PLANOS PROYECTIVOS DE ORDEN 27 QUE ADMITEN A PSL(3,3) COMO UN GRUPO DE COLINEACIONES.

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS BASICAS
Y FARMACEUTICAS

por

RAUL FRANCISCO FIGUEROA GUERRERO

Marzo, 1982

Patrocinante: Dr. Oscar Barriga

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

I N F O R M E   D E   A P R O B A C I O N
T E S I S   D E   M A G I S T E R

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la Tesis de Magister presentada por el Candidato

Raúl Francisco Figueroa Guerrero

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias Matemáticas

Patrocinante de Tesis ________________ Oscar Barriga

Comisión Informante de Tesis ________________ Rolando Pomareda

________________ Jorge León

________________ Jorge Soto

____

____

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N.

En este trabajo determinamos los planos proyectivos de orden 27 que admiten un grupo de colineaciones isomorfo a PSL(3,3) (Teorema 6.3.). Por razones de notación, si $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ es un tal plano, suponemos que PSL(3,3) es un grupo de colineaciones de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$.

En la Sección 1 introducimos las notaciones generales que usaremos en las otras secciones. Además definimos plano proyectivo y subestructura de un plano proyectivo. En general suponemos conocidos algunos hechos elementales sobre perspectividad (véase por ejemplo [4, Chap. IV]) .

En la Sección 2 obtenemos algunas propiedades de la acción de PSL(3,3) sobre el plano proyectivo $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ de orden 27. Probamos que PSL(3,3) estabiliza un subplano de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ y obtenemos información sobre el estabilizador en PSL(3,3) de cada elemento en $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$. Damos especial importancia a los subgrupos de orden 13 de PSL(3,3) (Grupos de Singer en PSL(3,3)), y a una cierta relación que existe entre las subestructuras fijas de dos de ellos. Esto nos lleva, en Sección 3, a estudiar las relaciones de conjugación de los subgrupos de orden 13 de PSL(3,3) (Teorema 3.6.), lo cual nos permite, en Sección 4, caracterizar la relación entre las subestructuras fijas por dos subgrupos de orden 13. Hay en este caracterización una indeterminación, como explicamos en la Observación al Teorema 4.2.

de Sección 4, la cual dá origen, en Sección 5, a un plano proyectivo de orden 27 no desarguesiano. (Este plano no es isomorfo a alguno de los planos proyectivos ya conocidos).

Finalmente, en Sección 6 probamos que hay, salvo isomorfismo, sólo dos planos proyectivos de orden 27 que admiten a PSL(3,3) como un grupo de colineaciones.

1. DEFINICIONES Y NOTACIONES.

Definición 1.1. Un plano proyectivo es un triple $(\mathcal{P},\mathcal{L}, I)$ que consiste de dos conjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}$, y una relación de incidencia $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ que satisface los axiomas.

(i) Si $P,Q \in \mathcal{P}$ y $P \neq Q$, entonces hay exactamente un elemento $\ell \in \mathcal{L}$ tal que $PI\ell$ y $QI\ell$.

(ii) Si $a,b \in \mathcal{L}$ y $a \neq b$, entonces hay exactamente un elemento $P \in \mathcal{P}$ tal que PIa y PIb.

(iii) Existe un subconjunto $X \subseteq \mathcal{P}$ tal que $|X| = 4$ y $|X \cap \{P \in \mathcal{P} \mid PI\ell\}| \leq 2$, para todo $\ell \in \mathcal{L}$.

En general designamos por $|X|$ al número de elementos del conjunto finito X.

Sea $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ un plano proyectivo. Dados $A,B \in \mathcal{P}$ y $A \neq B$, denotaremos por $A \cdot B$ al único elemento de $\mathcal{L}$ incidente con A y B; y si $a,b \in \mathcal{L}$, $a \neq b$, entonces $a \cap b$ designará al único elemento de $\mathcal{P}$ incidente con A y B. Si $A \in \mathcal{P}$, denotaremos por $[\![A]\!]$ al conjunto de todos los elementos de $\mathcal{L}$ incidentes con A; y si $\ell \in \mathcal{L}$, entonces (ℓ) designará al conjunto de todos los elementos de $\mathcal{P}$ incidentes con ℓ. En general identificaremos ℓ con (ℓ). A los elementos de $\mathcal{P}$ los nombraremos puntos y a los de $\mathcal{L}$ rectas.

El grupo formado por todas las colineaciones (o automorfismos, ver [1, p. 118]) del plano proyectivo $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ será denotado por

$\mathrm{Aut}(\mathcal{P},\mathcal{L})$. La imagen de un elemento $x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ por una colineación g la denotaremos por xg . Si $H \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{P},\mathcal{L})$ y $A \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$, entonces $H(A)$ designará al subgrupo de H formado por todas las perspectividades (o colineaciones centrales, ver [1, p. 30]) en H con centro en A ; y $H(\ell)$ denotará al subgrupo de H formado por todas las perspectividades en H con eje ℓ . Además, si $x \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, entonces $H_x = \{g \in H \mid xg = x\}$.

Definición 1.2. Sea $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ un plano proyectivo y $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$. El par $(\mathcal{P}_0,\mathcal{L}_0)$ es una subestructura de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ si tiene las propiedades

(i) Si $A,B \in \mathcal{P}_0$ y $A \neq B$, entonces $A \cdot B \in \mathcal{L}_0$

(ii) Si $a,b \in \mathcal{L}_0$ y $a \neq b$, entonces $a \cap b \in \mathcal{P}_0$

La subestructura $(\mathcal{P}_0,\mathcal{L}_0)$ es un subplano si satisface, además de (i) y (ii), la condición

(iii) Existe un subconjunto $X \subseteq \mathcal{P}_0$ tal que $|X| = 4$ y $|X \cap \ell| \leq 2$, para todo $\ell \in \mathcal{L}$.

Los diferentes tipos de subestructura de un plano proyectivo son determinados en [2, Th. 3.2] , por ejemplo. En especial, diremos que una subestructura $(\mathcal{P}_0,\mathcal{L}_0)$ es del tipo (D_2) si $|\mathcal{P}_0| = |\mathcal{L}_0| = 3$ y, para $\ell \in \mathcal{L}_0$, $|(\ell) \cap \mathcal{P}_0| = 2$. Una subestructura de este tipo también será llamada triángulo.

Si $X \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{P},\mathcal{L})$, denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de puntos fijos por X ; por $\mathcal{L}(X)$ al conjunto de rectas fijas por X , y por $F(X)$ al par $(\mathcal{P}(X), \mathcal{L}(X))$, el cual es una subestructura del plano proyectivo $(\mathcal{P},\mathcal{L})$. Si $X = \{g\}$, se anotará $F(g)$ en lugar de $F(\{g\})$.

Finalmente, además de las notaciones anteriores, mantendremos las siguientes. Designaremos por G al grupo $PSL(3,3) \simeq SL(3,3)$, y por $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ a un plano proyectivo de orden 27 que admite a G como un grupo de colineaciones, i.e. $G \leq Aut(\mathcal{P},\mathcal{L})$.

2. RESULTADOS PRELIMINARES.

En esta sección daremos algunas propiedades de la acción de G sobre el plano proyectivo $(\mathcal{P},\mathcal{L})$. En la obtención de ellas usaremos las siguientes propiedades conocidas de G .

Teorema 2.1. (i) G es un grupo simple de orden $|G| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$

(ii) G contiene una clase de involuciones (elementos de orden 2)

(iii) El centralizador $C(g)$ en G de una involución $g \in G$ es isomorfo a $GL(2,3)$.

(iv) G contiene dos clases de elementos de orden 3.

(v) Si $H < G$, $|H| = 13$, el normalizador $N(H)$ de H en G es de orden $|N(H)| = 39$. Además $C(H) = H$.

Nuestro primer objetivo es probar que G debe estabilizar un subplano de orden 3 del plano proyectivo $(\mathcal{P},\mathcal{L})$.

Lema 2.2. Sea $X \subseteq Aut(\mathcal{P},\mathcal{L})$ y $N(X)$ el normalizador en G de X . Entonces $F(X)$ es estable por $N(X)$.

Demostración: Sea $h \in X$ y $g \in N(X)$. Entonces $g^{-1}hg \in X$ y si $u \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{L}(X)$, entonces $ug = ugg^{-1}hg$, de donde $ug \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{L}(X)$.

Lema 2.3. Cada involución en G es una homología de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$

Demostración: Sea $g \in G$, $|g| = 2$. Por el teorema de Baer sobre involuciones se obtiene que g es perspectividad (pues 27 no es un cuadrado), y, como 27 es impar, g es homología.

<u>Lema 2.4</u>. Sean $x \neq z$ dos involuciones en G tales que $xz = zx$. Entonces $F(\langle x,z\rangle)$ es del tipo (D_2).

<u>Demostración</u>: Observemos que por Teorema 2.1.(iii) hay $x,z \in G$ con la propiedad requerida. Por Lema 2.3. se tiene que x es una (A,a)-homología y z una (B,b)-homología; y por Lema 2.2., el grupo $\langle x,z\rangle$ fija el centro y el eje de cada involución en $\langle x,z\rangle$. Si $A = B$, entonces $a = b$ y $\langle x,z\rangle$ es semi-regular en los puntos de una recta ℓ incidente con A, distintos de A y $\ell \cap a$, de donde $28 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, lo cual es absurdo. Así $A \neq B$ y, consecuentemente, $a \neq b$. Ahora, puesto que $|xz| = 2$, xz debe ser una $(a \cap b\ ,\ A\cdot B)$-homología, lo cual termina la demostración del Lema 2.4.

centro

<u>Lema 2.5</u>. Sea x una (A,a)-perspectividad no trivial de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ en G. Si G estabiliza un subplano $(\mathcal{P}_0,\mathcal{L}_0)$ de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$, entonces $A \in \mathcal{P}_0$ y $a \in \mathcal{L}_0$.

$G \leq$ Aut(

$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$
$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$

<u>Demostración</u>: Sea $B,C \in \mathcal{P}_0 \setminus [\{A\} \cup (a)]$ tales que $B \notin A\cdot C$. Entonces Bx, $Cx \in \mathcal{P}_0$ y $B\cdot Bx$, $C\cdot Cx \in \mathcal{L}_0$, de donde $A \in \mathcal{P}_0$. Análogamente se puede probar que $a \in \mathcal{L}_0$.

