$$
con la norma
$$\|g\|_a = \sup\left\{ \frac{\|g(t)\|}{a(t)} \mid t \in [t_0, \infty) \right\}.$$

Ahora definamos el operador T como
$$Tx(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)[A(s) + f(s, x(s))]\, ds.$$

Claramente T esta bien definida, es decir, $Tx \in \mathcal{A}$ ya que si $\|x\|_a = N$ se tiene
$$\begin{aligned} \|Tx(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)\, A(s)\, ds \right\| + \int_{t_0}^{\infty} \|G(t, s)\|\, \|f(s, x(s))\|\, ds \\ &\leq a(t) + N \int_{t}^{\infty} \|G(t, s)\|\, a(s)k_N(s)\, ds \end{aligned}$$
entonces por la hipótesis 3, T esta bien definida. Supongamos que $x \in B = B[0, M]$ entonces
$$\|Tx(t)\| \leq a(t) + M \int_{t}^{\infty} \|G(t, s)\|\, a(s)k_M(s)\, ds,$$

Además, si x_1, $x_2 \in B$ entonces
$$\begin{aligned} \|Tx_1(t) - Tx_2(t)\| &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t, s)\|\, \|f(s, x_1(s)) - f(x_2(s))\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t, s)\|\, k_M(s)\, \|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{\infty} \|G(t, s)\|\, a(s)k_M(s)\, ds\, \|x_1 - x_2\|_a. \end{aligned}$$

Entonces tomando
$$\int_{t_0}^{\infty} \|G(t,s)\|\, a(s)k_M(s)\, ds \leq K_2$$
para todo $t \geq t_0$, tenemos que
$$\|Tx\|_a \leq 1 + K_2 M \qquad \text{y} \qquad \|Tx_1 - Tx_2\|_a \leq K_2\|x_1 - x_2\|_a$$
Ahora, usando la hipótesis 3, tomamos t_0 tal que $1 + K_2 M \leq M$ y $K_2 < 1$. Con esto tenemos que $T(B) \subseteq B$ y T es contractivo. Por lo tanto, existe un único $x \in B$ tal que
$$x(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[A(s) + f(s, x(s))]\, ds.$$

□

Una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder es el siguiente resultado.

Lema 6. *Dadas $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $p, q \geq 1$ entonces $fg \in L^\mu$ con $\mu = pq/(p+q)$.*

Ahora veamos un caso de la ecuación (1.4). Aquí usaremos el lema 6.

Lema 7. *Consideremos la ecuación (1.4). Supongamos que el sistema $y' = B_1(t)y$ tiene dicotomía exponencial con constantes K y γ, y que $A, B, C \in L^p[t_0, \infty)$. Entonces $x \in L^p[t_0, \infty)$, donde x es la solución que nos entrega el corolario 1. Además, si $p \in (m, m+1]$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, podemos escribir x de la siguiente manera*
$$x(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t),$$
donde
$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)A(s)\, ds,$$
$$\theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)B(s)\theta_1(s)\, ds$$
y para $l > 2$
$$\theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\left(B(s)\theta_{l-1}(s) + \sum_{k=1}^{l-2}\langle C(s), \theta_k(s)\rangle \theta_{l-k-1}(s)\right) ds,$$
con $\theta_k \in L^{p/k}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m \in L^{p/m}$.

Demostración: Por el lema 2, sabemos que si $A, B, C \in L^p[t_0, \infty)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$
$$\int_{t_0}^{\cdot} e^{-\varepsilon(\cdot - s)}\|A(s)\|\, ds, \quad \int_{\cdot}^{\infty} e^{\varepsilon(\cdot - s)}\|A(s)\|\, ds \in L^p[t_0, \infty) \cap \mathcal{C}_0[t_0, \infty).$$
Y para B y C se tiene lo mismo. Luego, se satisfacen las hipótesis del corolario 1 y podemos escoger t_0 de tal forma que se satisfacen las conclusiones de la demostración del corolario 1 y hipótesis del lema 4. Así,
$$x(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)\|A(s)\|\, ds\right),$$

donde

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\alpha(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

y $0 < \alpha < \gamma$.

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} \phi(\cdot, s)\|A(s)\|\, ds \in L^p[t_0, \infty).$$

Así, concluimos que $x \in L^p[t_0,\infty)$. Notemos que x es acotada, luego $x \in L^{\mu}[t_0,\infty)$ con $\mu \geq p$.

Para la otra parte, tenemos que si $p \in (m, m+1]$ ($m \in \mathbb{N}$) con $m \geq 2$ entonces $Bx \in L^{p/2}$ y $\langle C, x\rangle \in L^{p/3}$, por el lema 6. Así, podemos escribir x como

$$x(t) = \theta_1(t) + \psi_2(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\, A(s)\, ds,$$

$\theta_1 \in L^p$ y $\psi_2 \in L^{p/2}$. Luego, para $m = 2$ está demostrado el resultado. Supongamos que $m > 2$, entonces reemplazando x en la ecuación integral tenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[B(s)(\theta_1(s) + \psi_2(s)) + \langle C(s), x(s)\rangle x(s)]\, ds \\ &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\, B(s)\theta_1(s)\, ds + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[B(s)\psi_2(s) + \langle C(s), x(s)\rangle x(s)]\, ds. \end{aligned}$$

Así, podemos escribir x como

$$x(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \psi_3(t),$$

donde

$$\theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)B(s)\theta_1(s)\, ds,$$

$$\psi_3(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[B(s)\psi_2(s) + \langle C(s), x(s)\rangle x(s)]\, ds$$

y $\theta_2 \in L^{p/2}$, $\psi_3 \in L^{p/3}$. En general, usando inducción, supongamos que podemos escribir x como

$$x(t) = \varphi_k(t) + \psi_{k+1}(t), \quad \text{con} \quad \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{k} \theta_l(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)A(s)\, ds,$$

$$\theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)B(s)\theta_1(s)\, ds$$

y para $l > 2$

$$\theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\Big(B(s)\theta_{l-1}(s) + \sum_{k=1}^{l-2}\langle C(s), \theta_k(s)\rangle\theta_{l-k-1}(s)\Big)\, ds,$$

$k < m-1$, $\theta_i \in L^{p/i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ y $\psi_{k+1} \in L^{p/(k+1)}$. Sustituyamos en la ecuación integral para x, luego,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)[B(s)(\varphi_k(s) + \psi_{k+1}(s)) \\
&\quad + \langle C(s), \varphi_k(s) + \psi_{k+1}(s)\rangle(\varphi_k(s) + \psi_{k+1}(s))]\, ds \\
&= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big(B(s)\varphi_k(s) + \langle C(s), \varphi_k(s)\rangle\varphi_k(s)\, ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[B(s)\psi_{k+1}(s) + \langle C(s), \psi_{k+1}(s)\rangle x(s) + \langle C(s), \varphi_k(s)\rangle\psi_{k+1}(s)\big]\, ds.
\end{aligned}$$

Además, $B\,\theta_l \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \le l \le k$; $\langle C, \theta_i\rangle\theta_j \in L^{p/(i+j+1)}$ para todo $i + j \le k$ y $\langle C, \theta_i\rangle\theta_j \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i + j \ge k+1$, ya que $\langle C, \theta_i\rangle \in L^{p/(i+1)}$, $j \ge k+1-i$ luego, $p/j \le p/(k+1-i)$, y como $\theta_j \in L^q$ para todo $q \ge p/j$ (puesto que θ_i es acotada), $\theta_j \in L^{p/(k+1-i)}$.

Por otro lado, $B\psi_{k+1} + \langle C, \psi_{k+1}\rangle x + \langle C, \varphi_k\rangle\psi_{k+1} \in L^{p/(k+2)}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
B\varphi_k + \langle C, \varphi_k\rangle\varphi_k = B\theta_1 &+ \sum_{i=2}^{k-1}\Big(B\theta_i + \sum_{l=1}^{i-1}\langle C, \theta_l\rangle\theta_{i-l}\Big) + B\theta_k + \sum_{l=1}^{k-1}\langle C, \theta_l\rangle\theta_{k-l} \\
&+ \sum_{i+j>k+1}\langle C, \theta_i\rangle\theta_j,
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty} G(B\varphi_k + \langle C, \varphi_k\rangle\varphi_k) &= \int_{t_0}^{\infty} G\Big[B\theta_1 + \sum_{i=2}^{k-1}\Big(B\theta_i + \sum_{l=1}^{i-1}\langle C, \theta_l\rangle\theta_{i-l}\Big) + B\theta_k \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1}\langle C, \theta_l\rangle\theta_{k-l}\Big] + \int_{t_0}^{\infty} G\sum_{i+j>k+1}\langle C, \theta_i\rangle\theta_j \\
&= \theta_2 + \sum_{i=3}^{k}\theta_i + \theta_{k+1} + \int_{t_0}^{\infty} G\sum_{i+j>k+1}\langle C, \theta_i\rangle\theta_j
\end{aligned}$$

donde tomamos $\theta_{k+1} = \int_{t_0}^{\infty} G(B\theta_k + \sum_{l=1}^{k}\langle C, \theta_l\rangle\theta_{k+1-l})$. Así, podemos escribir x de la siguiente manera

$$x(t) = \varphi_k(t) + \theta_{k+1}(t) + \psi_{k+2}(t),$$

donde $\theta_i \in L^{p/i}$, $k = 1, 2, \ldots, k+1$ y $\psi_{k+2} \in L^{p/k+2}$.

De esta manera iteramos el proceso hasta llegar a $k = m-1$ y obtenemos

$$x(t) = \sum_{l=1}^{m-1}\theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde $\theta_k \in L^{p/k}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m \in L^{p/m}$. □

1.5 Teoremas Asintóticos

En esta sección veremos los teoremas asintóticos nombrados y usaremos todo lo visto anteriormente. Para esto consideremos el sistema diferencial

$$y' = (\Lambda(t) + R(t))y \tag{1.7}$$

donde $\Lambda(t)$, $R(t) = (r_{ij}(t)) \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ para cada t, y $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$.

Usando el lema 1 para el sistema (1.7), tenemos un conjunto de soluciones de la forma

$$y_k(t) = (e_k + L_k v_k(t)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s) + \langle R_{kk+1}(s), v_k(s)\rangle]\, ds\right) \tag{1.8}$$

donde L_k es como en el lema 1, pero

$$R_{kk+1}(t) = (r_{k1}(t), r_{k2}(t), \ldots, r_{kk-1}(t), r_{kk+1}(t), \ldots, r_{kn}(t)),$$

$$R_{k+1k}(t) = (r_{1k}(t), r_{2k}(t), \ldots, r_{k-1k}(t), r_{k+1k}(t), \ldots, r_{nk}(t))$$

y $R_{k+1k+1}(t) = (\tilde{r}_{ijk}(t))$ con

$$\tilde{r}_{ijk}(t) = \begin{cases} r_{ijk}(t) & 1 \leq i, j \leq k-1 \\ r_{ij+1}(t) & 1 \leq i \leq k-1,\ k \leq j \leq n-1 \\ r_{i+1j}(t) & k \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq k-1 \\ r_{i+1j+1}(t) & k \leq i, j \leq n-1 \end{cases}.$$

Y la correspondiente ecuación para v_k es

$$v' = R_{k+1k} + (\Lambda_{k+1} - \lambda_k I + R_{k+1k+1} - r_{kk} I)\, v - \langle R_{kk+1}, v\rangle\, v \tag{1.9}$$

donde $\Lambda_{k+1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n)$. Observemos que esta ecuación es de la forma (1.5).

Aquí tenemos una extensión del Teorema de Poincaré para sistemas, de hecho este resultado sirve para demostrar el teorema de Poincaré para ecuaciones diferenciales lineales escalares. La primera parte de este teorema es un resultado de Perron, o sea, las ecuaciones (1.10). La segunda parte es nueva.

Teorema 1. *Consideremos el sistema diferencial* (1.7). *Supongamos que :*

1. *existe $\gamma > 0$ tal que para todo $i \neq k$ $|\operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| \geq \gamma$, para todo $t_0 \leq t$;*
2. *R es localmente integrable $R \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

Entonces existe un sistema fundamental de soluciones $y_k(t) = (y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))$, $k = 1, \ldots, n$ tales que

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{y'_{kk}(t)}{y_{kk}(t)} - \lambda_k(t)\right) = 0 \quad y \text{ para } j \neq k \quad \lim_{t\to\infty} \frac{y_{jk}(t)}{y_{kk}(t)} = 0. \tag{1.10}$$

Más precisamente,

$$y_k(t) = (e_k + \widehat{e}_k o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s) + \langle R_{kk+1}(s), v_k(s)\rangle]\, ds\right),$$

donde $\widehat{e}_k = \sum_{j\neq k} e_j$,

$$v_k(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)\|R_{k+1k}(s)\|\, ds\right),$$

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & si\, t \geq s \\ e^{\alpha(t-s)} & si\, t \leq s \end{cases}.$$

y $0 < \alpha < \gamma$.

Demostración: Por el lema 1 tenemos un sistema de soluciones de la forma (1.8) y v_k satisface la ecuación (1.9). Luego, debemos analizar la ecuación para v_k y concluir el resultado. La ecuación para v_k tiene la forma de la ecuación (1.5), con $A = R_{k+1k}$, $B_1 = \Lambda_{k+1} - \lambda_k I$, $B = (R_{k+1k+1} - r_{kk}I)$ y $C = R_{kk+1}$; entonces para cada $k = 1, \ldots, n$ basta verificar las condiciones del corolario 1 para tener existe v_k tal que $v_k \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Consideremos el sistema diagonal $x' = B(t)x$, luego por la condición 1 se tiene que este sistema tiene dicotomía exponencial con constantes K y γ. Sea G la función de Green del sistema, entonces debemos verificar que $\mathcal{L}(\|A\|), \mathcal{L}(\|B\|)$ y $\mathcal{L}(\|C\|) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Notemos que

$$\mathcal{L}(\|A\|)(t) \leq K[\ell_1(\|A\|, \gamma, t) + \ell_2(\|A\|, \gamma, t)],$$

donde ℓ_i, $i = 1, 2$ son los operadores del lema 2; y se tiene la misma desigualdad para B y C. Luego, por la condición 2 y el lema 2 se cumplen las hipótesis del corolario 1 para la ecuación (1.9). Por lo tanto, se concluye que existe v_k tal que $v_k \to 0$ cuando $t \to \infty$. Además, tenemos que

$$y_{kk}(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s) + \langle R_{kk+1}(s), v_k(s)\rangle]\, ds\right)$$

y para $j \neq k$

$$y_{jk}(t) = o(1) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s) + \langle R_{kk+1}(s), v_k(s)\rangle]\, ds\right) = o(1) y_{kk}(t).$$

Así que,

$$\frac{y'_{kk}(t)}{y_{kk}(t)} = \lambda_k(t) + r_{kk}(t) + \langle R_{kk+1}(t), v_k(t)\rangle$$

$$\frac{y_{jk}(t)}{y_{kk}(t)} = o(1) \quad j \neq k$$

y como $R \to 0$ cuando $t \to \infty$, se deduce (1.10).

Para la otra parte, usaremos el lema 4. Se verifica que el sistema $x' = B_1(t)x$ tiene dicotomía exponencial y por el lema 2 se puede escoger t_0 de forma que se satisfagan las desigualdades (1.6) para B y C. Por lo tanto, tenemos que

$$v_k(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)\|R_{k+1k}(s)\|\, ds\right).$$

La independencia lineal se deduce fácilmente usando el segundo límite de la ecuación (1.10) y calculando el wronskiano de las soluciones y_i, $i = 1, \ldots, n$. Luego, tenemos que

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & o(1)y_{22} & \cdots & o(1)y_{nn} \\ o(1)y_{11} & y_{22} & \cdots & o(1)y_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(1)y_{11} & o(1)y_{22} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= y_{11}y_{22}\cdots y_{nn} \begin{vmatrix} 1 & o(1) & \cdots & o(1) \\ o(1) & 1 & \cdots & o(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(1) & o(1) & \cdots & 1 \end{vmatrix} = y_{11}y_{22}\cdots y_{nn}(1 + o(1)).$$

Entonces, existe t_1 tal que $W[y_1, \ldots, y_n](t_1) \neq 0$ y se concluye que y_i, $i = 1, \ldots, n$ forman un sistema fundamental de soluciones. □

Nota. En el caso que tuvieramos que existe k tal que $\mathrm{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) \leq -\gamma$ para todo $t \geq t_0$ y para todo $i \neq k$ entonces podemos decir que

$$v_k(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|R_{k+1k}(s)\|\, ds\right).$$

Análogamente, si existe k tal que $\mathrm{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t)) \geq \gamma$ para todo $t \geq t_0$ y para todo $i \neq k$ entonces podemos decir que

$$v_k(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} \|R_{k+1k}(s)\|\, ds\right).$$

Esto debido a la proyección que aparece en la función de Green de la ecuación $x' = B_1(t)x$, o sea, la ecuación $x' = (\Lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)I)x$.

Otro teorema importante dentro de la integración asintótica es el Teorema de Levinson, que considera perturbaciones absolutamente integrables del sistema diagonal. A través del lema 1 y del estudio de la ecuación (1.9) se puede obtener otra demostración de este Teorema. Sin embargo, la omitiremos.

Teorema 2. *Consideremos el sistema (1). Supongamos que*

1. *para todo $i \neq k$ se tiene que para $t \geq s$*

$$\int_s^t \mathrm{Re}\,(\lambda_i(u) - \lambda_k(u))\, du \leq K_1 \quad y \quad \int_{t_0}^t \mathrm{Re}\,(\lambda_i(u) - \lambda_k(u))\, du \to -\infty \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty$$

o bien

$$\int_s^t \mathrm{Re}\,(\lambda_i(u) - \lambda_k(u))\, du \geq K_2.$$

2. $R \in L^1[t_0, \infty)$.

Entonces existe un sistema de soluciones $y_k(t) = (y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))$ *tales que*

$$y_k(t) = (e_k + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\, ds\right). \tag{1.11}$$

La condición de dicotomía que satisfacen los λ_i la llamaremos *Dicotomía de Levinson.*

Otro teorema que se puede demostrar con la ecuación de Riccati generalizada es el de Hartmann-Wintner, que considera perturbaciones en $L^p[t_0, \infty)$, con $1 < p \leq 2$.

Teorema 3. *Consideremos el sistema diferencial* (1.7). *Supongamos que :*

1. *existe* $\gamma > 0$ *tal que para todo* $i \neq k$ $|\operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| \geq \gamma$ *para todo* $t \geq t_0$*;*
2. $R \in L^p[t_0, \infty)$, $1 < p \leq 2$.

Entonces existe un sistema de soluciones $y_k(t) = (y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))$ *tales que*

$$y_k(t) = (e_k + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s)]\, ds\right). \tag{1.12}$$

A partir de esto, se puede puede estudiar el caso cuando $R \in L^p[t_0, \infty)$ para $p \geq 1$ arbitrario. Recordemos que Harris y Lutz habían obtenido un resultado para este caso. Sin embargo, sólo indican un método como obtener la fórmula. En el siguiente resultado entregamos una fórmula explícita para las soluciones.

Teorema 4. *Consideremos el sistema diferencial* (1.7). *Supongamos que :*

1. *existe* $\gamma > 0$ *tal que para todo* $i \neq k$ $|\operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_k(t))| \geq \gamma$ *para todo* $t \geq t_0$*;*
2. $R \in L^p[t_0, \infty)$, $2 \leq m < p \leq m + 1$.

Entonces existe un sistema de soluciones $y_k(t) = (y_{1k}(t), \ldots, y_{nk}(t))$ *tales que*

$$y_k(t) = (e_k + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s) + \langle R_{kk+1}(s), \theta_{1k}(s) + \cdots + \theta_{mk}(s)\rangle]\, ds\right), \tag{1.13}$$

donde los θ_{ik} *pueden ser obtenidos por las fórmulas*

$$\theta_{1k}(t) = \int_{t_0}^{\infty} G_k(t,s)\, R_{k+1k}(s)\, ds, \quad \theta_{2k}(t) = \int_{t_0}^{\infty} G_k(t,s)\, (R_{k+1k+1}(s) - r_{kk}(s) I)\, \theta_{1k}(s)\, ds,$$

$$\theta_{lk}(t) = \int_{t_0}^{\infty} G_k(t,s)\, (R_{k+1k+1}(s) - r_{kk}(s)I)\theta_{l-1k}(s)\, ds -$$
$$\int_{t_0}^{\infty} G_k(t,s) \sum_{i=1}^{l-2} \langle R_{kk+1}(s), \theta_{ik}(s)\rangle \theta_{l-i-1k}(s)\, ds$$

para $l > 2$.

Demostración: Nuevamente tenemos soluciones de la forma (1.8) y debemos analizar la ecuación (1.9). Tomamos $A = R_{k+1k}$, $B_1 = \Lambda_{k+1} - \lambda_k I$, $B = (R_{k+1k+1} - r_{kk} I)$ y $C = R_{kk+1}$. Verifiquemos las condiciones del corolario 1. Debido a la condición 1, el sistema $x' = B_1(t)x$ tiene dicotomía exponencial. Sea G_k la función de Green del sistema, entonces debemos verificar que $\mathcal{L}(\|A\|), \mathcal{L}(\|B\|)$ y $\mathcal{L}(\|C\|) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Notemos que

$$\mathcal{L}(\|A\|)(t) \leq \ell_1(\|A\|, \gamma, t) + \ell_2(\|A\|, \gamma, t),$$

donde ℓ_i, $i = 1, 2$ son los operadores del lema 2; y se tiene la misma desigualdad para B y C. Luego, por la condición 2 y el lema 2 se cumplen las hipótesis del corolario 1 para la ecuación (1.9). Con esto existe v_k tal que $v_k \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Por otro lado, como A, B y $C \in L^p[t_0, \infty)$ tenemos que $v_k \in L^p[t_0, \infty)$ por el lema 7. Pero $v_k \to 0$ cuando $t \to \infty$ entonces $v_k \in L^\mu[t_0, \infty)$ para todo $\mu \geq p$. Además, por el lema 7 podemos escribir v_k como

$$v_k(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_{lk}(t) + \psi_{mk}(t),$$

donde $\theta_{lk} \in L^{p/l}$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$ y están dados por las fórmulas antes puestas; y $\psi_{mk} \in L^{p/m}$. Ahora, si $m < p \leq m+1$ entonces $p/m \leq q$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, $\psi_{mk} \in L^q[t_0, \infty)$, ya que ψ_{mk} es acotada. A partir de esto, podemos escribir

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} \langle R_{kk+1}(s), \psi_{mk}(s)\rangle ds\right) = c + o(1)$$

ya que $\langle R_{kk+1}, \psi_{mk}\rangle \in L^1[t_0, \infty)$. Finalmente, escogemos $c = 1$ y podemos escribir (1.8) en la forma (1.13).

La independencia lineal se deduce fácilmente usando el segundo límite de la ecuación (1.10) y calculando el wronskiano de las soluciones y_i, $i = 1, \ldots, n$. Luego, tenemos que

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+o(1))\psi_1 & o(1)\psi_2 & \cdots & o(1)\psi_n \\ o(1)\psi_1 & (1+o(1))\psi_2 & \cdots & o(1)\psi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(1)\psi_1 & o(1)\psi_2 & \cdots & (1+o(1))\psi_n \end{vmatrix}$$

$$= \psi_1\psi_2\cdots\psi_n \begin{vmatrix} 1+o(1) & o(1) & \cdots & o(1) \\ o(1) & 1+o(1) & \cdots & o(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(1) & o(1) & \cdots & 1+o(1) \end{vmatrix} = \psi_1\psi_2\cdots\psi_n(1+o(1)),$$

donde

$$\psi_k(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_k(s) + r_{kk}(s) + \langle R_{kk+1}(s), \theta_{1k}(s) + \cdots + \theta_{mk}(s)\rangle]\, ds\right).$$

Entonces, existe t_1 tal que $W[y_1, \ldots, y_n](t_1) \neq 0$ y se concluye que y_i, $i = 1, \ldots, n$ forman un sistema fundamental de soluciones. □

Otro teorema que mencionaremos es uno de Eastham, que sigue la ideas del teorema de Levinson. Además, considera perturbaciones que tienden a cero, pero con una condición que relaciona la perturbación con los λ_i=

Capítulo 2

Ecuación de orden 2

2.1 Introducción

En este capítulo veremos los resultados obtenidos para la ecuación de orden 2. Estos se obtienen de dos maneras, la primera es con un cambio de variables que reduce el orden y la otra es llevar la ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales y usar la teoría presentada en el capítulo 1. Nuevamente necesitamos estudiar una ecuación de Riccati. La situación que consideraremos es cuando las raíces características de la ecuación no perturbada son distintas. Además, se tienen dos casos que son: raíces características con parte real distinta y raíces características con parte real igual. Para el caso partes reales distintas aparecen varios resultados y para partes reales iguales uno.

2.2 Preliminares

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden 2

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0, \tag{2.1}$$

donde a_0, $a_1 \in \mathbb{R}$. Diremos que el polinomio P, dado por $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, es el polinomio característico de la ecuación (2.1). Si λ_i, $i = 1, 2$ son las raíces de P entonces diremos que λ_i, $i = 1, 2$ son raíces caraterísticas de la ecuación (2.1).

Tomemos ahora una perturbación de esta ecuación de la forma

$$y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0, \tag{2.2}$$

donde r_0 y r_1 son funciones definidas en un intervalo de la forma $[t_0, \infty)$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y localmente integrables.

