CARACTERES DE ESPACIOS DE GELFAND FINITOS

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magister en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas

por
Salvador Segundo García Zambrano

Septiembre, 1984

Patrocinante: Dr. Jorge Soto Andrade

Facultad de Ciencias
Básicas y Farmacéuticas
Universidad de Chile

INFORME DE APROBACION

TESIS DE MAGISTER

Se informa a la Comisión de Postgrado de la Facultad de Ciencias Básicas y Farmacéuticas que la Tesis de Magister presentada por el candidato

SALVADOR SEGUNDO GARCIA ZAMBRANO

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito de tesis para el grado de Magister en Ciencias con mención en Matemáticas

Patrocinante de Tesis

Jorge Soto Andrade ______________________

Comisión Informante de Tesis

Ricardo Baeza Rodríguez ______________________

Manuel Elgueta Dedes ______________________

Gonzalo Riera Lira ______________________

En honor a mi madre muy amada.

INDICE

INTRODUCCION

1. Nociones básicas.

Sea G un grupo finito. Se denomina representación lineal compleja de G, a un par (V,ρ), donde V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y ρ un homomorfismo de grupos de G en el grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ de todos los automorfismos lineales del $\mathbb{C}$-espacio vectorial V. Sean (V,ρ) y (W,σ) dos representaciones de G, se denomina homomorfismo u operador de entrelazamiento de (V,ρ) en (W,σ) a toda aplicación $\mathbb{C}$-lineal ϕ de V en W tal que

$$\sigma_g \circ \phi = \phi \circ \rho_g \qquad (g \in G) .$$

Un homomorfismo de (V,ρ) en (V,ρ) se denomina un endomorfismo de (V,ρ).

El espacio vectorial complejo $\mathrm{End}_G(V,\rho)$ de todos los endomorfismos de (V,ρ) provisto de la composición de operadores constituye un álgebra denominada el álgebra conmutante de (V,ρ).

Supongamos que G actúa a la derecha por $x \mapsto xg$ $(x \in X,\ g \in G)$ sobre un conjunto finito X. Denominaremos representación natural de G asociada a la acción de G en X, a la representación (V,τ) de G de espacio $V = \mathbb{C}^X$ y acción τ definida por

$$[\tau_g(f)](x) = f(xg) \qquad (f \in V\ ,\ g \in G\ ,\ x \in X)\ .$$

Por otra parte, consideremos la acción de G en X^2 definida por

$$(x,y)g = (xg,yg) \qquad ((x,y) \in X^2\ ,\ g \in G)\ .$$

Designaremos por X^2/G al conjunto formado por las órbitas de G en X^2. Además, para cada $\Omega \in X^2/G$ y cada $x \in X$ denotaremos por $C_\Omega(x)$ al conjunto de todos los $y \in X$ tales que $(x,y) \in \Omega$.

Ahora bien, se define un isomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\underline{\underline{K}}(X) = \mathbb{C}^{X^2}$ sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, asociando a cada $\underline{K} \in \underline{\underline{K}}(X)$ el operador $\phi_{\underline{K}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ definido por

$$[\phi_{\underline{K}}(f)](x) = \sum_{y\in X} \underline{K}(x,y)f(y) \qquad (f \in V\ ,\ x \in X)\ .$$

Por el isomorfismo precedente, la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathrm{End}_G(V,\tau)$ corresponde al álgebra $\underline{\underline{K}}^G(X)$ formada por las aplicaciones $\underline{K} \in \underline{\underline{K}}(X)$ que son G-invariantes en el sentido que

$$\underline{K}((x,y)g) = \underline{K}((x,y)) \qquad ((x,y) \in X^2\ ,\ g \in G)\ .$$

Notación. Sea S un conjunto y $T \subset S$. Consideremos la función característica

$$\chi_T : S \to \mathbb{C}\ ,$$

definida por

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in T \\ 0 & \text{si} \quad x \notin T \end{cases}$$

Sea $x_o \in X$. Para cada $\Omega \in X^2/G$ consideremos

$$K_\Omega = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \chi_\Omega \in \underline{\underline{K}}^G(X) .$$

Se tiene que $\{K_\Omega\}_{\Omega \in X^2/G}$ es una base del espacio vectorial $\underline{\underline{K}}^G(X)$. Tal base corresponde, por el isomorfismo mencionado anteriormente, a la base $\{M_\Omega\}_{\Omega \in X^2/G}$ de operadores de promedio, de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathrm{End}_G(V,\tau)$, donde

$$[M_\Omega(f)](x) = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{y \in C_\Omega(x_o)} f(y) ,$$

para todo $\Omega \in X^2/G$, $f \in V$ y $x \in X$.

Para cada $\Omega, \Theta \in X^2/G$ se tiene

$$M_\Omega M_\Theta = \sum_{\Xi \in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)||C_\Theta(x_o)|} C^\Xi_{\Omega,\Theta} M_\Xi ,$$

donde

$$C^\Xi_{\Omega,\Theta} = |\{y \in X | (x,y) \in \Omega \wedge (y,z) \in \Theta\}| \qquad ((x,z) \in \Xi) .$$

Un G-conjunto derecho transitivo X se denomina un espacio de GELFAND si el álgebra conmutante $A := \mathrm{End}_G(V,\tau)$ de la representación natural (V,τ) de G asociada es conmutativa. Un problema fundamental de la teoría de representaciones de grupos es, para un grupo finito G , descomponer explícitamente las representaciones naturales asociadas a los distintos espacios de Gelfand para G . Se espera, de este modo, construir todas las representaciones irreductibles de G .

Los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand finito (G,X) describen la descomposición de la representación natural (V,τ) de G , asociada a la acción de G en X , en suma directa ortogonal de subrepresentaciones irreductibles. En efecto, puesto que M_Ω es un operador normal se tiene que M_Ω es diagonalizable. Por lo tanto, la base $\{M_\Omega\}_{\Omega\in X^2/G}$ es simultáneamente diagonalizable, luego existe una familia F de funciones

$$\alpha : X^2/G \to \mathbb{C} ,$$

tal que si

$$V_\alpha = \{f \in V \mid M_\Omega(f) = \alpha(\Omega)f,\ \forall\ \Omega \in X^2/G\} ,$$

entonces

$$(*) \qquad V = \bigoplus_{\alpha\in F} V_\alpha \qquad \text{(suma ortogonal)},$$

donde cada α satisface la ecuación funcional

$$(**) \qquad \sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|}\, C^{\Xi}_{\Omega,\Theta}\, \alpha(\Xi) = \alpha(\Omega)\alpha(\Theta) ,$$

para todo $\Omega,\Theta \in X^2/G$.

Ahora bien, como cada aplicación α de X^2/G en $\mathbb{C}$ que verifica la ecuación funcional precedente determina un único carácter del álgebra conmutante conmutativa A (extensión por linealidad) y, recíprocamente, como cada carácter α de la $\mathbb{C}$-álgebra A determina una única aplicación α de X^2/G en $\mathbb{C}$ que verifica la ecuación funcional precedente (por restricción), obtenemos que

$$(*') \qquad V = \bigoplus_{\alpha\in\hat{A}} V_\alpha \qquad \text{(suma ortogonal)} ,$$

es la descomposición de (V,τ) en suma directa ortogonal de subrepresentaciones irreductibles (se designa por $\hat{A}$ al conjunto de todos los caracteres del álgebra conmutante conmutativa A).

En resumen, determinar los caracteres del álgebra A equivale a determinar las funciones escalares sobre X^2/G que representan la tabla de multiplicación de los M_Ω . Lo cual equivale, a su vez, a diagonalizar simultáneamente todos los M_Ω .

Por otra parte, encontrar la descomposición (*') equivale a encontrar la descomposición

$$I = \sum_{\alpha\in\hat{A}} P_\alpha ,$$

de la identidad I del álgebra A como suma de idempotentes primitivos ortogonales de a pares. El idempotente P_α no es otro que el proyector ortogonal de V sobre V_α y recíprocamente V_α es la imagen de P_α . De hecho, la conmutatividad de A implica

$$A = \bigoplus_{\alpha\in\hat{A}} \mathbb{C}P_\alpha .$$

Sea $\alpha \in \hat{A}$. Se denomina función esférica de tipo α a toda función K-invariante no nula de V_α . Se define una función esférica de tipo α tal que $\phi_\alpha(x_o) = 1$ por

$$\phi_\alpha(x) = \alpha(M_{\Omega(x_o,x)}) \qquad . \qquad (x \in X) ,$$

donde $\Omega(x_o,x)$ designa la G-órbita de $(x_o,x) \in X^2$. Por otra parte, denotemos por K_α al núcleo del operador de entrelazamiento P_α $(\alpha \in \hat{A})$. Entonces

$$\psi_\alpha = K_\alpha(?,x_o) \qquad (\alpha \in \hat{A}) ,$$

es una función esférica de tipo α , pues es la imagen de la delta de DIRAC en el origen δ_{x_o} por P_α y por ende pertenece a V_α , además es, claramente, K-invariante y no nula.

El interés de las funciones esféricas radica en que su conocimiento determina los V_α , ya que cualquier función esférica de tipo α engendra V_α como $\mathbb{C}[G]$-módulo, y en que son generadores relativamente simples, debido a su propiedad de K-invariancia.

Las dimensiones de los espacios vectoriales V_α $(\alpha \in \hat{A})$ pueden ser determinadas, de manera bastante cómoda, como los coeficientes del desarrollo de la delta de DIRAC en el origen δ_{x_o} en términos de las funciones esféricas normalizadas ϕ_α , a saber

$$\delta_{x_o} = \frac{1}{|X|} \sum_{\alpha\in\hat{A}} d_\alpha \phi_\alpha ,$$

donde d_α := dimensión(V_α) .

2. Métodos inéditos para calcular funciones esféricas.

Calcular efectivamente en un caso concreto, sea las funciones esféricas ϕ_α , los caracteres α ; los proyectores P_α o los subespacios V_α , puede ser un problema bastante difícil. Al respecto, encontramos en la literatura que los grafos distalmente transitivos han sido exhaustivamente estudiados, vía ecuaciones a diferencias finitas y funciones generatrices, en [3], [4], [13] y [15]. Por otra parte, los espacios de Gelfand simétricos son analizados, con bastante laboriosidad vía factorización de un determinante, en [10] y [16]. Otro procedimiento relativamente eficaz es el método de resoluciones de un espacio de Gelfand que consiste en encontrar una "resolución"

$$(G,X_o) \leftarrow \dots \leftarrow (G,X_{n-1}) \leftarrow (G,X_n) = (G,X)$$

de un espacio de Gelfand (G,X) por cuocientes sucesivos, con $|X_o| = 1$, la cual proporciona un sistema inductivo de monomorfismos de representaciones y este, a su vez, tomando suplementos ortogonales sucesivos, suministra todas las representaciones del espacio de Gelfand (G,X). Naturalmente, existen espacios de Gelfand en los cuales los métodos precedentes proporcionan muy poca o ninguna información.

En este trabajo presentamos dos métodos, bastante fluidos y simples, que no aparecen en la literatura, a saber:

2.1. <u>Método de los caracteres de un espacio de Gelfand finito.</u>

Para cada familia $\{\xi_u^\Theta\}_{u\in X,\Theta\in X^2/G}$ de aplicaciones biyectivas ξ_u^Θ de $C_\Theta(x_o)$ sobre $C_\Theta(u)$ $(u \in X\ ,\ \Theta \in X^2/G)$, consideremos la operación binaria en X definida, para cada $u,v \in X$, por la relación

$$v\cdot u = \xi_u^\Theta(v)\ ,$$

donde $\Theta \in X^2/G$ es tal que $v \in C_\Theta(x_o)$.

Las operaciones binarias en X proporcionadas por familias de aplicaciones biyectivas, según las consideraciones precedentes, se denominarán operaciones binarias admisibles en X. Una aplicación f de X en $\mathbb{C}$ es un carácter del espacio de Gelfand (G,X) si

$$f(u)f(v) = f(u\cdot v) \qquad (u,v \in X) ,$$

para alguna operación binaria $\cdot$ admisible en X.

Si f es un carácter del espacio de Gelfand finito (G,X), entonces la aplicación α_f de X^2/G en $\mathbb{C}$ definida por

$$\alpha_f(\Omega) = [M_\Omega(f)](x_o) \qquad (\Omega \in X^2/G) ,$$

proporciona un carácter del álgebra conmutante asociada a tal espacio de Gelfand (verificación muy simple).

Por otra parte, si la operación binaria $\cdot$ admisible en X provee a X de una estructura de grupo, se dirá que tal estructura es admisible. En particular, si X^+ es una estructura de grupo abeliano admisible, entonces los caracteres de X^+ son caracteres del espacio de Gelfand (G,X) y proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand considerado.

2.2. Métodos de ruptura de simetrías.

Sea (G,X) un espacio de Gelfand finito y sea (G',X) un espacio de Gelfand tal que G' es un subgrupo del grupo G. Designaremos por A (resp. A') al álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand (G,X) (resp. (G',X)).

Sea

$$I = \sum_{\alpha\in\hat{A}} P_\alpha \qquad \left(\text{resp. } I = \sum_{\alpha'\in\hat{A}'} P_{\alpha'}\right) ,$$

la descomposición de la identidad I del álgebra A (resp. A') como suma de idempotentes primitivos ortogonales de a pares. Puesto que el álgebra conmutante conmutativa A es una sub-álgebra del álgebra conmutante conmutativa A' , obtenemos que existe una partición $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\hat{A}}$ de $\hat{A}'$ tal que

$$P_\alpha = \sum_{\varepsilon'\in E_\alpha} P_{\varepsilon'} \qquad (\alpha \in \hat{A}) .$$

En particular, obtenemos la relación

$$\phi_\alpha = \frac{1}{\sum_{\varepsilon'\in E_\alpha} d_{\varepsilon'}} \sum_{\varepsilon'\in E_\alpha} d_{\varepsilon'}\phi_{\varepsilon'} \qquad (\alpha \in \hat{A}) .$$

Naturalmente, el problema radica en encontrar las funciones esféricas del espacio de Gelfand (G',X) .

3. Algunas consecuencias interesantes.

Sea G un grupo finito y sean K,B subgrupos de G tales que G es el producto de K por B , es decir

$$G = KB \quad \text{y} \quad K \cap B = \{\underline{e}\} ,$$

donde $\underline{e}$ es el elemento neutro del grupo G . La acción de G en B definida por

$$b\cdot g = \underline{b}(bg) \qquad (b \in B \ , \ g \in G) ,$$

donde $\underline{b}(h)$ designa la B-componente de $h \in G$, provee a B de una estructura de G-espacio derecho transitivo. A partir de descomposiciones del tipo precedente se puede construir, en un caso concreto, interesantes espacios geométricos para G .

Si el espacio geométrico (G,B) es un espacio de Gelfand (lo cual ocurre, en particular, cuando B es abeliano), entonces la aplicación α_χ de B^2/G en $\mathbb{C}$ definida por

$$\alpha_\chi(\Omega) = \frac{1}{|C_\Omega(\underline{e})|} \sum_{u \in C_\Omega(\underline{e})} \chi(u) \qquad (\Omega \in B^2/G) ,$$

para todo carácter χ de dimensión 1 de B , proporciona un carácter del álgebra conmutante asociada a tal espacio de Gelfand. Utilizando sistemáticamente la situación precedente, podemos construir "bastantes" representaciones irreductibles del grupo G . Por ejemplo, para el grupo $PGL(2,k)$, k cuerpo finito, obtenemos de manera inmediata la serie principal de representaciones de tal grupo.

4. Comentarios finales.

Sea (G,X) un espacio de Gelfand finito. Las estructuras de grupo admisibles en X constituyen una subfamilia "muy pequeña" de la familia de operaciones binarias admisibles en X . Un problema no resuelto apasionante consiste en precisar la generalidad del método de los caracteres de un espacio de Gelfand, es decir, establecer si cada carácter del espacio de Gelfand (G,X) es necesariamente un carácter de alguna estructura de grupo admisible en X y precisar tal estructura de grupo.

Por otra parte, destacamos que el metodo de los caracteres de un espacio de Gelfand trasciende el caso finito y puede ser aplicado a espacios de Gelfand discretos como por ejemplo un árbol homogéneo o más aún a cualquier espacio de Gelfand en el cual nuestra fórmula "tenga sentido".

En lo que respecta al caso contínuo, destacamos que [7] constituye una interesante referencia que trata las funciones esféricas para el caso en que el estabilizador de un punto es compacto. En caso contrario, no existen referencias en la literatura; el tipo de problemas que aparece se ilustra en [6].

CAPITULO I. CARACTERES DEL ALGEBRA CONMUTANTE ASOCIADA A UN ESPACIO DE GELFAND FINITO

1. Primeras definiciones y notaciones.

1.1. Nociones básicas.

Sea G un grupo finito. Se denomina representación lineal compleja de G, a un par (V,ρ), donde V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y ρ una acción lineal de G en V, es decir, un homomorfismo de grupos de G en el grupo $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ de todos los automorfismos lineales del $\mathbb{C}$-espacio vectorial V. El espacio V se denomina el espacio de la representación y el homomorfismo ρ se denomina la acción de la representación. La dimensión de una representación es la dimensión de su espacio.

Sean (V,ρ) y (W,σ) dos representaciones de G. Se denomina homomorfismo u operador de entrelazamiento de (V,ρ) en (W,σ) a toda aplicación $\mathbb{C}$-lineal Φ de V en W tal que

$$\sigma_g \circ \Phi = \Phi \circ \rho_g \qquad (g \in G) .$$

El espacio vectorial complejo de todos los operadores de entrelazamiento de (V,ρ) en (W,σ) será denotado por $\mathrm{Hom}_G((V,\rho),(W,\sigma))$. Un homomorfismo de (V,ρ) en (V,ρ) se denomina un <u>endomorfismo</u> de (V,ρ).

El espacio vectorial complejo $\mathrm{End}_G(V,\rho)$ de todos los endomorfismos de (V,ρ) provisto de la composición de operadores constituye un álgebra denominada el álgebra conmutante de (V,ρ).

1.2. <u>Representaciones naturales de un grupo</u> G.

Sea G un grupo finito. Supongamos que G actúa a la derecha por $x \mapsto xg$ $(x \in X,\ g \in G)$ sobre un conjunto finito X. Denominaremos <u>representación natural de</u> G <u>asociada a la acción de</u> G <u>en</u> X, a la representación (V,τ) de G de espacio $V = \mathbb{C}^X$ y acción τ definida por

$$[\tau_g(f)](x) = f(xg) \qquad (f \in V,\ g \in G,\ x \in X).$$

<u>Observación</u>. El espacio $V = \mathbb{C}^X$ admite un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle_{L^2}$ que es invariante bajo τ, a saber

$$\langle f,h\rangle_{L^2} = \sum_{x\in X} f(x)\overline{h(x)} \qquad (f,h \in V).$$

A menudo denotaremos por $L^2(X)$ al espacio $\mathbb{C}^X$ provisto del producto escalar precedente.

Por otra parte, consideremos la acción de G en X^2 definida por

$$(x,y)g = (xg,yg) \qquad (x,y \in X,\ g \in G).$$

Designaremos por X^2/G al conjunto formado por las órbitas de G en X^2, es decir, X^2/G consta de todas las "<u>configuraciones geométricas</u>" posibles de un par de puntos en el espacio X.

Ahora bien, para cada $\Omega \in X^2/G$ y cada $x \in X$, consideremos el conjunto

$$C_\Omega(x) := \{y \in X \mid (x,y) \in \Omega\} ,$$

el cual se interpreta como el lugar geométrico de todos los $y \in X$ que están en una misma configuración dada Ω con x .

PROPOSICION 1. Para cada $\Omega \in X^2/G$, $x \in X$ y $g \in G$ se tiene

$$[C_\Omega(x)]g = C_\Omega(xg) .$$

En particular

$$|C_\Omega(x)| = |C_\Omega(xg)| .$$

Demostración: Nótese que la aplicación $x \mapsto xg$ de X en X es biyectiva $(g \in G)$.

Q.E.D.

2. Descripción del álgebra conmutante $\mathrm{End}_G(V,\tau)$.

2.1. LEMA 1. Se define un isomorfismo del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\underline{\underline{K}}(X) = \mathbb{C}^{X^2}$ de todas las funciones complejas $\underline{K}$ sobre X^2 , denominadas núcleos en lo que sigue, sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, asociando a cada $\underline{K} \in \underline{\underline{K}}(X)$ el operador $\Phi_{\underline{K}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ definido por

$$[\Phi_{\underline{K}}(f)](x) = \sum_{y \in X} \underline{K}(x,y)f(y) \qquad (f \in V , \quad x \in X) .$$

Por este isomorfismo, la composición de operadores en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ corresponde al "producto de Volterra" de núcleos definidos por

$$(\underline{K} * \underline{L})(x,z) = \sum_{y \in X} \underline{K}(x,y)\underline{L}(y,z) \qquad (x,z \in X) ,$$

para todo $\underline{K},\underline{L} \in \underline{\underline{K}}(X)$.

Demostración: Para cada $\Phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ el correspondiente núcleo $\underline{K}$ tal que $\Phi = \Phi_{\underline{K}}$ no es otro que la matriz de Φ respecto a la base canónica de las funciones delta de DIRAC δ_x $(x \in X)$ de $V = \mathbb{C}^X$.

Q.E.D.

PROPOSICION 2. Por el isomorfismo del Lema precedente, la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathrm{End}_G(V,\tau)$ corresponde a la sub-álgebra $\underline{\underline{K}}^G(X)$ formada de los núcleos $\underline{K}$ que son G-invariantes en el sentido que

$$\underline{K}((x,y)g) = \underline{K}(x,y) \qquad ((x,y) \in X^2 \;,\; g \in G)\;.$$

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

Notación. Sea S un conjunto y $T \subset S$. Consideremos la función característica

$$\chi_T : S \to \mathbb{C}\;,$$

definida por

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in T \\ 0 & \text{si } x \notin T\;. \end{cases}$$

2.2. Sea $x_o \in X$. Para cada $\Omega \in X^2/G$ consideremos

$$K_\Omega = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|}\,\chi_\Omega \in \underline{\underline{K}}^G(X)\;.$$

Se tiene que $\{K_\Omega\}_{\Omega\in X^2/G}$ es una base del espacio vectorial $\underline{\underline{K}}^G(X)$. Tal base corresponde, por el isomorfismo del Lema 1, a la base $\{M_\Omega\}_{\Omega\in X^2/G}$ de operadores de promedio, de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathrm{End}_G(V,\tau)$, donde

$$[M_\Omega(f)](x) = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{y\in C_\Omega(x)} f(y) ,$$

para todo $\Omega \in X^2/G$, $f \in V$ y $x \in X$.

<u>Observación</u>. Para cada $\Omega,\Theta,\Xi \in X^2/G$ y $(x,z) \in \Xi$ se tiene

$$(K_\Omega * K_\Theta)(x,z) = \sum_{y\in X} K_\Omega(x,y)K_\Theta(y,z) = \frac{c^\Xi_{\Omega,\Theta}}{|C_\Omega(x_o)||C_\Theta(x_o)|} ,$$

donde

$$c^\Xi_{\Omega,\Theta} = |\{y \in X|(x,y) \in \Omega \wedge (y,z) \in \Theta\}| \qquad ((x,z) \in \Xi) .$$

LEMA 2. <u>Los números de intersección</u> $c^\Xi_{\Omega,\Theta}$ <u>no dependen de la elección de</u> $(x,z) \in X^2$ <u>con</u> $(x,z) \in \Xi$.

<u>Demostración</u>: Sea $(x',z') \in X^2$ con $(x',z') \in \Xi$, entonces existe $g \in G$ tal que $(x,z)g = (x',z')$. Se tiene

$$\{y \in X|(x,y) \in \Omega \wedge (y,z) \in \Theta\}g = \{y' \in X|(x',y') \in \Omega \wedge (y',z') \in \Theta\} .$$

Como la aplicación $x \mapsto xg$ de X en X es biyectiva, se obtiene el re - sultado.

Q.E.D.

Obtenemos así el siguiente

TEOREMA 1. Para cada $\Omega,\Theta \in X^2/G$ se tiene

$$M_\Omega M_\Theta = \sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)||C_\Theta(x_o)|} C^{\Xi}_{\Omega,\Theta} M_\Xi .$$

Demostración: Sigue inmediatamente del Lema 1, de la observación precedente y del Lema 2.

Q.E.D.

3. Espacios de Gelfand.

3.1. DEFINICION 1. Un G-conjunto derecho transitivo X se denomina un espacio de GELFAND si el álgebra conmutante $A = \mathrm{End}_G(V,\tau)$ de la representación natural (V,τ) de G asociada es conmutativa. Si $x_o \in X$ y $K = \mathrm{Stab}_G(x_o)$, se dice también que (G,K) es un par de GELFAND. El punto $x_o \in X$ se denomina punto base del espacio de Gelfand (G,X) .

PROPOSICION 3. Un G-conjunto derecho transitivo X es un espacio de Gelfand sí y sólo si

$$C^{\Xi}_{\Omega,\Theta} = C^{\Xi}_{\Theta,\Omega} \qquad (\Omega,\Theta,\Xi \in X^2/G) .$$

Demostración: Sigue inmediatamente del Teorema 1.

Q.E.D.

Supondremos en todo lo que sigue que (G,X) es un espacio de Gelfand finito con punto base $x_o \in X$ y con $K = \mathrm{Stab}_G(x_o)$.

3.2. Análisis espectral de los operadores M_Ω $(\Omega \in X^2/G)$.

Sea $\Omega \in X^2/G$. Consideremos

$$\check{\Omega} := \{(x,y) \in X^2 \mid (y,x) \in \Omega\} .$$

Se tiene que $\check{\Omega} \in X^2/G$ y además el adjunto M_Ω^* de M_Ω queda dado por

$$M_\Omega^* = M_{\check{\Omega}} .$$

Ahora bien, como el álgebra conmutante $A = \mathrm{End}_G(V,\tau)$ es conmuta - tiva, obtenemos

$$M_\Omega M_\Omega^* = M_\Omega M_{\check{\Omega}} = M_{\check{\Omega}} M_\Omega = M_\Omega^* M_\Omega ,$$

es decir, M_Ω es un operador normal. Luego M_Ω es diagonalizable. Por lo tanto, la base $\{M_\Omega\}_{\Omega \in X^2/G}$ es simultáneamente diagonalizable, luego, existe una familia F de funciones

$$\alpha : X^2/G \to \mathbb{C} ,$$

tal que si

$$V_\alpha = \{f \in V \mid M_\Omega(f) = \alpha(\Omega) f , \quad \forall\ \Omega \in X^2/G\} ,$$

entonces

$$(*) \qquad V = \bigoplus_{\alpha \in F} V_\alpha \qquad \text{(suma ortogonal)} ,$$

donde cada α satisface la ecuación funcional

$$(**)\qquad \sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|}\, c_{\Omega,\Theta}^{\Xi}\, \alpha(\Xi) = \alpha(\Omega)\alpha(\Theta) ,$$

para todo $\Omega,\Theta \in X^2/G$.

