

UCH-FC  
MAG-F  
S 718  
C. 1



# Predicciones de la teoría efectiva de campos masivos de inflación cósmica

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias con Mención en Física  
Facultad de Ciencias

por

**Alex Soto Villarroel**

Noviembre, 2015

Director de Tesis: **Dr. Gonzalo Palma**

FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN  
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Alex Soto Villarroel**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Físicas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 2 de Noviembre de 2015.

**Director de Tesis**

Dr. Gonzalo Palma

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'G. Palma', written over a horizontal line.

**Comisión de Evaluación de la Tesis**

Dr. Benjamin Koch

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'B. Koch', written over a horizontal line.

Dr. Domenico Sapone

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'D. Sapone', written over a horizontal line.

Dr. Nelson Zamorano (Presidente)

A handwritten signature in blue ink, appearing to be 'N. Zamorano', written over a horizontal line.

בְּרֵאשִׁית בָּרָא אֱלֹהִים אֶת הַשָּׁמַיִם וְאֶת הָאָרֶץ:

## BIOGRAFÍA



Nacido el 20 de Noviembre de 1989 en la ciudad de Santiago, Chile.

Cursó la enseñanza básica hasta sexto grado en el Colegio Polivalente Adventista Santiago Sur, hasta que se incorporó al Instituto Nacional en el 2002, donde completó la enseñanza media en el 4<sup>o</sup>L, curso matemático, el año 2007.

En el 2008 ingresa a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile para cursar sus estudios de Licenciatura en Ciencias con mención en física, que finaliza en 2012. Es en 2013 que prosigue sus estudios en el Magíster en Ciencias Físicas dentro de la misma facultad orientado a la investigación en física teórica, desarrollando su trabajo hasta la fecha, en inflación cósmica y origen del universo.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, como creyente, agradezco a Dios por poder investigar en lo profundo de la naturaleza y comprender en parte el universo.

También mis mayores agradecimientos a mi madre, por todo su apoyo no sólo durante este trabajo de tesis, sino que en toda la vida, lo cual es invaluable, no tengo palabras para describirlo, merece mucho más que palabras. Tengo una deuda enorme para con ella.

Agradezco a Gonzalo Palma, por permitirme aprender demasiado en inflación, por guiar mi trabajo investigativo, resolver mis dudas, correcciones y todo lo que significa el trabajo científico en esta área.

Naturalmente debo agradecer a Sander Mooij y Grigoris Panotopoulos, ya que dentro de este trabajo de tesis se incluye parte de nuestro trabajo en conjunto con Gonzalo Palma acerca de features en el power spectrum y bispectrum, así que mil gracias por las discusiones acerca de este tema.

Debo agradecer a la Pauli porque sin tener ni la menor idea de la física detrás de este trabajo se tomó el tiempo de leer esta tesis y corregir detalles de escritura y demases que uno suele pasar por alto. Infinitamente agradecido, por darte tu tiempo, aún cuando tienes muchas cosas que hacer, así que créditos para ti, eres la mejor.

También, mención a las personas que contribuyeron no en el trabajo de tesis propiamente tal, sino que a despejarme de tanta física. Gracias a mis amigos de la iglesia, de la u, alumnos y profesores del CASS, familiares, etc.

Agradecido también de los profesores miembros de la comisión evaluadora por sus comentarios, Benjamin Koch, Domenico Sapone y Nelson Zamorano.

Finalmente, esta tesis ha sido posible mediante el apoyo de CONICYT mediante su Beca de Magister Complementaria 2013, a quienes agradezco su financiamiento.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Outline . . . . .	8
<b>2. Cosmología</b>	<b>10</b>
2.1. Elementos básicos de la cosmología estándar . . . . .	10
2.2. Problemas en la cosmología estándar . . . . .	13
2.2.1. El problema del horizonte . . . . .	13
2.2.2. El problema de la planitud . . . . .	15
<b>3. Inflación cósmica</b>	<b>19</b>
3.1. Inflación y parámetros de slow roll . . . . .	19
3.1.1. ¿Cómo soluciona inflación los problemas anteriores? . . . . .	22
3.2. Inflación desde campos escalares . . . . .	23
3.2.1. Perturbaciones . . . . .	27
3.2.2. Modelo $P(X, \phi)$ . . . . .	31
3.2.3. Cuantización de la acción cuadrática . . . . .	33
3.2.4. Espectro de Potencia y Biespectro . . . . .	36
<b>4. Teoría Efectiva de Campos</b>	<b>41</b>
4.1. EFT en inflación . . . . .	42

4.2. Multi-field inflation y EFT . . . . .	45
<b>5. Modos B y la velocidad del sonido de las fluctuaciones primordiales</b>	<b>52</b>
5.1. Tensor to Scalar Ratio . . . . .	55
5.1.1. Cálculo del espectro de potencia . . . . .	56
5.1.2. Cálculo de $r$ . . . . .	60
5.2. Restricciones para la velocidad del sonido . . . . .	64
5.2.1. Caso en que $c_s$ es constante . . . . .	64
5.2.2. Caso en que $c_s$ varía . . . . .	67
5.2.3. Inclusión del running del índice espectral $\alpha$ . . . . .	68
5.3. Parametrizando Física UV . . . . .	71
<b>6. Parametrizando sobresaltos en el espectro primordial</b>	<b>75</b>
6.1. Casos $\epsilon$ y $s$ . . . . .	77
6.1.1. Sobresaltos en el espectro de potencia . . . . .	81
6.1.2. Sobresaltos en el biespectro . . . . .	83
6.2. Caso general . . . . .	87
6.3. Ejemplos de validez . . . . .	89
6.3.1. $P(X, \phi)$ . . . . .	89
6.3.2. Multifield . . . . .	91
<b>7. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Cálculo del espectro de potencia UV</b>	<b>101</b>
<b>B. Cálculo de sobresaltos en el biespectro</b>	<b>110</b>
B.1. Sobresaltos debido a cambios repentinos en la velocidad del sonido . .	110

B.2. Sobresaltos debido a cambios repentinos de la tasa de expansión . . .	113
--	-----

# Índice de figuras

2.1. Diagrama del problema cosmológico del horizonte . . . . .	15
3.1. Diagrama Inflacionario . . . . .	24
5.1. Curva de nivel para $r$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ $n^{\circ}1$ . . . . .	53
5.2. Curva de nivel para $r$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ $n^{\circ}2$ . . . . .	54
5.3. Curva de nivel para $r$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ $n^{\circ}3$ con $s = 0$ . . . . .	65
5.4. Curva de nivel para $r$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ $n^{\circ}4$ que satisfacen la relación $r = -8n_t$ . . . . .	66
5.5. Curva de nivel para $s_0$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ para el caso $r = 0.1$ . . . . .	67
5.6. Curva de nivel para $\lambda$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ para el caso $r = 0.1$ . . . . .	68
5.7. Curva de nivel para $r$ en el plano $\epsilon$ - $c_s$ $n^{\circ}5$ considerando las restricciones debidas a $\alpha$ . . . . .	70
6.1. Gráfico de $\eta - \eta_0$ y $\frac{\alpha}{2} \frac{d\theta}{dN}$ como funciones de $N$ para dos modelos de $P(X, \phi)$ . . . . .	92
6.2. Gráfico de $\eta - \eta_0$ y $\frac{\alpha}{2} \frac{d\theta}{dN}$ como funciones de $N$ para dos modelos de dos campos. . . . .	96

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio dentro del marco de Teoría Efectiva de Campos sobre inflación. Se establecen cotas inferiores a la velocidad del sonido  $c_s$  a partir del valor del tensor to scalar ratio. Por otro lado, encontramos que una confirmación de la relación de consistencia  $r = -8n_t$ , entre el tensor to scalar ratio y el índice espectral tensorial  $n_t$  no es suficiente para descartar modelos no canónicos de inflación, donde se tiene que la velocidad del sonido  $c_s \neq 1$ . Para poder discriminar entre un modelo canónico y uno que no lo es, se debe emplear parámetros adicionales, como el running del índice espectral  $\alpha$ . Además, se estudian los efectos provenientes de operadores UV que aparecen en casos donde  $c_s$  es diferente de la unidad, mostrando como cambia la relación entre  $r$  y  $c_s$ . Así, encontramos que grados de libertad pesados que interactúan con las fluctuaciones de curvatura producen cotas mucho más fuertes.

Por otro lado, se estudia la aparición de sobresaltos (features) en el espectro primordial. Mostramos que dos fuentes que pueden producir sobresaltos son una variación repentina de la velocidad del sonido y un cambio repentino en la tasa de expansión del background. Se analizan sus efectos por separado y se propone una relación que une estas dos situaciones, permitiendo estudiar la aparición de sobresaltos debido a ambas fuentes en simultáneo. Así, obtenemos una relación de consistencia dependiente de un sólo parámetro, proveniente de nuestra relación propuesta, entre la forma y tamaño de los sobresaltos en el biespectro y sobresaltos en el espectro de potencia. Finalmente, dado que se propone una expresión matemática, estudiamos mediante métodos numéricos dos modelos de inflación,  $P(X)$  y múltiples campos, la validez de la relación propuesta.

## ABSTRACT

In this work a study about inflation within the framework of Effective Field Theory is presented. It is set lower bounds to the speed of sound from the tensor to scalar ratio value. On the other hand, we find a confirmation of the consistency relation  $r = -8n_t$ , between the tensor to scalar ratio and spectral index tensor  $n_t$  is not enough to rule out non-canonical models of inflation, where the speed of sound  $c_s \neq 1$ . To discriminate between a canonical model and one that is not, we should use additional parameters, such as the running of the spectral index  $\alpha$ . In addition, we study the effects from UV operators which appear in cases where  $c_s$  is different from unity, showing how the relation between  $r$  and  $c_s$  changes. Thus, we find heavy degrees of freedom interacting with curvature fluctuations produce stronger bounds.

On the other hand, the appearance of features in the primordial spectrum is studied. We show that two sources that can produce features are a sudden change in the speed of sound and a sudden change in the rate of expansion of the background. Its effects are analyzed separately and a relation that links these two situations is presented, allowing to study the appearance of features due to both sources simultaneously. Thus, we get a consistency relation which depends on a single parameter, which comes from our relation proposed, between the shape and size of features in the bispectrum and features in the power spectrum. Finally, since a mathematical expression is proposed, we study the validity of the proposed relation, using numerical methods, two models of inflation,  $P(X)$  and multi-field.

## Notación y Convenciones

Usaremos  $\hbar = c = M_{Pl}^2 = 1$ , donde  $\hbar$  corresponde a la constante de Planck,  $c$  la velocidad de la luz y  $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$  es la masa de Planck reducida.

La signatura de la métrica será  $(- + ++)$ .

Denotaremos por  $t$  el tiempo y  $\tau$  el tiempo conforme.

A su vez, denotaremos la derivada de una cantidad  $A$  respecto a  $t$  de la forma  $\dot{A}$  y la derivada respecto a  $\tau$  de la forma  $A'$ .

Los elementos en negrita ( $\mathbf{r}$ ) representarán cantidades vectoriales.

Finalmente, los índices griegos  $\mu, \nu, \dots$  corresponden a las cuatro coordenadas espacio temporales, tomadas como 0,1,2,3. Usaremos siempre que la coordenada 0 corresponde al tiempo  $t$ . Mientras que los índices latinos  $i, j, \dots$  corresponden solamente a las coordenadas espaciales.

# Capítulo 1

## Introducción

Una de las características del ser humano es su curiosidad y capacidad de preguntarse por su existencia, orígenes, tanto de sí mismo como de aquello que le rodea. Es en ese espíritu que se tienen diferentes visiones cosmológicas que tienen su origen en diversas fuentes. Si bien es cierto las preguntas existen desde hace mucho tiempo, la perspectiva de la cosmología desde el punto de vista científico es bastante reciente, por tanto, se mantiene como un campo en constante desarrollo, a la vez que hoy presenta un auge debido a la creciente cantidad de experimentos que permiten obtener un gran número de datos en la observación del universo.

Uno de los hechos importantes para el inicio de la formalización de la cosmología física lo constituye la resolución de las ecuaciones de Einstein para relatividad general por parte de Friedmann [1], y de forma independiente por Lemaître [2], donde se mostraba que el universo se encontraba en expansión. De esta manera, se establece el Big-Bang como modelo cosmológico para el origen y evolución del universo, que muestra que en los primeros instantes del universo, éste era mucho más denso y caliente que hoy. En este escenario, las interacciones entre partículas eran mayores y más energéticas, teniéndose que en principio, los fotones se hallaban acoplados al

resto de materia. Luego, en un instante posterior estos fotones se desacoplaron de la materia pudiendo viajar libremente por el universo.

Las observaciones de Hubble [3] en 1929 sobre el alejamiento de las galaxias y el descubrimiento del fondo cósmico de microondas (en inglés Cosmic Microwave Background, de aquí en adelante CMB), el cual es el residuo de radiación proveniente de la época en que los fotones se desacoplaron de la materia, en 1965 por Wilson y Penzias [4] suponen evidencia experimental para el modelo del universo en expansión.

Aún cuando la evidencia experimental favorece el paradigma del Big-Bang, la teoría deja algunos aspectos sin resolver, dado que requería condiciones iniciales muy particulares para que pudiera observarse el universo tal como se lo ve hoy, dando origen al problema de la planitud y el problema cosmológico del horizonte.

El problema de la planitud, asociado a un problema del ajuste fino, está relacionado con el hecho de que las mediciones actuales indican que el universo debe ser plano [5], es decir, donde se cumple el quinto postulado de Euclides. Sin embargo, para que se de este tipo de universo las condiciones iniciales debieron ser muy particulares, puesto que de otro modo resultaría en un universo con curvatura. Por otro lado, el problema cosmológico del horizonte consiste en el hecho de que dos puntos opuestos vistos desde la Tierra, que se encuentran a la distancia más alejada, presentan homogeneidad en la temperatura. Considerando que la edad del universo estimada es de 13.7 mil millones de años [5], no existe forma en que éstos puntos opuestos estuvieran en contacto causal para lograr encontrarse en equilibrio térmico.

Un trabajo de 1980 realizado por Starobinsky [6] propone que correcciones cuánticas evitarían la singularidad inicial en el Big Bang mediante un universo que se expande exponencialmente. Mientras que en 1981, Alan Guth [7], propone un mecanismo para resolver los problemas del horizonte y de la planitud, donde se experimenta un periodo temprano de expansión acelerada del universo, el cual se desarrolla de forma exponencial y que ocurre junto a un super enfriamiento del universo. Es así como se presenta un universo en un estado de falso vacío, donde mediante efecto túnel algunas regiones pasan a un estado de vacío verdadero, teniéndose burbujas de este vacío real. Allí, estas burbujas experimentan una transición de fase de alta temperatura a baja temperatura, lo que origina esta expansión acelerada en cada una de estas burbujas de vacío verdadero.

La idea entregada por Guth, a la cual llamamos inflación, no sólo resuelve los problemas citados, sino que además es capaz de dar respuesta al por qué no se observarían hoy monopolos magnéticos. Por ejemplo, la inflación propuesta puede solucionar el problema del horizonte sacando fuera de éste puntos que estuvieron causalmente conectados, de modo que cuando vuelven a entrar ya están termalizados por haber tenido un contacto previo.

Sin embargo, la idea de Guth contenía un problema en el hecho de que la tasa de nucleación, es decir, la velocidad de formación de estas burbujas de vacío verdadero, es muy lenta como para alcanzar el valor necesario para terminar esta inflación [8]. Por otro lado, el modelo propuesto no permite un recalentamiento apropiado para la generación de estructuras posterior a la expansión, puesto que en la formación de burbujas éstas no producen ninguna radiación. La única forma de que pudiese emitirse

radiación que permita termalizar este universo es debido a colisiones de las burbujas formadas, sin embargo, la tasa de ocurrencia de esto se demostró que era baja [9].

Tras el trabajo de Guth, aparecen los artículos de Linde [10] y de Albrecht junto a Steinhardt [11] donde se desarrolla la idea de inflación con mejoras al trabajo original. Es en estos trabajos, donde se presenta un campo escalar al que llamamos inflatón, cuyo valor de expectación rueda hacia abajo lentamente por un potencial, resolviendo así los problemas del trabajo de Guth, usando una aproximación semiclásica que permite pequeñas correcciones cuánticas, con una evolución continua y lenta desde el falso al verdadero vacío. Este modelo, llamado Slow-Roll Inflation, constituye el paradigma bajo el cual estudiamos el proceso de inflación cósmica.

Aún cuando los trabajos anteriores describen a la inflación capaz de resolver de forma eficiente los problemas del Big-Bang, con las observaciones actuales aún no es posible determinar un modelo preciso y definitivo. Esto da pie a que el estudio de la inflación cósmica sea un campo aún abierto, donde se busca comprender a cabalidad esta teoría.

Así, para la construcción de una teoría de inflación, se puede proceder según Baumann y McAllister [12] de dos maneras. Una es un procedimiento del tipo *Top-Down*, en el cual se parte de una teoría completa en la región de alta energía, ultravioleta (UV), por ejemplo, teoría de cuerdas, y a partir de ella derivar inflación como uno de sus límites a baja energía. De esta forma, se ha desarrollado una amplia cantidad de modelos, como Axion Inflation [13], Axion Monodromy Inflation [14], entre otros (para revisar más modelos ver [12], otras ideas en [15] y [16]).

Una segunda forma, del tipo *Bottom-Up*, consistente en partir de grados de libertad a bajas energías, es decir, infrarrojos (IR), y parametrizar nuestra “ignorancia” sobre la teoría UV.

De este modo, en la construcción de una teoría de inflación satisfactoria, es posible abordar este problema obteniendo resultados importantes sin la necesidad de recurrir a una teoría fundamental de gravitación mediante la idea de Teoría Efectiva de Campos (en inglés *effective field theory*, EFT), la cual, en esencia, consiste en describir un sistema dentro de un rango de energía por debajo de una escala de cutoff, mediante operadores de baja energía compatibles con las simetrías subyacentes (para más detalle ver [17–20]). EFT ha sido bastante útil en varios contextos, y es en los trabajos de Cheung et al. [21] y Weinberg [22] donde se desarrolla esta metodología dentro de inflación para un sólo campo, mientras que en [23] se estudia inflación con varios campos usando este formalismo.

Es importante notar, que el desarrollo de inflación en EFT permite englobar tanto el modelo canónico como diferentes otras realizaciones, tales como modelos de múltiples campos o del tipo  $P(X)$ , el cual plantea que inflación es llevada a cabo por efectos no triviales del término cinético (por ejemplo, inflación del tipo Dirac-Born-Infeld (DBI inflation) [24] o K-Inflation [25]). Un elemento común dentro de estos modelos no canónicos se encuentra en una velocidad de propagación de las perturbaciones de curvatura, la que se conoce como velocidad del sonido (denotada como  $c_s$ ), diferente de 1, distinto al caso canónico.

Dentro de este trabajo de tesis, la velocidad del sonido  $c_s$  es un elemento importante, puesto que analizaremos que el hecho de que tanto cambios repentinos en ella, junto a cambios en la tasa de expansión, pueden producir *sobresaltos* (en inglés *features*), es decir, pequeñas oscilaciones en la invariancia de escala dentro del espectro de potencia y en el biespectro.

La importancia del estudio de los sobresaltos en el espectro radica en que la observación experimental de este elemento permitiría descartar modelos simples de inflación que no presentan dicha característica, entregando una mejor comprensión sobre la teoría inflacionaria. Experimentalmente, hasta el momento, no hay evidencias significativas de sobresaltos en el espectro primordial, sin embargo, aún se mantiene la búsqueda de éstos [26–30].

Aunque el modelo canónico de inflación presenta una distribución gaussiana de las perturbaciones de curvatura primordiales, donde su espectro es invariante de escala y sin sobresaltos, en la literatura existen diferentes clases de modelos que tienen como característica la aparición de sobresaltos. Por ejemplo, es sabido que para modelos de un solo campo escalar donde éste atraviesa un salto repentino en el potencial, esto deriva en un cambio en la tasa de expansión, el cual se manifiesta en la aparición de sobresaltos en el espectro de potencia y el biespectro [31–37].

Además, en modelos de múltiples campos, encontramos que es posible la generación de sobresaltos debido a un sólo grado de libertad escalar, como a múltiples de ellos. En el primer caso, tenemos que el único grado de libertad relevante en la dinámica es la fluctuación de curvatura [38,39]. Mediante EFT es posible estudiar es-

te caso, donde los sobresaltos se producen debido a una variación de la velocidad del sonido  $c_s$  y de la tasa de expansión  $H$  en el tiempo, provenientes de desviaciones en el espacio de los múltiples campos [40–43]. Mientras que para el segundo caso, si la variación en el tiempo de un giro en la trayectoria de uno de estos grados de libertad es mayor o igual a la masa de los campos ortogonales a dicha trayectoria, estos campos se excitan dando como resultado la aparición de sobresaltos en el espectro [41, 44, 45].

En el trabajo de Palma [46] se estudió la aparición de sobresaltos debido a cambios en la velocidad del sonido y a cambios en la tasa de expansión de forma independiente. Por otro lado, existen modelos, como se verá en este trabajo de tesis donde sobresaltos aparecen en el espectro debido a ambas variaciones a la vez, sin embargo, hasta la fecha, el hecho de que ambas características se presenten de forma simultánea no ha sido estudiada. Es por esta razón que en este trabajo se analizará la dependencia del espectro de potencia y el biespectro respecto a estas variaciones repentinas cuando ambas ocurren al mismo tiempo.

Por otro lado, durante 2014, BICEP2 [47] presentó resultados que indicaban la existencia de los modos B de polarización de ondas gravitacionales, entregando un valor grande del tensor-to-scalar ratio  $r$ , cantidad que relaciona las perturbaciones escalares y tensoriales, la cual se analizará con mayor detalle en el capítulo 3. Este hallazgo se constituía en la confirmación de inflación, sin embargo, resultados posteriores de PLANCK cuestionaron este hecho, puesto que la región observada contenía un exceso de polvo estelar [48]. Sin embargo, aún cuando los resultados entregados por PLANCK revelan que no necesariamente  $r$  tiene un valor grande, existen experimentos como Spider, EBEX, CMB-Pol and LiteBird que eventualmente podrían

reportar esto en un futuro.

La importancia de los modos B de polarización por tanto es alta, debido a una confirmación experimental de la inflación. Por otra parte, usando este valor  $r$  podemos fijar cotas para el valor de la velocidad del sonido  $c_s$ , independiente si es grande o no. Los límites inferiores que se obtienen, como analizaremos en el capítulo 5, son mayores a los obtenidos mediante mediciones de no gaussianidad del CMB [49]. De esta manera, mediante teoría de perturbaciones en el contexto de EFT examinaremos restricciones en la velocidad del sonido  $c_s$  a partir del valor del tensor-to-scalar ratio  $r$ , al mismo tiempo que analizaremos los efectos que podría traer a estas cotas la existencia de operadores que provengan de una teoría ultravioleta.

## 1.1. Outline

El contenido de esta tesis se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 2 se presentan elementos básicos de la cosmología junto al problema cosmológico del horizonte y el problema de la planitud, para luego en el capítulo 3 dar paso al formalismo de inflación como método de resolución de los problemas vistos en el capítulo anterior, así como su desarrollo matemático. Luego, en el capítulo 4, se procede a tratar el formalismo de Teoría Efectiva de Campos, que constituye una herramienta fundamental para el desarrollo de este trabajo, así como también se mostrará cómo aplicar este formalismo en un modelo de múltiples campos. Así, los capítulos 5 y 6 corresponden al desarrollo del trabajo de tesis propiamente tal. El capítulo 5 muestra los efectos que tendría en las cotas para la velocidad de propagación de las perturbaciones de curvatura el hecho de que modos tensoriales como escalares cruzan el

horizonte en instantes diferentes, así como los efectos provenientes del running del índice espectral y la aparición de operadores UV. Mientras que en el capítulo 6 se estudiará la aparición de sobresaltos en el espectro de potencia y en el biespectro debido a cambios repentinos en la velocidad de propagación de los modos de curvatura y en la tasa de expansión del background. Finalmente, en el capítulo 7 se discutirán los resultados importantes dentro del trabajo y se establecerán conclusiones que pueden extraerse a partir de lo realizado.

Por otro lado, para este fluido perfecto se cumple la siguiente ecuación de conservación del tensor de energía-momentum

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad (2.8)$$

donde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_{\alpha} g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}), \quad (2.9)$$

corresponde a los símbolos de Christoffel. Así, fijando  $\nu = 0$  en (2.8) y usando los valores de los símbolos de Christoffel para la métrica FLRW obtenemos que la evolución de la densidad de energía lleva a la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad (2.10)$$

donde hemos definido  $H = \dot{a}/a$ , que denominamos parámetro de Hubble, el cual da cuenta de cómo varía el factor de escala. El valor actual entregado por PLANCK [51] en 2015 es de

$$H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \quad (2.11)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

obtenemos que para la componente 00 se tiene

$$H^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.13)$$

mientras que para  $ii$  encontramos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P). \quad (2.14)$$

Notemos que de la definición de  $H$  podemos escribir la ecuación (2.14) como

$$H^2 + \dot{H} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P). \quad (2.15)$$

Así las ecuaciones (2.13) y (2.15) se conocen como las ecuaciones de Friedmann, las cuales describen la dinámica del universo.

## 2.2. Problemas en la cosmología estándar

Tras haber revisado elementos importantes en la descripción de un universo de métrica FLRW consideraremos dos problemas que surgen en la teoría del Big-Bang, el problema cosmológico del horizonte y el problema de la planitud.

### 2.2.1. El problema del horizonte

Consideremos la ecuación (2.4) y expresemos el tiempo físico en términos del tiempo conforme según la ecuación (2.2). Dado que el universo es isotrópico,  $d\phi = d\theta = 0$ , luego

$$ds^2 = a(t)^2 \left( -d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right). \quad (2.16)$$

Definamos  $d\chi^2 = dr^2/(1 - kr^2)$  de modo que

$$ds^2 = a(t)^2 (-d\tau^2 + d\chi^2). \quad (2.17)$$

Por otro lado, la trayectoria de los fotones sigue a lo largo de geodésicas nulas, es decir  $ds^2 = 0$ , por lo tanto, en este espacio tipo FLRW se tendrá que

$$\Delta\chi(\tau) = \pm\Delta\tau. \quad (2.18)$$

Entonces, la ventaja de trabajar en tiempo conforme, es que en un gráfico podemos dibujar los rayos de luz como líneas rectas que forman un ángulo de  $45^\circ$  con los ejes. Notemos que esto es posible hacerlo para cualquier tipo de geometría, euclídea o no.

Luego, dado que  $dt = a(t)d\tau$ , podemos escribir el intervalo  $\Delta\tau$  como

$$\Delta\tau = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.19)$$

para un tiempo inicial  $t_i$  y un tiempo final  $t_f$ .

Definamos el inicio del Big-Bang de modo que  $t_i = 0$ , de este modo, la mayor distancia a la que puede encontrarse un observador en un tiempo  $t_f = t'$  ( $t' > 0$ ) para que pueda recibir una señal que viaje a la velocidad de la luz proveniente del Big-Bang viene dada por

$$\chi_p = \int_0^{t'} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.20)$$

objeto que llamaremos el horizonte de partícula.

Por otra parte, llamaremos horizonte de evento a la máxima distancia a la que en un tiempo  $t_f = t'$  se puede recibir una señal que viaje a la velocidad de la luz tal que haya sido enviada desde otro punto en un tiempo  $t''$  (tal que  $t' > t'' > 0$ ). La cual viene dada por:

$$\chi_e = \int_{t''}^{t'} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.21)$$

Entonces, para que dos puntos en el universo estén conectados causalmente deben encontrarse a una distancia menor que el horizonte de eventos. Dicho de otra forma, los conos de luz de ambos puntos deben traslaparse.

Consideremos entonces dos regiones opuestas en  $180^\circ$  de las que recibimos la señal del CMB. En el diagrama de la Fig. 2.1 es posible apreciar que los conos de luz no se traslapan en  $\tau = 0$ , por lo que tenemos dos regiones desconectadas causalmente, pero que sin embargo se encuentran en equilibrio térmico, lo que aparentemente indica

que estuvieron causalmente conectadas. A esta paradoja se le llama el *problema del horizonte*.