Lema 8. *Consideremos la ecuación (2.2) y supongamos que las raíces características, λ_i, $i = 1, 2$, de (2.1) son distintas, entonces se tiene dos soluciones de la forma*

$$y_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]\, ds\right), \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

donde z_i, $i = 1, 2$ satisfacen respectivamente las ecuaciones

$$z_i' + r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + (a_1 + 2\lambda_i)z_i + r_1(t)z_i + z_i^2 = 0.$$

Demostración: La demostración consiste en verificar que y_i, $i = 1, 2$ satisfacen la ecuación (2.2). Pongamos

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda + z(s)]\, ds\right)$$

para simplificar la notación, donde λ es raíz característica de (2.1). Luego,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda + z(s)]\, ds\right)(\lambda + z(t)) \\ &= y(t)(\lambda + z(t)) \\ y''(t) &= y(t)(\lambda + z(t))^2 + y(t)z'(t), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y'' + (a_1 + r_1)y' + (a_0 + r_0)y &= y(\lambda + z)^2 + yz' + (a_1 + r_1)y(\lambda + z) + (a_0 + r_0)y \\ &= y[(\lambda + z)^2 + z' + (a_1 + r_1)(\lambda + z) + a_0 + r_0]. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} (\lambda + z)^2 + z' + (a_1 + r_1)(\lambda + z) + a_0 + r_0 &= \lambda^2 + 2\lambda z + z^2 + z' + (a_1 + r_1)(\lambda + z) + a_0 + r_0 \\ &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 + z' + r_0 + \lambda r_1 + a_1 z + 2\lambda z \\ &\quad + r_1 z + z^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, y es solución de (2.2). Como las raíces características son distintas tenemos dos ecuaciones para z, dependiendo de λ. Luego, dos soluciones z_i, $i = 1, 2$. □

Este lema presenta de otra manera el cambio de variables $z = \frac{y'}{y} - \lambda_i$, cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Además, suponemos implícitamente la existencia de z_i, $i = 1, 2$.

Nota. Las raíces de P satisfacen $a_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ya que

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

A partir de esto, las ecuaciones que satisfacen z_i, $i = 1, 2$ son respectivamente

$$z_i' = -(r_0(t) + \lambda_i r_1(t)) + (-1)^i(\lambda_1 - \lambda_2)z_i - r_1(t)z_i - z_i^2, \quad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Ahora estudiaremos la ecuación (2.4) para conocer el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (2.2). De hecho, conociendo soluciones de (2.4) para $i = 1, 2$ se obtienen soluciones para la ecuación (2.2).

2.3 Ecuación de Riccati

Aquí estudiaremos una ecuación de Riccati y ocuparemos algunos resultados ya expuestos en el capítulo anterior.

Sabemos que una ecuación de Riccati tiene la forma

$$z' = a(t) + b(t)z + c(t)z^2.$$

Aquí estudiaremos un caso particular de esta ecuación.

Consideremos la ecuación diferencial $x' = \gamma x$ con $\operatorname{Re}\gamma \neq 0$. Definimos la función g como

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases},$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma < 0$, $\gamma = -\alpha$ y

$$g(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > s \\ -e^{\gamma(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma > 0$. Diremos que g es la función de Green de esta ecuación.

Lema 9. *Dados c, $\gamma > 0$ existen constantes M, k_a y $k_b > 0$ que satisfacen*

$$k_a + Mk_b + M^2\frac{c}{\gamma} = M, \quad k_b + 2M\frac{c}{\gamma} < 1.$$

Demostración: Escogemos M tal que $0 < 1 - 2Mc/\gamma$, es decir, M satisface $0 < M < \gamma/(2c)$. Luego, escogemos k_b de forma que $0 < k_b < 1 - 2Mc/\gamma$. Así, se satisface la desigualdad. Teniendo M y k_b fijos, k_a se encuentra de la relación

$$k_a = M - Mk_b - M^2\frac{c}{\gamma},$$

y $k_a > 0$, pues

$$M\frac{c}{\gamma} < 1 - k_b - M\frac{c}{\gamma}.$$

□

Este lema asegura la existencia de las constantes M, k_a y k_b, que se ocuparán en el siguiente resultado.

Lema 10. *Consideremos la ecuación diferencial escalar*

$$z' = a(t) + \gamma z + b(t)z + cz^2, \tag{2.5}$$

donde $c \in \mathbb{R}$, a y b están definidas en $[t_0, \infty)$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re}\gamma \neq 0$. Supongamos que $\mathcal{G}(a)$ y $\mathcal{L}(b)$ existen, y $\mathcal{G}(a)$, $\mathcal{L}(b) \to 0$ cuando $t \to \infty$, donde

$$\mathcal{G}(f)(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)f(s)\,ds \quad y \quad \mathcal{L}(f)(t) = \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)||f(s)|\,ds,$$

con g la función de Green de la ecuación $x' = \gamma x$. Entonces existe una solución z de la ecuación (2.5) tal que $z \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que $c > 0$ y que $\gamma \in \mathbb{R}$.

Sabemos que, por variación de parámetros, la ecuación (2.5) es equivalente a la ecuación integral

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + cz^2(s)\right]\,ds.$$

Además, vemos que $\mathcal{L}(1)(t) \leq 1/|\gamma|$ para todo $t_0 \leq t$ (ver demostración del lema 2 del capítulo 1).

Consideremos el siguiente espacio

$$\mathcal{C}_0[t_0,\infty) = \{f : [t_0,\infty) \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua y } f \to 0 \text{ cuando } t \to \infty\},$$

que denotaremos por $\mathcal{C}_0$ para simplificar. Observemos que $\mathcal{C}_0$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [t_0,\infty)\}$. Entonces definamos el operador T como

$$Tz(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + cz^2(s)\right] ds.$$

Luego, tenemos que $T : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ (ya que, $\mathcal{L}(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \to 0$ cuando $t \to \infty$, por el lema 2), y buscaremos un punto fijo de T en algún conjunto invariante. Escojamos M, k_a y k_b como en el lema anterior, dados $c, |\gamma| > 0$, y t_0 tal que $|\mathcal{G}(a)(t)| \leq k_a$ y $\mathcal{L}(b)(t) \leq k_b$ para todo $t \geq t_0$. Sean $B = B[0,M]$ y $z \in B$ entonces para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
|Tz(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\,ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\left|b(s)z(s) + cz^2(s)\right| ds \\
&\leq |\mathcal{G}(a)(t)| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\left[|b(s)|\,|z(s)| + c|z(s)|^2\right] ds \\
&\leq k_a + M\mathcal{L}(b)(t) + cM^2\mathcal{L}(1)(t).
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que para $t \geq t_0$

$$|Tz(t)| \leq k_a + Mk_b + M^2\frac{c}{|\gamma|}.$$

Así, $\|Tz\| \leq M$. Por lo tanto, $Tz \in B$.

Sean $z_1, z_2 \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
Tz_1(t) - Tz_2(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)z_1(s) + cz_1^2(s)\right] ds - \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)z_2(s) + cz_2^2(s)\right] ds \\
&= \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)(z_1(s) - z_2(s)) + c(z_1^2(s) - z_2^2(s))\right] ds.
\end{aligned}$$

Luego, para $t \geq t_0$ se tiene

$$|Tz_1(t) - Tz_2(t)| \leq \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\,|b(s)|\,|z_1(s) - z_2(s)|\,ds + c\int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\,|z_1^2(s) - z_2^2(s)|\,ds.$$

Como $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$ y $|z_1(t) + z_2(t)| \leq 2M$ para todo $t \geq t_0$, tenemos

$$\begin{aligned}
|Tz_1(t) - Tz_2(t)| &\leq \mathcal{L}(b)(t)\|z_1 - z_2\| + 2M\frac{c}{|\gamma|}\|z_1 - z_2\| \\
&\leq \left(k_b + 2M\frac{c}{|\gamma|}\right)\|z_1 - z_2\|.
\end{aligned}$$

Concluimos que, $\|Tz_1 - Tz_2\| \leq (k_b + 2Mc/|\gamma|)\|z_1 - z_2\|$, con $k_b + 2Mc/|\gamma| < 1$. Por lo tanto, tenemos que T es un operador contractivo de B en B, y como B es cerrado en $\mathcal{C}_0$, que es un espacio de Banach, existe un único $z \in B$ tal que $Tz = z$. Así, tenemos una solución, digamos z, de la ecuación (2.5) tal que $z \to 0$ cuando $t \to \infty$. □

Observemos que si $a, b \to 0$ cuando $t \to \infty$ entonces se satisfacen las condiciones de este lema, usando el lema 2 del capítulo 1, y además $z' \to 0$ cuando $t \to \infty$. De la misma manera, se cumplen las hipótesis de este lema si $a, b \in L^p$ (por el lema 2 del capítulo 1); incluso a puede ser condicionalmente integrable. Por lo tanto, se pueden combinar estas hipótesis, es decir, podemos tomar $a \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $b \in L^p$, por ejemplo.

El resultado anterior nos da la primera aproximación al estudio de las soluciones de (2.5). Sin embargo, necesitamos conocer una aproximación mejor para caracterizar la solución que nos entrega este lema. En busca de eso, tenemos los siguientes resultados.

Corolario 2. *Consideremos la ecuación* (2.5)*, las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 10. Además, supongamos que* $\operatorname{Re}\gamma = -\alpha < 0$*,* $a \neq 0$*, dado* $0 < \beta \leq \alpha/2$ *y* K *tal que*

$$0 < K < \frac{\alpha - \beta - Mc}{\alpha - \beta},$$

se satisface que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\, ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$*. Entonces* z *la solución de* (2.5) *dada por el lema 10 satisface que*

$$z(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right).$$

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que $c > 0$ y que $\gamma \in \mathbb{R}$.

Sabemos que existe una solución z de (2.5) tal que $z \to 0$ cuando $t \to \infty$, satisface la ecuación

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + cz^2(s)\right] ds$$

y $\|z\| \leq M$. En este caso,

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}.$$

Luego, la ecuación que satisface z es

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\left[a(s) + b(s)z(s) + cz^2(s)\right] ds.$$

Tomemos la sucesión dada por $z_0 = 0$ y $z_{n+1} = Tz_n$ para $n \geq 0$, donde T es el operador definido en la demostración del lema 10. Sabemos que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$, ya que T es contractivo. Observemos que la condición sobre b equivale a

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)|\, ds \leq Ke^{(\alpha-\beta)t}$$

para todo $t \geq t_0$.

Ahora probaremos por inducción que para todo $t \geq t_0$

$$|z_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con

$$N \geq \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta + K(\beta - \alpha) - Mc}.$$

Para $n = 0, 1$ claramente es cierto. Supongamos que es cierto para $n = k$, y veamos que sucede para $n = k + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \left[|a(s)| + |b(s)|\,|z_k(s)| + c|z_k(s)|^2\right] ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|a(s)|\,ds + N \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds \\
&\quad + MNc \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds,
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,d\tau\,ds \\
&= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,ds\,d\tau \\
&= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau \\
&\leq e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau \\
&\leq K e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}\,d\tau \\
&= K \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds;
\end{aligned}$$

y para el otro término tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}\,ds\,d\tau \\
&\leq \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &\leq \left(1 + KN + Mc\frac{N}{\alpha - \beta}\right) \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds \\
&\leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds;
\end{aligned}$$

ya que, como

$$N \geq \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta + K(\beta - \alpha) - Mc},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} N(\alpha-\beta+K(\beta-\alpha)-Mc) &\geq \alpha-\beta, \\ N(\alpha-\beta)+KN(\beta-\alpha)-MNc &\geq \alpha-\beta, \\ N-KN-\frac{MNc}{\alpha-\beta} &\geq 1. \end{aligned}$$

Así,

$$N \geq 1+KN+\frac{MNc}{\alpha-\beta}.$$

Y $N>0$ puesto que, como

$$K<\frac{\alpha-\beta-Mc}{\alpha-\beta},$$

entonces

$$\alpha-\beta+K(\beta-\alpha)-Mc>0.$$

Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq t_0$ tenemos que

$$|z_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds,$$

entonces podemos decir que para todo $t \geq t_0$

$$|z(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds.$$

Luego,

$$z(t)=O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right).$$

□

Ahora si $\operatorname{Re}\gamma>0$ en la ecuación (2.5) tenemos un resultado análogo al anterior.

Corolario 3. *Consideremos la ecuación (2.5), las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 10. Además, supongamos que* $\operatorname{Re}\gamma=\alpha>0$, $a\neq 0$, *dado* $0<\beta\leq\alpha/2$ *y* K *tal que*

$$0<K<\frac{\alpha-\beta-Mc}{\alpha-\beta}$$

se satisface que

$$\int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\, ds \leq K$$

para todo $t\geq t_0$. *Entonces* z *la solución de (2.5) dada por el lema 10 satisface que*

$$z(t)=O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right).$$

La demostración de este hecho es análoga al corolario anterior.

Notemos que la elección de β depende de la elección de M, ya que como $Mc < \alpha/2$ necesitamos que $0 < \beta \leq \alpha/2$, para poder escoger $K > 0$. Además, para los casos $a, b \to 0$ cuando $t \to \infty$ ó $a, b \in L^p$ podemos encontrar t_0 tal que se satisfacen las condiciones que aseguran la existencia de $z \in \mathcal{C}_0$ como solución de (2.5) y que, dependiendo del caso ($\operatorname{Re}\gamma < 0$ ó $\operatorname{Re}\gamma > 0$), se cumplan las desigualdades

$$\int_t^\infty e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K$$

ó

$$\int_{t_0}^t e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$, donde

$$0 < K < \frac{\alpha-\beta-Mc}{\alpha-\beta}.$$

El siguiente lema tiene relación con condiciones integrables y nos presenta un desarrollo de la solución de (2.5) como una suma de términos donde cada término tiene una propiedad de integrabilidad.

Lema 11. *Consideremos la ecuación (2.5) y las hipótesis del lema 10. Supongamos que $a, b \in L^p[t_0,\infty)$. Entonces $z \in L^p[t_0,\infty)$, donde z es la solución que nos entrega el lema 10. Además, si $p \in (m, m+1]$ con $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, podemos escribir z de la siguiente manera*

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^\infty g(t,s)a(s)\,ds$$

y para $l > 1$

$$\theta_l(t) = \int_{t_0}^\infty g(t,s)\left(b(s)\theta_{l-1}(s) + c\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(s)\theta_{l-k}(s)\right)ds,$$

con $\theta_k \in L^{p/k}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m \in L^{p/m}$.

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que $\gamma \in \mathbb{R}$. Sabemos que si $a, b \in L^p[t_0,\infty)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\ell_1(\varepsilon, |a|), \quad \ell_2(\varepsilon, |a|) \in L^p[t_0,\infty) \cap \mathcal{C}_0[t_0,\infty).$$

Luego, se satisfacen las hipótesis del lema 10 y podemos escoger t_0 de tal forma que se satisfacen las conclusiones de la demostración del lema 10 y hipótesis de los corolarios 1 y 2, dependiendo del caso ($\gamma < 0$ ó $\gamma > 0$). Así,

$$z(t) = O\left(\int_{t_0}^\infty g_\alpha(t,s)|a(s)|\,ds\right),$$

con $0 < \alpha \leq |\gamma|/2$ y

$$g_\alpha(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

cuando $\gamma < 0$, y

$$g_\alpha(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > s \\ e^{\alpha(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\gamma > 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} g_\alpha(\cdot, s)|a(s)|\, ds \in L^p[t_0, \infty).$$

Así, concluimos que $z \in L^p[t_0,\infty)$. Notemos que z es acotada, luego $z \in L^\mu[t_0,\infty)$ con $\mu \geq p$.

Para la otra parte, tenemos que si $p \in (m, m+1]$ ($m \in \mathbb{N}$) con $m \geq 2$ entonces bz, $z^2 \in L^{p/2}$ y así, podemos escribir z como

$$z(t) = \theta_1(t) + \psi_2(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\, a(s)\, ds,$$

$\theta_1 \in L^p$ y $\psi_2 \in L^{p/2}$. Luego, si $m = 2$ está demostrado el resultado. Supongamos que $m > 2$, entonces reemplazando z en la ecuación integral tenemos

$$\begin{aligned} z(t) &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)(b(s) + c\theta_1(s) + c\psi_2(s))(\theta_1(s) + \psi_2(s))\, ds \\ &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big(b(s)\theta_1(s) + c\big[\theta_1(s)\big]^2\big)\, ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)(b(s) + c\theta_1(s) + cz(s))\psi_2(s)\, ds. \end{aligned}$$

Así, podemos escribir z como

$$z(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \psi_3(t),$$

donde

$$\theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)(b(s)\theta_1(s) + c[\theta_1(s)]^2)\, ds,$$

$$\psi_3(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)(b(s) + c\theta_1(s) + cz(s))\psi_2(s)\, ds$$

y $\theta_2 \in L^{p/2}$, $\psi_3 \in L^{p/3}$. En general, usando inducción, supongamos que podemos escribir z como

$$z(t) = \varphi_k(t) + \psi_{k+1}(t), \quad \text{con} \quad \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{k} \theta_l(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\,ds, \quad \theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Big(b(s)\theta_{l-1}(s) + c\sum_{i=1}^{l-1}\theta_i(s)\theta_{l-i}(s)\Big)\,ds,$$

para $l > 1$, $k < m-1$, $\theta_i \in L^{p/i}$, $i = 1,2,\ldots,k$ y $\psi_{k+1} \in L^{p/(k+1)}$. Sustituyamos en la ecuación integral para z, luego,

$$\begin{aligned} z(t) &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)[b(s) + c\varphi_k(s) + c\psi_{k+1}(s)][\varphi_k(s) + \psi_{k+1}(s)]\,ds \\ &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)\varphi_k(s) + c(\varphi_k(s))^2\right]ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)\psi_{k+1}(s) + c\varphi_k(s)\psi_{k+1}(s) + c\psi_{k+1}(s)z(s)\right]ds. \end{aligned}$$

Además, $b\theta_l \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \le l \le k$; $\theta_i\theta_j \in L^{p/(i+j)}$ para todo $i+j \le k+1$ y $\theta_i\theta_j \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j \ge k+2$, ya que $i \ge k+2-j$ luego, $p/i \le p/(k+2-j)$, y como $\theta_i \in L^q$ para todo $q \ge p/i$ (puesto que θ_i es acotada), $\theta_i \in L^{p/(k+2-j)}$.

Por otro lado, $b\psi_{k+1} + \varphi_k\psi_{k+1} + \psi_{k+1}z \in L^{p/(k+2)}$ y tenemos que

$$b\varphi_k + c(\varphi_k)^2 = \sum_{i=1}^{k-1}\Big(b\theta_i + c\sum_{l=1}^{i}\theta_l\theta_{i-l+1}\Big) + b\theta_k + c\sum_{l=1}^{k}\theta_l\theta_{k+1-l} + c\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} g[b\varphi_k + c(\varphi_k)^2] = \sum_{i=1}^{k-1}\theta_{i+1} + \theta_{k+1} + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} gc\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j}_{\in L^{p/(k+2)}}$$

donde tomamos $\theta_{k+1} = \int_{t_0}^{\infty} g(b\theta_k + \sum_{l=1}^{k}\theta_l\theta_{k+1-l})$. Así, podemos escribir z de la siguiente manera

$$z(t) = \varphi_k(t) + \theta_{k+1}(t) + \psi_{k+2}(t),$$

donde $\theta_i \in L^{p/i}$, $i = 1,2,\ldots,k+1$ y $\psi_{k+2} \in L^{p/k+2}$.

De esta manera iteramos el proceso hasta llegar a $k = m-1$ y obtenemos

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1}\theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde $\theta_k \in L^{p/k}$, $k = 1,2,\ldots,m-1$ y $\psi_m \in L^{p/m}$. □

2.4 Teoremas asintóticos para la ecuación de orden 2

Aquí veremos los resultados para la ecuación de orden 2. Consideraremos sólo la situación cuando las raíces caraterísticas de la ecuación no perturbada (2.1) son distintas. A partir de esto, tenemos dos casos:

1. Las raíces características tienen parte real distinta.

2. Las raíces características tienen parte real igual.

Deduciremos los resultados usando la ecuación de Riccati escalar mostrada en este capítulo. También aplicaremos los resultados presentados en el capítulo 1 a la ecuación, llevádola previamente a un sistema de ecuaciones diferenciales.

2.4.1 Raíces características con parte real distinta

Ahora estamos en condiciones de demostrar una versión generalizada del teorema de Poincaré para la ecuación de orden 2. Para eso usaremos los resultados presentados anteriormente para la ecuación de Riccati.

Teorema 5. *Consideremos la ecuación* (2.2)*. Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$, *donde* λ_i, $i = 1, 2$ *son las raíces características de la ecuación* (2.1)*;*

2. $\mathcal{L}_i(r_0), \mathcal{L}_i(r_1) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$*, para cada* $i = 1, 2$*, donde*

$$\mathcal{L}_1(f)(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\operatorname{Re}\gamma(t-s)}|f(s)|\,ds \quad y \quad \mathcal{L}_2(f)(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\operatorname{Re}\gamma(t-s)}|f(s)|\,ds.$$

Entonces la ecuación (2.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i = 1, 2$, *tales que*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \lambda_i. \tag{2.6}$$

Demostración: Sabemos que la ecuación (2.2) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma (2.3), donde z_i, $i = 1, 2$ satisfacen respectivamente las ecuaciones (2.4); luego tenemos que

$$y_i'(t) = y_i(t)(\lambda + z_i(t)),$$

entonces si demostramos que para cada $i = 1, 2$ existe z_i, tal que $z_i \to 0$, cuando $t \to \infty$, habremos probado el resultado. Además, debemos verificar que $y_i(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$, y así,

$$z_i(t) = \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} - \lambda_i.$$

Usando las hipótesis 1 y 2, tenemos que, para cada $i = 1, 2$, se cumplen las condiciones del lema 10, con $a = -r_0 - \lambda_i r_1$, $b = -r_1$ y $c = -1$. Las ecuaciones para z_i, $i = 1, 2$ son

$$z_1(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s)z_1(s) + z_1^2(s)\right] ds$$

y

$$z_2(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\left[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + r_1(s)z_2(s) + z_2^2(s)\right] ds$$

respectivamente. Así, existen z_i, $i = 1, 2$ tales que $z_i \to 0$, cuando $t \to \infty$. Luego, como z_i esta definida en $[t_0, \infty)$ y $z_i(t) \in \mathbb{C}$ para todo $t \geq t_0$, tenemos que $y_i(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$.

Por lo tanto, hemos demostrado el teorema. □

Observemos que la condición sobre r_0 se puede relajar a $\mathcal{G}_i(r_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2$, donde

$$\mathcal{G}_1(f)(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} f(s)\, ds \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_2(f)(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} f(s)\, ds;$$

aplicando el lema 10 a la ecuación (2.4). Por ejemplo, r_0 podría ser condicionalmente integrable.

Este resultado generaliza el teorema de Poincaré, que pide $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$; y aquí usamos el hecho que $\mathcal{L}(r_i) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, aquí se consideran muchos más casos. Una condición más general que pueden satisfacer las perturbaciones es

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t}^{t+1} |r_i(s)|\, ds = 0.$$

Sin embargo, dependiendo del tipo de perturbación se puede obtener una fórmula mejor. De hecho, para el caso dado por Poincaré tenemos el siguiente resultado.

Nota. Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} e^{-\gamma(s-\tau)} r(\tau)\, d\tau\, ds &= \int_{t_0}^{t}\int_{\tau}^{t} e^{-\gamma(s-\tau)} r(\tau)\, ds\, d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{\gamma\tau} r(\tau) \int_{\tau}^{t} e^{-\gamma s}\, ds\, d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t} e^{\gamma\tau} r(\tau) \left(\frac{-e^{-\gamma s}}{\gamma}\Big|_{\tau}^{t} \right) d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{\gamma\tau} r(\tau) \left(\frac{e^{-\gamma\tau}}{\gamma} - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} r(s)\, ds - \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} r(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty} e^{\gamma(s-\tau)} r(\tau)\, d\tau\, ds = \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t} r(s)\, ds + \frac{1}{\gamma}\int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} r(s)\, ds - \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma(t_0-s)} r(s)\, ds.$$

Teorema 6. *Consideremos la ecuación* (2.2). *Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$, *donde* λ_i, $i = 1, 2$ *son las raíces características de la ecuación* (2.1);

2. $r_i \to 0$ *cuando* $t \to \infty$, *para cada* $i = 0, 1$.

Entonces la ecuación (2.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i = 1, 2$, *tales que satisfacen* (2.6). *Más aún, se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i''(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^2$$

y

$$y_i(t) = (1 + o(1)) e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(\frac{(-1)^i}{\gamma} \int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + r_1(s) z_i(s) + z_i^2(s) \right] ds \right), \quad (2.7)$$

donde

$$z_1(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)|\, ds\right)$$

y

$$z_2(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_2 r_1(s)|\, ds\right),$$

con $0 < \alpha \leq \operatorname{Re}\gamma/2$.

Demostración: Sabemos que $\mathcal{L}_i(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $i = 1, 2$, donde $\mathcal{L}_i$ son los operadores del teorema 5. Así, tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 5 y luego, se tiene la existencia de dos soluciones y_i, $i = 1, 2$ que satisfacen la ecuación (2.6). Además, tenemos que

$$y_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]\, ds\right),$$

donde $z_i \to 0$ cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2$ y satisfacen

$$z_1(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s) z_1(s) + z_1^2(s)\right] ds$$

y

$$z_2(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\left[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + r_1(s) z_2(s) + z_2^2(s)\right] ds$$

respectivamente; entonces

$$\int_{t_0}^{t} z_1(s)\, ds = \frac{-1}{\gamma}\left(z_1(t) + \int_{t_0}^{t}\left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s) z_1(s) + z_1^2(s)\right] ds\right)$$

y

$$\int_{t_0}^{t} z_2(s)\, ds = \frac{1}{\gamma}\left(z_2(t) - z_2(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[r_0(s) + \lambda_2 r_2(s) + r_1(s) z_2(s) + z_2^2(s)\right] ds\right)$$

usando la nota anterior. Luego, por las hipótesis 1 y 2 se cumplen las condiciones de los corolarios 1 y 2, para la ecuación (2.4) (usamos el corolario 1 para z_1 y el otro para z_2), con $b = r_1$, entonces

$$z_1(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)|\, ds\right)$$

y

$$z_2(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_0(s) + \lambda_2 r_1(s)|\, ds\right).$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, escogemos $z_2(t_0)$ de tal forma que se satisfaga

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t} z_2(s)\, ds\right) = (1 + o(1)) \exp\left(\frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t}\left[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + r_1(s) z_2(s) + z_2^2(s)\right] ds\right).$$

Por otro lado,

$$z_i(t) = \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} - \lambda_i$$

y

$$(\lambda_i + z_i(t))^2 + z'(t) = \frac{y_i''(t)}{y_i(t)},$$

luego, como $z_i' \to 0$ cuando $t \to \infty$ queda demostrado el resultado. □

Notemos que para obtener una estimación de z_i, $i = 1, 2$, usamos sólo el hecho que $r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces el resultado anterior se tiene asumiendo que $\mathcal{G}_i(r_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2$ y $r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$. O sea, r_0 puede ser condicionalmente integrable.