En efecto, para cada $f \in V_\alpha$, $\alpha \in F$, se tiene

$$(M_\Omega M_\Theta)(f) = \alpha(\Omega)\alpha(\Theta)f \qquad (\Omega,\Theta \in X^2/G) ,$$

pero

$$M_\Omega M_\Theta = \sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|}\, c_{\Omega,\Theta}^{\Xi} M_\Xi ,$$

luego

$$\left[\sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|}\, c_{\Omega,\Theta}^{\Xi} M_\Xi\right](f) = \alpha(\Omega)\alpha(\Theta)f .$$

Por lo tanto

$$\left[\sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|}\, c_{\Omega,\Theta}^{\Xi} \alpha(\Xi)\right] f = \alpha(\Omega)\alpha(\Theta)f ,$$

de donde se obtiene la ecuación funcional (**) .

Ahora bien, para cada $\alpha \in F$, consideremos la aplicación

$$\underline{\alpha} : \{M_\Omega\}_{\Omega\in X^2/G} \to \mathbb{C} ,$$

definida por

$$\underline{\alpha}(M_\Omega) = \alpha(\Omega) \qquad (\Omega \in X^2/G) .$$

Se tiene que existe una única aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\underline{\alpha}^A$ de A en $\mathbb{C}$ tal que $\underline{\alpha}^A(M_\Omega) = \alpha(\Omega)$, para todo $\Omega \in X^2/G$.

De lo anterior, se observa que

$$\underline{\alpha}^A(M_\Omega M_\Theta) = \underline{\alpha}^A(M_\Omega)\underline{\alpha}^A(M_\Theta) \qquad (\Omega,\Theta \in X^2/G) .$$

Por lo tanto, $\underline{\alpha}^A$ es un <u>carácter</u> de la $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa A .

<u>Notación</u>. En lo que sigue, designaremos por α tanto a la aplicación $\underline{\alpha}$ como a su única extensión $\mathbb{C}$-lineal $\underline{\alpha}^A$. Además, denotaremos por $\hat{A}$ al conjunto de los caracteres de la $\mathbb{C}$-álgebra A .

Recíprocamente, cada carácter α de la $\mathbb{C}$-álgebra A determina una aplicación $\tilde{\alpha}$ de X^2/G en $\mathbb{C}$, que verifica la ecuación funcional (**) , definida por

$$\tilde{\alpha}(\Omega) = \alpha(M_\Omega) \qquad (\Omega \in X^2/G) .$$

Luego podemos escribir (*) como

$$V = \bigoplus_{\alpha\in\hat{A}} V_{\tilde{\alpha}} \qquad \text{(suma ortogonal)},$$

<u>la cual es la descomposición de</u> (V,τ) <u>en suma directa ortogonal de sub - representaciones irreductibles.</u>

<u>Notación</u>. Para consideraciones teóricas, se designará por α a la aplicación $\tilde{\alpha}$.

4. Caracteres de A y funciones esféricas.

4.1. DEFINICION 2. Sea $\alpha \in \hat{A}$. Se denomina función esférica de tipo α , a toda función K-invariante no nula de V_α .

Nótese que cada función esférica ϕ_α de tipo α engendra V_α como $\mathbb{C}[G]$-módulo.

Observación. Para cada $\alpha \in \hat{A}$ designaremos por P_α al proyector ortogonal de V sobre V_α . Como los caracteres $\alpha \in \hat{A}$ proporcionan la resolución espectral simultánea de todos los operadores Φ en el álgebra conmutante conmutativa A , se tiene

$$\Phi = \sum_{\alpha\in\hat{A}} \alpha(\Phi)P_\alpha \qquad (\Phi \in A) .$$

PROPOSICION 4. Sea $\alpha \in \hat{A}$. Se define una función esférica ϕ_α de tipo α tal que $\phi_\alpha(x_o) = 1$, por

$$\phi_\alpha(x) = \alpha(M_{\Omega(x_o,x)}) \qquad (x \in X) ,$$

donde $\Omega(x_o,x)$ designa la G-órbita de $(x_o,x) \in X^2$.

Demostración: Para cada función esférica ψ_α de tipo α y cada órbita $\Omega \in X^2/G$ se tiene

$$M_\Omega(\psi_\alpha) = \sum_{\beta\in\hat{A}} \beta(M_\Omega)P_\beta(\psi_\alpha) = \alpha(M_\Omega)\psi_\alpha ,$$

de donde, evaluando en $x_o \in X$ se obtiene, para cualquier $x \in X$ tal que $(x_o,x) \in \Omega$, que

$$\psi_\alpha(x) = \alpha(M_\Omega)\psi_\alpha(x_o) .$$

Se ve así que la función esférica ψ_α de tipo α es no nula en el punto base $x_o \in X$ y además que ψ_α es proporcional a la función ϕ_α, en efecto $\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_o)\phi_\alpha$. Esto muestra que $\phi_\alpha \in V_\alpha$.

Q.E.D.

4.2. Para cada $\alpha \in \hat{A}$ denotemos por K_α al núcleo G-invariante asociado al operador de entrelazamiento P_α. Se tiene

$$d_\alpha = \mathrm{Tr}(P_\alpha) = \sum_{x\in X} K_\alpha(x,x) = |X| K_\alpha(x_o,x_o) \quad ,$$

donde d_α = dimensión (V_α).

Por otra parte, consideremos la función delta de DIRAC δ_{x_o} en x_o; se tiene

$$[P_\alpha(\delta_{x_o})](x) = \sum_{y\in X} K_\alpha(x,y)\delta_{x_o}(y) = K_\alpha(x,x_o) \qquad (x \in X) \ .$$

Por lo tanto

$$\psi_\alpha := P_\alpha(\delta_{x_o}) = K_\alpha(?,x_o) \quad ,$$

pertenece a V_α, es K-invariante y no nula, es decir, ψ_α es una función esférica de tipo α.

Además, como $I = \sum_{\alpha\in\hat{A}} P_\alpha$ y como $\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_o)\phi_\alpha$, donde

$$\psi_\alpha(x_o) = K_\alpha(x_o,x_o) = \frac{d_\alpha}{|X|} \qquad (\alpha \in \hat{A}) \ ,$$

obtenemos

(1) $$\delta_{x_o} = \sum_{\alpha\in\hat{A}} \psi_\alpha = \frac{1}{|X|} \sum_{\alpha\in\hat{A}} d_\alpha \phi_\alpha \, .$$

Notación. Consideremos

$$\Delta := \{(x,y) \in X^2 | x = y\} \in X^2/G \, .$$

De la relación (1) se infiere que

(2) $$\mathrm{Tr}(M_\Omega) = \delta_{\Omega,\Delta} |X| \qquad (\Omega \in X^2/G) \, ,$$

donde $\delta_{a,b}$ vale 1 si $a = b$ y 0 si $a \neq b$, para elementos a y b de un conjunto E .

Ahora bien, utilizando (2) y el Teorema 1 obtenemos

$$\mathrm{Tr}(M_\Omega M_\Theta^*) = \delta_{\Omega,\Theta} |X|/|C_{\check{\Theta}}(x_o)| \qquad (\Omega,\Theta \in X^2/G) \, ,$$

luego

$$\sum_{\alpha\in\hat{A}} d_\alpha \alpha(\Omega)\overline{\alpha(\Theta)} = \delta_{\Omega,\Theta} |X|/|C_{\check{\Theta}}(x_o)| \qquad (\Omega,\Theta \in X^2/G) \, ,$$

es decir

$$\sum_{\alpha\in\hat{A}} d_\alpha \phi_\alpha(x)\overline{\phi_\alpha(y)} = \delta_{\Omega(x_o,x),\Omega(x_o,y)} |X|/|C_{\Omega(y,x_o)}| \, ,$$

para todo $x,y \in X$.

Por otra parte, puesto que $P_\beta P_\alpha = \delta_{\alpha,\beta} P_\alpha$ $(\alpha,\beta \in \hat{A})$ y $P_\beta^* = P_\beta$ $(\beta \in \hat{A})$, se tiene

$$(3) \qquad \sum_{y\in X} K_\beta(x,y)K_\alpha(y,z) = \delta_{\alpha,\beta}K_\alpha(x,z) \qquad (x,z \in X) ,$$

$$(4) \qquad K_\beta(x,y) = \overline{K_\beta(y,x)} \qquad (x,y \in X) .$$

Considerando $x = z = x_o$ en (3) y utilizando (4) obtenemos

$$\sum_{y\in X} \psi_\alpha(y)\overline{\psi_\beta(y)} = \delta_{\alpha,\beta}\ \psi_\alpha(x_o) ,$$

es decir

$$\sum_{y\in X} \phi_\alpha(y)\overline{\phi_\beta(y)} = \delta_{\alpha,\beta}\ |X|/d_\beta \qquad (\alpha,\beta \in \hat{A}) .$$

Notación. Consideremos el producto escalar de HILBERT-SCHMIDT

$$\langle A,B\rangle_{HS} := \mathrm{Tr}(AB^*) \qquad (A,B \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)) ,$$

donde B^* designa el adjunto de B .

En resumen tenemos el

TEOREMA 2. Para un espacio de Gelfand (G,X) se tienen las siguientes relaciones

$$(5) \qquad \langle M_\Omega,M_\Theta\rangle_{HS} = \delta_{\Omega,\Theta}|X|/|C_{\gamma_\Theta}(x_o)| \qquad (\Omega,\Theta \in X^2/G) ,$$

$$(6) \qquad \langle \phi_\alpha,\phi_\beta\rangle_{L^2} = \delta_{\alpha,\beta}|X|/d_\beta \qquad (\alpha,\beta \in \hat{A}) .$$

En particular

(7) $$d_\alpha = |X|/\|\phi_\alpha\|^2_{L^2} \qquad (\alpha \in \hat{A}) .$$

4.3. La traza tr del álgebra A está definida por

$$\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(m_\Phi) \qquad (\Phi \in A) ,$$

donde $\mathrm{Tr}(m_\Phi)$ designa la traza del endomorfismo m_Φ de multiplicación por Φ del $\mathbb{C}$-espacio vectorial A . Se tiene

$$\mathrm{tr}(P_\alpha) = 1 \qquad (\alpha \in \hat{A}) ,$$

de donde

(8) $$\mathrm{tr} = \sum_{\alpha\in\hat{A}} \alpha ,$$

relación usada a menudo como criterio de completitud para mostrar que una familia ya construída de homomorfismos de A en $\mathbb{C}$ agota $\hat{A}$.

Notación. Consideremos la base $\{\tilde{M}_\Omega\}_{\Omega\in X^2/G}$ de operadores de promedio no normalizados, de la $\mathbb{C}$-álgebra A , donde

$$\tilde{M}_\Omega = |C_\Omega(x_o)|M_\Omega \qquad (\Omega \in X^2/G) .$$

5. Grafos distalmente transitivos.

5.1. Primeras definiciones.

Un grafo Γ consiste de un conjunto finito no vacío X cuyos elementos se denominan vértices y un subconjunto $\underline{\underline{L}}$ del conjunto $\underline{\underline{P}}_2(X)$ de todos los subconjuntos de cardinal 2 de X , cuyos elementos se denominan aristas. Se dice que dos vértices x e y son adyacentes sí y sólo si $\{x,y\}$ es una arista, es decir, si $\{x,y\} \in \underline{\underline{L}}$.

Un camino de longitud m ($m \in \mathbb{N}$) de x a y (x,y vértices) en el grafo Γ es una sucesión finita $\underline{z} = (z_o, z_1, \ldots, z_m)$ tal que $z_o = x$, $z_m = y$, $\{z_i, z_{i+1}\} \in \underline{\underline{L}}$ para todo $0 \leq i \leq m - 1$. Un grafo Γ es conexo si para todo par de vértices x,y existe un camino de longitud m para algún $m \in \mathbb{N}$ de x a y . En un grafo conexo Γ la distancia geodésica $D(x,y)$ entre dos vértices x e y está definida como el menor $m \in \mathbb{N}$ tal que existe un camino de longitud m de x a y en el grafo Γ .

DEFINICION 3. Un G-conjunto derecho transitivo X se denomina un grafo distalmente transitivo si

i) X está provisto de una estructura de grafo conexo $\Gamma = (X, \underline{\underline{L}})$ respetada por la acción de G , es decir, para todo $g \in G$ se tiene

$$\{x,y\} \in \underline{\underline{L}} \Rightarrow \{xg, yg\} \in \underline{\underline{L}} \ .$$

ii) La distancia geodésica D del grafo Γ es un invariante que clasifica las órbitas de G en X^2 , es decir, para todo (x,y) , $(x',y') \in X^2$ se tiene

$$D(x,y) = D(x',y') \Leftrightarrow \text{existe } g \in G \text{ tal que } (x,y)g = (x',y') \ .$$

Observación. Nótese que un grafo distalmente transitivo es un espacio de Gelfand.

Sea (G,X) un grafo distalmente transitivo. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $Z_m := \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ y designemos por n al diámetro de Γ , es decir

$$n := \text{diámetro}(\Gamma) = \text{máx}\{D(x,y) \in \mathbb{N} \,|\, x,y \in X\} .$$

Se tiene

$$X^2/G = \{\Omega_r\}_{r \in Z_{n+1}} ,$$

dónde

$$\Omega_r = \{(x,y) \in X^2 \,|\, D(x,y) = r\} \qquad (r \in Z_{n+1}) .$$

Notación. Designemos

$$C_r(x_o) := C_{\Omega_r}(x_o) \qquad (r \in Z_{n+1}) ,$$

$$C^t_{r,s} := C^{\Omega_t}_{\Omega_r,\Omega_s} \qquad (r,s,t \in Z_{n+1}) .$$

Por otra parte, consideremos la base $\{\widetilde{M}_r\}_{r \in Z_{n+1}}$ de operadores de promedio no normalizados, de la $\mathbb{C}$-álgebra A . Se tiene

$$\widetilde{M}_o\widetilde{M}_1 = \widetilde{M}_1 ,$$

$$\widetilde{M}_r\widetilde{M}_1 = C^{r-1}_{r,1}\widetilde{M}_{r-1} + C^r_{r,1}\widetilde{M}_r + C^{r+1}_{r,1}\widetilde{M}_{r+1} \qquad (r \in Z_{n+1} , r \neq 0,n) ,$$

$$\widetilde{M}_n\widetilde{M}_1 = C^{n-1}_{n,1}\widetilde{M}_{n-1} + C^n_{n,1}\widetilde{M}_n .$$

PROPOSICION 5. <u>En un grafo distalmente transitivo</u> (G,X) <u>las aplicaciones</u> α <u>de</u> X^2/G <u>en</u> $\mathbb{C}$ <u>definidas por</u>

$$\alpha(\Omega_r) = \frac{1}{|C_r(x_o)|}\,\tilde{\alpha}(r) \qquad (r \in Z_{n+1}) ,$$

<u>donde las aplicaciones</u> $\tilde{\alpha}$ <u>de</u> Z_{n+1} <u>en</u> $\mathbb{C}$ <u>son las soluciones de la ecuación a diferencias finitas</u>

$$\tilde{\alpha}(0) = 1$$

$$\tilde{\alpha}(r)\tilde{\alpha}(1) = C^{r-1}_{r,1}\tilde{\alpha}(r-1) + C^{r}_{r,1}\tilde{\alpha}(r) + C^{r+1}_{r,1}\tilde{\alpha}(r+1) \qquad (r \in Z_{n+1} , r \neq 0,n) ,$$

$$\tilde{\alpha}(n)\tilde{\alpha}(1) = C^{n-1}_{n,1}\tilde{\alpha}(n-1) + C^{n}_{n,1}\tilde{\alpha}(n) ,$$

<u>proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand</u> (G,X) .

<u>Demostración</u>. Es inmediata.

Q.E.D.

5.2. <u>Aplicaciones de la Proposición precedente</u>.

5.2.1. Consideremos como X al icosaedro y al dodecaedro, los cuales son poliedros regulares 3-dimensionales. Designemos por $M[X]$ al subgrupo de todas las aplicaciones biyectivas g en X que preservan la distancia geodésica D del poliedro regular X , es decir, $D(g(x),g(y)) = D(x,y)$ para todo $x,y \in X$. El $M[X]$-conjunto derecho transitivo X , donde el grupo $M[X]$ actúa de manera evidente, a la derecha, sobre X , por $x \mapsto g^{-1}(x)$ $(x \in X , g \in M[X])$, constituye de manera natural un grafo distalmente transitivo.

5.2.2. <u>Caso del espacio de Gelfand</u> $(M[X], X)$, <u>cuando</u> X <u>es el icosaedro</u>.

Consideremos

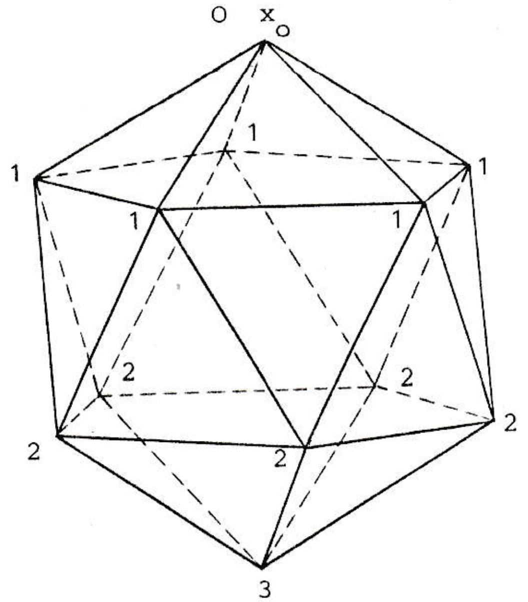


Figura 1. Icosaedro

En este caso obtenemos:

$$\tilde{\alpha}(1)\tilde{\alpha}(1) = 5 + 2\tilde{\alpha}(1) + 2\tilde{\alpha}(2) ,$$

$$\tilde{\alpha}(2)\tilde{\alpha}(1) = 2\tilde{\alpha}(1) + 2\tilde{\alpha}(2) + 5\tilde{\alpha}(3)$$

$$\tilde{\alpha}(3)\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(2) .$$

Luego

$$[\tilde{\alpha}(1)]^4 - 4[\tilde{\alpha}(1)]^3 - 10[\tilde{\alpha}(1)]^2 + 20[\tilde{\alpha}(1)] + 25 = 0$$

Por lo tanto

$$\tilde{\alpha}(1) = 5, \sqrt{5} , -\sqrt{5} , -1 .$$

Las representaciones irreductibles del grupo $M[X]$, asociadas a la acción de $M[X]$ en X , están dadas por la tabla siguiente

función esférica \ N(?)	0	1	2	3	dimensión
ϕ_{α_o}	1	1	1	1	1
ϕ_{α_1}	1	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	-1	3
ϕ_{α_2}	1	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	-1	3
ϕ_{α_3}	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	5

Donde $N(x)$ designa la distancia geodésica entre el punto $x \in X$ y el punto base x_o .

5.2.3. Caso del espacio de Gelfand $(M[X], X)$, cuando X es el dodecaedro.

Consideremos

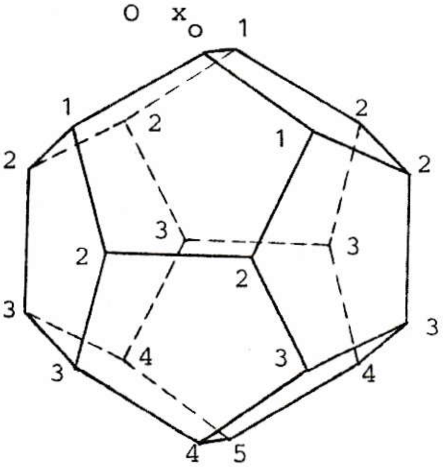


Figura 2. Dodecaedro.

En este caso obtenemos:

$$\tilde{\alpha}(1)\tilde{\alpha}(1) = 3 + \tilde{\alpha}(2) \ ,$$

$$\tilde{\alpha}(2)\tilde{\alpha}(1) = 2\tilde{\alpha}(1) + \tilde{\alpha}(2) + \tilde{\alpha}(3) \ ,$$

$$\tilde{\alpha}(3)\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(2) + \tilde{\alpha}(3) + 2\tilde{\alpha}(4) \ ,$$

$$\tilde{\alpha}(4)\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(3) + 3\tilde{\alpha}(5) \ ,$$

$$\tilde{\alpha}(5)\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(4) \ .$$

Luego

$$[\tilde{\alpha}(1)]^6 - 2[\tilde{\alpha}(1)]^5 - 10[\tilde{\alpha}(1)]^4 + 16[\tilde{\alpha}(1)]^3 + 25[\tilde{\alpha}(1)]^2 - 30[\tilde{\alpha}(1)] = 0 \ .$$

Por lo tanto

$$\tilde{\alpha}(1) = 3 \ , \ \sqrt{5} \ , \ -\sqrt{5} \ , \ 0 \ , \ -2 \ , \ 1 \ .$$

Las representaciones irreducibles del grupo $M[X]$, asociadas a la acción de $M[X]$ en X , están dadas por la tabla siguiente

función esférica \ N(?)	0	1	2	3	4	5	dimensión
ϕ_{α_o}	1	1	1	1	1	1	1
ϕ_{α_1}	1	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	-1	3
ϕ_{α_2}	1	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	-1	3
ϕ_{α_3}	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	4
ϕ_{α_4}	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	1	4
ϕ_{α_5}	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	5

Donde $N(x)$ designa la distancia geodésica entre el punto $x \in X$ y el punto base x_o .

CAPITULO II. CARACTERES DE UN ESPACIO DE GELFAND FINITO

1. Primeras definiciones y notaciones.

DEFINICION 4. Sean $\Omega,\Theta \in X^2/G$. Una aplicación no nula f de X en $\mathbb{C}$ se denomina un $[\Omega,\Theta]$-carácter del espacio de Gelfand (G,X) si para cada $u \in C_\Omega(x_o)$ existe una aplicación biyectiva $\xi_u^{[\Omega,\Theta]}$ de $C_\Theta(x_o)$ sobre $C_\Theta(u)$ tal que

$$f(u)f(v) = f(\xi_u^{[\Omega,\Theta]}(v)) \qquad (v \in C_\Theta(x_o)) .$$

DEFINICION 5. Una aplicación no nula f de X en $\mathbb{C}$ se denomina un carácter del espacio de Gelfand (G,X) si para cada $\Omega,\Theta \in X^2/G$ se tiene que f es un $[\Omega,\Theta]$-carácter de (G,X) .

PROPOSICION 6. Si f es un carácter del espacio de Gelfand (G,X) , entonces la imagen $\mathrm{Im}(f)$ de X por f es un subgrupo cíclico finito del grupo $\mathbb{C}^\times$. Nótese que $f(x_o) = 1$.

Demostración: Sea f un carácter del espacio de Gelfand (G,X) y sea $u \in X$. Existe $\Omega \in X^2/G$ tal que $u \in C_\Omega(x_o)$. Además, para cada

$\Theta \in X^2/G$ existe una aplicación biyectiva $\xi_u^{[\Omega,\Theta]}$ de $C_\Theta(x_o)$ sobre $C_\Theta(u)$ tal que

$$f(u)f(v) = f(\xi_u^{[\Omega,\Theta]}(v)) \qquad (v \in C_\Theta(x_o)) .$$

Ahora bien, si $f(u) = 0$ se tiene

$$f(v) = 0 \qquad (v \in C_\Theta(u)) .$$

Luego $f = \underline{0}$, la cual es una contradicción. Por lo tanto $f(u) \neq 0$.

En particular, como f es un $[\Delta,\Delta]$-carácter del espacio de Gelfand (G,X) se tiene

$$f(x_o)f(x_o) = f(x_o) .$$

Por lo tanto $f(x_o) = 1$.

Sea $x \in X$. La aplicación $m_{f(x)} : z \mapsto f(x)z \quad (z \in \mathbb{C}^\times)$ es inyectiva, además $m_{f(x)}(\mathrm{Im}(f)) \subset \mathrm{Im}(f)$. Puesto que $\mathrm{Im}(f)$ es un conjunto finito se obtiene que $m_{f(x)}|_{\mathrm{Im}(f)}$ es una aplicación biyectiva. En particular, existe $y \in X$ tal que $f(x)f(y) = f(x_o)$, lo cual demuestra la Proposición.

Q.E.D.

<u>Notación</u>. Sea $u \in X$. Consideremos

$$G[x_o,u] := \{g \in G | x_og = u\} .$$

PROPOSICION 7. Sean $\Omega,\Theta \in X^2/G$ y sea $f \in L^2(X)$, $f \neq 0$. Si para cada $u \in C_\Omega(x_o)$ existe $g[x_o,u;\Omega,\Theta] \in G[x_o,u]$ tal que

$$f(u)f(v) = f(vg[x_o,u;\Omega,\Theta]) \qquad (v \in C_\Theta(x_o)) ,$$

entonces f es un $[\Omega,\Theta]$-carácter del espacio de Gelfand (G,X) .

Demostración: Sigue inmediatamente de la Proposición 1.

Q.E.D.

2. Descripción de una fórmula para caracteres del álgebra conmutante conmutativa A .

TEOREMA 3. Si f es un carácter del espacio de Gelfand (G,X) , entonces la aplicación definida por

$$\alpha_f(\Omega) = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{u\in C_\Omega(x_o)} f(u) = [M_\Omega(f)](x_o) \qquad (\Omega \in X^2/G) ,$$

verifica la ecuación funcional $(**)$. Por lo tanto proporciona un carácter del álgebra conmutante conmutativa A .

Demostración: Sean $\Omega,\Theta \in X^2/G$. Se tiene

$$\alpha_f(\Omega)\alpha_f(\Theta) = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|} \sum_{\substack{u\in C_\Omega(x_o)\\ v\in C_\Theta(x_o)}} f(u)f(v)$$

$$= \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|} \sum_{\substack{u\in C_\Omega(x_o)\\ v\in C_\Theta(x_o)}} f(\xi_u^{[\Omega,\Theta]}(v))$$

$$= \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{u\in C_\Omega(x_o)} \left[\frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{w\in C_\Omega(u)} f(w) \right]$$

(puesto que $\xi_u^{[\Omega,\Theta]}$ es biyectiva y $\xi_u^{[\Omega,\Theta]}\ (C_\Theta(x_o)) = C_\Theta(u)$)

$$= \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{u\in C_\Omega(x_o)} [M_\Theta(f)](u)$$

$$= [M_\Omega(M_\Theta(f))](x_o) = [(M_\Omega M_\Theta)(f)](x_o)$$

$$= \left[\left[\sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|} C^{\Xi}_{\Omega,\Theta}\, M_\Xi\right](f)\right](x_o)$$

$$= \sum_{\Xi\in X^2/G} \frac{|C_\Xi(x_o)|}{|C_\Omega(x_o)|\,|C_\Theta(x_o)|} C^{\Xi}_{\Omega,\Theta}\, \alpha_f(\Xi) .$$

Q.E.D.

<u>Observación</u>. Se tiene que $f \in V_{\alpha_f}$.