<u>Teorema 2.6</u>. G no estabiliza punto, recta o triángulo de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$, pero sí estabiliza un subplano $(\mathcal{P}_1,\mathcal{L}_1)$ de orden 3. *

<u>Demostración</u>: Notemos que en el Lema 2.4. los puntos de la subestructura $F(\langle x,z\rangle)$ son los centros de las involuciones x, z, xz de G, y las rectas de $F(\langle x,z\rangle)$ son los ejes de dichas involuciones. Ahora, considerando el Teorema 2.1.(ii) y el Lema ya citado, se concluye que

G no fija punto o recta de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$. Por otra parte, siendo G un grupo simple no abeliano, G no estabiliza algún triángulo de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$. Por último, es sabido [3, Th. 1.1] que si T es un grupo de colineaciones de un plano proyectivo con las propiedades: contiene perspectividades no triviales; no estabiliza punto, recta, triángulo o subplano, y T contiene un subgrupo normal isomorfo a $PSL(3,q)$, $(q \neq 2)$, entonces dicho plano proyectivo es de orden q . Así G debe estabilizar un subplano $(\mathcal{P}_1,\mathcal{L}_1)$ de orden m . Puesto que $m^2 + m \leq 27$, los valores posibles de m son 2, 3 ó 4 . Considerando los Lemas 2.3. y 2.5. se concluye que $m = 3$.

En lo que resta de esta sección reservamos la notación $(\mathcal{P}_1,\mathcal{L}_1)$ para el subplano del teorema precedente. Es sabido que, salvo isomorfismo, el plano proyectivo desarguesiano $PG(2,3)$ es el único plano proyectivo de orden 3.

La existencia del subplano $(\mathcal{P}_1,\mathcal{L}_1)$ nos permite realizar una partición de los conjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}$ en clases

<u>Definición 2.7.</u> $\mathcal{P}_2 = \{P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1 \mid P \in \ell \text{ , algún } \ell \in \mathcal{L}_1\}$

$\mathcal{P}_3 = \{P \in \mathcal{P} \mid P \notin \ell \text{ , todo } \ell \in \mathcal{L}_1\}$

$\mathcal{L}_2 = \{\ell \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1 \mid P \in \ell \text{ , algún } P \in \mathcal{P}_1\}$

$\mathcal{L}_3 = \{\ell \in \mathcal{L} \mid P \notin \ell \text{ , todo } P \in \mathcal{P}_1\}$

Observemos que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$ (uniones disjuntas); y que cada uno de los conjuntos $\mathcal{P}_i$ y $\mathcal{L}_i$, $1 \leq i \leq 3$, es estable por G .

Nuestro objetivo ahora es obtener información sobre el estabilizador en G de cada elemento en $\mathcal{R} \cup \mathcal{L}$. Para ello el Lema siguiente, de fácil verificación, nos será de utilidad.

Lema 2.8. Sea $m \in \mathcal{L}$

(i) Si $m \in \mathcal{L}_1$, entonces $|m \cap \mathcal{R}_1| = 4$, $|m \cap \mathcal{R}_2| = 24$

(ii) Si $m \in \mathcal{L}_2$, entonces $|m \cap \mathcal{R}_1| = 1$, $|m \cap \mathcal{R}_2| = 9$

(iii) Si $m \in \mathcal{L}_3$, entonces $|m \cap \mathcal{R}_1| = 0$, $|m \cap \mathcal{R}_2| = 13$

Además $|\mathcal{R}_1| = |\mathcal{L}_1| = 13$, $|\mathcal{R}_2| = |\mathcal{L}_2| = 13 \cdot 24$, $|\mathcal{R}_3| = |\mathcal{L}_3| = 2^4.3^3$.

Nota: Llamaremos "Lema dual del Lema 2.8." al que se obtiene del Lema precedente por intercambio de las palabras "puntos" y "rectas" (obviamente implícitas en Lema 2.8.).

Teorema 2.9. (i) Sea $H < G$, $|H| = 13$. Entonces H es regular en $\mathcal{R}_1$ y en $\mathcal{L}_1$. Además $F(H)$ es del tipo (D_2) , $\mathcal{R}(H) \subset \mathcal{R}_3$ y $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}_3$.

(ii) Si $u \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{L}_1$, entonces G_u es regular en $\mathcal{R}_3$ y $\mathcal{L}_3$.

(iii) Si $v \in \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{L}_3$, entonces $|G_v| = 13$

Demostración: Puesto que $|\mathcal{R}_3| \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 13)$, H fija al menos tres puntos en $\mathcal{R}_3$. Si H fija un punto en $\mathcal{R}_1$, entonces $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}(H)$ y $F(H)$ es un subplano de orden mayor a 5, lo cual es imposible. Así H es regular en $\mathcal{R}_1$ y, de aquí, regular en $\mathcal{L}_1$. Considerando ahora la definición de $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{L}_2$ se concluye que $\mathcal{R}(H) \subset \mathcal{R}_3$ y $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}_3$. Notemos además que si $u \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{L}_1$, entonces $|G_u| = 2^4.3^3$. Supóngase ahora que hay $w \in \mathcal{R}(H) \cup \mathcal{L}(H)$ y $H' < G$, $|H'| = 13$, $H' \neq H$, tal que H' fija w . Entonces

$T = \langle H,H' \rangle$ fija w y, considerando que w no es fijo por alguna involución en G, se tiene $|T| = 3^i 13$. De aquí, por Teorema de Burnside, T es resoluble y debe contener un 3-grupo normal N. Pero entonces $N \subset G_u$, para algún $u \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{L}_1$ y, por Lema 2.2., $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}(N)$, de donde $F(N)$ es un subplano de orden mayor a 5, lo cual es imposible, Así $F(H) \cap F(g^{-1}Hg) = (\phi,\phi)$ para todo $g \in G \setminus N(H)$. Ahora, considerando que el número de subgrupos de orden 13 de G es $2^4 \cdot 3^2$; que $|\mathcal{R}(H)| \geq 3$, $|\mathcal{L}(H)| \geq 3$, y que $|\mathcal{R}_3| = 2^4 \cdot 3^3$, se concluye que $F(H)$ es del tipo (D_2) lo cual termina la demostración de (i). Notemos también que si $v \in \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{L}_3$, entonces $13 \mid |G_v|$. Para completar la demostración de (ii), supóngase que hay $1 \neq g \in G_u$ que fija un elemento $w \in \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{L}_3$. Entonces hay $H' < G$, $|H'| = 13$, que fija w y $g \in N(H')$. De aquí, $|g| = 3$ y ya que $13 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, $\langle g \rangle$ fija al menos un punto en $\mathcal{R}_1$ y una recta en $\mathcal{L}_1$. Considerando ahora que $F(H) \subset F(\langle g \rangle)$, el Lema 2.8. y su Lema dual, se concluye que $F(\langle g \rangle)$ es un subplano de orden mayor a 4, y, por consiguiente, $g = 1$, contrariamente a lo supuesto. Esto termina la demostración de (ii) y también nuestra demostración del Teorema 2.9.

<u>Lema 2.10.</u> Sean $A \in \mathcal{R}_1$ y $a \in \mathcal{L}_1$. Entonces existe una (A,a)-perspectividad no trivial de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ en G.

<u>Demostración</u>: Sea $x \in G$, $|x| = 2$. Por Lema 2.3., x es una (B,b)-homología en que, según Lema 2.5., $B \in \mathcal{R}_1$ y $b \in \mathcal{L}_1$. Por Teorema 2.9.(ii), $|G_b| = 2^4 \cdot 3^3$ y de aquí, y del Teorema 2.1.(v), se concluye que hay $g \in G_b$, $|g| = 3$, y $h \in G$, $|h| = 13$, tal

que $g \in N(\langle h \rangle)$. Si g fija B , entonces g fija la recta $P \cdot B$, para algún $P \in b \cap \mathcal{R}_1$, y por lo tanto fija todo elemento en $P \cdot B \cap \mathcal{R}_1$; pero entonces $1 \neq gh^{-1}gh \in \langle h \rangle$ fija un punto en $\mathcal{R}_1$, contrariamente al Teorema 2.9.(i). Así $Bg \neq B$. Ahora, dado que $g^{-1}xg$ es una (Bg,b)-homología, se obtiene que $t = xg^{-1}xg$ es una (C,b)-elación, en que $C = B \cdot Bg \cap b$. (Notemos que $|t| = 3$). Por Teorema 2.9.(i), hay $h_1 \in H$ tal que $Ch_1 \in b$, y $h_1^{-1}th_1$ es una (Ch_1, bh_1)-elación, de donde se obtiene que para cada $P \in b$, hay una (P,b)-elación no trivial de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ en G , lo cual implica que para cada $Q \in \mathcal{R}_1 \setminus (b)$ hay una (Q,b)-homología no trivial de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ en G . Esto termina nuestra demostración del Lema 2.10.

Teorema 2.11. Si $u \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{L}_2$, entonces $G_u = G(v)$, en que v es el único elemento de $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{L}_1$ incidente con u . Además $|G_u| = 18$.

Demostración: Sea $u \in \mathcal{R}_2$. Por Lema dual a Lema 2.8.(ii), hay único $v \in \mathcal{L}_1$ tal que $u \in v$. Observemos que si $g \in G$ es perspectividad de eje v , entonces g fija u , de donde $G(v) \subseteq G_u$, y una cuenta sencilla hará ver que $|G(v)| \geq 18$ (véase el Teorema 2.10.). Probamos a continuación que $|G_u| = 18$, para lo cual es suficiente probar que G es transitivo en $\mathcal{R}_2$. Sean entonces $A,B \in \mathcal{R}_2$ y $A \neq B$. Por Lema dual a Lema 2.8.(ii) y el Teorema 2.9.(i) podemos suponer, y lo hacemos, que $m = A \cdot B \in \mathcal{L}_1$. Ahora, por Lema dual al Lema 2.8.(ii), hay $m_1, m_2 \in \mathcal{L}_3$, tales que $A \in m_1$, $B \in m_2$, y por la transitividad de G_m en $\mathcal{L}_2$ (Teorema 2.9.(ii)), se concluye que G es transitivo en $\mathcal{R}_2$. De aquí $G_u = G(v)$. El caso $u \in \mathcal{L}_2$ se puede demostrar de manera análoga.

