

UCH-FC
MAB-M
B 826
=.



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Uso del árbol de Bruhat-Tits para describir el
conjunto de órdenes maximales que contienen a
dos cuaterniones puros.

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Claudio Abraham Bravo Castillo,

Marzo, 2018

Director de Tesis: **Dr. Luis Arenas Carmona.**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
INFORME DE APROBACIÓN
TESIS MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Claudio Abraham Bravo Castillo

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 30 de Enero del 2018.

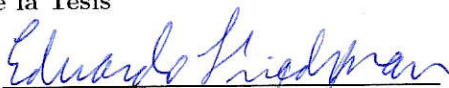
Director de Tesis

Dr. Luis Arenas Carmona

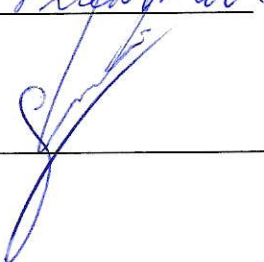


Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Eduardo Friedman Rafael



Dr. Giancarlo Lucchini Arteché



*Dedicado a mi familia.
Muy especialmente a mis abuelas
Julia Opazo Retamales
y Carlota Vera Delaporte.*

AGRADECIMIENTOS

En este camino muchas personas han participado dando su trabajo, consejo y ánimos, puede que a algunas de estas no logre hacer notar en este breve espacio, sin embargo estoy muy agradecido de ellos(as) y muy especialmente de las que se ilustran a continuación.

Quiero agradecer, en primera instancia, a mi familia, a mis padres Claudio y Sonia quienes han sido mi apoyo, mi sustento y mi ejemplo a seguir. A mi hermana Sonia, por quien siempre trabajo, para intentar ser una guía. A mis abuelas, tós y tías, especialmente a mi tía María Elena, quien colaboró profundamente en mi crianza. Agradezco también a Dios, porque sin prueba alguna, tengo plena confianza en que el guía mis pasos. Y por cierto, agradezco a mi nación, a Chile, por haber confiado en mis habilidades y haberme otorgado la ayuda económica para realizar mis estudios de pre y posgrado.

A mis maestros y profesores que tuve desde la enseñanza básica hasta el día de hoy, agradezco sinceramente. Si uno de ellos hubiese fallado, muy posiblemente yo no estaría acá. Es en este marco que quiero destacar a mi maestro y tutor de tesis Dr. Luis Arenas, por su paciencia, su ejemplo y compromiso. Agradezco a Giancarlo, el Luco, a quien conocí en 2017 y quien ha colaborado fuertemente en mi crecimiento como matemático. A mis profesores de la facultad, especialmente a la profesora Anita Rojas, Gonzalo Robledo, Manuel Pinto, Alicia Labra, Eduardo Friedman y el Nico Libedinsky, quienes han estado pendiente de mi desarrollo, me han brindado consejo y ayudado enormemente. Agradezco también a mi profesora de Química Celicia Moya, quien fue la primera en confiar en mi como futuro científico.

Finalmente quiero destacar a mis amigos, a los que conocía de antes y a los que conocí en este trayecto por la Universidad. A Hector Urrutia, mi mejor amigo y primo de n -ésimo grado, a Lya Hurtado, Vitto Olave, Trinidad Vallejos, Valeria Veliz, Sebastian Carrasco, Manuel Concha, Pablo Quezada, Boris Roa, Matias Alvarado, Vicente Lenz y tantos otros buenos muchachos con los que compartí experiencias, conversaciones, éxitos y frustraciones en estos años, a todos ellos mi más cordial y profundo agradecimiento.

RESUMEN

Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea \mathcal{A} un álgebra de matrices de dimensión 4 sobre K . En trabajos previos, como en [A2], Luis Arenas desarrollo una teoría que permite calcular el conjunto de órdenes maximales de \mathcal{A} que contienen a un suborden dado. Este conjunto está dado por un sub-árbol del árbol de Bruhat-Tits, que es llamado rama del orden. Dichas ramas han sido usadas para el estudio del problema de selectividad global y también el cálculo del número de incrustaciones locales. La ramas de órdenes, por lo general, se pueden describir en términos de dos invariantes. Para calcular estos invariantes explícitamente, la estrategia en trabajos previos, como [AA-C], ha sido visualizar las ramas mediante una representación explícita del árbol de Bruhat-Tits en términos de bolas en K . En el presente trabajo, se estudiarán las ramas asociadas a órdenes generados por pares arbitrarios de cuaterniones puros no nilpotentes, mediante el cálculo de estos invariantes.

ABSTRACT

Let K be a non-archimedean local field and let \mathcal{A} be the two-by-two matrix algebra over K . In a previous work, as in [A2], Luis Arenas developed a theory that allows the computation of the set of maximal orders in \mathcal{A} containing a given suborder. This set is given as a sub-tree of the Bruhat-Tits tree that is called the branch of the order. Branches have been used to study the global selectivity problem and also to compute local embedding numbers. They can usually be described in terms of two invariants. To compute these invariants explicitly, the strategy in previous works, as in [AA-C], has been visualizing branches through the explicit representation of the Bruhat-Tits tree in terms of balls in K . In the present work, i will study the branches associates to orders generated by arbitrary pairs of non-nilpotent pure quaternions, through the complute of these invariants.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Resumen de secciones	4
3. Álgebras de cuaterniones	5
4. Cuerpos locales	9
4.1. Símbolo de Hilbert local	11
5. Órdenes y Reticulados	12
6. Árbol de Bruhat-Tits local para $M_2(K)$	13
6.1. r -Ramas	15
7. Análisis de ramas	18
7.1. L/K es una extensión cuadrática no ramificada:	19
7.2. L/K es una extensión cuadrática ramificada:	19
7.3. $L = K \times K$:	20
8. Árboles de Bruhat-Tits, Bolas y transformaciones de Moebius	21
8.1. Aplicación: Extremos en el árbol de Bruhat-Tits y caminos maximales	26
8.2. Aplicación: Cálculo de ramas de idempotentes	27
9. Presentación del problema principal	30
10. Simplicidad de las álgebras \mathcal{A}_λ	34
11. Caminos maximales, elementos idempotentes y formas cuadráticas	40
12. Cálculo de formas cuadráticas a partir de caminos maximales	45
12.1. $\alpha \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ y $\beta \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$:	49
12.2. $\alpha \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ y $\beta \notin \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$:	49
12.3. $\alpha \notin \mathcal{O}_K^2, \beta \notin \mathcal{O}_K^2$:	49
12.4. Independencia del producto simetrizado	51
13. El símbolo de Hilbert	53
14. Ramas en árboles de Bruhat-Tits definidos sobre extensiones	57
14.1. $\alpha = \Delta$:	59
14.2. $\alpha = \pi \in \Pi$:	60
14.3. $\alpha = u \in \Omega$:	62
14.4. Estudio de los caminos maximales sobre extensiones	64
15. Distancia entre tallos	67
16. Análisis de distancias para $\alpha = 1$	70
16.1. $\beta = \Delta$	70
16.2. $\beta = \pi \in \Pi$	71
16.3. $\beta = u \in \Omega$	74
17. Análisis de distancias para $\alpha \neq 1$	76
17.1. Notaciones generales:	76
17.2. $\alpha = \Delta, \beta = \Delta$	76
17.3. $\alpha = \pi \in \Pi, \beta = \Delta$	79
17.4. $\alpha = u \in \Omega, \beta = \Delta$	81
17.5. $\alpha = \pi_2 \in \Pi, \beta = \pi_1 \in \Pi$	83
17.6. $\alpha = \pi \in \Pi, \beta = u \in \Omega$	86
17.7. $\alpha = u_2 \in \Omega, \beta = u_1 \in \Omega$	87
18. Teorema general para la distancia	89
Referencias	90

1. INTRODUCCIÓN

Sea K un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$, en particular, K es un cuerpo localmente compacto, respecto a la métrica definida por un valor absoluto no arquimediano. Considere además su anillo de enteros \mathcal{O}_K , un parámetro uniformizante $\pi \in \mathcal{O}_K$ y un álgebra de cuaterniones \mathcal{A} definida sobre el cuerpo anterior, es decir un álgebra definida sobre K en término de generadores y relaciones como sigue:

$$(1) \quad \mathcal{A} = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right) = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 0 \rangle,$$

para $\alpha, \beta \in K^*$. Un resultado conocido es que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)$ es un álgebra de división o bien $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)$ es isomorfa al álgebra de matrices $\mathbb{M}_2(K)$.

En el álgebra $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)$, un orden \mathfrak{H} es una \mathcal{O}_K -álgebra, finitamente generada y compacta, con la topología producto de $\mathcal{A} \cong K^4$. Dicho orden es maximal cuando no puede ser incluido dentro de un orden estrictamente mayor. Cuando $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)$ es un álgebra de división, existe un único orden maximal en el álgebra de cuaterniones. Por otro lado, si $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right) \cong \mathbb{M}_2(K)$ entonces todo orden maximal es de la forma $\mathfrak{D} = G\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_K)G^{-1}$, para cierto $G \in \text{Gl}_2(K)$. En el contexto anterior, dos órdenes maximales $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ se dicen vecinos si $\mathfrak{D}_1 / (\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2) \cong \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K$, como \mathcal{O}_K -módulos. Definimos un grafo G como un conjunto de vértices con una relación de vecindad, de modo que a menudo escribimos $v \in G$ en vez de $v \in V(G)$.

Cuando $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$, podemos construir el grafo $\mathcal{T}(K)$ cuyos vértices son los órdenes maximales en \mathcal{A} . Estos se unen por una arista si son vecinos. En [Se], se demuestra que dicho grafo es un árbol en el sentido de la teoría de grafos. A dicho árbol le llamamos árbol de Bruhat-Tits asociado al álgebra \mathcal{A} . En la misma referencia se demuestra que dos vértices $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ están a distancia $d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = t$ si y sólomente si $\mathfrak{D}_1 / (\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2) \cong \mathcal{O}_K / \pi^t \mathcal{O}_K$.