En efecto, para cada $x \in X$ existe $\Theta \in X^2/G$ tal que $x \in C_\Theta(x_o)$.

Luego

$$[M_\Omega(f)](x) = \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{u\in C_\Omega(x)} f(u)$$

$$= \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{v \in C_\Omega(x_o)} f(\xi_x^{[\Theta,\Omega]}(v))$$

$$= \frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{v \in C_\Omega(x_o)} f(v) f(x)$$

$$= \left[\frac{1}{|C_\Omega(x_o)|} \sum_{v \in C_\Omega(x_o)} f(v) \right] f(x) = \alpha_f(\Omega) f(x) \quad ,$$

para todo $\Omega \in X^2/G$.

DEFINICION 6. Una aplicación ζ de X^2/G en X^2/G se denomina una similitud del espacio de Gelfand (G,X) si

$$(9) \qquad C^{\nabla}_{\zeta(\Omega)\zeta(\Theta)} = \sum_{\Xi \in \zeta^{-1}(\nabla)} C^{\Xi}_{\Omega,\Theta} \quad ,$$

para todo $\Omega,\Theta,\nabla \in X^2/G$.

PROPOSICION 8. Si ζ es una similitud del espacio de Gelfand (G,X) , entonces el único endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal $\underline{\zeta}$ del $\mathbb{C}$-espacio vectorial A tal que

$$\underline{\zeta}(\widetilde{M}_\Omega) = \widetilde{M}_{\zeta(\Omega)} \qquad (\Omega \in X^2/G) \quad ,$$

es, además, un endomorfismo de la $\mathbb{C}$-álgebra A .

Demostración: Para cada $\Omega,\Theta \in X^2/G$ se tiene

$$\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Theta = \sum_{\Xi \in X^2/G} c^{\Xi}_{\Omega,\Theta} \widetilde{M}_\Xi .$$

Por lo tanto

$$\underline{\zeta}(\widetilde{M}_\Omega \widetilde{M}_\Theta) = \sum_{\Xi \in X^2/G} c^{\Xi}_{\Omega,\Theta} \widetilde{M}_{\zeta(\Xi)}$$

$$= \sum_{\nabla \in \mathrm{Im}(\zeta)} \left[\sum_{\Xi \in \zeta^{-1}(\nabla)} c^{\Xi}_{\Omega,\Theta} \right] \widetilde{M}_\nabla$$

$$= \sum_{\nabla \in X^2/G} c^{\nabla}_{\zeta(\Omega),\zeta(\Theta)} \widetilde{M}_\nabla$$

$$= \widetilde{M}_{\zeta(\Omega)} \widetilde{M}_{\zeta(\Theta)} = \underline{\zeta}(\widetilde{M}_\Omega)\underline{\zeta}(\widetilde{M}_\Theta) .$$

Q.E.D.

Observación. Sea ζ una similitud del espacio de Gelfand (G,X). Si ζ es una aplicación biyectiva la relación (9) se transforma en

$$c^{\zeta(\Xi)}_{\zeta(\Omega),\zeta(\Theta)} = c^{\Xi}_{\Omega,\Theta} \qquad (\Omega,\Theta,\Xi \in X^2/G) .$$

TEOREMA 4. Si f es un carácter del espacio de Gelfand (G,X) y si ζ es una similitud del espacio de Gelfand (G,X), entonces la aplicación $\alpha_f \circ \underline{\zeta}$ es un carácter del álgebra conmutante conmutativa A.

Demostración: Sigue inmediatamente del Teorema 3 y de la Proposición 8.

Q.E.D.

3. Aplicaciones de la fórmula precedente.

3.1. Caso en que G es un producto de subgrupos.

Sea G un grupo finito y sean K,B subgrupos de G tales que G es el producto de K por B, es decir

$$G = KB \quad y \quad K \cap B = \{\underline{e}\} \ ,$$

donde $\underline{e}$ es el elemento neutro del grupo G.

Consideremos el G-espacio derecho transitivo X, donde $X = K\backslash G$; la acción de G en X está dada por

$$(Kh)g = Khg \qquad (h,g \in G) \ .$$

Ahora bien, como para cada $h \in G$ existen únicos $\underline{k}(h) \in K$, $\underline{b}(h) \in B$ tales que $h = \underline{k}(h)\underline{b}(h)$, se tiene que

$$Kh = K\underline{k}(h)\underline{b}(h) = K\underline{b}(h) \qquad (h \in G) \ .$$

Además, obtenemos que la aplicación ψ de X en B definida por

$$\psi(Kh) = \underline{b}(h) \qquad (h \in G) \ ,$$

es biyectiva. Luego, la acción de G en B definida por

$$b\bullet g := \psi(\psi^{-1}(b)g) = \underline{b}(bg) \qquad (b \in B \ , \quad g \in G) \ ,$$

provee a B de una estructura de G-espacio derecho transitivo isomorfa a (G,X). El G-isomorfismo está dado, obviamente, por ψ.

Por otra parte, consideremos

$$C(B/K) := \{f \in L^2(B) \,|\, f(b) = f(b \cdot k) \ , \quad \forall\, b \in B \ , \quad \forall\, k \in K\} \ .$$

LEMA 3. *Se define un isomorfismo del* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial* $\underline{\underline{K}}^G(B)$ *sobre el* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial* $C(B/K)$ *asociado a cada* $\underline{K} \in \underline{\underline{K}}^G(B)$ *la aplicación* $f_{\underline{K}} \in C(B/K)$ *definida por*

$$f_{\underline{K}}(b) = \underline{K}(b,\underline{e}) \qquad\qquad (b \in B) \ .$$

Por este isomorfismo, el producto de Volterra de núcleos G-*invariantes correspondea la convolución de funciones en* $C(B/K)$. *Es decir, el álgebra* $\underline{\underline{K}}^G(B)$ *de núcleos* G-*invariantes es isomorfa al álgebra de convolución* $C(B/K)$.

Demostración: Se tiene

$$B/K = \{C_\Omega(\underline{e})\}_{\Omega \in B^2/G} \ ,$$

$$f_{\underset{\Omega}{\tilde{K}}} = \chi_{C_\Omega(\underline{e})} \in C(B/K) \qquad\qquad (\Omega \in B^2/G) \ ,$$

donde

$$\tilde{K}_\Omega = |C_\Omega(\underline{e})|\, K_\Omega = \chi_\Omega \qquad\qquad (\Omega \in B^2/G) \ .$$

Además, para cada $\underline{K}, \underline{L} \in \underline{\underline{K}}^G(B)$ se tiene

$$(\underline{K} * \underline{L})(b',b'') = \sum_{b \in B} \underline{K}(b',b)\underline{L}(b,b'')$$

$$= \sum_{b \in B} f_{\underline{K}}(b'b^{-1}) f_{\underline{L}}(bb''^{-1})$$

$$= (f_{\underline{K}} * f_{\underline{L}})(b'b''^{-1}) \ ,$$

es decir

$$f_{\underline{K}*\underline{L}} = f_{\underline{K}} * f_{\underline{L}} \ .$$

Q.E.D.

Observación. El álgebra de grupo $\mathbb{C}[B]$ es isomorfa al álgebra de espacio vectorial subyaciente $L^2(B)$, cuya multiplicación es la convolución de funciones. Luego, el álgebra de convolución $C(B/K)$ es una sub-álgebra del álgebra de grupo $\mathbb{C}[B]$.

En particular, si B es abeliano, se tiene que el álgebra de grupo $\mathbb{C}[B]$ es conmutativa, por lo tanto el álgebra de convolución $C(B/K)$ es conmutativa. Luego (G,B) es un espacio de Gelfand.

En todo lo que sigue suponemos que (G,B) es un espacio de Gelfand, con punto base $x_o = \underline{e} \in B$.

LEMA 4. Si χ es un carácter de dimensión 1 de B , entonces χ es un carácter del espacio de Gelfand (G,B) .

Demostración: Para cada $b \in B$ consideremos

$$g[x_o,b] = b \in G[x_o,b] \ .$$

Se tiene que

$$\chi(b)\chi(b') = \chi(b'b) = \chi(b'g[x_o,b]) \qquad (b' \in B) \ ,$$

lo cual demuestra el Lema.

Q.E.D.

TEOREMA 5. Sea χ un carácter de dimensión 1 de B . La aplicación α_χ de B^2/G en $\mathbb{C}$ definida por

$$\alpha_\chi(\Omega) = \frac{1}{|C_\Omega(\underline{e})|} \sum_{u \in C_\Omega(\underline{e})} \chi(u) \qquad (\Omega \in B^2/G) ,$$

verifica la ecuación funcional (**) . Por lo tanto proporciona un carácter del álgebra conmutante conmutativa A .

Demostración: Sigue inmediatamente del Teorema 3 y del Lema 4.

Q.E.D.

3.2. Caso en que G es un producto semi-directo de subgrupos.

3.2.1. Sea G un grupo finito y sean K,H subgrupos de G tales que G es el producto semi-directo de K por H , es decir

$$G = KH , \quad K \cap H = \{\underline{e}\} ,$$

$$H \lhd G ,$$

donde $\underline{e}$ es el elemento neutro del grupo G , lo cual se denotará por $G = K \ltimes H$.

Como, en particular, G es el producto de K por H , para cada $g \in G$ existen únicos $\underline{k}(g) \in K$, $\underline{h}(g) \in H$ tales que $g = \underline{k}(g)\underline{h}(g)$. Luego, podemos considerar los G-espacios definidos en el párrafo precedente. Se obtiene que la acción de G en H definida por

$$h \cdot g := \underline{h}(hg) \qquad (h \in H , \quad g \in G) ,$$

provee a H de una estructura de G-espacio derecho transitivo.

Ahora bien, para cada $h' \in H$ se tiene

$$h \cdot h' = \underline{h}(hh') = hh' \qquad (h \in H) .$$

Por otra parte, como H es un subgrupo normal de G, para cada $k \in K$ se tiene

$$h \cdot k = \underline{h}(hk) = k^{-1}hk \qquad (h \in H) .$$

En todo lo que sigue suponemos que H es un grupo abeliano. Luego (G,H) es un espacio de Gelfand con punto base $x_o = \underline{e}$.

3.2.2. Consideremos la acción de K en H definida por

$$h \cdot k = k^{-1}hk \qquad (h \in H , \quad k \in K) .$$

Denotaremos por H/K al conjunto de las órbitas de K en H . Se tiene

$$H^2/G = \{O_\nu\}_{\nu \in H/K} ,$$

donde

$$O_\nu = \{(h_1,h_2) \in H^2 \mid h_2h_1^{-1} \in \nu\} \qquad (\nu \in H/K).$$

Consideremos además la acción de K en $\hat{H}$ definida por

$$\chi \cdot k = \chi^k \qquad (\chi \in \hat{H} , \; k \in K) ,$$

donde

$$\chi^k(h) = \chi(khk^{-1}) \qquad (\chi \in \hat{H} , \; k \in K , \; h \in H) .$$

Denotaremos por $\hat{H}/K$ al conjunto de las órbitas de K en $\hat{H}$.

3.2.3. Sea $\nu \in H/K$. Se tiene

$$C_{O_\nu}(\underline{e}) = \{h \in H \mid (\underline{e},h) \in O_\nu\} = \nu \ .$$

Ahora bien, del Teorema 5 se infiere que las aplicaciones α_χ de H^2/G en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_\chi(O_\nu) = \frac{1}{|\nu|} \sum_{u\in\nu} \chi(u) \ ,$$

para todo $\chi \in \hat{H}$ y para todo $\nu \in H/K$, proporcionan caracteres del álgebra conmutante conmutativa A . Además, si $\chi_1, \chi_2 \in \Psi$ $(\Psi \in \hat{H}/K)$, existe $k \in K$ tal que $\chi_2 = \chi_1^k$. Luego

$$\alpha_{\chi_2}(O_\nu) = \frac{1}{|\nu|} \sum_{u\in\nu} \chi_2(u) = \frac{1}{|\nu|} \sum_{u\in\nu} \chi_1(kuk^{-1})$$

$$= \frac{1}{|\nu|} \sum_{u\in\nu} \chi_1(u) = \alpha_{\chi_1}(O_\nu) \ ,$$

para todo $\nu \in H/K$, es decir

$$\chi_1, \chi_2 \in \Psi \Rightarrow \alpha_{\chi_1} = \alpha_{\chi_2} \qquad (\Psi \in \hat{H}/K) \ .$$

Para cada $\Psi \in \hat{H}/K$ consideremos $\chi^\Psi \in \Psi$, es decir, $\{\chi^\Psi\}_{\Psi\in\hat{H}/K}$ es un sistema de representantes para las órbitas de K en $\hat{H}$.

Notación. Consideremos

$$\alpha_\Psi := \alpha_{\chi^\Psi} \qquad (\Psi \in \hat{H}/K) ,$$

$$\phi_\Psi := \phi_{\alpha_\Psi} \qquad (\Psi \in \hat{H}/K) .$$

Por otra parte, nótese que

$$\phi_\Psi = \frac{1}{|\Psi|} \sum_{\chi \in \Psi} \chi \qquad (\Psi \in \hat{H}/K) .$$

Obtenemos así el siguiente

TEOREMA 6. Sea G un grupo finito y sean K, H subgrupos de G tales que G es el producto semi-directo de K por H, siendo H subgrupo normal de G. Supongamos además que H es abeliano. Sea $\{\chi^\Psi\}_{\Psi \in \hat{H}/K}$ un sistema de representantes para las órbitas de K en $\hat{H}$. Se tiene que

$$\hat{A} = \{\underline{\alpha}_\Psi\}_{\Psi \in \hat{H}/K} ,$$

donde

$$\alpha_\Psi(O_\nu) = \frac{1}{|\nu|} \sum_{u \in \nu} \chi^\Psi(u) ,$$

para todo $\Psi \in \hat{H}/K$, $\nu \in H/K$. Además

$$\text{dimensión}(V_{\alpha_\Psi}) = |\Psi| \qquad (\Psi \in \hat{H}/K) .$$

Por lo tanto

$$V = \bigoplus_{\Psi \in \hat{H}/K} V_{\alpha_\Psi} ,$$

es la descomposición de la representación natural (V,τ) de G, asociada a la acción de G en H, en suma directa ortogonal de subrepresentaciones irreductibles.

Demostración: Nótese que

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\psi\in\hat{H}/K}{}' |\psi|\phi_\psi = \frac{1}{|H|}\sum_{\psi\in\hat{H}/K}{}' \sum_{\chi\in\psi}{}' \chi$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{\chi\in\hat{H}} \chi = \delta_{\underline{e}} \ .$$

Q.E.D.

3.3. Producto tensorial de representaciones naturales asociadas a espacios de Gelfand.

3.3.1. Sean (G,X), (H,Y) espacios de Gelfand con puntos bases $x_o \in X$, $y_o \in Y$. Sean (V,σ), (W,τ) las representaciones naturales de G y H asociadas a las acciones de G en X y de H en Y respectivamente. Consideremos la acción de $G \times H$ en $X \times Y$ definida por

$$(x,y)(g,h) = (xg,yh) \qquad (x \in X\ ,\ y \in Y\ ,\ g \in G\ ,\ h \in H)\ ,$$

la cual provee a $X \times Y$ de una estructura de $(G \times H)$-espacio derecho transitivo.

Sea (U,ρ) la representación natural de $G \times H$ asociada a la acción de $G \times H$ en $X \times Y$. Se tiene

$$U = L^2(X \times Y)\ ,$$

$$[\rho_{(g,h)}(f)](x,y) = f(xg,yh) \qquad (f \in U, (g,h) \in G \times H \ , \ (x,y) \in X \times Y) \ .$$

Por otra parte, obtenemos que

$$(X \times Y)^2/(G \times H) = \{O_{[\Omega,\Theta]}\}_{\Omega \in X^2/G, \Theta \in Y^2/H} \ ,$$

donde

$$O_{[\Omega,\Theta]} = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in (X \times Y)^2 \mid (x_1,x_2) \in \Omega \wedge (y_1,y_2) \in \Theta\} \ ,$$

para todo $\Omega \in X^2/G$, $\Theta \in Y^2/H$.

Además, para cada $\Omega \in X^2/G$, $\Theta \in Y^2/H$ se tiene

$$\begin{aligned} C_{O_{[\Omega,\Theta]}}(x_o,y_o) &= \{(x,y) \in X \times Y \mid ((x_o,y_o),(x,y)) \in O_{[\Omega,\Theta]}\} \ , \\ &= \{(x,y) \in X \times Y \mid (x_o,x) \in \Omega \wedge (y_o,y) \in \Theta\} \\ &= C_\Omega(x_o) \times C_\Theta(y_o) \ . \end{aligned}$$

3.3.2. Sean $(g,h) \in G \times H$, $\phi \in V$, $\psi \in W$. Se tiene

$$\begin{aligned} [(\sigma_g \otimes \tau_h)(\phi \otimes \psi)](x,y) &= [\sigma_g(\phi) \otimes \tau_h(\psi)](x,y) \\ &= [\sigma_g(\phi)](x)[\tau_h(\psi)](y) \\ &= (\phi \otimes \psi)(xg,yh) \ . \end{aligned}$$

Como $U = V \otimes W$, la relación precedente implica que

$$\rho_{(g,h)} = \sigma_g \otimes \tau_h \qquad ((g,h) \in G \times H) \ .$$

Además, como $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes W) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$, se tiene que $\mathrm{End}_{G\times H}(U,\rho) = \mathrm{End}_G(V,\sigma) \otimes \mathrm{End}_H(W,\tau)$. Luego $\mathrm{End}_{G\times H}(U,\rho)$ es conmutativa, es decir, $(G \times H, X \times Y)$ es un espacio de Gelfand con punto base $(x_o,y_o) \in X \times Y$.

Notación. Consideremos

$$\underline{A} := \mathrm{End}_G(V,\sigma) \quad , \quad \underline{B} := \mathrm{End}_H(W,\tau)$$

LEMA 5. *Si ϕ y ψ son caracteres de los espacios de Gelfand (G,X) y (H,Y) respectivamente, entonces $\phi \otimes \psi$ es un carácter del espacio de Gelfand $(G \times H, X \times Y)$.*

Demostración: Sean $\Omega,\Omega' \in X^2/G$; $\Theta,\Theta' \in Y^2/H$ y sea $(u,v) \in C_{O_{[\Omega,\Theta]}}(x_o,y_o)$. Se tiene que $u \in C_\Omega(x_o)$ y $v \in C_\Theta(y_o)$.

Ahora bien, como ϕ es un carácter del espacio de Gelfand (G,X) se tiene que existe una aplicación biyectiva $\xi_u^{[\Omega,\Omega']}$ de $C_{\Omega'}(x_o)$ sobre $C_{\Omega'}(u)$ tal que

$$\phi(u)\phi(u') = \phi(\xi_u^{[\Omega,\Omega]}(u')) \qquad (u' \in C_{\Omega'}(x_o)) \ .$$

Similarmente, como ψ es un carácter del espacio de Gelfand (H,Y) se tiene que existe una aplicación biyectiva $\gamma_v^{[\Theta,\Theta']}$ de $C_{\Theta'}(y_o)$ sobre $C_{\Theta'}(v)$ tal que

$$\psi(v)\psi(v') = \psi(\gamma_v^{[\Theta,\Theta']}(v')) \qquad (v' \in C_{\Theta'}(y_o)) \ .$$

Luego existe la aplicación biyectiva $\xi_u^{[\Omega,\Omega']} \times \gamma_v^{[\Theta,\Theta']}$ de de $C_{O_{[\Omega',\Theta']}}(x_o,y_o)$ sobre $C_{O_{[\Omega',\Theta']}}(u,v)$ tal que

$$(\phi \otimes \psi)(u,v)(\phi \otimes \psi)(u',v') = \phi(\xi_u^{[\Omega,\Omega']}(u')\psi(\gamma_v^{[\Theta,\Theta']}(v'))$$

$$= (\phi \otimes \psi)((\xi_u^{[\Omega,\Omega']} \times \gamma_v^{[\Theta,\Theta']})(u',v')) ,$$

para todo (u',v') $C_{O_{[\Omega',\Theta']}}(x_o,y_o)$.

Q.E.D.

TEOREMA 7. Si ϕ y ψ son caracteres de los espacios de Gelfand (G,X) y (H,Y) respectivamente, entonces la aplicación definida por

$$\alpha^{\underline{A} \otimes \underline{B}}_{(\phi \otimes \psi)}(O_{[\Omega,\Theta]}) = \frac{1}{|C_{O_{[\Omega,\Theta]}}(x_o,y_o)|} \sum_{(u,v)\in C_{O_{[\Omega,\Theta]}}(x_o,y_o)} (\phi \otimes \psi)(u,v)$$

$$= \alpha^{\underline{A}}_{\phi}(\Omega)\,\alpha^{\underline{B}}_{\psi}(\Theta) ,$$

para todo $\Omega \in X^2/G$, $\Theta \in Y^2/H$, verifica la ecuación funcional (**) . Por lo tanto proporciona un carácter del álgebra conmutante conmutativa $\underline{A} \otimes \underline{B}$.

Demostración: Es inmediata.

4. Estructuras de grupos sobre X .

Para cada familia $\{\xi_u^{\Theta}\}_{u\in X,\Theta\in X^2/G}$ de aplicaciones biyectivas ξ_u^{Θ} de $C_{\Theta}(x_o)$ sobre $C_{\Theta}(u)$ $(u \in X , \Theta \in X^2/G)$, consideremos la operación binaria en X definida, para cada $u,v \in X$, por la relación

$$v\cdot u = \xi_u^{\Theta}(v) ,$$

donde $\Theta \in X^2/G$ es tal que $v \in C_{\Theta}(x_o)$. Nótese que el punto base $x_o \in X$ es el elemento neutro de tal operación binaria en X sí y sólo si

$$\xi_{x_o}^{\Theta} = I_{C_{\Theta}(x_o)} \qquad (\Theta \in X^2/G) ,$$

donde $I_{C_{\Omega}(x_o)}$ es la aplicación identidad de $C_{\Theta}(x_o)$ $(\Theta \in X^2/G)$.

Las operaciones binarias en X proporcionadas por familias de aplicaciones biyectivas, según las consideraciones precedentes, se denominarán <u>operaciones binarias admisibles en</u> X. Nótese que una aplicación f de X en $\mathbb{C}$ es un carácter del espacio de Gelfand (G,X) sí y sólo si

$$f(u)f(v) = f(u\cdot v) \qquad (u,v \in X) ,$$

<u>para alguna operación binaria</u> $\cdot$ <u>admisible en</u> X.

Si la operación binaria $\cdot$ admisible en X provee a X de una estructura de grupo, se dirá que tal estructura es admisible. Nótese que una estructura de grupo $X^{\cdot}$ es admisible sí y sólo si

(10) $$(z,w) \in \Omega \Rightarrow (z\cdot x,w\cdot x) \in \Omega \qquad (\Omega \in X^2/G\ ,\ x \in X) .$$

Sea $X^{\cdot}$ una estructura de grupo admisible. Consideremos la acción regular derecha de $X^{\cdot}$ en X; las órbitas de $X^{\cdot}$ en X^2 están dadas por

$$\nabla_x = \{(z,w) \in X^2 \mid w\cdot z^{-1} = x\} \qquad (x \in X) .$$

La relación (10) implica que

$$\Omega = \bigcup_{u \in C_\Omega(\underline{e})} \nabla_u \qquad (\Omega \in X^2/G) ,$$

donde $x_o = \underline{e}$ es el elemento neutro del grupo $X^\bullet$. Luego el álgebra $\underline{\underline{K}}^G(X)$ de núcleos G-invariantes es una sub-álgebra del álgebra $\underline{\underline{K}}^{X^\bullet}(X)$ de núcleos $X^\bullet$-invariantes y por lo tanto el álgebra conmutante A de la representación natural de G asociada a la acción de G en X es una sub-álgebra del álgebra conmutante de la representación regular derecha de $X^\bullet$. Además

$$M_\Omega = \frac{1}{|C_\Omega(\underline{e})|} \sum_{u \in C_\Omega(\underline{e})} M_{\nabla_u} \qquad (\Omega \in X^2/G) .$$

Ahora bien, las aplicaciones α_χ de $X^2/X^\bullet$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_\chi(\nabla_x) = \chi(x) \qquad (x \in X) ,$$

para cada carácter χ de dimensión 1 de $X^\bullet$, proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante de la representación regular derecha de $X^\bullet$. Por consiguiente, las aplicaciones $\underline{\alpha}_{\chi|A}$ definidas para cada carácter χ de dimensión 1 de $X^\bullet$ proporcionan caracteres del álgebra conmutante conmutativa A . Nótese que

$$\underline{\alpha}_{\chi|A}(M_\Omega) = \frac{1}{|C_\Omega(\underline{e})|} \sum_{u \in C_\Omega(\underline{e})} \chi(u) \qquad (\Omega \in X^2/G) .$$

Obtenemos además el

TEOREMA 8. Si X^+ es una estructura de grupo abeliano admisible, entonces los caracteres de X^+ son caracteres del espacio de Gelfand (G,X) y proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante A de la representación natural de G asociada a la acción de G en X.

Demostración: Nótese que cada carácter del álgebra A es la restricción de un carácter del álgebra conmutante (conmutativa) de la representación regular de X^+.

Q.E.D.

CAPITULO III. CALCULO DE CARACTERES DE ESPACIOS DE GELFAND FINITOS

En todo lo que sigue, para descomposiciones del tipo $G = KB$, $K \cap B = \{e\}$ y $G = K \ltimes H$, H abeliano, se considerará los espacios homogéneos mencionados en el párrafo 3 del Capítulo precedente.

A menudo es posible describir el espacio de configuraciones geométricas X^2/G por medio de un invariante $D : X^2 \to R$, con valores en un conjunto ad-hoc R. Es decir, se tendrá que (x,y) y (x',y') en X^2 están en una misma G-órbita sí y sólo si $D(x,y) = D(x',y')$. Tal situación ocurrirá en todos los espacios homogéneos que consideraremos a continuación.

Notación. Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $Z_n := \{0,1, \ldots, n-1\}$, provisto de la operación suma módulo n, constituye un grupo denotado Z_n^+, isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^+$. Para $\ell, m \in Z_n$, escribiremos simplemente $\ell + m$ en lugar de $\ell + m$ módulo n. Consideremos además $Z_n^\times := Z_n \setminus \{0\}$.

1. El n-ágono regular.

1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Designemos por $T(2,n)$ al grupo de las traslaciones $t_\ell : m \mapsto m + \ell$ $(\ell, m \in Z_n)$ y por $O(2,n)$ al grupo de orden 2 generado por la involución J de Z_n definida por

$$J(m) = -m \qquad (m \in Z_n) .$$

Por otra parte, consideremos las aplicaciones

$$N : Z_n \to Z_{[\frac{n}{2}]+1} ,$$

definida por

$$N(m) = \text{Mín}\{m, J(m)\} \qquad (m \in Z_n) ,$$

donde $[\frac{n}{2}]$ designa la parte entera de $\frac{n}{2}$, y

$$D : Z_n^2 \to Z_{[\frac{n}{2}]+1} ,$$

definida por

$$D(m,\ell) = N(m - \ell) \qquad (m,\ell \in Z_n) .$$

Se tiene que D es una distancia sobre Z_n .