Teorema 2.12. (i) Si $A \in \mathcal{P}_2$, entonces G_A es regular en $[\![A]\!] \cap \mathcal{L}_3$
(ii) Si $m \in \mathcal{L}_2$, entonces $G(P)$ es regular en $m \cap \mathcal{P}_3$, en que $P \in m \cap \mathcal{P}_1$.

Demostración: (i) es consecuencia del Lema dual al Lema 2.8.(iii), el Teorema 2.11. y el Teorema 2.9.(iii). La parte (ii) se puede probar análogamente.

Teorema 2.13. Sea $g \in G$, $|g| = 3$. Hay $H < G$, $|H| = 13$, tal que $g \in N(H)$, si y sólo si $F(\langle g \rangle) = (\{P\}, \{\ell\})$, para algún $P \in \mathcal{P}_1$, $\ell \in \mathcal{L}_1$ y $P \in \ell$.

Demostración: Es consecuencia de los Teoremas 2.1.(iv), 2.11. y 2.9.

La sección siguiente tiene por objeto clarificar la situación siguiente. Sea $H < G$, $|H| = 13$. Por Teorema 2.9.(i), hay $S \in \mathcal{P}_3$ y $s \in \mathcal{L}_3$ fijos por H tales que $S \notin s$; y por el Lema dual al Lema 2.8.(iii), hay $b \in \mathcal{L}_3$ tal que $S \in b$ y b no es fijo por H. Además, según Teorema 2.9.(iii), hay $K < G$, $|K| = 13$, que fija b. Nos interesará decidir si $s \cap b \in \mathcal{P}_2$ o si $s \cap b \in \mathcal{P}_3$, lo cual, como se verá, tiene relación con los elementos del conjunto HK.

3. RELACIONES ENTRE SUBGRUPOS DE ORDEN 13 DE G .

En esta sección especializamos los resultados de la Sección 2 al plano proyectivo desarguesiano $PG(2,27)$. Designamos por F a la extensión cúbica del cuerpo $GF(3)$, y por "$-$" al automorfismo de F definido por $x \to \bar{x} = x^3$. Denotamos por Θ a una de las raíces (en F) del polinomio $X^3 - X - 1$.

Representamos un punto de $PG(2,27)$ por $\langle v \rangle$, en que $v \in F^3$, $v \neq \underline{0}$, y $\langle v \rangle$ denota el F-espacio vectorial generado por v . Una recta de $PG(2,27)$ la representamos por $\langle u^t \rangle$ en que $u \in F^3$, $u \neq 0$, y u^t es la transpuesta de u . Un punto $\langle (x_1,x_2,x_3) \rangle$ es incidente con una recta $\langle (y_1,y_2,y_3)^t \rangle$ si y sólo si $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Denotamos por $\underline{\mathcal{R}}$ al conjunto de todos los puntos de $PG(2,27)$ y por $\underline{\mathcal{L}}$ al de todas las rectas.

Dados $\Gamma \in GL(3,27)$, $A = \langle v \rangle \in \underline{\mathcal{R}}$, $\ell = \langle u^t \rangle \in \underline{\mathcal{L}}$, definimos $A\Gamma = \langle v\Gamma \rangle$, $\ell\Gamma = \langle \Gamma^{-1}u^t \rangle$. En especial se obtiene que, como es sabido, G es un subgrupo de $Aut(PG(2,27))$.

<u>Definición 3.1</u>. Un punto $\langle (x_1,x_2,x_3) \rangle \in \underline{\mathcal{R}}$ (una recta $\langle (x_1,x_2,x_3)^t \rangle \in \underline{\mathcal{L}}$) es de rango i , $i \in \{1,2,3\}$, si y sólo si el conjunto $\{x_1,x_2,x_3\}$ genera un espacio vectorial de dimensión i sobre $GF(3)$.

Denotamos por $\underline{\mathcal{R}}_i$ (resp. $\underline{\mathcal{L}}_i$) , $i = 1,2,3$, al conjunto de todos los puntos (resp. rectas) de $PG(2,27)$ de rango i .

Observemos que $(\underline{\mathcal{R}}_1,\underline{\mathcal{L}}_1)$ es un subplano de orden 3 de

$PG(2,27)$ estable por G . De aquí, el conjunto $\underline{\mathcal{R}}_1$ (resp. $\underline{\mathcal{L}}_1$) corresponde al conjunto $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{L}_1$) definido en Sección 2, y no es difícil verificar que para cada $i \in \{1,2,3\}$, el conjunto $\underline{\mathcal{R}}_i$ (resp. $\underline{\mathcal{L}}_i$) corresponde al conjunto $\mathcal{R}_i$ (resp. $\mathcal{L}_i$) definido en Sección 2.

En lo que resta de esta sección, al referirnos a un teorema o lema de Sección 2 se entenderá que es la especialización al caso de $PG(2,27)$.

Denotamos por ρ la colineación de $PG(2,27)$ inducido por el automorfismo $-$ de F . Notemos que $\rho g = g\rho$, todo $g \in G$, y que $F(\langle \rho \rangle) = (\underline{\mathcal{R}}_1, \underline{\mathcal{L}}_1)$.

<u>Lema 3.2</u>. Sean K_1 y K_2 dos subgrupos distintos de G de orden 13. Si un punto fijo por K_1 es incidente con una recta fijo por K_2 , entonces hay una perspectividad g de $PG(2,27)$ en G tal que $g^{-1}K_1 g = K_2$.

<u>Demostración</u>: Sea $S = \langle (1,\theta,\theta^2) \rangle$. Puesto que $S \in \underline{\mathcal{R}}_3$, por Teorema 2.9(iii) hay único $H < G$, $|H| = 13$, que fija S ; H también fija los puntos $S\rho$ y $S\rho^2$, de modo que H fija la recta definida por éstos, que es $s = \langle (1,\theta^2,\theta)^t \rangle$. Considerando $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene que q es perspectividad de $PG(2,27)$ en G y que $S \in sq^{-1}$. Ahora, considerando que H es transitivo en $s \cap \underline{\mathcal{R}}_2$ (pues es regular en $\underline{\mathcal{L}}_1$), que $|[\![S]\!] \cap \underline{\mathcal{L}}_3| = 15$, y que G es transitivo en $\underline{\mathcal{R}}_3$ (teorema 2.9(iii)) se concluye el Lema 3.2.

<u>Lema 3.3</u>. Sean K_1 y K_2 dos subgrupos distintos de G de orden 13.

Sea a una recta fija por K_1, b una recta fija por K_2. Si $A = a \cap b \in \underline{\mathcal{R}}_3$, y A no es fijo por K_1 ni K_2, entonces hay $g \in G$, $|g| = 13$, tal que $g^{-1}K_1g = K_2$. Además para algún $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$, k_1k_2 es perspectividad no trivial de $PG(2,27)$.

<u>Demostración</u>: Puesto que G es transitivo en $\underline{\mathcal{R}}_3$, suponemos $A = \langle (1 + \Theta + \Theta^2, \Theta + 2, 1) \rangle$. Además, ya que A no es fijo por K_1 ni K_2, hay $H < G$, $|H| = 13$, que fija A y $K_1 \neq H \neq K_2$ (por teorema 2.9.(iii)), de donde, considerando que H es regular en las rectas de $\underline{\mathcal{L}}_3$ incidentes con A, distintas de las fijas por H, se concluye que hay $h_1 \in H$ tal que $ah_1 = b$ y, por Teorema 2.9.(iii), $h_1^{-1}K_1h_1 = K_2$. Sea ahora $c = \langle (1, \Theta + 2, (\Theta + 2)^2)^t \rangle$ y $k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un sencillo cálculo hará ver que $c \in [\![A]\!] \cap \underline{\mathcal{L}}_3$ y que $\langle k \rangle$ fija c pero no A, y, por los argumentos precedentes, no se pierde generalidad al suponer $c = a$ y $K_1 = \langle k \rangle$. Calculando nuevamente, se encuentra que $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ fija A, donde $H = \langle h \rangle$, y que $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene la propiedad: $x^{-1}hx = h^9$, $x^{-1}kx = k^9$.

Calculando una vez más (hay que tener paciencia), se encuentra que $k^8 \cdot h^{-1}kh = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $k^{11} \cdot h^{-2}kh^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son perspectividades de $PG(2,27)$.

De la primera, con $y = k^8h^{-1}kh$, se obtiene

$x^{-1}yx = k^7 \cdot h^{-9}k^9h^9$, $x^{-2}yx^2 = k^{11}h^{-3}k^3h^3$. Además

$y_1 = hy^{-1}h^{-1} = k^{12} \cdot h^{-12}k^5h^{12}$, $x^{-1}y_1x = k^4h^{-4}k^6h^4$,

$x^{-2}y_1x^2 = k^{10} \cdot h^{-10}k^2h^{10}$. De la segunda con $p = k^{11} \cdot h^{-2}kh^2$, se obtiene $x^{-1}px = k^8h^{-5}k^9h^5$, $x^{-2}px^2 = k^7h^{-6}k^3h^6$, $p_1 = h^{-11}p^{-1}h^{11} =$ $= k^{12} \cdot h^{-11}k^2h^{11}$, $x^{-1}p_1x = k^4h^{-8}k^5h^8$, $x^{-2}p_1x^2 = k^{10}h^{-7}k^6h^7$.

Así, para cada i , $1 \leq i \leq 12$, hay $k' \in K_1$ y $k_1 \in h^{-i}K_1h^i$ tales que $k'k_1$ es perspectividad no trivial de $PG(2,27)$, lo cual termina nuestra demostración del Lema 3.3.

<u>Lema 3.4</u>. Sean K_1 y K_2 dos subgrupos distintos de G de orden 13. Si hay una elación g de $PG(2,27)$ en G tal que $g^{-1}K_1g = K_2$, entonces $N(K_1) \cap N(K_2)$ es no trivial.