Para un orden dado \mathfrak{H} podemos construir la rama $S = S_K(\mathfrak{H})$ definida por:

$$S_K(\mathfrak{H}) := \{\mathfrak{M} \in \mathcal{T}(K) : \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}\}.$$

En particular la rama $S_K(u)$ de un elemento entero $u \in \mathcal{A}$ se obtiene al considerar el orden $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[u]$, es decir:

$$S_K(u) := \{\mathfrak{M} \in \mathcal{T}(K) : \mathcal{O}_K[u] \subseteq \mathfrak{M}\} = \{\mathfrak{M} \in \mathcal{T}(K) : u \in \mathfrak{M}\}.$$

Sea S la rama de algún orden $\mathfrak{H} \subset \mathbb{M}_2(K)$. Definimos la rama t -engrosada de S por $S^{[t]} = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : \exists \mathfrak{G} \in S : d(\mathfrak{D}, \mathfrak{G}) \leq t\}$. Además definimos el grosor de la rama S por $\tau = \sup\{t \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists S_t \text{ rama tal que } S_t^{[t]} = S\}$. Si $\tau \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definimos el tallo T de S como la única rama que satisface $T^{[\tau]} = S$. La unicidad del tallo se demuestra en [A2]. En cambio, si el conjunto $\{t \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists S_t \text{ rama tal que } S_t^{[t]} = S\}$ no es acotado, el tallo de S no está definido. A un subgrafo conexo de $C \subseteq \mathcal{T}(K)$ tal que dado cualquier vértice $\mathfrak{D} \in C$ existen a lo más dos vértices vecinos a \mathfrak{D} en C se le denomina camino en $\mathcal{T}(K)$. Gráficamente, un camino C en $\mathcal{T}(K)$ se ve como una línea constituida por, ya sea,

finitos vértices, infinitos vértices en una dirección o infinitos en dos direcciones. Un resultado importante de [A2] es que, salvo en el caso de la rama $S_K(\eta)$ para $\eta \in \mathbb{M}_2(K)$ nilpotente, el tallo de una rama cualquiera está definido y es un camino en $\mathcal{T}(K)$.

Por otro lado, dadas dos ramas S y S' se define la distancia entre éstas como $d(S, S') = \min \{d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) : \mathfrak{D}_1 \in S, \mathfrak{D}_2 \in S'\}$. Sean S y S' dos ramas que poseen tallos T y T' respectivamente. Determinar la posición relativa de las ramas S y S' significa encontrar la distancia a la que se encuentran los tallos T y T' de las ramas respectivas y determinar cuales son los vértices en cada tallo en los que se alcanza dicha distancia. Cuando la distancia es nula, determinar la posición relativa se traduce en encontrar el largo de la rama de intersección de los tallos T, T' y determinar como dicha intersección se incluye dentro de cada tallo.

Uno de los problemas importantes en esta teoría es determinar los órdenes maximales que contienen a un orden cualquiera $\mathfrak{H} \subset \mathbb{M}_2(K)$, es decir determinar la rama $S_K(\mathfrak{H})$, para cualquier orden \mathfrak{H} . Luis Arenas-Carmona en [A2] observó que si $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[a_1, \dots, a_n]$ entonces $S_K(\mathfrak{H}) = \bigcap_{i=1}^n S_K(a_i)$. Por lo tanto, para estudiar el problema de contención de órdenes, basta estudiar las intersecciones de las ramas de la forma $S_K(a)$, donde $a \in \mathbb{M}_2(K)$. De hecho, esto último se puede realizar calculando el grosor de las ramas $S_K(a)$ y estudiando la posición relativa entre éstas.

Un caso particular del problema anterior es el de determinar los órdenes maximales que contienen al orden $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, para i, j generadores estándar del álgebra $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$, es decir cuando i, j cumplen las relaciones mostradas en (1). Ignacio Saavedra en su tesis de Magíster [Sa] encontró descripciones explícitas de la posición relativa entre los tallos de ramas $S_K(i)$ y $S_K(j)$, donde i, j son generadores estándar del álgebra \mathcal{A} . En este último trabajo, se obtuvo por ejemplo que si i^2 y j^2 son 1 o la única unidad no ramificada de K , entonces la distancia entre los tallos de las ramas $S_K(i)$ y $S_K(j)$ es $v_K(2)$, donde v_K es la valuación normalizada definida por el valor absoluto del cuerpo local K , es decir $v_K(a)$ es el número entero determinado por la igualdad $|a|_K = |\pi|_K^{v_K(a)}$. Además, en [A3-Sa] se determinó el grosor de las ramas $S_K(a)$, para $a \in \mathbb{M}_2(K)$ tal que $a^2 \in K^* \text{Id}$.

De los trabajos anteriormente citados, se desprende que existe una completa caracterización de las ramas asociadas a los órdenes $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, cuando i, j son generadores estándar del álgebra $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$. Observe que, por la simplicidad de las álgebras de cuaterniones, estudiar pares de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ que satisfacen las relaciones $i^2 = \alpha \in K^*, j^2 = \beta \in K^*$ y $ij + ji = 0$, es equivalente a encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra de cuaterniones como la definida en (1) sea isomorfa a un álgebra de matrices. De hecho, dichas condiciones se exigen sobre $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ y se estudian mediante el símbolo de Hilbert (ver [O]).

Decimos que $q \in \mathbb{M}_2(K)$ es un cuaternión puro y escribimos $q \in \mathbb{M}_2(K)^0$, cuando $\text{tr}(q) = 0$. Esto último es equivalente a que la conjugación canónica $q \mapsto \bar{q}$ del álgebra de $\mathcal{A} = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)$ cumpla con $\bar{q} = -q$. Lo anterior motiva, a modo de generalización, el estudio de las ramas asociadas a los órdenes $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, cuando $i, j \in \mathbb{M}_2(K)^0$ son cuaterniones no nilpotentes. Observe que, en dicho caso el producto simetrizado $\lambda = \frac{ij+ji}{2}$ cumple con que $\bar{\lambda} = \frac{(-j)(-i)+(-i)(-j)}{2} = \lambda$. Por lo tanto $\lambda \in K$.

Un caso básico para comenzar este estudio, es determinar la rama asociada al orden $\mathcal{O}_K[i, j]$, para $i^2 = j^2 = 1$ e $\frac{ij+ji}{2} = \lambda$. En la unidad de investigación, dirigida por el profesor Luis Arenas-Carmona, demostramos que en dicho caso la distancia $d(S, S')$ entre los tallos de las ramas $S = S_K(i)$ y $S' = S_K(j)$ es una función de λ . En lo que sigue escribimos l.i. para referirnos a vectores linealmente independientes. Haciendo uso de la notación anterior, se tiene que $\{\lambda \in K : \exists i, j \in \mathbb{M}_2(K)^0, i, j \text{ son l.i., } i^2 = 1, j^2 = 1, \frac{ij+ji}{2} = \lambda\} = K - \{\pm 1\}$. Este resultado fue probado en la misma unidad de investigación.

Para deducir esto usamos la equivalencia entre el árbol de Bruhat-Tits asociado a órdenes maximales y su análogo asociado a bolas cerradas, donde para este último es natural considerar las transformaciones de Moebius actuando sobre particiones de bolas, de la forma en que se muestra en [AA-C].

En esta tesis estudiaremos la posición relativa de las ramas $S = S_K(i)$ y $S' = S_K(j)$ para i, j cuaterniones puros cualquiera en $\mathbb{M}_2(K)$, no nilpotentes. Esto con el fin de describir la rama $S_K(\mathfrak{H})$, para $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$. Además de esto, me propongo determinar el conjunto:

$$(2) \Lambda_{(\alpha, \beta)} := \left\{ \lambda \in K : \exists i, j \in \mathbb{M}_2(K)^0, i, j \text{ son l.i., } i^2 = \alpha, j^2 = \beta, \frac{ij+ji}{2} = \lambda \right\},$$

que es el conjunto de valores para los cuales el problema tiene sentido. Observe que estudiar $\Lambda_{(\alpha, \beta)}$ motiva a definir la siguiente K -álgebra \mathcal{A}_λ vía generadores y relaciones:

$$\mathcal{A}_\lambda := \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle,$$

y estudiar cuando existe un homomorfismo de K -álgebras:

$$(3) \quad \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathbb{M}_2(K),$$

tal que las imágenes de $1, i, j \in \mathcal{A}_\lambda$ sean l.i. En la unidad de investigación demostramos que \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones si y solamente si $\lambda^2 - \alpha\beta \neq 0$. Luego (3) equivale, en dicho caso, a que $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$, dado que las álgebras de cuaterniones son simples. Por lo tanto, bajo la hipótesis $\lambda^2 - \alpha\beta \neq 0$, el problema de determinar $\Lambda_{(\alpha, \beta)}$ se traduce en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Por último, el estudio de la posición relativa de las ramas se realizará mediante la reducción del problema al caso ya descrito, es decir $\alpha = \beta = 1$, al analizar el problema en el árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(L)$ asociado al álgebra $\mathbb{M}_2(L) = \mathbb{M}_2(K) \otimes_K L$, para $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. En el árbol $\mathcal{T}(L)$ podemos incluir el árbol $\mathcal{T}(K)$ y realizar los cálculos requeridos, al considerar los órdenes $\mathfrak{H}_L = \mathfrak{H} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ y observar que $S_K(\mathfrak{H}) = S_L(\mathfrak{H}_L) \cap \mathcal{T}(K)$. La inclusión $\mathcal{T}(K) \hookrightarrow \mathcal{T}(L)$ que se dará en esta tesis no es, en general, una incrustación de grafos, en el sentido de que no lleva vecinos en vecinos. Usando dichas herramientas se concluyen los Teoremas 14.9 y 18.1, los cuales describen la rama $S_K(i, j)$ por lo expuesto en §9.

2. RESUMEN DE SECCIONES

En la Sección §3 se estudian las propiedades básicas del álgebra de cuaterniones que usaremos en esta tesis. En la siguiente sección se definen los cuerpos locales, además se exponen algunas de sus propiedades. En las secciones §3 - §4.1 se exponen los resultados más significativos que se utilizarán en esta tesis acerca de álgebras de cuaterniones sobre cuerpos locales. La principal referencia en todo lo anterior será [O]. En la Sección §6 se describe el árbol de Bruhat-Tits. Luego en las secciones §6 - §7 estudiaremos ciertas ramas del árbol de Bruhat-Tits.

En las Secciones §3-§6 haremos las definiciones generales a partir de cuerpos de números, a los cuales denotaremos por F . En las secciones que le siguen sólo nos enfocaremos en su aplicación a cuerpos locales.

En la Sección §8 nos detendremos a analizar la estrecha relación del árbol anteriormente mencionado con las bolas cerradas del cuerpo local y como actúan las transformaciones de Moebius sobre estas estructuras. En §9 se presenta el principal problema de esta tesis, que es determinar las ramas asociadas a los órdenes $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, para $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ cuaterniones puros enteros no nilpotentes. En dicha sección se muestra que este problema se puede resolver determinando la profundidad de las ramas $S_K(i)$, $S_K(j)$ y su posición relativa. Otro problema que aparece en dicha sección, es determinar para α, β fijos los posibles valores de λ para los cuales existen cuaterniones puros i, j linealmente independientes tales que $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Para resolver este problema debemos estudiar las álgebras $\mathcal{A}_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle$, que se definen en la misma sección. En la sección §10, estudiaremos la simplicidad de las álgebras \mathcal{A}_λ .