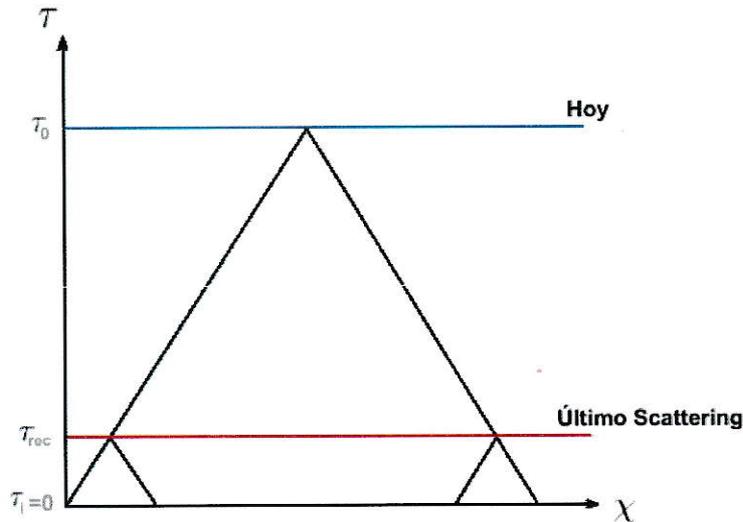


Figura 2.1: El diagrama muestra que entre  $\tau_i = 0$  y el periodo del Último Scattering ( $\tau_{rec}$  y denotado por la línea roja), donde los fotones viajaron libremente, no hay conexión causal entre las dos señales opuestas que llegan al observador hoy (denotado por la línea azul para  $\tau_0$ ).

### 2.2.2. El problema de la planitud

Volvamos a las ecuaciones de Friedmann. De la ecuación (2.13) podemos notar que la curvatura es posible expresarla en términos de la densidad de la forma

$$k = a^2 \left( \frac{\rho}{3} - H^2 \right). \quad (2.22)$$

Luego, consideremos el caso  $k = 0$ , es decir, un universo plano. Con esto obtenemos la expresión para la densidad que debería tenerse para este tipo de universo, la cual viene dada por

$$\rho_c = 3H^2, \quad (2.23)$$

donde llamamos a esta densidad como densidad crítica  $\rho_c$ . Luego, si se tiene una densidad  $\rho$  tal que  $\rho > \rho_c$  se tendrá un universo de curvatura positiva. Caso contrario, se obtendrá un universo de curvatura negativa.

Definiremos un parámetro de curvatura  $\Omega$  que da cuenta de la curvatura del universo en términos de las densidades, de la forma

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.24)$$

donde  $\rho$  representa la densidad de energía del universo.

Luego, con la definición de  $\rho_c$  de la ecuación (2.23) reemplazamos en (2.24) y tenemos

$$\Omega = \frac{\rho}{3H^2}. \quad (2.25)$$

De esta manera, reemplazamos (2.25) en la primera ecuación de Friedmann obtenida en (2.13) y tendremos que

$$\Omega = 1 + \frac{k}{(aH)^2}. \quad (2.26)$$

Por lo tanto, para un universo plano  $\Omega = 1$ . Si  $\Omega > 1$  entonces será un universo cerrado y si  $\Omega < 1$  el universo será abierto.

De la ecuación anterior, definiremos la cantidad  $(aH)^{-1}$  como el radio de Hubble comóvil, objeto que será útil más adelante al definir inflación.

Por otro lado, consideraremos que para el fluido se cumple la siguiente ecuación de estado:

$$P = w\rho, \quad (2.27)$$

donde  $w$  es un parámetro constante. Si  $w = 0$  entonces es un universo dominado por la materia,  $w = 1/3$  un universo dominado por la radiación y  $w = -1$  para un universo dominado por energía del vacío.

Introducimos esta presión en la ecuación de continuidad (2.10) y se tiene

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w) = 0, \quad (2.28)$$

donde hemos dejado de forma explícita la dependencia del factor de escala  $a$ . Así, integrando esta ecuación se tendrá que

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.29)$$

Considerando los diferentes valores de  $w$  se tiene que

$$\rho \propto \begin{cases} a(t)^{-3} & \text{materia } (w = 0) \\ a(t)^{-4} & \text{radiación } (w = \frac{1}{3}) \\ \text{const.} & \text{energía del vacío } (w = -1) \end{cases}. \quad (2.30)$$

Por otra parte, tomando la ecuación (2.15) junto a (2.27), reemplazando en ella  $H^2$  mediante (2.25), y derivando (2.25) para reemplazar  $\dot{H}$ , tendremos que

$$\frac{\dot{\Omega}}{H} = (1 + 3w)\Omega(\Omega - 1). \quad (2.31)$$

De la ecuación (2.31) vemos que para un universo plano ( $\Omega = 1$ ) éste se mantendrá igual para cualquier tiempo. Sin embargo, para cualquier otra situación, dependerá de  $w$ . Notemos que para un universo con materia o radiación  $(1 + 3w) > 0$ , luego se tendrá que  $\dot{\Omega}/H > 0$ , lo que significa que es un punto inestable. Luego, cualquier tipo de desviación de un universo plano se amplifica considerablemente en la expansión. Por lo tanto, el hecho de que las observaciones presenten un universo muy cercano

a ser plano hoy [5], requiere un ajuste de condiciones iniciales muy preciso, lo que conocemos como ajuste fino. La teoría del Big-Bang no es capaz de explicar la razón de por qué el universo que vemos tiene que ser plano, puesto que no existe un motivo a priori para privilegiar una condición inicial particular en vez de cualquier otra igualmente probable, a lo cual nos referimos como el problema de la planitud.

# Capítulo 3

## Inflación cósmica

En este capítulo revisaremos el formalismo de la teoría inflacionaria. En la Sec. 3.1 introduciremos inflación como método de solucionar los problemas planteados en el capítulo 2 y establecer el formalismo de Slow-Roll Inflation, para luego en la Sec. 3.2 estudiar la dinámica de la inflación mediante campos escalares, analizar el modelo de inflación  $P(X)$  y proceder a la cuantización para finalmente revisar cantidades observables de importancia.

### 3.1. Inflación y parámetros de slow roll

Con el fin de resolver los problemas planteados en la sección anterior, seguiremos el tratamiento de Baumann [52], definiendo inflación como un periodo en el cual ocurrió un encogimiento de la esfera de Hubble, la cual corresponde al volumen cuyo radio es el radio de Hubble comóvil ya definido en la subsección 2.2.2. Matemáticamente, expresamos esta idea de la forma

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0. \tag{3.1}$$

Notemos que la definición de este encogimiento de la esfera de Hubble implica una expansión acelerada del universo. Dado que  $H = \dot{a}/a$ ,

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1}, \quad (3.2)$$

luego

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (3.3)$$

Como el término en el denominador es positivo, entonces

$$\ddot{a} > 0. \quad (3.4)$$

Por otro lado, esta definición establece condiciones para las ecuaciones de Einstein. Desarrollemos la derivada de (3.1):

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2}. \quad (3.5)$$

De acá

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{1}{a}(1 - \epsilon), \quad (3.6)$$

donde hemos definido

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (3.7)$$

al que llamaremos primer parámetro de slow roll. Luego, dada la ecuación (3.1), se tendrá que

$$\epsilon < 1. \quad (3.8)$$

Definiremos también  $\epsilon$  de la forma

$$\epsilon = -\frac{d \ln H}{dN} = -\frac{1}{H} \frac{dH}{dN}, \quad (3.9)$$

donde  $dN = \ln a = H dt$ .

$N$  corresponde al número de e-folds de expansión inflacionaria. En este contexto diremos que un e-fold es la cantidad de tiempo requerido para cada aumento del tamaño del universo en un factor  $e$ .

El hecho de que  $\epsilon < 1$  en términos de e-folds, nos dice que la tasa de cambio del parámetro de Hubble por e-fold es pequeña. Por otro lado, para resolver los problemas planteados anteriormente se requiere que inflación se sostenga por una cantidad de tiempo suficientemente largo,  $N \geq 70$  [53]. Entonces, para que inflación pueda llevarse a cabo durante este periodo, durante el proceso debe mantenerse la condición que  $\epsilon < 1$ . Definiremos entonces un segundo parámetro de slow-roll

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}. \quad (3.10)$$

También podemos escribir  $\eta$  en términos de e-folds de la forma

$$\eta = \frac{d \ln \epsilon}{dN} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dN}. \quad (3.11)$$

Luego, inflación se sostiene cuando  $|\eta| \ll 1$ .

Por otro lado, dada la definición de  $\epsilon$  en (3.7), y si consideramos  $\epsilon \rightarrow 0$ , de este modo, integrando tendremos que

$$\frac{1}{H} = \text{const.} \quad (3.12)$$

Luego, en la definición de  $H$  en términos del factor de escala y considerándolo como constante, que llamaremos  $H_0$ , tendremos que

$$a \propto e^{H_0 t}. \quad (3.13)$$

Notamos que esta expresión es la de un espacio del tipo de Sitter donde inflación tiene fin. Sin embargo, dado que  $H$  no es realmente constante, no es un perfecto espacio de Sitter, sin embargo corresponde a una buena aproximación a la que llamamos quasi-de Sitter.

Además, considerando la segunda ecuación de Friedmann en (2.15) y dividiendo por  $H^2$  obtendremos que

$$1 + \frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{6H^2}(\rho + 3P). \quad (3.14)$$

Usando la definición de  $\epsilon$  en (3.7) y la condición (3.8) se tendrá que

$$\epsilon = 1 + \frac{1}{6H^2}(\rho + 3P) < 1. \quad (3.15)$$

De este modo

$$\rho + 3P < 0. \quad (3.16)$$

Dado que la densidad de energía es positiva, inflación es un proceso en que se tiene una presión negativa y menor que  $-\rho/3$ .

### 3.1.1. ¿Cómo soluciona inflación los problemas anteriores?

Tomemos la ecuación (2.19), desde un tiempo inicial 0 a  $t$  de la forma

$$\Delta\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (3.17)$$

Podemos expresar el diferencial  $dt'$  en términos del factor de escala usando la definición de  $H = a^{-1}da/dt$ , de modo que

$$\Delta\tau = \int_0^a \frac{da}{a^2 H} = \int_0^a d \ln a \left( \frac{1}{aH} \right). \quad (3.18)$$

Notemos que hemos expresado  $\Delta\tau$  en función del radio de Hubble. Luego, integrando se tiene

$$\Delta\tau = -\frac{1}{aH}. \quad (3.19)$$

Aplicando (3.19) para un proceso quasi-de Sitter se tiene que

$$\tau = -\frac{1}{H}e^{-Ht}. \quad (3.20)$$

Así, de la ecuación (3.20) tenemos que el periodo inflacionario ocurre para un tiempo conformal negativo. Considerando lo anterior, podemos empujar la singularidad inicial a un tiempo conformal negativo arbitrario previo a inflación, ajustable a la duración del proceso inflacionario. Esto implica que existe una gran cantidad de tiempo entre la singularidad inicial y el periodo en que la radiación se desacopló de la materia, lo que da origen al CMB hoy observado. Esta situación permite a las regiones cuyos conos de luz no se intersectan en  $\tau = 0$  lo hagan en un tiempo conformal negativo (ver Fig. 3.1). De este modo  $\tau = 0$  no corresponde al Big-Bang, sino que es la transición entre el periodo inflacionario y el periodo dominado por radiación. Entonces, fijaremos en  $\tau = -\infty$  el inicio del Big-Bang.

Por otro lado, respecto al problema de la planitud, cuando se tiene que el radio de Hubble  $(aH)^{-1}$  decrece notamos que  $\Omega \rightarrow 1$  en la ecuación (2.26). Luego, inflación lleva necesariamente a un universo plano, sin la necesidad de ajustar condiciones iniciales, bastando sólo que  $(aH)^{-1}$  decrezca.

## 3.2. Inflación desde campos escalares

Hemos revisado cómo inflación puede resolver el problema del horizonte y el problema de la planitud, sin embargo, falta describir la física responsable del proceso.

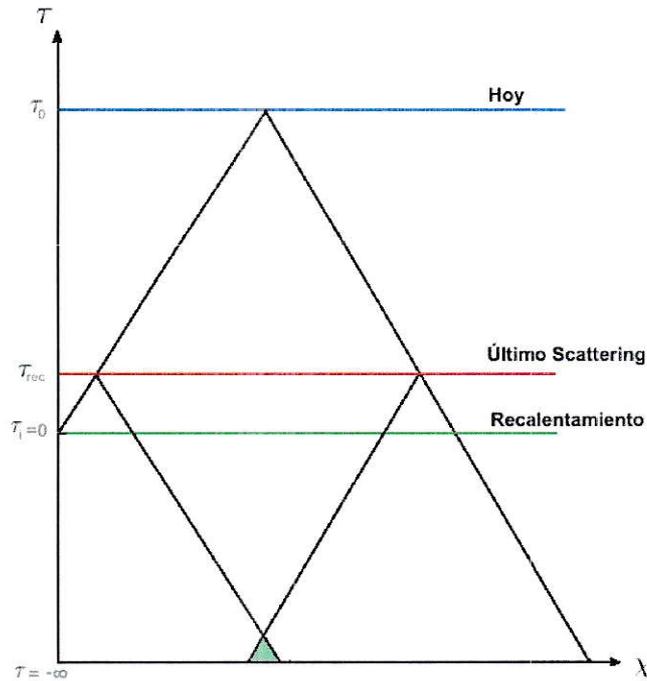


Figura 3.1: En el diagrama se muestra que la singularidad inicial es dejada en  $\tau = -\infty$ . Entre dicho punto y  $\tau = 0$ , que corresponde a lo que llamamos recalentamiento, ocurre inflación. Notamos que ahora los conos de luz se traslapan.

Consideraremos una perspectiva clásica usando un campo escalar llamado inflatón  $\phi$  con energía potencial  $V(\phi)$ . Luego, asumiremos la siguiente acción que muestra este inflatón acoplado con la gravedad:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (3.21)$$

donde  $g = \text{Det}(g_{\mu\nu})$ , con  $g_{\mu\nu}$  la métrica de FLRW y  $R$  es el escalar de Ricci.

Para visualizar la dinámica, consideremos la ecuación de movimiento para  $\phi$ , la cual viene dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (3.22)$$

donde no aparece término  $\nabla^2 \phi$ , puesto que como el universo es homogéneo se tiene

que  $\nabla^2\phi = 0$ . Acá podemos notar que el potencial actúa como una fuerza, mientras que el término  $3H\dot{\phi}$  es como un término de roce.

Consideremos también el tensor de energía momentum para este caso, el cual viene dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi, \quad (3.23)$$

con  $\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$ . Luego, calculando a partir de  $T_{\mu\nu}$  la densidad y la presión, se tiene que

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.24)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.25)$$

Usando la ecuación de Friedmann definida en (2.13) con la expresión de la densidad en (3.24) para un universo plano ( $k=0$ ), se tiene que

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (3.26)$$

Por otro lado, derivando respecto al tiempo la ecuación (3.26) y juntándola con la ecuación (3.22) tendremos que

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \quad (3.27)$$

Dividiendo (3.27) por  $H^2$  tenemos una expresión para  $\epsilon$  en términos del campo  $\phi$  de la forma

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2}. \quad (3.28)$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación (3.28) obtenemos que

$$\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{\eta}{2} - \epsilon. \quad (3.29)$$

Definiremos el primer término como

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad (3.30)$$

así

$$\eta = 2(\epsilon - \delta). \quad (3.31)$$

Notamos que de acuerdo a la ecuación (3.29),  $\delta$  es de orden uno en los parámetros de slow roll. Luego,  $\ddot{\phi}$  es un término pequeño. De esta manera, podemos aproximar la ecuación (3.22) a

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \approx 0. \quad (3.32)$$

A su vez, dada la condición  $\epsilon \ll 1$ , tenemos de la ecuación (3.28) que  $\dot{\phi}^2$  es pequeño, así, podemos aproximar la ecuación (3.26) como

$$3H^2 \approx V. \quad (3.33)$$

Entonces, usando las ecuaciones (3.32) y (3.33) en la ecuación (3.28) se tiene que

$$\epsilon \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2. \quad (3.34)$$

Definiremos esta cantidad como  $\epsilon_V$ , la cual representa un parámetro de slow roll del potencial.

Además, tomando una derivada temporal de la ecuación (3.32) se tiene

$$3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \dot{\phi} = 0, \quad (3.35)$$

lo que lleva a

$$\epsilon + \delta = \frac{1}{3H^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (3.36)$$

Usando la ecuación (3.33) entonces

$$\epsilon + \delta = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (3.37)$$

Definiremos entonces un segundo parámetro de slow roll para el potencial llamado  $\eta_V$  definido como

$$\eta_V = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (3.38)$$

Así, mediante la definición de  $\epsilon_V$  y  $\eta_V$ , decimos que inflación slow roll ocurre si se cumple que

$$\epsilon_V \ll 1, \quad \eta_V \ll 1. \quad (3.39)$$

### 3.2.1. Perturbaciones

Hasta acá hemos considerado que  $\phi$  es sólo una función del tiempo, sin embargo, es inevitable que existan ciertas variaciones en el espacio-tiempo presentes en inflación que permitan dar inicio a las estructuras que se pueden ver hoy. Entonces, para las cantidades clásicas  $\phi$  y  $g_{\mu\nu}$  analizaremos sus correcciones cuánticas, las cuales vienen dadas por

$$\phi(t) \rightarrow \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.40)$$

$$g_{\mu\nu}(t) \rightarrow g_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t), \quad (3.41)$$

donde  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  y  $\delta g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$  presentan una dependencia espacial dado que siempre están fluctuando puesto que son objetos cuánticos.

Siguiendo el tratamiento de Collins [54], vemos que  $\delta g_{\mu\nu}$  podemos escribirlo en bloques de la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta g_{00}(\mathbf{x}, t) & \delta g_{0i}(\mathbf{x}, t) \\ \delta g_{i0}(\mathbf{x}, t) & \delta g_{ij}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

En la expresión (3.42) tenemos cuatro perturbaciones en la métrica, de modo que  $\delta g_{00}(\mathbf{x}, t)$  provee un campo escalar. Por otro lado,  $\delta g_{0i}(\mathbf{x}, t)$  provee un campo escalar que viene de la creación de un vector de tres dimensiones al tomar el gradiente de un campo escalar  $B$ , de modo que  $\delta g_{0i}(\mathbf{x}, t) \sim \partial_i B$ . Finalmente  $\delta g_{ij}(\mathbf{x}, t)$  trae dos campos escalares, uno proveniente de su traza, y el otro de tomar dos derivadas espaciales de una función escalar ( $\partial_i \partial_j C$ ). Así tenemos 5 modos escalares, los cuatro provenientes de la métrica y  $\delta\phi$ . Sin embargo, debido a la invariancia de gauge de (3.21) bajo las transformaciones  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$  podemos eliminar dos modos. Por otra parte, las ecuaciones de Einstein permiten eliminar dos modos más, por lo que sólo queda un modo escalar físico.

Para estudiar la teoría de perturbaciones usaremos el formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [55]. En este formalismo la métrica toma la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (3.43)$$

donde  $h_{ij}$  es una métrica en tres dimensiones sobre slices de  $t$  constante. En el formalismo ADM tenemos que  $h_{ij}$  y  $\phi$  son variables dinámicas, mientras que  $N$  y  $N^i$  son multiplicadores de Lagrange cuyas ecuaciones de movimiento son puramente algebraicas.

Para el cálculo de la acción cuadrática seguiremos el procedimiento desarrollado por Maldacena [56]. Partimos de la acción de la ecuación (3.21) y usando la métrica ADM definida en la expresión (3.43) tendremos que

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{h} \left[ NR^{(3)} - 2NV + N^{-1}(E_{ij}E^{ij} - E^2) + N^{-1}(\dot{\phi} - N^i \partial_i \phi)^2 - Nh^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \right], \quad (3.44)$$

donde

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \quad (3.45)$$

$$E = E_i^i. \quad (3.46)$$

Escogemos un gauge para  $h_{ij}$  y  $\phi$  que fijará las reparametrizaciones temporal y espacial, en el cual los grados de libertad sólo se encuentran en la métrica, lo cual simplifica los cálculos. De este modo,

$$\delta\phi = 0, \quad (3.47)$$

$$h_{ij} = e^{2\rho}[(1 + 2\mathcal{R})\delta_{ij} + \gamma_{ij}], \quad (3.48)$$

$$\partial_i \gamma_{ij} = 0, \quad (3.49)$$

$$\gamma_{ii} = 0, \quad (3.50)$$

donde el parámetro  $\rho$  es tal que  $\dot{\rho} = H$ , mientras que  $\mathcal{R}$  y  $\gamma$  son cantidades de primer orden.  $\mathcal{R}$  es un escalar al cual llamaremos perturbación de la curvatura comóvil, el cual representa las fluctuaciones de curvatura adiabáticas y  $\gamma$  las fluctuaciones tensoriales.

Mediante esa elección las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$\nabla_i [N^{-1}(E_j^i - \delta_j^i E)] = 0, \quad (3.51)$$

$$R^{(3)} - 2V - N^{-2}(E_{ij}E^{ij} - E^2) - N^{-2}\dot{\phi}^2 = 0. \quad (3.52)$$

Descomponemos  $N^i$  en dos partes,  $N_i = \tilde{N}_i + \partial_i \psi$ , donde se cumple que  $\partial_i \tilde{N}^i = 0$  [56, 57]. Luego, expandiendo  $N$  y  $N^i$  en potencias de  $\mathcal{R}$  se tiene que

$$N = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots, \quad (3.53)$$

$$\tilde{N}_i = N_i^{(1)} + N_i^{(2)} + \dots, \quad (3.54)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad (3.55)$$

donde tanto  $\alpha_n$ ,  $\tilde{N}_i^{(n)}$  y  $\psi_n$  son de orden  $\mathcal{O}(\mathcal{R}^n)$ . Aplicando estas expansiones a primer orden en las ecuaciones de movimiento (3.51) y (3.52) se tiene que

$$\alpha_1 = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H}, \quad (3.56)$$

$$N_i^{(1)} = 0, \quad (3.57)$$

$$\psi_1 = -\frac{\mathcal{R}}{H} + \chi, \quad (3.58)$$

donde  $\chi$  cumple con

$$\nabla^2 \chi = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2} \dot{\mathcal{R}}. \quad (3.59)$$

Luego, usamos las ecuaciones (3.56), (3.57) y (3.58) en la acción (3.44) y expandiendo a segundo orden se tiene

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x e^{\rho+\mathcal{R}} \left( 1 + \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H} \right) [-4\nabla^2 \mathcal{R} - 2(\nabla \mathcal{R})^2 - 2V e^{2(\rho+\mathcal{R})}] + \frac{e^{3(\rho+\mathcal{R})}}{1 + \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H}} [-6(H + \dot{\mathcal{R}})^2 + \dot{\phi}^2]. \quad (3.60)$$

Integrando por partes, y usando las expresiones (3.22), (3.26) y (3.27) obtenemos que

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} e^{3\rho} [\dot{\mathcal{R}}^2 - e^{-2\rho} (\nabla \mathcal{R})^2]. \quad (3.61)$$

Notamos que a partir de la definición de  $\rho$  tenemos que para un espacio de Sitter se cumple que  $a = e^\rho$ . Además, de la ecuación (3.28) tendremos que

$$S = \int d^4x a^3 \epsilon \left[ \dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{a^2} (\nabla \mathcal{R})^2 \right], \quad (3.62)$$

Por otro lado, la acción cúbica vendrá dada por la expresión

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ a^3 \epsilon^2 \mathcal{R} \dot{\mathcal{R}}^2 + a \epsilon^2 \mathcal{R} (\partial \mathcal{R})^2 - 2a \epsilon \dot{\mathcal{R}} (\partial \mathcal{R}) (\partial \chi) + \frac{a^3 \epsilon}{2} \dot{\eta} \mathcal{R}^2 \dot{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon}{2a} (\partial \mathcal{R}) (\partial \chi) (\partial^2 \chi) + \frac{\epsilon}{4a} (\partial^2 \mathcal{R}) (\partial \chi)^2 + f(\mathcal{R}) \frac{\delta L}{\delta \mathcal{R}} \Big|_1 \right], \quad (3.63)$$

donde

$$\chi = a^2 \epsilon \partial^{-2} \dot{\mathcal{R}}, \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{\delta L}{\delta \mathcal{R}} \right|_1 = 2a \left( \frac{d\partial^2 \chi}{dt} + H \partial^2 \chi - \epsilon \partial^2 \mathcal{R} \right), \quad (3.65)$$

$$f(\mathcal{R}) = \frac{\eta}{4} \mathcal{R}^2 + \text{términos con derivadas en } \mathcal{R}. \quad (3.66)$$

### 3.2.2. Modelo $P(X, \phi)$

Estudiaremos un caso más general de la acción (3.21), donde no gaussianidades en el espectro son generadas por términos cinéticos no canónicos siguiendo el trabajo de Chen et al. [57], en el cual la acción más general toma la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} + P(X, \phi) \right], \quad (3.67)$$

en que  $X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ . Notemos que la diferencia con la acción en (3.21) radica en reemplazar el término canónico  $X - V(\phi)$  por una función arbitraria  $P(X, \phi)$ . Luego, definimos las siguientes cantidades:

$$c_s^2 = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}}, \quad (3.68)$$

$$\Sigma = XP_{,X} + 2X^2 P_{,XX}, \quad (3.69)$$

$$\lambda = X^2 P_{,XX} + \frac{2}{3} X^3 P_{,XXX}, \quad (3.70)$$

donde el subíndice “,  $X$ ” representa una derivada respecto a  $X$ . Hacemos énfasis en el término  $c_s$  presente en la ecuación (3.68), al cual llamamos velocidad del sonido, el cual corresponde a la velocidad con que se propagan las perturbaciones de curvatura.

En este modelo mantenemos las mismas cantidades de slow roll  $\epsilon$  y  $\eta$  definidas anteriormente, y agregamos un nuevo parámetro  $s$  definido de forma que

$$s = \frac{\dot{c}_s}{Hc_s}, \quad (3.71)$$

donde diremos que  $|s| \ll 1$  por consistencia de los requerimientos de la evolución slow roll del background.

Luego, siguiendo la misma metodología de la subsección 3.2.1, obtendremos que la acción cuadrática será

$$S_2 = \int d^4x a^3 \epsilon \left[ \frac{1}{c_s^2} \dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{a^2} (\nabla \mathcal{R})^2 \right]. \quad (3.72)$$

Del mismo modo, la acción cúbica, viene dada por

$$\begin{aligned} S_3 = & \int d^4x a^3 \epsilon \left[ \frac{1}{c_s^4} [3(c_s^2 - 1) + \epsilon - \eta] \mathcal{R} \dot{\mathcal{R}}^2 \right. \\ & + \frac{1}{c_s^2 a^2} \left( (1 - c_s^2) + \eta + \epsilon - \frac{2\dot{c}_s}{Hc_s} \right) \mathcal{R} (\nabla \mathcal{R})^2 \\ & + \frac{1}{H} \left( \frac{1 - c_s^2}{c_s^4} - \frac{2\lambda}{\epsilon H^2} \right) \dot{\mathcal{R}}^3 + \frac{1}{4a^4} (\partial \chi)^2 \nabla^2 \mathcal{R} \\ & \left. - \frac{4 - \epsilon}{2\epsilon a^4} \nabla^2 \chi \partial^i \mathcal{R} \partial_i \chi + \frac{f}{\epsilon a^3} \frac{\delta S_2}{\delta \mathcal{R}} \right], \quad (3.73) \end{aligned}$$

donde  $\chi$  viene dado por la ecuación  $\nabla^2 \chi = a^2 \epsilon \dot{\mathcal{R}} / c_s^2$ , mientras que el término que multiplica a  $f/\epsilon a^3$  corresponde a la ecuación de movimiento de la acción cuadrática de (3.72) y  $f$  viene definido por

$$\begin{aligned} f = & -\frac{1}{4a^2 H} \left[ \frac{4a^2}{c_s^2} \dot{\mathcal{R}}^2 - (\partial \mathcal{R})^2 + \partial^i \chi \partial_i \mathcal{R} + \nabla^{-2} \partial^i \partial^j (\partial_i \mathcal{R} \partial_j \mathcal{R}) \right. \\ & \left. - \nabla^{-2} \partial^i (\nabla^2 \mathcal{R} \partial_i \chi + \nabla^2 \chi \partial_i \mathcal{R}) \right]. \quad (3.74) \end{aligned}$$

Notamos que hemos colocado la acción cúbica en términos de  $\eta$  de forma explícita, lo cual será útil más adelante.

Vemos que este tipo de modelos no canónicos permite la existencia de una velocidad del sonido diferente de 1. Notamos que para el caso  $c_s = 1$  la ecuación (3.72) recupera la acción canónica en (3.62). De esta manera, la velocidad a la que se propagan las perturbaciones de la curvatura en el modelo canónico es de la unidad, mientras que en esta clase de modelos se tiene la posibilidad de que dicha velocidad de propagación sea menor. Esto trae como consecuencia según Chen et al. [57] que si  $c_s \ll 1$  se producen no gaussianidades significativas.