Denotemos por $\text{Biy}(Z_n)$ al conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de Z_n sobre Z_n y designemos por $M(2,n)$ al subgrupo de todas las aplicaciones en $\text{Biy}(Z_n)$ que preservan la distancia D , es decir

$$M(2,n) = \{g \in \text{Biy}(Z_n) \,|\, D(g(m),g(\ell)) = D(m,\ell), \ \forall\ m,\ell \in Z_n\} .$$

Se tiene que $M(2,n)$ es producto semi-directo de su subgrupo normal abeliano $T(2,n)$ y de su subgrupo $O(2,n)$. Por lo tanto, el espacio geométrico $(M(2,n)),T(2,n))$ es un espacio de Gelfand, con punto base la aplicación identidad I .

Además, si consideramos la aplicación biyectiva ψ de $T(2,n)$ sobre Z_n definida por

$$\psi(t_\ell) = \ell \qquad (\ell \in Z_n) ,$$

y la acción de $M(2,n)$ en Z_n definida por

$$\ell \cdot g = \psi(\psi^{-1}(\ell)g) \qquad (\ell \in Z_n , g \in M(2,n)) ,$$

obtenemos que $(M(2,n),Z_n)$ es un espacio de Gelfand, con punto base $x_o = 0$, isomorfo a $(M(2,n),T(2,n))$. El $M(2,n)$-isomorfismo está dado por el isomorfismo de grupos abelianos ψ. Explícitamente, se tiene

$$\ell \cdot t_m = \ell + m \qquad (\ell, m \in Z_n) ,$$

$$\ell \cdot J = -\ell \qquad (\ell \in Z_n) .$$

El espacio de Gelfand $(M(2,n),Z_n)$ se denomina <u>n-ágono regular</u>. La distancia D se denomina <u>distancia geodésica sobre</u> Z_n y para $m,\ell \in Z_n$, la distancia $D(m,\ell)$ se interpreta como el número mínimo de pasos necesarios para ir de m a ℓ o viceversa.

1.2. Las órbitas de $O(2,n)$ en Z_n están dadas por

$$\nu_r = \{\ell \in Z_n | N(\ell) = r\} = \{r,-r\} \qquad (r \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) .$$

Luego, obtenemos

<u>Caso</u> n <u>par</u>:

$$|\nu_o| = 1 \ ,$$

$$|\nu_r| = 2 \qquad\qquad (r \in Z^{\times}_{\frac{n}{2}}) \ ,$$

$$|\nu_{\frac{n}{2}}| = 1 \ .$$

<u>Caso</u> n <u>impar</u>:

$$|\nu_o| = 1 \ ,$$

$$|\nu_r| = 2 \qquad\qquad (r \in Z^{\times}_{[\frac{n}{2}]+1}) \ .$$

Por lo tanto, las órbitas de $M(2,n)$ en Z_n^2 están dadas por

$$O_r := O_{\nu_r} = \{(\ell,m) \in Z_n^2 | D(\ell,m) = r\} \qquad\qquad (r \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) \ .$$

Luego, obtenemos

<u>Caso</u> n <u>par</u>:

$$|O_o| = n \ ,$$

$$|O_r| = 2n \qquad\qquad (r \in Z^{\times}_{\frac{n}{2}}) \ ,$$

$$|O_{\frac{n}{2}}| = n \ .$$

Caso n impar:

$$|O_o| = n ,$$

$$|O_r| = 2n \qquad (r \in Z^{\times}_{[\frac{n}{2}]+1}) .$$

Por otra parte, se tiene

$$(Z_n^+)^{\wedge} = \{\omega_s\}_{s\in Z_n} ,$$

donde

$$\omega_s(m) = \exp(2\pi ism/n) \qquad (s,m \in Z_n) ,$$

y la acción de $O(2,n)$ en $(Z_n^+)^{\wedge}$ queda entonces descrita por

$$\omega_s \cdot J = \omega_s^{-1} = \omega_{J(s)} \qquad (s \in Z_n) .$$

Luego

$$(X_n^+)^{\wedge}/O(2,n) = \{\Psi_s\}_{s\in Z_{[\frac{n}{2}]+1}} ,$$

donde

$$\Psi_s = \{\omega_s,\omega_{J(s)}\} \qquad (s \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) .$$

Por lo tanto, obtenemos

Caso n par:

$$|\Psi_o| = 1 \,,$$

$$|\Psi_s| = 2 \qquad (s \in Z^{\times}_{\frac{n}{2}}) \,,$$

$$|\Psi_{\frac{n}{2}}| = 1 \,.$$

Caso n impar:

$$|\Psi_o| = 1 \,,$$

$$|\Psi_s| = 2 \qquad (s \in Z^{\times}_{[\frac{n}{2}]+1}) \,.$$

Notación. Consideremos

$$\alpha_s(r) := \alpha_{\Psi_s}(O_{\nu_r}) \qquad (s,r \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) \,.$$

Utilizando el Teorema 6, obtenemos que los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M(2,n),Z_n)$ quedan determinados por las aplicaciones siguientes

Caso n par:

$$\alpha_o(r) = 1 \qquad (r \in Z_{\frac{n}{2}+1}) \,,$$

$$\alpha_s(O) = 1 \,,$$

$$\alpha_s(r) = [\tfrac{1}{2}(\omega_s + \omega_{J(s)})](r) \qquad (r \in Z^{\times}_{\frac{n}{2}}) \,,$$

$$\alpha_s\left(\tfrac{n}{2}\right) = (-1)^s \,,$$

Caso n impar:

$$\alpha_o(r) = 1 \qquad (r \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) \ ,$$

$$\alpha_s(0) = 1 \ ,$$

$$\alpha_s(r) = [\tfrac{1}{2}(\omega_s + \omega_{J(s)})](r) \qquad (r \in Z^{\times}_{[\frac{n}{2}]+1}) \ ,$$

para todo $s \in Z^{\times}_{[\frac{n}{2}]+1}$.

Obtenemos así la

PROPOSICION 9. Las representaciones irreductibles de $M(2,n)$, asociadas a la acción de $M(2,n)$ en Z_n , están dadas por la tabla siguiente

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de representaciones en la familia
$s \in Z_n$	$ch(\omega_s)$	$\lvert\{s,J(s)\}\rvert$	$[\frac{n}{2}] + 1$
módulo $s \sim J(s)$			

Donde

$$ch(\omega_s) = \frac{1}{2}(\omega_s + \omega_{J(s)}) \qquad (s \in Z_n) \ .$$

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

2. Descomposición de la representación regular del grupo de Heisenberg.

2.1. Sea k el cuerpo finito con q elementos y sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$H(n,k) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & r \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & y \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y \in k^n \,,\; r \in k \right\} ;$$

$H(n,k)$ provisto de la multiplicación de matrices constituye un grupo, denominado Grupo de Heisenberg con n grados de libertad.

Notación. $$(x,y,r) := \begin{bmatrix} 1 & x & r \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & y \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (x,y \in k^n \,,\; r \in k) \,.$$

Se tiene que

$$(x,y,r)(u,v,s) = (x+u,\; y+v,\; r+s+\langle x,v\rangle) \,,$$

para $x,y,u,v \in k^n$, $r,s \in k$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ designa la forma bilineal canónica sobre k^n.

La representación regular derecha ρ de $H(n,k)$ está definida por

$$\rho : H(n,k) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(L^2((k^n)^2 \times k)) \,,$$

donde

$$[\rho_{(u,v,s)}(f)](x,y,r) = f(x+u,\; y+v,\; r+s+\langle x,v\rangle) \,,$$

para $f \in L^2((k^n)^2 \times k)$.

Por otra parte, las acciones

(i) $$k^n \times H(n,k) \to k^n$$

$$(y,(u,v,s)) \mapsto y + v ,$$

(ii) $$(k^n \times k) \times H(n,k) \to k^n \times k$$

$$((x,r),(u,v,s)) \mapsto (x + u,\ r + s + \langle x,v\rangle) ,$$

son transitivas. En efecto

(i) Para todo $y,y' \in k^n$, existe $\Theta = (0,y' - y,0) \in H(n,k)$ tal que

$$y\Theta = y' ;$$

(ii) Para todo $(x,r),(x',r') \in k^n \times k$, existe $\Theta = (x'-x,0,r'-r) \in H(n,k)$ tal que $(x,r)\Theta = (x',r')$.

Además estas acciones no son 2-transitivas.

Las representaciones naturales de $H(n,k)$ asociadas a las acciones precedentes son

(i) $$\sigma : H(n,k) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(L^2(k^n)) ,$$

donde

$$[\sigma_{(u,v,s)}(g)](y) = g(y + v) \qquad (g \in L^2(k^n) ,\ y \in k^n) ,$$

(ii) $$\tau : H(n,k) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(L^2(k^n \times k)) ,$$

donde

$$[\tau_{(u,v,s)}(h)](x,r) = h(x+u,\ r+s+\langle x,v\rangle)\ ,$$

para $h \in L^2(k^n \times k)$, $(x,r) \in k^n \times k$.

Se tiene que

$$(L^2((k^n)^2 \times k),\rho) \simeq (L^2(k^n),\sigma) \otimes (L^2(k^2),\tau)\ .$$

2.2. Es claro que

$$L^2(k^n) = \bigoplus_{\mu\in[(k^n)^+]^\wedge} \mathbb{C}_\mu\ ,$$

es la descomposición de $(L^2(k^n),\sigma)$ en suma directa ortogonal de subrepresentaciones irreductibles

2.3. Por otra parte, consideremos

$$K := \mathrm{Stab}_{H(n,k)}(0,0) = \{(0,v,0)\,|\,v \in k^n\}\ ,$$

$$H := \{(u,0,s)\,|\,u \in k^n\ ,\ s \in k\}\ ;$$

se tiene que

$$H(n,k) = K \ltimes H\ ,\ H \simeq (k^n \times k)^+\ .$$

Por lo tanto, el espacio geométrico $(H(n,k),k^n \times k)$ es isomorfo al espacio geométrico $(H(n,k),H)$ y por consiguiente $(H(n,k),k^n \times k)$ es un espacio de Gelfand. Además, el $H(n,k)$-isomorfismo está dado por el isomorfismo de grupos abelianos

$$\psi : H \to k^n \times k\ ,$$

definido por

$$\psi(u,0,s) = (u,s) \qquad (u \in k^n \ , \ s \in k) \ .$$

2.4. Las órbitas de K, en $k^n \times k$ están dadas por

$$\nu_s = \{(0,s)\} \qquad (s \in k) \ ,$$

$$\eta_x = \{x\} \times k \qquad (x \in (k^n)^\times) \ .$$

Por otra parte, para cada $\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}$, se tiene que

$$\Phi_\beta : (k^n)^+ \to [(k^n)^+]^\wedge$$

$$v \mapsto \Phi_\beta(v) = \beta^v \ ,$$

donde $\beta^v = \beta(\langle ?,v\rangle)$, es un isomorfismo de grupos. Además se tiene

$$[(k^n \times k)^+]^\wedge = \{\gamma \otimes \beta\}_{\gamma\in[(k^n)^+]^\wedge, \beta\in(k^+)^\wedge} \ ,$$

y la acción de K en $[(k^n \times k)^+]^\wedge$ queda entonces descrita por

$$(\gamma \otimes \beta)\cdot(0,v,0) = (\gamma\beta^{-v}) \otimes \beta \qquad (\gamma \in [(k^n)^+]^\wedge, \beta \in (k^+)^\wedge, \ v \in k^n) \ .$$

Luego las órbitas de K en $[(k^n \times k)^+]^\wedge$ están dadas por

$$\Psi_\gamma = \{\gamma \otimes \underline{1}\} \qquad (\gamma \in [(k^n)^+]^\wedge) \ ,$$

$$\Gamma_\beta = \{\gamma' \otimes \beta \mid \gamma' \in [(k^n)^+]^\wedge\} \qquad (\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}) \ .$$

Utilizando el Teorema 6, obtenemos que los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(H(n,k), k^n \times k)$ quedan determinados por las aplicaciones:

$$\alpha_{\psi_\gamma}(O_{\nu_s}) = 1 \qquad (s \in k) ,$$

$$\alpha_{\psi_\gamma}(O_{\eta_x}) = \gamma(x) \qquad (x \in (k^n)^\times) ,$$

para todo $\gamma \in [(k^n)^+]^\wedge$,

$$\alpha_{\Gamma_\beta}(O_{\nu_s}) = \beta(s) \qquad (s \in k) ,$$

$$\alpha_{\Gamma_\beta}(O_{\eta_x}) = 0 \qquad (x \in (k^n)^\times) ,$$

para todo $\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}$.

Obtenemos así la

PROPOSICION 10. Las representaciones irreductibles de $H(n,k)$, asociadas a la acción de $H(n,k)$ en $k^n \times k$, están dadas por la tabla siguiente

Parámetros	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de representaciones en la familia
$\gamma \in [(k^n)^+]^\wedge$	$\gamma \otimes \underline{1}$	1	q^n
$\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}$	$\delta_o \otimes \beta$	q^n	$q - 1$

Donde δ_o es la función delta de DIRAC en 0 .

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

Luego tenemos que

$$L^2(k^n \times k) = \left[\bigoplus_{\gamma\in[(k^n)^+]^\wedge} \mathbb{C}_\gamma \otimes \mathbb{C}\underline{1}\right] \oplus \left[\bigoplus_{\beta\in(k^+)^\wedge\setminus\{\underline{1}\}} L^2(k^n) \otimes \mathbb{C}_\beta\right]$$

es la descomposición de $(L^2(k^n \times k),\tau)$ en suma directa ortogonal de subrepresentaciones irreductibles. Por lo tanto

$$L^2((k^n)^2 \times k) \simeq \left[\bigoplus_{\mu,\gamma\in[(k^n)^+]^\wedge} \mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_\gamma \otimes \mathbb{C}\,\underline{1}\right] \oplus$$

$$\oplus \left[\bigoplus_{\beta\in(k^+)^\wedge\setminus\{\underline{1}\}} \left[\bigoplus_{\mu\in[(k^n)^+]^\wedge} \mathbb{C}_\mu \otimes L^2(k^n) \otimes \mathbb{C}_\beta\right]\right] ,$$

es la descomposición de $(L^2((k^n)^2 \times k),\rho)$ en suma directa ortogonal de subrepresentaciones irreductibles.

2.5. <u>Entrelazamiento de las componentes de</u> $L^2((k^n)^2 \times k)$.

<u>Notación</u>. Para cada $\mu \in [(k^n)^+]^\wedge$ y cada $\beta \in (k^+)^\wedge\setminus\{\underline{1}\}$, consideremos

$$V_{\mu,\beta} := \mathbb{C}_\mu \otimes L^2(k) \otimes \mathbb{C}_\beta .$$

Ahora bien, para cada $u_o \in k^n$, consideremos

$$T_{u_o} : L^2((k^n)^2 \times k) \to L^2((k^n)^2 \times k) ,$$

definido por

$$[T_{u_o}(f)](x,y,r) = f((u_o,0,0)(x,y,r)) = f(x + u_o,y,r + \langle u_o,y\rangle) ,$$

para $f \in L^2((k^n)^2 \times k)$, $(x,y,r) \in (k^n)^2 \times k$.

Se tiene que T_{u_o} es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, para cada $(u,v,s) \in H(n,k)$, se tiene

$$\rho_{(u,v,s)} \circ T_{u_o} = T_{u_o} \circ \rho_{(u,v,s)} .$$

En efecto, para cada $f \in L^2((k^n)^2 \times k)$, obtenemos

$$[(\rho_{(u,v,s)} \circ T_{u_o})(f)](x,y,r) = [T_{u_o}(f)]((x,y,r)(u,v,s))$$

$$= f((u_o,0,0)[(x,y,r)(u,v,s)]) = f([(u_o,0,0)(x,y,r)](u,v,s))$$

$$= [(T_{u_o} \circ \rho_{(u,v,s)})(f)](x,y,r) ,$$

es decir:

T_{u_o} es un operador de entrelazamiento de $(L^2((k^n)^2 \times k),\rho)$ consigo misma.

Ahora bien, para cada $\mu \in [(k^n)^+]^\wedge$, $\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}$, $\phi \in L^2(k^n)$, se tiene

$$[T_{u_o}(\mu \otimes \phi \otimes \beta)](y,(x,r)) = (\mu \otimes \phi \otimes \beta)(y,(x + u_o,r + \langle u_o,y\rangle))$$

$$= \mu(y)\phi(x + u_o)\beta(r + \langle u_o,y\rangle) = \mu(y)\beta(\langle u_o,y\rangle)\phi(x + u_o)\beta(r)$$

$$= (\mu\beta^{u_o})(y)\phi(x + u_o)\beta(r)$$

$$= [(\mu\beta^{u_o}) \otimes \phi(? + u_o) \otimes \beta](y,(x,r)) ,$$

es decir

$$T_{u_o} : V_{\mu,\beta} \xrightarrow{\sim} V_{\mu\beta^{u_o},\beta} .$$

Como Φ_β $(\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\})$ es un isomorfismo de grupos, para cada $\mu \in [(k^n)^+]^\wedge$ se tiene

$$V_{\underline{1},\beta} \simeq V_{\mu,\beta} \qquad (\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}) .$$

Por otra parte, para cada $\mu,\gamma \in [(k^n)^+]^\wedge$, tenemos

$$[\rho_{(u,v,s)}(\mu \otimes \gamma \otimes \underline{1})](y,(x,r)) = (\mu \otimes \gamma \otimes \underline{1})(y + v,(x + u, r + s + \langle x,v\rangle))$$

$$= \mu(y + v)\gamma(x + u) = \mu(v)\gamma(u)(\mu \otimes \gamma \otimes \underline{1})(y,(x,r)) ,$$

es decir

$$\rho_{(u,v,s)}(\mu \otimes \gamma \otimes \underline{1}) = \mu(v)\gamma(u)(\mu \otimes \gamma \otimes \underline{1}) .$$

Además, para cada $\phi \in L^2(k^n)$ y cada $\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}$, se tiene

$$[\rho_{(u,v,s)}(\underline{1} \otimes \phi \otimes \beta)](y,(x,r)) = (\underline{1} \otimes \phi \otimes \beta)(y + v,(x + u, r + s + \langle x,v\rangle))$$

$$= \phi(x + u)\beta(r + s + \langle x,v\rangle) = \beta(s)\phi(x + u)\beta(\langle x,v\rangle)\beta(r)$$

$$= \beta(s)[\phi(? + u)\beta^v(?)](x)\beta(r)$$

$$= \beta(s)(\underline{1} \otimes [\phi(? + u)\beta^v(?)] \otimes \beta)(y,(x,r)) ,$$

es decir

$$\rho_{(u,v,s)}(\underline{1} \otimes \phi \otimes \beta) = \beta(s)(\underline{1} \otimes [\phi(? + u)\beta^{v}(?)] \otimes \beta) .$$

Obtenemos así el

TEOREMA 9. <u>Las representaciones irreductibles de</u> $H(n,k)$ <u>están dadas por la tabla siguiente</u>

Espacio de la repres.	parámetros	dimensión	N° de repres. en la familia	acción
$\mathbb{C}$	$\gamma,\mu\in[(k^n)^+]^\wedge$	1	q^{2n}	$[\gamma,\mu]_{(u,v,s)}=\gamma(u)\mu(v)I_{\mathbb{C}}$
$L^2(k^n)$	$\beta \in (k^+)^\wedge \setminus \{\underline{1}\}$	q^n	$q - 1$	$\tau^{\beta}_{(u,v,s)}(\phi) = \beta(s)[\phi(?+u)\beta^{v}(?)]$

<u>Donde</u> $I_{\mathbb{C}}$ <u>es la aplicación identidad de</u> $\mathbb{C}$.

<u>Demostración</u>: Sigue inmediatamente del análisis precedente.

Q.E.D.

3. <u>El espacio euclidiano finito n-dimensional.</u>

3.1. Sea k el cuerpo finito con q elementos, k_n la extensión de grado n de k y N_n la norma de k_n sobre k $(n \in \mathbb{N})$. Como k_n es un k-espacio vectorial de dimensión n , podemos considerar el grupo de los automorfismos lineales del k-espacio vectorial k_n , el cual será denotado por $GL(n,k)$. Además, designaremos por $T(n,k)$ al grupo de las traslaciones

$t_z : w \mapsto w + z$ $(w,z \in k_n)$ y por $GA(n,k)$ al grupo afín asociado al k-espacio vectorial k_n. Se tiene que $GA(n,k) = GL(n,k) \ltimes T(n,k)$.

Por otra parte, consideremos la aplicación

$$D_n : k_n^* \times k_n \to k ,$$

definida por

$$D_n(z,w) = N_n(z - w) \qquad (z,w \in k_n) .$$

Ahora bien, denotaremos por $M(n,k)$ al grupo de todas las transformaciones afines del k-espacio vectorial k_n que preservan la aplicación D_n, es decir

$$M(n,k) = \{g \in GA(n,k) \mid D_n(g(z),g(w)) = D_n(z,w),\ \forall\ z,w \in k_n\} .$$

El grupo $M(n,k)$ se denomina <u>grupo de los movimientos rígidos del espacio finito</u> n-<u>dimensional</u> k_n.

Se tiene que el grupo $M(n,k)$ es producto semi-directo de su subgrupo normal abeliano $T(n,k)$ y de su subgrupo $O(N_n)$, grupo ortogonal de la forma N_n de grado n. Este último, a su vez, es producto semi-directo de su subgrupo normal abeliano $SO(N_n)$ formado de las multiplicaciones $m_u : z \mapsto uz$ $(z \in k_n)$ por los elementos u del subgrupo U_n de los elementos de norma 1 en k_n, y de su subgrupo cíclico de orden n generado por el automorfismo de Frobenius F_n de k_n sobre k (grupo de Galois $Gal_k(k_n)$ de k_n sobre k).

3.2. <u>Caso del espacio de Gelfand</u> $(M(n,k),T(n,k))$.

3.2.1. Se tiene que $M(n,k) = O(N_n) \ltimes T(n,k)$, siendo $T(n,k)$ abeliano. Luego $(M(n,k),T(n,k))$ es un espacio de Gelfand. Se tiene

$$t_z \cdot t_a = t_{z+a} \qquad (z,a \in k_n) ,$$

$$t_z \cdot m_u = m_u^{-1} t_z m_u = t_{u^{-1}z} \qquad (z \in k_n , u \in U_n) ,$$

$$t_z \cdot F_n^{\ell} = (F_n^{\ell})^{-1} t_z F_n^{\ell} = t_{F_n^{-\ell}(z)} \qquad (z \in k_n , \ell \in Z_n) .$$

Por otra parte, la aplicación

$$\psi : T(n,k) \to k_n ,$$

definida por

$$\psi(t_a) = a \qquad (a \in k_n) ,$$

es un isomorfismo de grupos abelianos. Luego, si consideramos la acción de $M(n,k)$ en k_n definida por

$$z \cdot g = \psi(\psi^{-1}(z) \cdot g) \qquad (z \in k_n , g \in M(n,k)) ,$$

obtenemos que $(M(n,k),k_n)$ es un espacio geométrico isomorfo al espacio geométrico $(M(n,k),T(n,k))$ y por consiguiente $(M(n,k),k_n)$ es un espacio de Gelfand con punto base $x_o = 0$. El $M(n,k)$-isomorfismo está dado por el isomorfismo de grupos abelianos ψ . Explícitamente, se tiene

$$z \cdot t_a = z + a \qquad (z, a \in k_n) \ ,$$

$$z \cdot m_u = u^{-1} z \qquad (z \in k_n \ , \ u \in U_n) \ ,$$

$$z \cdot F_n^{\ell} = F_n^{-\ell}(z) \qquad (z \in k_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

El espacio de Gelfand $(M(n,k), k_n)$ se denomina espacio euclidiano finito n-dimensional. La aplicación D_n se denomina pseudo-distancia euclidiana finita n-dimensional. Nótese que $D_n(z,w) = (-1)^n D_n(w,z)$ $(z,w \in k_n)$.

3.2.2. Las órbitas de $O(N_n)$ en k_n están dadas por

$$\nu_r = \{z \in k_n | N_n(z) = r\} \qquad (r \in k) \ ,$$

luego

$$|\nu_o| = 1 \ ,$$

$$|\nu_r| = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1} =: \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \qquad (r \in k^{\times}) \ .$$

Por lo tanto, las órbitas de $M(n,k)$ en $k_n^2 := k_n \times k_n$ están dadas por

$$O_r := O_{\nu_r} = \{(z,w) \in k_n^2 | D_n(z,w) = r\} \qquad (r \in k) \ ,$$

luego

$$|O_o| = q^n$$

$$|O_r| = q^n \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \qquad (r \in k^{\times}) \ .$$

<u>Notación</u>. $\quad C^t_{r,s} := C^{O_t}_{O_r,O_s} \qquad (r,s,t \in k)$.