Nota. Observemos que la fórmula obtenida aquí también se tiene, salvo por la estimación de z_i, $i = 1, 2$, para el teorema 5. Entonces

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(\frac{(-1)^i}{\gamma}\int_{t_0}^{t}\left[r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + r_1(s)z_i(s) + z_i^2(s)\right] ds\right).$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar un teorema tipo Levinson.

Teorema 7. *Consideremos la ecuación (2.2). Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$, *donde* λ_i, $i = 1, 2$ *son las raíces características de la ecuación* (2.1);

2. $r_i \in L^1$, $i = 0, 1$.

Entonces la ecuación (2.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i = 1, 2$, *tales que satisfacen* (2.6) *y más aún, se tiene que*

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)}.$$

Demostración: Sabemos que $\mathcal{L}_i(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \in L^1$ (por lema 2) para $i = 1, 2$, donde $\mathcal{L}_i$ son los operadores del teorema 5. Así, tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 5 y luego, se tiene la existencia de dos soluciones y_i, $i = 1, 2$ que satisfacen la ecuación (2.6). Además, tenemos que

$$y_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}[\lambda_i + z_i(s)]\, ds\right),$$

donde $z_i \to 0$ cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2$ y satisfacen

$$z_1(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}\left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s)z_1(s) + z_1^2(s)\right] ds$$

y

$$z_2(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}\left[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + r_1(s)z_2(s) + z_2^2(s)\right] ds$$

respectivamente. Entonces probaremos que para cada $i = 1$, 2 $z_i \in L^1$. Usando las hipótesis 1 y 2, vemos que se cumplen las condiciones del lema 11 para la ecuación (2.4) (para $i = 1, 2$) con $p = 1$, $a = -r_0 - \lambda_i r_1$, $b = -r_1$ y $c = -1$. Así, $z_i \in L^1$ y

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)\, ds = k_i + o(1).$$

Sin pérdida de generalidad, podemos escoger k_i tal que $e^{\int_{t_0}^{t} z_i(s)\, ds} = 1 + o(1)$, luego queda demostrado el teorema. □

Otro tipo de teorema es el de Hartman-Wintner, que considera perturbaciones en L^p con $p \in (1, 2]$. Ahora veremos un resultado de este tipo para la ecuación (2.2).

Teorema 8. *Consideremos la ecuación (2.2). Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$, *donde* λ_i, $i = 1, 2$ *son las raíces características de la ecuación (2.1);*

2. $r_i \in L^p$, $i = 0, 1$ *y* $p \in (1, 2]$.

Entonces la ecuación (2.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2$, *tales que satisfacen (2.6) y en particular se tiene*

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(\frac{(-1)^i}{\gamma}\int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_i r_1(s)]\, ds\right).$$

Demostración: Como $\mathcal{L}_i(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \in L^p$ con $p \geq 1$, entonces se cumplen las hipótesis del teorema 5. Así, existen 2 soluciones y_i, $i = 1, 2$, de la ecuación (2.2), de la forma (2.3), donde $z_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ y satisface (2.4), para $i = 1, 2$. Entonces probaremos que $z_i \in L^p$. Usando las hipótesis 1 y 2 se cumplen las condiciones del lema 11, para la ecuación (2.4), así $z_i \in L^p$ y como z_i es acotada, $z_i \in L^\mu$ para todo $\mu \geq p$. A partir de esto, tenemos que $r_1 z_i$, $z_i^2 \in L^1$, ya que si $p \in (1, 2]$ entonces el exponente conjugado $q = p/(p-1) \in [2, \infty)$. Así, para z_i tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_1(s)\, ds &= \frac{-1}{\gamma}\left(z_1(t) + \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s) z_1(s) + z_1^2(s)]\, ds\right) \\
&= \frac{-1}{\gamma}\left(c_1 + o(1) + \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)]\, ds\right) \\
&= \widetilde{c}_1 + o(1) - \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)]\, ds
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_2(s)\, ds &= \frac{1}{\gamma}\left(z_2(t) - z_2(t_0) + \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_1 r_2(s) + r_1(s) z_2(s) + z_2^2(s)]\, ds\right) \\
&= \frac{1}{\gamma}\left(c_2 + o(1) + \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)]\, ds\right) \\
&= \widetilde{c}_2 + o(1) + \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)]\, ds.
\end{aligned}$$

Luego, escogemos $\widetilde{c}_1$ y $\widetilde{c}_2$ de forma que $e^{\widetilde{c}_1 + o(1)} = 1 + o(1)$ y $e^{\widetilde{c}_2 + o(1)} = 1 + o(1)$. □

Podemos generalizar la idea anterior y considerar perturbaciones en cualquier L^p, $p \geq 1$.

Teorema 9. *Consideremos la ecuación (2.2). Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2$, $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$, *donde* λ_i, $i = 1, 2$ *son las raíces características de la ecuación (2.1);*

2. $r_i \in L^p$, $i = 1,2$ y $p \in (m, m+1]$, con $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Entonces la ecuación (2.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1,2$, tales que satisfacen (2.6) y en particular, se tiene

$$y_i(t) = (1+o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(\frac{(-1)^i}{\gamma} \int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + r_1(s) \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l^{(i)}(s) \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{l=2}^{m} \sum_{j=1}^{l-1} \theta_j^{(i)}(s) \theta_{l-j}^{(i)}(s) \right] ds \right),$$

donde

$$\theta_1^{(1)}(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)]\, ds, \quad \theta_1^{(2)}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s)]\, ds,$$

$$\theta_l^{(1)}(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \left(r_1(s)\theta_{l-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(1)}(s)\theta_{l-k}^{(1)}(s) \right) ds$$

y

$$\theta_l^{(2)}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \left(r_1(s)\theta_{l-1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(2)}(s)\theta_{l-k}^{(2)}(s) \right) ds,$$

para $l > 1$.

Demostración: Como $\mathcal{L}_i(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \in L^p$ con $p \geq 1$, entonces se cumplen las hipótesis del teorema 5. Así, existen 2 soluciones y_i, $i = 1,2$, de la ecuación (2.2), de la forma (2.3), donde $z_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ y satisface (2.4), para $i = 1,2$. Entonces probaremos que $z_i \in L^p$. Usando las hipótesis 1 y 2 se cumplen las condiciones del lema 11, para la ecuación (2.4), así $z_i \in L^p$ y como z_i es acotada, $z_i \in L^\mu$ para todo $\mu \geq p$. A partir de esto, tenemos que podemos escribir z_i como

$$z_i(t) = \varphi_m^{(i)}(t) + \psi_m^{(i)}(t), \quad \text{con} \quad \varphi_m^{(i)}(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l^{(i)}(t) \quad \text{donde}$$

$$\theta_1^{(1)}(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)}(r_0(s) + \lambda_1 r_1(s))\, ds,$$

$$\theta_l^{(1)}(t) = -\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \left(r_1(s)\theta_{l-1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(1)}(s)\theta_{l-k}^{(1)}(s) \right) ds$$

para $l > 1$,

$$\theta_1^{(2)}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)}(r_0(s) + \lambda_2 r_1(s))\, ds$$

y para $l > 1$

$$\theta_l^{(2)}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \left(r_1(s)\theta_{l-1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(2)}(s)\theta_{l-k}^{(2)}(s) \right) ds.$$

con $\theta_k^{(i)} \in L^{p/k}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m^{(i)} \in L^{p/m}$. Así, para z_i tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_1(s)\,ds &= \frac{-1}{\gamma}\left(z_1(t) + \int_{t_0}^t \left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s)z_1(s) + z_1^2(s)\right] ds\right) \\
&= \frac{-1}{\gamma}\Big(o(1) + \int_{t_0}^t \big[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s)(\varphi_m^{(1)}(s) + \psi_{m-1}^{(1)}(s)) \\
&\quad + (\varphi_m^{(1)}(s) + \psi_{m-1}^{(1)}(s))^2\big]\, ds\Big), \\
&= \widetilde{c}_1 + o(1) - \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^t \left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + r_1(s)\varphi_m^{(1)}(s) + \sum_{l=2}^m \sum_{j=1}^{l-1} \theta_j^{(1)}(s)\theta_{l-j}^{(1)}(s)\right] ds
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_2(s)\,ds &= \frac{1}{\gamma}\left(z_2(t) - z_2(t_0) + \int_{t_0}^t \left[r_0(s) + \lambda_2 r_2(s) + r_1(s)z_2(s) + z_2^2(s)\right] ds\right) \\
&= \frac{1}{\gamma}\Big(c_2 + o(1) + \int_{t_0}^t \big[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + r_1(s)(\varphi_m^{(2)}(s) + \psi_{m-1}^{(2)}(s)) \\
&\quad + (\varphi_m^{(2)}(s) + \psi_{m-1}^{(2)}(s))^2\big]\, ds\Big) \\
&= \widetilde{c}_2 + o(1) + \frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^t \left[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + r_1(s)\varphi_m^{(2)}(s) + \sum_{l=2}^m \sum_{j=1}^{l-1} \theta_j^{(2)}(s)\theta_{l-j}^{(2)}(s)\right] ds,
\end{aligned}$$

ya que

$$r_1(\varphi_m^{(i)} + \psi_m^{(i)}) + (\varphi_m^{(i)} + \psi_m^{(i)})^2 = r_1\varphi_m^{(i)} + (\varphi_m^{(i)})^2 + r_1\psi_m^{(i)} + 2\varphi_m^{(i)}\psi_m^{(i)} + [\psi_m^{(i)}]^2,$$

$$r_1\psi_m^{(i)} + 2\varphi_m^{(i)}\psi_m^{(i)} + [\psi_m^{(i)}]^2 \in L^1,$$

$$(\varphi_m^{(i)})^2 = \sum_{l=2}^m \sum_{j=1}^{l-1} \theta_j^{(i)}\theta_{l-j}^{(i)} + \sum_{j+k>m} \theta_j^{(i)}\theta_k^{(i)}$$

y

$$\sum_{j+k>m} \theta_j^{(i)}\theta_k^{(i)} \in L^1,$$

puesto que $p/m \leq p/(p-1)$. Así, $\psi_m^{(i)} \in L^{p/(p-1)}$ (notar que $\theta_l^{(i)}, \psi_m^{(i)}$ son acotadas para $i = 1, 2$, $1 \leq l \leq m-1$). Luego, escogemos $\widetilde{c}_1$ y $\widetilde{c}_2$ de forma que $e^{\widetilde{c}_1 + o(1)} = 1 + o(1)$ y $e^{\widetilde{c}_2 + o(1)} = 1 + o(1)$. □

Una afirmación que se ha hecho en todos los teoremas pero que no se ha demostrado es que y_i, $i = 1, 2$ forman un sistema de soluciones. Esto se deduce fácilmente calculando el wronskiano de y_i, $i = 1, 2$

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = y_1(t)y_2(t)\left[\frac{y_2'(t)}{y_2(t)} - \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right].$$

Además, $y_1(t), y_2(t) \neq 0$ para todo $t_0 \leq t$ y

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{y_2'(t)}{y_2(t)} - \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right] = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Luego, existe t_1 tal que $W[y_1, y_2](t_1) \neq 0$. Así, y_i, $i = 1, 2$ son linealmente independientes. Observemos que esto sirve para todos los teoremas.

2.4.2 Resultados vía sistemas

Ahora veremos las fórmulas que se obtienen para la ecuación (2.2) usando la teoría presentada en el capítulo 1. Veremos sólo las fórmulas para los casos $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $r_i \in L^p$ con $p > 2$, debido a que en los otros casos las fórmulas son las mismas.

Tomemos la ecuación (2.2) y llevémosla a un sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y' &= y' \\ (y')' &= -(a_1 + r_1(t))y' - (a_0 + r_0(t))y. \end{aligned}$$

Podemos escribir este sistema de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r_0(t) & -r_1(t) \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

Y con una notación más reducida tenemos

$$\mathbf{y}' = (A + S(t))\mathbf{y}, \tag{2.8}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r_0(t) & -r_1(t) \end{pmatrix}.$$

Como λ_j, $j = 1, 2$ son las raíces características de (2.1) entonces son también los valores propios de la matriz A. Además, como son distintas podemos diagonalizar esta matriz. Sea Q la matriz dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Entonces tomando $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$ obtenemos

$$Q\mathbf{x}' = \mathbf{y}' = (A + S(t))\mathbf{y} = (A + S(t))Q\mathbf{x}.$$

Así,

$$\mathbf{x}' = Q^{-1}(A + S(t))Q\mathbf{x} = (Q^{-1}AQ + Q^{-1}S(t)Q)\mathbf{x}.$$

Pero,

$$Q^{-1}AQ = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda$$

y

$$Q^{-1}S(t)Q = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r_0(t) & -r_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} r_0(t)+\lambda_1 r_1(t) & r_0(t)+\lambda_2 r_1(t) \\ -r_0(t)-\lambda_1 r_1(t) & -r_0(t)-\lambda_2 r_1(t) \end{pmatrix} = R(t).$$

Ahora tenemos el nuevo sistema

$$\mathbf{x}' = (\Lambda + R(t))\mathbf{x}. \tag{2.10}$$

Sobre este aplicaremos los resultados mostrados en el capítulo 1. Pongamos $\gamma = \lambda_1 - \lambda_2$ y que $\operatorname{Re}\gamma > 0$. Suponiendo que $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ tenemos que el sistema (2.10) satisface las condiciones del teorema 1. Luego, existe un sistema de soluciones $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0(s)+\lambda_1 r_1(s)}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{r_0(s)+\lambda_2 r_1(s)}{\lambda_2-\lambda_1}v_1(s)\right] ds\right)$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_2(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0(s)+\lambda_2 r_1(s)}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{r_0(s)+\lambda_1 r_1(s)}{\lambda_1-\lambda_2}v_2(s)\right] ds\right),$$

donde

$$v_1(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_0(s)+\lambda_1 r_1(s)|\, ds\right),$$
$$v_2(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_0(s)+\lambda_2 r_1(s)|\, ds\right),$$

y $0 < \alpha < \operatorname{Re}\gamma$. Y para la ecuación (2.2) tenemos un sistema fundamental y_i, $i = 1, 2$ de soluciones de la forma

$$y_i(t) = (1+o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)}\exp\left(\frac{(-1)^i}{\gamma}\int_{t_0}^{t}\left[r_0(s)+\lambda_i r_1(s) + (r_0(s)+\overline{\lambda}_i r_1(s))v_2(s)\right] ds\right),$$

donde

$$\overline{\lambda}_i = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } i = 2 \\ \lambda_2 & \text{si } i = 1 \end{cases},$$

para $i = 1, 2$.

Ahora, suponiendo que $r_i \in L^p[t_0, \infty)$ para $2 \leq m < p \leq m+1$ tenemos que el sistema (2.10) satisface las condiciones del teorema 4, entonces tiene un sistema fundamental de soluciones $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1+o(1) \\ o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0(s)+\lambda_1 r_1(s)}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{r_0(s)+\lambda_2 r_1(s)}{\lambda_2-\lambda_1}\sum_{k=1}^{m}\theta_{1k}(s)\right] ds\right)$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} o(1) \\ 1+o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_2(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0(s)+\lambda_2 r_1(s)}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{r_0(s)+\lambda_1 r_1(s)}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k=1}^{m}\theta_{2k}(s)\right] ds\right),$$

donde los θ_{ik} pueden ser obtenidos por las fórmulas

$$\theta_{11}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \frac{r_0(s) + \lambda_1 r_1(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} \, ds,$$

$$\theta_{12}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \frac{2r_0(s) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta_{11}(s) \, ds,$$

$$\theta_{1l}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \frac{2r_0(s) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta_{1l-1}(s) \, ds$$
$$- \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-s)} \sum_{i=1}^{l-2} \frac{r_0(s) + \lambda_2 r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} \theta_{1i}(s) \theta_{1l-i-1}(s) \, ds$$

$$\theta_{21}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \frac{r_0(s) + \lambda_2 r_1(s)}{\lambda_2 - \lambda_1} \, ds,$$

$$\theta_{22}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \frac{2r_0(s) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} \theta_{21}(s) \, ds,$$

y

$$\theta_{2l}(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \frac{2r_0(s) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} \theta_{2l-1}(s) \, ds$$
$$- \int_{t}^{\infty} e^{\gamma(t-s)} \sum_{i=1}^{l-2} \frac{r_0(s) + \lambda_1 r_1(t)}{\lambda_2 - \lambda_1} \theta_{2i}(s) \theta_{2l-i-1}(s) \, ds$$

para $l > 2$. Y para la ecuación (2.2) tenemos un sistema fundamental y_i, $i = 1, 2$ de soluciones de la forma

$$y_i(t) = (1 + o(1)) e^{\lambda_i (t - t_0)} \exp\left(\frac{(-1)^i}{\gamma} \int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + (r_0(s) + \overline{\lambda}_i r_1(s)) \sum_{k=1}^{m} \theta_{ik}(s) \right] ds \right).$$

Suponiendo que $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $r_i' \in L^1[t_0, \infty)$ tenemos que el sistema (2.10) satisface las condiciones del teorema ?? entonces existe un sistema fundamental de soluciones $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ de la forma

$$\mathbf{x}_i(t) = (e_i + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu_i(s) \, ds \right),$$

donde μ_i, $i = 1, 2$ son los valores propios de la matriz $\Lambda + R(t)$. Y para la ecuación (2.2) tenemos un sistema fundamental y_i, $i = 1, 2$ de soluciones de la forma

$$y_i(t) = (1 + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu_i(s) \, ds \right).$$

2.4.3 Ejemplos

1. El primer ejemplo que mostraremos, es una perturbación que no está en L^p pero si está en L^q para $q \geq p$. Consideremos la ecuación para $p \geq 1$

$$y'' - \left(1 - \frac{1}{t^{1/p}}\right) y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\gamma = 2$, $r_1 = 0$ y $r_0(t) = 1/t^{1/p}$. Notemos que $r_0 \notin L^p$, pero $r_0 \in L^q$ para $q > p$. Para $1 \leq p < 2$, podemos aplicar el teorema 8. Entonces, existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \frac{1}{s^{1/p}}\, ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \frac{1}{s^{1/p}}\, ds\right).$$

Para $p \geq 2$ podemos aplicar el teorema 9. Tenemos $p+1 \in (m, m+1]$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \left[\frac{1}{s^{1/p}} + \sum_{l=2}^{m}\sum_{j=1}^{l-1} \theta_j^{(1)}(s)\theta_{l-j}^{(1)}(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \left[\frac{1}{s^{1/p}} + \sum_{l=2}^{m}\sum_{j=1}^{l-1} \theta_j^{(2)}(s)\theta_{l-j}^{(2)}(s)\right] ds\right),$$

donde

$$\theta_1^{(1)}(t) = -\int_{t_0}^t e^{-2(t-s)} \frac{1}{s^{1/p}}\, ds, \quad \theta_1^{(2)}(t) = \int_t^\infty e^{2(t-s)} \frac{1}{s^{1/p}}\, ds,$$

$$\theta_l^{(1)}(t) = -\int_{t_0}^t e^{-2(t-s)} \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(1)}(s)\theta_{l-k}^{(1)}(s)\, ds \quad \text{y}$$

$$\theta_l^{(2)}(t) = \int_t^\infty e^{2(t-s)} \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(2)}(s)\theta_{l-k}^{(2)}(s)\, ds,$$

para $l > 1$.

Veamos las fórmulas para algunos valores de p. Para $p = 2$ tenemos

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \left[\frac{1}{s^{1/2}} + \left(\int_{t_0}^s e^{-2(s-\tau)}\tau^{-1/2}\, d\tau\right)^2\right] ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \left[\frac{1}{s^{1/2}} + \left(\int_s^\infty e^{2(s-\tau)}\tau^{-1/2}\, d\tau\right)^2\right] ds\right).$$

Para $p = 3$ tenemos

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{s^{1/2}} + \left(\int_{t_0}^{s} e^{-2(s-\tau)}\tau^{-1/2}\,d\tau\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left. +2\int_{t_0}^{s} e^{-2(s-\tau)}\tau^{-1/2}\,d\tau \int_{t_0}^{s} e^{-2(s-\tau)}\left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-2(\tau-\xi)}\xi^{-1/2}\,d\xi\right]^2 d\tau\right] ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{s^{1/2}} + \left(\int_{s}^{\infty} e^{2(s-\tau)}\tau^{-1/2}\,d\tau\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. +2\int_{s}^{\infty} e^{2(s-\tau)}\tau^{-1/2}\,d\tau \int_{s}^{\infty} e^{2(s-\tau)}\left[\int_{\tau}^{\infty} e^{2(\tau-\xi)}\xi^{-1/2}\,d\xi\right]^2 d\tau\right)^2\right] ds\right).$$

2. Un ejemplo, que es bastante interesante es considerar una función que tiende a cero pero que no pertenece a L^p con $p \geq 1$, aunque su derivada pertenece a L^1. Consideremos la ecuación

$$y'' - \left(1 - \frac{\alpha}{\log t}\right) y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\gamma = 2$, $r_1 = 0$ y $r_0(t) = \alpha/\log t$. Notemos que $r_0 \to 0$ cuando $t \to \infty$ y para cualquier $p \geq 1$, $r_0 \notin L^p$, ya que

$$\frac{1}{pt^{1/p}} \leq \frac{1}{\log t} \quad \text{para todo} \quad t \geq e.$$

Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\alpha}{\log s} + z_1^2(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\alpha}{\log s} + z_2^2(s)\right] ds\right),$$

donde

$$z_1(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\frac{1}{\log s}\,ds\right) \quad \text{y} \quad z_2(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}\frac{1}{\log s}\,ds\right),$$

con $0 < \beta \leq 1/2$, y esto resulta de aplicar el teorema 6. Observemos lo siguiente

$$\rho_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\frac{1}{\log s}\,ds = \frac{e^{-\beta(t-s)}}{\beta}\frac{1}{\log s}\bigg|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t}\frac{e^{-\beta(t-s)}}{\beta}\frac{-1}{s\log^2 s}\,ds$$
$$= \frac{1}{\beta\log t} - \frac{e^{-\beta(t-t_0)}}{\beta\log t} + \frac{1}{\beta}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\frac{1}{s\log^2 s}\,ds$$

y análogamente

$$\rho_2(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}\frac{1}{\log s}\,ds = \frac{1}{\beta\log t} - \frac{1}{\beta}\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}\frac{1}{s\log^2 s}\,ds.$$

Notemos que

$$\rho_i(t) = \frac{1}{\beta \log t} + \phi_i(t)$$

con $\phi_i \in L^p$, $i = 1, 2$ para cualquier $p \geq 1$. Con todo esto podemos decir que

$$\int_{t_0}^{t} z_i^2(s)\, ds = O\left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\log^2 s}\, ds\right).$$

Por otro lado, como $r_0' \in L^1$ podemos aplicar el teorema ??. Luego, existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$\widetilde{y}_i(t) = (1 + o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu_i(s)\, ds\right), \qquad i = 1, 2.$$

Aquí podemos hacer la siguiente observación, en este caso se comprueba que

$$\mu_i(t) = (-1)^{i-1} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\log t}}, \qquad i = 1, 2$$

y se tiene el siguiente desarrollo que en los dos primeros términos coincide con las fórmulas obtenidas en este trabajo

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\log t}} = 1 - \frac{\alpha}{2 \log t} + O\left(\frac{1}{\log^2 t}\right).$$

Podemos ocupar la idea del teorema 9 para precisar un poco más el comportamiento de las soluciones y_i, $i = 1, 2$. Nos referimos a los sumandos θ_k, aunque en este caso aparecerá una término que sólo podemos estimar. Entonces podemos decir que

$$\begin{aligned} y_1(t) = (1 + o(1)) e^{(t-t_0)} \exp&\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\alpha}{\log s} + \left(\int_{t_0}^{s} e^{-2(s-\tau)} \frac{\alpha}{\log \tau}\, d\tau\right)^2\right.\right. \\ &\left.\left. + 2 \int_{t_0}^{s} e^{-2(s-\tau)} \frac{\alpha}{\log \tau}\, d\tau \int_{t_0}^{s} e^{-2(s-\tau)} \left[\int_{t_0}^{\tau} e^{-2(\tau-\xi)} \frac{\alpha}{\log \xi}\, d\xi\right]^2 d\tau + \phi_1(s)\right] ds\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_2(t) = (1 + o(1)) e^{-(t-t_0)} \exp&\left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\alpha}{\log s} + \left(\int_{s}^{\infty} e^{2(s-\tau)} \frac{\alpha}{\log \tau}\, d\tau\right.\right.\right. \\ &\left.\left.\left. + 2 \int_{s}^{\infty} e^{2(s-\tau)} \frac{\alpha}{\log \tau}\, d\tau \int_{s}^{\infty} e^{2(s-\tau)} \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{2(\tau-\xi)} \frac{\alpha}{\log \tau}\, d\xi\right]^2 d\tau\right)^2 + \phi_2(s)\right] ds\right) \end{aligned}$$

y $\phi_i = O(z_i)$.