### 3.2.3. Cuantización de la acción cuadrática

A partir de la acción cuadrática dada por la ecuación (3.72) para la perturbación de curvatura  $\mathcal{R}$  procederemos con el método estándar de cuantización. Para ello realizamos el cambio de variable

$$u = z\mathcal{R}, \quad z = \sqrt{2\epsilon} \frac{a}{c_s}, \quad (3.75)$$

de este modo, considerando  $c_s$  y  $\epsilon$  constantes, y mediante la transformada de Fourier de  $u$ , que viene dada por

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} u_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.76)$$

se tiene que la ecuación de movimiento para  $u_k$  es

$$\ddot{u}_k + 3H\dot{u}_k + \frac{c_s^2 k^2}{a^2} u_k = 0, \quad (3.77)$$

expresión usualmente conocida como ecuación de Mukhanov-Sasaki. Notemos que esta expresión es la ecuación de un oscilador armónico con un término de roce. Luego, podemos reconocer la frecuencia de oscilación  $\omega_k$  de la forma

$$\omega_k = \frac{c_s k}{a(t)}, \quad (3.78)$$

donde hacemos explícita la dependencia del tiempo para dicha frecuencia.

A su vez, vemos que para tiempos muy tempranos, es decir con un  $a(t)$  pequeño, se tendrá que  $\omega_k \gg H$ . En este límite, se tiene que el término  $3H\dot{u}_k$  en la ecuación (3.77) es despreciable, por lo que tenemos un oscilador armónico corriente. Luego, los modos oscilan, pero decrecen exponencialmente, dada la existencia del factor  $a(t)$ . Por otro lado, para un tiempo tardío, cuando  $a(t)$  es grande, domina el término de roce, por lo que obtendremos una solución que atenúa alcanzando un valor constante. De esta manera, en el límite  $\omega_k = H$  (o  $c_s k = aH$ ) los modos se congelan, es decir, toman una amplitud constante.

Promoveremos el campo clásico  $u$  a operadores cuánticos  $\hat{u}$ , de la forma

$$\hat{u}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left( u_k(\tau) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_k^*(\tau) a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (3.79)$$

donde  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  y  $a_{\mathbf{k}}$  son operadores de creación y destrucción con la relación de conmutación

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.80)$$

y donde se cumple que  $\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0$  para todo  $\mathbf{k}$ . Además las funciones  $u_k$  de (3.79), las cuales hemos dejado en función del tiempo conforme en vez del tiempo cósmico, son soluciones de la ecuación de movimiento.

Para obtener las soluciones  $u_k$ , consideremos la acción (3.72) en tiempo conforme y usando el cambio de variables definido en (3.75) se tiene que la acción queda dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\tau \left[ \dot{u}^2 - c_s^2 (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z} u^2 \right]. \quad (3.81)$$

Así, aplicando la transformada de Fourier definida en (3.76) la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$u_k'' + \left( c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0. \quad (3.82)$$

Notemos que si mantenemos  $c_s$  y  $\epsilon$  constantes, entonces  $z''/z = 2a^2 H^2$ . Luego, puesto que consideramos un espacio de Sitter, usamos la expresión para  $\tau$  dada en (3.19) se tendrá que

$$u_k'' + \left( c_s^2 k^2 - \frac{2}{\tau^2} \right) u_k = 0. \quad (3.83)$$

Consideremos el límite  $\tau \rightarrow -\infty$ , lo cual nos permite encontrar la solución para el inicio de inflación. Así la expresión (3.83) queda

$$u_k'' + c_s^2 k^2 u_k = 0. \quad (3.84)$$

La cual es la ecuación para un campo libre en el espacio de Minkowski, de la cual sabemos que sus dos soluciones son del tipo  $e^{\pm ic_s k \tau}$ , pero que sin embargo sólo tomamos la solución con signo negativo puesto que sólo el modo con frecuencia positiva corresponde al estado de mínima excitación. Por tanto

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} u_k = \frac{1}{\sqrt{2c_s k}} e^{-ic_s k \tau}. \quad (3.85)$$

Esta solución define un único vacío físico, conocido como el vacío de Bunch-Davies [58].

Por otro lado, la solución completa de (3.83) viene dada por

$$u_k(\tau) = A \frac{e^{-ic_s k \tau}}{\sqrt{2c_s k}} \left( 1 - \frac{i}{c_s k \tau} \right) + B \frac{e^{ic_s k \tau}}{\sqrt{2c_s k}} \left( 1 + \frac{i}{c_s k \tau} \right). \quad (3.86)$$

Dado que en el límite  $\tau \rightarrow -\infty$  se debe recuperar la solución para el caso Minkowski, entonces fijamos  $A = 1$  y  $B = 0$ , por tanto

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ic_s k \tau}}{\sqrt{2c_s k}} \left( 1 - \frac{i}{c_s k \tau} \right). \quad (3.87)$$

La solución dada en la ecuación (3.87) determina la evolución de  $u_k$  para todo tiempo.

### 3.2.4. Espectro de Potencia y Biespectro

A partir del desarrollo anterior, se busca obtener cantidades observables. Para ello, consideraremos el cálculo de la función de correlación de dos puntos para las perturbaciones de curvatura  $\mathcal{R}$  definido de la forma

$$\langle 0|\mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{R}(\mathbf{y})|0\rangle = \int dk \frac{1}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) e^{ik \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.88)$$

Donde  $\mathcal{P}(k)$  es una cantidad independiente de escala que es posible medir en el CMB, a la cual llamaremos Espectro de Potencia la cual se describe usando una parametrización fenomenológica mediante una ley de potencias [51] de la forma

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_0(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_{\mathcal{R}}-1+\frac{1}{2}\alpha \ln(k/k_*)}. \quad (3.89)$$

Por lo general basta con considerar en el exponente hasta  $n_{\mathcal{R}} - 1$ . Sólo en el Cap. 5 consideraremos el siguiente término que contiene a  $\alpha$ . Además,  $k_*$  corresponde a una escala de pivot, usada como referencia para comparar con otras escalas. Usando las mediciones de WMAP [5] donde se ocupa una escala de pivot  $k_* = 0.002 Mpc^{-1}$ , tenemos que  $\mathcal{P}_0(k_*) = 2.43 \cdot 10^{-9}$ .

A su vez, la cantidad  $n_{\mathcal{R}}$  que aparece en (3.89) es llamada índice espectral, la cual cuantifica la desviación de la invariancia de escala, y se define mediante

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{d \ln k}. \quad (3.90)$$

Según las observaciones [5, 51], se tiene un valor de  $n_{\mathcal{R}} < 1$ , lo cual indica que existe mayor cantidad de contribuciones de  $k$  pequeño, es decir, mayores contribuciones de baja energía, del tipo infrarrojo (IR). Esto nos muestra que el espectro

inflacionario es *red-tilted*, es decir, está inclinado de modo que su pendiente es ligeramente negativa.

Utilizando el cambio de variables dado en la ecuación (3.75), tendremos que

$$\langle 0|\mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{R}(\mathbf{y})|0\rangle = \frac{1}{z^2}\langle 0|u(x)u(y)|0\rangle. \quad (3.91)$$

De esta manera, mediante el operador cuantizado se tiene que

$$\langle 0|u(\mathbf{x})u(\mathbf{y})|0\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3l}{(2\pi)^3} \langle 0|u_k(\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\hat{a}_{\mathbf{k}}u_l^*(\tau)e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{y}}\hat{a}_l^\dagger|0\rangle. \quad (3.92)$$

Usando la relación de conmutación de (3.80) y desarrollando se tendrá que

$$\langle 0|u(\mathbf{x})u(\mathbf{y})|0\rangle = \int dk \frac{k^2}{2\pi^2} |u_k(\tau)|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.93)$$

Luego,

$$\langle 0|\mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{R}(\mathbf{y})|0\rangle = \int dk \frac{k^2}{2\pi^2 z^2} |u_k(\tau)|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (3.94)$$

Comparando (3.88) con (3.94), tendremos que la expresión para el espectro de potencia viene dada por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2 z^2} |u_k(\tau)|^2. \quad (3.95)$$

Puesto que vimos que si  $c_s k = aH$  entonces  $\mathcal{R}$  se congela tomando un valor constante, consideraremos entonces la función en el límite  $k\tau \rightarrow 0$ , así

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H^2}{8\pi^2 \epsilon c_s}. \quad (3.96)$$

Por otro lado, es posible definir una forma dimensional del espectro de potencia mediante la función de correlación de dos puntos como

$$\langle 0|\mathcal{R}(\mathbf{k})\mathcal{R}(\mathbf{k}')|0\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k). \quad (3.97)$$

Así, la relación entre la cantidad adimensional  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  y  $P_{\mathcal{R}}(k)$  viene dada por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k). \quad (3.98)$$

Utilizando esta idea, la definición dada en la ecuación (3.97) puede generalizarse para una función de correlación de tres puntos de la forma

$$\langle 0 | \mathcal{R}(\mathbf{k}_1) \mathcal{R}(\mathbf{k}_2) \mathcal{R}(\mathbf{k}_3) | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (3.99)$$

donde  $B_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  se define como el biespectro, cantidad que permite definir la función de correlación para tres puntos como una función del triángulo formado por los vectores  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  y  $\mathbf{k}_3$  en el espacio de momentum. Pero dado que hemos considerado la hipótesis de isotropía, o invariancia rotacional, el biespectro debe ser función solamente de la magnitud de los vectores de momentum. Por otra parte, esta función de correlación es sensible a desviaciones de la distribución gaussiana, por lo que el biespectro describe las no gaussianidades que pudieran aparecer en el CMB.

Luego, invirtiendo la expresión (3.99) se tiene que

$$B_{\mathcal{R}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \int d^3x d^3y \langle 0 | \mathcal{R}(\mathbf{x}, \tau) \mathcal{R}(\mathbf{y}, \tau) \mathcal{R}(\mathbf{0}, \tau) | 0 \rangle e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{y}}, \quad (3.100)$$

donde hemos usado que  $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  y evaluado  $\mathbf{z} = 0$  dado que es posible puesto que se tiene homogeneidad e isotropía en el background.

Además, siguiendo la idea de estudiar las no gaussianidades que aparecen en el espectro, éstas son analizadas asumiendo el siguiente ansatz para la perturbación escalar

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G - \frac{3}{5} f_{NL} \mathcal{R}_G^2, \quad (3.101)$$

donde  $\mathcal{R}_G$  corresponde a la parte lineal gaussiana de las perturbaciones y  $f_{NL}$  se define como el parámetro de acoplamiento no lineal, el cual da cuenta del tamaño de la no gaussianidad. Notemos que el signo usado sigue las convenciones de Chen et al. [57] y Maldacena [56], el cual es opuesto a la convención usada por WMAP.

Modelos simples de inflación (por ejemplo, ver [56] y [59]) predicen un espectro gaussiano con leves desviaciones de dicha gaussianidad del orden de los parámetros de slow roll, lo cual está de acuerdo con los datos mostrados por PLANCK [49]. Por lo que hasta el momento se continúa en la búsqueda de evidencia significativa de no gaussianidades mediante las mediciones del CMB y de las estructuras de gran escala (en inglés Large Scale Structure, LSS). Los datos de PLANCK sobre las mediciones del CMB muestran restricciones más fuertes para los valores de  $f_{NL}$  que las dadas por las mediciones de LSS entregadas por SSDS [60].

Por otro lado, también podemos considerar el hecho de que las fluctuaciones cuánticas excitan las fluctuaciones tensoriales de la métrica

$$ds^2 = a^2[d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (3.102)$$

Luego, las ondas gravitacionales pueden dividirse en dos modos de polarización  $h_+$  y  $h_\times$  de la forma

$$h_{ij} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times. \quad (3.103)$$

De este modo calcularemos el espectro de potencia de cada polarización de manera similar a lo hecho para las perturbaciones escalares mediante la función de correlación de dos puntos

$$\langle h_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}'} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{+,\times}(k). \quad (3.104)$$

Así, tenemos la relación

$$\mathcal{P}_{+,\times}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_{+,\times}(k). \quad (3.105)$$

Definimos entonces el espectro de potencia tensorial  $\mathcal{P}_h$  como la suma de los espectros de potencia de las dos polarizaciones de la forma

$$\mathcal{P}_h = \mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_\times. \quad (3.106)$$

Luego, de forma análoga al caso escalar, podemos definir un índice espectral de la manera

$$n_t = \frac{d \ln \mathcal{P}_h(k)}{d \ln k}, \quad (3.107)$$

donde  $n_t$  forma parte de la expresión

$$\mathcal{P}_h(k) = \mathcal{P}_{h0}(k_*) \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_t}. \quad (3.108)$$

Las definiciones de los espectros de potencia escalar y tensorial nos permiten definir la cantidad

$$r = \frac{\mathcal{P}_h(k_*)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_*)}, \quad (3.109)$$

conocida como el *tensor-to-scalar ratio*.

## Capítulo 4

# Teoría Efectiva de Campos

En la naturaleza notamos que los fenómenos observados ocurren en un gran rango de escalas de energía. Considerando esto, podemos fijar una escala de cutoff  $\Lambda$  mayor a cualquier masa  $m$  de las partículas asociadas en el fenómeno de interés. De este modo, tendremos partículas ligeras donde  $m < \Lambda$  que estarán incluidas dentro de esta teoría efectiva, mientras que toda partícula pesada de masa  $m > \Lambda$  se integra si la teoría sobre dicha escala UV es conocida o de lo contrario, si no se conoce, simplemente sus efectos son parametrizados. De este modo, una teoría efectiva describe la física de estos grados de libertad ligeros que se encuentran bajo la escala de cutoff  $\Lambda$ . Siguiendo esta línea, en este capítulo revisaremos inflación desde la perspectiva de la teoría efectiva de campos, siguiendo en la Sec. 4.1 la idea de Cheung et al. [21] encontrando que la acción descrita es capaz de reproducir la expresión hallada en (3.72). Finalmente en la Sec. 4.2 mostramos un ejemplo de una teoría de inflación con más de un campo escalar que puede estudiarse mediante el formalismo de EFT.

## 4.1. EFT en inflación

Mediante el ejemplo del modelo  $P(X, \phi)$  descrito en el capítulo 3, escribimos de una manera más general la acción de la ecuación (3.21), de modo que se tiene una velocidad del sonido diferente de 1. Ahora, una manera más general de escribir un lagrangiano en el gauge comóvil, fue dada por Cheung et al. [21], de la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R + \dot{H} g^{00} - (3H^2 + \dot{H}) + \frac{1}{2!} M_2(t)^4 (g^{00} + 1)^2 + \frac{1}{3!} M_3(t)^4 (g^{00} + 1)^3 + \dots \right], \quad (4.1)$$

en que los puntos suspensivos indican otros términos de orden superior que no serán considerados en este trabajo de tesis, pues sólo requeriremos hasta expresiones cúbicas.

Notemos que el lagrangiano en la ecuación (4.1) contiene una gran cantidad de modelos de inflación. Por una parte, considerando los primeros tres términos y fijando el resto a cero se tiene el modelo canónico de slow-roll. Vemos que

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} \dot{\bar{\phi}}^2 g^{00} - V(\bar{\phi}) \right], \quad (4.2)$$

donde de la ecuación (3.27) se tiene que  $\dot{\bar{\phi}}^2 = -2\dot{H}$  y  $V(\bar{\phi}) = 3H^2 + \dot{H}$ .

Por otra parte, los dos términos que siguen, que involucran a  $M_2$  y  $M_3$ , funciones sólo del tiempo, engloban modelos con términos cinéticos no canónicos, como los vistos en la sección 3.2.2.

Vemos que esta idea permite dar una visión general para cualquier  $H(t)$  que rompa espontáneamente la simetría de traslación temporal. Entonces, para dar una descripción de la dinámica, introducimos el bosón de Goldstone  $\pi$  asociado con la ruptura espontánea de la invariancia traslacional del tiempo. Así podemos escribir

$$\bar{t} = t + \pi(t, \mathbf{x}). \quad (4.3)$$

Consideremos el flat gauge, aquí

$$g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}. \quad (4.4)$$

Luego, realizamos una reparametrización dada en (4.3) de modo que

$$a(t) \rightarrow a(\bar{t} - \pi). \quad (4.5)$$

Expandiendo  $a(\bar{t})$ , tenemos que

$$a(\bar{t}) = a(t) (1 - H\pi + \dots). \quad (4.6)$$

Notamos que a primer orden la ecuación (4.6) es equivalente a

$$a(\bar{t}) = a(t)e^{-H\pi}. \quad (4.7)$$

Insertamos esta expresión en (4.4) y tenemos que

$$g_{ij} = a^2(t)e^{-2H\pi}\delta_{ij}. \quad (4.8)$$

Por otro lado, en el gauge comóvil o unitario, donde el grado de libertad escalar corresponde a la perturbación de curvatura comóvil  $\mathcal{R}(t, \mathbf{x})$ , podemos escribir

$$g_{ij} = a^2(t)e^{2\mathcal{R}}\delta_{ij}. \quad (4.9)$$

Comparando (4.8) y (4.9) establecemos una relación a primer orden entre las perturbaciones de curvatura y el bosón de Goldstone de la forma

$$\mathcal{R}(t, \mathbf{x}) = -H\pi(t, \mathbf{x}). \quad (4.10)$$

De lo anterior, nos damos cuenta de que el bosón de Goldstone parametriza las perturbaciones escalares en el flat gauge. Por otra parte, la reparametrización dada por (4.3) resulta en un reescalamiento de Weyl  $a(t) \rightarrow a(t)e^{\mathcal{R}(t, \mathbf{x})}$ .

Siguiendo la metodología de Cheung et. al [21], para ir desde el lagrangiano en el gauge comóvil (4.1) al flat gauge, realizando el procedimiento de Stückelberg, desarrollamos una reparametrización del tiempo del tipo  $t \rightarrow \tilde{t} = t + \xi^0(x)$  y  $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ . Así, tenemos que  $g^{00}$  transforma como

$$g^{00}(x) \rightarrow \tilde{g}^{00}(\tilde{x}(x)) = \frac{\partial \tilde{x}^0(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^0(x)}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}(x). \quad (4.11)$$

Así, incorporando el bosón de Goldstone usando la sustitución

$$\xi^0(x(\tilde{x})) = -\tilde{\pi}(\tilde{x}), \quad (4.12)$$

tendremos que la acción (4.1) queda, omitiendo los tildes por simplicidad de la notación, que

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} R - (3H^2(t + \pi) + \dot{H}(t + \pi)) \right. \\ & + \dot{H}(t + \pi) ((1 + \dot{\pi})^2 g^{00} + 2(1 + \dot{\pi}) \partial_i \pi g^{0i} + g^{ij} \partial_i \pi \partial_j \pi) \\ & + \frac{1}{2!} M_2^4(t + \pi) ((1 + \dot{\pi})^2 g^{00} + 2(1 + \dot{\pi}) \partial_i \pi g^{0i} + g^{ij} \partial_i \pi \partial_j \pi + 1)^2 \\ & \left. + \frac{1}{3!} M_3^4(t + \pi) ((1 + \dot{\pi})^2 g^{00} + 2(1 + \dot{\pi}) \partial_i \pi g^{0i} + g^{ij} \partial_i \pi \partial_j \pi + 1)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Consideremos los elementos cuadráticos y cúbicos de la ecuación (4.13), dado que en este trabajo sólo trataremos con estos términos, de modo que

$$S_\pi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} - \dot{H} \left( \dot{\pi}^2 - \frac{(\partial_i \pi)^2}{a^2} \right) + 2M_2^4 \left( \dot{\pi}^2 + \dot{\pi}^3 - \dot{\pi} \frac{(\partial_i \pi)^2}{a^2} \right) - \frac{4}{3} M_3^4 \dot{\pi}^3 + \dots \right]. \quad (4.14)$$

Notemos que al tomar sólo la parte cuadrática de (4.14) y usando (4.10) obtendremos la expresión (3.72), con

$$\frac{1}{c_s^2} = 1 - \frac{2M_2^4}{\dot{H}}. \quad (4.15)$$

Es decir, al romperse la simetría de Lorentz por la dependencia temporal del background, se tiene la posibilidad de una velocidad del sonido  $c_s < 1$ .

## 4.2. Multi-field inflation y EFT

Consideremos un mecanismo en que inflación no se produce sólo por un campo como hemos visto hasta ahora, sino que puede darse debido a la existencia de más de un campo escalar. Para nuestro estudio solamente consideraremos dos campos, modelo que utilizaremos en el capítulo 6. La idea de esta teoría se puede estudiar mediante EFT integrando grados de libertad masivos. Comenzamos con la acción que describe la teoría:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \gamma_{ab} \partial_\mu \phi^a \partial_\nu \phi^b - V(\phi) \right], \quad (4.16)$$

donde  $R$  se mantiene como el escalar de Ricci,  $g^{\mu\nu}$  la métrica del espacio-tiempo a usar,  $V(\phi)$  es el potencial, mientras  $\phi^a$ , con  $a = 1, 2$ , corresponde al conjunto de los dos campos escalares equipados con una métrica  $\gamma_{ab}$  que describe la geometría del espacio escalar caracterizado por estos campos. De esta manera, las ecuaciones de movimiento son del tipo

$$\square \phi^a + \Gamma_{bc}^a g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^b \partial_\nu \phi^c - V^a = 0, \quad (4.17)$$

donde  $\square$  es el operador D'Alembertiano, y  $V^a = \gamma^{ab}\partial_b V$ .

Consideremos entonces la métrica FLRW, de modo que las ecuaciones de movimiento en esta situación son del tipo

$$\frac{D}{dt}\dot{\phi}_0^a + 3H\dot{\phi}_0^a + V^a = 0, \quad (4.18)$$

donde hemos definido la derivada total  $D/dt$  de una cantidad  $X$  como

$$\frac{D}{dt}X^a = \dot{X}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{\phi}^b X^c. \quad (4.19)$$

Por otro lado, considerando las ecuaciones de Friedmann se tendrá que

$$3H^2 = \dot{\phi}_0^2 + V, \quad (4.20)$$

donde  $\dot{\phi}_0^2 = \gamma_{ab}\dot{\phi}^a\dot{\phi}^b$ . Luego, siguiendo el método de la Sec. 3.2, juntando las ecuaciones (4.18) y (4.20) se tendrá que

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2. \quad (4.21)$$

Definiremos los siguientes vectores

$$T^a = \frac{\dot{\phi}_0^a}{\dot{\phi}_0}, \quad (4.22)$$

$$N^a = \sqrt{\det \gamma} \epsilon_{ab} T^b, \quad (4.23)$$

los cuales describen las direcciones tangente y normal a la trayectoria de los campos en la variedad en que están definidos, respectivamente. Por otro lado,  $T^a$  y  $N^a$  están contruidos de modo que  $T^a N_a = 0$ . En la ecuación (4.23)  $\epsilon_{ab}$  corresponde al símbolo de Levi-Civita en dos dimensiones.

Aplicamos una derivada total sobre  $T^a$ , así, se tiene que

$$\frac{DT^a}{dt} = \frac{1}{\dot{\phi}_0} \frac{D}{dt} \dot{\phi}_0^a - \frac{\ddot{\phi}_0^a}{\dot{\phi}_0} T^a. \quad (4.24)$$

Luego, usando la ecuación (4.18) en la ecuación (4.24) se tiene que

$$\frac{DT^a}{dt} = -\frac{\ddot{\phi}_0^a}{\dot{\phi}_0} T^a - \frac{1}{\dot{\phi}_0} \left( 3H\dot{\phi}_0^a + V^a \right). \quad (4.25)$$

Así, proyectando la ecuación (4.25) en las direcciones determinadas por  $T^a$  y  $N^a$  respectivamente tendremos

$$\ddot{\phi}_0 + 3H\dot{\phi}_0 + V_\phi = 0, \quad (4.26)$$

$$\frac{DT^a}{dt} = -\frac{V_N}{\dot{\phi}_0} N^a. \quad (4.27)$$

Acá  $V_\phi = T^a V_a$  y  $V_N = N^a V_a$ . Dado que  $V_a$  se encuentra en el espacio definido por los vectores  $T^a$  y  $N^a$ , es que podemos escribirlo de la forma

$$V_a = V_\phi T_a + V_N N_a. \quad (4.28)$$

Por otro lado, definiremos  $\epsilon$  del mismo modo que en el caso para un sólo campo, mediante la ecuación (3.7). Y utilizando la ecuación (4.21) tendremos que

$$\epsilon = \frac{\dot{\phi}_0^2}{2H^2}. \quad (4.29)$$

A su vez, definiremos  $\eta^a$  de la forma

$$\eta^a = -\frac{1}{H\dot{\phi}_0} \frac{D\dot{\phi}_0^a}{dt}. \quad (4.30)$$

Notemos que podemos descomponer  $\eta^a$  del mismo modo que  $V_a$  mediante

$$\eta^a = \eta_{\parallel} T^a + \eta_{\perp} N^a, \quad (4.31)$$

donde

$$\eta_{\parallel} = -\frac{\ddot{\phi}_0}{H\dot{\phi}_0}, \quad (4.32)$$

$$\eta_{\perp} = \frac{V_N}{H\dot{\phi}_0}. \quad (4.33)$$

Vemos que  $\eta_{\parallel}$  tiene la misma forma funcional que el parámetro  $\delta$  definido en la ecuación (3.30), de este modo podemos establecer una analogía entre  $\eta_{\parallel}$  y el parámetro  $\eta$  de un sólo campo. Además podemos apreciar que  $\eta_{\perp}$  está relacionado con la tasa de cambio de  $T^a$ .

Por otro lado, es posible visualizar de forma geométrica la idea de varios campos, por lo que podemos considerar una velocidad angular  $\Omega$  para la trayectoria de la forma

$$\Omega = -N_a \dot{T}^a. \quad (4.34)$$

Puesto que en esencia (4.34) es la misma ecuación (4.27), entonces

$$\Omega = \frac{V_N}{\dot{\phi}_0}. \quad (4.35)$$

Notamos que de la definición de  $\eta_{\perp}$  podemos escribir  $\Omega$  de la forma

$$\Omega = H\eta_{\perp}. \quad (4.36)$$

Consideremos ahora perturbaciones a la solución  $\phi_0^a$  de la forma  $\phi^a(t, \mathbf{x}) = \phi_0^a(t) + \delta\phi^a(t, \mathbf{x})$ . De acuerdo a Sasaki y Stewart [61], la ecuación de movimiento para  $\delta\phi^a(t, \mathbf{x})$  viene dada por

$$\frac{D^2\delta\phi^a}{dt^2} + 3H\frac{D\delta\phi^a}{dt} - R_{bcd}^a\dot{\phi}^b\dot{\phi}^c\delta\phi^d + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi^a + V_{;b}^a\delta\phi^b = \frac{1}{a^3}\frac{D}{dt}\left(\frac{a^3}{H}\dot{\phi}^a\dot{\phi}^b\right)\gamma_{bc}\delta\phi^c, \quad (4.37)$$

en que el punto y coma que aparece en  $V$  representa una derivada covariante en el espacio del campo escalar y  $R_{bcd}^a$  corresponde al tensor de curvatura de Riemann

calculado a partir de  $\gamma_{ab}$ . Usamos las variables de Mukhanov-Sasaki [62, 63]

$$Q^a = \delta\phi^a + \frac{\dot{\phi}^a}{H}\psi, \quad (4.38)$$

donde  $\psi$  corresponde a la perturbación de curvatura de la métrica espacial. De este modo, siguiendo la idea de Achúcarro et al. [40] se tiene que

$$\frac{D^2 Q^a}{dt^2} + 3H \frac{DQ^a}{dt} - \frac{\nabla^2}{a^2} Q^a + C_b^a Q^b = 0, \quad (4.39)$$

donde el tensor  $C_b^a$  viene definido por

$$C_b^a = \nabla_b V^a - \dot{\phi}_0^2 R_{cdb}^a T^c T^d + 2\epsilon \frac{H}{\dot{\phi}_0} (T^a V_b + T_b V^a) + 2\epsilon(3 - \epsilon) H^2 T^a T_b. \quad (4.40)$$

Usando los vectores definidos en (4.22) y (4.23) podemos proyectar  $Q^a$  de la forma

$$v^T = aT_a Q^a, \quad (4.41)$$

$$v^N = aN_a Q^a. \quad (4.42)$$

Así se definen los campos invariantes de gauge  $v^T$  y  $v^N$ , que vienen dados según la expresión para  $Q^a$  en (4.38) como

$$v^T = aT_a \delta\phi^a + \frac{\dot{\phi}}{H}\psi, \quad (4.43)$$

$$v^N = aN_a \delta\phi^a. \quad (4.44)$$

Por otra parte, es posible trabajar con las perturbaciones de curvatura adiabática  $\mathcal{R}$  y de entropía  $\mathcal{S}$  (isocurvatura) en vez de  $v^T$  y  $v^N$ , como en el trabajo de Gordon et al. [64], definidas de la forma

$$\mathcal{R} = \frac{H}{a\dot{\phi}} v^T, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{S} = \frac{H}{a\dot{\phi}} v^N. \quad (4.46)$$

Para simplificar las expresiones en vez de utilizar  $\mathcal{S}$  definiremos el siguiente campo

$$\mathcal{F} = \frac{\dot{\phi}_0}{H} \mathcal{S}. \quad (4.47)$$

Usando estas definiciones, la acción cuadrática se puede expresar como

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x a^3 \left[ \frac{\dot{\phi}_0^2}{H^2} \left( \dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{(\nabla \mathcal{R})^2}{a^2} \right) + \dot{\mathcal{F}}^2 - \frac{(\nabla \mathcal{F})^2}{a^2} + 4\dot{\phi}_0 \eta_\perp \dot{\mathcal{R}} \mathcal{F} - M_{\text{eff}}^2 \mathcal{F}^2 \right], \quad (4.48)$$

donde hemos definido

$$M_{\text{eff}}^2 = V_{NN} + H^2 \epsilon R - \Omega^2, \quad (4.49)$$

en que  $R$  corresponde al escalar de Ricci que se obtiene a partir de  $\gamma_{ab}$  y  $V_{NN} = N^a N^b (V_{ab} - \Gamma_{ab}^c V_c)$ .