En §11 estudiaremos la forma en que ciertos subgrafos especiales del árbol de Bruhat-Tits, llamados caminos maximales, determinan el producto simetrizado entre dos cuaterniones cuyo cuadrado es uno. En la sección §12, haremos cálculos que expliciten la forma en que los caminos determinan el producto simetrizado en el caso general. Para realizar dichos cálculos incrustaremos el árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(K)$ en su análogo $\mathcal{T}(L)$ construido sobre una extensión finita L de K .

En §13 encontraremos condiciones necesarias y suficientes para que el álgebra \mathcal{A}_λ sea isomorfa a un álgebra de matrices, cuando esta sea central simple. Luego aplicaremos estos resultados al problema de determinar la existencia de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ enteros y no nilpotentes.

En §14 determinaremos la posición relativa entre las ramas $S_K(i)$ y $S_L(i)$, donde i es un cuaternión puro que satisface $i^2 = \alpha \in \mathcal{O}_K$ y $L = K(\sqrt{\alpha})$. Además caracterizaremos los tallos de las ramas $S_K(i)$, dependiendo de α . Luego en §14, con lo ya estudiado, daremos una nueva demostración de un teorema probado por Luis Arenas-Carmona e Ignacio Saavedra en [A3-Sa] que nos da la profundidad de las ramas $S_K(i)$.

En la Sección §15 estudiaremos la posición relativa de ciertas ramas en un caso básico, además de dar ciertas indicaciones para los cálculos siguientes. Finalmente en las secciones §16 y §17 estudiaremos el problema de la posición relativa con completa generalidad.

3. ÁLGEBRAS DE CUATERNIONES

Sea F un cuerpo tal que $\text{car}(F) \neq 2$ y sean $\alpha, \beta \in F^*$. Consideremos un F -espacio vectorial V de dimensión 4 sobre F y una base $\{1, i, j, k\}$ de V , con $ij = k$. Definimos una multiplicación sobre los elementos de la base mediante la tabla:

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	α	k	αj
j	j	$-k$	β	$-\beta i$
k	k	$-\alpha j$	βi	$-\alpha \beta$

CUADRO 1. Multiplicación de cuaterniones

Extendemos esta multiplicación por linealidad a una multiplicación sobre V . Identificamos F con $F \cdot 1 \subset V$. Se comprueba que V es un álgebra asociativa con identidad. Diremos que un álgebra construida de esa manera es un álgebra de cuaterniones y la denotaremos por el símbolo:

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right).$$

Llamaremos a sus elementos cuaterniones y a los elementos $i, j \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$, tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 0$, les llamaremos generadores estándar del álgebra de cuaterniones.

Un hecho importante, es que para un cuerpo F tal que $\text{car}(F) \neq 2$, las únicas F -álgebras centrales simples de dimensión 4 son las álgebras de cuaterniones. De esto se sigue que un álgebra de cuaterniones sobre un cuerpo de característica cero o impar, es isomorfa a un álgebra de matrices o un álgebra de división.

Si $x = a + bi + cj + dk$ es un cuaternión, donde $a, b, c, d \in F$, definimos el conjugado de x como $\bar{x} = a - bi - cj - dk$. Decimos que un cuaternión es puro cuando $x = -\bar{x}$ y denotamos al espacio de cuaterniones puros por $\left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)^0$. Se verifica que $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, para $x, y \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$.

Definición 3.1. Sea $x \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$. Definimos la norma N y la traza T de x mediante:

$$N(x) = x\bar{x}, \quad T(x) = x + \bar{x}.$$

Si $x = a + bi + cj + dk \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$, entonces un cálculo directo prueba que:

- i.- $N(x) = a^2 - b^2\alpha - c^2\beta + d^2\alpha\beta \in F$.
- ii.- $T(x) = 2a \in F$.
- iii.- $N(xy) = N(x)N(y)$.
- iv.- $T(x + y) = T(x) + T(y)$.
- v.- Todo cuaternión x satisface la ecuación $y^2 - T(x)y + N(x) = 0$.
- vi.- Un cuaternión x es invertible si y solamente si $N(x) \neq 0$.

Haciendo uso de la función norma, se puede demostrar que un álgebra de cuaterniones $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$, para $\text{car}(F) \neq 2$, es isomorfa a un álgebra de matrices si y solamente si existen $x, y, z, w \in F$ no todos nulos tales que $x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha \beta w^2 = 0$. Esto último es equivalente a que existan $x, y \in F$ tales que $1 = \alpha x^2 + \beta y^2$. Para más detalle ver [O].

Otra observación es que todo elemento $x \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ se escribe de manera única como $x = a + q$, donde $q = bi + cj + dij$ es un cuaternión puro.

Lema 3.2. Sea $x \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ tal que $x^2 \in F$, entonces $x \in F$ o x es cuaternión puro.

Demostración. Escribimos $x = a_0 + q$, con $a_0 \in K$ y q cuaternión puro entonces $x^2 = (a_0 + q)^2 = a_0^2 + 2a_0q + q^2$. Luego, como dicho elemento está en el cuerpo base, se tiene que $2a_0q = 0$. Entonces $a_0 = 0$ o $q = 0$. Si sucede lo primero $x = q$ es un cuaternión puro. En caso contrario $x = a_0 \in F$. \square

Ejemplo 3.3. Este ejemplo aparece en [Sa, §1]. Considerando las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

para $u \neq 0$, se tiene que $X^2 = 1, Y^2 = -1, XY = -YX$. Así, dado que toda álgebra de cuaterniones es simple ([O, §57]), se tiene que la función:

$$\phi : \left(\frac{1, -1}{F}\right) \rightarrow \mathbb{M}_2(F),$$

definida por $\phi(1) = I, \phi(i) = X, \phi(j) = Y$ y $\phi(k) = XY$, es un isomorfismo de álgebras.

Observación 3.4. Si $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right) \cong \mathbb{M}_2(F)$ entonces la norma N corresponde al determinante en $\mathbb{M}_2(F)$. Además, la conjugación viene dada por:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{M}_2(F) &\longrightarrow \mathbb{M}_2(F) \\ A &\longmapsto SA^tS^{-1}, \end{aligned}$$

donde $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, explícitamente :

$$(4) \quad \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Lema 3.5. Si $\text{car}(F) \neq 2$ entonces el F -álgebra de cuaterniones $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ es isomorfa a la F -álgebra definida vía generadores y relaciones por:

$$\mathcal{A} = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 0 \rangle.$$

Demostración. Sean i, j generadores estándar de $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$. Considere el homomorfismo de F -álgebras $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$, definido por $\phi(1) = \mathbf{1}, \phi(i) = i$ y $\phi(j) = j$, extendido lineal y multiplicativamente. Observe que dicho homomorfismo está bien definido pues i, j satisfacen las relaciones de i, j , mientras que ϕ es sobreyectivo pues la base $\{\mathbf{1}, i, j, ij\}$ es subconjunto de la imagen del homomorfismo. Luego $\dim_F \mathcal{A} \geq 4$.

Por otro lado el conjunto $\{1, i, j, ij\}$ genera la F -álgebra \mathcal{A} como espacio vectorial. Esto se debe a que todo producto de potencias de los elementos anteriores se escribe como combinación lineal de dichos elementos. Por lo tanto $\dim_F \mathcal{A} = 4$. En particular, ϕ es inyectivo. \square

Este lema será de vital importancia en las secciones siguientes, pues muchas veces trabajaremos con ambas álgebras sin hacer distinción alguna.

Se define en $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ el producto simetrizado entre cuaterniones x, y por $B(x, y) = \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}$. Observe que $B(x, y) \in F$ pues $\overline{B(x, y)} = B(x, y)$, además $B(\cdot, \cdot)$ es claramente F -bilineal y $B(y, x) = B(x, y)$. Esto demuestra que $B(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$. Un lema que utilizaremos en las secciones siguientes, específicamente en la Sección §13, está relacionado con la ortogonalidad de dos cuaterniones bajo el producto interno anterior. Para demostrarlo necesitamos el siguiente lema, el cual se cumple en el contexto más general de álgebras centrales simples.

Proposición 3.6 (Teorema de Skolem-Noether). (ver [M2, §4.2]) Sea A una F -álgebra simple y B una F -álgebra central simple. Si $f, g : A \rightarrow B$ son dos homomorfismos de F -álgebras, entonces existe $b \in B$ invertible tal que $f(a) = bg(a)b^{-1}$, para cualquier $a \in A$. En particular, si A es una F -álgebra central simple y B_1, B_2 son dos subálgebras simples de A , entonces todo isomorfismo $f : B_1 \rightarrow B_2$ es interior, es decir, existe $a \in A$ invertible tal que $f(b) = aba^{-1}$, para todo $b \in B_1$.

Lema 3.7. Dado $p \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ un cuaternión puro tal que $N(p) \neq 0$, existe otro cuaternión puro q tal que $B(p, q) = 0$ y $N(q) \neq 0$.

Demostración. Supongamos primero que $N(p) = -k^2$, con $k \in F^*$. Entonces $N(k-p) = 0$, donde $k-p \neq 0$. Por lo tanto $\left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right) \cong \mathbb{M}_2(F)$. En particular, como $\bar{p} = -p$, usando la relación (4) se tiene que $p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, para ciertos $a, b, c \in F$.

Partamos suponiendo que $c = b = 0$. Entonces si consideramos el cuaternión $q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que $qpq^{-1} = -p$. Observe que $\bar{q} = -q$ y que $N(q) = 1$. Por ende q es un cuaternión puro tal que $B(p, q) = 0$ y $N(q) \neq 0$.

Supongamos ahora que $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces como $N(p) \neq 0$ se tiene que $a \neq 0$. Luego si consideramos el cuaternión $q = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2a} & 1 \\ 0 & \frac{c}{2a} \end{pmatrix}$ obtenemos que $qpq^{-1} = -p$. Observe que $\bar{q} = -q$ y que $N(q) = \frac{c^2}{4a^2}$. Por ende q es un cuaternión puro tal que $B(p, q) = 0$ y $N(q) \neq 0$. Análogamente si $c = 0$ y $b \neq 0$ obtenemos lo pedido.