Por otra parte, consideremos $e_n := e_o \circ Tr_n$, donde e_o es un carácter no trivial de k^+ fijo de aquí en adelante y Tr_n denota la traza de k_n sobre k . Se tiene

$$(k_n^+)^\wedge = \{e_n(w?)\}_{w \in k_n} .$$

Además, la acción de $O(N_n)$ en $(k_n^+)^\wedge$ está descrita por

$$e_n(w?) \cdot m_u = e_n(uw?) \qquad (w \in k_n \ , \ u \in U_n) \ ,$$

$$e_n(w?) \cdot F_n^{\ell} = e_n(F_n^{-\ell}(w)?) \qquad (w \in k_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

Por lo tanto, las órbitas de $O(N_n)$ en $(k_n^+)^\wedge$ están dadas por

$$\Psi_s = \{e_n(w?) \in (k_n^+)^\wedge \mid w \in k_n \wedge N_n(w) = s\} \qquad (s \in k) \ ,$$

luego

$$|\Psi_o| = 1 \ ,$$

$$|\Psi_s| = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \qquad (s \in k^\times) \ .$$

<u>Notación</u>. Consideremos

$$\alpha_s(r) := \alpha_{\Psi_s}(O_r) \qquad (s,r \in k) \ ,$$

$$\phi_s := \phi_{\alpha_s} \qquad (s \in k) \ ,$$

$$V_s := V_{\alpha_s} \qquad (s \in k) \ .$$

Ahora bien, para cada $s \in k$ elijamos $w_s \in \nu_s$; se tiene que $\{e_n(w_s ?)\}_{s\in k}$ es un sistema de representantes para las órbitas de $O(N_n)$ en $(k_n^+)^\wedge$. Luego los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M(n,k),k_n)$ quedan determinados por las aplicaciones

$$\alpha_s(r) = \frac{1}{|\nu_r|} \sum_{u\in\nu_r} e_n(w_s u)$$

$$= \frac{1}{|\nu_{sr}|} \sum_{u\in\nu_{sr}} e_n(u) = J_{\frac{n-2}{2}}(sr) ,$$

para $s,r \in k$, donde $J_{\frac{n-2}{2}}$ designa la función de Bessel de orden $\frac{n-2}{2}$, definida por

$$J_{\frac{n-2}{2}}(t) = \frac{1}{|\nu_t|} \sum_{u\in\nu_t} e_n(u) \qquad (t \in k) .$$

La función esférica ϕ_s de tipo s , tal que $\phi_s(0) = 1$, está dada por

$$\phi_s(z) = \alpha_s(N_n(z)) = J_{\frac{n-2}{2}}(sN_n(z)) \qquad (s \in k , z \in k_n) .$$

Además

$$\text{dimensión}(V_0) = |\Psi_0| = 1 ,$$

$$\text{dimensión}(V_s) = |\Psi_s| = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \qquad (s \in k^\times) .$$

Obtenemos así el

TEOREMA 10. Las representaciones irreductibles de $M(n,k)$, asociadas a la acción de $M(n,k)$ en k_n , están dadas por la tabla siguiente

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de representaciones en la familia
-	$\underline{1}$	1	1
$s \in k^{\times}$	$J_{\frac{n-2}{2}}(sN_n(?))$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q$	$q - 1$

Notación. Consideremos

$$\widetilde{T}(n,k) := \mathrm{Gal}_k(k_n) \ltimes T(n,k) \ .$$

3.3. Caso del espacio de Gelfand $(O(N_n) \ , \ SO(N_n))$.

3.3.1. Se tiene que $O(N_n) = \mathrm{Gal}_k(k_n) \ltimes SO(N_n)$, siendo $SO(N_n)$ abeliano. Luego $(O(N_n), \ SO(N_n))$ es un espacio de Gelfand. Se tiene

$$m_u \cdot m_v = m_{uv} \qquad (u,v \in U_n) \ ,$$

$$m_u \cdot F_n^{\ell} = m_{F_n^{-\ell}(u)} \qquad (u \in U_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

Por otra parte, la aplicación

$$\psi : SO(N_n) \to U_n \ ,$$

definida por

$$\psi(m_u) = u \qquad (u \in U_n) \ ,$$

es un isomorfismo de grupos abelianos. Por transporte de estructura, vía la aplicación biyectiva ψ , se provee a U_n de una estructura de $O(N_n)$-espacio derecho transitivo. El espacio geométrico $(O(N_n),U_n)$ así obtenido es isomorfo al espacio geométrico $(O(N_n),SO(N_n))$ y por consiguiente $(O(N_n),U_n)$ es un espacio de Gelfand, con punto base $u_o = 1$. Explícitamente, se tiene

$$u \cdot m_v = uv \qquad (u,v \in U_n) ,$$

$$u \cdot F_n^{\ell} = F_n^{-\ell}(u) \qquad (u \in U_n , \ \ell \in Z_n) .$$

Además, la acción de $Gal_k(k_n)$ en $\hat{U}_n$ queda descrita por

$$\gamma \cdot F_n^{\ell} = \gamma \cdot F_n^{\ell}\big|_{U_n} \qquad (\gamma \in \hat{U}_n , \ \ell \in Z_n) .$$

Denotaremos por $\hat{U}_n/Gal_k(k_n)$ al conjunto de las órbitas de $Gal_k(k_n)$ en $\hat{U}_n$.

Obtenemos así el

TEOREMA 11. <u>Las representaciones irreductibles de</u> $O(N_n)$, <u>asociadas a la acción de</u> $O(N_n)$ <u>en</u> U_n , <u>están dadas por la tabla siguiente</u>

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de representaciones en la familia
$\Psi \in \hat{U}_n/Gal_k(k_n)$	$\frac{1}{\lvert\Psi\rvert} \sum_{\gamma \in \Psi} \gamma$	$\lvert\Psi\rvert$	$\lvert\hat{U}_n/Gal_k(k_n)\rvert$

3.4. Caso del espacio de Gelfand $(M(n,k),\widetilde{T}(n,k))$.

3.4.1. Es claro que $M(n,k)$ es el producto de $SO(N_n)$ por $\widetilde{T}(n,k)$, es decir, $M(n,k) = SO(N_n)\widetilde{T}(n,k)$. Se tiene

$$(F_n^{\ell} t_z)\cdot t_a = F_n^{\ell} t_{z+a} \qquad (z,a \in k_n \ , \ \ell \in Z_n) \ ,$$

$$(F_n^{\ell} t_z)\cdot F_n^m = F_n^{\ell+m} t_{F_n^{-m}(z)} \qquad (z \in k_n \ , \ \ell,m \in Z_n) \ ,$$

$$(F_n^{\ell} t_z)\cdot m_u = F_n^{\ell} t_{u^{-1}z} \qquad (z \in k_n \ , \ u \in U_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

Notación. Las aplicaciones $pr_1^n : \widetilde{k}_n := Z_n \times k_n \rightarrow Z_n$ (resp. $pr_1 : \widetilde{k} := Z_n \times k \rightarrow Z_n$) y $pr_2^n : \widetilde{k}_n \rightarrow k_n$ (resp. $pr_2 : \widetilde{k} \rightarrow k$) designan la primera y segunda proyección en $\widetilde{k}_n$ (resp. $\widetilde{k}$) .

Por otra parte, consideremos la aplicación biyectiva ψ de $\widetilde{T}(n,k)$ sobre $\widetilde{k}_n$ definida por

$$\psi(F_n^{\ell} t_a) = (\ell,a) \qquad (a \in k_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

Por transporte de estructura, vía la aplicación biyectiva ψ , se provee a $\widetilde{k}_n$ de una estructura de $M(n,k)$-espacio derecho transitivo. El espacio geométrico $(M(n,k),\widetilde{k}_n)$ así obtenido es isomorfo al espacio geométrico $(M(n,k),\widetilde{T}(n,k))$. El $M(n,k)$-isomorfismo está dado, obviamente, por la aplicación biyectiva ψ . Explícitamente, se tiene

$$(\ell,z)\cdot t_a = (\ell,z + a) \qquad (z,a \in k_n \ , \ \ell \in Z_n) \ ,$$

$$(\ell,z)\cdot F_n^m = (\ell + m,F_n^{-m}(z)) \qquad (z \in k_n \ , \ \ell,m \in Z_n) \ ,$$

$$(\ell,z)\cdot m_u = (\ell,u^{-1}z) \qquad (z \in k_n \ , \ u \in U_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

Además, por transporte de estructura vía la aplicación biyectiva ψ se provee a $\tilde{k}_n$ de una estructura de grupo; el grupo $\tilde{k}_n$ así obtenido es isomorfo al grupo $\tilde{T}(n,k) = \mathrm{Gal}_k(k_n) \ltimes T(n,k)$. Explícitamente, se tiene

$$(\ell,z)\cdot(m,w) = (\ell + m, F_n^{-m}(z) + w) \qquad (z,w \in k_n \ , \ \ell,m \in Z_n) \ ,$$

$$(\ell,z)^{-1} = (-\ell, -F_n^{\ell}(z)) \qquad (z \in k_n \ , \ \ell \in Z_n) \ .$$

Se puede proveer además a $\tilde{k}_n$ (resp. $\tilde{k}$) de la estructura de producto directo de los grupos Z_n^+ y k_n^+ (resp. Z_n^+ y k^+) , tal grupo se designará por $\tilde{k}_n^+$ (resp. $\tilde{k}^+$) .

<u>Notación</u>. Para todo $\tilde{x} \in \tilde{k}_n$ (resp. $\tilde{t} \in \tilde{k}$) designaremos por x (resp. t) la segunda proyección de $\tilde{x}$ (resp. $\tilde{t}$) , es decir $x := pr_2^n(\tilde{x})$ (resp. $t = pr_2(\tilde{t})$) .

3.4.2. Consideremos las aplicaciones:

$$\tilde{N}_n : \tilde{k}_n \to \tilde{k} \ ,$$

definida por

$$\tilde{N}_n(\tilde{z}) = (pr_1^n(\tilde{z}), N_n(z)) \qquad (\tilde{z} \in \tilde{k}_n) \ ,$$

$$\tilde{D}_n : \tilde{k}_n \times \tilde{k}_n \to \tilde{k} \ ,$$

definida por

$$\tilde{D}_n(\tilde{z},\tilde{w}) = \tilde{N}_n(\tilde{z}\tilde{w}^{-1}) = \tilde{N}_n(pr_1^n(\tilde{z} - \tilde{w}), F_n^{-m}(z - w))$$

$$= (pr_1^n(\tilde{z} - \tilde{w}), N_n(z - w)) \ ,$$

para todo $\tilde{z},\tilde{w} \in \tilde{k}_n$.

Ahora bien, las órbitas de $SO(N_n)$ en $\tilde{k}_n$ están dadas por

$$\nu_{\tilde{r}} = \{\tilde{z} \in \tilde{k}_n | \tilde{N}_n(\tilde{z}) = \tilde{r}\} \qquad (\tilde{r} \in \tilde{k}) ,$$

luego

$$|\nu_{(\ell,0)}| = 1 \qquad (\ell \in Z_n) ,$$

$$|\nu_{\tilde{r}}| = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \qquad (\tilde{r} \in \tilde{k} \ , \ r \in k^{\times}) .$$

Por otra parte, las órbitas de $M(n,k)$ en $\tilde{k}_n^2 := \tilde{k}_n \times \tilde{k}_n$ están dadas por

$$O_{\tilde{r}} = \{(\tilde{z},\tilde{w}) \in \tilde{k}_n^2 | \tilde{D}_n(\tilde{z},\tilde{w}) = \tilde{r}\} \qquad (\tilde{r} \in \tilde{k}) ,$$

luego

$$|O_{(\ell,0)}| = nq^n \qquad (\ell \in Z_n) ,$$

$$|O_{\tilde{r}}| = nq^n \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \qquad (r \in k \ , \ r \in k^{\times}) .$$

Notación. $$C_{\tilde{r},\tilde{s}}^{\tilde{t}} := C_{O_{\tilde{r}},O_{\tilde{s}}}^{O_{\tilde{t}}} \qquad (\tilde{r},\tilde{s},\tilde{t} \in \tilde{k}) .$$

PROPOSICION 11. <u>El espacio geométrico</u> $(M(n,k),\tilde{k}_n)$ <u>es un espacio de Gelfand, con punto base</u> $\tilde{x}_o = (0,0)$.

<u>Demostración</u>: Para cada $\tilde{r},\tilde{s} \in \tilde{k}$ y para cada $\tilde{z} \in \tilde{k}_n$, se tiene

$$(\chi_{\nu_{\tilde{r}}} * \chi_{\nu_{\tilde{s}}})(\tilde{z}) = \sum_{\tilde{w} \in \tilde{k}_n} \chi_{\nu_{\tilde{r}}}(\tilde{z}\tilde{w}^{-1})\chi_{\nu_{\tilde{s}}}(\tilde{w})$$

$$= \sum_{\tilde{w} \in \tilde{k}_n} \chi_{\nu_{\tilde{r}}}(pr_1^n(\tilde{z} - \tilde{w}), F_n^{-m}(z - w))\chi_{\nu_{\tilde{s}}}(\tilde{w})$$

$$= \delta_{pr_1^n(\tilde{z}), pr_1(\tilde{r}+\tilde{s})} \, C_{\tilde{r},\tilde{s}}^{N_n(z)} \; .$$

Ahora bien, como $(M(n,k), \tilde{k}_n)$ es un espacio de Gelfand, se tiene $C_{r,s}^t = C_{s,r}^t$ $(t \in k)$. Por lo tanto el álgebra de convolución $C(\tilde{k}_n/SO(N_n))$ es conmutativa. La Proposición sigue del Lema 3.

Q.E.D.

El espacio de Gelfand $(M(n,k), \tilde{k}_n)$ se denomina n-<u>recubrimiento del espacio euclidiano finito</u> n-<u>dimensional</u>. La aplicación $\tilde{D}_n$ se denomina n-<u>recubrimiento de la pseudo-distancia euclidiana finita</u> n-<u>dimensional</u>.

<u>Notación</u>. Consideremos las homotecias de $\tilde{k}_n$ (resp. $\tilde{k}$) definidas por

$$H_w(\tilde{z}) = (pr_1^n(\tilde{z}), wz) \qquad (\tilde{z} \in \tilde{k}_n) \; ,$$

$$h_s(\tilde{r}) = (pr_1(\tilde{r}), sr) \qquad (\tilde{r} \in \tilde{k}) \; ,$$

para todo $w \in k_n^\times$ y para todo $s \in k^\times$.

Para cada $\omega \in (Z_n^+)^\wedge$ la aplicación $J_{\frac{n-2}{2}}^{\omega} = \omega \otimes J_{\frac{n-2}{2}}$ de $\tilde{k}$ en $\mathbb{C}$ se denomina la ω-<u>torcida de la función de Bessel de orden</u> $\frac{n-2}{2}$.

TEOREMA 12. <u>Las aplicaciones de</u> $\tilde{k}_n^2/M(n,k)$ <u>en</u> $\mathbb{C}$ <u>definidas por</u>

$$\alpha_s^{\omega}(O_{\tilde{r}}) = (J^{\omega}_{\frac{n-2}{2}} \circ h_s)(\tilde{r}) = \omega(pr_1(\tilde{r}))J_{\frac{n-2}{2}}(sr) \qquad (\tilde{r} \in \tilde{k}) ,$$

<u>para todo</u> $\omega \in (Z_n^+)^\wedge$ <u>y para todo</u> $s \in k$, <u>proporcionan caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand</u> $(M(n,k),\tilde{k}_n)$.

3.4.3. <u>Primera demostración del Teorema</u> 12.

LEMA 6. <u>Designemos por</u> $\partial(\tilde{k}_n^{\bullet})$ <u>al subgrupo derivado del grupo</u> $\tilde{k}_n^{\bullet}$. <u>Se tiene</u>

$$\partial(\tilde{k}_n^{\bullet}) = \{(0,z) \in \tilde{k}_n | Tr_n(z) = 0\} .$$

<u>Además</u>

$$\partial(\tilde{k}_n^{\bullet})\backslash \tilde{k}_n^{\bullet} \simeq k^+ .$$

<u>Demostración</u>: Para cada $\ell,m \in Z_n$ y para cada $z,w \in k_n$ se tiene

$$\begin{aligned}[(\ell,z),(m,w)] &:= (\ell,z)(m,w)(\ell,z)^{-1}(m,w)^{-1} \\ &= (0,[F_n^{\ell}(z) - F_n^m(F_n^{\ell}(z))] - [F_n^m(w) - F_n^{\ell}(F_n^m(w))]) .\end{aligned}$$

Ahora bien, como $Tr_n(x - F_n^i(x)) = 0 \quad (i \in Z_n \ , \ x \in k_n)$ obtenemos

$$Tr_n(pr_2^n([(\ell,z),(m,w)])) = 0 .$$

Además, por el Teorema 90 de Hilbert (forma aditiva) para cada $z \in k_n$ tal que $Tr_n(z) = 0$ existe $w \in k_n$ tal que $z = w - F_n(w)$. Luego

$$(0,z) = (0,w - F_n(w)) = [(0,w),(1,0)] .$$

Por lo tanto

$$\partial(\widetilde{k}^{\bullet}_n) = \{(0,z) \in \widetilde{k}_n \mid Tr_n(z) = 0\} .$$

Por otra parte, consideremos el epimorfismo de grupos $I \times Tr_n$ de $\widetilde{k}^{\bullet}_n$ sobre $\widetilde{k}^{+}$. Se tiene

$$Ker(I \times Tr_n) = \partial(\widetilde{k}^{\bullet}_n) .$$

Por lo tanto

$$\partial(\widetilde{k}^{\bullet}_n) \backslash \widetilde{k}^{\bullet}_n \simeq \widetilde{k}^{+} .$$

Q.E.D.

Observación:

TEOREMA 90 de Hilbert (forma aditiva). *Sean* E *una extensión cíclica de* F *de grado* n $(n \in \mathbb{N})$ *y* σ *un generador del grupo de Galois de* E *sobre* F . *Para cada* $\beta \in E$ *se tiene*

$$Tr_{E/F}(\beta) = 0 \iff \exists\, \alpha \in E \ni \beta = \alpha - \sigma(\alpha) .$$

Demostración: Es claro que $Ker(I - \sigma) = F$, por lo tanto dimensión $Im(I - \sigma) = n - 1$. Por otra parte, como $Tr_{E/F} \neq 0$ se tiene dimensión $Im\, Tr_{E/F} = 1$, luego dimensión $Ker\, Tr_{E/F} = n - 1$. Puesto que $Im(I - \sigma)$ es un subespacio vectorial de $Ker\, Tr_{E/F}$ obtenemos $Im(I - \sigma) = Ker\, Tr_{E/F}$.

Q.E.D.

LEMA 7. Las aplicaciones de $\widetilde{k}_n^2/M(n,k)$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_{t^n}^{\omega}(O_{\widetilde{r}}) = \frac{1}{|\nu_{\widetilde{r}}|} \sum_{\widetilde{u}\in\nu_{\widetilde{r}}} [\omega \otimes e_n(t\ ?)](\widetilde{u})$$

$$= \omega(pr_1(\widetilde{r}))J_{\frac{n-2}{2}}(t^n r) = (J^{\omega}_{\frac{n-2}{2}} \circ h_{t^n})(\widetilde{r}) ,$$

para todo $\widetilde{r} \in \widetilde{k}$, $t \in k$, $\omega \in (Z_n^+)^\wedge$, proporcionan caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M(n,k),\widetilde{k}_n)$.

Demostración: La familia de caracteres de dimensión 1 del grupo $\widetilde{k}_n^{\bullet}$, proporcionada por el Lema precedente, está dada por $\{\omega \otimes e_n(t\ ?)\}_{t\in k}$, la cual es, por consiguiente, una familia de caracteres del espacio de Gelfand $(M(n,k),\widetilde{k}_n)$. El Lema sigue del Teorema 3.

Q.E.D.

Observación. Nótese que el Lema precedente proporciona $n[(q-1)/(n,q-1)+1]$ caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M(n,k),\widetilde{k}_n)$.

LEMA 8. Para cada $s \in k^\times$ la aplicación biyectiva ζ_s de $\widetilde{k}_n^2/M(n,k)$ sobre $\widetilde{k}_n^2/M(n,k)$ definida por

$$\zeta_s(O_{\widetilde{r}}) = O_{h_s(\widetilde{r})} \qquad (\widetilde{r} \in \widetilde{k}) ,$$

es una similitud del espacio de Gelfand $(M(n,k),\widetilde{k}_n)$.

Demostración: Para cada $s \in k^\times$ elijamos $w_s \in \nu_s$. Para cada $\widetilde{i},\widetilde{j},\widetilde{\ell} \in \widetilde{k}$ y para cada $\widetilde{x},\widetilde{y} \in \widetilde{k}_n$ tales que $D_n(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \widetilde{\ell}$ se tiene

$$H_{w_s}(\{\tilde{z} \in \tilde{k}_n \,|\, \tilde{D}_n(\tilde{x},\tilde{z}) = \tilde{i} \wedge \tilde{D}_n(\tilde{z},\tilde{y}) = \tilde{j}\}) =$$

$$= \{\tilde{z}' \in \tilde{k}_n \,|\, \tilde{D}_n(\tilde{x}',\tilde{z}') = h_s(\tilde{i}) \wedge \tilde{D}_n(\tilde{z}',\tilde{y}') = h_s(\tilde{j})\} ,$$

donde $\tilde{x}' := H_{w_s}(\tilde{x})$, $\tilde{y}' := H_{w_s}(\tilde{y})$. Por lo tanto

$$C^{h_s(\tilde{\ell})}_{h_s(\tilde{i}),h_s(\tilde{j})} = C^{\tilde{\ell}}_{\tilde{i},\tilde{j}} .$$

Nótese que

$$\tilde{D}_n(H_{w_s}(\tilde{a}),H_{w_s}(\tilde{b})) = h_s(\tilde{D}_n(\tilde{a},\tilde{b})) \qquad (\tilde{a},\tilde{b} \in \tilde{k}_n) .$$

Q.E.D.

Del Teorema 4 y de los Lemas 7 y 8 se deduce que las aplicaciones de $\tilde{k}_n^2/M(n,k)$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_s^{\omega}(O_{\tilde{r}}) = (\alpha_1^{\omega} \circ \zeta_s)(O_{\tilde{r}}) = (J^{\omega}_{\frac{n-2}{2}} \circ h_s)(\tilde{r}) ,$$

para todo $\tilde{r} \in \tilde{k}$, $s \in k^{\times}$, $\omega \in (Z_n^+)^{\wedge}$, proporcionan caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M(n,k),\tilde{k}_n)$. El Teorema 12 sigue del Lema 7 y de la aserción precedente.

3.4.4. <u>Segunda demostración del Teorema</u> 12.

Sean $\tilde{r},\tilde{s} \in \tilde{k}$ y sea $\tilde{z} \in C_{O_{\tilde{r}}}(\tilde{x}_o)$. Consideremos la aplicación biyectiva $\xi_{\tilde{z}}^{[O_{\tilde{r}},O_{\tilde{s}}]}$ de $C_{O_{\tilde{s}}}(\tilde{x}_o)$ sobre $C_{O_{\tilde{s}}}(\tilde{z})$ definida por

$$\xi_{\tilde{z}}^{[o_{\tilde{r}},o_{\tilde{s}}]}(\tilde{w}) = (pr_1^n(\tilde{w}+\tilde{z}),\, w+z) \qquad (\tilde{w} \in C_{O_{\tilde{s}}}(\tilde{x}_o)) \ .$$

Ahora bien, la operación binaria en $\tilde{k}_n$ definida por

$$\tilde{z}\cdot\tilde{w} := \xi_{\tilde{z}}^{[o_{\tilde{r}},o_{\tilde{s}}]'}(\tilde{w}) = (pr_1^n(\tilde{w}+\tilde{z}),w+z) \qquad (\tilde{w} \in C_{O_{\tilde{s}}}(\tilde{x}_o)) \ ,$$

provee a $\tilde{k}_n$ de una estructura de grupo abeliano, a saber, la estructura de producto directo de los grupos Z_n^+ y k_n^+ . Por lo tanto cada carácter del grupo abeliano $\tilde{k}_n^+$ es un carácter del espacio de Gelfand $(M(n,k),\tilde{k}_n)$.

Para cada $s \in k$ elijamos $w_s \in \nu_s$; se tiene que $\{e_n(w_s ?)\}_{s\in k}$ es un sistema de representantes para las órbitas de $O(N_n)$ en $(k_n^+)^\wedge$. Del Teorema 8 se deduce que las aplicaciones de $\tilde{k}_n^2/M(n,k)$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_s^\omega(o_{\tilde{r}}) = \frac{1}{|\nu_{\tilde{r}}|} \sum_{\tilde{u}\in\nu_{\tilde{r}}} [\omega \otimes e_n(w_s ?)](\tilde{u})$$

$$= \omega(pr_1(\tilde{r}))J_{\frac{n-2}{2}}(sr) = (J^\omega_{\frac{n-2}{2}} \circ h_s)(\tilde{r}) \ ,$$

para todo $\tilde{r} \in \tilde{k}$, $s \in k$, $\omega \in (Z_n^+)^\wedge$, proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M(n,k),\tilde{k}_n)$, lo cual demuestra el Teorema 12.

3.4.5. Obtenemos así el

TEOREMA 13. <u>Las representaciones irreductibles de</u> $M(n,k)$, <u>asociadas a la acción de</u> $M(n,k)$ <u>en</u> $\tilde{k}_n$, <u>están dadas por la tabla siguiente</u>

Parámetros	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
$\omega \in (Z_n^+)^\wedge$	$\omega \otimes \underline{1}$	1	n
$\omega \in (Z_n^+)^\wedge, s \in k^\times$	$\omega \otimes J_{\frac{n-2}{2}}(sN_n(?))$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q$	$n(q-1)$

<u>Demostración</u>: Para cada $\omega \in (Z_n^+)^\wedge$ y para cada $s \in k$ consideremos $\phi_s^\omega := \omega \otimes \phi_s$. Se tiene

$$\frac{1}{|\tilde{k}_n|}\left[\sum_{\omega \in (Z_n^+)^\wedge} \omega \otimes \phi_o + \sum_{\substack{\omega \in (Z_n^+)^\wedge \\ s \in k^\times}} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \omega \otimes \phi_s\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{n} \sum_{\omega \in (Z_n^+)^\wedge} \omega\right] \otimes \left[\frac{1}{|k_n|}\left(\phi_o + \sum_{s \in k^\times} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \phi_s\right)\right]$$

$$= \delta_o \otimes \delta_o = \delta_{(o,o)} \ .$$

Q.E.D.

4. Polítopos generalizados.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in Z^{\times}_{n+1} := Z_{n+1} \setminus \{0\}$ sea $H^{+}_{Q_j}$ un grupo abeliano de orden $Q_j \in \mathbb{N}$, $Q_j \geq 2$. Se puede proveer al conjunto $T_n := \prod_{j=1}^{n} H^{+}_{Q_j}$ de la estructura de producto directo de los grupos $H^{+}_{Q_j}$ $(j \in Z^{\times}_{n+1})$; tal grupo se denotará por T^{+}_n. Además designaremos por $B[T_n]$ al grupo de las traslaciones $b_t : s \mapsto s + t$ $(s,t \in T_n)$. Denotamos por $pr_i : T_n \to H_{N_i}$ la i-ésima proyección en T_n y para todo $t \in T_n$ designaremos por t_i la i-ésima proyección de t, es decir, $t_i = pr_i(t)$ $(i \in Z^{\times}_{n+1})$. Para cada $L \in \underline{\underline{P}}^{\times}(Z^{\times}_{n+1}) := \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1}) \setminus \{\phi\}$, donde $P(Z^{\times}_{n+1})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $Z^{\times}_{n+1}$, denotaremos por $pr_L : T_n \to \prod_{\ell \in L} H_{Q_\ell}$ la L-ésima proyección en T_n definida por

$$\underline{pr}_i(pr_L(t)) = t_i \qquad (i \in L \, , \, t \in T_n) \, ,$$

donde $\underline{pr}_i$ es la i-ésima proyección en $\prod_{\ell \in L} H_{Q_\ell}$ $(i \in L)$. Por otra parte, designaremos por $\underline{\underline{P}}_m(Z^{\times}_{n+1})$ al conjunto de todos los subconjuntos de cardinal m de $Z^{\times}_{n+1}$ $(m \in Z_{n+1})$ y para cada $i \in Z^{\times}_{n+1}$ denotaremos por ω_{Q_i} un carácter no trivial fijo de $H^{+}_{Q_i}$. En general, se designará por $Biy(E)$ al conjunto de todas las biyecciones de un conjunto E.