3. Un ejemplo que sigue la misma idea del anterior es la ecuación

$$y'' - \left(1 - \frac{\operatorname{sen} t}{\log t}\right) y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\gamma = 2$, $r_1 = 0$ y $r_0(t) = \operatorname{sen} t / \log t$. Sin embargo, aquí no podemos aplicar el teorema de Eastham (el teorema **??** del capítulo 1), ya que

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\log t}\right)' = \frac{\cos t}{\log t} - \frac{\operatorname{sen} t}{t \log^2 t}.$$

No obstante, existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + z_1^2(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + z_2^2(s)\right] ds\right),$$

donde

$$z_1(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}\frac{|\operatorname{sen} t|}{\log s}\, ds\right) \quad \text{y} \quad z_2(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}\frac{|\operatorname{sen} t|}{\log s}\, ds\right),$$

con $0 < \beta \leq 1/2$. Notemos que $r_0 \in \mathcal{C}_0$, para cualquier $p \geq 1$ $r_0 \notin L^p$ y r_0 es condicionalmente integrable ya que

$$\int_e^t \frac{\operatorname{sen} s}{\log s}\, ds = -\frac{\cos s}{\log s}\bigg|_e^t - \int_e^t \frac{\cos s}{s \log^2 s}\, ds = \cos e - \frac{\cos t}{\log t} - \int_e^t \frac{\cos s}{s\log^2 s}\, ds$$

y recordemos que la función $g \in L^1$, donde $g(t) = 1/(t\log^2 t)$. Luego, podemos decir que

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} z_1^2(s)\, ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} z_2^2(s)\, ds\right).$$

Aquí podemos mejorar la fórmula como en el ejemplo anterior pero no las pondremos.

4. Otro ejemplo bastante particular es considerar la función $r(t) = \cos(t^2)$. Esta función tiene las siguientes propiedades: $r \notin \mathcal{C}_0[0,\infty)$, para cualquier $p \geq 1$ $r_0 \notin L^p$ y es condicionalmente integrable en $[0, \infty)$ ya que

$$\int_0^t r(s)\, ds = \int_0^t \cos(s^2)\, ds = \frac{\operatorname{sen}(s^2)}{2s}\bigg|_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(s^2)}{s^2}\, ds = \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{2t} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\operatorname{sen}(s^2)}{s^2}\, ds$$

Usando lo anterior y el lema 2, podemos considerar la ecuación

$$y'' - \left(1 - \cos(t^2)\right) y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\gamma = 2$, $r_1 = 0$ y $r_0(t) = \cos(t^2)$. Además, por el lema 2, $\mathcal{G}(r_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$, donde

$$\mathcal{G}(r_0)(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-s)}\cos(s^2)\, ds.$$

Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\cos(s^2) + z_1^2(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\cos(s^2) + z_2^2(s)\right] ds\right),$$

donde

$$z_1(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|\cos(s^2)|\, ds\right) \quad \text{y} \quad z_2(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|\cos(s^2)|\, ds\right),$$

con $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$. Pero, como r_0 es condicionalmente integrable, podemos decir que

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} z_1^2(s)\, ds\right)$$

y

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} z_2^2(s)\, ds\right).$$

Aquí podemos mejorar la fórmula como en el ejemplo anterior pero no las pondremos.

2.4.4 Raíces características con parte real igual

Aquí usaremos un resultado puesto en el capítulo 1 para el caso en que las raíces características de (2.2) tienen la misma parte real, es decir, $\mathrm{Re}(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$, donde λ_j, $j = 1, 2$ son las raíces características de (2.1).

Consideremos el sistema (2.10). Luego, tenemos que la ecuación de Riccati asociada a este sistema

$$\begin{aligned} v_j' = {} & (-1)^{j-1}\frac{r_0(t) + \lambda_j r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \left[(-1)^j(\lambda_1 - \lambda_2) + (-1)^{j-1}\frac{2r_0(t) + (\lambda_1 + \lambda_2)r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] v_j \\ & + (-1)^{j-1}\frac{r_0(t) + \overline{\lambda}_j r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} v_j^2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde

$$\overline{\lambda}_j = \begin{cases} \lambda_1 & \text{si } j = 2 \\ \lambda_2 & \text{si } j = 1 \end{cases},$$

para $j = 1, 2$.

Sabemos que conociendo una solución de esta ecuación para cada $j = 1, 2$ obtenemos dos soluciones del sistema (2.10) $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j})$. Luego, por el cambio de variables obtenemos dos soluciones del sistema (3.8) $\mathbf{y}_j = Q\mathbf{x}_j$. Así, tenemos

$$\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1j} + x_{2j} \\ \lambda_1 x_{1j} + \lambda_2 x_{2j} \end{pmatrix}.$$

Para $j=1$, $x_{21}=v_1x_{11}$, luego

$$\mathbf{y}_1=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{11}+v_1x_{11} \\ \lambda_1x_{11}+\lambda_2v_1x_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+v_1)x_{11} \\ (\lambda_1+\lambda_2v_1)x_{11} \end{pmatrix}$$

y además,

$$x_{11}(t)=\exp\left(\lambda_1(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0(s)+\lambda_1r_1(s)}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{r_0(s)+\lambda_2r_1(s)}{\lambda_2-\lambda_1}v_1(s)\right]ds\right).$$

Y para $j=2$, $x_{12}=v_2x_{22}$, luego

$$\mathbf{y}_2=\begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_2x_{22}+x_{22} \\ \lambda_1v_2x_{22}+\lambda_2x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+v_2)x_{22} \\ (\lambda_1v_2+\lambda_2)x_{22} \end{pmatrix}$$

y además,

$$x_{22}(t)=\exp\left(\lambda_2(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0(s)+\lambda_2r_1(s)}{\lambda_1-\lambda_2}+\frac{r_0(s)+\lambda_1r_1(s)}{\lambda_1-\lambda_2}v_2(s)\right]ds\right).$$

Aplicando el lema 5 a la ecuación (2.11), obtenemos para cada $j=1,2$ una solución. Luego, obtenemos un sistema de soluciones del sistema (3.8). Con esto encontramos un sistema de soluciones de la ecuación (2.2).

Teorema 10. *Consideremos la ecuación (2.2). Supongamos que $\lambda_1=\alpha+i\beta$ y $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$, donde λ_j, $j=1,2$ son las raíces características de (2.1). Además, supongamos que las siguientes integrales existen y que existen $a_1,a_2:[t_0,\infty)\to(0,\infty)$ tales que*

$$\left|\int_t^\infty \exp\left((-1)^j i\int_s^t\left[2\beta+\frac{r_0(\tau)}{\beta}+\frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right]d\tau\right)\frac{r_0(s)+\lambda_jr_1(s)}{2\beta}\,ds\right|\le a_j(t)$$

y

$$\int_t^\infty\left|\frac{r_0(s)+\overline{\lambda_j}r_1(s)}{2\beta}\right|a_j^2(s)\,ds=o(a_j(t)).$$

Entonces existe un sistema fundamental de soluciones y_j, $j=1,2$ tales que

$$y_j(t)=(1+o(1))e^{\lambda_j(t-t_0)}\exp\left(\frac{(-1)^j}{2i\beta}\int_{t_0}^t\left[r_0(s)+\lambda_jr_1(s)+(r_0(s)+\overline{\lambda_j}r_1(s))v_j(s)\right]ds\right),\tag{2.12}$$

donde $v_j=O(a_j)$.

Demostración: Sabemos que tenemos un sistema de soluciones de la forma $y_j=(1+v_j)x_{jj}$, donde

$$x_{jj}(t)=\exp\left(\lambda_j(t-t_0)+\frac{(-1)^j}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{t_0}^t\left[r_0(s)+\lambda_jr_1(s)+(r_0(s)+\overline{\lambda_j}r_1(s))v_j(s)\right]ds\right)$$

y v_j, $j=1,2$ satisfacen respectivamente (2.11). Verifiquemos las hipótesis del lema 5, poniendo $v_j=x$

$$A(t)=(-1)^{j-1}\frac{r_0(t)+\lambda_jr_1(t)}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad B(t)=(-1)^j(\lambda_1-\lambda_2)+(-1)^{j-1}\frac{2r_0(t)+(\lambda_1+\lambda_2)r_1(t)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

y

$$f(t,x) = C(t)x^2 = \frac{r_0(t) + \lambda_j r_1(t)}{\lambda_1 - \lambda_2} x^2.$$

Notemos que en este caso tenemos $\lambda_1 - \lambda_2 = 2i\beta$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha$. Y con esto podemos decir que

$$A(t) = (-1)^{j-1} \frac{r_0(t) + \lambda_j r_1(t)}{2i\beta}, \qquad C(t) = \frac{r_0(t) + \lambda_j r_1(t)}{2i\beta}$$

y

$$B(t) = (-1)^j 2i\beta + (-1)^{j-1} \frac{2r_0(t) + 2\alpha r_1(t)}{2i\beta} = (-1)^j i \left[2\beta + \frac{r_0(t)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(t)}{\beta}\right]$$

La función de Green de la ecuación $x' = B(t)x$ es, en ambos casos,

$$G(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t > s \\ \exp\left(\int_s^t B(\tau)\, d\tau\right) & \text{si} \quad t \leq s \end{cases}.$$

Dado $M > 1$ tenemos $a_j : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$ y por la siguiente desigualdad

$$|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| = |C(t)x_2^2(t) - C(t)x_1^2(t)| \leq |C(t)|\, |x_1(t) - x_2(t)|\, (|x_1(t)| + |x_2(t)|)$$

tomamos $k_M(t) = 2Ma_j(t)|C(t)|$. Así, si $|x_1(t)|, |x_2(t)| \leq Ma_j(t)$ entonces

$$|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leq k_M(t)\, |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Además,

$$\begin{aligned} \left|\int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\, A(s)\, ds\right| &= \left|\int_t^{\infty} \exp\left((-1)^j i \int_s^t \left[2\beta + \frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau\right) \frac{r_0(s) + \lambda_j r_1(s)}{2\beta}\, ds\right| \\ &\leq a_j(t) \end{aligned}$$

y

$$\int_{t_0}^{\infty} |G(t,s)|\, a_j(s) k_M(s)\, ds = \int_t^{\infty} \left|\frac{r_0(s) + \overline{\lambda_j} r_1(s)}{2\beta}\right| a_j^2(s)\, ds = o(a_j(t)).$$

Por lo tanto, existe para cada $j = 1, 2$ una solución de (2.11) tales que $v_j = o(a_j)$ y además, $v_j \to 0$ cuando $t \to \infty$, ya que

$$v_j(t) = (-1)^{j-1} \int_t^{\infty} e^{(-1)^j i \int_s^t \left[2\beta + \frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau} \left[\frac{r_0(s) + \lambda_j r_1(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{r_0(s) + \overline{\lambda_j} r_1(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} v_j^2(s)\right] ds.$$

Así, queda demostrado el teorema. □

Notemos que aquí $\overline{\lambda_j} = \overline{\lambda_j}$. En este resultado pareciera que las hipótesis son muy rebuscadas, sin embargo, si nos fijamos bien en la ecuación (2.11) podremos ver que las condiciones son razonables. Además, este resultado incluye perturbaciones $r_j \in L^1$, $j = 0, 1$.

Podemos desarrollar la desigualdad que aparece en este teorema para obtener hipótesis más concretas sobre los r_j, $j = 0, 1$. Luego, debemos verificar que existen $a_1, a_2 : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$ tales que

$$\left|\int_t^{\infty} \exp\left((-1)^j i \int_s^t \left[2\beta + \frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau\right) \frac{r_0(s) + \lambda_j r_1(s)}{2\beta}\, ds\right| \leq a_j(t)$$

y

$$\int_t^\infty \left|\frac{r_0(s)+\overline{\lambda_j}r_1(s)}{2\beta}\right| a_j^2(s)\,ds = o(a_j(t)),$$

donde $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$.

Para simplificar pongamos

$$f(s) = \exp\left((-1)^j i \int_s^t \left[\frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau\right) \frac{r_0(s)+\lambda_j r_1(s)}{2\beta}.$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}\int_t^\infty e^{(-1)^j 2i(t-s)} f(s)\,ds &= \int_t^\infty \exp\left((-1)^j i \int_s^t \left[2\beta + \frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau\right) \frac{r_0(s)+\lambda_j r_1(s)}{2\beta}\,ds \\ &= \frac{f(t)}{(-1)^j 2i} + \frac{1}{(-1)^j 2i}\int_t^\infty e^{(-1)^j 2i(t-s)} f'(s)\,ds \\ &= \frac{f(t)}{(-1)^j 2i} - \frac{f'(t)}{4} - \frac{1}{4}\int_t^\infty e^{(-1)^j 2i(t-s)} f''(s)\,ds,\end{aligned}$$

usando que $f, f' \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para esto debemos pedir que $r_0, r_0', r_1, r_1' \to 0$ cuando $t \to \infty$, $r_0, r_0', r_1, r_1' \in L^2$ y $r_0'', r_1'' \in L^1$. Además, tenemos que

$$f'(s) = e^{(-1)^j i \int_s^t \left[2\beta + \frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau} \left(\frac{r_0' + \lambda_j r_1'}{2\beta} + \frac{(-1)^{j+1} i}{2\beta}[r_0^2 + (\alpha+\lambda_j) r_0 r_1 + \alpha\lambda_j r_1^2]\right),$$

$$\begin{aligned}f''(s) = e^{(-1)^j i \int_s^t \left[2\beta + \frac{r_0(\tau)}{\beta} + \frac{\alpha r_1(\tau)}{\beta}\right] d\tau} &\left(\frac{r_0'' + \lambda_j r_1''}{2\beta} + \frac{(-1)^{j+1} i}{2\beta^2}[3 r_0 r_0' + 2\alpha r_0' r_1 + \alpha r_0 r_1'\right. \\ &\left. + \lambda_j r_0' r_1 + 2\lambda_j r_0 r_1' + 3\alpha\lambda_j r_1 r_1']\right),\end{aligned}$$

$$|f(t)| = \frac{|r_0(t) + \lambda_j r_1(t)|}{2\beta}, \qquad |f'(t)| \le c_1(|r_0'(t)| + |\lambda_j r_1'(t)|) + c_2(|r_0(t)| + |\lambda_j r_1(t)|)^2$$

y

$$\begin{aligned}|f''(s)| \le\ & c_3(|r_0''(s)| + |\lambda_j r_1''(s)|) + c_4(|r_0(s) r_0'(s)| + |\lambda_j r_0(s) r_1'(s)| + |\lambda_j r_0(s) r_1'(s)| \\ & + |\lambda_j^2 r_1(s) r_1'(s)|)^2 + c_5(|r_0(s)| + |\lambda_j r_1(s)|)^3.\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\left|\int_t^\infty e^{(-1)^j 2i(t-s)} f(s)\,ds\right| \le \frac{|f(t)|}{2} + \frac{|f'(t)|}{4} + \frac{1}{4}\int_t^\infty |f''(s)|\,ds,$$

donde las constantes c_i, $i = 1, \ldots, 5$ son positivas. Entonces tomamos

$$\begin{aligned}a_j(t) = c_6\Bigg(&|r_0(t)| + |\lambda_j r_1(t)| + |r_0'(t)| + |\lambda_j r_1'(t)| + (|r_0(t)| + |\lambda_j r_1(t)|)^2 \\ &+ \int_t^\infty [|r_0''(s)| + |\lambda_j r_1''(s)| + |r_0(s) r_0'(s)| + |\lambda_j r_0(s) r_1'(s)| \\ &+ |\lambda_j r_0(s) r_1'(s)| + |\lambda_j^2 r_1(s) r_1'(s)| + (|r_0(s)| + |\lambda_j r_1(s)|)^3]\,ds\Bigg)\end{aligned}$$

Ahora pedimos que

$$\int_t^\infty (|r_0(s)| + |\lambda_j r_1(s)|) a_j^2(s)\, ds = o(a_j(t)).$$

Un caso sencillo es cuando r_0 y r_1 son decrecientes. De hecho, si r_0, r_1 son decrecientes, $r_0, r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$, $r_0, r_1 \in L^2$ y tienen segundas derivadas entonces $r_0', r_1' \to 0$ cuando $t \to \infty$, $r_0', r_1' \in L^2$ y $r_0'', r_1'' \in L^1$. Además, $a_j \in L^2$, para $j = 1, 2$ ya que $r_0, r_1, -r_0', -r_1', r_0'', r_1'' > 0$ y

$$\begin{aligned}
a_j(t) &= c_6\Big(|r_0(t)| + |\lambda_j r_1(t)| + |r_0'(t)| + |\lambda_j r_1'(t)| + (|r_0(t)| + |\lambda_j r_1(t)|)^2 \\
&\quad + \int_t^\infty \big[|r_0''(s)| + |\lambda_j r_1''(s)| + |r_0(s) r_0'(s)| + |\lambda_j r_0(s) r_1'(s)| \\
&\quad + |\lambda_j r_0(s) r_1'(s)| + |\lambda_j^2 r_1(s) r_1'(s)| + (|r_0(s)| + |\lambda_j r_1(s)|)^3 \big]\, ds \Big) \\
&= c_6\Big(r_0(t) + |\lambda_j| r_1(t) - r_0'(t) - |\lambda_j| r_1'(t) + (r_0(t) + |\lambda_j| r_1(t))^2 \\
&\quad + \int_t^\infty \big[r_0''(s) + |\lambda_j| r_1''(s) - r_0(s) r_0'(s) - |\lambda_j| r_0(s) r_1'(s) \\
&\quad - |\lambda_j| r_0(s) r_1'(s) - |\lambda_j|^2 r_1(s) r_1'(s) + (r_0(s) + |\lambda_j| r_1(s))^3 \big]\, ds \Big) \\
&\le c_6\Big(r_0(t) + |\lambda_j| r_1(t) - r_0'(t) - |\lambda_j| r_1'(t) + (r_0(t) + |\lambda_j| r_1(t))^2 - r_0'(t) - |\lambda_j| r_1'(t) \\
&\quad + r_0^2(t) + 2|\lambda_j| r_0(s) r_1(t) + |\lambda_j|^2 r_1^2(t) + (r_0(t) + |\lambda_j| r_1(t)) \int_t^\infty (r_0(s) + |\lambda_j| r_1(s))^2\, ds \Big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso $r_0 v_j, r_1 v_j \in L^1$ y tenemos un sistema de soluciones de la forma

$$y_j(t) = (1 + o(1)) e^{\lambda_j (t - t_0)} \exp\left(\frac{(-1)^j}{2i\beta} \int_{t_0}^t \big[r_0(s) + \lambda_j r_1(s) \big]\, ds \right).$$

De igual manera se deduce lo mismo si r_0, r_1 son crecientes, $r_0, r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$, $r_0, r_1 \in L^2$ y tienen segundas derivadas.

Ejemplos

1. Consideremos la ecuación

   $$y'' + (\alpha_1 t^{-\beta_1}) y' + (1 + \alpha_0 t^{-\beta_0}) y = 0,$$

   donde $\frac{1}{2} < \beta_1, \beta_0 \le 1$. Aquí, tenemos que $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ son las raíces características de la ecuación no perturbada $x'' + x = 0$; $r_1(t) = \alpha_1 t^{-\beta_1}$ y $r_0(t) = \alpha_0 t^{-\beta_0}$. Luego, tenemos que r_0 es creciente si $\alpha_0 < 0$ y decreciente si $\alpha_0 > 0$ y lo mismo para r_1, es decir, r_1 es creciente si $\alpha_1 < 0$ y decreciente si $\alpha_1 > 0$. Además, $r_0, r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$, $r_0, r_1 \in L^2$ y tienen segundas derivadas. Por lo tanto, se verifican las condiciones del teorema 10 y así, existe un sistema fundamental de soluciones y_j, $j = 1, 2$ tales que

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{i(t-t_0)} \exp\left(\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\alpha_0 s^{-\beta_0} + i\alpha_1 s^{-\beta_1}\right] ds\right)$$

e

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{-i(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2i}\int_{t_0}^{t} \left[\alpha_0 s^{-\beta_0} + (-i)\alpha_1 s^{-\beta_1}\right] ds\right).$$

2. Otro ejemplo que podemos considerar es la ecuación

$$y'' - \left(2 - \frac{\log t}{t^{\alpha_1}}\right) y' + \left(2 + \frac{\log t}{t^{\alpha_0}}\right) y = 0.$$

Aquí tenemos que la ecuación no perturbada es $x'' - 2x' + 2x = 0$, que tiene raíces características $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = 1 + i$. Además, $r_j(t) = \log t/t^{\alpha_j}$, $j = 0, 1$. Claramente, r_0 y r_1 son funciones decrecientes, $r_0, r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $r_0, r_1 \in L^2$ si $\frac{1}{2} < \alpha_0, \alpha_1 \leq 1$. Entonces se tiene un conjunto fundamental de soluciones y_j, $j = 1, 2$ de la forma

$$y_1(t) = (1 + o(1))e^{(1+i)(t-t_0)} \exp\left(\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\log s}{s^{\alpha_0}} + (1 + i)\frac{\log s}{s^{\alpha_1}}\right] ds\right)$$

e

$$y_2(t) = (1 + o(1))e^{(1-i)(t-t_0)} \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\log s}{s^{\alpha_0}} + (1 - i)\frac{\log s}{s^{\alpha_1}}\right] ds\right).$$

Capítulo 3

Ecuación de orden 3

3.1 Introducción

En este capítulo veremos los resultados obtenidos para la ecuación de orden 3. Estos se obtienen de dos maneras, la primera es con un cambio de variables que reduce el orden y la otra es llevar la ecuación a sistemas y usar la teoría presentada en el capítulo 1. En el primer caso necesitamos estudiar una ecuación de tipo Riccati. Asumiremos que las raíces características de la ecuación no perturbada son distintas. Se tienen tres casos que son: todas las raíces características tienen parte real distinta, dos raíces tienen parte real igual y todas las raíces tienen parte real igual. Sin embargo, estudiaremos el primer caso: todas las raíces tienen parte real distinta.

3.2 Preliminares

Consideremos la ecuación de orden 3

$$x^{(3)} + a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0, \tag{3.1}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$. Diremos que el polinomio $P(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ es el polinomio característico de la ecuación (3.1). Si λ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ son las raíces de P entonces diremos que λ_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ son raíces carateristicas de la ecuación (3.1).

Tomemos ahora una perturbación de esta ecuación

$$y^{(3)} + (a_2 + r_2(t))y'' + (a_1 + r_1(t))y' + (a_0 + r_0(t))y = 0, \tag{3.2}$$

donde r_0, r_1 y r_2 son funciones definidas en un intervalo de la forma $[t_0, \infty)$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y localmente integrables.

Lema 12. *Consideremos la ecuación* (3.2) *y supongamos que las raíces características,* λ_i, $i = 1, 2, 3$, *de (1) son distintas. Entonces se tiene un conjunto de soluciones de la forma*

$$y_i(t) = \exp\bigg(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]\, ds\bigg), \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.3}$$

donde z_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen respectivamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_i'' + (3\lambda_i + a_2)z_i' + (3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1)z_i + r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) \\ + (2\lambda_i r_2(t) + r_1(t))z_i + r_2(t)z_i' + 3z_i z_i' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t))z_i^2 + z_i^3 = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Demostración: La demostración consiste en verificar que y_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen la ecuación (3.2), pongamos

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda + z(s)]\,ds\right)$$

para simplificar la notación, donde λ es una raíz característica de (3.1), luego

$$\begin{aligned} y'(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda + z(s)]\,ds\right)(\lambda + z(t)) = y(t)(\lambda + z(t)) \\ y''(t) &= y(t)(\lambda + z(t))^2 + y(t)z'(t) \\ y^{(3)}(t) &= y(t)(\lambda + z(t))^3 + 3y(t)(\lambda + z(t))z'(t) + y(t)z''(t), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y^{(3)} + (a_2 + r_2)y'' + (a_1 + r_1)y' + (a_0 + r_0)y &= y(\lambda + z)^3 + 3y(\lambda + z)z' + yz'' + (a_0 + r_0)y \\ &\quad + (a_1 + r_1)y(\lambda + z) + (a_2 + r_2)[y(\lambda + z)^2 + yz'] \\ &= y[(\lambda + z)^3 + 3(\lambda + z)z' + z'' \\ &\quad + (a_2 + r_2)[(\lambda + z)^2 + z'] + (a_1 + r_1)(\lambda + z) \\ &\quad + (a_0 + r_0)] \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} (\lambda + z)^3 + 3(\lambda + z)z' + z'' + (a_2 + r_2)[(\lambda + z)^2 + z'] + (a_1 + r_1)(\lambda + z) + (a_0 + r_0) = \\ \lambda^3 + 3\lambda^2 z + 3\lambda z^2 + z^3 + 3\lambda z' + 3zz' + z'' + a_2\lambda^2 + 2a_2\lambda z + a_2 z^2 \\ + r_2\lambda^2 + 2r_2\lambda z + r_2 z^2 + a_2 z' + r_2 z' + a_1\lambda + a_1 z + r_1\lambda + r_1 z + a_0 + r_0 = \\ z'' + (3\lambda + a_2)z' + (3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1)z + r_0 + \lambda r_1 + \lambda^2 r_2 + (2\lambda r_2 + r_1)z \\ + r_2 z' + 3zz' + (3\lambda + a_2 + r_2)z^2 + z^3 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, y es solución de (3.2). Como las raíces características son distintas tenemos tres ecuaciones para z, dependiendo de λ; luego, tres soluciones z_i, para $i = 1, 2, 3$. □

Este lema presenta de otra forma el cambio de variables $z = \frac{y'}{y} - \lambda$, cuando las raíces características de (3.1) son distintas.