Por último si $c, b \neq 0$, entonces si consideramos el cuaternión $q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que $qpq^{-1} = -p$. Observe que $\bar{q} = -q$ y que $N(q) = \frac{b}{c}$. Por ende q es un cuaternión puro tal que $B(p, q) = 0$ y $N(q) \neq 0$. En cualquier caso se concluye lo pedido, para el caso en que $-N(p) \in F^{*2}$.

Supongamos ahora que $-N(p) \notin F^{*2}$. Considere la F -álgebra $L = F(p)$. Observe que p satisface el polinomio irreducible $x^2 + N(p) \in F[x]$, por lo que $[L : F] = 2$. Sea $a + bp \in L$ un elemento no nulo, entonces $(a + bp)(a - bp) = a^2 + b^2N(p) \neq 0$. Por lo tanto $(a + bp)^{-1} = \frac{a - bp}{a^2 + b^2N(p)} \in L$. Esto prueba que L es un cuerpo. Observe que

como $\text{car}(F) \neq 2$ se tiene que L/F es una extensión Galosiana. Sea σ el elemento no trivial en $\text{Gal}(L/F)$. Entonces $\sigma : L \rightarrow L$ es un automorfismo que cumple con $\sigma(p) = -p$. Dado que L es un cuerpo, tenemos en particular que L es una F -álgebra simple. Por el Teorema de Skolem-Noether se tiene que existe $q \in \left(\frac{\alpha, \beta}{F}\right)$ invertible, es decir $N(q) \neq 0$, que cumple con $\sigma(a) = qaq^{-1}$, para todo $a \in L$. En particular, si tomamos $a = p$ obtenemos que $-p = qpq^{-1}$, es decir, $pq + qp = 0$. Finalmente si q no fuese un cuaternión puro entonces $q = a_0 + q'$ con q' cuaternión puro y $a_0 \in F$. Luego $pq + qp = 2a_0p + (pq' + q'p)$, donde $\overline{pq' + q'p} = q'p + pq'$, es decir $pq' + q'p \in F$. Se sigue que $a_0 = 0$, pues $p \neq 0$. Esto demuestra que q es un cuaternión puro que satisface $B(p, q) = \frac{p\bar{q} + q\bar{p}}{2} = \frac{pq + qp}{2} = 0$ y $N(q) \neq 0$. \square

4. CUERPOS LOCALES

Un cuerpo local, es uno de los cuerpos que se describen a continuación.

- i.- Un cuerpo local no-arquimediano K es un cuerpo completo respecto a un valor absoluto discreto $|\cdot|_K$ tal que el cuerpo residual $\mathbb{K} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ es finito, donde $\mathcal{O}_K = \{a \in K \mid |a|_K \leq 1\}$ es el anillo de enteros del cuerpo K y $\mathfrak{m}_K = \{a \in K \mid |a|_K < 1\}$ es el único ideal maximal de \mathcal{O}_K .
- ii.- Los cuerpos locales arquimedianos son \mathbb{R} y \mathbb{C} .

Ejemplo 4.1. El cuerpo \mathbb{Q}_p es un completado de \mathbb{Q} con respecto a un valor absoluto $|\cdot|_p$, el cual podemos definir sobre \mathbb{Z} como $|n|_p = p^{-a}$ para $n = p^a m$, donde $(p, m) = 1$ y sobre \mathbb{Q} lo definimos multiplicativamente a partir de su restricción a \mathbb{Z} . Aquí $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ es denotado por \mathbb{Z}_p , mientras que su único ideal maximal es $p\mathbb{Z}_p$ y su cuerpo residual cumple con $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En esta tesis trabajaremos con cuerpos locales no-arquimedianos. Un ejemplo importante de estos objetos, son los cuerpos K que son resultado de la completación respecto a un lugar no-arquimediano \mathfrak{p} en una extensión finita F de \mathbb{Q} . Dichos cuerpos F se denominan cuerpos de números y sus completaciones se denotan por $K = F_{\mathfrak{p}}$. En [O, §1] se prueba que cuando $K = F_{\mathfrak{p}}$, tenemos que K es una extensión de \mathbb{Q}_p , para cierto primo p en \mathbb{Z} y además $[K : \mathbb{Q}_p] \leq [F : \mathbb{Q}] < \infty$.

Otro ejemplo, tan importante como el anterior, son los cuerpos de funciones construidos sobre cuerpos finitos. En [O, §1] se prueba que todo cuerpo local de característica positiva es un cuerpo de series de Laurent $\mathbb{F}_{p^r}((x))$. Más aún, en [O, §1] se prueba también que todo cuerpo local no arquimediano cae en uno de los dos casos anteriores, dependiendo de su característica.

En un cuerpo local K , el anillo de enteros \mathcal{O}_K es un dominio de ideales principales. Si $\mathfrak{m}_K = (\pi) = \pi\mathcal{O}_K$, decimos que π es un parámetro uniformizante en K . Sea $\pi \in K$ un parámetro uniformizante fijo. Un hecho importante es que todo ideal fraccional en K es de la forma (π^t) , para cierto $t \in \mathbb{Z}$. De esto se sigue que todo $a \in K^*$ se escribe de forma única como $a = u\pi^t$, donde $u \in \mathcal{O}_K^*$ y $t \in \mathbb{Z}$. Diremos que $v(a) = t$ es la valuación de a en K^* y definiremos la valuación de 0 como $v(0) = \infty$. A veces usaremos la notación v_K para hacer notar que la valuación corresponde a la del cuerpo K . Cuando la característica del cuerpo residual es 2, decimos que el cuerpo local no arquimediano es diádico.

Otro concepto que utilizaremos es el de las extensiones de cuerpos locales. Un hecho importante es que toda extensión finita L de un cuerpo local no arquimediano K es también un cuerpo local no arquimediano. Además si \mathbb{L} es su cuerpo residual, entonces \mathbb{L} es una extensión finita del cuerpo residual \mathbb{K} , es decir $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = f < \infty$. A tal número natural f le llamamos grado de inercia. Sea π_L un parámetro uniformizante de L . Otro hecho importante es que todo parámetro uniformizante π_K de K es de la forma $u\pi_L^e = \pi_K$, donde u es alguna unidad en \mathcal{O}_L y $e \in \mathbb{N}$. Este número solo depende de la extensión L/K y no de la elección de los parámetros uniformizantes π_L y π_K . A tal número natural e le llamamos índice de ramificación. Finalmente se tiene que $n = [F : K] = ef$. Para más detalles ver [O, §1].

¹De hecho este número primo está determinado por \mathfrak{p} y corresponde al único primo racional que satisface $\mathfrak{p} \mid (p)$.

Definición 4.2. Si L es una extensión de grado 2 de un cuerpo local K , entonces $e = 2$ o bien $f = 2$. En el primer caso decimos que la extensión es ramificada. En el otro caso decimos que es no ramificada. Este concepto se extiende a los elementos de K , mas precisamente si $L = K(\sqrt{\alpha})$ es una extensión ramificada sobre K entonces decimos que $\alpha \in K$ es ramificado, si esto no sucede denominamos al elemento $\alpha \in K$ un elemento no ramificado.

Es evidente que el hecho de conocer los cuadrados en el anillo de enteros de un cuerpo local simplifica de sobremanera el estudio de los generadores del álgebra de cuaterniones. El siguiente teorema dice que si un entero en un cuerpo local está suficientemente cerca de 1 con respecto al valor absoluto $|\cdot|_K$, entonces es un cuadrado, además de darnos herramientas para trabajar con un concepto de vital importancia, el defecto cuadrático. En lo que sigue K es un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$.

Proposición 4.3 (Teorema de los cuadrados locales). (ver [O, §63.A]). Sea α un entero en un cuerpo local no arquimediano K . Entonces existe un entero $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que

$$1 + 4\pi_K \alpha = (1 + 2\pi_K \beta)^2.$$

Usando el Teorema de los cuadrados locales podemos estudiar qué tan lejos está un elemento en un cuerpo local de ser un cuadrado.

Definición 4.4. Consideremos un elemento $b \in K$. Entonces b tiene al menos una expresión de la forma $b = \eta^2 + \alpha$, con $\eta, \alpha \in K$. Definimos el defecto cuadrático de b por:

$$\delta(b) = \bigcap_{\alpha} \alpha \mathcal{O}_K,$$

donde la intersección recorre todas las expresiones de la forma $b = \eta^2 + \alpha$, con $\eta, \alpha \in K$. Observe que $\delta(b)$ es un ideal fraccional o 0.

Se tienen los siguientes hechos acerca del defecto cuadrático $\delta(b)$. Para su demostración ver [O, §63.A].

1. $\delta(a^2b) = a^2\delta(b)$, $\forall a, b \in K$.
2. $\delta(b) = b\mathcal{O}_K$ si $v(b)$ es impar, donde $v(\cdot)$ es la valuación en K .

Por otra parte, si $v(b)$ es par, podemos escribir $b = \pi^{2t}\epsilon$ con ϵ una unidad y por lo tanto $\delta(b) = \pi^{2t}\delta(\epsilon)$. Así para lo que resta de nuestro análisis, basta estudiar el defecto cuadrático para el grupo de unidades \mathcal{O}_K^* módulo cuadrados, es decir, para representantes del grupo $\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K^{*2}$.

Usando el Teorema de Cuadrados Locales se pueden probar los siguientes resultados, para su demostración ver [O, §63.A].

1. $b \in K^{*2} \Leftrightarrow \delta(b) = (0)$.
2. Sea u una unidad en un cuerpo local K . Si K es no diádico, entonces $\delta(u)$ es (0) u \mathcal{O} . Por otro lado, si K es diádico, entonces $\delta(u)$ es uno de los ideales de la cadena finita:

$$\{0\} \subset 4\mathcal{O}_K = \pi_K^{2e}\mathcal{O}_K \subset \pi_K^{2e-1}\mathcal{O}_K \subset \pi_K^{2e-3}\mathcal{O}_K \subset \cdots \subset \pi_K^3\mathcal{O}_K \subset \pi_K\mathcal{O}_K = \mathfrak{m}_K.$$

Definición 4.2. Si L es una extensión de grado 2 de un cuerpo local K , entonces $e = 2$ o bien $f = 2$. En el primer caso decimos que la extensión es ramificada. En el otro caso decimos que es no ramificada. Este concepto se extiende a los elementos de K , mas precisamente si $L = K(\sqrt{\alpha})$ es una extensión ramificada sobre K entonces decimos que $\alpha \in K$ es ramificado, si esto no sucede denominamos al elemento $\alpha \in K$ un elemento no ramificado.