Luego, las ecuaciones de movimiento para  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{F}$  provenientes de la acción (4.48) son

$$\ddot{\mathcal{R}} + (3 + 2\epsilon - 2\eta_\parallel) H \dot{\mathcal{R}} - \frac{\nabla^2 \mathcal{R}}{a^2} = -2 \frac{H^2}{\dot{\phi}_0} \eta_\perp \left[ \dot{\mathcal{F}} + (3 - \eta_\parallel - \xi_\perp) H \mathcal{F} \right], \quad (4.50)$$

$$\ddot{\mathcal{F}} + 3H \dot{\mathcal{F}} - \frac{\nabla^2 \mathcal{F}}{a^2} + M_{\text{eff}}^2 \mathcal{F} = 2\dot{\phi}_0 \eta_\perp \dot{\mathcal{R}}, \quad (4.51)$$

donde hemos definido  $\xi_\perp = -\dot{\eta}_\perp / (H\eta_\perp)$ .

Ahora, usando teoría efectiva de campos para  $\mathcal{R}$ , integraremos el campo  $\mathcal{F}$  para  $M_{\text{eff}}^2 \gg H^2$ . Consideraremos primero que durante una desviación de la trayectoria la velocidad angular se mantendrá constante, es decir  $\Omega = \text{cte}$ . Luego, para este sistema de ecuaciones acoplado se esperan soluciones del tipo

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ e^{-i\omega_+ t} + \mathcal{R}_- e^{-i\omega_- t}, \quad (4.52)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ e^{-i\omega_+ t} + \mathcal{F}_- e^{-i\omega_- t}, \quad (4.53)$$

donde  $\omega_+$  y  $\omega_-$  son las frecuencias a las que los modos oscilan [65]. El valor que dichas frecuencias tengan está relacionado con el número de onda  $k$ . Para el caso  $k/a \gg M_{\text{eff}}$ ,  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{F}$  no tienen masa y oscilan con frecuencias del orden de  $\sim k/a$ . Luego, en el caso  $M_{\text{eff}} \gg k/a \gg H$  se rompe la degeneración y se tiene que  $\omega_- \sim k/a$  y  $\omega_+ \sim M_{\text{eff}}$ . Finalmente, si los modos entran en el régimen  $k/a < H$  las contribuciones provenientes de  $\omega_+$  decaen mientras que las que vengan de  $\omega_-$  debido al hecho de que no tienen masa se congelan.

Dado que en el caso  $M_{\text{eff}} \gg k/a$  podemos despreciar las derivadas temporales de  $\mathcal{F}$ , y puesto que  $H \ll M_{\text{eff}}$  el término de roce  $3H\dot{\mathcal{F}}$  se vuelve despreciable, la ecuación (4.51) queda

$$-\frac{\nabla^2 \mathcal{F}}{a^2} + M_{\text{eff}}^2 \mathcal{F} = 2\dot{\phi}_0 \eta_{\perp} \dot{\mathcal{R}}. \quad (4.54)$$

Llevando esta ecuación al espacio de Fourier, obtenemos la relación

$$\mathcal{F} = \frac{2\dot{\phi}_0 \eta_{\perp} \dot{\mathcal{R}}}{k^2/a^2 + M_{\text{eff}}^2}. \quad (4.55)$$

Manteniendo este mismo régimen, despreciamos el término  $\dot{\mathcal{F}}^2$  en la acción (4.48) y reemplazando la ecuación (4.55) en la ecuación (4.48), tendremos que la acción efectiva para  $\mathcal{R}$  viene dada por

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int d^4 x a^3 \frac{\dot{\phi}_0^2}{H^2} \left[ \frac{\dot{\mathcal{R}}^2}{c_s^2} - \frac{k^2 \mathcal{R}^2}{a^2} \right], \quad (4.56)$$

donde definimos

$$c_s^{-2} = 1 + \frac{4H^2 \eta_{\perp}^2}{\frac{k^2}{a^2} + M_{\text{eff}}^2}. \quad (4.57)$$

Vemos que la acción descrita en (4.56) es similar al caso de un solo campo, donde la velocidad del sonido en la teoría de múltiples campos es diferente de 1. Por otro lado, apreciamos que es posible estudiar múltiples campos en términos de una teoría efectiva de inflación.

## Capítulo 5

# Modos B y la velocidad del sonido de las fluctuaciones primordiales<sup>1</sup>

Durante 2014, los resultados mostrados por BICEP2 [47] daban cuenta de que el valor para el tensor to scalar ratio  $r$  debía ser del orden de  $\sim 0.1$ . Aún cuando las correcciones de PLANCK [48] revelan que no necesariamente es así, la sensibilidad de futuras observaciones cosmológicas como Spider, EBEX, CMB-Pol y LiteBird a valores grandes de  $r$  podrían descubrir un valor no nulo para el tensor to scalar ratio. En el trabajo de Kinney y Freese [67], por ejemplo, se argumenta que un valor grande de  $r$  favorece sustancialmente un valor grande y negativo para el running del índice espectral, necesario para acomodar el límite superior de  $r$  inferido de los datos de PLANCK [68, 69].

Por otro lado, una importante consecuencia de tener un valor grande para el tensor to scalar ratio es que el inflatón debe haber tenido excursiones super-Planckianas [70, 71]. Para que esto haya sido posible sin ajuste fino se requiere de una *shift-symmetry* en la teoría efectiva proveniente de una teoría UV completa. Esta idea

---

<sup>1</sup>El contenido de este capítulo dio origen a una publicación [66], luego, las figuras utilizadas aquí son las mismas utilizadas en dicho paper.

de construir una teoría UV que contenga inflación en un marco de una teoría como supergravedad o teoría de cuerdas que incorpore esta simetría es un desafío actual dentro de cosmología [12, 14, 72–76].

Por otra parte, un valor grande de  $r$  (es decir, en el rango entre 0.01 – 0.1), descartaría una gran cantidad de modelos propuestos a la vez que proporciona una idea de la escala de masa que caracteriza la geometría de las teorías fundamentales que contienen inflación [77–82]. Además esto nos da información acerca del acoplamiento entre inflación y el modelo estándar [83, 84].

Es sabido que a bajo orden en Slow-Roll el tensor to scalar ratio se puede relacionar con el parámetro de Slow-Roll  $\epsilon$  y la velocidad del sonido  $c_s$  de las perturbaciones adiabáticas mediante

$$r = 16\epsilon c_s. \quad (5.1)$$

Entonces, dependiendo del valor de  $r$ , la ecuación (5.1) entrega diferentes posibles valores para  $\epsilon$  y  $c_s$  como muestra la Fig. 5.1.

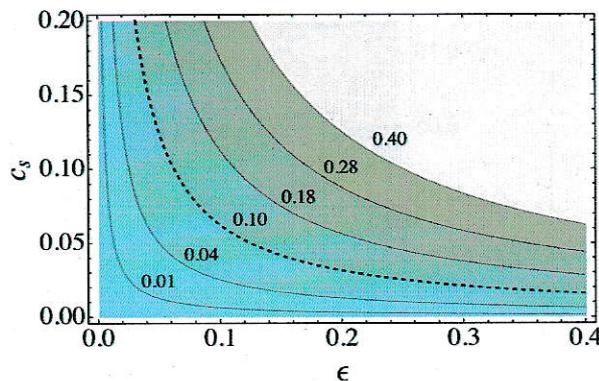


Figura 5.1: La figura muestra las curvas de nivel para  $r$  en el plano  $\epsilon$ - $c_s$ , obtenido a partir de la ec. (5.1). La línea punteada corresponde al caso  $r = 0.1$ .

La degeneración entre  $\epsilon$  y  $c_s$  que surge de la ecuación (5.1) puede resolverse mediante las mediciones de no gaussianidad [57,85], las cuales implican que  $c_s > 0.02$  [49,86]. Sin embargo, Baumann, Green y Porto [87], encontraron que un valor grande de  $r$  da la posibilidad de que exista un límite inferior mayor para  $c_s$  (ver también [88] para otro análisis acerca de la degeneración implicada por  $c_s$ ). La observación crucial que lleva a este resultado es que la diferencia de tiempo entre los cruces del horizonte de los modos escalares y tensoriales implicados por  $c_s \neq 1$  viene junto a un considerable running de  $H$ , modificando la forma en que  $r$  se relaciona con  $\epsilon$  y  $c_s$ , obteniéndose la expresión [89,90]

$$r = 16\epsilon c_s e^{2\epsilon \ln c_s}. \quad (5.2)$$

Acá, la cantidad  $2\epsilon \ln c_s$  es debido al running de  $H$  entre los dos tiempos de cruce de horizonte. Ya que  $2\epsilon \ln c_s$  puede tomar valores de orden uno sin violar la condición de slow-roll  $\epsilon \ll 1$ , se deduce de la ecuación (5.2) que  $c_s$  está acotado por debajo, como muestra la Fig. 5.2.

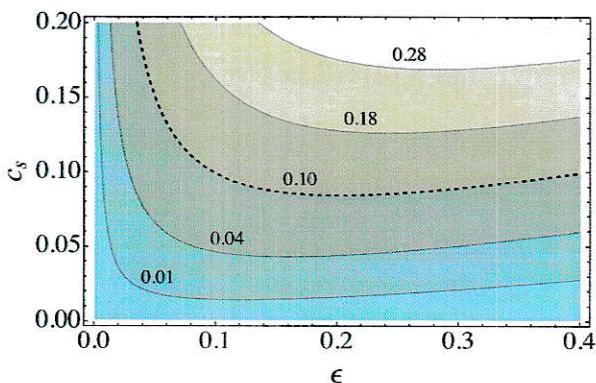


Figura 5.2: La figura muestra las curvas de nivel para  $r$  en el plano  $\epsilon$ - $c_s$ , obtenido a partir de la ec. (5.2). La línea punteada corresponde al caso  $r = 0.1$ , el cual implica una cota inferior de  $c_s > 0.09$ .

En particular, la ecuación (5.2) implica que  $c_s > 0.14$  para el rango de valores de

$r > 1.3$ . Además es posible ver que las cotas para  $c_s$  son más fuertes que los constraints de no gaussianidad cuando  $r > 0.01$ . Esto, ya que según lo expuesto en [91], es posible reconciliar una no gaussianidad grande con un gran valor para  $r$ . Esto se debe a que en teoría efectiva de campos para inflación hay un segundo parámetro adicional a la velocidad del sonido capaz de incrementar desviaciones de la gaussianidad.

Modelos con  $c_s \neq 1$  aparecen en diferentes contextos donde inflación es llevada a cabo por un fluido no trivial [25] como también en compactificaciones a baja energía en teoría de cuerdas [24, 92]. Por ejemplo en teorías de múltiples campos las perturbaciones de curvatura están forzadas a propagarse con una velocidad del sonido  $c_s < 1$  cuando los grados de libertad masivos interactúan con el inflatón, dando como resultado cambios en la trayectoria inflacionaria en el espacio de coordenadas [38, 40–42, 44, 93–96]. De forma general, la velocidad del sonido juega un rol importante en la teoría efectiva de campos en inflación como se vio en el capítulo 4 puesto que provee una parametrización sistemática de las desviaciones del modelo canónico para un sólo campo.

## 5.1. Tensor to Scalar Ratio

Como vimos en el capítulo 3, inflación aparece en un universo quasi-de Sitter, caracterizado por una evolución del parámetro de Hubble donde  $\epsilon \ll 1$  y  $|\eta| \ll 1$ . A su vez, la velocidad del sonido  $c_s$  a la que se propagan las perturbaciones adiabáticas también juega un papel en determinar el valor de las cantidades observables. A partir de las definiciones de  $\epsilon$ ,  $\eta$  y  $s$  dadas en las ecuaciones (3.7), (3.10) y (3.71) respectivamente, podemos calcular el espectro de potencia de los modos escalares y tensoriales.

### 5.1.1. Cálculo del espectro de potencia

Para el cálculo del espectro de potencia comenzaremos a partir de la acción cuadrática de la evolución de las perturbaciones adiabáticas  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, t)$  con una velocidad del sonido  $c_s$  distinta de 1 que tenemos en la ecuación (3.72).

Puesto que estamos interesados en calcular el espectro de potencia a primer orden en los parámetros de slow-roll, mantendremos  $\eta$  y  $s$ , definidos en las ecuaciones (3.10) y (3.71) respectivamente, constantes. Haciendo esto obtendremos que para  $\epsilon$  y  $c_s$  se tiene que

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{\eta_0 \ln(a/a_0)}, \quad (5.3)$$

$$c_s = c_0 e^{s_0 \ln(a/a_0)}, \quad (5.4)$$

donde  $\epsilon_0$  y  $c_0$  corresponden a los valores de  $\epsilon$  y  $c_s$  para un tiempo  $t_0$  tal que  $a(t_0) = a_0$ .

De la definición de  $\epsilon$  podemos obtener  $H$ , por lo tanto, integrando la ecuación (5.3) se tiene

$$H = H_0 \exp \left\{ \frac{\epsilon_0}{\eta_0} \left[ 1 - \left( \frac{a}{a_0} \right)^{\eta_0} \right] \right\}, \quad (5.5)$$

donde  $H_0$  corresponde al valor de  $H$  en el tiempo  $t_0$ .

Podemos expandir las exponenciales en cada caso y tendremos que

$$\epsilon = \epsilon_0 [1 + \eta_0 \ln(a/a_0) + \dots], \quad (5.6)$$

$$c_s = c_0 [1 + s_0 \ln(a/a_0) + \dots], \quad (5.7)$$

$$H = H_0 \left[ 1 - \epsilon_0 \ln(a/a_0) + \frac{\epsilon_0(\epsilon_0 - \eta_0)}{2} \ln^2(a/a_0) + \dots \right]. \quad (5.8)$$

Ahora, trabajando en tiempo conforme ( $\tau$ ) integramos  $H$  y obtenemos el factor de escala de la forma

$$a = a_0(\tau) [1 + A_1 + A_2 + \dots], \quad a_0(\tau) = -\frac{a_0}{H_0\tau}, \quad (5.9)$$

donde

$$A_1(\tau) = \epsilon_0 [1 + \ln(a_0(\tau)/a_0)], \quad (5.10)$$

$$A_2(\tau) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left[ 2(2\epsilon_0 + \eta_0) + 2(2\epsilon_0 + \eta_0) \ln(a_0(\tau)/a_0) + (\epsilon_0 + \eta_0) \ln^2(a_0(\tau)/a_0) \right]. \quad (5.11)$$

Para calcular la función de correlación de dos puntos introduciremos el campo canónico normalizado  $u(\mathbf{x}, t)$  mediante la definición dada en (3.75). Reemplazando esta expresión en la ecuación (3.72) tendremos que

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\tau \left[ (u')^2 - c_s^2 (\nabla u)^2 + \frac{z''}{z} u^2 \right], \quad (5.12)$$

donde

$$\frac{z''}{z} = a^2 H^2 \left( 2 - \epsilon + \frac{\eta}{2} - s \right) \left( 1 + \frac{\eta}{2} - s \right) + aH \left( \frac{\eta'}{2} - s' \right). \quad (5.13)$$

Manteniendo  $z''/z$  hasta primer orden en los parámetros de slow roll expresado en términos del tiempo conforme se tiene que

$$\frac{z''}{z} = \frac{2}{\tau^2} + \frac{3(2\epsilon_0 + \eta_0 - 2s_0)}{2\tau^2} + \dots \quad (5.14)$$

Con esto, dividimos en dos partes la acción, una a orden cero ( $S_0$ ) y la otra a primer orden ( $S_1$ ) en los parámetros de Slow-Roll, de forma que  $S = S_0 + S_1$  con

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^3x d\tau \left[ (u')^2 - c_0^2 (\nabla u)^2 + \frac{2}{\tau^2} u^2 \right], \quad (5.15)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d^3x d\tau \left[ -c_0^2 \omega(\tau) (\nabla u)^2 + \frac{1}{\tau^2} \delta_0 u^2 \right], \quad (5.16)$$

donde

$$\delta_0 = \frac{3}{2}(2\epsilon_0 + \eta_0 - 2s_0), \quad (5.17)$$

$$\omega(\tau) = 2s_0 \ln a_0(\tau). \quad (5.18)$$

Ahora, la acción de la ecuación (5.16) implica una contribución cuadrática a la parte de interacción del hamiltoniano dada por

$$H_I(\tau) = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ c_0^2 \omega(\tau) (\nabla u_I)^2 - \frac{\delta_0}{\tau^2} u_I^2 \right], \quad (5.19)$$

donde  $u_I$  es el campo del cuadro de interacción definido por

$$u_I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[ a_{\mathbf{k}} u_k(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_k^*(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (5.20)$$

en que  $a_{\mathbf{k}}$  y  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  corresponden a los operadores de destrucción y creación usuales, tal que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.21)$$

Por otra parte  $u_k$  es la solución normalizada a la ecuación de movimiento que surge a partir de la acción de la ecuación (5.15):

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2c_0k}} \left( 1 - \frac{i}{c_0k\tau} \right) e^{-ic_0k\tau}. \quad (5.22)$$

Luego, mediante el formalismo de la teoría de perturbaciones podemos obtener  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)$  a partir del campo del cuadro de interacción  $u_I(\mathbf{x}, t)$  mediante

$$u(\mathbf{x}, \tau) = U^\dagger(\tau) u_I(\mathbf{x}, \tau) U(\tau), \quad (5.23)$$

donde  $U(\tau)$  corresponde al propagador dado por

$$U(\tau) = \mathcal{T} \exp \left\{ -i \int_{-\infty_+}^{\tau} d\tau' H_I(\tau') \right\}, \quad (5.24)$$

en que  $\mathcal{T}$  es el símbolo de ordenamiento temporal usual y  $\infty_+ = (1 + i\epsilon)\infty$ .

Con esto, es posible calcular la función de correlación de dos puntos a partir de los campos del cuadro de interacción de la forma

$$\langle u(x, \tau)u(y, \tau) \rangle = \langle 0|U^\dagger(\tau)u_I(x, \tau)u_I(y, \tau)U(\tau)|0 \rangle. \quad (5.25)$$

Expandimos a primer orden en  $H_I$  y obtenemos que

$$\langle u(\mathbf{x}, \tau)u(\mathbf{y}, \tau) \rangle = \langle 0|u_I(x, \tau)u_I(y, \tau)|0 \rangle + i \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle 0|[H_I(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)u_I(\mathbf{y}, \tau)]|0 \rangle. \quad (5.26)$$

Consideremos ahora el cálculo del espectro de potencia para las fluctuaciones adiabáticas  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ . Dado que  $\mathcal{R} = u/z$ , entonces  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  estará dado por la función de correlación de dos puntos de los campos  $u$  recién vistos. Luego:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \tau) = \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3 z^2} \int d^3y \langle u(\mathbf{y}, \tau)u(0, \tau) \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}. \quad (5.27)$$

Expandimos  $z$  hasta primer orden en los parámetros de slow-roll de la forma  $z = z_0 + z_1$  donde

$$z_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0} a_0(\tau)}{c_0}, \quad (5.28)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\epsilon_0} a_0(\tau)}{c_0} [\epsilon_0 + (\epsilon_0 - s_0 + \eta_0/2) \ln a_0(\tau)]. \quad (5.29)$$

De este modo usando la ecuación (5.26) en la ecuación (5.27) tendremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \tau) &= \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3 z_0^2} \int_{\mathbf{y}} \langle 0|u_I(\mathbf{y}, \tau)u_I(0, \tau)|0 \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \\ &\quad - \frac{8\pi k^3 z_1}{(2\pi)^3 z_0^2} \int_{\mathbf{y}} \langle 0|u_I(\mathbf{y}, \tau)u_I(0, \tau)|0 \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \\ &\quad + \frac{4\pi i k^3}{(2\pi)^3 z_0^2} \int_{\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle 0|[H_I(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau)u_I(0, \tau)]|0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Así, el primer término de (5.30) da el espectro de potencia a orden cero  $\mathcal{P}_0$ , el cual es independiente de escala, mientras que los términos restantes entregan la corrección a primer orden  $\Delta\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \tau)$ , término que es dependiente de la escala  $k$  y de  $\tau$ . De este modo se tendrá que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_0 + \Delta\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k). \quad (5.31)$$

Finalmente, tomando estas expresiones en el límite de gran longitud de onda  $k|\tau| \ll 1$ , se tiene que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 c_0} \left[ 1 - (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0) \ln \left( \frac{kc_0}{a_0 H_0} \right) + (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0)\mathcal{C} - 2(\epsilon_0 + s_0) \right], \quad (5.32)$$

donde  $\mathcal{C} \equiv 2 - \ln 2 - \gamma$  (con  $\gamma$  la constante de Euler-Mascheroni), y el término de afuera del paréntesis corresponde a

$$\mathcal{P}_0 = \frac{H_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 c_0}, \quad (5.33)$$

el término independiente de escala.

### 5.1.2. Cálculo de $r$

Notemos que las correcciones dentro del paréntesis cuadrado de la ecuación (5.32) se deben a desviaciones de un espacio-tiempo de Sitter expresado en términos de los parámetros de slow-roll e implica una parte dependiente de escala proporcional a  $\ln(kc_0/a_0 H_0)$ . Donde el subíndice 0 indica que todas las cantidades de background están evaluadas en el mismo tiempo  $\tau_0$ . Luego, para calcular la amplitud, se necesita escoger una escala de pivot, la cual es una escala de referencia con la cual cualquier otra escala es comparada. Una alternativa es escoger

$$k_s = \frac{a_0 H_0}{c_0}, \quad (5.34)$$

que es referida como la *condicion de sound horizon crossing*. Con esta elección,  $k = k_s$  indica el modo con longitud de onda tal que coincide con el horizonte de sonido definido como  $c_0/H_0$  a tiempo conforme  $\tau_0$ . Entonces, la amplitud del espectro de potencia para este modo viene dada por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_s) = \frac{H_0^2}{8\pi^2\epsilon_0 c_0} \left[ 1 + (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0)\mathcal{C} - 2(\epsilon_0 + s_0) \right]. \quad (5.35)$$

Por otro lado, el índice espectral evaluado en esta escala pivot es

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = -(2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0) + \mathcal{O}(\epsilon_0^2), \quad (5.36)$$

donde  $\mathcal{O}(\epsilon_0^2)$  representa las contribuciones de segundo orden en los parámetros de slow-roll.

De forma análoga, se puede hacer lo mismo para los modos tensoriales, quedando el espectro de potencia tensorial a primer orden de la forma

$$\mathcal{P}_h(k) = \frac{2H_h^2}{\pi^2} \left[ 1 - 2\epsilon_h \ln \left( \frac{k}{a_h H_h} \right) + 2\epsilon_h(\mathcal{C} - 1) \right]. \quad (5.37)$$

Aquí, el subíndice  $h$  denota que las cantidades de background son evaluadas en un tiempo  $\tau_h$  que no necesariamente es el mismo  $\tau_0$ . Ahora, para comparar cantidades, debemos evaluar el espectro de potencia tensorial en la misma escala pivot  $k_s$  con que evaluamos el espectro de potencia escalar. Para hacer esto, debemos ajustar  $\tau_h$  de modo que  $k_s = a_h H_h$ , o de manera equivalente

$$\frac{H_h}{H_0} = \frac{a_0}{a_h c_0}. \quad (5.38)$$

Esta relación nos hace referencia al hecho de que cuando  $c_s \neq 1$  entonces los modos escalares y tensoriales cruzan el horizonte a tiempos diferentes,  $\tau_0$  y  $\tau_h$  respectivamente. Luego, la amplitud del espectro de potencia tensorial para el modo

tensorial cuya longitud de onda es  $k = k_s$  viene dado por

$$\mathcal{P}_h(k_s) = \frac{2H_h^2}{\pi^2} \left[ 1 + 2\epsilon_h(\mathcal{C} - 1) \right], \quad (5.39)$$

y el índice espectral para perturbaciones tensoriales por

$$n_t = -2\epsilon_h + \mathcal{O}(\epsilon_h^2). \quad (5.40)$$

Con estas expresiones podemos calcular el tensor to scalar ratio evaluado en la escala pivot  $k_s$  siguiendo la definición de la ecuación (3.109), luego, quedará expresado de la forma

$$r = 16\epsilon_0 c_0 \left( \frac{H_h}{H_0} \right)^2 \left[ 1 + 2\epsilon_h(\mathcal{C} - 1) - (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0)\mathcal{C} + 2(\epsilon_0 + s_0) \right]. \quad (5.41)$$

A partir de la ecuación (5.38) contamos el número de e-folds  $\Delta N = N_h - N_0$  entre las dos salidas del horizonte. Con esto se tiene que

$$\Delta N = \ln \left( \frac{H_0}{H_h} \right) - \ln c_0. \quad (5.42)$$

Además, de la definición de  $\epsilon$  en términos de  $N$  dada en la ecuación (3.9), integrando obtenemos

$$\ln \left( \frac{H_0}{H_h} \right) = - \int_{N_h}^{N_0} \epsilon(N) dN = \frac{\epsilon_0}{\eta_0} [e^{\eta_0 \Delta N} - 1], \quad (5.43)$$

donde hemos usado que  $\epsilon(N) = \epsilon_0 e^{\eta_0(N-N_0)}$ , resultado obtenido en la subsección previa. Por lo tanto, juntando las ecuaciones (5.42) y (5.43) se tiene

$$\Delta N + \ln c_0 = \frac{\epsilon_0}{\eta_0} [e^{\eta_0 \Delta N} - 1]. \quad (5.44)$$

Acá vemos que  $\Delta N \sim -\ln c_0$ . Sin embargo, puesto que  $-\ln c_0$  puede tomar valores grandes para  $c_s \ll 1$ , esto implica que no podemos expandir la exponencial

de la ecuación (5.44) en potencias de  $\eta_0 \Delta N$  para encontrar una expresión para  $\Delta N$ . En vez de eso, resolvemos analíticamente la ecuación (5.44) obteniendo

$$\Delta N = -\ln c_0 - \frac{1}{\eta_0} \left[ \epsilon_0 + W(-\epsilon_0 e^{-\epsilon_0 - \eta_0 \ln c_0}) \right], \quad (5.45)$$

donde  $W(x)$  es la función W de Lambert, que se define como la solución de la ecuación  $x = W(x)e^{W(x)}$ . Luego, usando la ecuación (5.42) y teniendo en cuenta la ecuación (5.45) en (5.41) tendremos que

$$r = 16\epsilon_0 c_0 e^{-2(\Delta N + \ln c_0)} \left[ 1 + 2\epsilon_0 e^{\eta_0 \Delta N} (\mathcal{C} - 1) - (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0)\mathcal{C} + 2(\epsilon_0 + s_0) \right], \quad (5.46)$$

donde hemos usado que

$$\epsilon_h = \epsilon_0 e^{\eta_0 \Delta N}. \quad (5.47)$$

Notemos que la ecuación (5.46) nos entrega  $r$  en función de  $c_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\eta_0$  y  $s_0$ . Sin embargo podemos reducir el número de parámetros de esta expresión usando la relación para el índice espectral en la ecuación (5.36). Luego, podemos expresar  $\Delta N$  como función de  $\epsilon_0$ ,  $c_0$  y  $s_0$  de la forma

$$\Delta N = -\ln c_0 - \frac{1}{1 - n_{\mathcal{R}} - 2\epsilon_0 - s_0} \left[ \epsilon_0 + W(-\epsilon_0 e^{-\epsilon_0 - (1 - n_{\mathcal{R}} - 2\epsilon_0 - s_0) \ln c_0}) \right], \quad (5.48)$$

entendiendo que el valor del índice espectral queda determinado por las observaciones. Según los últimos datos,  $1 - n_{\mathcal{R}} = 0.04$  [51].

Recordemos por otra parte, de la ecuación (5.40) se aprecia que dado el índice espectral tensorial  $n_t$  podemos obtener  $\epsilon_h$ , que reenfatizamos que es diferente de  $\epsilon_0$  para cuando  $c_s$  es mucho menor que 1. Por lo tanto, juntando las ecuaciones (5.44) y

(5.47) vemos que el valor de  $n_t$  reduce el número de parámetros de los que depende  $\Delta N$ , quedando solamente

$$\Delta N = -\frac{\ln c_0}{1 - (\epsilon_0 + n_t/2)/\ln\left(-\frac{2\epsilon_0}{n_t}\right)}. \quad (5.49)$$

Esta relación nos permite dejar la dependencia de  $r$  sólo a  $\epsilon_0$  y  $c_0$ , quedando expresado como

$$r = 16\epsilon_0 c_0 \exp\left[\frac{-2\ln c_0}{1 - \ln\left(-\frac{2\epsilon_0}{n_t}\right)/(\epsilon_0 + n_t/2)}\right] (1 + \dots), \quad (5.50)$$

donde los puntos suspensivos dentro del paréntesis redondo corresponden a los mismos términos del paréntesis cuadrado de la ecuación (5.46), los cuales también pueden ser expresados en términos de  $\epsilon_0$  y  $c_0$  junto con los valores de  $n_{\mathcal{R}}$  y  $n_t$ . Esta ecuación se constituye en uno de los resultados principales de esta tesis, puesto que nos entrega el tensor to scalar ratio en términos de los valores de  $\epsilon_0$  y  $c_0$ .