<u>Demostración</u>: Por Lema 2.5. el eje de g pertenece a $\underline{\mathcal{L}}_1$, y dado que los subgrupos de orden 13 de G son conjugados en G y cada uno de ellos es regular en $\underline{\mathcal{L}}_1$, sin pérdida de generalidad suponemos $K_1 = \langle h \rangle$, en que $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; y que g es elación de eje $\ell = \langle (0,0,1)^t \rangle$. Consideramos además $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene las propiedades: $x \in N(\langle h \rangle)$, $\ell x = \ell$ y x fija el punto $P = \langle (1,0,0) \rangle$. Ahora, si el centro de g es P , entonces $g \in \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ y $g \in C(x)$, de donde $\langle x \rangle = N(K_1) \cap N(g^{-1}K_1g)$. Si el centro de g no es P , entonces para algún $x_1 \in \langle x \rangle$ se tiene que $p = x_1^{-1}gx_1$ es elación de centro $\langle (1,2,0) \rangle$, de donde $p \in \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$. Para $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se obtiene

$h^2ph^{-7} \in N(\langle x \rangle)$, de donde $h^{-7}\langle x \rangle h^7 = N(K_1) \cap N(p^{-1}K_1p)$ y $N(K_1) \cap N(g^{-1}K_1g)$ es no trivial, lo que también ocurre en el caso de $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Esto termina la demostración del lema.

Lema 3.5. Sean K_1 y K_2 dos subgrupos distintos de G de orden 13. Si hay $g \in G$, $|g| = 2$, tal que $gK_1g = K_2$, entonces hay $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$ tales que k_1k_2 es perspectividad no trivial de $PG(2,27)$.

Demostración: Puesto que los subgrupos de orden 13 de G son conjugados en G , suponemos $K_1 = \langle h \rangle$, en que $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; y ya que K_1 es transitivo en $\underline{\mathcal{L}}_1$ (Teorema 2.9.(i)) , suponemos que el eje de g es $\ell = \langle (0,0,1)^t \rangle$. Al igual que en la demostración del Lema 3.4., consideramos $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, x fija ℓ y el punto $P = \langle (1,0,0) \rangle$. Dado que $\langle x \rangle$ es transitivo en las rectas de $\| P \| \cap \underline{\mathcal{L}}_1$, distintas de ℓ , suponemos que el centro de g está en la recta $\langle (0,1,0)^t \rangle$, lo que nos lleva a analizar los casos

i) $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $h^{12}ghg = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es homología de $PG(2,27)$

ii) $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $h^6ghg = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es elación de $PG(2,27)$

iii) $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $h^2ghg = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es homología de $PG(2,27)$

Esto termina nuestra demostración del Lema 3.5.

Teorema 3.6. Sean K_1 y K_2 dos subgrupos distintos de G de orden 13.
Entonces hay $g \in G$, $|g| = 13$, tal que $g^{-1}K_1g = K_2$, o bien hay una perspectividad no trivial g de $PG(2,27)$ en G tal que $g^{-1}K_1g = K_2$. Además, si $|g| = 2$ ó $|g| = 13$, entonces hay $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$ tales que k_1k_2 es perspectividad no trivial de $PG(2,27)$ en G; y si $|g| = 3$, entonces $N(K_1) \cap N(K_2)$ es no trivial.

Demostración: Sea a una recta fija por K_1 y b una recta fija por K_2. Si $a \cap b \in \underline{\mathcal{R}}_2$, entonces, por teorema 2.12.(i), hay g perspectividad no trivial en G tal que $ag = b$, de donde, por Teorema 2.9.(iii), $g^{-1}K_1g = K_2$. Si $a \cap b \in \underline{\mathcal{R}}_3$ y $a \cap b$ es fijo por K_1 ó K_2, entonces por Lema 3.2. hay una perspectividad no trivial $g \in G$ tal que $g^{-1}K_1g = K_2$, y si $a \cap b \in \underline{\mathcal{R}}_3$ no es fijo por K_1 ni K_2, entonces vale el Lema 3.3.

Por último, notemos que si $g \in G$ es homología de $PG(2,27)$, entonces $|g| = 2$, y si g es elación, entonces $|g| = 3$ de modo que la parte final del teorema es consecuancia de los lemas 3.5., 3.3. y 3.4.

Observación: Si $g \in G$ es perspectividad no trivial de $PG(2,27)$, entonces $|g| = 2$, en caso de ser homología, u $|g| = 3$, si es elación. Sea ahora $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ un plano proyectivo de orden 27 que admite a G como un grupo de colineaciones y sea $1 \neq g \in G$ una perspectividad de $PG(2,27)$. Si $|g| = 2$, entonces por Lema 2.3., g es homología de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$; y si $|g| = 3$, entonces g es elación de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$. Esto último se deduce considerando los Teoremas 2.1.(iv), 2.11. y 2.13.

4. RELACION ENTRE LAS SUBESTRUCTURAS $F(K_1)$ Y $F(K_2)$ DE $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ CORRESPONDIENTES A SUBGRUPOS K_1 Y K_2 DE G DE ORDEN 13.

En esta sección continuaremos el desarrollo de Sección 2. Nuevamente, $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ denota un plano proyectivo de orden 27 que admite a G como un grupo de colineaciones.

Lema 4.1. Sean K_1 y K_2 dos subgrupos distintos de G de orden 13. Sea A un punto fijo por K_1 y b una recta fija por K_2 $(a \in \mathcal{R},\ b \in \mathcal{L})$. Si $A \in b$, entonces para cada $1 \neq k_1 \in K_1$ y $1 \neq k_2 \in K_2$, k_1k_2 no es perspectividad de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$.

Demostración: Supóngase que hay $1 \neq k_1 \in K_1$ y $1 \neq k_2 \in K_2$ tales que $k_1k_2 = x$ es perspectividad de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$. Entonces $Ax = Ak_2 \in b$ y, por teorema 2.9.(iii), $A \neq Ax$, de donde $b = A\cdot Ax$ lo cual implica que b es incidente con el centro de x. Pero, por Lema 2.5., el centro de x está en $\mathcal{R}_1$ y, por Lema 2.8.(iii), $b \cap \mathcal{R}_1 = \phi$.

Teorema 4.2. Sea K un subgrupo de G de orden 13. Sean S, S_2, S_3 los puntos fijos por K en $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ y $s = S_2\cdot S_3$. Sea $b \in \mathcal{L}_3$ no fijo por K tal que $S \in b$. Entonces hay una (P,ℓ)-elación $g \in G$ tal que $sg = b$. Además hay $x \in N(K)$ tal que $F(x) = (\{P\}\ ,\ \{\ell\})$ y $gx = xg$.

Demostración: Por Teorema 2.9.(ii), hay $h \in G$ tal que $sh = b$, de donde $K_1 = h^{-1}Kh$ fija b y $K_1 \neq K$. Por teorema 3.6., la Observación de Sección 3 y Lema 4.1., hay una elación g de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ en G

tal que $g^{-1}Kg = K_1$ y $\langle x \rangle = N(K) \cap N(K_1)$ es no trivial. Sean $P \in \mathcal{P}_1$ y $\ell \in \mathcal{L}_1$ el centro y el eje respectivamente de g en $(\mathcal{P},\mathcal{L})$. Sean $B = Sg$, $B_2 = S_2g$, $B_3 = S_3g$ los puntos fijos por K_1 . Es claro que $P = B\cdot S \cap B_2\cdot S_2 = B_2\cdot S_2 \cap B_3\cdot S_3$. Puesto que $\langle x \rangle$ es regular en $\mathcal{P}(K_1)$ (Lema 2.2. y Teorema 2.9.(iii)), suponemos $Bx = B_2$, $Bx^2 = B_3$; y ya que g no fija recta en $\mathcal{L}_3$, resulta $sg = b = B_2\cdot B_3$ y $S \in B_2\cdot B_3$, de donde $Sx \in B_3\cdot B$ y, como $x \in N(K)$, $Sx = S_2$ y $Sx^2 = S_3$. Ahora, $Px = Bx\cdot Sx \cap B_2x\cdot S_2x = B_2S_2 \cap B_3S_3 = P$ y $Sgxg^{-1} = S_2 = Sx$, de donde $gxg^{-1}x^{-1}$ fija P y S , por lo cual $gx = xg$ (teorema 2.9.). De aquí x fija ℓ y, por teorema 2.13., $F(x) = (\{P\},\{\ell\})$.

<u>Observación al Teorema 4.2.</u> Sea $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$H = \langle h \rangle$ es un subgrupo de orden 13 de G y $x \in N(H)$, $|x| = 3$. Sean S y s un punto y una recta, respectivamente, fijos por H y $S \notin s$. Sea ℓ la recta fija por $\langle x \rangle$ (Teorema 2.13.) y $Q = \ell \cap s$. Considerando que H es regular en $s \cap \mathcal{P}_2$, del Teorema 4.2. se infiere que $b = Q\cdot S \in \mathcal{L}_3$, y por Teorema 2.9.(iii) hay único $H_1 < G$, $|H_1| = 13$, que fija b . Por Teorema 4.2. hay $g \in G$ elación de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ tal que $g^{-1}Hg = H_1$ y $gx = xg$. Ahora, el centralizador de x en G es un 3-grupo abeliano elemental y hay sólo dos elaciones de $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ que conmutan con x , a saber $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y p^{-1} . De aquí resulta que H_1 es $p^{-1}Hp$ ó pHp^{-1} . De la demostración del Lema 3.2. se infiere que si $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ es $PG(2,27)$, entonces $H_1 = pHp^{-1}$; pero si $H_1 = p^{-1}Hp$, no disponemos de un modelo en el cual se realice esta condición. Esto último motiva la construcción que presentamos en la Sección 5.

5. CONSTRUCCION DE UN PLANO PROYECTIVO NO DESARGUESIANO DE ORDEN 27.

En esta sección retomamos las notaciones, definición y convención de la Sección 3. Además fijamos las notaciones siguientes:

Denotamos por H al subgrupo de orden 13 de G generado por $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; por $\langle x \rangle$ al subgrupo de orden 3 de $N(H)$ generado por $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y por p a la elación de $PG(2,27)$ en G , $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Los puntos fijos por H en $PG(2,27)$ son $S = \langle (1,\Theta,\Theta^2) \rangle$, $S_2 = \langle (1,\bar{\Theta},\bar{\Theta}^2) \rangle$, $S_3 = \langle (1,\bar{\bar{\Theta}},\bar{\bar{\Theta}}^2) \rangle$, y una de las rectas fijas es $s = S_2 \cdot S_3 = \langle (1,\Theta^2,\Theta)^t \rangle$. Notemos que $Sx = S_2$, $Sx^2 = S_3$; y que $Sp \in s$. Además $p \in C(x)$. Ponemos $Q = \ell \cap s$, en que $\ell = \langle (0,1,0)^t \rangle$ es el eje de p (luego $\langle x \rangle$ fija ℓ).