Es evidente que el hecho de conocer los cuadrados en el anillo de enteros de un cuerpo local simplifica de sobremanera el estudio de los generadores del álgebra de cuaterniones. El siguiente teorema dice que si un entero en un cuerpo local está suficientemente cerca de 1 con respecto al valor absoluto $|\cdot|_K$, entonces es un cuadrado, además de darnos herramientas para trabajar con un concepto de vital importancia, el defecto cuadrático. En lo que sigue K es un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$.

Proposición 4.3 (Teorema de los cuadrados locales). (ver [O, §63.A]). Sea α un entero en un cuerpo local no arquimediano K . Entonces existe un entero $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que

$$1 + 4\pi_K\alpha = (1 + 2\pi_K\beta)^2.$$

Usando el Teorema de los cuadrados locales podemos estudiar qué tan lejos está un elemento en un cuerpo local de ser un cuadrado.

Definición 4.4. Consideremos un elemento $b \in K$. Entonces b tiene al menos una expresión de la forma $b = \eta^2 + \alpha$, con $\eta, \alpha \in K$. Definimos el defecto cuadrático de b por:

$$\delta(b) = \bigcap_{\alpha} \alpha \mathcal{O}_K,$$

donde la intersección recorre todas las expresiones de la forma $b = \eta^2 + \alpha$, con $\eta, \alpha \in K$. Observe que $\delta(b)$ es un ideal fraccional o 0.

Se tienen los siguientes hechos acerca del defecto cuadrático $\delta(b)$. Para su demostración ver [O, §63.A].

1. $\delta(a^2b) = a^2\delta(b)$, $\forall a, b \in K$.
2. $\delta(b) = b\mathcal{O}_K$ si $v(b)$ es impar, donde $v(\cdot)$ es la valuación en K .

Por otra parte, si $v(b)$ es par, podemos escribir $b = \pi^{2t}\epsilon$ con ϵ una unidad y por lo tanto $\delta(b) = \pi^{2t}\delta(\epsilon)$. Así para lo que resta de nuestro análisis, basta estudiar el defecto cuadrático para el grupo de unidades \mathcal{O}_K^* módulo cuadrados, es decir, para representantes del grupo $\mathcal{O}_K^*/\mathcal{O}_K^{*2}$.

Usando el Teorema de Cuadrados Locales se pueden probar los siguientes resultados, para su demostración ver [O, §63.A].

1. $b \in K^{*2} \Leftrightarrow \delta(b) = (0)$.
2. Sea u una unidad en un cuerpo local K . Si K es no diádico, entonces $\delta(u)$ es (0) u \mathcal{O} . Por otro lado, si K es diádico, entonces $\delta(u)$ es uno de los ideales de la cadena finita:

$$\{0\} \subset 4\mathcal{O}_K = \pi_K^{2e}\mathcal{O}_K \subset \pi_K^{2e-1}\mathcal{O}_K \subset \pi_K^{2e-3}\mathcal{O}_K \subset \cdots \subset \pi_K^3\mathcal{O}_K \subset \pi_K\mathcal{O}_K = \mathfrak{m}_K.$$

Por ejemplo, si K es un cuerpo local diádico, con parámetro uniformizante π , tal que $|2| = |\pi|^e$, con $e \geq 3$, de donde $v(4) = 2e$, entonces se tiene que $4\mathfrak{m}_K^{-3} \subseteq \mathfrak{m}_K^3$ y el defecto cuadrático de una unidad u , $\delta(u)$ es uno de los ideales:

$$\{0\} \subset 4\mathcal{O}_K \subset 4\mathfrak{m}_K^{-1} \subset 4\mathfrak{m}_K^{-3} \subset \cdots \subset 4\mathfrak{m}_K^{-2e+1} = \mathfrak{m}_K.$$

De otro modo, si $e < 3$ la cadena es más corta. De hecho, si $e = 2$, entonces $4\mathfrak{m}_K^{-3} = \mathfrak{m}_K$ y la sucesión de ideales es $\{0\} \subset 4\mathcal{O}_K \subset 4\mathfrak{m}_K^{-1} \subset 4\mathfrak{m}_K^{-3} = \mathfrak{m}_K$, en particular hay cuatro defectos cuadráticos posibles. Por otro lado si $e = 1$, entonces la cadena es $\{0\} \subset 4\mathcal{O}_K = \mathfrak{m}_K^2 \subset \mathfrak{m}_K$ y tenemos que hay solo tres defectos cuadráticos posibles.

Considerando el resultado anterior, si $\delta(\Delta) = 4\mathcal{O}_K$ diremos que Δ es una unidad de defecto cuadrático minimal en K .

Ejemplo 4.5. Observe $5 = 1 + 4$, donde $1 \in \mathbb{Q}_2^2$. Por lo tanto 5 es una unidad de defecto cuadrático minimal en \mathbb{Q}_2 .

Ejemplo 4.6. De la misma forma $-3 = -7 + 4$ es una unidad de defecto cuadrático minimal en \mathbb{Q}_2 , puesto que -7 es un cuadrado en \mathbb{Q}_2 .

Se puede probar que una unidad Δ tiene defecto cuadrático minimal si y sólo si la extensión $K(\sqrt{\Delta})/K$ es cuadrática no ramificada. De este hecho se deduce que en el caso diádico siempre existen unidades de defecto cuadrático minimal y que dos de ellas siempre están en la misma clase de cuadrados.

Definición 4.7. Definimos SR como un conjunto de representantes de K^*/K^{*2} , donde $1 \in K$ es el representante de los elementos que son cuadrados. En dicho caso, podemos suponer que $\text{SR} = \{1, \Delta\} \cup \Omega \cup \Pi$, donde Δ es una unidad no ramificada de K , Ω el conjunto de representantes de las unidades ramificadas en K^*/K^{*2} y Π el conjunto de representantes que corresponde a los parámetros uniformizantes en el mismo cociente (ver [O, §63]).

4.1. Símbolo de Hilbert local. Para K un cuerpo local tal que $\text{car}(K) \neq 2$ y $\alpha, \beta \in K^*$, se define el Símbolo de Hilbert local mediante:

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \text{ tiene solución } x, y \in K. \\ -1 & , \text{ si no.} \end{cases}$$

Observación 4.8. De lo expuesto en [O, §63.B] obtenemos que, si $L = K(\sqrt{\beta})$, entonces:

$$\alpha \in N_{L/K}L^* \text{ si y sólo si } (\alpha, \beta) = 1.$$

Observación 4.9. Usando la observación anterior y los resultados de [O, §63.B], obtenemos la siguiente definición alternativa del símbolo de Hilbert local:

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K). \\ -1 & , \text{ si no.} \end{cases}$$

Esto nos permite definir el símbolo de Hilbert asociado al álgebra de cuaterniones local $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)$ mediante la relación anterior.

5. ÓRDENES Y RETICULADOS

Definición 5.1. Sea V un F -espacio vectorial de dimensión n sobre F . Sea \mathcal{O}_F el anillo de enteros de F . Diremos que $\Lambda \subset V$ es un \mathcal{O}_F -reticulado en V , si Λ es un \mathcal{O}_F -módulo tal que existe un conjunto linealmente independiente $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V con

$$\Lambda \subset \mathcal{O}_F x_1 + \dots + \mathcal{O}_F x_n.$$

Si un reticulado Λ satisface $F\Lambda = V$ diremos que Λ es un reticulado sobre V . Un reticulado es libre si lo es como \mathcal{O}_F -módulo.

Observe que la definición anterior vale tanto en el contexto de cuerpos locales como globales.

Ejemplo 5.2. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de V como F -espacio vectorial, entonces $\Lambda = \mathcal{O}_F x_1 + \dots + \mathcal{O}_F x_n$ es un reticulado libre sobre V .

Lema 5.3. (ver [O, §81]) Supongamos que K es un cuerpo local cuyo anillo de enteros es \mathcal{O}_K . Entonces Λ es un \mathcal{O}_K -reticulado si y solamente si $\Lambda \subset K^n$ es un \mathcal{O}_K -módulo finitamente generado.

Observe que todo reticulado sobre un cuerpo local no arquimediano K es libre. Esto se debe a que el anillo de enteros \mathcal{O}_K es un dominio de ideales principales y a que todo reticulado es un módulo libre de torsión, pues está contenido en un módulo libre.

Ejemplo 5.4. $\mathbb{Z}[i]$ es un \mathbb{Z} -reticulado libre sobre el \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbb{Q}[i]$.

Ejemplo 5.5. Sea $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$, entonces $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ es un \mathbb{Z}_2 -reticulado libre sobre L . Esto es particular nos dice que \mathcal{O}_L es un \mathbb{Z}_2 -módulo libre.

Definición 5.6. Sea \mathcal{A} una F -álgebra. Diremos que $\mathfrak{D} \subset \mathcal{A}$ es un orden si \mathfrak{D} es un reticulado en \mathcal{A} tal que $1 \in \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$. Es decir, un orden es un reticulado que a su vez es un subanillo. Un orden es maximal si lo es respecto a la contención de conjuntos.

Ejemplo 5.7. $\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_F)$ es un orden maximal en la F -álgebra $\mathbb{M}_2(F)$.

Ejemplo 5.8. Sea $A \in \text{Gl}_2(F)$, entonces $A\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_F)A^{-1} = \{AMA^{-1} : M \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_F)\}$ es un orden maximal en la F -álgebra $\mathbb{M}_2(F)$, debido a que en cierta base este orden luce como el mencionado en el ejemplo anterior.

6. ÁRBOL DE BRUHAT-TITS LOCAL PARA $\mathbb{M}_2(K)$

Sea K un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$. Definimos el álgebra de cuaterniones local \mathcal{A} como $\mathcal{A} := \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)$, donde $\alpha, \beta \in K^*$. Sabemos, por el Lema 3.5, que esta álgebra es isomorfa la K -álgebra definida por generadores y relaciones como $\langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 0 \rangle$.

Ejemplo 6.1. Sean F un cuerpo de números y \mathcal{A} un álgebra de cuaterniones sobre F , es decir, $\mathcal{A} \cong \left(\frac{\alpha, \beta}{F} \right)$. Para cada lugar \mathfrak{p} en F , el álgebra de cuaterniones local correspondiente es $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right) \cong \mathcal{A} \otimes_F K$, donde $K = F_{\mathfrak{p}}$.

Sea L un reticulado de rango 2 en K^2 . Sea $\lambda \in K^*$. Entonces λL es también un reticulado de K^2 . Se sigue que el grupo K^* actúa en el conjunto de reticulados. Llamamos a la órbita de L bajo esta acción su clase de homotecia, la que denotamos por $[L]$. Dos reticulados en la misma clase de homotecia se dicen equivalentes. Llamaremos \mathfrak{T} al conjunto de clases.