Ahora estudiaremos la ecuación (3.4) para conocer el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación (3.2). De hecho, conociendo soluciones de (3.4) para $i = 1, 2, 3$ se obtienen soluciones para la ecuación (3.2). Para esto debemos conocer como se comporta la parte lineal no perturbada de la ecuación (3.4), es decir, conocer las raíces características de la ecuación

$$z'' + (3\lambda + a_2)z' + (3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1)z = 0.$$

Lema 13. *Si las raíces de P, λ_i, $i = 1, 2, 3$ son distintas, entonces $\lambda_j - \lambda_i$, $i \neq j$ satisfacen la ecuación*

$$\lambda^2 + (3\lambda_i + a_2)\lambda + 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1 = 0.$$

Demostración: Basta verificar que satisfacen la ecuación, luego

$$\begin{aligned}(\lambda_j - \lambda_i)^2 + (3\lambda_i + a_2)(\lambda_j - \lambda_i) + 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1 &= \\ \lambda_j^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2 + 3\lambda_i\lambda_j - 3\lambda_i^2 + a_2\lambda_j - a_2\lambda_i + 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1 &= \\ \lambda_j^2 + \lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2 + a_2\lambda_j + a_2\lambda_i + a_1&,\end{aligned}$$

pero si $i \neq j$ entonces $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$,

$$\lambda_i^3 + a_2\lambda_i^2 + a_1\lambda_i + a_0 = 0$$

y

$$\lambda_j^3 + a_2\lambda_j^2 + a_1\lambda_j + a_0 = 0,$$

luego, restando esta ecuaciones y dividiendo por $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ se obtiene que

$$\lambda_j^2 + \lambda_i\lambda_j + \lambda_i^2 + a_2\lambda_j + a_2\lambda_i + a_1 = 0.$$

□

3.3 Ecuación tipo Riccati

Aquí estudiaremos una ecuación de tipo Riccati. Además, ocuparemos algunos resultados ya expuestos en los capítulos anteriores.

Consideremos la ecuación diferencial $x'' + b_1x' + b_0x = 0$. Sea $Q(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0\lambda$ el polinomio característico de esta ecuación y γ_i, $i = 1, 2$ las raíces de Q, con $\gamma_1 \neq \gamma_2$ y $\operatorname{Re}\gamma_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Definimos la función g como

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 = -\alpha_1$ y $\gamma_2 = -\alpha_2$,

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$, $\gamma_1 = -\alpha_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$, y

$$g(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_2(t-s)} - e^{\gamma_1(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 > 0$. Diremos que g es la función de Green de esta ecuación.

En estricto rigor, la función de Green debería contener un factor $1/(\gamma_1 - \gamma_2)$, pero se puede omitir ya que lo podemos eliminar con un cambio de variables.

Notemos que para la función de Green tenemos 3 casos. Veremos un resultado para la ecuación tipo Riccati que considera los tres casos juntos. Sin embargo, se mencionarán los distintos casos cuando corresponda.

Lema 14. *Dados k_1, $k_2 > 0$ existen constantes M, k_a, k_b y $k_f > 0$ que satisfacen*

$$k_a + Mk_b + M^2(k_1 + k_f) + M^3k_2 = M, \quad k_b + 2M(k_1 + k_f) + 3M^2k_2 < 1.$$

Demostración: Escogemos M tal que $0 < 1 - 2k_1M - 3k_2M^2$, es decir, M que satisface

$$0 < M < \frac{-2k_1 + \sqrt{4k_1^2 + 12k_2}}{6k_2}.$$

Luego, escogemos k_b y k_f tal que $k_b + 2k_fM < 1 - 2k_1M - 3k_2M^2$, y podemos ya que primero tomamos $0 < k_b < 1 - 2k_1M - 3k_2M^2$ y luego

$$0 < k_f < \frac{1}{2M}(1 - 2k_1M - 3k_2M^2 - k_b).$$

Así, se satisface la desigualdad. Teniendo M, k_b y k_f fijos, k_a se encuentra de la relación

$$k_a = M - k_bM - M^2(k_1 + k_f) - k_2M^3,$$

y $k_a > 0$, pues

$$M(k_1 + k_f) + 2k_2M^2 < 1 - k_b - M(k_1 + k_f) - k_2M^2.$$

□

Este lema asegura las existencia de las constantes M, k_a, k_b y k_f, que se ocuparán en el siguiente resultado.

Lema 15. *Consideremos la ecuación diferencial escalar*

$$z'' + b_1z' + b_0z = a(t) + b(t)z + c(t)z' + c_1zz' + (c_2 + f(t))z^2 + c_3z^3. \tag{3.5}$$

donde b_i y c_j, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ son constantes; a, b, c y f están definidas en $[0, \infty)$. Sean γ_1, γ_2, las raíces del polinomio $Q(\lambda) = \lambda^2 + b_1\lambda + b_0$; y supongamos que $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 \neq 0$, $\mathcal{G}(a)$, $\mathcal{L}(b)$, $\mathcal{L}(c)$ y $\mathcal{L}(f) \to 0$, cuando $t \to \infty$, donde

$$\mathcal{G}(r)(t) = \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\, r(s)\, ds\right| + \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\, r(s)\, ds\right|$$

y

$$\mathcal{L}(r)(t) = \int_{t_0}^{\infty} \left(|g(t,s)| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\right) |r(s)|\, ds,$$

con g la función de Green de la ecuación $x'' + b_1x' + b_0x = 0$. Entonces existe una solución de la ecuación (3.5), digamos z, tal que $z, z' \to 0$, cuando $t \to \infty$.

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ y $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Sabemos que la ecuación (3.5) es equivalente a la ecuación integral

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3z^3(s)\right] ds,$$

por variación de parámetros. Además, notemos que para todo $t \geq t_0$

$$\mathcal{L}(1)(t) \leq \frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} + 2,$$

ya que en el primer caso ($\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 < 0$) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1)(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \left(|g(t,s)| + \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \right) ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(\left|e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)}\right| + \left|\alpha_2 e^{-\alpha_2(t-s)} - \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\right| \right) ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left(e^{-\alpha_1(t-s)} + e^{-\alpha_2(t-s)} + \alpha_2 e^{-\alpha_2(t-s)} + \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \right) ds \\
&\leq \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + 2;
\end{aligned}$$

y para los otros casos se deduce de manera análoga.

Consideremos el siguiente espacio

$$\mathcal{C}_0^1[t_0,\infty) = \{z : [t_0,\infty) \to \mathbb{C} \mid z, z' \text{ son continuas y } z, z' \to 0, \text{ cuando } t \to \infty\},$$

que denotaremos por $\mathcal{C}_0^1$ para simplificar. Observemos que $\mathcal{C}_0^1$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|z\| = \sup\{|z(t)| + |z'(t)| \mid t \in [t_0,\infty)\}.$$

Entonces definamos el operador T como

$$Tz(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)\right] ds,$$

luego, tenemos que $T : \mathcal{C}_0^1 \to \mathcal{C}_0^1$ (ya que $\mathcal{L}(r) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $r \in \mathcal{C}_0^1$, por el lema 2), y buscaremos un punto fijo de T en algún conjunto invariante. Notemos que

$$(Tz)'(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)\right] ds.$$

Escojamos M, k_a, k_b y k_f como en el lema anterior, con

$$k_1 = (c_1 + c_2)\left(\frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} + 2\right) \quad \text{y} \quad k_2 = c_3\left(\frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} + 2\right),$$

y t_0 tal que $|\mathcal{G}(a)(t)| \leq k_a$, $\mathcal{L}(b)(t) + \mathcal{L}(c)(t) \leq k_b$ y $\mathcal{L}(f)(t) \leq k_f$ para todo $t \geq t_0$. Sean $B = B[0, M]$ y $z \in B$ entonces para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
|Tz(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\, ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\left|b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s)\right| ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\left|(c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)\right| ds \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\, ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\left[|b(s)||z(s)| + |c(s)||z'(s)| + c_1|z(s)||z'(s)|\right] ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\left[(c_2 + |f(s)|)|z(s)|^2 + c_3|z(s)|^3\right] ds
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
|(Tz)'(t)| \leq & \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)\,ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \left|b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s)\right| ds \\
& + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \left|(c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)\right| ds \\
\leq & \left|\int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)a(s)\,ds\right| + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \left[|b(s)||z(s)| + |c(s)||z'(s)|\right] ds \\
& + \int_{t_0}^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right| \left[c_1|z(s)||z'(s)| + (c_2 + |f(s)|)|z(s)|^2 + c_3|z(s)|^3\right] ds,
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
|Tz(t)| + |(Tz)'(t)| \leq & \mathcal{L}(a)(t) + M[\mathcal{L}(b)(t) + \mathcal{L}(c)(t)] + c_1 M^2 \mathcal{L}(1)(t) + c_2 M^2 \mathcal{L}(1)(t) \\
& + M^2 \mathcal{L}(f)(t) + c_3 M^3 \mathcal{L}(1)(t)
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos,

$$
|Tz(t)| + |(Tz)'(t)| \leq k_a + M k_b + k_1 M^2 + M^2 k_f + k_2 M^3.
$$

Así, $\|Tz\| \leq M$. Por lo tanto, $Tz \in B$.

Sean $z_1, z_2 \in B$, entonces

$$
\begin{aligned}
Tz_1(t) - Tz_2(t) = & \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)(z_1(s) - z_2(s)) + c(s)(z_1'(s) - z_2'(s)) + c_1(z_1(s)z_1'(s) \\
& - z_2(s)z_2'(s)) + (c_2 + f(s))(z_1^2(s) - z_2^2(s)) + c_3(z_1^3(s) - z_2^3(s))\big]\, ds
\end{aligned}
$$

Luego, para $t \geq t_0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|Tz_1(t) - Tz_2(t)| \leq & \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\big[|b(s)||z_1(s) - z_2(s)| + |c(s)||z_1'(s) - z_2'(s)| \\
& + c_1|z_1(s)z_1'(s) - z_2(s)z_2'(s)| + (c_2 + |f(s)|)|z_1^2(s) - z_2^2(s)| \\
& + c_3|z_1^3(s) - z_2^3(s)|\big]\, ds
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
z_1(t)z_1'(t) - z_2(t)z_2'(t) &= z_1(t)(z_1'(t) - z_2'(t)) + z_2'(t)(z_1(t) - z_2(t)), \\
z_1^2(t) - z_2^2(t) &= (z_1(t) - z_2(t))(z_1(t) + z_2(t)), \\
z_1^3(t) - z_2^3(t) &= (z_1(t) - z_2(t))(z_1^2(t) + z_1(t)z_2(t) + z_2^2(t)), \\
|z_1(t) + z_2(t)| &\leq 2M
\end{aligned}
$$

y

$$
|z_1'(t) + z_2'(t)| \leq 2M,
$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
|Tz_1(t) - Tz_2(t)| \leq & \Bigg(\int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\big[|b(s)| + |c(s)|\big]\, ds + 2c_1 M \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\, ds \\
& + 2M \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\big[c_2 + |f(s)|\big]\, ds + 3c_3 M^2 \int_{t_0}^{\infty} |g(t,s)|\, ds\Bigg) \|z_1 - z_2\|.
\end{aligned}
$$

Análogamente para $(Tz)'$ tenemos

$$\begin{aligned}(Tz_1)'(t) - (Tz_2)'(t) = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\big[&b(s)(z_1(s)-z_2(s)) + c(s)(z_1'(s)-z_2'(s))\\ &+ c_1(z_1(s)z_1'(s) - z_2(s)z_2'(s)) + (c_2+f(s))(z_1^2(s)-z_2^2(s))\\ &+ c_3(z_1^3(s)-z_2^3(s))\big]\,ds\end{aligned}$$

Luego, para $t \geq t_0$ se tiene

$$\begin{aligned}|(Tz_1)'(t) - (Tz_2)'(t)| \leq& \int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\big[|b(s)||z_1(s)-z_2(s)| + |c(s)||z_1'(s)-z_2'(s)|\big]\,ds\\ &+ \int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\big[c_1|z_1(s)z_1'(s) - z_2(s)z_2'(s)|\\ &+ (c_2+|f(s)|)|z_1^2(s)-z_2^2(s)| + c_3|z_1^3(s)-z_2^3(s)|\big]\,ds\\ \leq& \Big(\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|[|b(s)|+|c(s)|]\,ds + 2c_1M\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\,ds\\ &+ 2M\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|(c_2+|f(s)|)\,ds\\ &+ 3c_3M^2\int_{t_0}^{\infty}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\right|\,ds\Big)\|z_1-z_2\|.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}|Tz_1(t) - Tz_2(t)| + |(Tz_1)'(t) - (Tz_2)'(t)| \leq& \big[\mathcal{L}(b)(t) + \mathcal{L}(c)(t) + 2M(c_1+c_2)\mathcal{L}(1)(t)\\ &+ 2M\mathcal{L}(f)(t) + 3c_3M^2\mathcal{L}(1)(t)\big]\|z_1-z_2\|\\ \leq& \big[k_b + 2M(k_1+k_f) + 3k_2M^2\big]\|z_1-z_2\|,\end{aligned}$$

pero $k_b + 2M(k_1+k_f) + 3k_2M^2 < 1$.

Con esto tenemos $\|Tz_1 - Tz_2\| \leq \big[k_b + 2M(k_1+k_f) + 3k_2M^2\big]\|z_1-z_2\|$. Por lo tanto, tenemos que T es un operador contractivo de B en B, y como B es completo existe un único $z \in B \subseteq C_0^1$ tal que, $Tz = z$. Así, tenemos una solución, digamos z, de la ecuación (3.5) tal que $z, z' \to 0$ cuando $t \to \infty$. □

Observemos que si $a, b, c, f \to 0$ cuando $t \to \infty$ entonces se satisfacen las condiciones de este lema, usando el lema 2, y además $z'' \to 0$ cuando $t \to \infty$. De la misma manera, se cumplen las hipótesis de este lema si $a, b, c, f \in L^p$ (por el lema 2). Por lo tanto, se pueden mezclar estas hipótesis, es decir, podemos tomar $a, c \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $b, f \in L^p$, por ejemplo.

Ya sabemos que existe una solución de (3.5), digamos z, tal que $z, z' \to 0$ cuando $t \to \infty$. Ahora podemos precisar el comportamiento de esta solución, dependiendo de las condición sobre γ_i, $i = 1, 2$; tenemos tres casos, y para cada uno de ellos un resultado.

Corolario 4. *Consideremos la ecuación* (3.5), *las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 15. Supongamos además que* $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 < 0$, $\gamma_1 = -\alpha_1$, $\gamma_2 = -\alpha_2$, *dado*

$$0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2},$$

donde $\alpha = \min\{\operatorname{Re}\alpha_1, \operatorname{Re}\alpha_2\}$, *y* K *tal que*

$$0 < K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3 M)M}{(\alpha - \beta)(1 + \alpha + \beta + M)}$$

se satisface que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\, ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$*; y que para* c *y* f *se satisface la misma desigualdad. Entonces* z *la solución de* (3.5) *dada por el lema 15 satisface*

$$z(t),\, z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right).$$

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Sabemos que existe una solución de (3.5) que satisface la ecuación

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)\right] ds$$

y $\|z\| \leq M$. En este caso

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

luego, la ecuación que satisface z es

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \left(e^{-\alpha_1(t-s)} - e^{-\alpha_2(t-s)}\right)\left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) \right.$$
$$\left. + c_3 z^3(s)\right] ds.$$

Tomemos la sucesión dada por $z_0 \equiv 0$ y $z_{n+1} = Tz_n$ para $n \geq 0$, donde T es el operador definido en la demostración del lema 15. Sabemos que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$, ya que T es contractivo. Observemos que la condición sobre b equivale a que se satisfaga

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)|\, ds \leq K e^{(\alpha-\beta)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para c y f.

Ahora probaremos por inducción que para todo $t \geq t_0$

$$|z_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds$$

y

$$|z_n'(t)| \leq (\alpha_1 + \alpha_2) N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con

$$N \geq 2 + KN(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M) + M(c_1 + c_2 + c_3 M)\frac{N}{\alpha - \beta}.$$

Para $n = 0, 1$ claramente es cierto. Supongamos que es cierto para $n = k$, y veamos que sucede para $n = k + 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| \leq & \int_{t_0}^{t} \left(e^{-\alpha_1(t-s)} + e^{-\alpha_2(t-s)}\right) \left[|a(s)| + |b(s)|\,|z_k(s)| + |c(s)|\,|z_k'(s)| + c_1|z_k(s)|\,|z_k'(s)|\right. \\
& \left. + (c_2 + |f(s)|)|z_k(s)|^2 + c_3|z_3(s)|^3\right] ds \\
\leq & \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \left[|a(s)| + N|b(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\right. \\
& + (\alpha_1 + \alpha_2)N|c(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau + c_1MN \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau \\
& \left. + (c_2 + f(s))MN \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau + c_3M^2N \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\right] ds,
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)| \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,d\tau\,ds \\
&= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s} e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,d\tau\,ds \\
&= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau \\
&\leq Ke^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}\,d\tau \\
&= K \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds;
\end{aligned}$$

y para c y f tenemos la misma desigualdad; además

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{-\alpha t} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_{\tau}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}\,ds\,d\tau \\
&\leq \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} \int_{t_0}^{t} e^{\beta\tau}|a(\tau)|e^{(\alpha-\beta)t}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta} \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| \leq & \left(2 + KN + (\alpha_1 + \alpha_2)KN + M(c_1 + c_2)\frac{N}{\alpha-\beta}\right. \\
& \left. + KMN + M^2c_3\frac{N}{\alpha-\beta}\right) \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds \\
\leq & N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Y ahora para la derivada tenemos

$$
\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| \leq & \int_{t_0}^{t} \left(\alpha_2 e^{-\alpha_2(t-s)} + \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\right) \left[|a(s)| + |b(s)|\,|z_k(s)| + |c(s)|\,|z'_k(s)|\right. \\
& \left. + c_1|z_k(s)|\,|z'_k(s)| + (c_2 + |f(s)|)|z_k(s)|^2 + c_3|z_3(s)|^3\right] ds \\
& \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \Bigg[|a(s)| + N \int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau \big\{|b(s)| + (\alpha_1 + \alpha_2)|c(s)| \\
& + c_1 M + (c_2 + |f(s)|)M + c_3 M^2\big\}\Bigg] ds,
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| &\leq (\alpha_1 + \alpha_2)\Bigg(2 + KN(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M) \\
&\quad + M(c_1 + c_2 + c_3 M)\frac{N}{\alpha - \beta}\Bigg) \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds \\
&\leq (\alpha_1 + \alpha_2)N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
N \geq \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta - K(\alpha - \beta)(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M) - M(c_1 + c_2) - M^2 c_3}
$$

y se tiene que

$$
\begin{aligned}
N\left[\alpha - \beta - K(\alpha - \beta)(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M) - M(c_1 + c_2) - M^2 c_3\right] &\geq 2(\alpha - \beta) \\
N\left(1 - K(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M) - M(c_1 + c_2)\frac{1}{\alpha - \beta} - M^2 c_3 \frac{1}{\alpha - \beta}\right) &\geq 2 \\
N - KN - (\alpha_1 + \alpha_2)KN - M(c_1 + c_2)\frac{N}{\alpha - \beta} - KMN - M^2 c_3 \frac{N}{\alpha - \beta} &\geq 2 \\
2 + KN + (\alpha_1 + \alpha_2)KN + M(c_1 + c_2)\frac{N}{\alpha - \beta} + KMN + M^2 c_3 \frac{N}{\alpha - \beta} &\leq N
\end{aligned}
$$

Notemos que $N > 0$, ya que

$$
K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3 M)M}{(\alpha - \beta)(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + M)}.
$$

Además, tenemos que

$$
\alpha - \beta \geq \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2} > \frac{1}{2}(3c_3 M^2 + 2M(c_1 + c_2)) > (c_1 + c_2 + c_3 M)M
$$

usando la desigualdad que define a M en el lema 14 tomando

$$
k_1 = (c_1 + c_2)\left(\frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} + 2\right) \quad \text{y} \quad k_2 = c_3\left(\frac{1}{|\gamma_1|} + \frac{1}{|\gamma_2|} + 2\right),
$$

y con esto $K > 0$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq t_0$ tenemos que

$$|z_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds \quad \text{y} \quad |z_n'(t)| \leq (\alpha_1 + \alpha_2)N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds,$$

entonces podemos decir que

$$|z(t)| \leq N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds \quad \text{y} \quad |z'(t)| \leq (\alpha_1 + \alpha_2)N \int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds.$$

Luego,

$$z(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right) \quad \text{y} \quad z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right).$$

□

Ahora si $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 > 0$ en la ecuación (3.5) tenemos un resultado análogo al anterior.

Corolario 5. *Consideremos la ecuación* (3.5), *las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 15. Supongamos además que* $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 > 0$, *dado*

$$0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2},$$

donde $\alpha = \min\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2\}$ *y* K *tal que*

$$0 < K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3 M)M}{(\alpha - \beta)(1 + \alpha + \beta + M)}$$

se satisface que

$$\int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\, ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$*; y que para* c *y* f *se satisface la misma desigualdad. Entonces* z *la solución de* (3.5) *dada por el lema 15 satisface*

$$z(t),\, z'(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-s)}|a(s)|\, ds\right).$$

La demostración de este resultado es análoga a la de el corolario anterior. El último caso que vamos a cubrir de la ecuación (3.5) es cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$ y $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$

Corolario 6. *Consideremos la ecuación* (3.5), *las hipótesis y conclusiones de la demostración del lema 15. Supongamos además que* $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$, $\gamma_1 = -\alpha_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$ *dado*

$$0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2},$$

donde $\alpha = \min\{\operatorname{Re}\alpha_1, \operatorname{Re}\gamma_2\}$ *y* $K > 0$ *tal que*

$$0 < K < \frac{\alpha^2 - \beta^2 - (c_1 + c_2 + c_3 M)(3\alpha - \beta)M}{3(\alpha^2 - \beta^2)(1 + \alpha + \beta + M)},$$

con M satisfaciendo

$$M(c_1 + c_2 + c_3 M) < \frac{3\alpha}{10},$$

se satisface

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)} |b(s)|\, ds \leq K,$$

$$\int_{t}^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)} |b(s)|\, ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$; y que para c y f se satisface la misma desigualdad. Entonces z la solución de (3.5) dada por el lema 15 satisface que

$$z(t),\, z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s) |a(s)|\, ds \right),$$

donde

$$\phi(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & si\, t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & si\, t \leq s \end{cases}.$$

Demostración: Sin perdida de generalidad, supongamos que $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Sabemos que existe una solución de (3.5) que satisface la ecuación

$$z(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s) \left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s) \right] ds$$

y $\|z\| \leq M$. En este caso

$$g(t,s) = \begin{cases} e^{-\alpha_1(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

luego, la ecuación que satisface z es

$$\begin{aligned} z(t) = & \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha_1(t-s)} \left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s) \right] ds \\ & + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_2(t-s)} \left[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) \right. \\ & \left. + c_3 z^3(s) \right] ds, \end{aligned}$$

Tomemos la sucesión dada por $z_0 = 0$ y $z_{n+1} = T z_n$ para $n \geq 0$, donde T es el operador definido en la demostración de lema 15. Sabemos que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$, ya que T es contractivo. Observemos que la condición sobre b equivale a que se satisfaga

$$\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s} |b(s)|\, ds \leq K e^{(\alpha-\beta)t}$$

y

$$\int_{t}^{\infty} e^{-(\alpha-\beta)s} |b(s)|\, ds \leq K e^{-(\alpha-\beta)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para c y f. Además, notemos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha+\beta)(t-s)} |b(s)|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)} |b(s)|\, ds \leq K$$

y

$$\int_t^\infty e^{(\alpha+\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq \int_t^\infty e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K$$

puesto que $\beta \leq \alpha/2 \leq \alpha-\beta \leq \alpha \leq \alpha+\beta$. Así, concluimos que

$$\int_{t_0}^t e^{(\alpha+\beta)s}|b(s)|\,ds \leq Ke^{(\alpha+\beta)t}$$

y

$$\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}|b(s)|\,ds \leq Ke^{-(\alpha+\beta)t}$$

para todo $t \geq t_0$, y se tiene lo mismo para c y f.