Anotamos $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \Theta & \Theta^2 \\ 1 & \bar{\Theta} & \bar{\Theta}^2 \\ 1 & \bar{\bar{\Theta}} & \bar{\bar{\Theta}}^2 \end{pmatrix}$, $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 2f & 2\bar{f} & 2\bar{\bar{f}} \\ 2\Theta & 2\bar{\Theta} & 2\bar{\bar{\Theta}} \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

en que $f = \Theta^2 + 2$. Además si u es un punto o recta de $PG(2,27$ y $g \in G$, entonces $\overset{*}{u} = u\Gamma^{-1}$, $\overset{*}{g} = \Gamma g \Gamma^{-1}$.

En lo que resta de esta sección no volveremos ha hacer referencia a los siguientes hechos que usaremos:

i) Si $g \in G$ fija un punto o recta de $PG(2,27)$ fijo por H, entonces, por teorema 2.9.(iii), hay $h_1 \in H$ tal que $g = h_1$

ii) Si $g_1, g_2 \in N(H)$ son dos elementos de orden 3 y $\langle g_1 \rangle \neq \langle g_2 \rangle$, entonces $g_1 g_2 = h_1$, algún $h_1 \in H$.

iii) Si $1 \neq g \in G$ es perspectividad de $PG(2,27)$, entonces g no fija punto o recta fijo por un subgrupo de G de orden 13.

iv) $p \notin N(H)$

<u>Observación 1</u>. Puesto que H es regular en $s \cap \underline{\mathcal{R}}_2$, se tiene $s \cap \underline{\mathcal{R}}_2 = \{Qh_1 \mid h_1 \in H\}$. Por otra parte $Sp \in s$, y si $Sp = S_2 = Sx$, entonces $px^{-1} \in H$ y $p \in N(H)$, lo que es falso. Luego $Sp \neq S_2$ y, análogamente, $Sp \neq S_3$. Así $s \cap \underline{\mathcal{R}}_3 =$
$= \{Sx, Sx^2, Sph_1 \mid h_1 \in H\}$.

La construcción que haremos consiste en "deformar" una parte de cada recta de rango 3 de $PG(2,27)$.

Si $E \subseteq \underline{\mathcal{R}}$ y $g \in G$, definimos $Eg = \{ug \mid u \in E\}$

Sean $D = [s \cap \underline{\mathcal{R}}_2] \cup \{Sx, Sx^2\}$, $C = \{Sp^{-1}h_1 \mid h_1 \in H\}$
$z = D \cup C$ y $L = \{zg \mid g \in G\}$.

<u>Lema 5.1</u>.(i) Si $z_1 \in L$, entonces $|z_1| = 28$

ii) Si $m \in \underline{\mathcal{L}}_1$ y $z_1 \in L$, entonces $|m \cap z_1| = 1$

Demostración: Puesto que H no fija Sp se tiene $|C| = 13$, y como $|D| = 15$, es claro que para probar (i) basta con probar que $D \cap C = \phi$, lo cual se puede probar de manera análoga a lo hecho en la Observación 1. de esta sección 5, respecto a $Sp = S_2$. La parte (ii) de este Lema 5.1. es trivial.

Observación 2. Es claro que $z \cap s = D$. Ahora, si $g \in G$ fija z , i.e. $zg = z$, entonces $Dg = D$ y $sg = s$. Luego $g \in H$ y claramente H fija z . De aquí $|L| = |\mathcal{L}_3|$.

Lema 5.2. Si $m \in \mathcal{L}_2$ y $z_1 \in L$, entonces $|m \cap z_1| = 1$.

Demostración: Sea $g \in G$ tal que $z_1 = zg$ y sea $m_1 = mg^{-1}$. Probamos primero que $|m_1 \cap z| \geq 2$ no ocurre. En efecto, si $|m_1 \cap z| \geq 2$, entonces se cumple una de las siguientes

i) $|m_1 \cap D| \geq 2$. Entonces $|m_1 \cap s| \geq 2$ lo cual es imposible

ii) $|m_1 \cap C| \geq 2$. Entonces hay $h_1, h_2 \in H$ tales que $Sp^{-1}h_1 \in m_1$, $Sp^{-1}h_2 \in m_1$ y $Sp^{-1}h_1 \neq Sp^{-1}h_2$. Por Teorema 2.12.(ii) hay $q \in G$ perspectividad de $PG(2,27)$ tal que $Sp^{-1}h_1q = Sp^{-1}h_2$. De aquí $h_3p^{-1}h_1q = p^{-1}h_2$, algún $h_3 \in H$, y de ésta se obtiene $q_1 = h_4ph_3p^{-1}$, donde $q_1 = h_1q^{-1}h_1$, $h_4^{-1} = h_2h_1^{-1}$. Puesto que $Sp \in s$, se tiene $Sq_1 \in sp^{-1}$, y como $Sq_1 \neq S \in sp^{-1}$ resulta $S \cdot Sq_1 = sp^{-1}$ de donde q_1 fija sp^{-1} que es una recta de rango 3, lo cual es imposible.

iii) $|m_1 \cap D| = 1$ y $|m_1 \cap C| = 1$. La segunda condición implica que $Sp^{-1}h_1 \in m_1$, algún $h_1 \in H$. Sean $\{P\} = m_1 \cap \underline{\mathcal{R}}_1$, $R = m_1 \cap s$, $P_1 = \langle (1,0,0) \rangle$; y $h_2 \in H$ tal que $P = P_1 h_2$. Suponemos primero que $R \in \underline{\mathcal{R}}_2$. Entonces hay $h_3 \in H$ tal que $R = Qh_3$. Puesto que $Sp^{-1}h_1$, P_1h_2 , Qh_3 son colineales, también lo son $\overset{*}{E}_1$, $\overset{*}{E}_2$, $\overset{*}{P}_1$; en que $E_1 = Sp^{-1}h^i$, $E_2 = Qh^j$ donde $h^i = h_1 h_2^{-1}$, $h^j = h_3 h_2^{-1}$. Ahora, ya que $\overset{*}{E}_1 = \langle (2\Theta^i, \Theta^2 \bar{\bar{\Theta}} \bar{\Theta}^i, \bar{\bar{\Theta}}^2 \bar{\bar{\Theta}}^i) \rangle$, $\overset{*}{E}_2 = \langle (0, 2\bar{\bar{\Theta}}\bar{\Theta}^j, \bar{\Theta}\bar{\bar{\Theta}}^j) \rangle$, $\overset{*}{P}_1 = \langle (f, \bar{f}, \bar{\bar{f}}) \rangle$, para algún $\lambda, \mu \in F$, $\lambda\mu \neq 0$, se debe tener $(f, \bar{f}, \bar{\bar{f}}) + \lambda(2\Theta^i, \Theta^2 \bar{\bar{\Theta}} \bar{\Theta}^i, \bar{\bar{\Theta}}^2 \bar{\bar{\Theta}}^i) = \mu(0, 2\bar{\bar{\Theta}}\bar{\Theta}^j, \bar{\Theta}\bar{\bar{\Theta}}^j)$.

De aquí, considerando que $f\Theta = 1$, $\Theta\bar{\Theta}\bar{\bar{\Theta}} = 1$, resulta

$$1 + \frac{\bar{\Theta}^i}{\Theta^i} = 2\mu_1 \bar{\Theta}^j \tag{1}$$

$$1 + \frac{\bar{\bar{\Theta}}^i}{\Theta^i} = \mu_1 \bar{\bar{\Theta}}^j \tag{2}$$

en que $\mu_1 = \frac{\mu}{\Theta}$.

Aplicando el automorfismo $-$ dos veces a (1) se obtiene:

$$\frac{\bar{\bar{\Theta}}^i}{\Theta^i} = \frac{2r}{\bar{\bar{\mu}}_1 + r} \tag{3}$$

donde $r = \frac{1}{\Theta^j}$. Ahora, de (2) y (3) resulta $\bar{\bar{r}}\bar{\bar{\mu}}_1 = \mu_1(r + \bar{\bar{\mu}}_1)$. Despejando de ésta $r + \bar{\bar{\mu}}_1$, obtenemos en (3): $\bar{\bar{v}} = 2v$, donde $v = r\mu_1\Theta^i$, lo cual es imposible.

Así $m_1 \cap s$ debe ser un punto de rango 3, y por lo tanto

$m_1 \cap D$ es un subconjunto de $\underline{\mathcal{R}}_3$. Si $Sx \in m_1$, entonces, ya que $Sp^{-1}h_1 \in m_1$, por Teorema 2.12.(ii) hay q una perspectividad no trivial de PG(2,27) en G tal que $Sxq = Sp^{-1}h_1$ y de aquí , $xq = h_2p^{-1}h_1$, algún $h_2 \in H$. Ahora, $Sq^{-1}x^2 = Sph_2^{-1} \in s$, y como $Sq^{-1} \neq S \in sx$ se tiene que $S \cdot Sq^{-1} = sx$, lo cual es imposible.

Así $|m_1 \cap z| \leq 1$. Sea $\{P\} = m \cap \underline{\mathcal{R}}_1$ y $X = \{\ell \cap z \mid \ell \in [\![P]\!] \cap \underline{\mathcal{L}}_1\}$. Es claro que $|X| = 4$, y si $R \in z \setminus X$, entonces $R \cdot P \in \underline{\mathcal{L}}_2$ de modo que $|\{R \cdot P \mid R \in z \setminus X\}| = 3^3 - 3$ y del lema dual al Lema 2.8.(i) se sigue que $|m_1 \cap z| = 1$.

<u>Lema 5.3.</u> Sea $g \in G$. Si $|z \cap zg| \geq 2$, entonces $z = zg$ y $g \in H$.

<u>Demostración</u>: Suponemos $g \notin H$ y analizamos los ocho casos diferentes a que da origen esta hipótesis:

<u>Caso 1</u>. $|D \cap Dg| \geq 2$. Entonces $|s \cap sg| \geq 2$, de donde $g \in H$. Contradicción.

<u>Caso 2</u>. $|D \cap Cg| \geq 2$. Entonces $Sx = Sp^{-1}h_1g$ y $Sx^2 = Sp^{-1}h_2g$, algún $h_1, h_2 \in H$. De aquí $h_3x = p^{-1}h_1g$ y $h_4x^2 = p^{-1}h_2g$, algún $h_3, h_4 \in H$. Eliminando g de éstas, se obtiene $h_4x = p^{-1}h_2h_1^{-1}ph_3$ y $p^{-1}h_2h_1^{-1}p = h_4xh_3^{-1} \in N(H)$, de donde $p^{-1}h_2h_1^{-1}p \in H$, por lo cual $h_2 = h_1$, pero entonces $Sx = Sx^2$, lo cual es falso.