Sean L y L' dos \mathcal{O}_K -reticulados de rango 2 en K^2 . Por el Teorema de factores invariantes existe una \mathcal{O}_K -base $\{e_1, e_2\}$ de L y enteros a, b tales que $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ es una \mathcal{O}_K -base para L' , donde π es un parámetro uniformizante de K . El conjunto $\{a, b\}$ no depende de la elección de las bases para L, L' . De este modo, se tiene $L' \subset L$ si y solo si $a, b \geq 0$, en cuyo caso L/L' es isomorfo a $(\mathcal{O}_K/\pi^a\mathcal{O}_K) \oplus (\mathcal{O}_K/\pi^b\mathcal{O}_K)$.

Reemplazar L y L' por xL e yL' (con $x, y \in K^*$) cambia el conjunto $\{a, b\}$ por $\{a+c, b+c\}$, donde $c = v(y/x)$. El entero $|a-b|$ depende solo de las clases $[L]$ y $[L']$ de L y L' .

Definición 6.2. Sean L, L' dos reticulados en V . Definimos la distancia entre sus clases $[L], [L']$ como:

$$d([L], [L']) = |a - b|.$$

Dos reticulados L, L' se dicen vecinos si $d([L], [L']) = 1$.

Observación 6.3. Sin cambiar las clases de L y L' se puede asumir que $\min\{a, b\} = 0$. En particular, $d([L], [L']) = 0 \Leftrightarrow [L] = [L']$.

La siguiente definición muestra como trabajaremos en esta tesis la estructura de grafo.

Definición 6.4. Un grafo G es un conjunto de objetos llamados vértices sobre los cuales está definida una relación \sim_G simétrica y que cumple con $v \asymp_G v, \forall v \in G$. A dicha relación la llamamos relación de vecindad en G y v se dice vecino de w si $v \sim_G w$. Un grafo G se dice conexo si para cualesquiera $v, w \in G$ existen $\{v_i\}_{i=1}^n \subset G$ tales que $v \sim_G v_1, v_i \sim_G v_{i+1}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $v_n \sim_G w$. Un conjunto $\{v_i\}_{i=1}^n \subset G$ se dice ciclo si $v_i \sim_G v_{i+1}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $v_1 \sim_G v_n$. Un árbol es un grafo conexo sin ciclos.

Definición 6.5. Sea G un grafo. $F \subset G$ se dice subgrafo de G , si existe una relación \sim_F definida en F la cual es simétrica y además:

$$\{(v, w) : v, w \in F, v \sim_F w\} \subset \{(v, w) : v, w \in G, v \sim_G w\}.$$

Un subgrafo F de G se dice conexo si es un grafo conexo con la relación \sim_F .

Definición 6.6. Utilizando la definición 6.2 obtenemos una estructura de grafo en \mathfrak{T} . Se sigue de [Se] que \mathfrak{T} , con esta estructura, es un árbol.

Observación 6.7. Considérese el reticulado $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \\ & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$. Cada vecino de $[\Lambda]$ tiene la forma $[\Lambda']$, donde $\Lambda' = \pi \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \\ & \mathcal{O}_K \end{pmatrix} + \mathcal{O}_K \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}$, donde $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ y no están ambos en $\pi\mathcal{O}_K$. Se concluye que los vecinos de $[\Lambda]$ están en correspondencia con los subespacios de dimensión 1 en $(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^2$. Si suponemos que $|\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K| = q$, entonces hay $q + 1$ subespacios de dimensión 1, que en el grafo corresponden a $q + 1$ vecinos de $[\Lambda]$, es decir, $q + 1$ vértices unidos por aristas al vértice correspondiente a $[\Lambda]$. Como resultado de esto obtenemos que la estructura del árbol \mathfrak{T} solo depende del cuerpo residual de K .

Observación 6.8. Para cada orden maximal $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ existe un reticulado $L \subseteq K^2$, tal que $\mathfrak{D} = \text{End}_{\mathcal{O}_K}(L)$ y esta correspondencia induce una biyección entre órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$ y las clases $[L]$ de reticulados L en \mathfrak{T} . Esto nos dice que dos reticulados corresponden al mismo orden maximal si y solamente si están en la misma clase de homotecia. Para más detalle ver [A2].

Definición 6.9. El árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(K)$ para $\mathbb{M}_2(K)$ es el grafo constituido por los órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$, donde dos de ellos son vecinos si las clases de reticulados correspondientes son vecinas en \mathfrak{T} . El árbol de Bruhat-Tits es efectivamente un árbol por lo dicho al final de la definición 6.6.

Observación 6.10. Dos órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' están unidos por una arista si en alguna base de K^2 los ordenes son de la forma:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \pi\mathcal{O}_K \\ \pi^{-1}\mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}.$$

Aquí los órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' corresponden a las clases $[\Lambda]$ y $[\Lambda']$ respectivamente, donde $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \\ & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$ y $\Lambda' = \begin{pmatrix} \pi\mathcal{O}_K & \\ & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$. Más generalmente dos órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' están a distancia t si en alguna base de K^2 los órdenes lucen como:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \pi^t\mathcal{O}_K \\ \pi^{-t}\mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix},$$

esto nos dice que dos órdenes maximales $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ están en el árbol de Bruhat-Tits a distancia t si y solamente si $\mathfrak{D}/(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}') \cong \mathcal{O}_K/\pi^t\mathcal{O}_K$.

Ejemplo 6.11. Sea $\mathbb{K} = \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ y supongamos que $|\mathbb{K}| = 2$. Esto ocurre, por ejemplo, cuando $K = \mathbb{Q}_2$. Entonces el árbol de Bruhat-Tits para $\mathbb{M}_2(K)$ es como se muestra en la Figura 1.

Observación 6.12. Supongamos que el álgebra local \mathcal{A} es un álgebra de división, entonces \mathcal{A} tiene un único orden maximal, correspondiente a $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{A} : x \text{ es entero sobre } K\}$. Se sigue que el equivalente al árbol de Bruhat-Tits en este contexto es un punto, correspondiente al único orden maximal de \mathcal{A} .

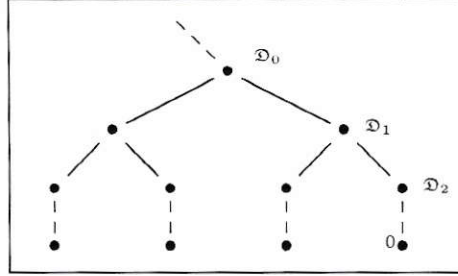


FIGURA 1. $\mathcal{T}(\mathbb{Q}_2)$ visto como árbol cuyos vértices son los órdenes maximales del álgebra $\mathbb{M}_2(\mathbb{Q}_2)$.

Definición 6.13. Para un orden $\mathfrak{h} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ cualquiera, definimos la rama de órdenes maximales que contienen a \mathfrak{h} como $S = S(\mathfrak{h})$, donde :

$$S = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}\}.$$

En [A2] se prueba que $S = S(\mathfrak{h})$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{T}(K)$, para cualquier orden \mathfrak{h} .

Ejemplo 6.14. Considere un orden \mathfrak{h} en $\mathbb{M}_2(K)$ y sea $A \in \text{Gl}_2(K)$, entonces se tiene que $\mathfrak{h}' = A\mathfrak{h}A^{-1}$ es también un orden en $\mathbb{M}_2(K)$, a dicho orden le llamamos orden conjugado de \mathfrak{h} por A . Por otro lado la rama de órdenes maximales que contienen a \mathfrak{h}' es $S(\mathfrak{h}') = AS(\mathfrak{h})A^{-1}$, a dicha rama le llamamos rama conjugada de $S(\mathfrak{h})$ por A .

Ejemplo 6.15. Si \mathfrak{h} es un orden maximal de $\mathbb{M}_2(K)$, entonces $S(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{D}\}$, donde $\mathfrak{D} = \mathfrak{h}$.

Ejemplo 6.16. Si $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[w]$, para cierto $w \in \mathbb{M}_2(K)$, entonces $S(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : w \in \mathfrak{D}\}$, dicha rama se denota por $S(w)$. Además si $\mathfrak{h} = \mathcal{O}_K[a_1, \dots, a_n]$, entonces $S(\mathfrak{h}) = \cap_{i=1}^n S(a_i)$.

6.1. r-Ramas. Sea $\mathfrak{h} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ un orden. Consideremos $\mathcal{T}(K)$ el árbol de Bruhat-Tits para $\mathbb{M}_2(K)$. En lo que sigue haremos uso de las siguientes notaciones de [A2].

Definición 6.17. Para cada entero $t \geq 0$, se define el orden contraído:

$$\mathfrak{h}^{[t]} := \mathcal{O}_K + \pi^t \mathfrak{h},$$

donde identificamos \mathcal{O}_K con $\mathcal{O}_K \text{Id} \subset \mathbb{M}_2(K)$, para $\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz identidad en $\mathbb{M}_2(K)$.

Definición 6.18. Para cada entero $r \geq 0$, la r-rama de \mathfrak{h} es el conjunto:

$$S_r(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{D}^{[r]}\}.$$

En particular, $S_0(\mathfrak{h})$ consiste de los órdenes maximales que contienen a \mathfrak{h} . Es decir $S_0(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ es la rama de \mathfrak{h} definida anteriormente.

Definición 6.19. Considere $t \geq 0$ y sea $S \subset \mathcal{T}(K)$ una 0-rama cualquiera. Se define la rama $S^{[t]}$ por:

$$S^{[t]} = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : \exists \mathfrak{D}' \in S : d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}') \leq t\}.$$

A dicha rama la llamamos la rama t -engrosada de S .

Usando la definición 6.5, se puede probar que $S_r(\mathfrak{H})$ es un subgrafo conexo de $\mathcal{T}(K)$. Además, se tiene que $S_0(\mathfrak{H})$ es no vacía. Las demostraciones de estos hechos aparecen en [A2].

Proposición 6.20. [A2, Prop. 2.4] Para cada orden \mathfrak{H} y entero $t \geq 0$, se tiene que $S_0(\mathfrak{H}^{[t]}) = S_0(\mathfrak{H})^{[t]}$, es decir, la rama $S_0(\mathfrak{H}^{[t]})$ contiene exactamente a los órdenes a distancia $\leq t$ de algún orden maximal en $S_0(\mathfrak{H})$.