## 5.2. Restricciones para la velocidad del sonido

### 5.2.1. Caso en que $c_s$ es constante

Examinemos los límites para la velocidad del sonido implicados por la ecuación (5.46). Consideremos primero el caso simple en que la velocidad del sonido es constante, es decir, para  $s_0 = 0$ . La Fig. 5.3 muestra las curvas de nivel en el plano  $\epsilon$ - $c_s$  después de haber reemplazado con  $s_0 = 0$  en (5.46) y (5.48).

Vemos que este gráfico difiere con el mostrado en la Fig. 5.2, proveniente de la ecuación (5.2), señalando que el de la Fig. 5.3 implica que no existe una cota inferior para  $c_s$ . Esto se debe a que el valor de  $\eta_0$  afecta al running de  $\epsilon$  proveniente del tiempo

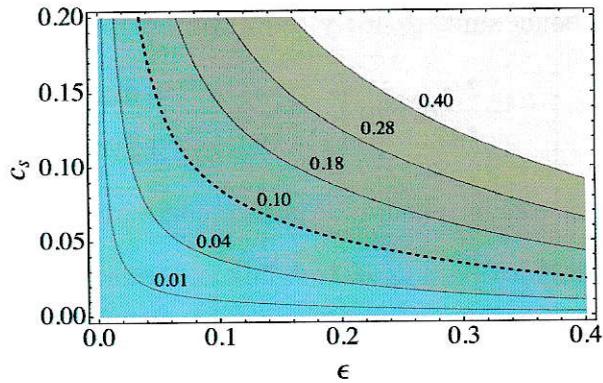


Figura 5.3: La figura muestra las curvas de nivel para  $r$  en el plano  $\epsilon$ - $c_s$ , obtenidas de la ecuación (5.46) asumiendo  $s_0 = 0$ . La línea punteada muestra el caso para  $r = 0.1$ .

de la salida del horizonte del modo escalar  $\tau_0$  al tiempo  $\tau_h$  proveniente de la salida del horizonte del modo tensorial. Luego, como se señala en [87], para obtener una cota para  $c_s$  tomando en cuenta el valor de  $\eta_0$  debiéramos considerar  $\alpha$ , el running del índice espectral escalar.

Por otro lado, en modelos canónicos de inflación, donde  $c_s = 1$ , tenemos las siguientes expresiones para el tensor to scalar ratio y el índice espectral tensorial

$$r = 16\epsilon_0, \quad n_t = -2\epsilon_0. \quad (5.51)$$

Usando ambas ecuaciones obtenemos la relación de consistencia

$$r = -8n_t. \quad (5.52)$$

Por su parte, para modelos no canónicos encontramos la dependencia de  $r$  en términos de  $\epsilon_0$ ,  $c_0$  y  $n_t$  como muestra la ecuación (5.46). A su vez,  $n_t$  está determinado por el valor en que  $\epsilon$  cruza el horizonte como se muestra en la ecuación (5.40).

Igualando las ecuaciones (5.46) y (5.52) obtenemos que

$$-\frac{2\epsilon_0}{n_t} c_0 \exp \left[ \frac{2 \ln c_0}{1 - \ln \left( -\frac{2c_0}{n_t} \right) / (\epsilon_0 + n_t/2)} \right] = 1. \quad (5.53)$$

Eso quiere decir que la relación de consistencia mostrada en la ecuación (5.52) puede ser satisfecha incluso para  $c_0 \neq 1$ . Además, la medición del índice espectral tensorial no elimina la degeneración entre  $\epsilon$  y  $c_s$ . El origen de esta degeneración es el running de  $\epsilon$  entre los diferentes tiempos de cruce del horizonte de los modos escalares y tensoriales. Notemos que si no existe este running de  $\epsilon$  obtenemos que  $\epsilon_h = \epsilon_0$ , es decir, cuando  $\eta_0 = 0$  en la ecuación (5.47), igualdad de la que uno obtiene que  $n_t = -2\epsilon_0$ . La Fig. 5.4 muestra los valores de  $\epsilon_0$  y  $c_0$  que satisfacen la ecuación (5.53) para varios valores de  $r$ .

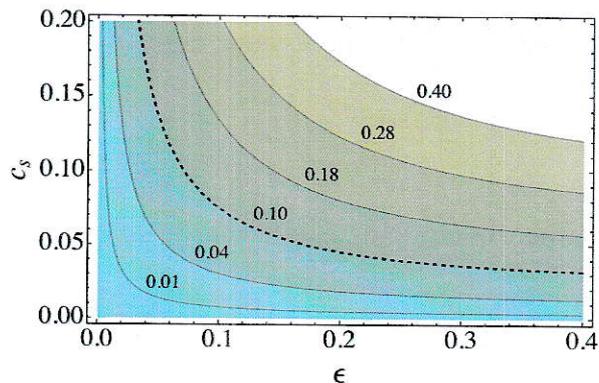


Figura 5.4: La figura muestra las curvas de nivel para  $r$  en el plano  $\epsilon$ - $c_s$ , obtenidas de la ec. (5.50) que satisfacen la relación de consistencia  $r = -8n_t$ . La línea punteada muestra el caso para  $r = 0.1$ .

Uno debiera notar que para cumplir la relación de consistencia de la ecuación (5.52) requeriremos que  $c_s$  tenga un running correspondiente,  $s_0 = (1 - n_{\mathcal{R}}) - 2\epsilon_0 - \eta_0$ , que viene de la ecuación (5.36). Luego, usando  $\eta_0$  de la ecuación (5.47) implica que

$$s_0 = (1 - n_{\mathcal{R}}) - 2\epsilon_0 + \frac{1}{\Delta N} \ln \left( -\frac{2\epsilon_0}{n_t} \right) \quad (5.54)$$

con  $\Delta N$  dado por la ecuación (5.49).

### 5.2.2. Caso en que $c_s$ varía

Consideremos entonces el caso en que  $s_0 \neq 0$ . La Fig. 5.5 muestra la curva de nivel para  $s$  en el plano  $\epsilon - c_s$  para el caso particular  $r = 0.1$ .

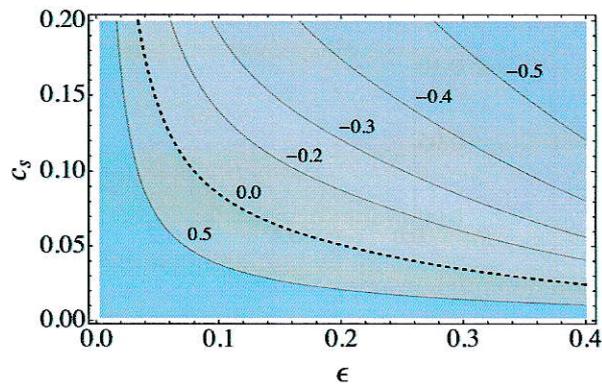


Figura 5.5: La figura muestra la curva de nivel para  $s_0$  en el plano  $\epsilon - c_s$ , obtenido de la ecuación (5.46) para el caso particular  $r = 0.1$ . La línea punteada muestra el caso para  $s_0 = 0$ .

Notemos que la introducción de  $s_0 \neq 0$  no cambia dramáticamente la relación entre  $\epsilon$  y  $c_s$ . Un valor negativo del running de la velocidad del sonido ( $s < 0$ ) incrementa el valor de  $c_s$  para un valor de  $\epsilon$  fijo.

Consideremos la posibilidad de que  $s$  dependa de  $\epsilon$ . Por ejemplo, en el trabajo de Achúcarro et. al [39], se estudió un modelo de múltiples campos en el cual la velocidad del sonido de las perturbaciones adiabáticas está caracterizada por un running de  $c_s$  de la forma  $s = -\epsilon/4$ . Siguiendo este ejemplo, consideraremos un modelo donde  $s$

dependa de  $\epsilon$  de la forma

$$s(\epsilon) = \lambda\epsilon, \quad (5.55)$$

con  $\lambda$  constante. La Fig. 5.6 muestra las curvas de nivel para  $\lambda$  en el plano  $\epsilon - c_s$  para el caso particular en que  $r = 0.1$ .

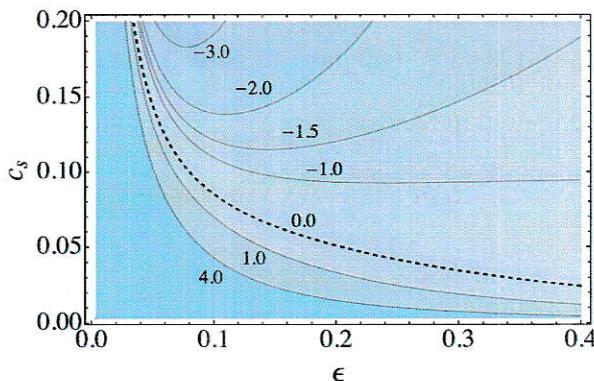


Figura 5.6: La figura muestra la curva de nivel para  $\lambda$  en el plano  $\epsilon - c_s$ , obtenida al juntar las ecuaciones (5.46) y (5.55), para el caso particular  $r = 0.1$ . La línea punteada corresponde a  $\lambda = 0$ .

De la Fig. 5.6 podemos ver que la dependencia de  $c_s$  respecto a  $\epsilon$  se ve afectada drásticamente por  $\lambda$ . En el caso particular en que  $r = 0.1$  obtenemos que para valores de  $\lambda \lesssim -1.2$  tenemos una cota inferior para  $c_s$  dada por  $c_s \geq 0.9$ . Como regla general, encontramos que un running negativo de  $c_s$  implica una cota inferior mayor para la velocidad del sonido con un  $\epsilon$  fijo. Además, si el running es proporcional a  $\epsilon$  obtenemos configuraciones con cotas inferiores para  $c_s$ .

### 5.2.3. Inclusión del running del índice espectral $\alpha$

En el trabajo de Baumann et al. [87] un aspecto importante es el hecho de tomar en cuenta el running del índice espectral denominado  $\alpha$  el cual viene definido como

$$\alpha = \frac{dn_{\mathcal{R}}}{d \ln k}, \quad (5.56)$$

término que aparece relacionado con el espectro de potencia mediante la expresión (3.89). Luego, la dependencia de  $\alpha$  respecto a las cantidades de slow-roll viene dada por

$$\alpha = -2\epsilon\eta - \eta\delta_\eta - s\delta_s, \quad (5.57)$$

donde  $\delta_\eta$  y  $\delta_s$  son parámetros de slow-roll definidos de modo que se cumpla la condición  $|\delta| \ll 1$ , cuya expresión matemática es de la forma

$$\delta_\eta = \frac{\dot{\eta}}{H\eta}, \quad \delta_s = \frac{\dot{s}}{Hs}. \quad (5.58)$$

Las observaciones actuales [51] establecen una cota para  $\alpha$  dada por

$$|\alpha| \leq 2 \times 10^{-2}. \quad (5.59)$$

Dado que  $\alpha$  depende de muchos parámetros de slow-roll como se ve en la ecuación (5.57), es posible satisfacer la ecuación (5.59) de muchas maneras ajustando  $\delta_s$  y  $\delta_\eta$ . Sin embargo, como se muestra en el trabajo de Baumann et al. [87] con el propósito de respetar la estructura jerárquica en la expansión slow-roll, la ecuación (5.57) puede ser escrita simplemente a primer orden como

$$\alpha \simeq -2\epsilon\eta. \quad (5.60)$$

Luego, juntando las ecuaciones (5.59) y (5.60) tenemos que

$$\epsilon_0 |\eta_0| < 10^{-2}. \quad (5.61)$$

Usando  $\eta_0$  a partir de esta expresión en las ecuaciones (5.45) y (5.46) obtenemos nuevas restricciones para los valores posibles de  $\epsilon$  y  $c_s$ . Se muestra en la Fig. 5.7 las curvas de nivel correspondientes para  $r$  en el plano  $\epsilon - c_s$ .

Vemos en la Fig. 5.7 que el caso particular  $r = 0.1$ , señalado con la línea punteada muestra una cota inferior para la velocidad del sonido de  $c_s > 0.1$ . Podemos destacar

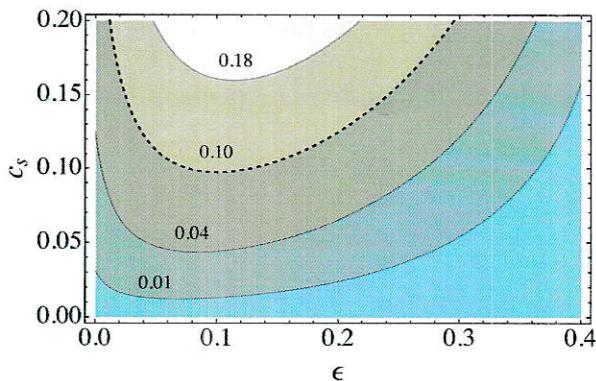


Figura 5.7: La figura muestra la curva de nivel para  $r$  en el plano  $\epsilon$ - $c_s$ , obtenida de la ecuación (5.46) tomando en cuenta las restricciones debidas a  $\alpha$ . La línea punteada muestra el caso para  $r = 0.1$ .

además que las líneas en las curvas de nivel se intersectan con  $\epsilon_0 = 0$ . Esto viene del hecho que hemos utilizado la relación  $\eta_0 = 10^{-2}/\epsilon_0$ , lo que invalida el uso de la ecuación (5.46) para valores en que  $\epsilon$  sea del orden de  $10^{-2}$ .

Por otro lado, los datos de BICEP2 y PLANCK tienden a favorecer un  $\alpha$  negativo, lo cual impone cotas mayores a  $c_s$ . Por ejemplo, siguiendo el análisis de Kinney y Freese [67], obtenemos los límites  $c_s > 0.25$  con una confianza de 68 %, y  $c_s > 0.2$  con una confianza de 95 %, corroborando las cotas encontradas por Baumann et al. [87].

Por otro lado, si el valor de  $n_t$  es conocido, usemos las expresiones (5.47), (5.49) y (5.60). A partir de esto obtenemos que

$$\alpha = -\frac{2\epsilon_0}{\ln c_0} \left[ \ln \left( -\frac{2c_0}{n_t} \right) - (\epsilon_0 + n_t/2) \right]. \quad (5.62)$$

Esta expresión nos permite romper la degeneración entre  $c_0$  y  $\epsilon_0$  considerando conocido el valor de  $\alpha$ , a la vez que asumimos que tanto  $\delta_\eta$  como  $\delta_s$  son despreciables.

### 5.3. Parametrizando Física UV

Dado que debemos aceptar la posibilidad de que  $c_s \neq 1$  como se mencionó anteriormente, debemos admitir una variedad de operadores adicionales que son proporcionales a  $1 - c_s^2$  que tienen origen en la misma física UV responsable de una propagación adiabática no trivial [21, 39, 97–99]. En esta sección revisaremos la forma en que estos grados de libertad UV modifican la expresión para  $r$ , y por consiguiente, los límites de  $c_s$ .

Una forma de tratar con esto, es parametrizar los efectos de esta física UV incluyendo nuevos operadores en la acción cuadrática de las fluctuaciones de curvatura  $\mathcal{R}$ , de la siguiente forma:

$$S_{UV} = \int d^4x a^3 \frac{\epsilon(1 - c_s^2)}{M^2} \left[ \frac{\beta_1}{a^2 c_s^2} \dot{\mathcal{R}} \nabla^2 \dot{\mathcal{R}} + \frac{\beta_2}{a^4} \mathcal{R} \nabla^4 \mathcal{R} \right], \quad (5.63)$$

donde  $M$  es una escala de masa que caracteriza los nuevos grados de libertad, pero no necesariamente es la escala de cutoff en la cual se vuelven relevantes [39], y  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son coeficientes adimensionales que parametrizan la física UV. Hemos insertado el factor global  $1 - c_s^2$  para hacer visible el hecho de que debiéramos recuperar la expresión canónica de un campo en el límite  $c_s \rightarrow 1$ , es decir  $S_{UV} \rightarrow 0$ . Luego, el Hamiltoniano en el cuadro de interacción vendrá dado por la expresión

$$H_I = -\frac{1 - c_s^2}{2a^2 M^2} \int d^3x \left[ \beta_1 u_I' \nabla^2 u_I' + c_s^2 \beta_2 u \nabla^4 u \right], \quad (5.64)$$

donde  $u$  viene definido por la ecuación (3.75).

Luego, las nuevas contribuciones UV que recibe el espectro de potencia vienen

dadas por

$$\frac{\Delta\mathcal{P}_{\text{UV}}}{\mathcal{P}_0} = \frac{(1 - c_s^2) H_0^2}{4c_0^2 M^2} (\beta_1 + 5\beta_2), \quad (5.65)$$

donde el cálculo en detalle se ha dejado para el apéndice A.

Luego, la amplitud del espectro de potencia ahora, con este nuevo elemento es de la forma

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{H_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c_0} \left[ 1 - (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0) \ln \left( \frac{c_0 k}{a_0 H_0} \right) + (2\epsilon_0 + \eta_0 + s_0) \mathcal{C} - 2(\epsilon_0 + s_0) + \frac{1 - c_0^2}{4c_0^2} \beta \right], \quad (5.66)$$

donde hemos definido  $\beta \equiv (\beta_1 + 5\beta_2) H_0^2 / M^2$ . Por otro lado, los modos tensoriales no se ven afectados por esta nueva contribución, por lo que podemos usar la ecuación (5.37) para describirlos. Finalmente, calculamos el tensor to scalar ratio usando el mismo procedimiento de la sección anterior, agregando la nueva contribución UV y tendremos que

$$r = 16\epsilon_0 c_0 e^{-2(\Delta N + \ln c_0)} \left[ 1 + 2\epsilon_0 e^{\eta_0 \Delta N} (\mathcal{C} - 1) - (1 - n_{\mathcal{R}}) \mathcal{C} + 2(\epsilon_0 + s_0) - \frac{1 - c_0^2}{4c_0^2} \beta \right], \quad (5.67)$$

donde  $\Delta N$  es el mismo definido en la ecuación (5.48). Mencionamos también que modelos de inflación con un solo campo con parámetro de masa  $M$ , interactuando con perturbaciones de curvatura corresponden al caso  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = 0$ , en el límite  $H_0^2 \ll M^2$  [38, 100]. Dado que el término proporcional a  $\beta$  contiene el factor  $c_0^{-1} - 1$ , la ecuación (5.67) nos dice que incluso un pequeño valor de  $\beta$  tendrá un impacto en la dependencia de  $r$  en la velocidad del sonido. Este término domina rápidamente el paréntesis cuadrado en la ecuación (5.67) para pequeños valores de  $c_0$ , provocando

un quiebre en nuestra expansión. A pesar de eso, podemos señalar lo siguiente a modo de conclusión: un valor positivo de  $\beta$  implica una cota inferior más fuerte en  $c_s$  para un valor fijo de  $\epsilon$ .

Para cerrar este capítulo consideraremos valores para  $\beta_1$  y  $\beta_2$  para un modelo específico de la literatura. Consideraremos una acción como aparece en el trabajo de Gwyn et al. [101] del tipo

$$S = - \int d^3x dt a^3 \dot{H} [\dot{\pi}(1 + \Sigma)\dot{\pi} + \dots], \quad (5.68)$$

donde  $\pi$  está definido según la ecuación (4.10) y

$$\Sigma = (1 - c_s^2) \frac{M^2 c_s^{-2}}{M^2 - \frac{\nabla^2}{a^2}}. \quad (5.69)$$

Los puntos suspensivos en (5.68) corresponden a otros términos que no tomaremos en cuenta, pues sólo consideraremos el término expuesto acá ya que contiene elementos similares a los de la acción (5.63).

Expandimos el término  $\left(M^2 - \frac{\nabla^2}{a^2}\right)^{-1}$  considerando  $\nabla/a$  pequeño. De esta forma

$$\frac{1}{M^2 - \frac{\nabla^2}{a^2}} \approx \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{\nabla^2}{a^2 M^2} + \frac{\nabla^4}{a^4 M^4}\right). \quad (5.70)$$

Utilizando esta expansión en la ecuación (5.69) se tiene que

$$\Sigma = (1 - c_s^2) c_s^{-2} \left(1 + \frac{\nabla^2}{a^2 M^2} + \frac{\nabla^4}{a^4 M^4}\right). \quad (5.71)$$

A partir de esta expresión tenemos que

$$S_{UV} = \int d^3x dt \left(\frac{a\epsilon H^2(1 - c_s^2)}{M^2 c_s^2}\right) \left(\dot{\pi} \nabla^2 \dot{\pi} + \frac{1}{a^2 M^2} \dot{\pi} \nabla^4 \dot{\pi}\right). \quad (5.72)$$

Luego, dado que  $\pi$  se puede expresar en términos de  $\mathcal{R}$  mediante (4.10), entonces:

$$\dot{\pi}\nabla^2\dot{\pi} = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H^2}\nabla^2\dot{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon\dot{\mathcal{R}}}{H}\nabla^2\mathcal{R} + \frac{\epsilon\mathcal{R}}{H}\nabla^2\dot{\mathcal{R}} + \epsilon^2\mathcal{R}\nabla^2\mathcal{R}, \quad (5.73)$$

$$\dot{\pi}\nabla^4\dot{\pi} = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H^2}\nabla^4\dot{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon\dot{\mathcal{R}}}{H}\nabla^4\mathcal{R} + \frac{\epsilon\mathcal{R}}{H}\nabla^4\dot{\mathcal{R}} + \epsilon^2\mathcal{R}\nabla^4\mathcal{R}. \quad (5.74)$$

De acá sólo tomaremos el primer término de (5.73) y el cuarto de (5.74), puesto que corresponden a los términos de (5.63). Así la acción (5.72) queda

$$S_{UV} = \int d^3x dt \left( \frac{a\epsilon H^2(1 - c_s^2)}{M^2 c_s^2} \right) \left( \frac{\dot{\mathcal{R}}}{H^2}\nabla^2\dot{\mathcal{R}} + \frac{\epsilon^2}{a^2 M^2}\mathcal{R}\nabla^4\mathcal{R} \right). \quad (5.75)$$

Finalmente, comparando los términos de (5.75) con los de la acción (5.63) obtendremos que

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \frac{\epsilon^2 H^2}{M^2 c_s^2}. \quad (5.76)$$

## Capítulo 6

# Parametrizando sobresaltos en el espectro primordial

Cabe la posibilidad de que las fluctuaciones primordiales tengan su origen en una situación diferente al modelo canónico, con una dinámica caracterizada por escalas de tiempo más cortas que  $H^{-1}$ . Dichas escalas de tiempo se espera que estén asociadas a grados de libertad masivos (con masas mayores que  $H$ ). Una característica importante en este tipo de escenario es la aparición de *sobresaltos* en el espectro primordial, cuyo tamaño y forma caracterizan la física asociada a estos grados de libertad masivos. La existencia de sobresaltos tanto en el espectro de potencia como en el biespectro nos permite obtener una mejor comprensión de las escalas de masa, aparte de  $H$ , que caracterizan la teoría responsable de ellas.

Sin embargo, no sólo modelos no canónicos permiten la existencia de sobresaltos, sino que dentro de modelos canónicos es sabido que éstas aparecen cuando el inflatón atraviesa un cambio repentino al rodar hacia abajo por el potencial [31–37], por ejemplo, en el caso de una *step-feature*, pequeño salto en dicho potencial, que resulta en la breve interrupción de la dinámica de slow-roll. Este tipo de dinámica lleva a un cambio en la tasa de expansión sin que esto lleve a una gran desviación

del universo quasi-de Sitter.

A su vez, es posible hallar la aparición de sobresaltos en modelos de múltiples campos en que se permite que la trayectoria del inflatón serpente al atravesar el potencial [64, 102–105], circunstancia que incrementa la interacción entre las perturbaciones de curvatura y los campos ortogonales a la trayectoria cada vez que se produce un giro en dicha trayectoria [40, 41, 93, 94, 106].

Otros mecanismos que producen sobresaltos que pueden hallarse en la literatura son la posible producción de partículas durante inflación [107–112] o modelos del tipo *Chain-Inflation* [113], donde el inflatón atraviesa mediante efecto túnel muchos mínimos del potencial. Si bien es cierto estos modelos presentan esta característica no formarán parte de este trabajo dado que simplemente consideraremos modelos dentro de la dinámica de slow-roll.

En la Sec. 6.1 estudiaremos la aparición de sobresaltos debido a cambios repentinos en la tasa de expansión de inflación, al que llamamos “caso  $\epsilon$ ”, y debido a cambios repentinos en la velocidad del sonido, “caso  $s$ ”, de forma separada, siguiendo el trabajo de Palma [46], para luego en la Sec. 6.2 abordar la aparición de sobresaltos debido a ambos casos simultáneamente. Finalmente en la Sec. 6.3 estudiaremos mediante ejemplos numéricos de un modelo  $P(X, \phi)$  y uno de múltiples campos, la validez de la expresión que relaciona las desviaciones de las cantidades de background con las de la velocidad del sonido propuesta en la sección 6.2.

## 6.1. Casos $\epsilon$ y $s$

Comenzamos con la acción para las perturbaciones de curvatura en EFT en el gauge comóvil la cual dividimos en dos partes:

$$S = S_2 + S_3, \quad (6.1)$$

donde  $S_2$  corresponde a la parte cuadrática que viene dada por la ecuación (3.72) y  $S_3$  es la parte cúbica que viene dada por la ecuación (3.73).

Siguiendo la misma idea de la Sec. 5.1, podemos dividir usando teoría de perturbaciones la acción cuadrática en dos partes. De acuerdo a esto, usando la ecuación(5.12), dividimos en dos partes el término  $z''/z$  de la forma

$$\frac{z''}{z} = \frac{z_0''}{z_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \delta(\tau) \right), \quad (6.2)$$

donde  $z_0''/z_0$  es la contribución a orden cero dada por

$$\frac{z_0''}{z_0} = \frac{2}{\tau^2}, \quad (6.3)$$

y  $\delta(\tau)$  parametriza desviaciones de la cantidad de background  $z''/z$ .

Por otro lado, podemos también hacer lo mismo para la velocidad del sonido, definiendo

$$\theta(\tau) = 1 - c_s^2(\tau), \quad (6.4)$$

de modo que esta función parametriza desviaciones de  $c_s$  de la unidad. Dada la ausencia de evidencia experimental de que  $c_s \neq 1$  asumiremos  $\theta(\tau) \ll 1$ . Notemos además que  $\theta(\tau) \geq 0$  para evitar situaciones no físicas donde  $c_s > 1$ .

Luego, a partir de la ecuación (5.13), notamos que  $z$  depende de variaciones de  $c_s$ , por lo tanto,  $\delta$  contiene una contribución que proviene de  $\theta$ . De este modo, expresaremos

$$\delta = \delta_H - \tau\theta' + \frac{\tau^2}{2}\theta'', \quad (6.5)$$

donde  $\delta_H$  corresponde a las desviaciones que no dependen de  $c_s$ , la cual puede ser parametrizada mediante la expresión

$$\delta_H = -\frac{1}{2}\tau\eta', \quad (6.6)$$

donde  $\eta$  es el parámetro de slow-roll definido en (3.10). Por otro lado, sólo se mantienen los términos lineales en  $\theta$  puesto que los términos cuadráticos son subdominantes.