<u>Caso 3</u>. $|D \cap Dg| = 1$ y $|D \cap Cg| = 1$. La segunda condición implica $Sx = Sp^{-1}h_1g$ (o $Sx^2 = Sp^{-1}h_1g$ que puede ser analizado de manera análoga), algún $h_1 \in H$. De aquí $h_2x = p^{-1}h_1g$, algún $h_2 \in H$; de

donde $g = h_1^{-1}ph_2x$. Ahora, la condición $|D \cap Dg| = 1$ es equivalente a $|D \cap Dpx^2| = 1$ (notar que $x \in N(H)$), pero $S \in sp^{-1}$ y $S \in sx^2$ de modo que $Sp \in s \cap spx^2$ y como $px^2 = x^2p$, y $Sp \notin D$ se obtiene $|D \cap Dpx^2| = 0$. Contradicción.

<u>Caso 4</u>. $|C \cap Dg| \geq 2$ es equivalente al Caso 2.

<u>Caso 5</u>. $|C \cap Cg| \geq 2$. Entonces $Sp^{-1}h_1 = Sp^{-1}h_2g$ y $Sp^{-1}h_3 = Sp^{-1}h_4g$, algún $h_1,h_2,h_3,h_4 \in H$. De aquí $h_5p^{-1}h_1 = p^{-1}h_2g$ y $h_6p^{-1}h_3 = p^{-1}h_4g$, algún $h_5,h_6 \in H$. De la primera se obtiene que $Sg = Sph_5p^{-1}h_1$ y como $Sp \in s$, resulta $Sg \in sp^{-1}h_1$. Análogamente de la segunda igualdad se obtiene $Sg \in sp^{-1}h_3$. Como $S \in sp^{-1}$ resulta $S\cdot Sg = sp^{-1}h_1 = sp^{-1}h_3$ y de aquí $h_7p^{-1}h_1 = p^{-1}h_3$, algún $h_7 \in H$. Pero entonces $ph_7p^{-1} \in H$, de donde $h_7 = 1$ y $h_1 = h_3$. Así $Sp^{-1}h_1 = Sp^{-1}h_3$ y $|C \cap Cg| < 2$. Contradicción.

<u>Caso 6</u>. $|C \cap Dg| = 1$ y $|C \cap Cg| = 1$. De la primera condición se obtiene $Sp^{-1}h_1 = Sxg$ (o $Sp^{-1}h_1 = Sx^2g$, que puede ser analizado análogamente), algún $h_1 \in H$. De ésta se obtiene $h_2p^{-1}h_1 = xg$ y $g = h_3x^2p^{-1}h_1$, donde $h_3x^2 = x^2h_2$. Ahora, la condición $|C \cap Cg| = 1$ es equivalente a $|C \cap Cx^2p^{-1}| = 1$ y ésta implica que $Sp^{-1}h_4 = Sp^{-1}h_5x^2p^{-1}$, algún $h_4,h_5 \in H$. De aquí $h_6p^{-1}h_4 = p^{-1}h_5x^2p^{-1}$, algún $h_6 \in H$. Como $Sp \in s$, se obtiene $Spxh_5^{-1} = Sh_4^{-1}ph_6p^{-1} =$ $= Sph_6p^{-1} \in sp^{-1}$, de donde $S\cdot Spxh_5^{-1} = sp^{-1}$. Por otra parte $Spxh_5^{-1} \in sx$ y $S \in sx$ de modo que $sx = sp^{-1}$ y $xp \in H$, lo cual es imposible.

Caso 7. $|C \cap Dg| = 1$ y $|D \cap Cg| = 1$. La primera condición implica $Sp^{-1}h_1 = Sxg$ ó $Sp^{-1}h_1 = Sx^2g$, algún $h_1 \in H$. Si $Sp^{-1}h_1 = Sxg$ (la otra posibilidad puede ser analizada de manera análoga), entonces hay $h_2 \in H$ tal que $h_2p^{-1}h_1 = xg$, de donde $g = x^2h_2p^{-1}h_1$ y la condición $|D \cap Cg| = 1$ es equivalente a $|D \cap Cx^2p^{-1}| = 1$. Esta condición origina dos casos

(i) $Sx^2 = Sp^{-1}h_3x^2p^{-1}$, algún $h_3 \in H$. Entonces para algún $h_4 \in H$ se tiene $h_4x^2 = p^{-1}h_3x^2p^{-1}$, de donde $h_4h_3^{-1} = p^{-1}h_3p^{-1}h_3^{-1}$ fija al menos un punto o recta de $PG(2,27)$. Así $h_4 = h_3$ y $p = h_3p^{-1}h_2^{-1}$ por lo cual $h_3 \in N(\langle p \rangle)$ y $h_3 = 1$, $p = 1$. Contradicción.

(ii) $Sx = Sp^{-1}h_3x^2p^{-1}$, algún $h_3 \in H$. Entonces $h_4x = p^{-1}h_3x^2p^{-1}$, algún $h_4 \in H$. Ahora, ya que $Sp \in s$, se tiene $Sx = Sxh_4^{-1} = Sph_3^{-1}p \in sp$, y $Sp^{-1} \in sx^2$. Como además $S \in sx^2$ y $S \neq Sp^{-1}$, resulta $S \cdot Sp^{-1} = sx^2$ lo cual es imposible.

Caso 8. $|D \cap Dg| = 1$ y $|C \cap Cg| = 1$. De esta última se obtiene $Sp^{-1}h_1 = Sp^{-1}h_2g$, ciertos $h_1,h_2 \in H$, y de ésta $h_3p^{-1}h_1 = p^{-1}h_2g$, algún $h_3 \in H$. Así la primera condición $|D \cap Dg| = 1$ es equivalente a $|D \cap Dph_3p^{-1}| = 1$. Sea $A = s \cap sph_3p^{-1}$. Analizamos primero $A \in \underline{\mathcal{R}}_3$. Entonces $D \cap Dph_3p^{-1} \subset \underline{\mathcal{R}}_3$ y como $Sx^i \neq Sx^iph_3p^{-1}$, para $i = 1,2$, se tiene $Sx = Sx^2ph_3p^{-1}$ (o $Sx^2 = Sxph_3p^{-1}$) , pero entonces $xph_3p^{-1} \in H$ lo cual es imposible. Ahora, si $A \in \underline{\mathcal{R}}_2$, entonces $Qh_6 = Qh_5ph_3p^{-1}$, donde $h_6 = h^i$, $h_5 = h^j$, $h_3 = h^k$. Considerando que $Q = \langle v \rangle$, siendo $v = (\Theta,0,2)$, para algún $\mu \in F$, $\mu \neq 0$, se debe tener $(vh_6p)^* = \mu(vh_5ph_3)^*$, de donde $\bar{\bar{\Theta}}^{i} = \mu\bar{\Theta}^{K}\bar{\bar{\Theta}}^{j}$, $\bar{\Theta}^{i} = \mu\bar{\bar{\Theta}}^{K}\bar{\Theta}^{j}$. De éstas se deduce que $\frac{\Theta^{i}\Theta^{K}}{\Theta^{j}} \in GF(3)$ y como el determinante de $(h^{i}h^{K}h^{-j})^*$ es 1, resulta $\Theta^{i}\Theta^{K} = \Theta^{j}$ y por lo tanto $h_6h_3 = h_5$. Así $Qh_6 = Qh_6h_3ph_3p^{-1}$. Puesto que $h_3ph_3p^{-1} \neq 1$ (sino se llega a contradicción) y $Qh_6 \in \underline{\mathcal{R}}_2$, por Teorema 2.11. hay q perspectividad no trivial de $PG(2,27)$ en G tal que $h_3ph_3p^{-1} = q$. Pero entonces $Sq = Sph_3p^{-1}$ está en la recta sp^{-1} y como $S \in sp^{-1}$ y $S \neq Sq$, resulta $S \cdot Sq = sp^{-1}$ lo cual es imposible. Esto termina el Caso 8 y la demostración del Lema 5.3.

Lema 5.4. Sea $A \in \underline{\mathcal{R}}$. Entonces $|\{z_1 \in L \mid A \in z_1\}| = |[\![A]\!] \cap \underline{\mathcal{L}}_3|$

Demostración: Observemos primero que si $z_1 \in L$, hay única $b \in \underline{\mathcal{L}}_3$ tal que $z_1 \cap \underline{\mathcal{R}}_2 = b \cap \underline{\mathcal{R}}_2$, y vice versa. De aquí, el Lema es verdadero si $A \in \underline{\mathcal{R}}_2$, y si $A \in \underline{\mathcal{R}}_1$ es trivial. A continuación analizamos el caso $A = S$. Notemos que S pertenece a los conjuntos zx , zx^2 , zph_1 , para cada $h_1 \in H$. Ahora, si $zph_1 = zph_2$, algún $h_1h_2 \in H$, entonces por Lema 5.3. se tiene $ph_1h_2^{-1}p^{-1} \in H$ lo cual sólo puede ocurrir si $h_1 = h_2$. Por otra parte $x \in N(H)$ y xp^{-1} , x^2p^{-1} no están en H , de modo que $|\{z_1 \in L | S \in z_1\}| \geq 15$, y si $S \in z_1$, algún $z_1 \in L$, entonces para algún $g \in G$ se tiene $Sg \in z$, de donde $Sg \in \{Sx, Sx^2, Sp^{-1}h_1/h_1 \in H\}$ y, de aquí, S pertenece a alguno de los conjuntos zx , zx^2 , zph_1 $(h_1 \in H)$. Considerando el Lema dual al Lema 2.8(iii) se concluye que el Lema es verdadero en el caso $A = S$ y, ya que G es transitivo en $\underline{\mathcal{R}}_3$, también para cualquier $A \in \underline{\mathcal{R}}_3$ lo es.

Sean $\mathbb{L} = \underline{\mathcal{L}}_1 \cup \underline{\mathcal{L}}_2 \cup L$ y $\mathbb{P} = \underline{\mathcal{R}}$. Dados $V \in \mathbb{P}$ y $\ell \in \mathbb{L}$, diremos que V es incidente con ℓ si y sólo si $V \in \ell$. El siguiente Teorema es consecuencia de los Lemas 5.1., 5.2., 5.3. y 5.4., y de la definición de $\mathbb{L}$ y $\mathbb{P}$.