Demostración. Ver [A2, Prop. 2.4]. □

Lema 6.21. [A2, Lema 2.3] Para cada orden maximal $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$, el orden contraído $\mathfrak{D}^{[t]}$ es la intersección de todos los órdenes maximales de $\mathbb{M}_2(K)$ a distancia a lo más t de \mathfrak{D} .

Demostración. Ver [A2, Lema 2.3]. □

Definición 6.22. Un orden maximal $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$ tal que todo orden maximal a distancia a lo más t de \mathfrak{D} está en $S_0(\mathfrak{H})$ se dice t -profundo en $S_0(\mathfrak{H})$. Equivalentemente, \mathfrak{D} es t -profundo en $S_0(\mathfrak{H})$ si y sólo si:

$$B[\mathfrak{D}; t] := \{\mathfrak{G} \in \mathcal{T}(K) / d(\mathfrak{D}, \mathfrak{G}) \leq t\} \subseteq S_0(\mathfrak{H}).$$

Se define la profundidad de $\mathfrak{D} \in S_0(\mathfrak{H})$, como el mayor entero $r > 0$ tal que \mathfrak{D} es r -profundo.

Proposición 6.23. $S_r(\mathfrak{H})$ es el conjunto de órdenes maximales r -profundos en $S_0(\mathfrak{H})$.

Demostración. Ver [A2]. □

Se concluye que para calcular $S_r(\mathfrak{H}^{[t]})$ basta con calcular $S_0(\mathfrak{H})$. Es más, se puede probar que toda rama, salvo $S(a+w)$ para $w \in \mathbb{M}_2(K)$ un elemento nilpotente y $a \in \mathcal{O}_K$, es el engrosado de una rama T_S cuyos vértices tienen profundidad nula en T_S . La rama $S(a+w)$, definida para $w \neq 0$, se denomina hoja infinita y la demostración del hecho anterior aparece en [A2]. Además se puede probar que toda rama de profundidad nula es un subconjunto conexo de $C \subseteq \mathcal{T}(K)$ tal que dado cualquier vértice $\mathfrak{D} \in C$ existen a lo más dos vértices vecinos a \mathfrak{D} en C . Tales ramas se denominan caminos en $\mathcal{T}(K)$. Por último, el hecho de que toda rama, salvo la hoja infinita y el conjunto completo de vértices, es el engrosado de una rama cuyos puntos tienen profundidad nula, motiva la siguiente definición.

Definición 6.24. Sea \mathfrak{H} orden en $\mathbb{M}_2(K)$. Consideremos la rama $S_0(\mathfrak{H})$. Se define el tallo $T(\mathfrak{H})$ de $S_0(\mathfrak{H})$ como la rama, cuyos puntos tienen profundidad nula en $T(\mathfrak{H})$ y tal que $S_0(\mathfrak{H})$ es un r -engrosado de $T(\mathfrak{H})$, para algún entero $r \geq 0$. La notación $T(w)$, para $w \in \mathbb{M}_2(K)$, se define análogamente.

Por lo dicho anteriormente todo tallo es un camino en $\mathcal{T}(K)$. Además, para determinar una rama completamente basta conocer el tallo y el grosor de esta. Es decir, basta determinar su tallo y la mayor profundidad de uno de sus puntos.

Ejemplo 6.25. Sea $a \in K^*$. Considere $w \in \mathbb{M}_2(K)$ y $w' = aw$ dos cuaterniones tales que $S_K(w), S_K(w') \neq \emptyset$. Entonces, si $a \in \mathcal{O}_K$ se tiene que $S(w') = S(w)^{[t]}$, para $t = v(a)$. Por otro lado, si $|a| \geq 1$, se tiene que $S(w) = S(w')^{[t]}$, para $t = -v(a)$. En cualquier caso los tallos de las ramas $S(w)$ y $S(w')$ coinciden. Es más, si $|a| \leq 1$ se tiene que $S(w, w') = S(w) \cap S(w') = S(w)$ y si $|a| \geq 1$ se tiene que $S(w, w') = S(w) \cap S(w') = S(w')$.

Observación 6.26. Debido a que para conocer $S_r(\mathfrak{H}^{[t]})$ basta encontrar $S_0(\mathfrak{H})$, en esta tesis trabajaremos solamente con las ramas $S_0(\mathfrak{H}) = S(\mathfrak{H})$. Usaremos los subíndices $S_K(\mathfrak{H})$ para indicar el cuerpo sobre el cual se define la rama en cuestión, el cual en todo lo anterior es el cuerpo K . Más tarde consideraremos también extensiones finitas de K .

7. ANÁLISIS DE RAMAS

Sea K un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$ y considere $\mathcal{O}_L = \{x \in L : x \text{ es entero sobre } \mathcal{O}_K\}$, para L una extensión cuadrática de K , o bien para $L = K \times K$. Se puede probar que si L es una extensión cuadrática de K entonces $\mathcal{O}_L = \{x \in L : |x|_L \leq 1\}$. Por otro lado, también se puede probar que $\mathcal{O}_{K \times K} = \mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K$. En esta sección estudiaremos la rama correspondiente al orden \mathcal{O}_L , la que por definición es:

$$S(\mathcal{O}_L) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : \mathfrak{D} \supseteq \mathcal{O}_L\}.$$

La primera pregunta que surge al respecto, es si podemos considerar dicho anillo de enteros como subconjunto del álgebra de matrices para que así tenga sentido la contención anterior. Para ello identificaremos \mathcal{O}_L con un subconjunto de $\mathbb{M}_2(K)$ vía una representación de la K -álgebra L . La siguiente pregunta de interés es si acaso, una vez obtenida la incrustación anterior, el anillo \mathcal{O}_L es un orden en el álgebra de matrices en cuestión. La respuesta es positiva y daremos su demostración en esta sección.

Desde ahora $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ denotará el anillo de enteros del cuerpo base K . Partamos estudiando la representación mencionada más arriba.

Proposición 7.1. Sea $\varphi : L \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ función definida por:

$$\varphi(a) = M_a,$$

donde M_a es la matriz asociada a la transformación lineal $T_a : L \rightarrow L$, $T_a(x) = ax$, con respecto a una base prefijada de L como K -espacio vectorial. Entonces $\varphi : L \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ es un homomorfismo inyectivo de K -álgebras.

Demostración. Observe que $T_a \circ T_b(x) = abx = T_{ab}(x)$ para cualquiera $a, b \in L$ y que $T_{a+\lambda b}(x) = (a + \lambda b)x = ax + \lambda bx = T_a(x) + \lambda T_b(x)$ para todo $a, b \in L$ y $\lambda \in K$. Lo anterior nos dice φ es un homomorfismo de K -álgebras. Para la inyectividad observe que $\text{Ker}(\varphi) = \{a \in L : ax = 0, \forall x \in L\}$, en particular, si consideramos $x = 1 \in L$, tenemos que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. \square

Definición 7.2. Sea $\varphi : L \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ el homomorfismo inyectivo de K -álgebras definido en la proposición anterior. A dicha función le llamaremos la representación regular de L con respecto a una base dada.

En lo sucesivo asumiremos que $L \subseteq \mathbb{M}_2(K)$ vía φ . Ahora bien, la extensión cuadrática L/K es separable debido a que $\text{car}(K) \neq 2$. Por consiguiente existe una base $\{x_1, x_2\}$ de L como K -espacio vectorial tal que $\mathcal{O}_L \subset \mathcal{O}_K x_1 + \mathcal{O}_K x_2$. Para más detalle ver [M1, §2]. Por otro lado, si consideramos L como subespacio de $\mathbb{M}_2(K)$ podemos tomar la base anterior y completarla a una base de $\mathbb{M}_2(K)$, digamos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, de manera que $\mathcal{O}_L \subset \mathcal{O}_K x_1 + \mathcal{O}_K x_2 + \mathcal{O}_K x_3 + \mathcal{O}_K x_4$. De aquí que \mathcal{O}_L es un reticulado en $\mathbb{M}_2(K)$. Sumando lo anterior al hecho de que \mathcal{O}_L posee estructura de anillo, tenemos que \mathcal{O}_L es un orden de $\mathbb{M}_2(K)$. Por ende tiene sentido preguntarse cual es la rama asociada a este orden.

Ahora veamos un caso especial de anillo de enteros. Si $L = K \times K$ entonces $\mathcal{O}_L = \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, donde \mathcal{O} es el anillo de enteros de K . Esto se debe a que $\text{irr}_{(a,b)}(x) = (x-a)(x-b)$, por lo que si dicho polinomio tiene coeficientes en \mathcal{O} , se tiene que $a, b \in$

\mathcal{O} . De hecho, si esto no sucede y $|a| > 1$, entonces $|b| < 1$, pues $|ab| \leq 1$, de donde se deduce que $|a+b| = |a| > 1$, lo que es contradictorio. Es más, si consideramos la K -base canónica $\{(1,0), (0,1)\}$ de L , tenemos que $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\mathcal{O}_L \cong \begin{pmatrix} \mathcal{O} & 0 \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix}$. Dicho conjunto es un orden pues tiene estructura de anillo y es claramente un reticulado. Los dos últimos párrafos prueban la siguiente proposición.

Proposición 7.3. Si consideramos L como subconjunto de $\mathbb{M}_2(K)$ vía la representación regular de L , tenemos que \mathcal{O}_L es un orden en $\mathbb{M}_2(K)$.

Identifiquemos ahora K^2 con L , de modo que en particular veamos los reticulados $\Lambda \subseteq K^2$ como subconjuntos de L . Entonces:

$$\varphi(\mathcal{O}_L) \subseteq \mathfrak{D}_\Lambda,$$

si y solamente si:

$$M_a \Lambda \subseteq \Lambda, \forall a \in \mathcal{O}_L,$$

y esto pasa si y solamente si:

$$a\Lambda \subseteq \Lambda, \forall a \in \mathcal{O}_L.$$

Es decir Λ es un ideal fraccional de L . Lo anterior determina una correspondencia:

$$\{\mathfrak{D} : \varphi(\mathcal{O}_L) \subseteq \mathfrak{D}\} \leftrightarrow \{[I] : I \text{ ideal fraccional}\} / \sim$$

donde $I \sim J$ si y solamente si $I = kJ$, con $k \in K^*$. Esto último debido a que dos reticulados corresponden a los mismos órdenes maximales si y solamente si son ponderados uno del otro, por lo expuesto en la observación 6.8. Usemos esto en distintos casos para obtener la descripción de la rama descada en cada uno.