A partir de lo anterior obtenemos  $S_2 = S_0 + S_1$ , donde  $S_0$  corresponde a la parte de orden cero en los parámetros de slow-roll, mientras que  $S_1$  corresponde a las correcciones al siguiente orden. Así

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \, d\tau \left[ u'^2 - (\nabla u)^2 + \frac{z_0''}{z_0} \right], \quad (6.7)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d^3x \, d\tau \left[ \theta(\tau)(\nabla u)^2 + \frac{1}{\tau^2}\delta(\tau)u^2 \right]. \quad (6.8)$$

A partir de  $S_1$  y usando la misma metodología usada en la Sec. 5.1 podemos expresar el hamiltoniano de la forma

$$H_I^{(2)}(\tau) = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[ \theta(\tau)(\nabla u_I)^2 + \frac{\delta(\tau)}{\tau^2}u_I^2 \right], \quad (6.9)$$

donde  $u_I$  viene dado por

$$u_I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left[ a_{\mathbf{k}}u_k(\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_k^*(\tau)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (6.10)$$

y a diferencia de la función de la Sec. 5.1 en este caso,  $u_k$  satisface la ecuación

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) u_k = 0, \quad (6.11)$$

cuya solución tras elegir el vacío de Bunch-Davies viene dada por

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) e^{-ik\tau}. \quad (6.12)$$

Expresamos el hamiltoniano de la ecuación (6.9) en el espacio de Fourier mediante la definición de  $\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau)$  como la transformada de Fourier del campo  $u_I$  de la forma

$$u_I(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \hat{u}_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} u_k(\tau) + a_{-\mathbf{k}}^\dagger u_k^*(\tau). \quad (6.13)$$

Luego, el hamiltoniano queda

$$H_I^{(2)}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k^2 h_k(\tau) \hat{u}_{\mathbf{k}} \hat{u}_{-\mathbf{k}}, \quad (6.14)$$

donde hemos definido

$$h_k(\tau) = -\frac{1}{2} \left[ \theta(\tau) + \frac{\delta(\tau)}{k^2 \tau^2} \right]. \quad (6.15)$$

A partir de esto, tomando la transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos en la expresión encontrada en la ecuación (5.26), tenemos la siguiente expresión para el espectro de potencia,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \mathcal{P}_0 + \Delta\mathcal{P}(k), \quad (6.16)$$

donde  $\mathcal{P}_0$  corresponde a la parte de orden cero del espectro de potencia, la cual no contiene sobresaltos, y viene dada por

$$\mathcal{P}_0 = \frac{H_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0}, \quad (6.17)$$

mientras que  $\Delta\mathcal{P}(k)$  corresponde a la corrección a siguiente orden que contiene sobresaltos, expresado de la forma

$$\frac{\Delta\mathcal{P}(k)}{\mathcal{P}_0} = \lim_{k|\tau| \rightarrow 0} i(2c_0^3 k^3 \tau^2) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \langle 0 | H_I^{(2)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau) u_I(0, \tau) | 0 \rangle. \quad (6.18)$$

Ocupando la expresión (6.15) al desarrollar (6.18) tendremos que

$$\frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) = k \int_{-\infty}^0 d\tau \left[ -\theta + \frac{\delta_H}{k^2 \tau^2} + \frac{2\delta_H}{k^4 \tau^4} - \frac{1}{k^4 \tau^3} \frac{d\delta_H}{d\tau} \right] \sin(2k\tau). \quad (6.19)$$

Para invertir esta expresión dejando el espectro de potencia en términos de las cantidades de background  $\delta_H$  y  $\theta$ , extendemos estas cantidades del dominio  $-\infty < \tau \leq 0$  al dominio  $-\infty < \tau < \infty$  haciendo que ambas funciones sean impares bajo la transformación  $\tau \rightarrow -\tau$  (idea introducida en [114] con el fin de invertir el espectro de potencia como función de la velocidad del sonido mediante una transformada de Fourier). Luego, haciendo esto obtendremos que

$$\frac{1}{8}\theta'''' + \frac{\delta_H''}{2\tau^2} - \frac{\delta_H}{\tau^4} = \frac{4}{\pi i} \int dk k^3 \frac{\Delta\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.20)$$

Relación que es parte importante del capítulo, puesto que a partir de ella es posible obtener el power spectrum en término de las cantidades de background.

Además, consideraremos que las variaciones de  $H$  son tales que cumplen que  $\epsilon \ll 1$ , de este modo, podemos escribir

$$\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon, \quad (6.21)$$

donde  $\epsilon_0$  corresponde a la parte de lenta variación de  $\epsilon$ , la cual caracteriza el comportamiento de tipo slow-roll. Mientras que  $\Delta\epsilon$  contiene las partes que varían abruptamente en la tasa de expansión. Por otra parte, consideraremos que

$$\Delta\epsilon \ll \epsilon_0. \quad (6.22)$$

De esta manera, al dividir  $\epsilon$  podemos hacer lo mismo para  $\eta$  de modo que

$$\eta = \eta_0 + \Delta\eta, \quad (6.23)$$

donde

$$\eta_0 = \frac{\dot{\epsilon}_0}{H\epsilon_0}, \quad \Delta\eta = \frac{\Delta\dot{\epsilon}}{H\epsilon_0}, \quad (6.24)$$

en que nuevamente, como para  $\epsilon$ ,  $\eta_0$  corresponde a la parte de variación lenta de  $\eta$ .

Por otro lado, en nuestro análisis nos enfocaremos en variaciones repentinas que satisfacen las relaciones

$$\left| \frac{d\delta_H}{dN} \right| \gg |\delta_H|, \quad \left| \frac{d\theta}{dN} \right| \gg |\theta|. \quad (6.25)$$

Dado que puede resultar útil tomar estas condiciones en términos del tiempo conforme, las podemos expresar también de la forma

$$|\tau\delta'_H| \gg |\delta_H|, \quad |\tau\theta'| \gg |\theta|. \quad (6.26)$$

Además, considerando las condiciones (6.26) junto a la ecuación (6.20), implica que

$$\left| \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right| \gg \left| \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right| \gg \left| \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right|, \quad (6.27)$$

lo que indica que variaciones rápidas del background caracterizadas por una escala menor que  $H^{-1}$  induce sobresaltos en el espectro de potencia.

### 6.1.1. Sobresaltos en el espectro de potencia

La expresión de (6.20) nos señala que la dependencia temporal de  $\delta_H$  y  $\theta$  produce sobresaltos en el espectro de potencia. Analizaremos entonces la aparición de sobresaltos en el espectro de potencia debido tanto a cambios repentinos en la velocidad del sonido como en la tasa de expansión.

### Sobresaltos debido a cambios repentinos en la velocidad del sonido

Primer caso, consideraremos que no hay contribución de variaciones en la tasa de expansión. De este modo fijaremos  $\eta = 0$ . Por consiguiente, dada la ecuación (6.6),  $\delta_H = 0$ , entonces la ecuación (6.20) toma la forma

$$\theta''' = \frac{32}{\pi i} \int dk k^3 \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.28)$$

Integrando respecto a  $\tau$ ,

$$\theta = \frac{2}{\pi i} \int \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.29)$$

La ecuación (6.29) nos entrega una relación entre  $\theta$  y el espectro de potencia, lo que nos permite inferir la dependencia temporal de  $c_s(\tau)$  en términos de sobresaltos en el espectro de potencia. Notamos además que la relación obtenida en (6.29) coincide con el resultado obtenido en el trabajo de Achúcarro et. al [114].

### Sobresaltos debido a cambios repentinos de la tasa de expansión

Para el segundo caso, consideraremos que no hay contribuciones provenientes de cambios en la velocidad del sonido, fijando  $\theta = 0$ . Por otro lado, despreciando el término  $\delta_H$  puesto que es subdominante, la ecuación (6.20) queda

$$\frac{\delta_H''}{2\tau^2} = \frac{4}{\pi i} \int dk k^3 \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau} \quad (6.30)$$

Luego, usando la ecuación (6.6), derivándola e insertándola en (6.30), tenemos que

$$\eta''' = \frac{-16\tau}{\pi i} \int dk k^3 \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.31)$$

Integrando respecto a  $\tau$ , se tiene

$$\eta = \frac{2\tau}{\pi} \int dk \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.32)$$

Ahora, integrando por partes

$$\eta = \frac{1}{\pi i} \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.33)$$

La ecuación (6.33) muestra la relación entre el espectro de potencia y  $\eta$ , lo cual permite ver la correspondencia entre variaciones repentinas del espacio quasi de Sitter con sobresaltos en el espectro de potencia.

### 6.1.2. Sobresaltos en el biespectro

Luego de haber calculado el espectro de potencia, veamos los efectos de las variaciones en  $\theta$  y  $\delta_H$  sobre el biespectro. Para ello tomamos la acción cúbica de la ecuación (3.73). De acuerdo a Senatore et al. [85] se tiene que el parámetro  $\lambda$  es de orden

$$\lambda \sim \epsilon \frac{H^2}{c_s^4} (1 - c_s^2)^2, \quad (6.34)$$

por lo que dada su proporcionalidad a  $\theta^2$  los términos que acompañan a  $\dot{\mathcal{R}}^3$  podemos descartarlos en una expansión a primer orden. Luego, realizando una redefinición del campo podemos eliminar el término proporcional a  $f$ . Entonces, de este modo, reorganizando la ecuación (3.73) tendremos una expresión para  $S_{int}^{(3)}$  de la forma

$$S_{int}^{(3)} = \int d^4x a^3 \epsilon \left\{ -(3\theta + \eta) \mathcal{R} \dot{\mathcal{R}}^2 + \frac{1}{a^2} (\theta - \tau\theta' + \eta) \mathcal{R} (\nabla \mathcal{R})^2 \right\}. \quad (6.35)$$

Luego, esta expresión nos permite escribir el hamiltoniano de interacción cúbico  $H_I^{(3)}$ , dado por

$$H_I^{(3)} = - \int d^3x a^3 \epsilon \left[ -(3\theta + \eta) \mathcal{R}_I \dot{\mathcal{R}}_I^2 + \frac{1}{a^2} (\theta - \tau\theta' + \eta) \mathcal{R}_I (\nabla \mathcal{R}_I)^2 \right]. \quad (6.36)$$

Para el cálculo del biespectro, dado que tenemos una expresión del hamiltoniano del tipo

$$H_I = - \int d^3x a^3 \epsilon \left[ \frac{\alpha_1}{H_0} \dot{\mathcal{R}}_I^3 - \alpha_2 \mathcal{R}_I \dot{\mathcal{R}}_I^2 + \frac{\alpha_3}{a^2} \mathcal{R}_I (\nabla \mathcal{R}_I)^2 \right], \quad (6.37)$$

con  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) funciones del tiempo. Usando la ecuación (3.100) y que la forma de calcular la función de correlación para tres puntos del campo  $u$  definido antes viene dada por

$$\langle u(\mathbf{x}, \tau)u(\mathbf{y}, \tau)u(\mathbf{z}, \tau) \rangle = i \int d\tau' \langle 0|[H_I^{(3)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)u_I(\mathbf{y}, \tau)u_I(\mathbf{z}, \tau)]|0 \rangle, \quad (6.38)$$

para expresar  $\Delta B$  de la forma

$$\Delta B = B_1 + B_2 + B_3, \quad (6.39)$$

donde

$$\begin{aligned} B_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{6\epsilon_0}{iH_0^2} \mathcal{R}_1(0)\mathcal{R}_2(0)\mathcal{R}_3(0) \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\alpha_1(\tau)}{\tau^2} [\mathcal{R}'_1(\tau)\mathcal{R}'_2(\tau)\mathcal{R}'_3(\tau)]^* + \text{c.c.} \quad (6.40) \\ B_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{2\epsilon_0}{iH_0^2} \mathcal{R}_1(0)\mathcal{R}_2(0)\mathcal{R}_3(0) \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\alpha_2(\tau)}{\tau^2} [\mathcal{R}_1(\tau)\mathcal{R}'_2(\tau)\mathcal{R}'_3(\tau) + \text{sym}]^* + \text{c.c.}, \quad (6.41) \\ B_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{2\epsilon_0}{iH_0^2} \mathcal{R}_1(0)\mathcal{R}_2(0)\mathcal{R}_3(0) \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\alpha_3(\tau)}{\tau^2} [\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \mathcal{R}_1(\tau)\mathcal{R}_2(\tau)\mathcal{R}_3(\tau) + \text{sym}]^* + \text{c.c.} \quad (6.42) \end{aligned}$$

De este modo, aplicando esto para la ecuación (6.36), sólo tenemos  $B_2$  y  $B_3$ . Así que aplicando el hecho de que  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1 = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)/2$  y la expresión para  $\mathcal{R}_I$  se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \frac{2\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[ (3\theta + \eta) (k_1 k_2 + k_3 k_1 + k_2 k_3 + 3i(k_1 k_2 k_3)\tau) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\tau\theta' - \eta)}{2\tau^2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) (1 + ik_1\tau) (1 + ik_2\tau) (1 + ik_3\tau) \right] i e^{iK\tau}, \quad (6.43) \end{aligned}$$

donde  $K = k_1 + k_2 + k_3$ .

### Sobresaltos debido a cambios repentinos en la velocidad del sonido

En el caso de que la aparición de sobresaltos es debida solamente a cambios en la velocidad del sonido, dado que  $\eta = 0$ , utilizando la ecuación (6.43), donde hemos dejado el cálculo completo para el apéndice B, se tiene que

$$\Delta B_s = B_2 + B_3, \quad (6.44)$$

donde

$$B_2 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left[ \frac{3}{8} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{1}{k^2} \left( \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - \frac{3}{4} \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right], \quad (6.45)$$

$$B_3 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{8} \left[ -\frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k} \left( \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) + \frac{d}{d \ln k} \left( \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) \right) + \frac{1}{2k^2} k_1 k_2 k_3 \left( \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) + 4k \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (6.46)$$

Luego, dado que se cumple la relación (6.27), simplificamos la expresión (6.44) quedando

$$\Delta B_s = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{16(k_1 k_2 k_3)^2} \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{k^2} \left[ \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - 2k \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]_{k=K/2}. \quad (6.47)$$

Consideremos el parámetro  $f_{NL}$  standard de la forma

$$f_{NL} = \frac{10}{3} \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^3 + k_2^3 + k_3^3} \frac{(k_1 k_2 k_3)^2}{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2} \Delta B. \quad (6.48)$$

Considerando el valor de  $\Delta B$  obtenido en (6.47), tendremos que

$$f_{NL} \simeq \beta \left[ \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]_{k=K/2}, \quad (6.49)$$

donde  $\beta = \beta(k_1, k_2, k_3)$  es una función. Luego, para este caso particular, tendremos que

$$\beta_s = \frac{5}{6} \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^3 + k_2^3 + k_3^3} \left[ \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \right]. \quad (6.50)$$

La función  $\beta$  obtenida es un observable, el cual puede ser determinado mediante experimentos en la búsqueda de sobresaltos [26–30, 49]. De esta manera, es posible determinar el valor del parámetro  $f_{NL}$ , lo que podría indicar si los sobresaltos se deben a variaciones en la velocidad del sonido si  $\beta$  toma un valor obtenido a partir de la ecuación (6.50) para direcciones específicas en el espacio de número de onda  $k$ .

### Sobresaltos debido a cambios repentinos de la tasa de expansión

Ahora, en el caso en que sólo los cambios en la tasa de expansión son responsables de la aparición de sobresaltos, fijamos  $\theta = 0$  y la ecuación (6.43) queda

$$\Delta B_\epsilon = B_2 + B_3, \quad (6.51)$$

donde

$$B_2 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left[ \frac{1}{16k^2} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \left( \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{8k} \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right], \quad (6.52)$$

$$B_3 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \left[ \frac{k_1 k_2 k_3}{32k^2} \left( \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{1}{16k} \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (6.53)$$

Del mismo modo que para el caso anterior, podemos simplificar la ecuación (6.51) manteniendo las derivadas de orden superior, de modo que

$$\Delta B_\epsilon = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{8(k_1 k_2 k_3)^3} \left[ (k_1 k_2 k_3) \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - (2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)k - k_1 k_2 k_3 - k_1^3 - k_2^3 - k_3^3) \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (6.54)$$

De este modo, empleando la ecuación (6.48) y usando el valor de  $\Delta B$  de (6.54) tendremos que

$$\beta_\epsilon = \frac{5}{12} \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^3 + k_2^3 + k_3^3}. \quad (6.55)$$

Así, obtenemos un valor para  $\beta$  para el caso en que los sobresaltos puedan aparecer debido a cambios en la tasa de expansión, valor que al igual que en el caso anterior es posible restringir mediante observaciones.

## 6.2. Caso general

Notemos que los resultados obtenidos en la sección 6.1 muestran los casos en que sobresaltos se deben a cambios en la velocidad del sonido o en la tasa de expansión de manera independiente. Sin embargo, es posible pensar en que éstos son casos límites donde sobresaltos pueden producirse por la acción de estos dos cambios de manera simultánea. Para ello asumiremos la siguiente relación

$$\eta = \eta_0 - \frac{\alpha}{2} \tau \frac{d\theta}{d\tau}, \quad (6.56)$$

con  $\eta_0$  definido de acuerdo a la ecuación (6.24) y  $\alpha$  es una función adimensional cuya variación es pequeña que puede considerarse como constante para efectos prácticos. Luego, siguiendo el procedimiento realizado en la sección 6.1, usamos la ecuación (6.20), despreciando el término que contiene  $\delta_H$ , pues es mucho menor que su derivada. Así se tiene

$$\frac{1}{8} \theta'''' + \frac{\delta_H''}{2\tau^2} = \frac{4}{\pi i} \int dk k^3 \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.57)$$

Luego, usando la condición (6.26) y la expresión para  $\delta_H$  en (6.6), tendremos que

$$\frac{1}{8} \theta'''' - \frac{\eta''''}{4\tau} = \frac{4}{\pi i} \int dk k^3 \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (6.58)$$

Desarrollando, tendremos que para este caso

$$\theta = \frac{1}{1 + \alpha} \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}, \quad (6.59)$$

$$\Delta \eta = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left( \frac{\partial}{\partial k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) e^{-2ik\tau}. \quad (6.60)$$

Donde podemos ver que para el caso  $\alpha \rightarrow 0$  recuperamos la ecuación (6.29), correspondiente a la aparición de sobresaltos debido a cambios en la velocidad del sonido. Mientras que para  $\alpha \rightarrow \infty$  se obtiene la ecuación (6.33) que corresponde a sobresaltos debido a cambios en la tasa de expansión. Vemos que las expresiones (6.59) y (6.60) divergen para  $\alpha = -1$ , sin embargo, en este límite, los términos subdominantes en la ecuación (6.20) toman importancia, luego las expresiones en (6.59) y (6.60) cambian.

Dado que ya tenemos las expresiones para  $\theta$  y  $\eta$  en función del espectro de potencia, podemos calcular el biespectro usando la ecuación (6.43). Al hacer esto, para el caso general se tiene que usando la definición de  $f_{NL}$  en (6.48)

$$f_{NL} \simeq \left[ \beta_\alpha \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{5}{12} \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]_{k=(k_1+k_2+k_3)/2}, \quad (6.61)$$

donde  $\beta_\alpha = \beta_\alpha(k_1, k_2, k_3)$  es una función independiente de escala dada por

$$\beta_\alpha = \frac{5}{12} \frac{1}{1 + \alpha} \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^3 + k_2^3 + k_3^3} \left[ \alpha + 2 \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{(k_1 + k_2 + k_3)^2} \right]. \quad (6.62)$$

Notemos que para obtener este resultado debemos aplicar la relación (6.27), descartando términos de derivadas de orden inferior.

Nuevamente, al aplicar los límites  $\alpha \rightarrow 0$  y  $\alpha \rightarrow \infty$  recuperamos las expresiones (6.50) y (6.55) respectivamente. Analizamos además los límites equilátero, folded y squeezed. Para el límite equilátero, es decir  $k_1 = k_2 = k_3$  se tiene que

$$\beta_\alpha^{(\text{eq})} = \frac{5}{36} \frac{1}{1 + \alpha} \left[ \alpha + \frac{2}{3} \right], \quad (6.63)$$

mientras que para el caso folded, es decir  $k_1 = k_2 = k_3/2$ , tendremos que

$$\beta_\alpha^{(\text{fold})} = \frac{1}{12} \frac{1}{1 + \alpha} \left[ \alpha + \frac{3}{4} \right]. \quad (6.64)$$

Por otro lado, una mención importante para el límite squeezed, es decir  $k_1 = k_2, k_3 \rightarrow 0$ , es que se recupera la relación de consistencia

$$f_{\text{NL}}^{(\text{sq})} = -\frac{5}{12} \left[ \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (6.65)$$

De este modo, la relación (6.62) se constituye como otro de los resultados importantes dentro de este trabajo de tesis, dado que permite mediante un único parámetro  $\alpha$ , dependiente del modelo, la descripción del tamaño y forma de los sobresaltos en el biespectro.

### 6.3. Ejemplos de validez

Puesto que el resultado encontrado en la ecuación (6.62) depende de la validez de la relación entre las variaciones del background y la velocidad del sonido dadas por la ecuación (6.56), verificaremos esta relación para diferentes modelos de forma numérica.

#### 6.3.1. $P(X, \phi)$

La primera clase de modelos que usaremos será del tipo  $P(X, \phi)$ . Tenemos que en términos de e-folds, las ecuaciones de Friedmann y de movimiento para  $\phi$ , vienen dadas por

$$3H^2 - E = 0, \quad (6.66)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dN^2} + (3c_s^2 - \epsilon) \frac{d\phi}{dN} + \frac{c_s^2}{H^2 P_{,X}} E_\phi = 0, \quad (6.67)$$

donde  $X = \dot{\phi}^2/2$ ,  $E = 2XP_{,X} - P$  que corresponde a la densidad de energía del inflatón y  $E_\phi = \partial_\phi E$ .

## Ejemplos numéricos

Consideremos el caso en que la variación en el background viene dada por un sobresalto en el potencial. De este modo, tomamos

$$P(X, \phi) = X + AX^2 - V(\phi), \quad (6.68)$$

donde  $A$  parametriza un desviación no trivial, cuadrática en  $X$ , pero pequeña al término cinético.  $V(\phi)$  es un potencial del tipo *Chaotic Potential*, definido de la forma

$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2} [1 + f(\phi)], \quad (6.69)$$

donde  $m$  representa la escala de masa que parametriza el potencial sin sobresaltos, mientras que  $f(\phi)$  es una función que parametriza el sobresalto en el potencial. Consideremos dos tipos diferentes de función  $f(\phi)$ , dadas por

$$f_{(a)}(\phi) = B \tanh \left[ \frac{\phi - \phi_0}{\sqrt{2} \Delta \phi} \right], \quad (6.70)$$

$$f_{(b)}(\phi) = B \exp \left[ -\frac{(\phi - \phi_0)^2}{2 \Delta \phi^2} \right], \quad (6.71)$$

donde  $\phi_0$  indica el punto en que los sobresaltos aparecen,  $\Delta \phi$  el ancho, mientras que  $B$  representa la amplitud del sobresalto. Consideraremos además que el efecto que produzca el potencial en  $\phi$  y  $H$  al resolver las ecuaciones de movimiento genere sólo sobresaltos dentro de un e-fold de inflación. En la práctica, esto significa que  $\Delta \phi \ll |d\phi/dN|$ . Esto se traduce en que un pequeño valor de  $\Delta \phi$  tiene un efecto considerable en  $\eta$  y  $d\theta/dN$ .

Por otro lado, los parámetros del potencial a usar en ambas elecciones de  $f(\phi)$ , los cuales han sido escogidos de modo que concuerden con cantidades observables,

serán

$$A = 10^{10}, \phi_0 = 14.19, B = 5 \cdot 10^{-4}, \Delta\phi = 0.002, m = 5.975 \cdot 10^{-6}. \quad (6.72)$$

En la figura 6.1 se muestra el resultado numérico de resolver las ecuaciones de movimiento (6.66) y (6.67) para los dos casos considerados. Los gráficos del lado izquierdo muestran lo obtenido para la elección de  $f_{(a)}(\phi)$ , mientras que los de la derecha muestran lo correspondiente a la elección de  $f_{(b)}(\phi)$ . Los gráficos superiores muestran el comportamiento de  $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$  y  $\Delta c_s^2 = c_s^2 - c_0^2$  como función de  $N$ , mientras que los inferiores muestran la relación entre  $\Delta\eta$  y  $\alpha d\theta/dN$  como funciones de  $N$ , donde los valores de  $\alpha$  con que se obtiene la coincidencia de las gráficas de  $\eta$  y  $d\theta/dN$  vienen dados por

$$\alpha_{(a)} = 15, \alpha_{(b)} = 15.6, \quad (6.73)$$

para las elecciones de  $f_{(a)}(\phi)$  y  $f_{(b)}(\phi)$ , respectivamente.

Es importante destacar que, aún cuando estos ejemplos validan la relación (6.56), las expresiones para el biespectro y el espectro de potencia obtenidas en 6.2 requieren que  $\theta \approx 0$ , sin embargo, la velocidad del sonido en este caso particular es del orden de  $c_s \sim 0.8$ . Por lo tanto, este ejemplo simplemente es útil para corroborar la relación (6.56) pero no es posible obtener el espectro de potencia y el biespectro mediante el método empleado en la sección previa.

### 6.3.2. Multifield

Como un segundo ejemplo, consideraremos un modelo de dos campos escalares  $\chi$  y  $\psi$  que denotaremos mediante un doblete

$$\phi^a = (\chi, \psi), \quad (6.74)$$

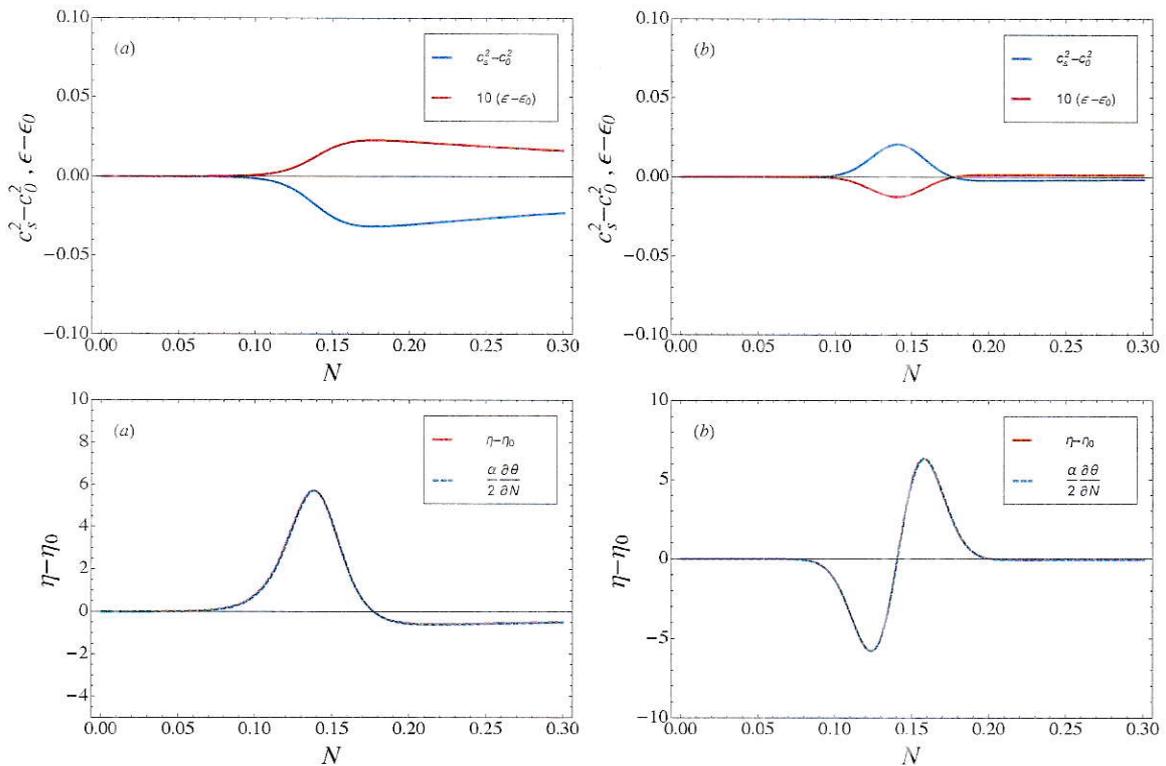


Figura 6.1: La figura muestra en la parte inferior los gráficos para  $\eta - \eta_0$  y  $\frac{\alpha}{2} \frac{d\theta}{dN}$  como funciones de  $N$  y en la parte superior los gráficos para  $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$  y  $\Delta c_s^2 = c_s^2 - c_0^2$  como función de  $N$ , para el modelo (a) (gráficos a la izquierda) y para el modelo (b) (gráficos a la derecha).

donde  $\phi$  es un campo pesado, y  $\chi$  sufrirá una desviación en su trayectoria, lo cual origina sobresaltos [41].

Antes de considerar un modelo numérico específico, consideremos que geoméricamente un giro repentino viene dado por

$$\dot{\phi} = \kappa\Omega, \quad (6.75)$$

donde  $\kappa$  representa el radio de curvatura y  $\Omega$  la velocidad angular. Luego, usando la

ecuación (6.75) en la ecuación (4.36) tendremos que

$$\eta_{\perp} = \frac{\dot{\phi}}{\kappa H}. \quad (6.76)$$

Y ahora, insertando (6.76) en (4.57) y considerando  $k \ll M_{\text{eff}}$ , se tiene

$$c_s^2 = \left(1 + \frac{4\dot{\phi}^2}{M^2\kappa^2}\right)^{-1}. \quad (6.77)$$

Tomando la definición de  $\theta$  dada en (6.4) tenemos que

$$\dot{\theta} = H \frac{d\theta}{dN} = \frac{8\dot{\phi}\ddot{\phi}}{M^2\kappa^2 \left(1 + \frac{4\dot{\phi}^2}{M^2\kappa^2}\right)^2}. \quad (6.78)$$

Luego, usando la definición de  $\eta_{\parallel}$  de (4.32) en (6.78) tendremos que

$$\eta_{\parallel} = -\frac{M^2\kappa^2}{8\dot{\phi}^2} \left(1 + \frac{4\dot{\phi}^2}{M^2\kappa^2}\right)^2 \frac{d\theta}{dN}. \quad (6.79)$$

De la expresión (6.79) tenemos una relación entre  $\eta_{\parallel}$  y  $d\theta/dN$ , la cual depende de  $\dot{\phi}^2$ .