Ahora probaremos por inducción que para todo $t \geq t_0$

$$|z_n(t)| \leq N\left(\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)|a(s)|\,ds\right)$$

y

$$|z_n'(t)| \leq (\alpha_1+\gamma_2)N\left(\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)|a(s)|\,ds\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, con

$$N(\alpha^2-\beta^2-3K(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha_1+\gamma_2+M)-M(c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta)) \geq \alpha^2-\beta^2$$

Para $n=0,1$ claramente es cierto. Supongamos que es cierto para $n=k$, y veamos que sucede para $n=k+1$ entonces

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| \leq &\int_{t_0}^\infty g(t,s)\big[|a(s)|+|b(s)|\,|z_k(s)|+|c(s)|\,|z_k'(s)|+c_1|z_k(s)|\,|z_k'(s)| \\
&+(c_2+|f(s)|)|z_k(s)|^2+c_3|z_k(s)|^3\big]\,ds \\
\leq &\int_{t_0}^\infty g(t,s)\Big[|a(s)|+N\int_{t_0}^\infty \phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,\big\{|b(s)|+(\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
&+c_1M+(c_2+f(s))M+c_3M^2\big\}\Big]\,ds \\
\leq &\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\Big[|a(s)|+N\int_{t_0}^\infty \phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,\big\{|b(s)|+(\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
&+c_1M+(c_2+f(s))M+c_3M^2\big\}\Big]\,ds \\
&+\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}\Big[|a(s)|+N\int_{t_0}^\infty \phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,\big\{|b(s)|+(\alpha_1+\alpha_2)|c(s)| \\
&+c_1M+(c_2+f(s))M+c_3M^2\big\}\Big]\,ds
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds\\ &+\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{s}^{\infty} e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds,\end{aligned}$$

para el primer término ya tenemos una desigualdad y para el segundo tenemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{s}^{\infty} e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty} e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,d\tau\,ds\\ &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,ds\,d\tau\\ &\quad+e^{-\alpha t}\int_{t}^{\infty}\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,ds\,d\tau\\ &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^{\tau} e^{(\alpha+\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau\\ &\quad+e^{-\alpha t}\int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha+\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau\\ &\leq e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,K e^{(\alpha+\beta)\tau}\,d\tau\\ &\quad+e^{-\alpha t}\int_{t}^{\infty} e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,K e^{(\alpha+\beta)t}\,d\tau\\ &= K\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau+K\int_{t}^{\infty} e^{\beta(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau.\end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,ds \leq K\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)}|a(s)|\,ds+K\int_{t_0}^{\infty}\phi(t,s)|a(s)|\,ds.$$

Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{\infty}\phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^{s} e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds\\ &+\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{s}^{\infty} e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds,\end{aligned}$$

y nuevamente tenemos

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^s e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{\alpha t}\int_t^\infty\int_{t_0}^s e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,d\tau\,ds\\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^t\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,ds\,d\tau\\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty\int_\tau^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)||b(s)|\,ds\,d\tau\\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau\\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{\beta\tau}|a(\tau)|\int_\tau^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}|b(s)|\,ds\,d\tau\\
&\leq e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,Ke^{-(\alpha+\beta)t}\,d\tau\\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,Ke^{-(\alpha+\beta)\tau}\,d\tau\\
&= K\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau + K\int_t^\infty e^{\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau.
\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)}|b(s)|\int_{t_0}^\infty \phi(s,\tau)|a(\tau)|\,d\tau\,ds \leq K\int_t^\infty e^{\beta(t-s)}|a(s)|\,ds + K\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)|a(s)|\,ds.$$

Y para c y f tenemos la misma desigualdad. Además,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}\int_s^\infty e^{\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t\int_s^\infty e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,d\tau\,ds\\
&= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^\tau e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,ds\,d\tau\\
&\quad + e^{-\alpha t}\int_t^\infty\int_{t_0}^t e^{(\alpha+\beta)s}e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,ds\,d\tau\\
&= e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^\tau e^{(\alpha+\beta)s}\,ds\,d\tau\\
&\quad + e^{-\alpha t}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\int_{t_0}^t e^{(\alpha+\beta)s}\,ds\,d\tau\\
&\leq e^{-\alpha t}\int_{t_0}^t e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,\frac{e^{(\alpha+\beta)\tau}}{\alpha+\beta}\,d\tau\\
&\quad + e^{-\alpha t}\int_t^\infty e^{-\beta\tau}|a(\tau)|\,\frac{e^{(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\,d\tau\\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau + \int_t^\infty e^{\beta(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\right),
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty e^{\alpha(t-s)} \int_{t_0}^s e^{-\beta(s-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\,ds &= e^{\alpha t}\int_t^\infty \int_{t_0}^s e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,d\tau\,ds \\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^t \int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,ds\,d\tau \\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty \int_\tau^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,ds\,d\tau \\
&= e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_t^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}\,ds\,d\tau \\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{\beta\tau}|a(\tau)| \int_\tau^\infty e^{-(\alpha+\beta)s}\,ds\,d\tau \\
&\le e^{\alpha t}\int_{t_0}^t e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,\frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\,d\tau \\
&\quad + e^{\alpha t}\int_t^\infty e^{\beta\tau}|a(\tau)|\,\frac{e^{-(\alpha+\beta)\tau}}{\alpha+\beta}\,d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau + \int_t^\infty e^{\alpha(t-\tau)}|a(\tau)|\,d\tau\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}(t)| &\le \Bigg(1 + 3KN + (\alpha_1+\gamma_2)3KN + MN(c_1+c_2)\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right) \\
&\quad + 3KMN + c_3M^2N\left(\frac{2}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}\right)\Bigg)\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)|a(s)|\,ds \\
&\le N\int_{t_0}^\infty \phi(t,s)|a(s)|\,ds.
\end{aligned}$$

Y ahora para la derivada tenemos que

$$\begin{aligned}
z'(t) = &-\int_{t_0}^t \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)}\big[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1z(s)z'(s) + (c_2+f(s))z^2(s) \\
&+ c_3z^3(s)\big]\,ds + \int_t^\infty \gamma_2 e^{\gamma_2(t-s)}\big[a(s) + b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1z(s)z'(s) \\
&+ (c_2+f(s))z^2(s) + c_3z^3(s)\big]\,ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| \leq & \int_{t_0}^{t} \alpha_1 e^{-\alpha_1(t-s)} \big[|a(s)| + |b(s)|\,|z_k(s)| + |c(s)|\,|z'_k(s)| + c_1|z_k(s)|\,|z'_k(s)| \\
& + (c_2 + |f(s)|)|z_k(s)|^2 + c_3|z_k(s)|^3\big]\, ds \\
& + \int_{t}^{\infty} \gamma_2 e^{\gamma_2(t-s)} \big[|a(s)| + |b(s)|\,|z_k(s)| + |c(s)|\,|z'_k(s)| + c_1|z_k(s)|\,|z'_k(s)| \\
& + (c_2 + |f(s)|)|z_k(s)|^2 + c_3|z_k(s)|^3\big]\, ds \\
\leq & \ \alpha_1 \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \Big[|a(s)| + N \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|\, d\tau\, \big(|b(s)| + (\alpha_1+\gamma_2)|c(s)| \\
& + c_1 M + (c_2 + f(s))M + c_3M^2\big)\Big]\, ds \\
& + \gamma_2 \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} \Big[|a(s)| + N \int_{t_0}^{\infty} \phi(s,\tau)|a(\tau)|\, d\tau\, \big(|b(s)| + (\alpha_1+\gamma_2)|c(s)| \\
& + c_1 M + (c_2 + f(s))M + c_3M^2\big)\Big]\, ds
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
|z'_{k+1}(t)| \leq & (\alpha_1+\gamma_2)\Bigg(1 + 3KN + (\alpha_1+\gamma_2)3KN + MN(c_1+c_2)\left(\frac{2}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right) \\
& + 3KMN + c_3M^2N\left(\frac{2}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\Bigg) \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\, ds \\
\leq & (\alpha_1+\gamma_2)N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\, ds.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
N(\alpha^2 - \beta^2 - 3K(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha_1+\gamma_2+M) - M(c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta)) \geq \alpha^2 - \beta^2
$$

y se tiene que

$$
\begin{aligned}
N\left(1 - 3K(1+\alpha_1+\gamma_2+M) - M(c_1+c_2+c_3M)\left(\frac{2}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right)\right) &\geq 1 \\
N - 3KN(1+\alpha_1+\gamma_2+M) - MN(c_1+c_2+c_3M)\left(\frac{2}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right) &\geq 1 \\
1 + 3KN(1+\alpha_1+\gamma_2+M) + MN(c_1+c_2+c_3M)\left(\frac{2}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right) &\leq N.
\end{aligned}
$$

Notemos que $N > 0$ ya que

$$
K < \frac{\alpha^2 - \beta^2 - (c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta)M}{3(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha+\beta+M)},
$$

además, tenemos que

$$
(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) > (c_1+c_2+c_3M)(3\alpha-\beta)M
$$

puesto que si $0 < \beta \leq \alpha/2$ entonces

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{3\alpha - \beta} \geq \frac{3\alpha}{10} > (c_1 + c_2 + c_3 M)M;$$

y con esto $K > 0$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \geq t_0$ tenemos que

$$|z_n(t)| \leq N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds \quad \text{y} \quad |z_n'(t)| \leq (\alpha_1 + \gamma_2)N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds,$$

entonces podemos decir que

$$|z(t)| \leq N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds \quad \text{y} \quad |z_n'(t)| \leq (\alpha_1 + \gamma_2)N \int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds.$$

Luego,

$$z(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds\right) \quad \text{y} \quad z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} \phi(t,s)|a(s)|\,ds\right).$$

□

Notemos que la elección de β depende de la elección de M. En los corolarios 1 y 2, M satisface

$$2(c_1 + c_2)M + 3c_3 M^2 < \frac{|\operatorname{Re}\gamma_1 \operatorname{Re}\gamma_2|}{|\operatorname{Re}\gamma_1| + |\operatorname{Re}\gamma_2| + 2|\operatorname{Re}\gamma_1 \operatorname{Re}\gamma_2|}$$

y en el último corolario

$$(c_1 + c_2 + c_3 M)M < \frac{3\alpha}{10}$$

y necesitamos que $0 < \beta \leq \alpha/2$, para que sea $K > 0$. Es fácil ver que si M satisface la segunda desigualdad entonces satisface la primera. Además, para los casos $a, b \to 0$ cuando $t \to \infty$ ó $a, b \in L^p$ podemos encontrar t_0 tal que se satisfacen las condiciones que aseguran la existencia de $z \in \mathcal{C}_0^1$ como solución de (3.5) y que, dependiendo del caso ($\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 < 0$ ó $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 > 0$ ó $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$ y $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$), se cumplan las desigualdades

$$\int_t^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K$$

ó

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K$$

ó

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K \quad \text{y} \quad \int_t^{\infty} e^{(\alpha-\beta)(t-s)}|b(s)|\,ds \leq K$$

para todo $t \geq t_0$; y lo mismo para c y f, donde

$$0 < K < \frac{\alpha - \beta - (c_1 + c_2 + c_3 M)M}{(\alpha - \beta)(1 + \alpha + \beta + M)}$$

ó

$$0 < K < \frac{\alpha^2 - \beta^2 - (c_1 + c_2 + c_3 M)(3\alpha - \beta)M}{3(\alpha^2 - \beta^2)(1 + \alpha + \beta + M)}.$$

El siguiente lema tiene relación con condiciones integrables y nos presenta un desarrollo de la solución de (3.5) como una suma de términos, donde cada término tiene una propiedad de integrabilidad.

Lema 16. *Consideremos la ecuación (3.5) y las hipótesis del lema 15. Supongamos que $a, b, c, f \in L^p[t_0, \infty)$, con $p \geq 1$. Entonces $z, z' \in L^p[t_0, \infty)$, donde z es la solución que nos entrega el lema 15. Además, si $p \in (1, 2]$ entonces podemos escribir z como*

$$z(t) = \theta(t) + \psi(t),$$

con

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\, a(s)\, ds,$$

$\theta \in L^p[t_0, \infty)$ y $\psi \in L^1[t_0, \infty)$. Y si $p \in (m, m+1]$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, podemos escribir z de la siguiente manera

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s) a(s)\, ds, \quad \theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s) \left[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2\theta_1^2(s) \right] ds$$

$$\theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s) \Bigg[b(s)\theta_{l-1} + c(s)\theta_{l-1}'(s) + c_1 \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k(s)\theta_{l-k}'(s) + c_2 \sum_{k=1}^{l-1} \theta_k(s)\theta_{l-k}(s)$$

$$+ f(s) \sum_{k=1}^{l-2} \theta_k(s)\theta_{l-1-k}(s) + c_3 \sum_{i+j+k=l} \theta_i(s)\theta_j(s)\theta_k(s) \Bigg] ds,$$

con $\theta_k, \theta_k' \in L^{p/k}[t_0, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m, \psi_m' \in L^{p/m}[t_0, \infty)$.

Demostración: Sabemos que si $a, b, c, f \in L^p[t_0, \infty)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\ell_1(|a|, \varepsilon, \cdot), \quad \ell_2(|a|, \varepsilon, \cdot) \in L^p[t_0, \infty) \cap C_0[t_0, \infty)$$

y lo mismo para b, c y f. Luego, podemos escoger t_0 de tal forma que se satisfacen las hipótesis del lema 15 y de los corolarios 1, 2 y 3, así

$$z(t), z'(t) = O\left(\int_{t_0}^{\infty} g_\beta(t,s) |a(s)|\, ds \right),$$

con $\gamma = \min\{|\operatorname{Re}\gamma_1|, |\operatorname{Re}\gamma_2|\}$, $0 < \beta \leq \gamma/2$ y

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 < 0$,

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} e^{-\beta(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\beta(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1 < 0$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$,

$$g_\beta(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > s \\ e^{\beta(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

cuando $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 > 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{t_0}^{\infty} g_\beta(\cdot,s)|a(s)|\, ds \in L^p[t_0,\infty).$$

Así, concluimos que $z, z' \in L^p[t_0,\infty)$. Notemos que z y z' son acotadas, luego $z, z' \in L^\mu[t_0,\infty)$ con $\mu \geq p$.

Ahora si $p \in (1,2]$ entonces p' su exponente conjugado pertenece a $[2,\infty)$, y como $z, z' \in L^\mu[t_0,\infty)$ con $\mu \geq p$ se tiene que $z, z' \in L^{p'}[t_0,\infty)$. Así, bz, cz', zz', $z^2 \in L^1[t_0,\infty)$ y usando el hecho que z y z' son acotadas se tiene que fz^2, $z^3 \in L^1[t_0,\infty)$. Luego, concluimos que

$$\begin{aligned} z(t) &= \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\, a(s)\, ds}_{\theta \in L^p} \\ &\quad + \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)z(s) + c(s)z'(s) + c_1 z(s)z'(s) + (c_2 + f(s))z^2(s) + c_3 z^3(s)\right] ds}_{\psi \in L^1} \\ &= \theta(t) + \psi(t), \end{aligned}$$

donde

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\, ds,$$

$\theta \in L^p[t_0,\infty)$ y $\psi \in L^1[t_0,\infty)$.

Para la otra parte, tenemos que si $p \in (m, m+1]$ entonces bz, cz', zz', $z^2 \in L^{p/2}[t_0,\infty)$ y fz^2, $z^3 \in L^{p/3}[t_0,\infty)$. Así, podemos escribir z como

$$z(t) = \theta_1(t) + \psi_2(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\, ds,$$

$\theta_1 \in L^p[t_0,\infty)$ y $\psi_2 \in L^{p/2}[t_0,\infty)$. Luego, si $m = 2$ está demostrado el resultado.

Supongamos que $m > 2$, entonces reemplazando z en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} z(t) &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)(\theta_1(s)+\psi_2(s)) + c(s)(\theta_1'(s)+\psi_2'(s)) \\ &\quad + c_1(\theta_1(s)+\psi_2(s))(\theta_1'(s)+\psi_2'(s)) + c_2(\theta_1(s)+\psi_2(s))^2\big]\,ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[f(s)z^2(s) + c_3 z^3(s)\big]\,ds \\ &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2[\theta_1(s)]^2\big]\,ds \\ &\quad + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\psi_2(s) + c(s)\psi_2'(s) + c_1\theta_1(s)\psi_2'(s) + c_1(\theta_1'(s)+\psi_2'(s))\psi_2(s) \\ &\quad + 2c_2\theta_1(s)\psi_2(s) + c_2\psi_2^2(s) + f(s)z^2(s) + c_3 z^3(s)\big]\,ds; \end{aligned}$$

tomamos

$$\theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2[\theta_1(s)]^2\big]\,ds$$

y ψ_3 como el resto; y tenemos que $\theta_2 \in L^{p/2}[t_0,\infty)$, $\psi_2 \in L^{p/3}[t_0,\infty)$ y podemos escribir z como

$$z(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) + \psi_3(t).$$

Supongamos que podemos escribir z como

$$z(t) = \varphi_k(t) + \psi_{k+1}(t) \quad \text{con} \quad \varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{k} \theta_l(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\,ds, \quad \theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\theta_1(s)+c(s)\theta_1'(s)+c_1\theta_1(s)\theta_1'(s)+c_2\theta_1^2(s)\big]\,ds$$

y para $l \geq 2$

$$\begin{aligned} \theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[& b(s)\theta_{l-1} + c(s)\theta_{l-1}'(s) + c_1\sum_{i=1}^{l-1}\theta_i(s)\theta_{l-i}'(s) + c_2\sum_{i=1}^{l-1}\theta_i(s)\theta_{l-i}(s) \\ & + f(s)\sum_{i=1}^{l-2}\theta_i(s)\theta_{l-1-i}(s) + c_3\sum_{i+j+n=l}\theta_i(s)\theta_j(s)\theta_n(s)\Bigg]\,ds, \end{aligned}$$

$k < m-1$, $\theta_l, \theta_l' \in L^{p/l}[t_0,\infty)$ y $\psi_{k+1}, \psi_{k+1}' \in L^{p/(k+1)}[t_0,\infty)$. Sustituyamos en la ecuación, luego

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s)) + c(s)(\varphi_k'(s)+\psi_{k+1}'(s)) \\
&\quad + c_1(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))(\varphi_k'(s)+\psi_{k+1}'(s)) + c_2(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))^2 \\
&\quad + f(s)(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))^2 + c_3(\varphi_k(s)+\psi_{k+1}(s))^3\big]\,ds \\
&= \theta_1(t) + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\varphi_k(s) + c(s)\varphi_k'(s) + c_1\varphi_k(s)\varphi_k'(s) + c_2[\varphi_k(s)]^2 + f(s)[\varphi_k(s)]^2 \\
&\quad + c_3[\varphi_k(s)]^3\big]\,ds + \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\big[b(s)\psi_{k+1}(s) + c(s)\psi_{k+1}'(s) + c_1\varphi_k(s)\psi_{k+1}'(s) \\
&\quad + c_1(\varphi_k'(s)+\psi_{k+1}'(s))\psi_{k+1}(s) + 2c_2\varphi_k(s)\psi_{k+1}(s) + c_2[\psi_{k+1}(s)]^2 + 2f(s)\varphi_k(s)\psi_{k+1}(s) \\
&\quad + f(s)[\psi_{k+1}(s)]^2 + 3c_3[\varphi_k(s)]^2\psi_{k+1}(s) + 3c_3\varphi_k(s)[\psi_{k+1}(s)]^2 + c_3[\psi_{k+1}(s)]^3\big]\,ds.
\end{aligned}
$$

Simplificando la escritura tomamos $b\varphi_k + c\varphi_k' + c_1\varphi_k\varphi_k' + c_2\varphi_k^2 + f\varphi_k^2 + c_3\varphi_k^3 = \Delta$, que es el segundo término, luego tenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{l=1}^{k}(b\theta_l + c\theta_l') + c_1\Bigg(\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1}' + \sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j'\Bigg) \\
&\quad + c_2\Bigg(\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1} + \sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j\Bigg) + f\Bigg(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1} + \sum_{i+j\geq k+1}\theta_i\theta_j\Bigg) \\
&\quad + c_3\Bigg(\sum_{l=3}^{3k}\sum_{i+j+n=l}\theta_i\theta_j\theta_n\Bigg) \\
&= b\theta_1 + c\theta_1' + c_1\theta_1\theta_1' + c_2\theta_1^2 + \sum_{l=1}^{k-2}\Bigg(b\theta_{l+1} + c\theta_{l+1}' + c_1\sum_{i=1}^{l+1}\theta_i\theta_{l-i+2}' \\
&\quad + c_2\sum_{i=1}^{l+1}\theta_i\theta_{l-i+2} + f\sum_{i=1}^{l}\theta_i\theta_{l-i+1} + c_3\sum_{i+j+n=l+2}\theta_i\theta_j\theta_n\Bigg) + b\theta_k + c\theta_k' \\
&\quad + c_1\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}' + c_2\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1} + f\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta_{k-i} + c_3\sum_{i+j+n=k+1}\theta_i\theta_j\theta_n \\
&\quad + c_1\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j' + c_2\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j + f\sum_{i+j\geq k+1}\theta_i\theta_j + c_3\sum_{i+j+n>k+1}\theta_i\theta_j\theta_n \\
&= \theta_2 + \sum_{l=1}^{k-2}\theta_{l+2} + \theta_{k+1} + c_1\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j' + c_2\sum_{i+j>k+1}\theta_i\theta_j + f\sum_{i+j\geq k+1}\theta_i\theta_j \\
&\quad + c_3\sum_{i+j+n>k+1}\theta_i\theta_j\theta_n,
\end{aligned}
$$

donde tomamos

$$
\theta_{k+1} = b\theta_k + c\theta_k' + c_1\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1}' + c_2\sum_{i=1}^{k}\theta_i\theta_{k-i+1} + f\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\theta_{k-i} + c_3\sum_{i+j+n=k+1}\theta_i\theta_j\theta_n.
$$

Ahora notemos que $b\theta_l, c\theta_l' \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \le l \le k$, $\theta_i\theta_{l-i+1}', \theta_i\theta_{l-i+1} \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \le i \le l+1$ con $1 \le l \le k$, $f\theta_i\theta_{l-i+1} \in L^{p/(l+1)}$ para todo $1 \le i \le l$ con $1 \le l \le k-1$ y $\theta_i\theta_j\theta_n \in L^{p/l}$ para todo $i+j+n = l$ con $1 \le i, j, n \le l-2$ y $3 \le l \le k+1$. Para lo otros términos tenemos que $\theta_i\theta_j', \theta_i\theta_j \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j > k+1$, $f\theta_i\theta_j \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j \ge k+1$ y $\theta_i\theta_j\theta_n \in L^{p/(k+2)}$ para todo $i+j+n > k+1$.

Por otro lado, para el tercer término de la sustitución tenemos que $b\psi_{k+1}, c\psi_{k+1}', \varphi_k\psi_{k+1}', \varphi_k'\psi_{k+1}, \psi_{k+1}'\psi_{k+1}, \varphi_k\psi_{k+1}, \psi_{k+1}^2, f\varphi_k\psi_{k+1}, f\psi_{k+1}^2, \varphi_k^2\psi_{k+1}, \varphi_k\psi_{k+1}^2, \psi_{k+1}^3 \in L^{p/(k+2)}$.

Así, considerando como ψ_{k+2} la suma de todos los términos que pertenecen a $L^{p/(k+2)}$, podemos escribir z de la siguiente manera

$$z(t) = \varphi_k(t) + \theta_{k+1}(t) + \psi_{k+2}(t),$$

donde $\theta_i \in L^{p/i}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$ y $\psi_{k+2} \in L^{p/(k+2)}$.

De esta manera, iteramos el proceso hasta llegar a $k = m-1$ y obtenemos

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t),$$

donde $\theta_l \in L^{p/l}$, $l = 1, 2, \ldots, m-1$ y $\psi_m \in L^{p/m}$. □

Nota. Usando el resultado anterior observamos que si iteramos una vez más el proceso, es decir, reemplazamos

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \theta_l(t) + \psi_m(t)$$

en la ecuación integral, podemos encontrar θ_m y ψ_{m+1}, donde

$$\theta_m(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[b(s)\theta_{m-1} + c(s)\theta_{m-1}'(s) + c_1\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(s)\theta_{m-k}'(s) + c_2\sum_{k=1}^{m-1}\theta_k(s)\theta_{m-k}(s)$$

$$+f(s)\sum_{k=1}^{m-2}\theta_k(s)\theta_{m-1-k}(s) + c_3\sum_{i+j+k=m}\theta_i(s)\theta_j(s)\theta_k(s)\Bigg]\,ds,$$

$\theta_m \in L^{p/m}$ y $\psi_{m+1} \in L^1$. Así, podemos escribir z de la forma

$$z(t) = \sum_{l=1}^{m} \theta_l(t) + \psi_{m+1}(t),$$

donde

$$\theta_1(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)a(s)\,ds, \quad \theta_2(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\left[b(s)\theta_1(s) + c(s)\theta_1'(s) + c_1\theta_1(s)\theta_1'(s) + c_2\theta_1^2(s)\right]ds$$

$$\theta_l(t) = \int_{t_0}^{\infty} g(t,s)\Bigg[b(s)\theta_{l-1} + c(s)\theta_{l-1}'(s) + c_1\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(s)\theta_{l-k}'(s) + c_2\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k(s)\theta_{l-k}(s)$$

$$+f(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k(s)\theta_{l-1-k}(s)+c_3\sum_{i+j+k=l}\theta_i(s)\theta_j(s)\theta_k(s)\Bigg]\,ds,$$

con $\theta_l, \theta_l' \in L^{p/l}[t_0,\infty)$, $l=1,2,\ldots,m$ y $\psi_{m+1}, \psi_{m+1}' \in L^1[t_0,\infty)$.

3.4 Teoremas asintóticos para la ecuación de orden 3

Aquí veremos los resultados para la ecuación de orden 3. Consideraremos sólo la situación cuando las raíces caraterísticas de ecuación no perturbada (3.1) son distintas y sus partes reales son distintas. Deduciremos los resultados usando la ecuación de Riccati escalar mostrada en este capítulo. También aplicaremos los resultados presentados en el capítulo 1 a la ecuación, llevádola previamente a un sistema de ecuaciones diferenciales.

Ahora estamos en condiciones de demostrar una versión generalizada del teorema de Poincaré para la ecuación de orden 3. Para eso usaremos los resultados presentados anteriormente para la ecuación de tipo Riccati.

Teorema 11. *Consideremos la ecuación* (3.2)*. Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1=\lambda_1-\lambda_2$, $\gamma_2=\lambda_1-\lambda_3$ *y* $\gamma_3=\lambda_2-\lambda_3$*; donde* λ_i, $i=1,2,3$ *son las raíces características de la ecuación* (3.1)*;*

2. $\mathcal{L}_i(r_j)\to 0$ *cuando* $t\to\infty$*, para cada* $i=1,2$, $j=0,1,2$*; donde*

$$\mathcal{L}_1(f)(t)=\int_{t_0}^{t}e^{-\gamma(t-s)}|f(s)|\,ds \quad y \quad \mathcal{L}_2(f)(t)=\int_{t}^{\infty}e^{\gamma(t-s)}|f(s)|\,ds,$$

con $\gamma=\min\{\operatorname{Re}\gamma_1,\operatorname{Re}\gamma_3\}$.