4.1. El paralelepípedo n-dimensional.

Consideremos las aplicaciones

$$N_o : T_n \to \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1}) \, ,$$

definida por

$$N_o(t) = \{i \in Z^{\times}_{n+1} \mid t_i \neq 0\} =: \mathrm{sop}(t) \qquad (t \in T_n) \ ,$$

y

$$D_o : T_n^2 \rightarrow \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1}) \ ,$$

definida por

$$D_o(s,t) = N_o(s - t) \qquad (s,t \in T_n) \ .$$

Nótese que

$$D_o(s,t) = \phi \Longleftrightarrow s = t \qquad (s,t \in T_n) \ ,$$

$$D_o(s,t) = D_o(t,s) \qquad (s,t \in T_n) \ ,$$

$$D_o(r,t) \subset D_o(r,s) \cup D_o(s,t) \qquad (r,s,t \in T_n) \ .$$

Designemos por $M_o[T_n]$ al subgrupo de todas las aplicaciones g en $\mathrm{Biy}(T_n)$ que preservan la pseudo-distancia con valores conjuntos D_o , es decir, $D_o(g(s),g(t)) = D_o(s,t)$ para todo $s,t \in T_n$. El grupo $M_o[T_n]$ actúa de manera evidente, a la derecha, sobre T_n , por $t \mapsto g^{-1}(t)$ $(t \in T_n \ , \ g \in M_o[T_n])$; consideremos $t° = (0,0, \ldots, 0)$ y designemos por $K_o[T_n]$ al $\mathrm{Stab}_{M_o[T_n]}(t°)$. Como $B[T_n]$ es un subgrupo de $M_o[T_n]$ que actúa transitivamente sobre T_n , se obtiene que $M_o[T_n] = K_o[T_n]B[T_n]$.

Puesto que $B[T_n]$ es un grupo abeliano, se tiene que $(M_o[T_n],B[T_n])$ es un espacio de Gelfand con punto base la aplicación identidad I . Ahora bien, como $(M_o[T_n],T_n)$ es un espacio geométrico isomorfo a $(M_o[T_n], B[T_n])$, obtenemos que $(M_o[T_n], T_n)$ es un espacio de Gelfand con punto base $t° = (0,0, \ldots, 0)$ denominado <u>paralelepípedo</u> n-<u>dimensio - nal y designado por</u> $P(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Si para cada $i \in Z^{\times}_{n+1}$ se tiene que $Q_i = q$ $(q \in \mathbb{N}, q \geq 2)$, entonces el paralelepípedo n-dimensional será designado por $P(n,q)$.

LEMA 9. <u>Sea</u> $g \in Biy(T_n)$. <u>Se tiene que</u> $g \in K_o[T_n]$ <u>sí y sólo si</u>

(i) $(\forall\, t \in T_n)(sop(g(t)) = sop(t))$.

(ii) $(\forall\, s,t \in T_n)(sop(s) \cap sop(t) = \phi \Rightarrow g(s \dot{+} t) = g(s) \dot{+} g(t))$.

<u>Demostración</u>: Para cada $g \in K_o[T_n]$ y para cada $s,t \in T_n$ tales que $sop(s) \cap sop(t) = \phi$ se tiene $N_o(s \dot{+} t, s) = sop(t)$ y $N_o(s \dot{+} t, t) = sop(s)$, por ende $N_o(g(s \dot{+} t), g(s)) = sop(t)$ y $N_o(g(s \dot{+} t), g(t)) = sop(s)$. Por lo tanto $g(s \dot{+} t) = g(s) \dot{+} g(t)$. Nótese que $sop(g(s \dot{+} t)) = sop(s) \dot{\cup} sop(t)$.

Recíprocamente, cada $g \in Biy(T_n)$ que verifica las condiciones (i) y (ii) queda completamente determinada por su restricción a los ele - mentos $t \in T_n$ de soporte reducido a un elemento. Por lo tanto $g \in K_o[T_n]$.

Q.E.D.

<u>Observación</u>. Nótese que, en general, $B[T_n]$ no es un subgrupo normal en $M_o[T_n]$.

Del Lema precedente se deduce que las órbitas de $K_o[T_n]$ en T_n están dadas por

$$\nu_L = \{t \in T_n | N_o(t) = L\} \qquad (L \in \underline{\underline{P}}(Z_{n+1}^{\times})) .$$

Por lo tanto, las órbitas de $M_o[T_n]$ en T_n^2 quedan descritas por

$$\Psi_L = \{(s,t) \in T_n^2 | D_o(s,t) = L\} \qquad (L \in \underline{\underline{P}}(Z_{n+1}^{\times})) .$$

<u>Notación</u>. Consideremos

$$\underline{\omega}_\phi := \underline{1} ,$$

$$\underline{\omega}_L := \left[\bigotimes_{\ell \in L} \omega_{Q_\ell}\right] \circ pr_L \qquad (L \in \underline{\underline{P}}^{\times}(Z_{n+1}^{\times})) .$$

Como cada carácter del grupo abeliano T_n^+ es un carácter del espacio de Gelfand $(M_o[T_n], T_n)$, obtenemos que las aplicaciones de $T_n^2/M_o[T_n]$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_M(\Psi_L) = \frac{1}{|\nu_L|} \sum_{t \in \nu_L} \underline{\omega}_M(t)$$

$$= (-1)^{|M \cap L|} \prod_{\ell \in M \cap L} \frac{1}{Q_\ell - 1} ,$$

para todo $M, L \in \underline{\underline{P}}(Z_{n+1}^{\times})$, proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M_o[T_n], T_n)$.

Obtenemos así el

TEOREMA 14. <u>Las representaciones irreductibles de</u> $M_o[T_n]$, <u>asociadas a la acción de</u> $M_o[T_n]$ <u>en</u> T_n, <u>están dadas por la tabla siguiente</u>

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
$M \in \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})$	$(-1)^{\lvert M\cap N_o(?)\rvert} \prod_{m\in M\cap N_o(?)} \frac{1}{Q_m-1}$	$\prod_{m\in M} (Q_m-1)$	2^n

Demostración: Nótese que

$$\frac{1}{\lvert T_n\rvert}\left[\sum^{\times}_{M\in\underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})} \left[\prod_{m\in M} (Q_m - 1)\right](-1)^{\lvert M\cap N_o(?)\rvert} \prod_{m\in M\cap N_o(?)} \frac{1}{Q_m - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{\lvert T_n\rvert}\left[\sum_{M\in\underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})} (-1)^{\lvert M\cap N_o(?)\rvert} \prod_{m\in M\setminus N_o(?)} (Q_m - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{\lvert T_n\rvert}\left[\sum^{\times}_{\substack{M\in\underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})\\ M\subset Z^{\times}_{n+1}\setminus N_o(?)}} \sum^{\times}_{\substack{L\in\underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})\\ L\subset N_o(?)}} (-1)^{\lvert (M\cup L)\cap N_o(?)\rvert} \prod_{m\in (M\cup L)\setminus N_o(?)} (Q_m - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{\lvert T_n\rvert}\left[\sum^{\times}_{\substack{L\in\underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})\\ L\subset N_o(?)}} \cdot (-1)^{\lvert L\rvert}\right]\left[\sum^{\times}_{\substack{M\in\underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})\\ M\subset Z^{\times}_{n+1}\setminus N_o(?)}} \prod_{m\in M\setminus N_o(?)} (Q_m - 1)\right]$$

$$= \delta_{t^o} .$$

Q.E.D.

Observación. Nótese que

$$\text{dimensión}(V_{\alpha_M}) = |\nu_M| \qquad (M \in \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})) .$$

Consideremos $Q_i = 2$ para todo $i \in Z^{\times}_{n+1}$. El espacio de Gelfand $(M_o[T_n], T_n)$ se denomina paralelepípedo unitario n-dimensional. Nótese que $K_o[T_n] = \{I\}$.

Obtenemos así el

COROLARIO 1. Las representaciones irreductibles del paralelepípedo unitario n-dimensional están dadas por la tabla siguiente

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
$M \in \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})$	$(-1)^{\lvert M \cap N_o(?) \rvert}$	1	2^n

4.2. El esquema de Hamming $H(n,q)$.

4.2.1. Consideremos las aplicaciones

$$N_1 : T_n \to Z_{n+1} ,$$

definida por

$$N_1(t) = |N_o(t)| \qquad (t \in T_n) ,$$

y

$$D_1 : T^2_n \to Z_{n+1} ,$$

definida por

$$D_1(s,t) = N_1(s - t) \qquad (s,t \in T_n) ,$$

Se tiene que D_1 es una distancia sobre T_n .

Designemos por $M_1[T_n]$ al subgrupo de todas las aplicaciones g en $Biy(T_n)$ que preservan la distancia D_1 , es decir $D_1(g(s),g(t)) = D_1(s,t)$ para todo $s,t \in T_n$. El grupo $M_1[T_n]$ actúa de manera evidente, a la derecha, sobre T_n , por $t \mapsto g^{-1}(t)$ $(t \in T_n$, $g \in M_1[T_n])$; consideremos $t° = (0,0, \ldots, 0)$ y designemos por $K_1[T_n]$ al $Stab_{M_1[T_n]}(t°)$. Como $B[T_n]$ es un subgrupo de $M_1[T_n]$ que actúa transitivamente sobre T_n se obtiene que $M_1[T_n] = K_1[T_n]B[T_n]$.

Puesto que $B[T_n]$ es un grupo abeliano se tiene que $(M_1[T_n],B[T_n])$ es un espacio de Gelfand con punto base la aplicación identidad I . Ahora bien, como $(M_1[T_n],T_n)$ es un espacio geométrico isomorfo a $(M_1[T_n],B[T_n])$ obtenemos que $(M_1[T_n],T_n)$ es un espacio de Gelfand con punto base $t° = (0,0, \ldots, 0)$.

LEMA 10. Sea $g \in Biy(T_n)$. Se tiene que $g \in K_1[T_n]$ sí y sólo si

(i) $(\forall\ t \in T_n)(|sop(g(t))| = |sop(t)|)$.

(ii) $(\forall\ s,t \in N_1^{-1}(\{1\}))(sop(s) \cap sop(t) = \phi \iff sop(g(s)) \cap sop(g(t)) = \phi)$.

(iii) $(\forall\ s,t \in T_n)(sop(s) \cap sop(t) = \phi \Rightarrow g(s \dot{+} t) = g(s) \dot{+} g(t))$.

Demostración. Sea $g \in K_1[T_n]$. Para cada $s,t \in N_1^{-1}(\{1\})$ se tiene

$$sop(s) \cap sop(t) = \phi \iff D_1(s,t) = 2$$

$$\Longleftrightarrow D_1(g(s),g(t)) = 2 \Longleftrightarrow \mathrm{sop}(g(s)) \cap \mathrm{sop}(g(t)) = \phi \ .$$

Por otra parte, para cada $s,t \in T_n$ tales que $\mathrm{sop}(s) \cap \mathrm{sop}(t) = \phi$ se tiene $N_1(s \dotplus t,s) = |\mathrm{sop}(t)|$ y $N_1(s \dotplus t,t) = |\mathrm{sop}(s)|$, por ende $N_1(g(s \dotplus t),g(s)) = |\mathrm{sop}(t)|$ y $N_1(g(s \dotplus t),g(t)) = |\mathrm{sop}(s)|$. Por lo tanto $g(s \dotplus t) = g(s) \dotplus g(t)$. Nótese que $|\mathrm{sop}(g(s \dotplus t))| = |\mathrm{sop}(s)| + + |\mathrm{sop}(t)|$.

Recíprocamente, cada $g \in \mathrm{Biy}(T_n)$ que verifica las condiciones (i), (ii) y (iii) queda completamente determinada por su restricción a los elementos $t \in T_n$ de soporte reducido a un elemento. Por lo tanto $g \in K_1[T_n]$.

Q.E.D.

Observación. Nótese que, en general, $B[T_n]$ no es un subgrupo normal en $M_1[T_n]$.

4.2.2. Caso en que $Q_i \neq Q_j$ para todo $i,j \in Z^{\times}_{n+1}$, $i \neq j$.

Del Lema precedente se infiere que $K_1[T_n] = K_o[T_n]$; por lo tanto $M_1[T_n] = M_o[T_n]$. El espacio de Gelfand $(M_1[T_n],T_n)$ es, en este caso, un paralelepípedo n-dimensional.

4.2.3. Caso en que $Q_i = q$ $(q \in \mathbb{N}\ ,\ q \geq 2)$ para todo $i \in Z^{\times}_{n+1}$.

Las órbitas de $K_1[T_n]$ en T_n están dadas por

$$C_m(t^\circ) = \{t \in T_n | N_1(t) = m\} \qquad (m \in Z^{\times}_{n+1}) \ .$$

Por lo tanto las órbitas de $M_1[T_n]$ en T^2_n quedan descritas por

$$O_m = \{(s,t) \in T_n^2 | D_1(s,t) = m\} \qquad (m \in Z_{n+1}^{\times}) .$$

El espacio de Gelfand $(M_1[T_n], T_n)$ es, en este caso, un grafo distalmente transitivo denominado <u>esquema de Hamming y designado por</u> $H(n,q)$.

<u>Notación</u>. Consideremos

$$\underline{\omega}_o := \underline{1} ,$$

$$\underline{\omega}_m := \left[\bigotimes_{j=1}^{m} \omega_{Q_j}\right] \circ pr_{Z_{m+1}^{\times}} \qquad (m \in Z_{n+1}^{\times}) .$$

Como cada carácter del grupo abeliano T_n^+ es un carácter del espacio de Gelfand $(M_1[T_n], T_n)$, obtenemos que las aplicaciones de $T_n^2/M_1[T_n]$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_m(O_\ell) = \frac{1}{|C_\ell(t^\circ)|} \sum_{t \in C_\ell(t^\circ)} \underline{\omega}_m(t)$$

$$= \frac{1}{(q-1)^\ell \binom{n}{\ell}} \sum_{\substack{i \in Z_{m+1} \cap Z_{\ell+1} \\ \ell - i \leq n-m}} (-1)^i (q-1)^{\ell-i} \binom{m}{i} \binom{n-m}{\ell-i}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{\substack{i \in Z_{m+1} \cap Z_{\ell+1} \\ \ell - i \leq n-m}} (-1)^i (q-1)^{-i} \binom{m}{i} \binom{n-m}{\ell-i} ,$$

para todo $m, \ell \in Z_{n+1}$, proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(M_1[T_n], T_n)$. Nótese que

$$C_{\ell}(t^{\circ}) = \bigcup_{\substack{i \in Z_{m+1} \cap Z_{\ell+1} \\ \ell - i \leq n-m}} \left[\bigcup_{\substack{t \in T_n \\ pr_{Z^{\times}_{m+1}}(t)=0 \\ N_1(t) = \ell - i}} \{ s \in T_n \mid pr_{Z^{\times}_{n+1} \setminus Z^{\times}_{m+1}}(s-t) = 0 \wedge N_1(s-t) = i \} \right]$$

para todo $\ell \in Z^{\times}_{n+1}$. Las aplicaciones precedentes se denominan <u>polinomios de Krawtchouk normalizados</u>.

Los polinomios de Krawtchouk no normalizados $\widetilde{\alpha}_m$ $(m \in Z_{n+1})$ tie - nen la <u>función generatriz</u>:

$$(1 - z)^m [1 + (q - 1)z]^{n-m} = \sum_{\ell=0}^{n} \widetilde{\alpha}_m(\ell) z^{\ell} \qquad (z \in \mathbb{C}) ,$$

y constituyen las soluciones de la <u>ecuación a diferencias finitas</u>:

$$\widetilde{\alpha}(0) = 1 ,$$

$$\widetilde{\alpha}(\ell)\widetilde{\alpha}(1) = (q-1)(n-\ell+1)\widetilde{\alpha}(\ell-1) + (q-2)\ell\widetilde{\alpha}(\ell) + (\ell+1)\widetilde{\alpha}(\ell+1) \qquad (\ell \in Z^{\times}_n) ,$$

$$\widetilde{\alpha}(n)\widetilde{\alpha}(1) = (q - 1)\widetilde{\alpha}(n - 1) + (q - 2)n\widetilde{\alpha}(n) .$$

PROPOSICION 12. <u>Para cada</u> $m \in Z^{\times}_{n+1}$ <u>se tiene</u>

$$\phi_{\alpha_m} = \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{M \in \underline{\underline{P}}_m(Z^{\times}_{n+1})} \phi_{\alpha_M} ,$$

<u>donde</u> ϕ_{α_M} <u>es la función esférica de tipo</u> α_M <u>asociada al paralelepípedo</u> n-<u>dimensional</u> $P(n,q)$ $(M \in \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1}))$.

Demostración: Para cada $m, \ell \in Z^{\times}_{n+1}$ y para cada $t \in C_{\ell}(t^{\circ})$ se tiene

$$\phi_{\alpha_m}(t) = \frac{1}{\binom{n}{\ell}} \sum_{\substack{i \in Z_{m+1} \cap Z_{\ell+1} \\ \ell - i \leq n-m}} (-1)^i (q-1)^{-i} \binom{m}{i} \binom{n-m}{\ell-i}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{\substack{i \in Z_{m+1} \cap Z_{\ell+1} \\ m - i \leq n-\ell}} (-1)^i (q-1)^{-i} \binom{\ell}{i} \binom{n-\ell}{m-i}$$

$$= \left[\frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{M \in \underset{=m}{P}(Z^{\times}_{n+1})} \phi_{\alpha_M} \right](t) .$$

Nótese que

$$\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{i}\binom{n-\ell}{m-i} = \binom{n}{m}\binom{m}{i}\binom{n-m}{\ell-i} \qquad (i \in Z_{m+1} \cap Z_{\ell+1}\ ,\ \ell - i \leq n-m)\ ,$$

Q.E.D.

TEOREMA 15. <u>Las representaciones irreductibles de</u> $M_1[T_n]$, <u>asociadas a la acción de</u> $M_1[T_n]$ <u>en</u> T_n , <u>están dadas por la tabla siguiente</u>

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
$m \in Z_{n+1}$	$\frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{M \in \underset{=m}{P}(Z^{\times}_{n+1})} \phi_{\alpha_M}$	$(q-1)^m \binom{n}{m}$	$n+1$

Demostración: Nótese que

$$\delta_{t^\circ} = \frac{1}{|T_n|} \sum_{M \in \underline{\underline{P}}(Z^{\times}_{n+1})} (q-1)^{|M|} \phi_{\alpha_M}$$

$$= \frac{1}{|T_n|} \sum_{m \in Z_{n+1}} \left[\sum_{M \in \underline{\underline{P}}_m (Z^{\times}_{n+1})} (q-1)^m \phi_{\alpha_M} \right]$$

$$= \frac{1}{|T_n|} \sum_{m \in Z_{n+1}} (q-1)^m \sum_{M \in \underline{\underline{P}}_m (Z^{\times}_{n+1})} \phi_{\alpha_M}$$

$$= \frac{1}{|T_n|} \sum_{m \in Z_{n+1}} (q-1)^m \binom{n}{m} \phi_{\alpha_m} .$$

Q.E.D.

Observación. Nótese que

$$\text{dimensión}(V_{\alpha_m}) = |C_m(t^\circ)| \qquad (m \in Z_{n+1}) .$$

Notación. Designaremos por $\mathfrak{S}_n$ al grupo de todas las permutaciones del conjunto $Z^{\times}_{n+1}$.

4.2.4. Caso en que $Q_i = 2$ para todo $i \in Z^{\times}_{n+1}$.

El espacio de Gelfand $(M_1[T_n], T_n)$ es, en este caso, un cubo unitario n-dimensional. Del Lema 10 se infiere que

$K_1[T_n] = \{\underline{\mu} \in \mathrm{Biy}(T_n) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n\}$, donde

$$\mathrm{pr}_{i}\underline{\mu} = \mathrm{pr}_{\mu(i)} \qquad\qquad (i \in Z_{n+1}^{\times}\ ,\ \mu \in \mathfrak{S}_n)\ ,$$

por lo tanto $M_1[T_n] = K_1[T_n] \ltimes B[T_n]$. Además obtenemos

$$(B[T_n])^{\wedge} = \{e(\langle t,?\rangle)\}_{t\in T_n}\ ,$$

donde e es el carácter no trivial de $H_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\langle\ ,\ \rangle$ designa la forma bilineal canónica sobre $T_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. La acción de $K_1[T_n]$ en $(B[T_n])^{\wedge}$ queda entonces descrita por

$$e(\langle t,?\rangle)\cdot\underline{\mu} = e(\langle \underline{\mu}^{-1}(t),?\rangle) \qquad\qquad (t \in T_n\ ,\ \mu \in \mathfrak{S}_n)\ .$$

COROLARIO 2. Las representaciones irreductibles del cubo unitario n-dimensional están dadas por la tabla siguiente

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
$m \in Z_{n+1}$	ϕ_{α_m}	$\binom{n}{m}$	$n+1$

Donde

$$\phi_{\alpha_m} = \frac{1}{\binom{n}{N_1(?)}} \sum_{\substack{i\in Z_{m+1}\cap Z_{N_1(?)+1} \\ N_1(?)-i\leq n-m}} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-m}{N_1(?)-i}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{M\in \underline{\underline{P}}_m(Z_{n+1}^{\times})} (-1)^{|M\cap N_o(?)|}\ .$$

Por otra parte, definamos

$$S_n := \{t \in T_n | N_1(t) \text{ es par}\} \quad ,$$

$$M_1[S_n] := \{g \in M_1[T_n] | g(S_n) = S_n\} \; .$$

El grupo $M_1[S_n]$ actúa de manera evidente, a la derecha, sobre S_n, por $t \mapsto g^{-1}(t)$ $(t \in S_n \, , \, g \in M_1[S_n])$; consideremos $t° = (0,0, \ldots, 0)$ y designemos por $K_1[S_n]$ al $\mathrm{Stab}_{M_1[S_n]}(t°)$. Como $B[S_n] :=$ $:= \{b_t \in B[T_n] | t \in S_n\}$ es un subgrupo de $M_1[S_n]$ que actúa transitivamente sobre S_n se obtiene que $M_1[S_n] = K_1[S_n] \ltimes B[S_n]$. Nótese que $K_1[S_n] = K_1[T_n]$.

Puesto que $B[S_n]$ es un grupo abeliano se tiene que $(M_1[S_n], B[S_n])$ es un espacio de Gelfand con punto base la aplicación identidad I . Ahora bien, como $(M_1[S_n], S_n)$ es un espacio geométrico isomorfo a $(M_1[S_n], B[S_n])$ obtenemos que $(M_1[S_n], S_n)$ es un espacio de Gelfand con punto base $t° = (0,0, \ldots, 0)$.

Las órbitas de $K_1[S_n]$ en S_n están dadas por

$$\nu_m = C_{2m}(t°) \qquad (m \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) \; .$$

Por lo tanto las órbitas de $M_1[S_n]$ en S_n^2 quedan descritas por

$$O_{\nu_m} = O_{2m} \qquad (m \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) \; .$$

Por otra parte consideremos

<u>Caso</u> n <u>impar</u>: Se tiene

$$(B[S_n])^\wedge = \{e(\langle t,?\rangle)\}_{t\in N_1^{-1}(Z_{[\frac{n}{2}]+1})} .$$

Luego las órbitas de $K_1[S_n]$ en $(B[S_n])^\wedge$ están dadas por

$$\Psi_m = \{e(\langle t,?\rangle) \in (B[S_n])^\wedge \mid t \in C_m(t^\circ)\} \qquad (m \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}) .$$

<u>Caso</u> n <u>par</u>: Se tiene

$$(B[S_n])^\wedge = \{e(\langle t,?\rangle)\}_{t\in N_1^{-1}(Z_{\frac{n}{2}})} \cup \{e(\langle t,?\rangle)\}_{t\in N_1^{-1}\left(\{\frac{n}{2}\}\right)} \quad ,$$
$$\text{módulo } t\sim t+t^1$$

donde $t^1 := (1,1, \ldots, 1)$. Luego las órbitas de $K_1[S_n]$ en $(B[S_n])^\wedge$ están dadas por

$$\Psi_m = \{e(\langle t,?\rangle) \in (B[S_n])^\wedge \mid t \in C_m(t^\circ)\} \qquad (m \in Z_{\frac{n}{2}}) ,$$

$$\Psi_{\frac{n}{2}} = \{e(\langle t,?\rangle) \in (B[S_n])^\wedge \mid t \in C_{\frac{n}{2}}(t^\circ) \text{ módulo } t \sim t + t^1\} .$$

Obtenemos así el

TEOREMA 16. <u>Las representaciones irreductibles del grupo</u> $M_1[S_n]$, <u>asociadas a la acción de</u> $M_1[S_n]$ <u>en</u> S_n , <u>están dadas por la tabla siguiente</u>

n	Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
impar	$m \in Z_{[\frac{n}{2}]+1}$	ϕ_{β_m}	$\binom{n}{m}$	$[\frac{n}{2}] + 1$
par	$m \in Z_{\frac{n}{2}}$	ϕ_{β_m}	$\binom{n}{m}$	$\frac{n}{2}$
	—	$\phi_{\beta_{\frac{n}{2}}}$	$\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$	1

Donde β_m es la restricción a $S_n^2/M_1[S_n]$ de la aplicación α_m asociada al cubo unitario n-dimensional $(m \in Z_{[\frac{n}{2}]+1})$.

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

Observación. Nótese que para todo $n \in \mathbb{N}$, n impar, existe $\mu \in \mathfrak{S}_{[\frac{n}{2}]+1}$ tal que

$$\text{dimensión}(V_{\beta_m}) = |\nu_{\mu(m)}| \qquad (m \in Z^{\times}_{[\frac{n}{2}]+1}) :$$

Sin embargo, para el caso $n \in \mathbb{N}$, n par, $n \neq 2$, tal relación no se verifica.

4.2.5. Esquemas de Hamming $\otimes$ Paralelepípedo.

Sea $\{M_i\}_{i \in Z_{m+1}}$ una partición del conjunto $Z^{\times}_{n+1}$ $(m \in \mathbb{N})$ y sea $\{q_i\}_{i \in Z_m}$ una sucesión finita de números enteros ≥ 2 tales que $q_j \neq q_\ell$ $(j, \ell \in Z_m\ ,\ j \neq \ell)$. Supongamos que

$$(\forall\ i \in Z_m)(\forall\ j \in M_i)(Q_j = q_i)\ ,$$

$$(\forall\ j,\ell \in M_m)(j \neq \ell \Rightarrow Q_j \neq Q_\ell)\ ,$$

$$(\forall\ j \in M_m)(\forall\ i \in Z_m)(Q_j \neq q_i)\ .$$

Del Lema 10 se infiere, en este caso, que

$$(M_1[T_n], T_n) \simeq \left[\bigotimes_{i \in Z_m} H(n_i, q_i) \right] \otimes (M_o[T_{M_m}], T_{M_m})\ ,$$

donde n_i denota el cardinal del conjunto M_i $(i \in Z_m)$ y T_{M_m} designa al conjunto $\prod_{j \in M_m} H_{Q_j}$.