Por otra parte, consideremos un segundo argumento para justificar la relación (6.56) en un modelo de múltiples campos. Para  $M_{\text{eff}}^2 \gg H^2$  podemos relacionar la velocidad del sonido con la velocidad angular  $\Omega$  de la forma

$$c_s^{-2} = 1 + \frac{4\Omega^2}{m^2 - \Omega^2}, \quad (6.80)$$

donde  $m$  viene definido por  $M_{\text{eff}}^2 = m^2 - \Omega^2$ .

Notamos de la expresión (6.80) que desviaciones de la velocidad del sonido del valor 1 sólo se deben a cambios repentinos de la trayectoria. Por otro lado, la ecuación (4.35) nos indica que durante un giro la trayectoria es llevada fuera del mínimo

del potencial. Por lo tanto, en cada giro hay un aumento de energía potencial debido a que la trayectoria inflacionaria tiende a subir por la barrera de potencial al mismo tiempo que se reduce la energía cinética dada por  $\dot{\phi}^2$ . De la ecuación (4.29) vemos que  $\epsilon$  es proporcional a dicha energía cinética, por lo que en resumen, un giro produce una disminución en  $\epsilon$  y en  $c_s$ , lo cual finalmente lleva a (6.56).

### Ejemplos numéricos

Tomemos un modelo en que el cambio de la trayectoria inflacionaria provenga de una métrica sigma model  $\gamma_{ab}$ . Usaremos  $\gamma_{ab}$  de modo que tenga determinante 1, de la siguiente forma:

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \Gamma(\chi) \\ \Gamma(\chi) & 1 + \Gamma(\chi)^2 \end{pmatrix}, \quad (6.81)$$

donde  $\Gamma(\chi)$  es una función que depende sólo de uno de los campos, en nuestro caso, hemos elegido  $\chi$ . Escogeremos además, un potencial de la forma

$$V(\chi, \psi) = v(\chi) + \frac{M_\psi^2}{2} \psi^2, \quad (6.82)$$

donde  $v(\chi)$  es un potencial de un campo construido de modo que inflación slow-roll ocurra en la dirección de  $\chi$ . A su vez,  $M_\psi$  es un término de masa que fuerza a  $\psi$  a estabilizarse en  $\psi = 0$ . Tomaremos  $v(\chi)$  de la forma

$$v(\chi) = \frac{M_{\text{eff}}^2}{2} \chi^2. \quad (6.83)$$

Por otra parte, consideraremos dos tipos de función  $\Gamma(\chi)$ , dadas por

$$\Gamma_{(a)}(\chi) = \frac{\Gamma_0}{2} \left( 1 + \tanh \left[ \frac{(\chi - \chi_0)}{\sqrt{2}\Delta\chi} \right] \right), \quad (6.84)$$

$$\Gamma_{(b)}(\chi) = \Gamma_0 \exp \left[ \frac{(\chi - \chi_0)^2}{2\Delta\chi^2} \right]. \quad (6.85)$$

Notemos que para  $\Gamma_{(a)}(\chi)$  se tiene una función que muestra sólo un salto. Es claro ver que esto originará un sólo giro en la trayectoria que inducirá una desviación de  $c_s^2$  de la unidad. Por otro lado,  $\Gamma_{(b)}(\chi)$  llevará dos giros consecutivos en direcciones opuestas.

Luego, los valores numéricos para los parámetros del potencial y de las funciones  $\Gamma(\chi)$  escogidas, de modo que se concuerden con cantidades observables son

$$\Gamma_0 = 2.5, \quad M_\psi^2 = 10^{-2}, \quad M_{\text{eff}}^2 = 5.89 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta\chi = 0.005, \quad \chi_0 = 15.37. \quad (6.86)$$

En la figura 6.2, para los gráficos inferiores se aprecia que el comportamiento tanto para  $\eta$  como para  $d\theta/dN$  son similares, tanto para la elección de  $\Gamma_{(a)}(\chi)$  a la izquierda, como para  $\Gamma_{(b)}(\chi)$  a la derecha, obteniéndose los valores para  $\alpha$  que permiten la validez de la ecuación (6.56)

$$\alpha_{(a)} = -0.53, \quad \alpha_{(b)} = -0.52, \quad (6.87)$$

para las elecciones de  $\Gamma_{(a)}(\chi)$  y  $\Gamma_{(b)}(\chi)$ , respectivamente. Del mismo modo se muestra al igual como para los modelos del tipo  $P(X)$  en la parte superior de la figura 6.2 los gráficos para  $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$  y  $1 - c_s^2$  como funciones de los e-folds  $N$ .

Verificamos por tanto que para este caso la relación (6.56) funciona, destacando que sigue siendo válida aún para un valor de  $\alpha$  cercano a  $-1$ .

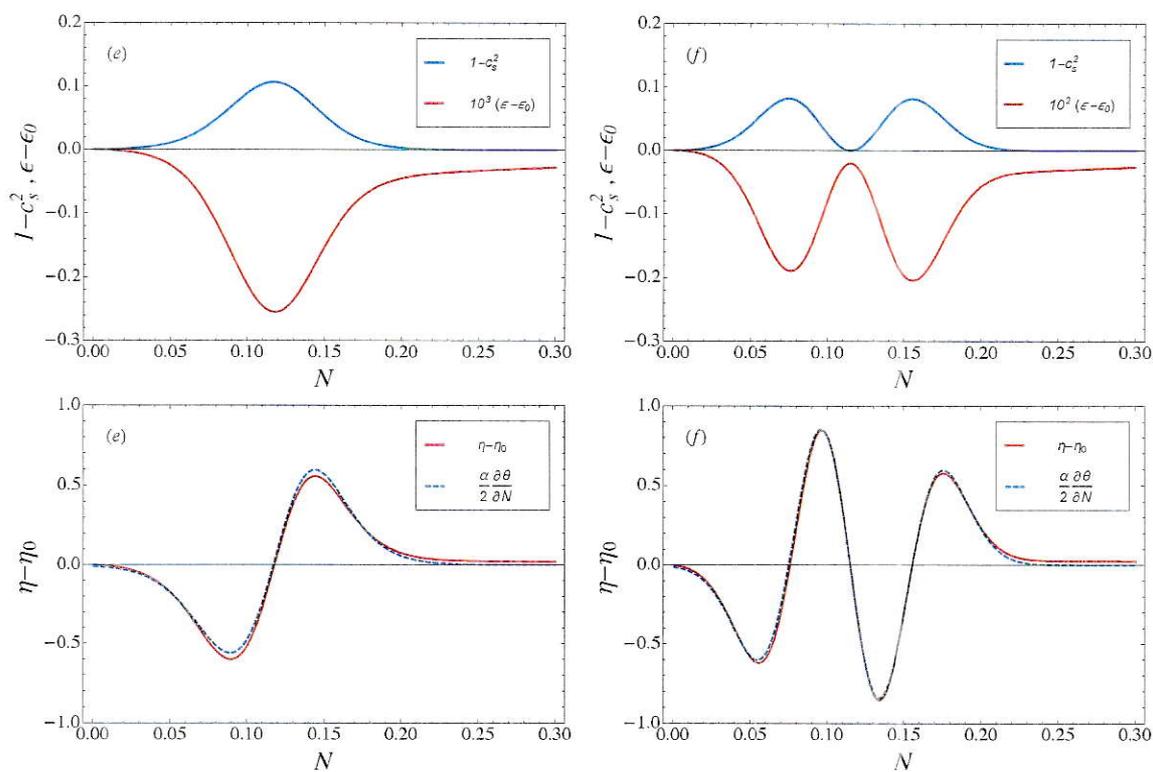


Figura 6.2: La figura muestra en la parte inferior los gráficos para  $\eta - \eta_0$  y  $\frac{\alpha}{2} \frac{d\theta}{dN}$  como funciones de  $N$  y en la parte superior los gráficos para  $\Delta\epsilon = \epsilon - \epsilon_0$  y  $1 - c_s^2$  como función de  $N$ , para el modelo (a) (gráficos a la izquierda) y para el modelo (b) (gráficos a la derecha).

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo de tesis hemos revisado mediante la perspectiva de la teoría efectiva de campos dos predicciones para inflación. Primero, en el capítulo 5 mediante teoría de perturbaciones consideramos los límites inferiores para la velocidad del sonido  $c_s$ , para cuando ésta se mantiene constante y para cuando ésta varía, así como también la importancia del running del índice espectral para fijar las cotas para  $c_s$ . Por otra parte,  $\alpha$  permite romper la degeneración entre  $\epsilon$  y  $c_s$  para un valor del tensor to scalar ratio  $r$ , puesto que al tener su valor se puede definir de forma única estas dos cantidades mediante la ecuación (5.62) siempre que consideremos despreciables las variaciones de  $\eta$  y  $c_s$ . Segundo, en el capítulo 6 se observan circunstancias en las que aparecen sobresaltos en el espectro de potencia y biespectro, debidos a cambios en la velocidad del sonido, a cambios en la tasa de expansión y a ambas a la vez. A continuación destacamos puntos importantes para estos dos elementos centrales de este trabajo.

Mediante lo realizado en el capítulo 5 reafirmamos lo expuesto por Baumann, Green y Porto [87], quienes comentan que un pequeño valor en la velocidad del sonido tiene un alto impacto en la dependencia del tensor to scalar ratio. Por otro

lado, estos efectos llevan a que los límites en la velocidad del sonido preservan la degeneración entre el parámetro de slow-roll  $\epsilon$  y  $c_s$ , incluso en el caso en que la relación de consistencia se cumple. Hemos visto que solo con medir del índice espectral tensorial  $n_t$  no es suficiente para romper esta degeneración. Por otro lado, el hecho que se cumpla esta relación de consistencia no permite descartar modelos no canónicos de inflación, dado que existen valores de  $\epsilon$  y  $c_s$  que satisfacen dicha relación. De este modo, los resultados mostrados en el capítulo 5 muestran la importancia de la medición experimental de la polarización del CMB en el propósito de poner límites a desviaciones no triviales del modelo canónico de un sólo campo, parametrizadas por la velocidad del sonido y los parámetros UV  $\beta_1$  y  $\beta_2$  que aparecen en la acción (5.63). De forma más precisa, si futuros experimentos detectan una señal mayor que  $r = 0.01$  podemos contar con mejores cotas para el valor de  $c_s$  que las obtenidas de las observaciones de no gaussianidad.

Además, lo realizado en la sección 5.3 nos permite entregar cotas a los valores para  $c_s$  para modelos que al igual como el ejemplo de Gwyn et. al [101], presentan operadores que surgen de una teoría ultravioleta, lo cual permitiría realizar comparaciones con lo reportado en observaciones.

Por otro lado, aún cuando hasta aquí no existe evidencia de sobresaltos en el espectro primordial, es importante volver a destacar que la observación de éstas permite descartar modelos inflacionarios y a la vez entrega información acerca de la naturaleza de la teoría fundamental que contiene inflación, por lo que se hace necesario un formalismo que permita comprender el fenómeno. En este trabajo, en el capítulo 6, se mostró el caso de aparición de sobresaltos debido tanto a variaciones en la velocidad

del sonido como de la tasa de expansión del background, tanto por separado como en simultáneo. En este último caso, dado que los resultados presentados dependen fuertemente de la validez de la relación entre  $\eta$  y  $\theta$  dada en la ecuación (6.56), hemos visto que para un modelo de *Chaotic Inflation* del tipo  $P(X, \phi)$  y para un modelo para dos campos con métrica del tipo sigma model, la relación propuesta se satisface.

Finalmente, se dejan abiertos varios puntos a partir de lo realizado en este último capítulo. Primero, puesto que para el caso general, mediante la ecuación (6.56) vimos que para  $\alpha \rightarrow -1$  las expresiones para  $\theta$  y  $\eta$  divergen, dejamos abierto el problema de ver qué ocurre en dicho punto y solamente comentamos que es notable el hecho de que en nuestro ejemplo de múltiples campos se tiene  $\alpha \sim -0.5$ , valor cercano al punto de divergencia, pero que el formalismo descrito en el trabajo de tesis sigue teniendo validez.

En segundo lugar, es importante ver que en el tratamiento realizado sólo se estudió el caso en que hay pequeñas desviaciones de una velocidad del sonido  $c_s = 1$ , no tomando el caso más general como se hizo en el capítulo 5. Como vimos en la sección 6.3.1 en los primeros dos ejemplos numéricos, donde se tenía una velocidad del sonido  $c_s \sim 0.8$ , no hay una violación en la relación entre  $\eta$  y  $d\theta/dN$ , sin embargo, acá aparecen nuevos operadores en la acción cúbica (6.35) para  $\mathcal{R}$  induciendo sobresaltos en el biespectro, los cuales no son tomados en cuenta en el resultado mostrado en (6.61).

Por último es destacable el hecho de que existen otras clases de modelos en teoría efectiva de campos con una relación de dispersión de las perturbaciones de curvatura que contienen una dependencia no trivial de escala [97, 101]. De este modo, queda

abierto el analizar la forma en que el espectro primordial está correlacionado dentro de estos tipos de teorías.

Para concluir, destacamos el hecho de la utilidad de la teoría efectiva de campos para establecer un modo de analizar la aparición de sobresaltos, así como para obtener una comprensión de inflación y sus parámetros.

# Apéndice A

## Cálculo del espectro de potencia UV

Se tiene el siguiente hamiltoniano:

$$H_I = \frac{(1 - c_s^2)}{2M^2} \int d^3k \left[ \frac{\beta_1 k^2}{a^2} \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau) - \frac{\beta_2 c_s^2 k^4}{a^2} \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Procederemos a resolver por partes, primero calculamos el segundo término, correspondiente a

$$H_{I(a)} = -\frac{(1 - c_s^2)c_s^2}{2M^2} \int d^3k \left[ \frac{\beta_2 k^4}{a^2} \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Entonces, calculamos el siguiente conmutador:

$$[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] = -\frac{(1 - c_s^2)c_s^2}{2M^2} \int d^3k \frac{\beta_2 k^4}{a^2} [\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') \hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)]. \quad (\text{A.3})$$

Usando la transformada de Fourier de  $u_I(\mathbf{x}, \tau)$  se tiene que

$$[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] = -\frac{(1 - c_s^2)c_s^2}{2M^2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{\beta_2 k^4}{a^2} \int d^3p [\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') \hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{A.4})$$

Mediante las propiedades de los conmutadores, para el lado derecho de (A.4) tenemos

$$[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') \hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') [\hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] + [\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] \hat{u}_{-\mathbf{k}}(\tau'). \quad (\text{A.5})$$

Por otra parte, se sabe que

$$[\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})W_{\mathbf{k}}^-(\tau', \tau), \quad (\text{A.6})$$

donde hemos definido

$$W_{\mathbf{k}}^-(\tau', \tau) = u_{\mathbf{k}}(\tau')u_{\mathbf{p}}^*(\tau) - u_{\mathbf{k}}^*(\tau')u_{\mathbf{p}}(\tau), \quad (\text{A.7})$$

y al utilizar la definición de  $u_{\mathbf{k}}$  de (5.22)

$$W_{\mathbf{k}}^-(\tau', \tau) = \frac{i}{c_0 k} \left\{ \left( \frac{1}{c_0 k \tau} - \frac{1}{c_0 k \tau'} \right) \cos [c_0 k (\tau' - \tau)] - \left( 1 + \frac{1}{c_0^2 k^2 \tau \tau'} \right) \sin [c_0 k (\tau' - \tau)] \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Análogamente se puede definir  $W_{\mathbf{k}}^+(\tau', \tau)$  de la forma

$$W_{\mathbf{k}}^+(\tau', \tau) = \frac{1}{c_0 k} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{c_0^2 k^2 \tau \tau'} \right) \cos [c_0 k (\tau' - \tau)] - \left( \frac{1}{c_0 k \tau'} - \frac{1}{c_0 k \tau} \right) \sin [c_0 k (\tau' - \tau)] \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Usando la ecuación (A.6) en la (A.5) y ésta en la ecuación (A.4) obtendremos que

$$[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] = -\frac{(1 - c_s^2)c_s^2}{M^2} \frac{\beta_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a^2} \int d^3 k k^4 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') W_{\mathbf{k}}^-(\tau', \tau). \quad (\text{A.10})$$

Ahora calculamos:

$$i \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle 0 | [H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau)] | 0 \rangle.$$

Para eso, se tiene que:

$$[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau)] = u_I(\mathbf{x}, \tau) [H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau)] + [H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] u_I(\mathbf{y}, \tau). \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} [H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau)] &= u_I(\mathbf{x}, \tau) \left( -\frac{\beta_2(1 - c_s^2)c_s^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a^2 M^2} \right) \int d^3 k k^4 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') W_{\mathbf{k}}^-(\tau', \tau) \\ &\quad + \left( -\frac{\beta_2(1 - c_s^2)c_s^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a^2 M^2} \right) \int d^3 k k^4 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau') W_{\mathbf{k}}^-(\tau', \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Como además

$$\langle 0|u_I(\mathbf{x}, \tau)\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau')|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle 0|\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau')|0\rangle, \quad (\text{A.13})$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \langle 0|[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)u_I(\mathbf{y}, \tau)]|0\rangle &= -\frac{\beta_2(1-c_s^2)c_s^2}{(2\pi)^3 a^2 M^2} \int d^3k k^4 W_k^-(\tau', \tau) \left\{ \int d^3p e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. \times \langle 0|\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau')|0\rangle + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \langle 0|\hat{u}_{\mathbf{k}}(\tau')\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)|0\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Desarrollando e integrando (A.14) se tiene

$$\int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \langle 0|[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau)u_I(0, \tau)]|0\rangle = -\frac{\beta_2(1-c_s^2)c_s^2}{a^2 M^2} k^4 W_k^-(\tau', \tau) W_k^+(\tau', \tau). \quad (\text{A.15})$$

Consideremos el producto  $W_k^-(\tau', \tau)W_k^+(\tau', \tau)$ , el cual viene dado por

$$\begin{aligned} W_k^-(\tau', \tau)W_k^+(\tau', \tau) &= \frac{i}{c_0^2 k^2} \left\{ \left( \frac{1}{c_0 k \tau} - \frac{1}{c_0 k \tau'} \right) \left( 1 + \frac{1}{c_0^2 k^2 \tau \tau'} \right) \cos(2c_0 k(\tau' - \tau)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{c_0 k \tau} - \frac{1}{c_0 k \tau'} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{c_0^2 k^2 \tau \tau'} \right)^2 \right] \sin(2c_0 k(\tau' - \tau)) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Como

$$\frac{\Delta \mathcal{P}_{(a)}}{\mathcal{P}_0} = \lim_{k|\tau| \rightarrow 0} i(2c_0^3 k^3 \tau^2) \int d^3y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle 0|[H_{I(a)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau)u_I(0, \tau)]|0\rangle, \quad (\text{A.17})$$

entonces usando la expresión de (A.15) en (A.17) tendremos

$$\frac{\Delta \mathcal{P}_{(a)}}{\mathcal{P}_0} = \lim_{k|\tau| \rightarrow 0} i(2c_0^3 k^3 \tau^2) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \left( -\frac{\beta_2(1-c_s^2)c_s^2}{a^2 M^2} \right) k^4 W_k^-(\tau', \tau) W_k^+(\tau', \tau). \quad (\text{A.18})$$

Haciendo el cambio de variable  $x = -c_0 k \tau'$  e  $y = -c_0 k \tau$  entonces:

$$\frac{\Delta \mathcal{P}_{(a)}}{\mathcal{P}_0} = \lim_{y \rightarrow 0} i(2c_0 k y^2) \int_y^\infty dx \left( \frac{\beta_2(1 - c_s^2)c_s^2}{a^2 M^2} \right) \frac{ik}{c_0^3} \left\{ \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \left( 1 + \frac{1}{yx} \right) \cos(2(x - y)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{yx} \right)^2 \right] \sin(2(x - y)) \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Si consideramos la expresión para  $\tau$  que viene de la ecuación (3.19) reemplazamos  $a$  y luego mediante el cambio de variables anterior se tiene que

$$\frac{\Delta \mathcal{P}_{(a)}}{\mathcal{P}_0} = - \left( \frac{2\beta_2(1 - c_s^2)c_s^2 H_0^2}{c_0^4 M^2} \right) \lim_{y \rightarrow 0} y^2 \int_y^\infty dx x^2 \left\{ \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \left( 1 + \frac{1}{yx} \right) \cos(2(x - y)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{yx} \right)^2 \right] \sin(2(x - y)) \right\}. \quad (\text{A.20})$$

Desarrollando,

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^2 \int_y^\infty dx x^2 \left\{ \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \left( 1 + \frac{1}{yx} \right) \cos(2(x - y)) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{yx} \right)^2 \right] \sin(2(x - y)) \right\} = -\frac{5}{8}. \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto:

$$\frac{\Delta \mathcal{P}_{(a)}}{\mathcal{P}_0} = \frac{5\beta_2(1 - c_s^2)H_0^2}{4c_0^2 M^2}. \quad (\text{A.22})$$

Ahora, resolviendo para la otra parte del hamiltoniano tenemos que

$$H_{I(b)} = \frac{(1 - c_s^2)}{2M^2} \int d^3 k \left[ \frac{\beta_1 k^2}{a^2} \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau) \hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau) \right]. \quad (\text{A.23})$$

Para eso consideramos que

$$u'_I(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.24})$$

donde el operador  $\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau)$  viene determinado por la derivada de la función solución  $u_{\mathbf{k}}$  de la forma

$$u'_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2c_0k}} \left[ -\frac{1}{\tau} + i \left( \frac{1}{c_0k\tau^2} - c_0k \right) \right] e^{-ic_0k\tau}, \quad (\text{A.25})$$

y su complejo conjugado.

Análogo a lo hecho para  $H_{I(a)}$  calculamos el conmutador  $[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)]$ , así se tiene que

$$[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] = \frac{(1 - c_s^2)}{2M^2} \int d^3k \frac{\beta_1 k^2}{a^2} [\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') \hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)]. \quad (\text{A.26})$$

Usando la transformada de Fourier de  $u_I(\mathbf{x}, \tau)$  queda

$$[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] = \frac{(1 - c_s^2)}{2M^2} \int d^3k \frac{\beta_1 k^2}{a^2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p [\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') \hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \quad (\text{A.27})$$

Mediante las propiedades del conmutador, desarrollamos el conmutador de adentro de la integral en (A.27) y se tiene

$$[\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') \hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') [\hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] + [\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] \hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau'). \quad (\text{A.28})$$

Por otra parte,

$$[\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = [(a_{\mathbf{k}} u'_{\mathbf{k}}(\tau') + a_{-\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}'^*(\tau')), (a_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\tau) + a_{-\mathbf{p}}^\dagger u_{\mathbf{p}}^*(\tau))], \quad (\text{A.29})$$

por tanto,

$$[\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{p}) (u'_{\mathbf{k}}(\tau') u_{\mathbf{p}}^*(\tau) - u_{\mathbf{k}}'^*(\tau') u_{\mathbf{p}}(\tau)). \quad (\text{A.30})$$

Teniendo en consideración las funciones  $u_{\mathbf{k}}$  y su derivada tendremos que

$$u'_{\mathbf{k}}(\tau') u_{\mathbf{p}}^*(\tau) = \frac{1}{2c_0k} \left[ \left( 1 - \frac{i}{c_0k\tau'} \right) \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) - \frac{1}{c_0^2 k^2 \tau'^2 \tau} - ic_0k \right] e^{-ic_0k(\tau' - \tau)}, \quad (\text{A.31})$$

$$u_{\mathbf{k}}'^*(\tau') u_{\mathbf{p}}(\tau) = \frac{1}{2c_0k} \left[ \left( 1 + \frac{i}{c_0k\tau'} \right) \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) - \frac{1}{c_0^2 k^2 \tau'^2 \tau} + ic_0k \right] e^{ic_0k(\tau' - \tau)}. \quad (\text{A.32})$$

Restando las ecuaciones (A.31) y (A.32) obtenemos

$$u'_k(\tau')u_p^*(\tau) - u_k^*(\tau')u_p(\tau) = \frac{1}{2c_0k} \left\{ -i \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) \sin [c_0k(\tau' - \tau)] - \frac{i}{c_0k\tau'} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) \cos [c_0k(\tau' - \tau)] - i c_0k \cos [c_0k(\tau' - \tau)] + \frac{i}{c_0^2k^2\tau'^2\tau} \sin [c_0k(\tau' - \tau)] \right\}. \quad (\text{A.33})$$

A esta resta la definimos como  $\bar{W}_k(\tau', \tau)$  y al desarrollar queda:

$$\bar{W}_k(\tau', \tau) = \frac{1}{c_0k} \left\{ - \left[ c_0k + \frac{1}{c_0k\tau'} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) \right] \cos [c_0k(\tau' - \tau)] + \left[ \frac{1}{c_0^2k^2\tau'^2\tau} - \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) \right] \sin [c_0k(\tau' - \tau)] \right\} \quad (\text{A.34})$$

Usando la ecuación (A.34) en la ecuación (A.30):

$$[\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \bar{W}_k(\tau', \tau) \quad (\text{A.35})$$

Y utilizando esta expresión de (A.35) en (A.28),

$$[\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')\hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau'), \hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)] = \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')\delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})\bar{W}_k(\tau', \tau) + \delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k})\bar{W}_k(\tau', \tau)\hat{u}'_{-\mathbf{k}}(\tau') \quad (\text{A.36})$$

Y ahora usamos (A.36) en (A.27) y obtendremos

$$[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] = \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}a^2M^2} \int d^3kk^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') \bar{W}_k(\tau', \tau). \quad (\text{A.37})$$

Ahora calculamos:

$$i \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle 0 | [H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau)] | 0 \rangle.$$

Para eso, se tiene que

$$[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau)] = u_I(\mathbf{x}, \tau) [H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau)] + [H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)] u_I(\mathbf{y}, \tau). \quad (\text{A.38})$$

Usando la ecuación (A.37) en (A.38) tendremos que

$$[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)u_I(\mathbf{y}, \tau)] = u_I(\mathbf{x}, \tau) \left( \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a^2 M^2} \right) \int d^3 k k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') \bar{W}_{\mathbf{k}}(\tau', \tau) \\ + \left( \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a^2 M^2} \right) \int d^3 k k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau') \bar{W}_{\mathbf{k}}(\tau', \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau). \quad (\text{A.39})$$

Luego,

$$\langle 0|[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)u_I(\mathbf{y}, \tau)]|0\rangle = \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{a^2 M^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k k^2 \bar{W}_{\mathbf{k}}(\tau', \tau) \\ \times \left\{ \int d^3 p e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle 0|\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')|0\rangle + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}} \langle 0|\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)|0\rangle \right\}. \quad (\text{A.40})$$

Notamos que

$$\langle 0|\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')|0\rangle = \langle 0|(a_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}}(\tau) + a_{-\mathbf{p}}^\dagger u_{\mathbf{p}}^*(\tau)) (a_{\mathbf{k}}u'_{\mathbf{k}}(\tau') + a_{-\mathbf{k}}^\dagger u'_{\mathbf{k}}^*(\tau'))|0\rangle, \quad (\text{A.41})$$

lo que lleva usando la relación de conmutación para  $a_{\mathbf{p}}$  a

$$\langle 0|\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')|0\rangle = u_{\mathbf{p}}(\tau)u'_{\mathbf{k}}^*(\tau')\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (\text{A.42})$$

Análogamente,

$$\langle 0|\hat{u}'_{\mathbf{k}}(\tau')\hat{u}_{\mathbf{p}}(\tau)|0\rangle = u'_{\mathbf{k}}(\tau')u_{\mathbf{p}}^*(\tau)\delta^{(3)}(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (\text{A.43})$$

Entonces, usando las ecuaciones (A.42) y (A.43) en (A.40):

$$\langle 0|[H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau)u_I(\mathbf{y}, \tau)]|0\rangle = \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{a^2 M^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k k^2 \bar{W}_{\mathbf{k}}(\tau', \tau) [u_{\mathbf{k}}(\tau)u'_{\mathbf{k}}^*(\tau') \\ + u'_{\mathbf{k}}(\tau')u_{\mathbf{k}}^*(\tau)] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (\text{A.44})$$

Para realizar la suma que está dentro de la integral usamos las ecuaciones (A.31) y

(A.32):

$$\begin{aligned}
u'_k(\tau')u_k^*(\tau) + u_k'^*(\tau')u_k(\tau) &= \frac{1}{2c_0k} \left\{ \left(1 - \frac{i}{c_0k\tau'}\right) \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) e^{-ic_0k(\tau'-\tau)} \right. \\
&+ \left. \left(1 + \frac{i}{c_0k\tau'}\right) \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) e^{ic_0k(\tau'-\tau)} + ic_0k \left( e^{ic_0k(\tau'-\tau)} - e^{-ic_0k(\tau'-\tau)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{c_0^2k^2\tau'^2\tau} \left( e^{ic_0k(\tau'-\tau)} + e^{-ic_0k(\tau'-\tau)} \right) \right\}. \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