Teorema 5.5. $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ es un plano proyectivo de orden 27.

Teorema 5.6. El plano proyectivo $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ es no desarguesiano.

Demostración: Coordenatizamos el plano siguiendo el método descrito en [4, Chap. V.] . Escogemos el cuadrángulo definido por $O = \langle(1,0,0)\rangle$, $X = \langle(0,1,0)\rangle$, $Y = \langle(0,0,1)\rangle$ e $I = \langle(1,1,1)\rangle$; y el conjunto $K = GF(27)$, más el símbolo extra ∞ , para coordenatizar. Puesto que cualquier elemento $\ell \in \mathbb{L}$ tal que $|\ell \cap (\underline{\mathcal{R}}_1 \cup \underline{\mathcal{R}}_2)| \geq 1$ es una recta de $PG(2,27)$, obtenemos la correspondencia:

$\langle(1,\lambda,\mu)\rangle \longleftrightarrow (\lambda,\mu)$, $\langle(0,1,\lambda)\rangle \longleftrightarrow (-\lambda)$, donde $\lambda,\mu \in K$. Coordenatizamos Y por (∞) .

Definimos una operación ternario T en K según [4. Ch. V, Section 3] , a saber, para a,b,c,y elementos de K: $T(a,b,c) = y$ si y sólo si el punto de intersección de la recta OY y la recta definida por (a) y (b,c) es $(0,y)$. Definimos además dos operaciones binarias en K: $x + y = T(1,x,y)$, $x \cdot y = T(x,y,0)$. Mostraremos a continuación que $(K,+,\cdot)$ es el cuerpo $GF(27)$. Respecto a la operación $+$ notemos que $(1,0) \leftrightarrow \langle(1,1,0)\rangle \in \underline{\mathcal{R}}_1$, de modo que la recta m definida por $(1,0)$ y (x,y) pertenece a $\underline{\mathcal{L}}_1 \cup \underline{\mathcal{L}}_2$. Por otra parte $OY \in \underline{\mathcal{L}}_1$. Así, considerando a m y OY

como rectas de $PG(2,27)$, el punto de intersección de estas rectas es $\langle (1,0,x + y)\rangle$ (aquí, $x + y$ es la suma en $GF(27)$). Respecto a la operación $\cdot$, sea m la recta definida por (x) y $(0,y)$. Si $m \in L$, entonces hay una única recta ℓ en $PG(2,27)$ de rango 3 tal que $m \cap \underline{\mathcal{R}}_2 = \ell \cap \underline{\mathcal{R}}_2$, de modo que el punto común a m y OY resulta ser el punto $\ell \cap OY$ de $PG(2,27)$, y como $\ell \cap OY = \langle (1,0,xy)\rangle$, se tiene $x \cdot y = xy$ (producto en $GF(2,27)$) . Si $m \in \underline{\mathcal{L}}_1 \cup \underline{\mathcal{L}}_2$, entonces trivialmente $x \cdot y = xy$.

Respecto a la no linealidad de T , notemos que $z \cap \underline{\mathcal{R}}_2 = s \cap \underline{\mathcal{R}}_2$ y considerando que hay puntos incidentes con z en $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ pero no incidentes con s en $PG(2,27)$, se concluye que T es no lineal y por consiguiente $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ es no desarguesiano.

Nota: Se puede probar (no lo haremos aquí) que el plano proyectivo $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ no es (V,ℓ)-transitivo, cualesquiera sean el punto V y la recta ℓ . Además el grupo (total) de colineaciones de $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ es $PSL(3,3) \times \langle \rho \rangle$ (ρ definida en Sección 3).

Observación: Con respecto a la Observación del Teorema 4.2. de la Sección 4, notemos que en $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ el subgrupo H fija el punto S y la recta z y que $S \notin z$. Además el subgrupo $H_1 = p^{-1}Hp$ ahora fija la recta zp y que $S \in zp$.

Teorema 5.7. El plano proyectivo $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ es autodual.

Demostración: Denotamos por $\hat{}$ al automorfismo de G , $g \to \hat{g}$, en que $\hat{g}$ designa al inverso de la transpuesta de g . Dado que H fija al punto $S = \langle (1,\Theta,\Theta^2)\rangle$ y la recta $s = \langle (1,\Theta^2,\Theta)^t\rangle$ de

$PG(2,27)$, el subgrupo $\hat{H}$ de G fija el punto $A = \langle(1,\theta^2,\theta)\rangle$ y la recta $a = \langle(1,\theta,\theta^2)^t\rangle$ de $PG(2,27)$. Tomando $k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene $Sk = A$, $sk = a$. De aquí, por Teorema 2.9.(iii), $\hat{H} = kHk$. Ahora, en $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ la recta z es fija por H y conse - cuentemente la recta $\Delta = zk$ es fija por $\hat{H}$. Un sencillo cálculo hará ver que $\hat{h}kp^{-1}k = \hat{p}\hat{h}$, $\hat{h}kxk = \hat{x}\hat{h}$ lo cual origina que $\Delta = (a \cap \underline{\mathcal{R}}_2) \cup \{A\hat{x}, A\hat{x}^2, Ap\hat{h}_1 ; \hat{h}_1 \in \hat{H}\}$

Para probar que $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ es autodual definimos una aplicación $\alpha : (\mathbb{P}, \mathbb{L}) \to (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ -que transforma puntos en rectas y rectas en pun- tos- de la manera siguiente: Si $R = \langle u \rangle$ es un elemento de $\underline{\mathcal{R}}_1 \cup \underline{\mathcal{R}}_2$, entonces $R \to \langle u^t \rangle$, pero si $R = Sg$, algún $g \in G$, entonces $R \to \Delta\hat{g}$ (recuérdese que G es transitivo en $\underline{\mathcal{R}}_3$ y en L). Si $m = \langle u^t \rangle$ pertenece a $\underline{\mathcal{L}}_1 \cup \underline{\mathcal{L}}_2$, entonces $m \to \langle u \rangle$, y si $m \in L$, entonces $m \to A\hat{g}$, en que g es un elemento de G tal que $m = zg$.

Es trivial verificar que α es bien definida y que si $E \in \mathbb{P} \cup \mathbb{L}$ y $g \in G$, entonces $Eg \to E^{\alpha}\hat{g}$. Probamos a continuación que si $P \in \mathbb{P}$, $m \in \mathbb{L}$ y $P \in m$, entonces $m^{\alpha} \in P^{\alpha}$.

Notemos primeramente que si $P \in z$, entonces de la definición de z , Δ y α se deduce que $z^{\alpha} \in P^{\alpha}$. Ahora no es difícil veri- ficar que si $P \in \underline{\mathcal{R}}_3$, $z_1 \in L$ y $P \in z_1$, entonces $z_1^{\alpha} \in P^{\alpha}$. Con- sideremos ahora $P \in \underline{\mathcal{R}}_2$, $z_1 \in L$ y $P \in z_1$. Sea $g \in G$ tal que $z_1 g = z$. Entonces $Pg \in z$ y como $Pg \in \underline{\mathcal{R}}_2$ se tiene que $Pg \in s$ (en $PG(2,27)$). De ésta se deduce que $A \in P^{\alpha}\hat{g}$ y $z_1^{\alpha} \in P^{\alpha}$. Por último, sean $P \in \mathbb{P}$, $m \in \underline{\mathcal{L}}_2 \cup \underline{\mathcal{L}}_1$ tales que $P \in m$.

Si $P \in \underline{\mathcal{R}}_1 \cup \underline{\mathcal{R}}_2$, entonces trivialmente $m^\alpha \in P^\alpha$. Si $P \in \underline{\mathcal{R}}_3$ (luego $m \in \underline{\mathcal{L}}_2$) , entonces para algún $g \in G$, $P = sg$ y $Sg \in m = \langle u^t \rangle$. De ésta se infiere que $\langle u \rangle \in \hat{ag}$ (en $PG(2,27)$) y ya que $\langle u \rangle = m^\alpha \in \underline{\mathcal{R}}_2$ y $z \in \underline{\mathcal{R}}_2 = a \cap \underline{\mathcal{R}}_2$, se obtiene $m^\alpha \in P^\alpha$.
Esto termina la demostración del Teorema 5.7.

6. ISOMORFISMOS.

En esta sección probamos que si $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ es un plano proyectivo de orden 27 y G un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R},\mathcal{L})$, entonces $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ es isomorfo a $PG(2,27)$ o a $(\mathbb{P},\mathbb{L})$.

Notemos primeramente que si $g \in G$ es una homología (resp. elación) de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$, entonces g es homología (resp. elación) de $PG(2,27)$ y de $(\mathbb{P},\mathbb{L})$.

<u>Lema 6.1</u>. Sea $(\mathcal{R}_0,\mathcal{L}_0)$ un plano proyectivo arbitrario. Sea p una (A,a)-elación de $(\mathcal{R}_0,\mathcal{L}_0)$ y q una (B,b)-perspectividad de $(\mathcal{R}_0,\mathcal{L}_0)$. Si pq es perspectividad de $(\mathcal{R}_0,\mathcal{L}_0)$, entonces $A = B$ ó $a = b$ ó ambas.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia de [2. Lemma 5.1].

<u>Lema 6.2</u>. Sea $p \in G$ una (A,a)-elación de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$. Entonces p es una (A',a')-elación de $PG(2,27)$ (resp. $(\mathbb{P},\mathbb{L})$), y los elementos de $G(a)$ tienen o el mismo eje o bien el mismo centro en $PG(2,27)$ (resp. $(\mathbb{P},\mathbb{L})$).

<u>Demostración</u>: Notemos que del Teorema 2.11. y su demostración se infiere que si q y q_1 son (B,b)-elaciones no triviales de G en $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ (ó $PG(2,27)$ ó $(\mathbb{P},\mathbb{L})$), entonces $q_1 = q$ ó $q_1 = q^{-1}$. Ahora, el Lema 6.2. es consecuencia del Lema 6.1.

<u>Observación 1</u>: Sea $p \in G$. Supóngase que p es una (A,a)-elación de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ y una (A',a')-elación de $PG(2,27)$ (ó $(\mathbb{P},\mathbb{L})$).