4.3. El árbol simétrico finito.

4.3.1. Definamos

$$T_o := \{0\}\ ,$$

$$T_m := \prod_{j=1}^{m} H_{Q_j} \qquad (m \in Z^{\times}_{n+1})\ .$$

Consideremos el árbol orientado $\Gamma_n = (V_n, \underline{\underline{L}}_n)$, donde $V_n = \bigcup_{j=0}^{n} T_j$ es el conjunto de vértices y $\underline{\underline{L}}_n \subset V_n^2$ es el conjunto de aristas definido como sigue

$$(s,t) \in \underline{\underline{L}}_n \iff \text{existe } j \in Z_n^\times \text{ tal que } s \in T_j \text{ , } t \in T_{j+1} \text{ y}$$

$$s_i = t_i \text{ para todo } i \in Z_{j+1}^\times \text{ .}$$

Se denomina automorfismo del árbol Γ_n a toda aplicación biyectiva g de V_n tal que

$$(s,t) \in \underline{\underline{L}}_n \Rightarrow (g(s),g(t)) \in \underline{\underline{L}}_n \text{ .}$$

El grupo $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ de todos los automorfismos del árbol Γ_n no actúa transitivamente sobre V_n , sin embargo, actúa transitivamente sobre T_j para todo $j \in Z_{n+1}$. Nótese que

$$g(T_j) = T_j \qquad (g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n) \text{ , } j \in Z_{n+1}) \text{ .}$$

El conjunto T_n se denomina el <u>espacio de las puntas del árbol</u> Γ_n .

Por otra parte, consideremos las aplicaciones

$$N_2 : T_n \to Z_{n+1} \text{ ,}$$

definida por

$$N_2(t) = (n + 1) - \inf N_o(t) \qquad (t \in T_n) \text{ ,}$$

donde utilizamos la definición $\inf \phi := n + 1$, y

$$D_2 : T_n^2 \to Z_{n+1} \text{ ,}$$

definida por

$$D_2(s,t) = N_2(s - t) \qquad (s,t \in T_n) \text{ .}$$

Nótese que D_2 es una distancia sobre T_n que verifica la desigualdad ultramétrica

$$D_2(r,t) \leq \text{Máx}\{D_2(r,s),D_2(s,t)\} \qquad (r,s,t \in T_n) .$$

Consideremos $t^\circ = (0,0, \ldots, 0)$ como punto base del espacio geométrico $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n),T_n)$ y designemos por $K_2[T_n]$ al $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\Gamma_n)}(t^\circ)$. Las órbitas de $K_2[T_n]$ en T_n están dadas por

$$C_m(t^\circ) = \{t \in T_n | N_2(t) = m\}$$
$$= \{(\underbrace{0,0, \ldots,0}_{n-m \text{ veces}}\} \times \overset{\times}{H}_{Q_{n-m+1}} \times \prod_{j=n-m+2}^{n} H_{Q_j} ,$$

para todo $m \in Z_{n+1}$, donde utilizamos la definición $\overset{\times}{H}_{Q_\ell} := H_{Q_\ell} \setminus \{0\}$. Además las órbitas de $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ en T_n^2 quedan descritas por

$$O_m = \{(s,t) \in T_n^2 | D_2(s,t) = m\} \qquad (m \in Z_{n+1}) .$$

Como la distancia D_2 es, en particular, una aplicación simétrica, es decir, $D_2(s,t) = D_2(t,s)$ $(s,t \in T_n)$, se obtiene que el espacio geométrico $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n),T_n)$ es un espacio de Gelfand con punto base $t^\circ = (0,0, \ldots, 0)$.

4.3.2. Sean $\ell,m \in Z_{n+1}$ y sea $s \in C_\ell(t^\circ)$. Consideremos la aplicación biyectiva $\xi_s^{[0_\ell,0_m]}$ de $C_m(t^\circ)$ sobre $C_m(s)$ definida por

$$\xi_s^{[0_\ell,0_m]}(t) = (s_1 + t_1,s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n) \qquad (t \in C_m(t^\circ)) ,$$

donde

$$C_m(s) = \{t \in T_n | D_2(s,t) = m\} \qquad (m \in Z_{n+1}\ ,\ s \in T_n)\ .$$

Ahora bien, la operación binaria en T_n definida por

$$s + t := \xi_s^{[0_\ell, 0_m]}(t) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n) \qquad (t \in C_m(t^\circ))\ ,$$

provee a T_n de una estructura de grupo, a saber, la estructura de producto directo de los grupos $H^+_{Q_j}$ $(j \in Z_{n+1})$. Por lo tanto cada carácter del grupo abeliano T^+_n es un carácter del espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n), T_n)$.

<u>Notación</u>. Consideremos

$$\underline{\omega}_o := \underline{1}\ ,$$

$$\underline{\omega}_m := \omega_{Q_{n-m+1}} \circ pr_{n-m+1} \qquad (m \in Z^\times_{n+1})\ .$$

Se infiere que las aplicaciones de $T^2_n/\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_m(O_\ell) = \frac{1}{|C_\ell(t^\circ)|} \sum_{t \in C_\ell(t^\circ)} \underline{\omega}_m(t)$$

$$= \begin{cases} 1 & , \text{ si } \ell < m \\ -(Q_{n-m+1} - 1)^{-1} & , \text{ si } \ell = m \\ 0 & , \text{ si } \ell > m \end{cases}$$

para todo $m \in Z_{n+1}$, $\ell \in Z_{n+1}$, proporcionan todos los caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n), T_n)$.

Obtenemos así el

TEOREMA 17. Las representaciones irreductibles de $Aut(\Gamma_n)$, asociadas a la acción de $Aut(\Gamma_n)$ en T_n , están dadas por la tabla siguiente

Parámetro	función esférica (normalizada)	dimensión	N° de repres. en la familia
—	$\underline{1}$	1	1
$m \in Z^{\times}_{n+1}$	$\sum_{\ell=0}^{m-1} \delta_{\ell,N_2(?)} - (Q_{n-m+1}-1)^{-1} \delta_{m,N_2(?)}$	$Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-m}(Q_{n-m+1}-1)$	n

Demostración: Nótese que

$$\frac{1}{|T_n|}\left[\underline{1} + \sum_{m=1}^{n} Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-m}(Q_{n-m+1}-1)\left(\sum_{\ell=0}^{m-1} \delta_{\ell,N_2(?)} - (Q_{n-m+1}-1)^{-1}\delta_{m,N_2(?)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{|T_n|}\left[\underline{1} - Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-N_2(?)}(\underline{1}-\delta_{0,N_2(?)}) + \sum_{m=N_2(?)+1}^{n} Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-m}(Q_{n-m+1}-1)\right]$$

$$= \frac{1}{|T_n|} Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-N_2(?)} \delta_{0,N_2(?)} = \delta_{t^\circ} .$$

Q.E.D.

4.3.3. Consideremos $n = 1$ y $Q_1 = m$ $(m \in \mathbb{N}\ ,\ m \geq 2)$. El espacio de Gelfand $(Aut(\Gamma_1), T_1)$ es, en este caso, un símplice regular m-dimensional. Obtenemos así el

COROLARIO 1. *Las representaciones irreductibles del símplice regular* m-*dimensional están dadas por la tabla siguiente*

función esférica \ $N(?)$	0	1	dimensión
ϕ_{α_o}	1	1	1
ϕ_{α_1}	1	$-(m-1)^{-1}$	$m-1$

Donde $N(t)$ designa la distancia geodésica entre el punto $t \in T_1$ y el punto base t° .

Consideremos además $n = 2$, $Q_1 = m$ $(m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2)$ y $Q_2 = 2$. El espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_2),T_2)$ es, en este caso, un *politopo cruzado* m-*dimensional*. Obtenemos así el

COROLARIO 2. *Las representaciones irreductibles del polítopo cruzado* m-*dimensional están dadas por la tabla siguiente*

función esférica \ $N(?)$	0	1	2	dimensión
ϕ_{α_o}	1	1	1	1
ϕ_{α_1}	1	$-(m-1)^{-1}$	1	$m-1$
ϕ_{α_2}	1	0	-1	m

Donde $N(t)$ designa la distancia geodésica entre el punto $t \in T_2$ y el punto base $t°$.

5. Biblioteca de la Margarita con n libros.

5.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el grafo $\Gamma_n = (V_n, \underline{\underline{L}}_n)$, donde $\underline{\underline{L}}_n$ es el subconjunto del conjunto $\mathfrak{S}_n^2$ definido por

$$(s,t) \in \underline{\underline{L}}_n \iff \text{existe } i \in Z_{n+1}^{\times} , \ i \neq 1 \text{ , tal que } s = t(1i) ,$$

donde $(1i)$ es la transposición que intercambia 1 e i .

Es claro que $(s,t) \in \underline{\underline{L}}_n$ implica $(t,s) \in \underline{\underline{L}}_n$, por lo tanto el grafo Γ_n es no orientado.

Designemos por $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ al grupo de todos los automorfismos del grafo Γ_n , es decir, al grupo de todas las aplicaciones biyectivas g en $\mathrm{Biy}(\mathfrak{S}_n)$ tales que

$$(s,t) \in \underline{\underline{L}}_n \Rightarrow (g(s),g(t)) \in \underline{\underline{L}}_n .$$

Además, denotemos por $B[\mathfrak{S}_n]$ al subgrupo del grupo $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ formado de las traslaciones $b_s : t \mapsto st$ $(s,t \in \mathfrak{S}_n)$.

Consideremos $t° = \underline{e}$, donde $\underline{e}$ es el elemento neutro del grupo $\mathfrak{S}_n$, como punto base del espacio geométrico $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n), \mathfrak{S}_n)$ y designemos por $K[\mathfrak{S}_n]$ al $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\Gamma_n)}(t°)$. Puesto que $B[\mathfrak{S}_n]$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$ que actúa transitivamente sobre $\mathfrak{S}_n$ se obtiene que $\mathrm{Aut}(\Gamma_n) =$ $= K[\mathfrak{S}_n]B[\mathfrak{S}_n]$.

LEMA 11. El grupo $K[\mathfrak{S}_n]$ consta de las conjugaciones $k_\sigma : t \mapsto \sigma t \sigma^{-1}$ $(t \in \mathfrak{S}_n)$ definidas para todo $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\sigma(1) = 1$. Por lo tanto $K[\mathfrak{S}_n]$ es isomorfo a $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Demostración: Sea $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\sigma(1) = 1$. La relación

$$\sigma t(1i)\sigma^{-1} = \sigma t \sigma^{-1}(1\sigma(i)) \qquad (i \in Z^{\times}_{n+1}) ,$$

implica que k_σ es un elemento de $\mathrm{Aut}(\Gamma_n)$. Además, como $k_\sigma(t^\circ) = t^\circ$ obtenemos que $k_\sigma \in K[\mathfrak{S}_n]$.

Por otra parte, cada elemento de $K[\mathfrak{S}_n]$ permuta entre sí a las transposiciones $(1i)$ para todo $i \in Z^{\times}_{n+1}$, $i \neq 1$, por lo tanto $K[\mathfrak{S}_n]$ posee a lo más $(n - 1)!$ elementos diferentes. Nótese que cada elemento de $K[\mathfrak{S}_n]$ que fija cada una de las transposiciones $(1i)$, $i \in Z^{\times}_{n+1}$, $i \neq 1$, se reduce a la aplicación identidad de $\mathfrak{S}_n$.

Q.E.D.

Observación. Del Lema precedente se infiere que

$$\mathrm{Aut}(\Gamma_n) = K[\mathfrak{S}_n] \ltimes B[\mathfrak{S}_n] \simeq \mathfrak{S}_{n-1} \ltimes \mathfrak{S}_n .$$

LEMA 12. Dos elementos s y t de $\mathfrak{S}_n$ pertenecen a la misma $K[\mathfrak{S}_n]$-órbita en $\mathfrak{S}_n$ sí y sólo si

(i) s y t son conjugados en $\mathfrak{S}_n$,

(ii) el orden del ciclo que contiene a 1 es el mismo para s y para t .

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

PROPOSICION 13. *El espacio geométrico* $(\mathrm{Aut}(\Gamma_n), \mathfrak{S}_n)$ *es un espacio de Gelfand con punto base* $t° = e$ *, denominado Biblioteca de la Margarita con* n *libros.*

Demostración: Nótese que

$$\forall (s,t) \in \mathfrak{S}_n^2 \ , \ \exists\, g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n) \ \text{ tal que } \ (s,t)g = (t,s)$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall\, (s,t) \in \mathfrak{S}_n^2 \ , \ \exists\, g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n) \ \text{ tal que } \ g^{-1}(s) = t \ \text{ y } \ g^{-1}(t) = s$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall (s,t) \in \mathfrak{S}_n^2 \ , \ \exists\, g \in \mathrm{Aut}(\Gamma_n) \ \text{ tal que } \ (b_{t^{-1}} g^{-1} b_s)(s^{-1}t) = t^{-1}s$$

y $$(b_{t^{-1}} g^{-1} b_s)(t°) = t°$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall\, r \in \mathfrak{S}_n \ , \ \exists\, h \in K[\mathfrak{S}_n] \ \text{ tal que } \ h(r) = r^{-1} \ .$$

Ahora bien, para cada $r \in \mathfrak{S}_n$ se tiene que r y r^{-1} verifican las condiciones del Lema precedente, lo cual demuestra la Proposición.

Q.E.D.

5.2. Caracteres de la Biblioteca de la Margarita con 4 libros.

El número de $K[\mathfrak{S}_4]$-órbitas en $\mathfrak{S}_4$ es 7. Sobre la figura 3 hemos representado el grafo Γ_4 , donde para cada elemento de $\mathfrak{S}_4$ hemos indicado el índice i de la $K[\mathfrak{S}_4]$-órbita en $\mathfrak{S}_4$ a la cual pertenece $(i \in Z_6)$.

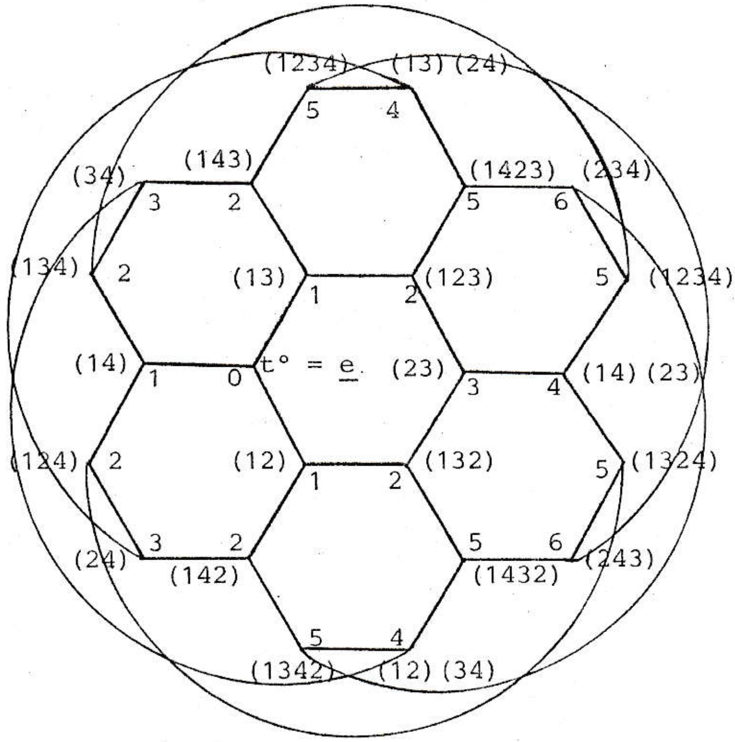
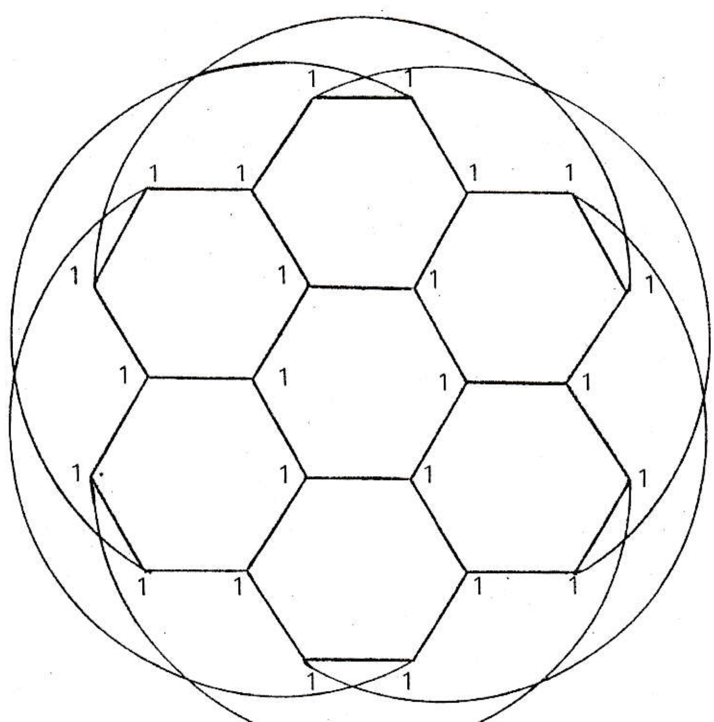


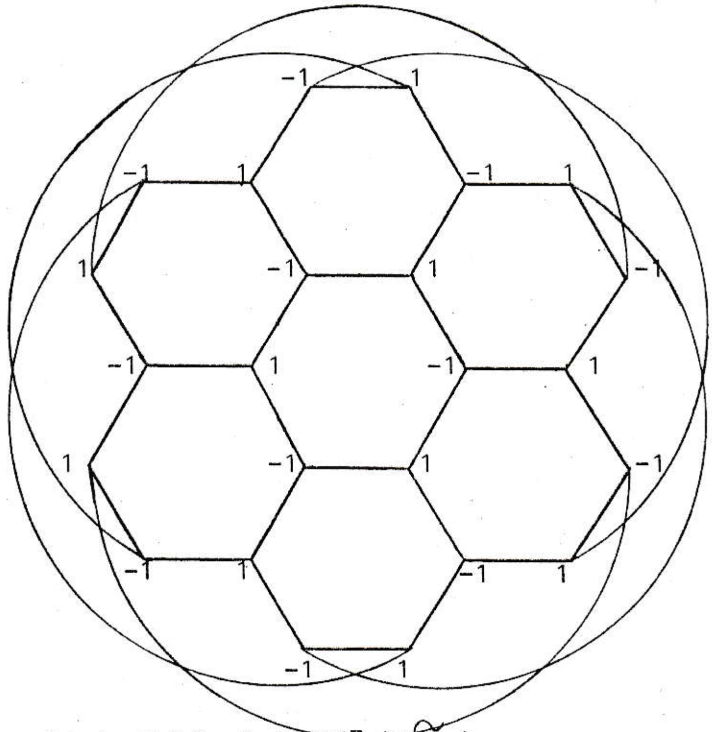
Figura 3. Grafo asociado a la Biblioteca de la Margarita con 4 libros.

En este caso obtenemos:

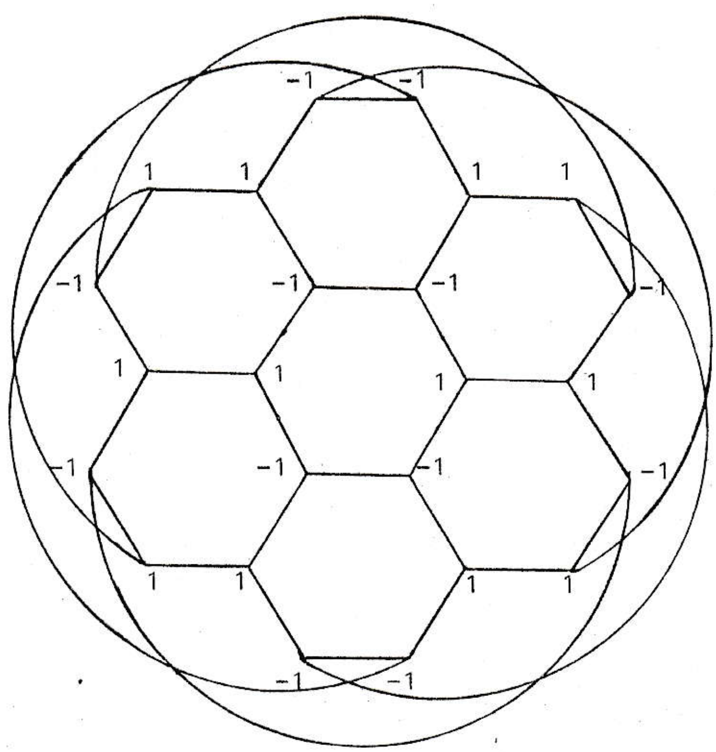
<u>Carácter</u> f_o <u>del espacio de Gelfand</u> $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4), \mathfrak{S}_4)$:



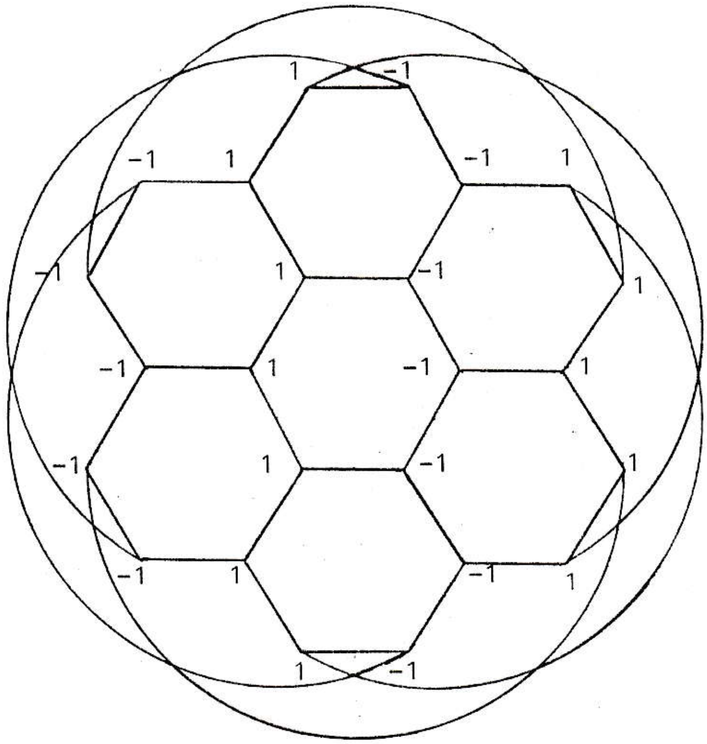
<u>Carácter</u> f_1 <u>del espacio de Gelfand</u> $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4), \mathfrak{S}_4)$:



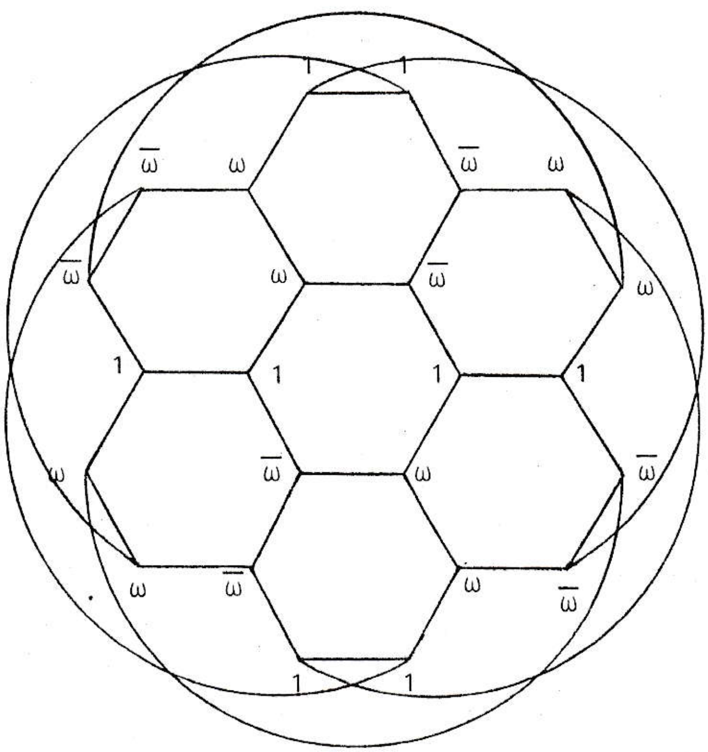
<u>Carácter</u> f_2 <u>del espacio de Gelfand</u> $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4), \mathfrak{S}_4)$:



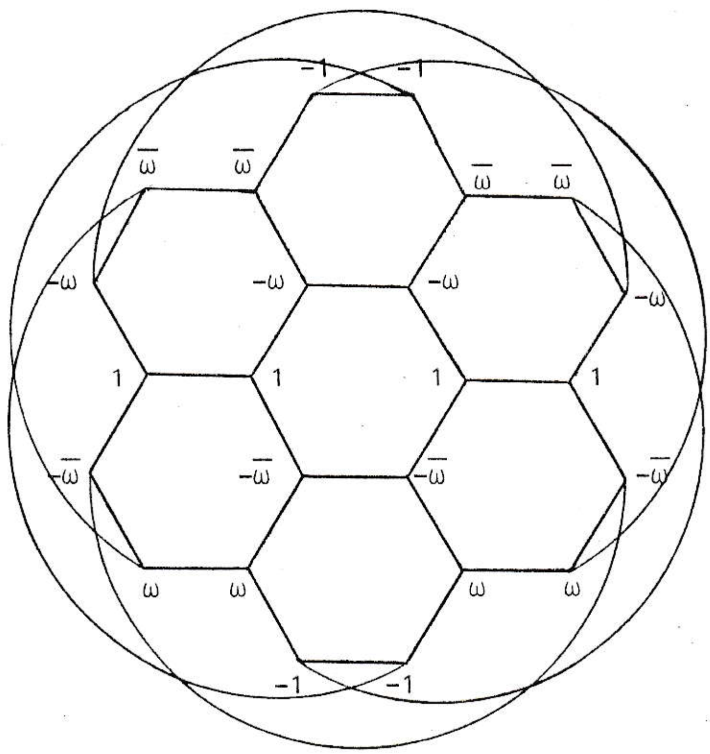
Carácter f_3 del espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4), \mathfrak{S}_4)$:



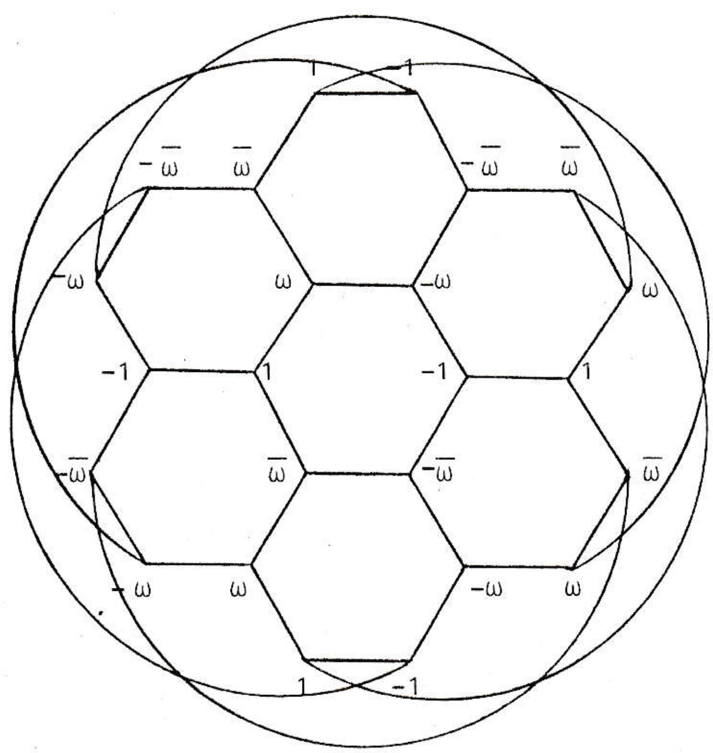
Carácter f_4 del espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4), \mathfrak{S}_4)$:



Carácter f_5 del espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4),\mathfrak{S}_4)$:



Carácter f_6 del espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4),\mathfrak{S}_4)$:



Más arriba se designa por ω a una raíz cúbica primitiva fija de la unidad.