A esta suma la llamamos  $\bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau)$  y al desarrollar se obtiene que

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau) &= \frac{1}{c_0k} \left\{ \left[ \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) - \frac{1}{c_0^2k^2\tau'^2\tau} \right] \cos [c_0k(\tau' - \tau)] \right. \\
&\quad \left. - \left[ c_0k + \frac{1}{c_0k\tau'} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) \right] \sin [c_0k(\tau' - \tau)] \right\}. \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle 0 | [H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{x}, \tau) u_I(\mathbf{y}, \tau)] | 0 \rangle = \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{a^2 M^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k^2 \bar{W}_k(\tau', \tau) \bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \quad (\text{A.47})$$

Luego, integrando se tiene

$$\int d^3y e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \langle 0 | [H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau) u_I(0, \tau)] | 0 \rangle = \frac{\beta_1(1 - c_s^2)}{a^2 M^2} k^2 \bar{W}_k(\tau', \tau) \bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau). \quad (\text{A.48})$$

Calculamos el producto  $\bar{W}_k(\tau', \tau) \bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau)$ . Así

$$\begin{aligned}
\bar{W}_k(\tau', \tau) \bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau) &= \frac{i}{c_0^2k^2} \left\{ \left[ c_0k + \frac{1}{c_0k\tau'} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) \right] \right. \\
&\quad \times \left[ \frac{1}{c_0^2k^2\tau'^2\tau} - \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) \right] \cos [2c_0k(\tau' - \tau)] \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \left[ c_0k + \frac{1}{c_0k\tau'} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) \right]^2 - \left[ \frac{1}{c_0^2k^2\tau'^2\tau} - \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right) \right]^2 \right\} \sin [2c_0k(\tau' - \tau)] \left. \right\}. \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

Dado que se cumple que

$$\frac{\Delta \mathcal{P}^{(b)}}{\mathcal{P}_0} = \lim_{k|\tau| \rightarrow 0} i(2c_0^3k^3\tau^2) \int d^3y e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \langle 0 | [H_{I(b)}(\tau'), u_I(\mathbf{y}, \tau) u_I(0, \tau)] | 0 \rangle, \quad (\text{A.50})$$

tendremos que

$$\frac{\Delta \mathcal{P}^{(b)}}{\mathcal{P}_0} = \lim_{k|\tau| \rightarrow 0} i(2c_0^3 k^3 \tau^2) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \frac{\beta_1(1-c_s^2)}{a^2 M^2} k^2 \bar{W}_k(\tau', \tau) \bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau). \quad (\text{A.51})$$

Usamos nuevamente la definición de  $\tau$  de la ecuación (3.19) para reemplazar  $a$ , de modo que

$$\frac{\Delta \mathcal{P}^{(b)}}{\mathcal{P}_0} = \lim_{k|\tau| \rightarrow 0} i(2c_0^3 k^3 \tau^2) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \frac{\beta_1(1-c_s^2)}{M^2} H_0^2 \tau'^2 k^2 \bar{W}_k(\tau', \tau) \bar{\bar{W}}_k(\tau', \tau). \quad (\text{A.52})$$

Volvemos a hacer el cambio de variable  $x = -c_0 k \tau'$  e  $y = -c_0 k \tau$  y tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{P}^{(b)}}{\mathcal{P}_0} &= \left( \frac{2\beta_1(1-c_s^2)H_0^2}{c_0^2 M^2} \right) \lim_{y \rightarrow 0} y^2 \int_y^\infty dx x^2 \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{x} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right] \left[ \frac{1}{x^2 y} - \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right] \right. \\ &\times \cos [2(x-y)] + \frac{1}{2} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{x} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right]^2 - \left[ \frac{1}{x^2 y} - \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right]^2 \right\} \sin [2(x-y)] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Luego de tomar el límite y desarrollando se tiene

$$\frac{\Delta \mathcal{P}^{(b)}}{\mathcal{P}_0} = \frac{\beta_1(1-c_s^2)H_0^2}{4c_0^2 M^2}. \quad (\text{A.54})$$

Entonces, tomamos las ecuaciones (A.22) y (A.54) y tenemos que

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \frac{(1-c_s^2)H_0^2}{4c_0^2 M^2} (\beta_1 + 5\beta_2). \quad (\text{A.55})$$

# Apéndice B

## Cálculo de sobresaltos en el biespectro

Consideramos el hamiltoniano de la forma

$$H_I = - \int d^3x a^3 \epsilon \left[ \frac{\alpha_1}{H_0} \dot{\mathcal{R}}_I^3 - \alpha_2 \mathcal{R}_I \dot{\mathcal{R}}_I^2 + \frac{\alpha_3}{a^2} \mathcal{R}_I (\nabla \mathcal{R}_I)^2 \right], \quad (\text{B.1})$$

de acuerdo al hamiltoniano cúbico en (6.36) tenemos que

$$\alpha_1 = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\alpha_2 = 3\theta + \eta, \quad (\text{B.3})$$

$$\alpha_3 = \theta - \tau\theta' + \eta. \quad (\text{B.4})$$

### B.1. Sobresaltos debido a cambios repentinos en la velocidad del sonido

Como en este caso  $\eta = 0$ , tenemos que acá  $\alpha_2 = 3\theta$ . Usando esto y las ecuaciones (6.29) y (6.41) se tiene

$$B_2 = \frac{6\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{2}{\pi i} \int \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau} \left[ i\tau(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \right] i e^{iK\tau} \right\}. \quad (\text{B.5})$$

$$B_2 = \frac{24\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \int \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \left[ -\frac{1}{4} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{\partial}{\partial k} \delta(K/2 - k) - \frac{1}{2} \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \delta(K/2 - k) \right]. \quad (\text{B.6})$$

$$B_2 = \frac{12\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left[ \frac{1}{2} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{d}{dk} \left( \frac{1}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (\text{B.7})$$

$$B_2 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left[ \frac{3}{8} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{1}{k^2} \left( \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - \frac{3}{4} \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, para el siguiente término,  $\alpha_3 = \theta - \tau\theta'$ , y derivando la ecuación (6.29) tenemos que

$$\theta' = \frac{-4}{\pi} \int dk \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau}. \quad (\text{B.9})$$

Usando las ecuaciones (B.9) junto a (6.42) tendremos

$$B_3 = \frac{2\pi^3 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{i\tau^2} \int \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau} + \frac{2}{\tau} \int dk \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau} \right] \cdot [1 - 2ik\tau - \tau^2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) + ik_1 k_2 k_3 \tau^3] i e^{iK\tau}, \quad (\text{B.10})$$

donde el segundo término en el paréntesis cuadrado corresponde a  $2k = k_1 + k_2 + k_3$ .

Luego, para los términos

$$\frac{1}{i} \int \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} e^{i\gamma\tau},$$

$$-2k \int \frac{dk}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{i\gamma\tau}$$

y

$$2i \int dk \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau} e^{i\gamma\tau},$$

donde  $\gamma = K/2 - k$ , usando el método del residuo éstos desaparecen. De esta forma, sólo quedan los términos restantes. Así

$$-(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} = -2\pi(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \delta(K - 2k)$$

$$\begin{aligned} i k_1 k_2 k_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau e^{i\gamma\tau} &= k_1 k_2 k_3 \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} \\ &= -\pi k_1 k_2 k_3 \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) \end{aligned}$$

$$4k \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} = 8\pi k \delta(K - 2k)$$

$$\begin{aligned} -2i(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau e^{i\gamma\tau} &= -2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} \\ &= 2\pi(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2k_1 k_2 k_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau^2 e^{i\gamma\tau} &= 2k_1 k_2 k_3 \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} \\ &= \pi k_1 k_2 k_3 \frac{d^2}{dk^2} \delta(K - 2k) \end{aligned}$$

Entonces, la expresión para  $B_3$  viene dada por

$$\begin{aligned} B_3 = \frac{2\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \left\{ \int dk \left( \frac{1}{k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) \left[ -2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \delta(K - 2k) \right. \right. \\ \left. \left. - k_1 k_2 k_3 \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) \right] + \int dk \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \left[ 8k \delta(K - 2k) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) + k_1 k_2 k_3 \frac{d^2}{dk^2} \delta(K - 2k) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Desarrollando, se tendrá que

$$B_3 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} \frac{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}{8} \left[ -\frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k} \left( \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) + \frac{d}{d \ln k} \left( \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2k^2} k_1 k_2 k_3 \left( \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) + 4k \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (\text{B.12})$$

## B.2. Sobresaltos debido a cambios repentinos de la tasa de expansión

Para este caso se tiene que  $\theta = 0$ , luego, para  $B_2$ , tenemos que  $\alpha_2 = \eta$ . Juntando las ecuaciones (6.41) y (6.33):

$$B_2 = \frac{2\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\pi i} \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau} \left[ i\tau (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \right. \\ \left. - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \right] i e^{iK\tau}. \quad (\text{B.13})$$

$$B_2 = \frac{2\pi^3 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \left[ i(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau e^{i(K-2k)\tau} \right. \\ \left. - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(K-2k)\tau} \right]. \quad (\text{B.14})$$

$$B_2 = \frac{4\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \left[ \frac{-1}{2} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) \right. \\ \left. - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \delta(K - 2k) \right]. \quad (\text{B.15})$$

$$B_2 = \frac{2\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left[ \frac{1}{2} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{d}{dk} \left( \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (\text{B.16})$$

$$B_2 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^2} \left[ \frac{1}{16k^2} (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \left( \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - \frac{k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{8k} \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right] \quad (\text{B.17})$$

Luego, para  $B_3$  tenemos que  $\alpha_3 = \eta$ . Usando esto y las ecuaciones (6.42) y (6.33) se tiene que

$$B_3 = \frac{\pi^3 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^2} \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) e^{-2ik\tau} [1 - 2ik\tau - \tau^2 (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) + ik_1 k_2 k_3 \tau^3] e^{iK\tau}. \quad (\text{B.18})$$

Analizando término a término usando el mismo argumento que en B.1, los primeros dos términos desaparecen, por tanto para los siguientes dos se tiene que

$$-(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} = -2\pi (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \delta(K - 2k) \quad (\text{B.19})$$

$$ik_1 k_2 k_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau e^{i\gamma\tau} = k_1 k_2 k_3 \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\gamma\tau} = -\pi k_1 k_2 k_3 \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) \quad (\text{B.20})$$

Entonces

$$B_3 = \frac{\pi^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \left[ -k_1 k_2 k_3 \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \frac{d}{dk} \delta(K - 2k) - 2(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \int dk \frac{d}{dk} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \delta(K - 2k) \right]. \quad (\text{B.21})$$

Finalmente, desarrollando, se llega a

$$B_3 = \frac{(2\pi)^4 \mathcal{P}_0^2}{(k_1 k_2 k_3)^3} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \left[ \frac{k_1 k_2 k_3}{32k^2} \left( \frac{d^2}{d \ln k^2} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) - \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right) - (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) \frac{1}{16k} \frac{d}{d \ln k} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}(k) \right]. \quad (\text{B.22})$$

# Referencias

- [1] Alexander Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Z. Phys.*, 10:377–386, 1922.
- [2] Georges Lemaitre. Expansion of the universe, a homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91:483–490, 1931.
- [3] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15:168–173, 1929.
- [4] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
- [5] C.L. Bennett et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Results. *Astrophys.J.Suppl.*, 208:20, 2013.
- [6] Alexei A Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102, 1980.

- [7] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, Jan 1981.
- [8] Gerhard Borner. *The Early Universe*. Springer-Verlag, 1988.
- [9] S. W. Hawking, I. G. Moss, and J. M. Stewart. Bubble collisions in the very early universe. *Phys. Rev. D*, 26:2681–2693, Nov 1982.
- [10] A.D. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108(6):389 – 393, 1982.
- [11] Andreas Albrecht and Paul J. Steinhardt. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, Apr 1982.
- [12] Daniel Baumann and Liam McAllister. *Inflation and String Theory*. 2014.
- [13] Enrico Pajer and Marco Peloso. A review of axion inflation in the era of planck. *Classical and Quantum Gravity*, 30(21):214002, 2013.
- [14] Eva Silverstein and Alexander Westphal. Monodromy in the CMB: Gravity Waves and String Inflation. *Phys.Rev.*, D78:106003, 2008.
- [15] Liam McAllister and Eva Silverstein. String cosmology: a review. *General Relativity and Gravitation*, 40(2-3):565–605, 2008.
- [16] James E. Lidsey, David Wands, and E.J. Copeland. Superstring cosmology. *Physics Reports*, 337(45):343 – 492, 2000.

- [17] Cliff P. Burgess. Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. *Living Reviews in Relativity*, 7(5), 2004.
- [18] David B. Kaplan. Five lectures on effective field theory. 2005.
- [19] Witold Skiba. Effective Field Theory and Precision Electroweak Measurements. In *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, pages 5–70, 2011.
- [20] C. P. Burgess. Introduction to Effective Field Theory. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 57:329–362, 2007.
- [21] Clifford Cheung, Paolo Creminelli, A. Liam Fitzpatrick, Jared Kaplan, and Leonardo Senatore. The Effective Field Theory of Inflation. *JHEP*, 0803:014, 2008.
- [22] Steven Weinberg. Effective Field Theory for Inflation. *Phys.Rev.*, D77:123541, 2008.
- [23] Leonardo Senatore and Matias Zaldarriaga. The effective field theory of multifield inflation. *Journal of High Energy Physics*, 2012(4), 2012.
- [24] Mohsen Alishahiha, Eva Silverstein, and David Tong. DBI in the sky. *Phys.Rev.*, D70:123505, 2004.
- [25] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and Viatcheslav F. Mukhanov. k - inflation. *Phys.Lett.*, B458:209–218, 1999.
- [26] Paul Hunt and Subir Sarkar. Reconstruction of the primordial power spectrum of curvature perturbations using multiple data sets. *JCAP*, 1401:025, 2014.

- [27] P. Daniel Meerburg, David N. Spergel, and Benjamin D. Wandelt. Searching for oscillations in the primordial power spectrum. I. Perturbative approach. *Phys. Rev.*, D89(6):063536, 2014.
- [28] Dhiraj Kumar Hazra, Arman Shafieloo, and Tarun Souradeep. Primordial power spectrum from Planck. *JCAP*, 1411(11):011, 2014.
- [29] Bin Hu and Jesus Torrado. Searching for primordial localized features with CMB and LSS spectra. *Phys. Rev.*, D91(6):064039, 2015.
- [30] J. R. Fergusson, H. F. Gruetjen, E. P. S. Shellard, and M. Liguori. Combining power spectrum and bispectrum measurements to detect oscillatory features. *Phys. Rev.*, D91(2):023502, 2015.
- [31] Alexei A. Starobinsky. Spectrum of adiabatic perturbations in the universe when there are singularities in the inflation potential. *JETP Lett.*, 55:489–494, 1992.
- [32] Jennifer A. Adams, Bevan Cresswell, and Richard Easther. Inflationary perturbations from a potential with a step. *Phys.Rev.*, D64:123514, 2001.
- [33] Jinn-Ouk Gong. Breaking scale invariance from a singular inflaton potential. *AIP Conf.Proc.*, 805:451–454, 2006.
- [34] Laura Covi, Jan Hamann, Alessandro Melchiorri, Anze Slosar, and Irene Sorbera. Inflation and WMAP three year data: Features have a Future! *Phys.Rev.*, D74:083509, 2006.
- [35] Amjad Ashoorioon and Axel Krause. Power Spectrum and Signatures for Cascade Inflation. 2006.

- [36] Amjad Ashoorioon, Axel Krause, and Krzysztof Turzynski. Energy Transfer in Multi Field Inflation and Cosmological Perturbations. *JCAP*, 0902:014, 2009.
- [37] Antonio Enea Romano and Alexander Gallego Cadavid. Scale dependent non gaussianity from generalized features of the inflaton potential. 2014.
- [38] Ana Achucarro, Jinn-Ouk Gong, Sjoerd Hardeman, Gonzalo A. Palma, and Subodh P. Patil. Effective theories of single field inflation when heavy fields matter. *JHEP*, 1205:066, 2012.
- [39] Ana Achucarro, Vicente Atal, Sebastian Cespedes, Jinn-Ouk Gong, Gonzalo A. Palma, et al. Heavy fields, reduced speeds of sound and decoupling during inflation. *Phys.Rev.*, D86:121301, 2012.
- [40] Ana Achucarro, Jinn-Ouk Gong, Sjoerd Hardeman, Gonzalo A. Palma, and Subodh P. Patil. Features of heavy physics in the CMB power spectrum. *JCAP*, 1101:030, 2011.
- [41] Sebastian Cespedes, Vicente Atal, and Gonzalo A. Palma. On the importance of heavy fields during inflation. *JCAP*, 1205:008, 2012.
- [42] Xian Gao, David Langlois, and Shuntaro Mizuno. Oscillatory features in the curvature power spectrum after a sudden turn of the inflationary trajectory. *JCAP*, 1310:023, 2013.
- [43] Saito R. and Y. Takamizu. Localized features in Non-Gaussianity from heavy physics. *JCAP*, 1306:031, 2013.
- [44] Gary Shiu and Jiajun Xu. Effective Field Theory and Decoupling in Multi-field Inflation: An Illustrative Case Study. *Phys.Rev.*, D84:103509, 2011.

- [45] Chen X., Namjoo M. H., and Wang Y. Models of the primordial standard clock. 2014.
- [46] Gonzalo A. Palma. Untangling features in the primordial spectra. *JCAP*, 1504(04):035, 2015.
- [47] P.A.R. Ade et al. Detection of  $B$ -Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2. *Phys.Rev.Lett.*, 112(24):241101, 2014.
- [48] P. A. R. Ade et al. (BICEP2 Collaboration, Planck Collaboration). Joint Analysis of BICEP2/ *Keck Array* and *Planck* Data. *Phys. Rev. Lett.*, 114:101301, Mar 2015.
- [49] P.A.R. Ade et al. Planck 2015 results. XVII. Constraints on primordial non-Gaussianity. 2015.
- [50] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.
- [51] P.A.R. Ade et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. 2015.
- [52] Daniel Baumann. *Cosmology, Part III Mathematical Tripos*.
- [53] Shinji Tsujikawa. Introductory review of cosmic inflation. In *2nd Tah Poe School on Cosmology: Modern Cosmology Phitsanulok, Thailand, April 17-25, 2003*, 2003.
- [54] Hael Collins. Primordial non-Gaussianities from inflation. 2011.
- [55] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen.Rel.Grav.*, 40:1997–2027, 2008.

- [56] Juan Martin Maldacena. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *JHEP*, 0305:013, 2003.
- [57] Xingang Chen, Min-xin Huang, Shamit Kachru, and Gary Shiu. Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation. *JCAP*, 0701:002, 2007.
- [58] T. S. Bunch and P. C. W. Davies. Quantum field theory in de sitter space: Renormalization by point-splitting. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 360(1700):117–134, 1978.
- [59] Viviana Acquaviva, Nicola Bartolo, Sabino Matarrese, and Antonio Riotto. Second order cosmological perturbations from inflation. *Nucl. Phys.*, B667:119–148, 2003.
- [60] Boris Leistedt, Hiranya V. Peiris, and Nina Roth. Constraints on Primordial Non-Gaussianity from 800000 Photometric Quasars. *Phys. Rev. Lett.*, 113(22):221301, 2014.
- [61] Misao Sasaki and Ewan D. Stewart. A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation. *Prog.Theor.Phys.*, 95:71–78, 1996.
- [62] Misao Sasaki. Large scale quantum fluctuations in the inflationary universe. *Progress of Theoretical Physics*, 76(5):1036–1046, 1986.
- [63] Viatcheslav F. Mukhanov. Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Sov.Phys.JETP*, 67:1297–1302, 1988.

- [64] Christopher Gordon, David Wands, Bruce A. Bassett, and Roy Maartens. Adiabatic and entropy perturbations from inflation. *Phys. Rev. D*, 63:023506, Dec 2000.
- [65] S. Hardeman G. A. Palma A. Achucarro, J. O. Gong and S. P. Patil. Mass hierarchies and non-decoupling in multi-scalar field dynamics. *Phys. Rev. D*, 84:043502, 2011.
- [66] Gonzalo A. Palma and Alex Soto. B-modes and the sound speed of primordial fluctuations. *Phys.Rev.*, D91:063525, 2015.
- [67] William H. Kinney and Katherine Freese. Negative running can prevent eternal inflation. *JCAP*, 1501(01):040, 2015.
- [68] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation. *Astron.Astrophys.*, 571:A22, 2014.
- [69] Kendrick M. Smith, Cora Dvorkin, Latham Boyle, Neil Turok, Mark Halpern, et al. Quantifying the BICEP2-Planck Tension over Gravitational Waves. *Phys.Rev.Lett.*, 113(3):031301, 2014.
- [70] David H. Lyth. What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy? *Phys.Rev.Lett.*, 78:1861–1863, 1997.
- [71] Daniel Baumann and Daniel Green. A Field Range Bound for General Single-Field Inflation. *JCAP*, 1205:017, 2012.

- [72] Shamit Kachru, Renata Kallosh, Andrei D. Linde, Juan Martin Maldacena, Liam P. McAllister, et al. Towards inflation in string theory. *JCAP*, 0310:013, 2003.
- [73] Joseph P. Conlon and Fernando Quevedo. Kahler moduli inflation. *JHEP*, 0601:146, 2006.
- [74] Raphael Flauger, Sonia Paban, Daniel Robbins, and Timm Wrase. Searching for slow-roll moduli inflation in massive type IIA supergravity with metric fluxes. *Phys.Rev.*, D79:086011, 2009.
- [75] Daniel Baumann and Daniel Green. Signatures of Supersymmetry from the Early Universe. *Phys.Rev.*, D85:103520, 2012.
- [76] Diego Chialva. On UltraViolet effects in protected inflationary models. 2014.
- [77] Laura Covi, Marta Gomez-Reino, Christian Gross, Jan Louis, Gonzalo A. Palma, et al. de Sitter vacua in no-scale supergravities and Calabi-Yau string models. *JHEP*, 0806:057, 2008.
- [78] Laura Covi, Marta Gomez-Reino, Christian Gross, Jan Louis, Gonzalo A. Palma, et al. Constraints on modular inflation in supergravity and string theory. *JHEP*, 0808:055, 2008.
- [79] Liam McAllister, Eva Silverstein, and Alexander Westphal. Gravity Waves and Linear Inflation from Axion Monodromy. *Phys.Rev.*, D82:046003, 2010.
- [80] Renata Kallosh, Andrei Linde, and Tomas Rube. General inflaton potentials in supergravity. *Phys.Rev.*, D83:043507, 2011.

- [81] Andrea Borghese, Diederik Roest, and Ivonne Zavala. A Geometric bound on F-term inflation. *JHEP*, 1209:021, 2012.
- [82] Diederik Roest, Marco Scalisi, and Ivonne Zavala. Kähler potentials for Planck inflation. *JCAP*, 1311:007, 2013.
- [83] C.P. Burgess, James M. Cline, H. Stoica, and F. Quevedo. Inflation in realistic D-brane models. *JHEP*, 0409:033, 2004.
- [84] Sjoerd Hardeman, Johannes M. Oberreuter, Gonzalo A. Palma, Koenraad Schalm, and Ted van der Aalst. The everpresent eta-problem: knowledge of all hidden sectors required. *JHEP*, 1104:009, 2011.
- [85] Leonardo Senatore, Kendrick M. Smith, and Matias Zaldarriaga. Non-Gaussianities in Single Field Inflation and their Optimal Limits from the WMAP 5-year Data. *JCAP*, 1001:028, 2010.
- [86] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 Results. XXIV. Constraints on primordial non-Gaussianity. *Astron.Astrophys.*, 571:A24, 2014.
- [87] Daniel Baumann, Daniel Green, and Rafael A. Porto. B-modes and the Nature of Inflation. *JCAP*, 1501(01):016, 2015.
- [88] Ivonne Zavala. Effects of the speed of sound at large-N. *Phys.Rev.*, D91(6):063005, 2015.
- [89] Nishant Agarwal and Rachel Bean. Cosmological constraints on general, single field inflation. *Phys.Rev.*, D79:023503, 2009.

- [90] Brian A. Powell, Konstantinos Tzirakis, and William H. Kinney. Tensors, non-Gaussianities, and the future of potential reconstruction. *JCAP*, 0904:019, 2009.
- [91] Guido D’Amico and Matthew Kleban. Non-Gaussianity after BICEP2. *Phys.Rev.Lett.*, 113:081301, 2014.
- [92] Eva Silverstein and David Tong. Scalar speed limits and cosmology: Acceleration from D-cceleration. *Phys.Rev.*, D70:103505, 2004.
- [93] Andrew J. Tolley and Mark Wyman. The Gelaton Scenario: Equilateral non-Gaussianity from multi-field dynamics. *Phys.Rev.*, D81:043502, 2010.
- [94] Sera Cremonini, Zygmunt Lalak, and Krzysztof Turzynski. Strongly Coupled Perturbations in Two-Field Inflationary Models. *JCAP*, 1103:016, 2011.
- [95] Anastasios Avgoustidis, Sera Cremonini, Anne-Christine Davis, Raquel H. Ribeiro, Krzysztof Turzynski, et al. Decoupling Survives Inflation: A Critical Look at Effective Field Theory Violations During Inflation. *JCAP*, 1206:025, 2012.
- [96] C.P. Burgess, M.W. Horbatsch, and Subodh.P. Patil. Inflating in a Trough: Single-Field Effective Theory from Multiple-Field Curved Valleys. *JHEP*, 1301:133, 2013.
- [97] Rhiannon Gwyn, Gonzalo A. Palma, Mairi Sakellariadou, and Spyros Sypsas. Effective field theory of weakly coupled inflationary models. *JCAP*, 1304:004, 2013.

- [98] Daniel Baumann and Daniel Green. Equilateral non-gaussianity and new physics on the horizon. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(09):014, 2011.
- [99] Nima Arkani-Hamed, Paolo Creminelli, Shinji Mukohyama, and Matias Zaldarriaga. Ghost inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2004(04):001, 2004.
- [100] Sebastián Céspedes and Gonzalo A. Palma. Cosmic inflation in a landscape of heavy-fields. *JCAP*, 1310:051, 2013.
- [101] Rhiannon Gwyn, Gonzalo A. Palma, Mairi Sakellariadou, and Spyros Sypsas. On degenerate models of cosmic inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(10):005, 2014.
- [102] S. Groot Nibbelink and B.J.W. van Tent. Density perturbations arising from multiple field slow roll inflation. 2000.
- [103] S. Groot Nibbelink and B.J.W. van Tent. Scalar perturbations during multiple field slow-roll inflation. *Class.Quant.Grav.*, 19:613–640, 2002.
- [104] S.-H. Henry Tye, Jiajun Xu, and Yang Zhang. Multi-field Inflation with a Random Potential. *JCAP*, 0904:018, 2009.
- [105] S.-H. Henry Tye and Jiajun Xu. A Meandering Inflaton. *Phys.Lett.*, B683:326–330, 2010.
- [106] Sera Cremonini, Zygmunt Lalak, and Krzysztof Turzyski. On Non-Canonical Kinetic Terms and the Tilt of the Power Spectrum. *Phys.Rev.*, D82:047301, 2010.

- [107] Daniel J.H. Chung, Edward W. Kolb, Antonio Riotto, and Igor I. Tkachev. Probing Planckian physics: Resonant production of particles during inflation and features in the primordial power spectrum. *Phys.Rev.*, D62:043508, 2000.
- [108] Oystein Elgaroy, Steen Hannestad, and Troels Haugboelle. Observational constraints on particle production during inflation. *JCAP*, 0309:008, 2003.
- [109] Grant J. Mathews, D.J.H. Chung, K. Ichiki, T. Kajino, and M. Orito. Constraints on resonant particle production during inflation from the matter and CMB power spectra. *Phys.Rev.*, D70:083505, 2004.
- [110] Antonio Enea Romano and Misao Sasaki. Effects of particle production during inflation. *Phys.Rev.*, D78:103522, 2008.
- [111] Neil Barnaby and Zhiqi Huang. Particle Production During Inflation: Observational Constraints and Signatures. *Phys.Rev.*, D80:126018, 2009.
- [112] Michael A. Fedderke, Edward W. Kolb, and Mark Wyman. Irruption of massive particle species during inflation. *Phys.Rev.*, D91(6):063505, 2015.
- [113] Diego Chialva and Ulf H. Danielsson. Chain inflation and the imprint of fundamental physics in the CMBR. *JCAP*, 0903:007, 2009.
- [114] Ana Achúcarro, Jinn-Ouk Gong, Gonzalo A. Palma, and Subodh P. Patil. Correlating features in the primordial spectra. *Phys.Rev.*, D87(12):121301, 2013.