Por Lema 6.2. se tiene (abusando de la notación) $G(a) = G(a')$ ó $G(a) = G(A')$. Si $G(a) = G(A')$, entonces $G(A) = G(a')$ y, considerando el plano proyectivo dual a $(\mathcal{R},\mathcal{L})$, se tiene $G(a'') = G(a')$, en que a'' es el eje de la elación p , considerada como colineación del plano dual a $(\mathcal{R},\mathcal{L})$.

En lo que resta de esta sección denotamos por H al subgrupo de orden 13 de G generado por $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; y por $\langle x \rangle$ al subgrupo de orden 3 de $N(H)$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Designamos además por P al punto y por ℓ a la recta fijos por $\langle x \rangle$ en $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ (Teorema 2.12.), y por $\underline{P}$ y $\underline{\ell}$ al punto y la recta, respectivamente, fijos por $\langle x \rangle$ en $PG(2,27)$ (o en $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$).

Por la Observación 1. de esta Sección 6, y por la autodualidad de los planos proyectivos $PG(2,27)$ y $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$, suponemos que $G(\ell) = G(\underline{\ell})$. Puesto que $G(\ell) \trianglelefteq G_{\ell}$ y $G(\underline{\ell}) \trianglelefteq G_{\underline{\ell}}$, por Teorema 2.2. se tienen que si $g \in G_{\ell}$, entonces g fija el eje de cada elemento en $G(\ell)$, de donde g , considerada como colineación de $PG(2,27)$ (ó $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$), fija $\underline{\ell}$ y, análogamente, si $g \in G$ fija $\underline{\ell}$, entonces g , considerada como colineación de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$, fija ℓ . Así (abusando de la notación) $G_{\ell} = G_{\underline{\ell}}$ también se tiene $G(P) = G(\underline{P})$ y $G_P = G_{\underline{P}}$.

Sean S y s un punto y una recta, resp., fijos por H en $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ tales que $S \notin s$. Según lo expresado en la Observación al Teorema 4.2. de Sección 4, hay $p \in \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ elación de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ tal que $S \in sp$ y $xp = px$. Además ℓ es el eje y P el centro de p . Puesto que $p \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ se debe verificar una de los siguientes:

<u>Caso I.</u> $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Caso II.</u> $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A continuación analizamos el Caso I, pués el Caso II se puede tratar de manera análoga.

Anotamos $\mathbb{P}_i = \underline{\mathcal{P}_i}$ $(i = 1,2,3)$, $\mathbb{L}_1 = \underline{\mathcal{L}_1}$, $\mathbb{L}_2 = \underline{\mathcal{L}_2}$, $\mathbb{L}_3 = L$ (Ver Sección 5).

Sean $\underline{S}$ un punto y $\underline{s}$ una recta fijos por H en $(\mathbb{P}, \mathbb{L})$ tales que $\underline{S} \notin \underline{s}$ y $\underline{S} \in \underline{s}p$ (por las Observación final de la Sección 5., lo anterior tiene sentido). Sean $Q = \ell \cap s \in \mathcal{P}_2$, $\underline{Q} = \underline{\ell} \cap \underline{s} \in \mathbb{P}_2$, $r = P \cdot S \in \mathcal{L}_2$, $\underline{r} = \underline{P} \cdot \underline{S} \in \mathbb{L}_2$.

Considerando que G es transitivo en $\mathcal{P}_i$ y $\mathcal{L}_i$, $i = 1,2,3$, definimos $\beta : (\mathcal{P},\mathcal{L}) \to (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ de la manera siguiente: Para $g \in G$
$Pg \to \underline{P}g$, $Qg \to \underline{Q}g$, $Sg \to \underline{S}g$; $\ell g \to \underline{\ell}g$, $rg \to \underline{r}g$, $sg \to \underline{s}g$.

Puesto que $G_P = G_{\underline{P}}$, $G_\ell = G_{\underline{\ell}}$, $G(P) = G(\underline{P})$, $G(\ell) = G(\underline{\ell})$, $G_S = H = G_{\underline{S}}$, $G_s = H = G_{\underline{s}}$, y que, por Teorema 2.11, $G_Q = G(\ell)$, $G_{\underline{Q}} = G(\underline{\ell})$, $G_r = G(P)$, $G_{\underline{r}} = G(\underline{P})$; β es una función que induce biyecciones de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{P}$ y de $\mathcal{L}$ en $\mathbb{L}$. Notemos además que si $X \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ y $g \in G$, entonces $(Xg)^\beta = X^\beta g$.

Probamos a continuación que si $A \in \mathcal{P}$, $t \in \mathcal{L}$ y $A \in t$, entonces $A^\beta \in t^\beta$.

Sea $t \in \mathcal{L}$ tal que $P \in t$. Si $t \in \mathcal{L}_1$, entonces $t = \ell g$, algún $g \in G$. Puesto que $\langle x \rangle$ sólo fija al punto P de $\ell \cap \mathcal{R}_1$ y que, por Teorema 2.10., hay perspectividad de $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ en G que fija ℓ pero no P , se tiene que G_ℓ es transitivo en $\ell \cap \mathcal{R}_1$, por lo cual hay $k \in G_\ell$ tal que $Pg^{-1} = Pk$, de donde $g^{-1} = k_1 k$, algún $k_1 \in G_P$. Como además $G_P = G_{\underline{P}}$, $G_\ell = G_{\underline{\ell}}$, se obtiene $P^\beta \in t^\beta$. Si $t \in \mathcal{L}_2$, entonces $t = rg$, algún $g \in G$, de donde $Pg^{-1} \in r$ y $Pg^{-1} = P$. Considerando que $G_P = G_{\underline{P}}$, se tiene $P^\beta \in t^\beta$. Así, por la transitividad de G en $\mathcal{R}_1$, si $A \in \mathcal{R}_1$, $t \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ y $A \in t$, entonces $A^\beta \in t^\beta$. Es claro que si $t \in \mathcal{L}_3$, entonces $A \notin t$ y $A^\beta \notin t^\beta$.

Sea ahora $t \in \mathcal{L}$ tal que $S \in t$. Si $t \in \mathcal{L}_2$, entonces hay $h_1 \in H$ tal que $P \in th_1$ (Teorema 2.9.(i)), y $th_1 = r$, de donde $S^\beta \in t^\beta$. Si $t \in \mathcal{L}_3$ y H fija t , entonces $t = sx$ ó $t = sx^2$ y, en cualquiera de estos casos, $S^\beta \in t^\beta$. Si H no fija t , entonces del Teorema 4.2. se infiere que $t \cap s \in \mathcal{R}_2$ y, considerando que H es transitivo en $s \cap \mathcal{R}_2$, hay $h_1 \in H$ tal que $Q = th_1 \cap s$. Como además $S \in sp$ y $Qp = Q$, resulta $sp = S{\cdot}Q$ y $sp = th_1$. Ahora, en $(\mathbb{P},\mathbb{L})$ se tiene $\underline{S} \in \underline{sp}$, i.e. $S^\beta \in s^\beta p$, de donde $S^\beta \in s^\beta p h_1^{-1} = t^\beta$. Es claro por otra parte que si $t \in \mathcal{L}_1$, entonces $S \notin t$ y $S^\beta \notin t^\beta$. Por último, la transitividad de G en $\mathcal{R}_3$ implica que si $A \in \mathcal{R}_3$, $t \in \mathcal{L}$ y $A \in t$, entonces $A^\beta \in t^\beta$.

Finalmente, sea $t \in \mathcal{L}$ tal que $Q \in t$. Si $t \in \mathcal{L}_3$, entonces por Teorema 2.12.(i) hay $q \in G_Q = G(\ell)$ (Teorema 2.11.) tal que $tq = s$, de donde $Q^\beta \in t^\beta$. Si $t \in \mathcal{L}_1$, entonces $t = \ell$ y $Q^\beta \in t^\beta = \underline{\ell}$. Puesto que G es transitivo en $\mathcal{R}_2$, si $A \in \mathcal{R}_2$, $t \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ y $A \in t$, entonces $A^\beta \in t^\beta$. Sea ahora $t \in \mathcal{L}_2$ y $Q \in t$. Considerando el lema dual al Lema 2.8.(ii), el Teorema 2.9.(iii), y el Teorema 2.11., se obtiene que $[\![Q]\!] \cap \mathcal{L}_3 = \{sq \mid q \in G_Q\}$. Por otra parte, si $u \in [\![Q]\!] \cap \mathcal{L}_3$, entonces $t^\beta \cap u^\beta \in \mathbb{P}_2$. Notemos además que $[\![Q^\beta]\!] \cap \mathbb{L}_3 = \{u^\beta \mid u \in [\![Q]\!] \cap \mathcal{L}_3\}$, $|[\![Q^\beta]\!] \cap \mathbb{L}_3| = 18$ y que, por Lema 2.8.(ii), $|t^\beta \cap \mathbb{P}_2| = 9$. Esto prueba que $Q^\beta \in t^\beta$ y, si $A \in \mathcal{R}_2$, $t \in \mathcal{L}_2$ y $A \in t$, entonces $A^\beta \in t^\beta$.

En resumen, hemos probado que si $A \in \mathcal{R}$, $t \in \mathcal{L}$ y $A \in t$, entonces $A^\beta \in t^\beta$, y por consiguiente $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ es isomorfo a $(\mathbb{P},\mathbb{L})$.

En el Caso II se puede probar, de manera análoga a hecho en el Caso I, que $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ es isomorfo a PG(2,27) .

Terminamos esta sección y este trabajo con

Teorema 6.3. Sea $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ un plano proyectivo de orden 27 que admite un grupo de colineaciones isomorfo a PSL(3,3) . Entonces $(\mathcal{R},\mathcal{L})$ es isomorfo al plano proyectivo desarguesiano de orden 27 o bien es isomorfo al plano proyectivo $(\mathbb{P},\mathbb{L})$.

R E F E R E N C I A S

1. Dembowski, P. "Finite geometries". Springer-Verlag, Berlin, 1968

2. Hering, C. "On the structure of finite collineation groups of projective planes". Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. Band 49 (1979) 155-182.

3. Hering, C., Walker, M. "Perspectivies in irreducible collineation groups of projective planes". I Math. Z. 155 (1977) 95-101.

4. Hughes, D., Piper, F. "Projective planes". New York-Heidelberg-Berlin; Springer Verlag. 1973.