Entonces la ecuación (3.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i=1,2,3$, *tales que*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y_i'(t)}{y_i(t)}=\lambda_i,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{y_i''(t)}{y_i(t)}=\lambda_i^2. \tag{3.6}$$

Demostración: Sabemos que la ecuación (3.2) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma (3.3), donde z_i satisface la ecuación (3.4); luego tenemos que

$$y_i'(t)=(\lambda_i+z_i(t))y_i(t)$$

y

$$y''(t)=y(t)(\lambda+z(t))^2+y(t)z'(t)$$

entonces si demostramos que para cada $i=1,2,3$ existe z_i, tal que $z_i, z_i'\to 0$, cuando $t\to\infty$, habremos probado el resultado. Además, debemos verificar que $y_i(t)\neq 0$ para todo $t\geq t_0$, para algún $t_0\in\mathbb{R}$, y así,

$$z_i(t)=\frac{y_i'(t)}{y_i(t)}-\lambda_i$$

y

$$(\lambda_i + z_i(t))^2 + z_i'(t) = \frac{y_i''(t)}{y_i(t)}.$$

Usando las hipótesis 1 y 2, tenemos que, para cada $i = 1, 2, 3$, se cumplen las condiciones del lema 15, con

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \quad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \quad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \quad c(t) = -r_2(t),$$

$$c_1 = -3, \quad c_2 = -(3\lambda_i + a_2) \quad , f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Las ecuaciones para z_i $i = 1, 2, 3$ son respectivamente

$$z_1(t) = \frac{-1}{\gamma_1 - \gamma_2} \int_{t_0}^{t} (e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)}) f_1(s, z_1(s))\, ds,$$

$$z_2(t) = \frac{-1}{\gamma_1 + \gamma_3} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s, z_2(s))\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s, z_2(s))\, ds \right)$$

y

$$z_3(t) = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_3} \int_{t}^{\infty} (e^{\gamma_3(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)}) f_3(s, z_3(s))\, ds,$$

donde

$$f_i(t, z) = -\left[r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + (r_1(t) + 2\lambda_i r_2(t))z + r_2(t)z' + 3zz' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t))z^2 + z^3\right].$$

Además, claramente se tiene que $\operatorname{Re}\gamma_2 > \operatorname{Re}\gamma_3$ y $\operatorname{Re}\gamma_2 > \operatorname{Re}\gamma_1$, luego $\gamma \leq \operatorname{Re}\gamma_i$ para $i = 1, 2, 3$. Verificando las hipótesis para z_1, tenemos que claramente las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + (3\lambda_1 + a_2)\lambda + 3\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_1$$

son distintas y con parte real distinta de cero por la hipótesis 1, puesto que las raíces de este polinomio son $-\gamma_1$ y $-\gamma_2$; además la función de Green es

$$(\gamma_2 - \gamma_1)\, g(t, s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases},$$

luego, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(a)(t) &= \left| \int_{t_0}^{\infty} g(t, s)\, a(s)\, ds \right| + \left| \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t, s)\, a(s)\, ds \right| \\
&= \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|} \Bigg(\left| \int_{t_0}^{t} (e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)})(r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s))\, ds \right| \\
&\quad + \left| \int_{t_0}^{t} (\gamma_2 e^{-\gamma_2(t-s)} - \gamma_1 e^{-\gamma_1(t-s)})(r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s))\, ds \right| \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|} \Bigg(\int_{t_0}^{t} (e^{-\operatorname{Re}\gamma_1(t-s)} + e^{-\operatorname{Re}\gamma_2(t-s)}) |r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)|\, ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} (|\gamma_2| e^{-\operatorname{Re}\gamma_2(t-s)} + |\gamma_1| e^{-\operatorname{Re}\gamma_1(t-s)}) |r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)|\, ds \Bigg) \\
&\leq \frac{2 + |\gamma_1| + |\gamma_2|}{|\gamma_1 - \gamma_2|} \int_{t_0}^{t} e^{-\operatorname{Re}\gamma_1(t-s)} (|\lambda_1|^2 |r_2(s)| + |\lambda_1||r_1(s)| + |r_0(s)|)\, ds \\
&\leq \frac{2 + |\gamma_1| + |\gamma_2|}{|\gamma_1 - \gamma_2|} [|\lambda_1|^2 \mathcal{L}_1(r_2)(t) + |\lambda_1| \mathcal{L}_1(r_1)(t) + \mathcal{L}_1(r_0)(t)].
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{G}(a) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Análogamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(b)(t) &= \int_{t_0}^{\infty} \left(|g(t,s)| + \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t,s) \right| \right) |b(s)|\, ds \\
&= \frac{1}{|\gamma_1 - \gamma_2|} \int_{t_0}^{t} \Big(\left| e^{-\gamma_1 (t-s)} - e^{-\gamma_2 (t-s)} \right| \\
&\quad + \left| \gamma_2 e^{-\gamma_2 (t-s)} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 (t-s)} \right| \Big) |r_1(s) + 2\lambda_1 r_2(s)|\, ds \\
&\leq \frac{2 + |\gamma_1| + |\gamma_2|}{|\gamma_1 - \gamma_2|} [2|\lambda_1| \mathcal{L}_1(r_2)(t) + \mathcal{L}_1(r_1)(t)].
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{L}(b) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De forma más directa se obtiene que $\mathcal{L}(c), \mathcal{L}(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, ya que $c = f = r_2$.

Para z_2 y z_3 se pueden verificar las hipótesis de la misma manera. Así, existe z_i para cada $i = 1, 2, 3$ tales que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$. Como z_i esta definida en $[t_0, \infty)$ y $z_i(t) \in \mathbb{C}$ para todo $t \geq t_0$, tenemos que $y_i(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$.

Por lo tanto, se ha demostrado el teorema. □

Observemos que la condición sobre r_0 se puede relajar a $\mathcal{G}_i(r_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$, $i = 1, 2, 3$, donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(f)(t) &= \frac{1}{|\gamma_2 - \gamma_1|} \left(\left| \int_{t_0}^{t} \left[e^{-\gamma_1 (t-s)} - e^{-\gamma_2 (t-s)} \right] f(s)\, ds \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_{t_0}^{t} \left[\gamma_2) e^{-\gamma_2 (t-s)} - \gamma_1 e^{-\gamma_1 (t-s)} \right] f(s)\, ds \right| \right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_2(f)(t) = \frac{1}{|\gamma_1 + \gamma_3|} \left[(1 + \gamma_3) \left| \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3 (t-s)} f(s)\, ds \right| + (1 + \gamma_1) \left| \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1 (t-s)} f(s)\, ds \right| \right];$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2(f)(t) &= \frac{1}{|\gamma_2 - \gamma_3|} \left(\left| \int_{t}^{\infty} \left[e^{\gamma_3 (t-s)} - e^{\gamma_2 (t-s)} \right] f(s)\, ds \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_{t}^{\infty} \left[\gamma_2 e^{\gamma_2 (t-s)} - \gamma_3 e^{\gamma_3 (t-s)} \right] f(s)\, ds \right| \right);
\end{aligned}$$

aplicando el lema 15 a la ecuación (3.4). Por ejemplo, r_0 podría ser condicionalmente integrable.

Notemos que, usando las ecuaciones (3.6) podemos deducir el comportamiento asintótico de y_i' e y_i''. Entonces tenemos

$$y_i' = (\lambda_i + o(1)) y_i \qquad \text{e} \qquad y_i'' = (\lambda_i^2 + o(1)) y_i.$$

Este resultado generaliza el teorema de Poincaré, que pide $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$; y aquí usamos el hecho que $\mathcal{L}(r_i) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, aquí se consideran muchos más casos. Una condición más general para r_i, $i = 1, 2, 3$ puede ser

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t}^{t+1} |r_i(s)|\, ds = 0.$$

Sin embargo, dependiendo del tipo de perturbación se puede obtener un fórmula mejor. De hecho, para el caso dado por Poincaré tenemos el siguiente resultado.

Teorema 12. *Consideremos la ecuación (3.2). Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ *y* $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; *donde* λ_i, $i = 1, 2, 3$ *son las raíces características de la ecuación (3.1);*

2. $r_i \to 0$ *cuando* $t \to \infty$, *para cada* $i = 1, 2, 3$.

Entonces la ecuación (3.2) tiene un sistema fundamental de soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$, *tales que satisfacen (3.6) y más aún, se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i'''(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^3,$$

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\Big(\prod_{j\in\mathcal{N}(i)} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} \widetilde{f}_i(s, z_i(s))\, ds \Big), \tag{3.7}$$

donde $\mathcal{N}(i) = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$,

$$\widetilde{f}_i(t, z) = -\left[r_0(t) + \lambda_i r_1(t) + \lambda_i^2 r_2(t) + (r_1(t) + 2\lambda_i r_2(t))z + r_2(t)z' + (3\lambda_i + a_2 + r_2(t))z^2 + z^3\right],$$

y $z_i, z_i' = O(\widetilde{r}_i)$, $i = 1, 2, 3$ *con*

$$\widetilde{r}_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} |r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)|\, ds,$$

$$\widetilde{r}_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)} |r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2^2 r_2(s)|\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} |r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2^2 r_2(s)|\, ds$$

$$\widetilde{r}_3(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)} |r_0(s) + \lambda_3 r_1(s) + \lambda_3^2 r_2(s)|\, ds,$$

$\gamma = \min\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_3\}$ *y* $0 < \alpha \le \gamma/2$.

Demostración: Sabemos que $\mathcal{L}_i(f) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $f \to 0$ cuando $t \to \infty$ para $i = 1, 2$, donde $\mathcal{L}_i$ son los operadores del teorema 11. Así, tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 11 y luego se tiene la existencia de tres soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$ que satisfacen las ecuaciones (3.6). Además, tenemos que

$$y_i(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} [\lambda_i + z_i(s)]\, ds \right)$$

y

$$\frac{y_i'''(t)}{y_i(t)} = (\lambda_i + z_i(t))^3 + 3(\lambda_i + z_i(t))z_i'(t) + z_i''(t),$$

donde z_i, $i = 1, 2, 3$ satisfacen

$$\begin{aligned} z_1(t) =& \frac{-1}{\gamma_1 - \gamma_2} \int_{t_0}^{t} \left(e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)}\right) f_1(s, z_1(s))\, ds, \\ z_2(t) =& \frac{-1}{\gamma_1 + \gamma_3} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s, z_2(s))\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s, z_2(s))\, ds \right) \end{aligned}$$

y

$$z_3(t) = \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\int_t^\infty \left(e^{\gamma_3(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)}\right) f_3(s, z_3(s))\, ds$$

con

$$f_i(t,z) = -\left[r_0(t)+\lambda_i r_1(t)+\lambda_i^2 r_2(t)+(r_1(t)+2\lambda_i r_2(t))z+r_2(t)z'+3zz'+(3\lambda_i+a_2+r_2(t))z^2+z^3\right].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_1(s)\, ds =& \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^t f_1(s,z_1(s))\, ds - \int_{t_0}^t e^{-\gamma_1(t-s)} f_1(s,z_1(s))\, ds\right)\right.\\
&\left. - \frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^t f_1(s,z_1(s))\, ds + \int_{t_0}^t e^{-\gamma_2(t-s)} f_1(s,z_1(s))\, ds\right)\right]\\
=& \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^t \widetilde{f}_1(s,z_1(s))\, ds + o(1)\right],\\
=& \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^t \widetilde{f}_1(s,z_1(s))\, ds + o(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_2(s)\, ds =& \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^t f_2(s,z_2(s))\, ds - \int_{t_0}^t e^{-\gamma_3(t-s)} f_2(s,z_2(s))\, ds\right)\right.\\
&+ \frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^t f_2(s,z_2(s))\, ds + \int_t^\infty e^{\gamma_1(t-s)} f_2(s,z_2(s))\, ds\right.\\
&\left.\left. - \int_{t_0}^\infty e^{\gamma_1(t_0-s)} f_2(s,z_2(s))\, ds\right)\right]\\
=& \frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\int_{t_0}^t \widetilde{f}_2(s,z_2(s))\, ds + o(1) + k_1\right]\\
=& \frac{-1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^t \widetilde{f}_2(s,z_2(s))\, ds + o(1) + \widehat{k}_1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t z_3(s)\, ds =& \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^t f_3(s,z_3(s))\, ds + \int_t^\infty e^{\gamma_3(t-s)} f_3(s,z_3(s))\, ds\right.\right.\\
&\left. - \int_{t_0}^\infty e^{\gamma_3(t_0-s)} f_3(s,z_3(s))\, ds\right) - \frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^t f_3(s,z_3(s))\, ds\right.\\
&\left.\left. + \int_t^\infty e^{\gamma_2(t-s)} f_3(s,z_3(s))\, ds - \int_{t_0}^\infty e^{\gamma_2(t_0-s)} f_3(s,z_3(s))\, ds\right)\right]\\
=& \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^t \widetilde{f}_3(s,z_3(s))\, ds + o(1) + k_2\right]\\
=& \frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^t \widetilde{f}_3(s,z_3(s))\, ds + o(1) + \widehat{k}_2,
\end{aligned}$$

usando la observación 2.4.1, que $f_i(t,z) = \widetilde{f}_i(t,z) - 3zz'$ y que

$$\int_{t_0}^t z(s)z'(s)\, ds = \left.\frac{z^2(s)}{2}\right|_{t_0}^t = \frac{z^2(t)}{2} - \frac{z^2(t_0)}{2} = c + o(1).$$

Luego, por las hipótesis 1 y 2 se cumplen las condiciones de los corolarios 1, 2 y 3 en los casos correspondientes a los z_i; con $b = -r_1 - 2\lambda_i r_2$, $c = f = -r_2$, entonces $z_i, z_i' = O(\widetilde{r}_i)$. Además, $\operatorname{Re}\gamma_2 > \operatorname{Re}\gamma_3$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > \operatorname{Re}\gamma_1$ y $\gamma \leq \operatorname{Re}\gamma_i$ para $i = 1, 2, 3$. Verificando las hipótesis para z_1, tenemos que las raíces del polinomio

$$\lambda^2 + (3\lambda_1 + a_2)\lambda + 3\lambda_1^2 + 2a_2\lambda_1 + a_1$$

tienen parte real distinta de cero, por la hipótesis 1, puesto que $\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_2 > 0$. Además, la función de Green es

$$(\gamma_2 - \gamma_1)\, g(t, s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

luego, tenemos que las hipótesis del lema 15 se cumplen (visto en la demostración del teorema 11). Además, como para todo $\varepsilon > 0$, $i = 0, 1, 2$ $\ell_1(r_i, \varepsilon, \cdot) \to 0$ cuando $t \to \infty$, dado $0 < \alpha \leq \gamma/2$ y K tal que

$$0 < K < \frac{\gamma - \alpha - (3 + 3\lambda_1 + a_2 + M)M}{(\gamma - \alpha)(1 + |\gamma_1| + |\gamma_2| + M)}$$

existe t_0 tal que para todo $t \geq t_0$

$$\int_{t_0}^{t} e^{-(\gamma-\alpha)(t-s)} |r_1(s) + 2\lambda_1 r_2(s)|\, ds \leq K$$

y lo mismo para r_2. De la misma manera se verifican las hipótesis para z_2 y z_3.

Por otro lado, de la ecuación (3.4) se deduce que $z_i'' \to 0$ cuando $t \to \infty$. Así, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_i'''(t)}{y_i(t)} = \lambda_i^3.$$

□

Aquí, podemos notar que

$$y_i''' = (\lambda_i^3 + o(1))y_i.$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar un teorema tipo Levinson.

Teorema 13. *Consideremos la ecuación* (3.2). *Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ *y* $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; *donde* λ_i, $i = 1, 2, 3$ *son las raíces características de la ecuación* (3.1);

2. $r_i \in L^1$, $i = 0, 1, 2$.

Entonces la ecuación (3.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i = 1, 2, 3$, *tales que satisfacen* (3.6) *y más aún, se tiene que*

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)}.$$

Demostración: De la misma manera que en el teorema anterior, tenemos un sistema fundamental de soluciones de la forma (3.3), donde z_i satisface (3.4), entonces probaremos que para cada $i = 1, 2, 3$ existe z_i, tal que $z_i, z_i' \to 0$ cuando $t \to \infty$, y $z_i \in L^1$. Además, sabemos que $\mathcal{L}_i(r) \to 0$ cuando $t \to \infty$, si $r \in L^1$ para $i = 1, 2$, donde $\mathcal{L}_i$ son los operadores del teorema 11. Así, tenemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 11 y luego se tiene la existencia de tres soluciones y_i, $i = 1, 2, 3$ que satisfacen las ecuaciones (3.6).

Usando las hipótesis 1 y 2, vemos que se cumplen las condiciones de los lemas 15 y 16 para la ecuación (3.4), luego, las del teorema 11, con $p = 1$,

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \quad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \quad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \quad c(t) = -r_2(t),$$

$$c_1 = -3, \quad c_2 = -(3\lambda_i + a_2) \quad , f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Así, existe z_i tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$. Entonces $z_i \in L^1$ y así $\int_{t_0}^t z_i(s)\, ds = c + o(1)$. En particular, escogemos c tal que $e^{\int_{t_0}^t z_i(s)\, ds} = 1 + o(1)$, luego queda demostrado el teorema. $\square$

Otro tipo de teorema es el de Hartman-Wintner, que considera perturbaciones en L^p con $p \in (1, 2]$. Ahora veremos un resultado de este tipo para la ecuación (3.2).

Teorema 14. *Consideremos la ecuación* (3.2). *Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ *y* $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$; *donde* λ_i, $i = 1, 2, 3$ *son las raíces características de la ecuación* (3.1);
2. $r_i \in L^p$, $i = 0, 1, 2$ *y* $p \in (1, 2]$.

Entonces la ecuación (3.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i = 1, 2, 3$, *tales que satisfacen* (3.6) *y en particular se tiene*

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(- \prod_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + \lambda_i^2 r_2(s)]\, ds \right),$$

donde $\mathcal{N}(i) = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Demostración: Tenemos soluciones de la ecuación (3.2) de la forma (3.3), donde z_i satisface (3.4), para $i = 1, 2, 3$. Vemos que se cumplen las condiciones de los lemas 15 y 16 para la ecuación (3.4), con $p \in (1, 2]$,

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \quad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a^{(i)}(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \quad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \quad c(t) = -r_2(t),$$

$$c_1 = -3, \quad c_2 = -(3\lambda_i + a_2) \quad , f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Entonces existe z_i tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$, además $z_i, z_i' \in L^p$ y podemos escribir z_i de la forma

$$z_i(t) = \theta^{(i)}(t) + \psi^{(i)}(t),$$

donde

$$\theta^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s) a^{(i)}(s)\, ds,$$

$\theta^{(i)} \in L^p$, $\psi^{(i)} \in L^1$ y g_i es la función de Green para cada z_i, $i = 1, 2, 3$, es decir,

$$(\gamma_2 - \gamma_1) g_1(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

$$-(\gamma_1 + \gamma_3) g_2(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_3(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_1(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

y

$$(\gamma_2 - \gamma_3) g_3(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq s \\ e^{\gamma_3(t-s)} - e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \leq s \end{cases}.$$

A partir de esto, tenemos que

$$\int_{t_0}^{t} z_i(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \theta^{(i)}(s)\, ds + c_i + o(1)$$

Explícitamente para cada caso tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta^{(1)}(s)\, ds &= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_1(t-s)} a^{(1)}(s)\, ds\right) - \frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)\, ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_2(t-s)} a^{(1)}(s)\, ds\right)\right] \\
&= \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}\left[\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)\, ds + o(1)\right], \\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t} a^{(1)}(s)\, ds + o(1), \\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)\right] ds + o(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta^{(2)}(s)\, ds &= \frac{-1}{\gamma_1 + \gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma_3(t-s)} a^{(2)}(s))\, ds\right) + \frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)\, ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_1(t-s)} a^{(2)}(s)\, ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_1(t_0-s)} a^{(2)}(s)\, ds\right)\right] \\
&= \frac{-1}{\gamma_1 + \gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)\, ds + o(1) + k_1\right] \\
&= \frac{-1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t} a^{(2)}(s)\, ds + o(1) + \widehat{k}_1 \\
&= \frac{1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_2 r_1(s) + \lambda_2^2 r_2(s)\right] ds + o(1) + \widehat{k}_1
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta^{(3)}(s)\, ds &= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\Bigg[\frac{1}{\gamma_3}\Bigg(\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_3(t-s)}a^{(3)}(s))\, ds \\
&\quad - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_3(t_0-s)}a^{(3)}(s)\, ds\Bigg) - \frac{1}{\gamma_2}\Bigg(\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_2(t-s)}a^{(3)}(s)\, ds \\
&\quad - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_2(t_0-s)}a^{(3)}(s)\, ds\Bigg)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\, ds + o(1) + k_2\right] \\
&= \frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\, ds + o(1) + \widehat{k}_2 \\
&= \frac{-1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} \left[r_0(s)+\lambda_3 r_1(s)+\lambda_3^2 r_2(s)\right] ds + o(1) + \widehat{k}_2
\end{aligned}
$$

usando la observación 2.4.1. Así, tenemos que

$$
\int_{t_0}^{t} z_i(s)\, ds = \prod_{j\in\mathcal{N}(i)} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}\int_{t_0}^{t}[-r_0(s)-\lambda_i r_1(s)-\lambda_i^2 r_2(s)]\, ds + \widehat{c}_i + o(1)
$$

Luego, escogemos $\widehat{c}_i$ de forma que $e^{\widehat{c}_i+o(1)} = 1+o(1)$ para $i=1,2,3$. □

Podemos generalizar la idea anterior y considerar perturbaciones en cualquier L^p, $p\geq 1$.

Teorema 15. *Consideremos la ecuación* (3.2). *Supongamos que*

1. $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1=\lambda_1-\lambda_2$, $\gamma_2=\lambda_1-\lambda_3$ *y* $\gamma_3=\lambda_2-\lambda_3$; *donde* λ_i, $i=1,2,3$ *son las raíces características de la ecuación* (3.1);
2. $r_i\in L^p$, $i=0,1,2$ *y* $p\in(m,m+1]$, *con* $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Entonces la ecuación (3.2) *tiene un sistema fundamental de soluciones* y_i, $i=1,2,3$, *tales que satisfacen* (3.6) *y en particular se tiene*

$$
y_i(t) = (1+o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{l=1}^{m}\theta_l^{(i)}(t)\, ds\right),
$$

donde

$$
\theta_1^{(i)}(t) = -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\left[r_0(s)+\lambda_i r_1(s)+\lambda_i^2 r_2(s)\right] ds,
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_2^{(i)}(t) &= \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Big[-(r_1(s)+2\lambda_i r_2(s))\theta_1^{(i)}(s) - r_2(s)(\theta_1^{(i)})'(s) - 3\theta_1^{(i)}(s)(\theta_1^{(i)})'(s) \\
&\quad - (3\lambda_i+a_2)\left[\theta_1^{(i)}(s)\right]^2\Big]\, ds
\end{aligned}
$$

$$\theta_l^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Big[-(r_1(s)+2\lambda_i r_2(s))\theta_{l-1}^{(i)} - r_2(s)\big(\theta_{l-1}^{(i)}\big)'(s) - 3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)\big(\theta_{l-k}^{(i)}\big)'(s)$$
$$-(3\lambda_i+a_2)\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)\theta_{l-k}^{(i)}(s) - r_2(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k^{(i)}(s)\theta_{l-1-k}^{(i)}(s)$$
$$-\sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\Big]\,ds$$

para $l > 2$.