Obtenemos así el

TEOREMA 18. Las representaciones irreductibles de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_4)$, asociadas a la acción de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_4)$ en $\mathfrak{S}_4$, están dadas por la tabla siguiente

$K[\mathfrak{S}_4]$-órbita en $\mathfrak{S}_4$ / función esférica	0	1	2	3	4	5	6	dimensión
ϕ_{α_o}	1	1	1	1	1	1	1	1
ϕ_{α_1}	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
ϕ_{α_2}	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	3
ϕ_{α_3}	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	3
ϕ_{α_4}	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	4
ϕ_{α_5}	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6
ϕ_{α_6}	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	6

Donde α_i es el carácter del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4),\mathfrak{S}_4)$ proporcionado por el carácter f_i del espacio de Gelfand $(\mathrm{Aut}(\Gamma_4),\mathfrak{S}_4)$.

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

CAPITULO IV. PROBLEMAS NO RESUELTOS

1. Plano de Poincaré finito.

1.1. Sea k el cuerpo finito con q elementos, k_2 la extensión de grado 2 de k, N_2 la norma de k_2 sobre k y F_2 el automorfismo de Frobenius de k_2 sobre k. Si k es de característica distinta de 2, entonces existe $a \in k$ tal que k_2 es cuerpo de descomposición del polinomio $p(x) = x^2 - a \in k[x]$. Si k es de característica 2, entonces existe $a \in k$ tal que k_2 es cuerpo de descomposición del polinomio. $p(x) = x^2 + x + a \in k[x]$.

Supongamos que k_2 es cuerpo de descomposición del polinomio $p(x) \in k[x]$ y elijamos una raíz $\varepsilon \in k_2$ de tal polinomio, entonces k_2 es un k-espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{1,\varepsilon\}$. Para cada $z \in k_2$ consideremos

$$z =: (\mathrm{Re}\, z) + (\mathrm{Im}\, z)\varepsilon \qquad (\mathrm{Re}\, z,\ \mathrm{Im}\, z \in k) .$$

El grupo $GL(2,k)$ de todos los automorfismos lineales del k-espa - cio vectorial k_2 es el producto de su subgrupo abeliano K formado de las multiplicaciones $m_z : x \mapsto zx$ $(x \in k_2)$ por los elementos z del grupo $k_2^\times$, y de su subgrupo B formado de los automorfismos lineales $b_w : x \mapsto (\mathrm{Re}\ x) + (\mathrm{Im}\ x)w$ $(x \in k_2)$ definidos para todo $w \in k_2 \setminus k$.

Designemos por $PGL(2,k)$ al grupo $Z(GL(2,k)) \setminus GL(2,k)$, donde denotamos por $Z(GL(2,k))$ al centro del grupo $GL(2,k)$. Nótese que

$$Z(GL(2,k)) = k^\times I_{k_2} ,$$

donde I_{k_2} es la aplicación identidad de k_2. Consideremos además

$$[g] := Z(GL(2,k))g \qquad (g \in GL(2,k)) .$$

Para un subgrupo H del grupo $GL(2,k)$ designaremos por $[H]$ al subgrupo del grupo $PGL(2,k)$ formado por los elementos $[h] \in PGL(2,k)$ con $h \in H$. Nótese que

$$PGL(2,k) = [K][B] .$$

1.2. <u>El espacio de Gelfand</u> $(PGL(2,k), [B])$.

1.2.1. Para cada $g \in GL(2,k)$ se tiene

$$[g] = [m_{g(1)}][b_{g(1)^{-1}g(\varepsilon)}] .$$

Por lo tanto, la acción de $PGL(2,k)$ en $[B]$ está dada por:

$$[b_w]\cdot[b_y] = [b_{(\mathrm{Re}\ y)+(\mathrm{Im}\ y)w}] \qquad (w,y \in k_2 \setminus k) ,$$

además

<u>Caso en que</u> k <u>es de característica distinta de</u> 2 :

$$[b_w]\cdot[m_z] = [b_{\frac{(\mathrm{Re}\ z)w+(\mathrm{Im}\ z)a}{(\mathrm{Im}\ z)w+(\mathrm{Re}\ z)}}] \qquad (w \in k_2\setminus k\ ,\ z \in k_2^\times)\ .$$

<u>Caso en que</u> k <u>es de característica</u> 2 :

$$[b_w]\cdot[m_z] = [b_{\frac{[(\mathrm{Re}\ z)+(\mathrm{Im}\ z)]w+(\mathrm{Im}\ z)a}{(\mathrm{Im}\ z)w+(\mathrm{Re}\ z)}}] \qquad (w \in k_2\setminus k\ ,\ z \in k_2^\times)\ .$$

Por otra parte, consideremos la aplicación biyectiva ψ de $[B]$ sobre $k_2\setminus k$ definida por

$$\psi([b_y]) = y \qquad (y \in k_2\setminus k)\ .$$

Por transporte de estructura, vía la aplicación biyectiva ψ , se provee a $k_2\setminus k$ de una estructura de $PGL(2,k)$-espacio derecho transitivo. El espacio geométrico $(PGL(2,k),k_2\setminus k)$ así obtenido es isomorfo al espacio geométrico $(PGL(2,k),[B])$. El $PGL(2,k)$-isomorfismo está dado, obviamente, por la aplicación biyectiva ψ . La acción de $PGL(2,k)$ en $k_2\setminus k$ está dada, explícitamente, por:

$$w\cdot[b_y] = (\mathrm{Re} y) + (\mathrm{Im} y)w \qquad (w,y \in k_2\setminus k)\ ,$$

además

<u>Caso en que</u> k <u>es de característica distinta de</u> 2 :

$$w\cdot[m_z] = \frac{(\mathrm{Re}\ z)w + (\mathrm{Im}\ z)a}{(\mathrm{Im}\ z)w + (\mathrm{Re}\ z)} \qquad (w \in k_2\setminus k\ ,\ z \in k_2^\times)\ .$$

<u>Caso en que</u> k <u>es de característica</u> 2 :

$$w\cdot[m_z] = \frac{[(\mathrm{Re}\ z) + (\mathrm{Im}\ z)]w + (\mathrm{Im}\ z)a}{(\mathrm{Im}\ z)w + (\mathrm{Re}\ z)} \qquad (w \in k_2\setminus k\ ,\ z \in k_2^{\times})\ .$$

Aún más, por transporte de estructura vía la aplicación biyectiva ψ se provee a $k_2\setminus k$ de una estructura de grupo, el grupo $(k_2\setminus k)^{\bullet}$ así obte - nido es isomorfo al grupo $[B]$. Explícitamente obtenemos

$$w\cdot y = (\mathrm{Re}y) + (\mathrm{Im}y)w \qquad (w,y \in k_2\setminus k)\ .$$

1.2.2. Consideremos las aplicaciones:

$$n : k_2\setminus k \to k^* := (k \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}\ ,$$

definida por

$$n(w) = \begin{cases} N_2\left(\dfrac{w - \varepsilon}{w - F_2(\varepsilon)}\right) & \text{si} \quad w \in k_2\setminus(k \cup \{F_2(\varepsilon)\}) \\ \\ \infty & \text{si} \quad w = F_2(\varepsilon) \end{cases}\ ,$$

$$d : (k_2\setminus k)^2 \to k^*\ ,$$

definida por

$$d(z,w) = n(z\cdot w^{-1}) = \begin{cases} N_2\left(\dfrac{z - w}{z - F_2(w)}\right) & \text{si} \quad z \neq F_2(w) \\ \\ \infty & \text{si} \quad z = F_2(w) \ , \end{cases}$$

para todo $(z,w) \in (k_2\backslash k)^2$.

Las órbitas de $[K]$ en $k_2\backslash k$ están dadas por

$$\nu_r = \{w \in k_2\backslash k \,|\, n(w) = r\} \qquad (r \in k^*) \ .$$

En efecto, la familia $\{\nu_r\}_{r\in k^*}$ es una partición $[K]$-invariante de $k_2\backslash k$ tal que

$$|\nu_o| = 1 \ ,$$

$$|\nu_\infty| = 1 \ ,$$

$$|\nu_r| = q + 1 \qquad (r \in k^\times\backslash\{1\}) \ ,$$

además

$$|\mathrm{Stab}_{[K]}(\varepsilon)| = |[K]| = q + 1 \ ,$$

$$|\mathrm{Stab}_{[K]}(F_2(\varepsilon))| = |[K]| = q + 1 \ ,$$

$$|\mathrm{Stab}_{[K]}(w)| = 1 \qquad (w \in k_2\backslash k \ , \ w \neq \varepsilon \ , \ F_2(\varepsilon)) \ .$$

Por consiguiente, las órbitas de $PGL(2,k)$ en $(k_2\backslash k)^2$ están dadas por

$$O_r = \{(z,w) \in (k_2\backslash k)^2 \,|\, d(z,w) = r\} \qquad (r \in k^*) \ ,$$

luego

$$|O_o| = (q^2 - q) ,$$

$$|O_\infty| = (q^2 - q) ,$$

$$|O_r| = (q^2 - q)(q + 1) \qquad (r \in k^\times \setminus \{1\}) .$$

Como la aplicación d es simétrica obtenemos que el espacio geométrico $(PGL(2,k), k_2\setminus k)$ es un espacio de Gelfand con punto base $w_o = \varepsilon$ denominado plano de Poincaré finito. La aplicación d se denomina pseudo distancia hiperbólica finita.

Designemos por $\partial[(k_2\setminus k)^\bullet]$ al subgrupo derivado del grupo $(k_2\setminus k)^\bullet$. Se tiene

$$\partial[(k_2\setminus k)^\bullet] = \{w \in k_2\setminus k \,|\, \mathrm{Im}\, w = 1\} .$$

Además

$$\partial[(k_2\setminus k)^\bullet] \setminus (k_2\setminus k)^\bullet \simeq k^\times .$$

Obtenemos así la

PROPOSICION 14. Las aplicaciones de $(k_2\setminus k)^2/PGL(2,k)$ en $\mathbb{C}$ definidas por

$$\alpha_\chi(O_r) = \frac{1}{|\nu_r|} \sum_{w \in \nu_r} \chi(\mathrm{Im}\, w)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r = 0 \\ \dfrac{1}{q+1} \displaystyle\sum_{N_2\left(\frac{w-\varepsilon}{w-F_2(\varepsilon)}\right)=r} \chi(\mathrm{Im}\, w) & \text{si} \quad r \in k^{\times}\setminus\{1\} \\ \chi(-1) & \text{si} \quad r = \infty \,, \end{cases}$$

para todo $\chi \in (k^{\times})^{\wedge}$ módulo $\chi \sim \chi^{-1}$, proporcionan caracteres del álgebra conmutante asociada al espacio de Gelfand $(PGL(2,k), k_2\setminus k)$.

Demostración: Es inmediata.

Q.E.D.

1.2.3. Caso del espacio de Gelfand $(PGL(2,k), k_2\setminus k)$ cuando $q = 3$.

La extensión cuadrática k_2 del cuerpo k es, en este caso, cuerpo de descomposición del polinomio $p(x) = x^2 + 1 \in k[x]$. El grafo conexo $\Gamma = (k_2\setminus k, \underline{\underline{L}})$, donde $\underline{\underline{L}}$ es el sunconjunto del conjunto $\underline{\underline{P}}_2(k_2\setminus k)$ de todos los subconjuntos de cardinal 2 de $k_2\setminus k$ definido por

$$\{z,w\} \in \underline{\underline{L}} \Longleftrightarrow d(z,w) = -1 \,,$$

es un octaedro. Explícitamente obtenemos

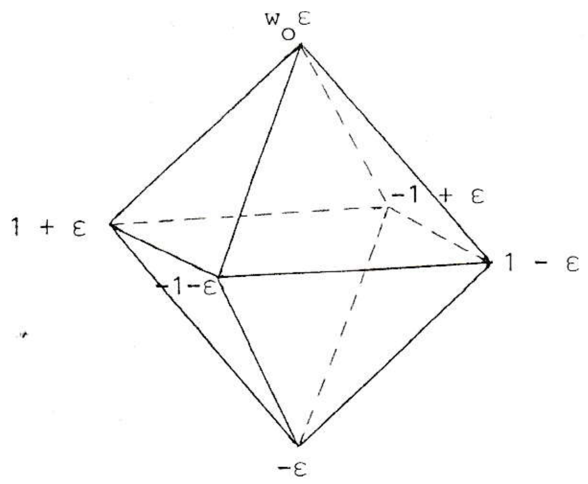
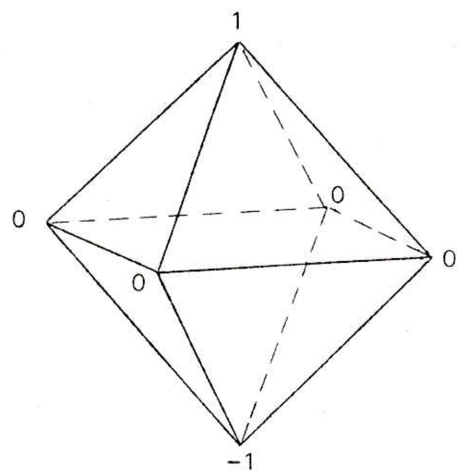


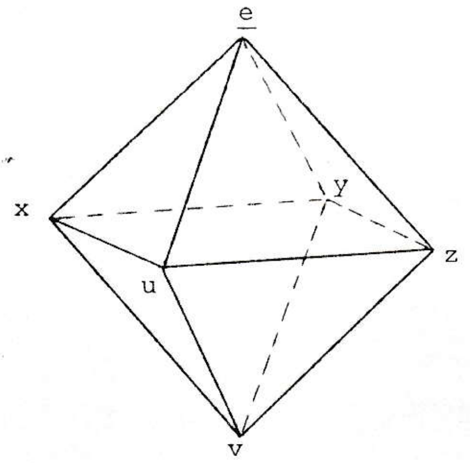
Figura 4. Octaedro.

Nótese que la distancia geodésica del grafo conexo Γ es un invariante que clasifca las órbitas de PGL(2,k) en $(k_2\backslash k)^2$. La Proposición 14 proporciona la función esférica no trivial siguiente



la dimensión de la representación correspondiente es 3.

Por otra parte, consideremos



Las operaciones binarias admisibles en el octaedro quedan determinadas por la tabla siguiente

		0	1				2
	·	$\underline{e}$	x	y	z	u	v
0	$\underline{e}$	$\underline{e}$	x	y	z	u	v
1	x	x	$\underline{e}$	$\underline{e}$	$\underline{e}$	$\underline{e}$	x
	y	y	u	z	y	z	y
	z	z	v	v	v	v	z
	u	u	y	x	u	x	u
2	v	v	z	u	x	y	$\underline{e}$

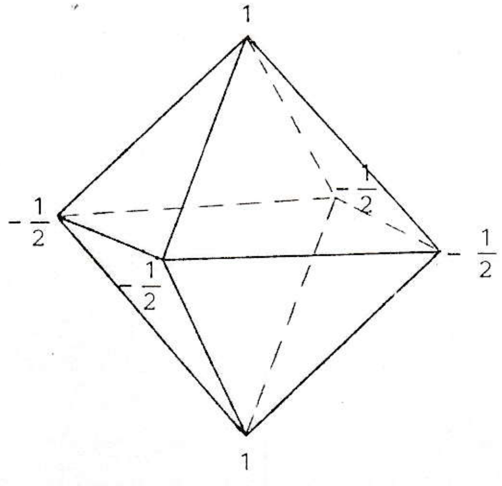
para cada permutación de cada columna del rectángulo achurado. En particular obtenemos

		0	1				2
	•	$\underline{e}$	x	y	z	u	v
0	$\underline{e}$	$\underline{e}$	x	y	z	u	v
	x	x	y	$\underline{e}$	v	z	u
1	y	y	$\underline{e}$	x	u	v	z
	z	z	u	v	$\underline{e}$	x	y
	u	u	v	z	y	$\underline{e}$	x
2	v	v	z	u	x	y	$\underline{e}$

la cual es una estructura de grupo no abeliano, a saber, el grupo simétrico $\mathfrak{S}_3$. Nótese que el grupo $(k_2\backslash k)^{\bullet}$ es, en este caso, el grupo simé - trico $\mathfrak{S}_3$. Además

		0	1				2
	•	$\underline{e}$	x	y	z	u	v
0	$\underline{e}$	$\underline{e}$	x	y	z	u	v
	x	x	u	v	y	$\underline{e}$	z
1	y	y	v	x	$\underline{e}$	z	u
	z	z	y	$\underline{e}$	u	v	x
	u	u	$\underline{e}$	z	v	x	y
2	v	v	z	u	x	y	$\underline{e}$

la cual es una estructura de grupo abeliano, a saber, el grupo $Z_3^+ \times Z_2^+$. Tal estructura de grupo proporciona todas las funciones esféricas del espacio de Gelfand $(PGL(2,k),k_2\backslash k)$ cuando $q = 3$. La función esférica no trivial restante está dada por



la dimensión de la representación correspondiente es 2.

<u>Observación</u>. Nótese que cuando $q = 3$, el grupo $PGL(2,k)$ actúa en el octaedro como el subgrupo de las rotaciones de $SO(3,\mathbb{R})$ que transforman al octaedro en si mismo (el centro del octaedro se considera en el origen del espacio $\mathbb{R}^3$) .

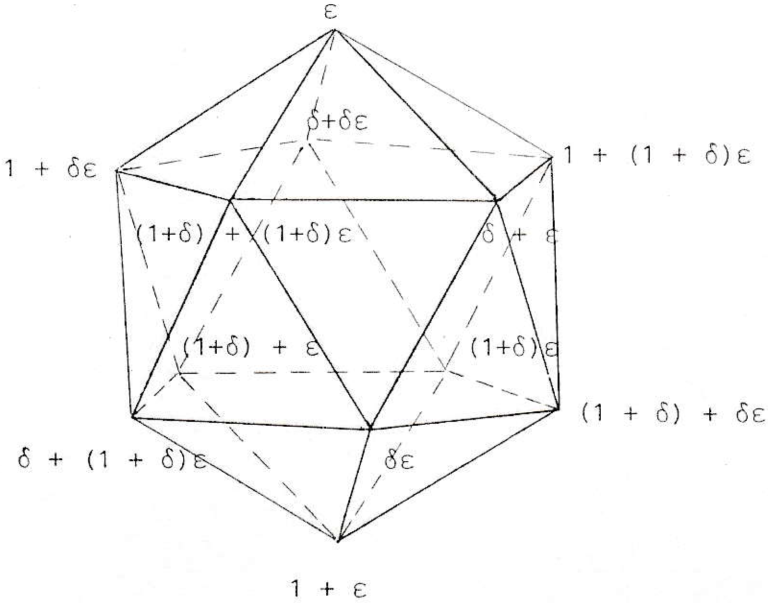
1.2.4. <u>Caso del espacio de Gelfand</u> $(PGL(2,k),k_2\backslash k)$ <u>cuando</u> $q = 4$.

La extensión cuadrática k del cuerpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es cuerpo de descomposición del polinomio $p(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$; sea $\delta \in k$ una raíz de tal polinomio. Por otra parte, la extensión cuadrática k_2 del cuerpo k es cuerpo de descomposición del polinomio
$p(x) = x^2 + x + \delta \in k[x]$; sea $\varepsilon \in k_2$ una raíz de tal polinomio.

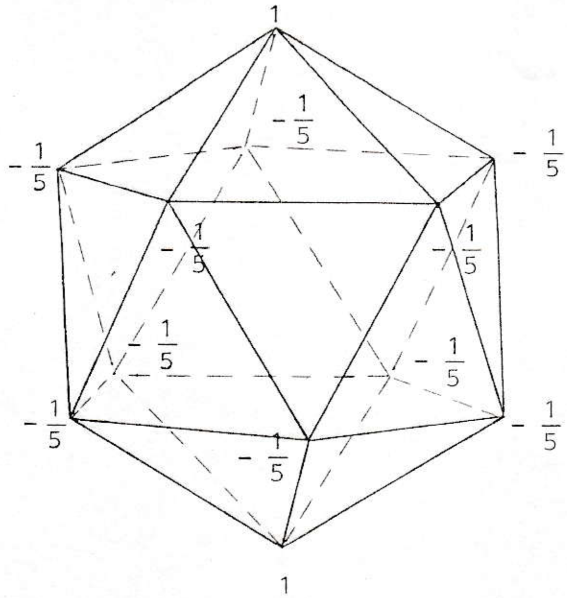
El grafo conexo $\Gamma = (k_2 \setminus k, \underline{\underline{L}})$, donde $\underline{\underline{L}}$ es el subconjunto de $\underline{\underline{P}}(k_2 \setminus k)$ definido por

$$\{z,w\} \in \underline{\underline{L}} \Leftrightarrow d(z,w) = \delta \ ,$$

es un <u>icosaedro</u>. Explícitamente obtenemos



Nótese que la distancia geodésica del grafo Γ es un invariante que clasifica las órbitas de PGL(2,k) en $(k_2 \setminus k^2)$. La Proposición 14 proporciona la función esférica no trivial ϕ_{α_3} (ver párrafo 5.2.2. del Capítulo I):



la dimensión de la representación correspondiente es 5.

Sea f un carácter del espacio de Gelfand $(PGL(2,k), k_2\setminus k)$ cuando $q = 4$. El orden del subgrupo cíclico finito $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathbb{C}^\times$ es un divisor de 12. Ahora bien, como $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\zeta_{12})$, donde ζ_{12} designa al grupo de las raices 12-ésimas de la unidad, obtenemos que las funciones esféricas ϕ_{α_1}, ϕ_{α_2} (ver párrafo 5.2.2. del Capítulo I) no son del tipo $M_{\Omega(w_o,?)}(f)$ para algún carácter f del espacio de Gelfand considerado. En particular obtenemos que las estructuras del grupo abeliano de orden 12 no son admisibles.

<u>Observación</u>. Nótese que, cuando $q = 4$, el grupo $PGL(2,k)$ actúa en el icosaedro como el subgrupo de las rotaciones de $SO(3,\mathbb{R})$ que transforman al icosaedro en si mismo (el centro del icosaedro se considera en el origen del espacio $\mathbb{R}^3$).

Denominamos serie principal de representaciones del espacio de Gelfand (G,X) a la familia de representaciones irreductibles de G, asociadas a la acción de G en X, proporcionadas por caracteres del espacio de Gelfand (G,X). Un problema no resuelto interesante consiste en determinar una fórmula que proporcione las representaciones irreductibles de G, asociadas a la acción de G en X, que no pertenecen a la serie principal de representaciones del espacio de Gelfand (G, X).

2. Comentarios.

Sea (G,X) un espacio de Gelfand finito. Las estructuras de grupo admisibles en X constituyen una subfamilia "muy pequeña" de la familia de operaciones binarias admisibles en X. Un problema no resuelto apasionante consiste en precisar la generalidad del método de los caracteres de un espacio de Gelfand, es decir, establecer si cada carácter del espacio de Gelfand (G,X) es necesariamente un carácter de alguna estructura de grupo admisible en X y precisar tal estructura de grupo. El problema precedente aparece ya, de manera no trivial, en la Biblioteca de la Margarita con 4 libros (ver párrafo 5.2. del Capítulo III).

Por otra parte, destacamos que el método de los caracteres de un espacio de Gelfand trasciende el caso finito y puede ser aplicado a espacios de Gelfand discretos como por ejemplo un árbol homogéneo o más aún a cualquier espacio de Gelfand en el cual nuestra fórmula "tenga sentido".

BIBLIOGRAFIA

[1] BIGGS, N., Algebraic graph theory. Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics 67, 1974.

[2] COXETER, H.S.M., Regular polytopes. Dover, New York, 1973.

[3] DUNKL, C., Orthogonal functions on some permutation groups. Proceedings of Symposia in Pure Math. A.M.S., 34, Providence, R.I., 1979.

[4] ELGUETA, M., Análisis harmónico en grafos distalmente transitivos. Sem. Repr. Grupos y Anal. Harm. 1983, Depto. Mat. Univ. de Chile, Santiago, 1984.

[5] FEJES-TOTH, L., Regular figures. Pergamon Press, Oxford, 1964.

[6] GARCIA-ZAMBRANO, S., Descomposición de la representación regular del grupo de Heisenberg. Sem. Repr. Grupos y Anal. Harm. 1982, Depto. Mat. Univ. de Chile, Santiago, 1983.

[7] GODEMENT, R., Introduction aux travaux de A. SELBERG. Sém. BOURBAKI, 144, Paris, 1957.

[8] HILBERT, D., COHN-VOSSEN, S., Geometry and the imagination. Chelsea, New York, 1952.

[9] JOHNSON, R., LEON, J., Descomposición de la representación natural del grupo de movimientos rígidos del plano euclidiano finito. Sem. Repr. Grupos, 1981. Inst. Mat. Univ. Católica de Valparaíso, Valparaíso, 1982.

[10] LETAC, G., Les fonctions sphériques d'un couple de GELFAND simétrique et les chaînes de MARKOV. Adv. Appl. Prob. 14, p. 272-294, 1982.

[11] LETAC, G., TAKACS, L., Random walks on the m-dimensional cube. J. reine angew. Math. 310, p. 187-195, 1979.

[12] SERRE, J.P., Representations linéaires des groupes finis. Hermann, París, 1978.

[13] STANTON, D., Some q-Krawtchouk polynomials on CHEVALLEY groups. Amer. J. Math. 102, p. 625-662, 1980.

[14] SOTO-ANDRADE, J., Teoría geométrica de representaciones de grupos. III Coloquio Latinoamericano de Algebra. 1983, Depto. Mat. Univ. de Chile, Santiago, 1984.

[15] SOTO-ANDRADE, J., En torno a las funciones esféricas (caso finito). Sem. Repr. Grupos y Anal. Harm. 1983, Exps. 1 y 3. Depto. Mat. Univ. de Chile, Santiago, 1984.

[16] YCART, B., Chaînes de MARKOV sur des espaces homogènes finis. Thèse 3^{e} cycle. Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1983.