Demostración: Tenemos soluciones de la ecuación (3.2) de la forma (3.3), donde z_i satisface (3.4), para $i = 1,2,3$. Vemos que se cumplen las condiciones de los lemas 15 y 16, y del teorema 11, con $p \in (m, m+1]$,

$$b_0 = 3\lambda_i^2 + 2a_2\lambda_i + a_1, \quad b_1 = 3\lambda_i + a_2$$

$$a(t) = -r_0(t) - \lambda_i r_1(t) - \lambda_i^2 r_2(t), \quad b(t) = -r_1(t) - 2\lambda_i r_2(t), \quad c(t) = -r_2(t),$$
$$c_1 = -3, \quad c_2 = -(3\lambda_i + a_2) \quad , f(t) = -r_2(t) \quad \text{y} \quad c_3 = -1.$$

Entonces existe z_i tal que $z_i, z_i' \to 0$, cuando $t \to \infty$ y $z_i \in L^p$, y como z_i es acotada, $z_i \in L^\mu$ para todo $\mu \geq p$. A partir de esto, tenemos que podemos escribir z_i como

$$z_i(t) = \varphi_m^{(i)}(t) + \psi_m^{(i)}(t), \quad \text{con} \quad \varphi_m^{(i)}(t) = \sum_{l=1}^{m}\theta_l^{(i)}(t) \quad \text{donde}$$

$$\theta_1^{(i)}(t) = -\int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\big[r_0(s) + \lambda_1 r_1(s) + \lambda_1^2 r_2(s)\big]\,ds,$$

$$\theta_2^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Big[-(r_1(s)+2\lambda_1 r_2(s))\theta_1^{(i)}(s) + r_2(s)\big(\theta_1^{(i)}\big)'(s) + 3\theta_1^{(i)}(s)\big(\theta_1^{(i)}\big)'(s)$$
$$+(3\lambda_1+a_2)\big[\theta_1^{(i)}(s)\big]^2\Big]\,ds$$

$$\theta_l^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{\infty} g_i(t,s)\Big[-(r_1(s)+2\lambda_1 r_2(s))\theta_{l-1}^{(i)} + r_2(s)\big(\theta_{l-1}^{(i)}\big)'(s) + 3\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)\big(\theta_{l-k}^{(i)}\big)'(s)$$
$$+(3\lambda_1+a_2)\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k^{(i)}(s)\theta_{l-k}^{(i)}(s) + r_2(s)\sum_{k=1}^{l-2}\theta_k^{(i)}(s)\theta_{l-1-k}^{(i)}(s)$$
$$+\sum_{j+k+n=l}\theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\Big]\,ds$$

con $\theta_l^{(i)} \in L^{p/l}$, $l = 1,2,\ldots,m$ y $\psi_m^{(i)} \in L^1$ y g_i es la función de Green para cada z_i, $i = 1,2,3$, es decir,

$$(\gamma_2 - \gamma_1)g_1(t,s) = \begin{cases} e^{-\gamma_1(t-s)} - e^{-\gamma_2(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t \leq s \end{cases},$$

$$-(\gamma_1+\gamma_3)g_2(t,s)=\begin{cases} e^{-\gamma_3(t-s)} & \text{si } t\geq s\\ e^{\gamma_1(t-s)} & \text{si } t\leq s\end{cases}$$

y

$$(\gamma_2-\gamma_3)g_3(t,s)=\begin{cases} 0 & \text{si } t\geq s\\ e^{\gamma_3(t-s)}-e^{\gamma_2(t-s)} & \text{si } t\leq s\end{cases}.$$

Así, para z_i tenemos

$$\int_{t_0}^t z_i(s)\,ds=\int_{t_0}^t \varphi_m^{(i)}(s)\,ds+c_i+o(1),$$

y ahora escogemos c_i de modo que $e^{c_i+o(1)}=1+o(1)$ para $i=1,2,3$. □

Nota. Observemos que para el primer término de la suma, en cada caso, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \theta_1^{(1)}(s)\,ds =&\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^t a^{(1)}(s)\,ds-\int_{t_0}^t e^{-\gamma_1(t-s)}a^{(1)}(s)\,ds\right)-\frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^t a^{(1)}(s)\,ds\right.\right.\\ &\left.\left.+\int_{t_0}^t e^{-\gamma_2(t-s)}a^{(1)}(s)\,ds\right)\right]\\ =&\frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\left[\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^t a^{(1)}(s)\,ds+o(1)\right],\\ =&\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^t a^{(1)}(s)\,ds+o(1)\\ =&\frac{-1}{\gamma_1\gamma_2}\int_{t_0}^t\left[r_0(s)+\lambda_1 r_1(s)+\lambda_1^2 r_2(s)\right]ds+o(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \theta_1^{(2)}(s)\,ds =&\frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^t a^{(2)}(s)\,ds-\int_{t_0}^t e^{-\gamma_3(t-s)}a^{(2)}(s)\,ds\right)+\frac{1}{\gamma_1}\left(\int_{t_0}^t a^{(2)}(s)\,ds\right.\right.\\ &\left.\left.+\int_{t}^\infty e^{\gamma_1(t-s)}a^{(2)}(s)\,ds-\int_{t_0}^\infty e^{\gamma_1(t_0-s)}a^{(2)}(s)\,ds\right)\right]\\ =&\frac{-1}{\gamma_1+\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\int_{t_0}^t a^{(2)}(s)\,ds+o(1)+k_1\right]\\ =&\frac{-1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^t a^{(2)}(s)\,ds+o(1)+\widehat{k}_1\\ =&\frac{1}{\gamma_1\gamma_3}\int_{t_0}^t\left[r_0(s)+\lambda_2 r_1(s)+\lambda_2^2 r_2(s)\right]ds+o(1)+\widehat{k}_1\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \theta_1^{(3)}(s)\,ds =& \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\frac{1}{\gamma_3}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\,ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_3(t-s)}a^{(3)}(s))\,ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_3(t_0-s)}a^{(3)}(s)\,ds\right)\right.\\
&\left. - \frac{1}{\gamma_2}\left(\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\,ds + \int_{t}^{\infty} e^{\gamma_2(t-s)}a^{(3)}(s)\,ds - \int_{t_0}^{\infty} e^{\gamma_2(t_0-s)}a^{(3)}(s)\,ds\right)\right]\\
=& \frac{1}{\gamma_2-\gamma_3}\left[\left(\frac{1}{\gamma_3}-\frac{1}{\gamma_2}\right)\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\,ds + o(1) + k_2\right]\\
=& \frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} a^{(3)}(s)\,ds + o(1) + \widehat{k}_2\\
=& \frac{-1}{\gamma_2\gamma_3}\int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_3 r_1(s) + \lambda_3^2 r_2(s)\right]ds + o(1) + \widehat{k}_2
\end{aligned}
$$

usando la observación 2.4.1. Y así cada uno de los términos de la suma tiene una expresión en términos de los r_i, $i = 0, 1, 2$ y de los $\theta_l^{(i)}$ anteriores.

Una afirmación que se ha hecho en todos los teoremas pero que no se ha demostrado es que y_i, $i = 1, 2, 3$ forman un sistema fundamental de soluciones. Esto se deduce fácilmente calculando el wronskiano de y_i, $i = 1, 2, 3$

$$
\begin{aligned}
W[y_1, y_2, y_3] =& \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = y_1[y_2'y_3'' - y_2''y_3'] - y_2[y_1'y_3'' - y_1''y_3' + y_3[y_1'y_2'' - y_1''y_2']\\
=& y_1y_2y_3\left[\frac{y_2'}{y_2}\frac{y_3''}{y_3} - \frac{y_2''}{y_2}\frac{y_3'}{y_3} + \frac{y_1''}{y_1}\frac{y_3'}{y_3} - \frac{y_1'}{y_1}\frac{y_3''}{y_3} + \frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2''}{y_2} - \frac{y_1''}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}\right].
\end{aligned}
$$

Además, $y_1(t), y_2(t), y_3(t) \neq 0$ para todo $t_0 \leq t$ y

$$
\lim_{t\to\infty}\left[\frac{y_2'}{y_2}\frac{y_3''}{y_3} - \frac{y_2''}{y_2}\frac{y_3'}{y_3} + \frac{y_1''}{y_1}\frac{y_3'}{y_3} - \frac{y_1'}{y_1}\frac{y_3''}{y_3} + \frac{y_1'}{y_1}\frac{y_2''}{y_2} - \frac{y_1''}{y_1}\frac{y_2'}{y_2}\right](t) = (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_1) \neq 0.
$$

Luego, existe t_1 tal que $W[y_1, y_2, y_3](t_1) \neq 0$. Así, y_i, $i = 1, 2, 3$ son linealmente independientes. Observemos que este sirve para todos los teoremas.

3.4.1 Resultados vía sistemas

Ahora veremos las fórmulas que se obtienen para la ecuación (3.2) usando la teoría presentada el capítulo 1. Veremos sólo las fórmulas para los casos $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $r_i \in L^p$ con $p > 2$, debido a que en los otros casos las fórmulas son las mismas.

Tomemos la ecuación (3.2) y llevemosla a un sitema de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
y' &= y'\\
(y')' &= y''\\
(y'')' &= -(a_2 + r_2(t))y'' - (a_1 + r_1(t))y' - (a_0 + r_0(t))y.
\end{aligned}
$$

Podemos escribir este sistema de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_0(t) & -r_1(t) & -r_2(t) \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Y con una notación más reducida tenemos

$$\mathbf{y}' = (A + S(t))\mathbf{y}, \tag{3.8}$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \qquad S(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_0(t) & -r_1(t) & -r_2(t) \end{pmatrix}.$$

Como λ_j, $j = 1, 2, 3$ son las raíces características de (3.1) entonces son también los valores propios de la matriz A. Además, como son distintas podemos diagonalizar esta matriz. Sea Q la matriz dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Entonces tomando $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$ obtenemos

$$Q\mathbf{x}' = \mathbf{y}' = (A + S(t))\mathbf{y} = (A + S(t))Q\mathbf{x}.$$

Así,

$$\mathbf{x}' = Q^{-1}(A + S(t))Q\mathbf{x} = (Q^{-1}AQ + Q^{-1}S(t)Q)\mathbf{x}.$$

Pero,

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \frac{1}{|Q|}\begin{pmatrix} \lambda_2\lambda_3^2 - \lambda_2^2\lambda_3 & \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_3^2 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_1^2\lambda_2 & \lambda_2^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \Lambda, \end{aligned}$$

donde $|Q| = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$ y

$$Q^{-1}S(t)Q = (r_{ij}(t)) = R(t),$$

donde

$$r_{ij}(t) = -\frac{r_0(t) + \lambda_j r_1(t) + \lambda_j^2 r_2(t)}{\prod_{k \in \mathcal{N}(i)}(\lambda_k - \lambda_i)},$$

y $\mathcal{N}(j) = \{1, 2, 3\} \setminus \{j\}$. Ahora tenemos el nuevo sistema

$$\mathbf{x}' = (\Lambda + R(t))\mathbf{x}. \tag{3.10}$$

Sobre este sistema aplicaremos los resultados mostrados en el capítulo 1. Pongamos $\operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_3$, $\gamma_1 = \lambda_1 - \lambda_2$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_3$ y $\gamma_3 = \lambda_2 - \lambda_3$. Suponiendo que $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ tenemos que el sistema (3.10) satisface las condiciones del teorema 1. Luego, existe un sistema de soluciones $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ o(1) \\ o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[r_{11}(s) + r_{12}(s)v_{11}(s) + r_{13}(s)v_{21}(s)\right] ds\right),$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 \\ o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_2(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[r_{22}(s) + r_{21}(s)v_{12}(s) + r_{23}(s)v_{22}(s)\right] ds\right),$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} o(1) \\ o(1) \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_3(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[r_{33}(s) + r_{31}(s)v_{13}(s) + r_{32}(s)v_{23}(s)\right] ds\right),$$

donde

$$v_{j1}(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_{11}(s)|\, ds\right),$$

$$v_{j2}(t) = O\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|r_{22}(s)|\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_{22}(s)|\, ds\right),$$

$$v_{j3}(t) = O\left(\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|r_{33}(s)|\, ds\right),$$

y $0 < \alpha < \min\{\operatorname{Re}\gamma_1, \operatorname{Re}\gamma_3\}$. Y para la ecuación (3.2) tenemos un sistema fundamental y_i, $i = 1, 2, 3$ de soluciones de la forma

$$y_i(t) = (1 + o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\left(- \prod_{j \in \mathcal{N}(i)} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^{t} \left[r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + \lambda_i^2 r_2(s)\right]\right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t} \left[r_{ij}(s)v_{1i}(s) + r_{ik}(s)v_{2i}(s)\right] ds\right),$$

donde $j = \min \mathcal{N}(i)$ y $k = \max \mathcal{N}(i)$.

Ahora, suponiendo que $r_i \in L^p[t_0, \infty)$ para $2 \leq m < p \leq m+1$ tenemos que el sistema (3.10) satisface las condiciones del teorema 4, entonces tiene un sistema fundamental de soluciones $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ de la forma

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \\ o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_1(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[r_{11}(s) + \left\langle (r_{12}(s), r_{13}(s)), \sum_{k=1}^{m} \theta_{1k}(s) \right\rangle\right] ds\right)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_2(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[r_{22}(s) + \left\langle (r_{21}(s), r_{23}(s)), \sum_{k=1}^{m} \theta_{2k}(s) \right\rangle\right] ds\right),$$

y

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{pmatrix} o(1) \\ o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix} \exp\left(\lambda_3(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[r_{33}(s) + \left\langle (r_{12}(s), r_{13}(s)), \sum_{k=1}^{m} \theta_{2k}(s) \right\rangle\right] ds\right),$$

donde los θ_{ik} pueden ser obtenidos por las fórmulas

$$\theta_{11}(t) = \int_{t_0}^{t} G_1(t,s)\, R_{21}(s)\, ds, \quad \theta_{12}(t) = \int_{t_0}^{t} G_1(t,s)\, (R_{22}(s) - r_{11}(s)I)\, \theta_{11}(s)\, ds,$$

$$\begin{aligned}\theta_{1l}(t) = & \int_{t_0}^{t} G_1(t,s)(R_{22}(s) - r_{11}(s)I)\, \theta_{1l-1}(s)\, ds \\ & - \int_{t_0}^{t} G_1(t,s) \sum_{i=1}^{l-2} \langle R_{12}(s), \theta_{1i}(s)\rangle \theta_{1l-i-1}(s)\, ds\end{aligned}$$

$$\theta_{21}(t) = \int_{t_0}^{\infty} G_2(t,s)\, R_{32}(s)\, ds, \quad \theta_{22}(t) = \int_{t_0}^{\infty} G_2(t,s)\, (R_{33}(s) - r_{22}(s)I)\, \theta_{21}(s)\, ds,$$

$$\begin{aligned}\theta_{2l}(t) = & \int_{t_0}^{\infty} G_2(t,s)\, (R_{33}(s) - r_{22}(s)I)\theta_{2l-1}(s)\, ds \\ & - \int_{t_0}^{\infty} G_2(t,s) \sum_{i=1}^{l-2} \langle R_{23}(s), \theta_{2i}(s)\rangle \theta_{2l-i-1}(s)\, ds\end{aligned}$$

$$\theta_{31}(t) = \int_{t}^{\infty} G_3(t,s)\, R_{43}(s)\, ds, \quad \theta_{32}(t) = \int_{t}^{\infty} G_3(t,s)\, (R_{44}(s) - r_{33}(s)I)\, \theta_{31}(s)\, ds,$$

y

$$\begin{aligned}\theta_{3l}(t) = & \int_{t}^{\infty} G_3(t,s)\, (R_{44}(s) - r_{33}(s)I)\theta_{3l-1}(s)\, ds \\ & - \int_{t}^{\infty} G_3(t,s) \sum_{i=1}^{l-2} \langle R_{34}(s), \theta_{3i}(s)\rangle \theta_{3l-i-1}(s)\, ds\end{aligned}$$

para $l > 2$. Además,

$$R_{21} = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix}, \quad R_{22} = \begin{pmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad R_{12} = \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix}$$

$$R_{32} = \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{32} \end{pmatrix}, \quad R_{33} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{31} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad R_{23} = \begin{pmatrix} r_{21} \\ r_{23} \end{pmatrix}$$

$$R_{43} = \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \end{pmatrix}, \quad R_{44} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad R_{34} = \begin{pmatrix} r_{31} \\ r_{32} \end{pmatrix},$$

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{(\lambda_2-\lambda_1)(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(\lambda_3-\lambda_1)(t-s)} \end{pmatrix} & \text{si} \quad t \geq s \\ 0 & \text{si} \quad t < s \end{cases},$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(\lambda_3-\lambda_2)(t-s)} \end{pmatrix} & \text{si} \quad t \geq s \\ \begin{pmatrix} e^{(\lambda_1-\lambda_2)(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si} \quad t < s \end{cases}$$

y

$$G_3(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t > s \\ \begin{pmatrix} e^{(\lambda_1-\lambda_3)(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(\lambda_2-\lambda_3)(t-s)} \end{pmatrix} & \text{si} \quad t \leq s \end{cases}$$

Y para la ecuación (3.2) tenemos un sistema fundamental y_i, $i = 1, 2, 3$ de soluciones de la forma

$$y_i(t) = (1+o(1))e^{\lambda_i(t-t_0)} \exp\Big(- \prod_{j\in\mathcal{N}(i)} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \int_{t_0}^t [r_0(s) + \lambda_i r_1(s) + \lambda_i^2 r_2(s)]\, ds$$
$$+ \int_{t_0}^t \Big\langle (r_{ij}(s), r_{ik}(s)), \sum_{k=1}^m \theta_{ik}(s) \Big\rangle ds \Big).$$

Suponiendo que $r_i \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $r_i' \in L^1[t_0, \infty)$ tenemos que el sistema (2.10) satisface las condiciones del teorema ?? entonces existe un sistema fundamental de soluciones $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ de la forma

$$\mathbf{x}_i(t) = (e_i + o(1)) \exp\Big(\int_{t_0}^t \mu_i(s)\, ds \Big),$$

donde μ_i, $i = 1, 2, 3$ son los valores propios de la matriz $\Lambda + R(t)$. Y para la ecuación (3.2) tenemos un sistema fundamental y_i, $i = 1, 2$ de soluciones de la forma

$$y_i(t) = (1 + o(1)) \exp\Big(\int_{t_0}^t \mu_i(s)\, ds \Big).$$

Observemos que para este caso es bastante complicado deducir una fórmula mejor, es decir, precisar el comportamiento de los μ_i, $i = 1, 2, 3$.

Ahora podemos resaltar la ventaja que tiene estudiar la ecuación (3.2) a través de una ecuación de tipo Riccati, ya que vía sistema los cálculos y las expresiones a considerar son bastante complicadas de manejar en comparación con las fórmulas (3.6) y la que aparece en el teorema 15.

3.4.2 Ejemplos

1. Aquí seguiremos las mismas ideas de los ejemplos del capítulo 2. Además, incluiremos más de una pertubación en cada ecuación. Consideremos la ecuación

$$y''' - \left(1 - \frac{1}{\log t}\right) y' + \frac{\operatorname{sen} t}{\log t} y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $r_2 = 0$, $r_1(t) = 1/\log t$ y $r_0(t) = \operatorname{sen} t/\log t$. Notemos que $r_0, r_1 \to 0$ cuando $t \to \infty$ y para cualquier $p \geq 1$, $r_0, r_1 \notin L^p$, ya que

$$\frac{1}{pt^{1/p}} \leq \frac{1}{\log t} \quad \text{para todo} \quad t \geq e$$

$$\frac{|\operatorname{sen} t|}{pt^{1/p}} \leq \frac{|\operatorname{sen} t|}{\log t} \quad \text{para todo} \quad t \geq e$$

. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + \frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s}z_1(s) + 3z_1^2(s) + z_1^3(s)\right] ds\right),$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + \frac{1}{\log s}z_2(s) + 3z_2^2(s) + z_2^3(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} - \frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s}z_3(s) + 3z_3^2(s) + z_3^3(s)\right] ds\right),$$

donde $z_i, z_i' = O(\widetilde{r}_i)$, $i = 1,2,3$ con

$$\widetilde{r}_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\left|\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} + \frac{1}{\log s}\right| ds, \quad \widetilde{r}_3(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}\left|\frac{\operatorname{sen} s}{\log s} - \frac{1}{\log s}\right| ds,$$

$$\widetilde{r}_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\frac{|\operatorname{sen} s|}{\log s}\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}\frac{|\operatorname{sen} s|}{\log s}\, ds$$

y $0 < \alpha \leq 1/2$. Notemos que $r_1' \in L^1$, pero $r_0' \notin L^1$, o sea no podemos aplicar el teorema ??. Sin embargo, podemos dar una fórmula para las soluciones. Como r_0 es condicionalmente integrable, entonces podemos decir que

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s}z_1(s) + 3z_1^2(s) + z_1^3(s)\right] ds\right),$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left[\frac{1}{\log s}z_2(s) + 3z_2^2(s) + z_2^3(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[-\frac{1}{\log s} + \frac{1}{\log s}z_3(s) + 3z_3^2(s) + z_3^3(s)\right] ds\right).$$

2. Consideremos la ecuación

$$y''' - y' + \cos(t^2)y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $r_2 = 0$, $r_1 = 0$ y $r_0(t) = \cos(t^2)$. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\cos(s^2) + 3z_1^2(s) + z_1^3(s)\right] ds\right),$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left[\cos(s^2) + 3z_2^2(s) + z_2^3(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[\cos(s^2) + 3z_3^2(s) + z_3^3(s)\right] ds\right),$$

donde $z_i, z_i' = O\left(\widetilde{r}_i\right)$, $i = 1,2,3$ con

$$\widetilde{r}_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\left|\cos(s^2)\right| ds, \quad \widetilde{r}_3(t) = \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}\left|\cos(s^2)\right| ds,$$

$$\widetilde{r}_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|\cos(s^2)|\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}|\cos(s^2)|\, ds$$

y $0 < \alpha \leq 1/2$. Y como r_0 es condicionalmente integrable, entonces podemos decir que

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[3z_1^2(s) + z_1^3(s)\right] ds\right),$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left[3z_2^2(s) + z_2^3(s)\right] ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left[3z_3^2(s) + z_3^3(s)\right] ds\right).$$

3. El último ejemplo que mostraremos es una perturbación que esta en L^q para algún $q \geq 1$. Consideremos la ecuación para $p \geq 1$

$$y''' - y' + \frac{1}{t^{1/p}}y = 0.$$

Aquí, tenemos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $r_1, r_2 = 0$ y $r_0(t) = 1/t^{1/p}$. Notemos que $r_0 \notin L^p$ pero $r_0 \in L^q$ para $q > p$. Para $1 \leq p < 2$ podemos aplicar el teorema 14. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^{1/p}}\, ds\right),$$

$$y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^{1/p}}\, ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s^{1/p}}\, ds\right),$$

Para $p \geq 2$ podemos aplicar el teorema 15. Tenemos $p+1 \in (m, m+1]$ y $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Entonces existe un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$y_1(t) = (1+o(1))e^{(t-t_0)} \exp\left(\int_{t_0}^{t}\varphi_m^{(1)}(s)\, ds\right), \quad y_2(t) = (1+o(1)) \exp\left(\int_{t_0}^{t}\varphi_m^{(2)}(s)\, ds\right)$$

y

$$y_3(t) = (1+o(1))e^{-(t-t_0)} \exp\left(\int_{t_0}^{t}\varphi_m^{(3)}(s)\, ds\right),$$

con

$$\varphi_m^{(i)}(t) = \sum_{l=1}^{m}\theta_l^{(i)}(t),$$

donde

$$\theta_1^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)}\right) \frac{1}{s^{1/p}}\, ds,$$

$$\theta_2^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)}\right) \left[-3\theta_1^{(i)}(s)\left(\theta_1^{(i)}\right)'(s) - 3\left[\theta_1^{(i)}(s)\right]^2\right] ds,$$

$$\theta_l^{(1)}(t) = \int_{t_0}^{t} \left(e^{-(t-s)} - e^{-2(t-s)}\right) \left[-3\sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(1)}(s)\left(\theta_{l-k}^{(1)}\right)'(s) - 3\sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(1)}(s)\theta_{l-k}^{(i)}(s) - \sum_{j+k+n=l} \theta_j^{(1)}(s)\theta_k^{(1)}(s)\theta_n^{(1)}(s)\right] ds,$$

$$\theta_1^{(2)}(t) = \frac{-1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} \frac{1}{s^{1/p}}\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{(t-s)} \frac{1}{s^{1/p}}\, ds\right),$$

$$\theta_2^{(2)}(t) = \frac{-1}{2}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} - 3\theta_1^{(2)}(s)\left(\theta_1^{(2)}\right)'(s)\, ds + \int_{t}^{\infty} e^{(t-s)} - 3\theta_1^{(2)}(s)\left(\theta_1^{(2)}\right)'(s)\, ds\right),$$

$$\theta_l^{(2)}(t) = \frac{-1}{2}\Bigg(\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} \left[-3\sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(i)}(s)\left(\theta_{l-k}^{(i)}\right)'(s) - \sum_{j+k+n=l} \theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\right] ds + \int_{t}^{\infty} e^{(t-s)} \left[-3\sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(i)}(s)\left(\theta_{l-k}^{(i)}\right)'(s) - \sum_{j+k+n=l} \theta_j^{(i)}(s)\theta_k^{(i)}(s)\theta_n^{(i)}(s)\right] ds\Bigg),$$

$$\theta_1^{(3)}(t) = \int_{t}^{\infty} \left(e^{(t-s)} - e^{2(t-s)}\right) \frac{1}{s^{1/p}}\, ds,$$

$$\theta_2^{(3)}(t) = \int_{t}^{\infty} \left(e^{(t-s)} - e^{2(t-s)}\right) \left[-3\theta_1^{(3)}(s)\left(\theta_1^{(3)}\right)'(s) + 3\left[\theta_1^{(3)}(s)\right]^2\right] ds$$

y

$$\theta_l^{(3)}(t) = \int_{t}^{\infty} \left(e^{(t-s)} - e^{2(t-s)}\right) \left[-3\sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(3)}(s)\left(\theta_{l-k}^{(3)}\right)'(s) + 3\sum_{k=1}^{l-1} \theta_k^{(3)}(s)\theta_{l-k}^{(3)}(s) - \sum_{j+k+n=l} \theta_j^{(3)}(s)\theta_k^{(3)}(s)\theta_n^{(3)}(s)\right] ds$$

para $l > 2$.

Bibliografía

[1] H. Behncke y C. Remling, 1997, *Asymptotic Integration of Linear Differential Equations*, J. Math. Anal. Appl. 210, 585-597.

[2] Richard Bellman, 1953, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc.

[3] E. Coddington y N. Levinson, 1955, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Malabar, Florida: Robert E. Krieges.

[4] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath and Company, Boston 1965.

[5] M. S. P. Eastham, 1989, *The Asymptotic Solutions of Linear Differential System*(Applications of The Levinson's Theorem), Clarendon Press, Oxford.

[6] G. Farkas, 2001, *On the asymptotics of solutions of Poincaré difference systems*, J. Difference Equations and Appl. 7, 183-191.

[7] M. Fedoryuk, 1983, *Asymptotic Analisys* (Linear Ordinary Differential Equations), Springer-Verlag.

[8] W. Harris y D. Lutz, 1977, *A Unified Theory of Asymptotic Integration*, J. Math. Anal. Appl., 57, 571-586.

[9] O. Perron, 1909, *Über einen Satz des Henr Poincaré*, J. Reine Angew. Math. 136, 17-37.

[10] M. Pinto, *Null Solutions of Difference Systems Under Vanishing Perturbation*, J. Difference Equations and Appl., 9, 1-13.

[11] M. Pinto, *A Generalization to Poincaré's Theorem for Recurrent Systems*, submitted.

[12] H. Poincaré, 1885, *Sur les Equations Linéaires aux Différentielles et aux Differénces Finies*, Amer. J. Math. 7 , 203-258.