7.1. L/K es una extensión cuadrática no ramificada: En este caso:

$$\Lambda = \pi_L^n \mathcal{O}_L, n \in \mathbb{Z},$$

donde π_L es un parámetro uniformizante de L . Observe que aquí, para cualquier parámetro uniformizante de K se tiene que $\pi_K \mathcal{O}_L = \pi_L \mathcal{O}_L$, así:

$$\Lambda = \pi_K^n \mathcal{O}_L, n \in \mathbb{Z}.$$

Luego $S = S(\mathcal{O}_L)$ consiste en un único vértice.

7.2. L/K es una extensión cuadrática ramificada: En este caso tenemos que:

$$\Lambda = \pi_L^n \mathcal{O}_L, n \in \mathbb{Z},$$

donde π_L es el parámetro uniformizante de L . Observe que en este caso se cumple que $u\pi_L^2 = \pi_K$, donde π_K es algún parámetro uniformizante de K y u unidad en L , así:

$$\Lambda = \pi_K^t \mathcal{O}_L, \text{ si } n \in 2\mathbb{Z},$$

o bien:

$$\Lambda = \pi_L \pi_K^t \mathcal{O}_L, \text{ si } n \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Luego $S = S(\mathcal{O}_L)$ consiste solo dos vértices vecinos.

7.3. $L = K \times K$: En este caso los ideales fraccionales de L son:

$$\Lambda = I_1 \times I_2,$$

donde I_1, I_2 son ideales fraccionales de K , así:

$$\Lambda = \pi^r \mathcal{O} \times \pi^s \mathcal{O}.$$

Luego todo $\mathfrak{D}_\Lambda \in S(\mathcal{O}_L)$ es de la forma:

$$\mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^i \mathcal{O} \\ \pi^{-i} \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, i \in \mathbb{Z},$$

es decir $S(\mathcal{O}_L)$ es el conjunto de vértices de un camino al que llamaremos un camino maximal o camino infinito en dos direcciones. Más generalmente podemos hacer las siguientes definiciones:

Definición 7.4. Sea $S \subseteq \mathcal{T}(K)$ un camino, es decir una rama cuyos vértices tienen profundidad nula en S .

Si S está constituido por finitos vértices, decimos que S es un camino finito.

Por el contrario, si S está constituido por infinitos vértices, equivalentemente si para cualquier vértice $\mathfrak{D} \in S$ y para todo $t \in \mathbb{N}$ existen un vértice $\mathfrak{D}_t \in S$ tal que $d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_t) = t$, entonces decimos que S es un camino infinito.

Si existe un vértice $\mathfrak{D} \in S$ tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ existen un único vértice $\mathfrak{D}_t \in S$ tales que $d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_t) = t$, entonces decimos que S es un rayo. Al vértice \mathfrak{D} le llamamos vértice de partida del rayo S .

Si para cualquier vértice $\mathfrak{D} \in S$ y para todo $t \in \mathbb{N}$ existen exactamente dos vértices $\mathfrak{D}_t, \mathfrak{D}_{-t} \in S$ tales que $d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_t) = d(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_{-t}) = t$, entonces decimos que S es un camino maximal.

Observación 7.5. Observe que en los casos expuestos en las subsecciones 7.1 y 7.2 obtenemos que las ramas analizadas son caminos finitos constituidos por uno y dos vértices respectivamente.

Por último apliquemos lo deducido en este capítulo a un caso particular, con el fin de describir la rama asociada al orden $\mathcal{O}[w]$, donde w es un elemento idempotente cualquiera, el cual podemos asumir, tomando una base apropiada, que es $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En efecto, sea $\mathbb{M}_2(K)$ el álgebra de matrices sobre la cual construimos el árbol de Bruhat-Tits y sea $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K)$. Observe que $K[w] \cong K \times K$ como K -álgebra, luego:

$$\mathcal{O}_{K \times K} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}w,$$

es decir $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}[w]$, donde $L = K[w] \cong K \times K$. Lo anterior, visto a la luz de lo mostrado en §7.3, nos permite deducir el siguiente teorema.

Teorema 7.6. La rama $S(w) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : w \in \mathfrak{D}\}$ asociada al elemento idempotente $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K)$ es el camino maximal $S(w) = \{\mathfrak{D}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, donde:

$$\mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^i \mathcal{O} \\ \pi^{-i} \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, i \in \mathbb{Z}.$$

8. ÁRBOLES DE BRUHAT-TITS, BOLAS Y TRANSFORMACIONES DE MOEBIUS

Sea K un cuerpo local no arquimediano con $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}$ su anillo de enteros y $\pi \in K$ un parámetro uniformizante.

En esta sección analizaremos la correspondencia que existe entre el árbol de Bruhat-Tits cuyos vértices son bolas en K , al que denotaremos por $\mathcal{B}(K)$ y el árbol de Bruhat-Tits cuyo vértices son los órdenes maximales en $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$, al que denotaremos por $\mathcal{T}(K)$. En efecto, mostraremos que estos grafos son isomorfos, es decir existe una correspondencia biunívoca entre los vértices de dichos árboles que respeta la distancia entre estos. Además, mostraremos que existe una forma natural de conjugar ramas en el árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{B}(K)$. Esto último lo haremos vía transformaciones de Moebius.

Usaremos la notación $B[a, |\pi^r|]$ para denotar la bola cerrada de centro $a \in K$ y radio $|\pi^r|$. En ciertas figuras se usará la notación $B_a^{[r]}$ para denotar a $B[a, |\pi^r|]$.

Lema 8.1. Existe una correspondencia biunívoca entre bolas en K y órdenes maximales en $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$, dada por:

$$\Sigma : B = B[a, |\pi^r|] \mapsto \mathfrak{D}_{\Lambda_B},$$

donde $\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Demostración. Primero veamos que Σ está bien definida. Observe que escribimos la misma bola de dos formas iguales $B[a, |\pi^r|] = B[b, |\pi^r|]$, entonces $a - b \equiv 0 \pmod{\pi^r}$. Luego $a - b = t\pi^r$, con $t \in \mathcal{O}$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue que $\Lambda_{B_a} \subseteq \Lambda_{B_b}$. Evidentemente:

$$\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix},$$

obteniendo así la contención contraria. Por lo tanto $\Lambda_{B[a, |\pi^r|]} = \Lambda_{B[b, |\pi^r|]}$.

Demostremos que esta función es sobreyectiva. Sea \mathfrak{D}_Λ el orden maximal correspondiente al reticulado $\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle$. Sabemos que $|b| \leq |d|$ o bien $|d| \leq |b|$. Sin pérdida de generalidad asumimos que $|d| \leq |b|$. Observe que si $b = 0$ entonces $d = 0$, de donde Λ es un reticulado de rango 1 que corresponde a un orden maximal, esto nos lleva a una contradicción. Luego podemos asumir que $b \neq 0$. Entonces, como reticulados ponderados corresponden al mismo orden, podemos reemplazar el reticulado Λ por $\frac{1}{b}\Lambda$ y asumir $b = 1$, de forma que \mathfrak{D}_Λ se corresponda con el reticulado:

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle,$$

donde $d \in \mathcal{O}$. Restando d por la primera columna a la segunda obtenemos que:

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

donde u es unidad. Luego $\mathfrak{D}_\Lambda = \mathfrak{D}_{\Lambda_B}$, para $B = B[a, |\pi^r|]$.

Por último demosntremos que la función Σ es inyectiva. Sean $B = B[a, |\pi^r|]$ y $B' = B[b, |\pi^s|]$ dos bolas tales que $\mathfrak{D}_{\Lambda_B} = \mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$. Entonces, por lo mencionado en la Observación 6.8, tenemos que existe $\lambda \in K^*$ tal que:

$$\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \left\langle \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \Lambda_{B'}.$$

Observe que si $|\lambda| > 1$ tenemos que $\lambda^{-1}\Lambda_B = \Lambda_{B'}$, donde $|\lambda^{-1}| < 1$. Luego podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lambda \in \mathcal{O}$. Como $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \in \lambda \Lambda_{B'}$ tenemos que existen $x, y \in \mathcal{O}$ tales que $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda x \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda y \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $1 = \lambda x$ y $a = b + \lambda y \pi^s$, es decir $\lambda \in \mathcal{O}^*$ y $a \equiv b \pmod{\pi^s}$. Luego tenemos que $a \in B'$ y por lo tanto $B' = B[a, |\pi^s|]$. Por esto último podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = b$. Observe que, como $\begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \in \lambda \Lambda_{B'}$, tenemos que $\begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda x' \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda y' \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix}$, para ciertos $x', y' \in \mathcal{O}$. De esta última igualdad se sigue que $\pi^r = \lambda y \pi^s$. Por otro lado, como tenemos que $\lambda \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix} = x'' \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + y'' \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix}$, para ciertos $x'', y'' \in \mathcal{O}$, se sigue que $x'' = 0$ y $\lambda \pi^s = y'' \pi^r$. Luego $yy'' = 1$ y en particular $y, y'' \in \mathcal{O}$. De esto se sigue que $|\pi^r| = |\pi^s|$. Concluimos que $B = B'$. \square

Definición 8.2. Dos bolas B y B' de radios d y d' respectivamente se dicen vecinas si $B' \subseteq B$ y $d' = |\pi|d$, o viceversa. Esta definición satisface las propiedades de una relación de vecindad en un grafo. Sea $\{a_i\}_{i=1}^p$ un conjunto de representantes de \mathbb{K} . Una bola fija $B[a, |\pi^r|]$ tiene una bola vecina $B[a, |\pi^{r-1}|]$ de radio mayor y $p = |\mathbb{K}|$ sub-bolas vecinas, a saber $B_i = B[a + a_i \pi^r, |\pi^{r+1}|]$, las cuales satisfacen:

- i.- $B[a, |\pi^r|] = \bigcup_{i=1}^p B_i$.
- ii.- $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Denotamos por $\mathcal{V}(B[a, |\pi^r|])$ al conjunto de bolas vecinas de $B[a, |\pi^r|]$. Debido a [i] y [ii], el grafo de bolas es un árbol, al cual llamamos árbol de Bruhat-Tits asociado a las bolas de K y lo denotamos por $\mathcal{B}(K)$.

Lema 8.3. Considere $B = B[a, |\pi^s|]$ y $B' = B[b, |\pi^r|]$ dos bolas en K . Entonces B, B' son vecinas si y solamente si los órdenes \mathfrak{D}_{Λ_B} y $\mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$ son vecinos.

Demostración. Primero supongamos que B y B' son vecinos, entonces sin pérdida de generalidad podemos considerar $B' \subseteq B$ y $\text{diam}(B') = \text{diam}(B)|\pi|$. Entonces obtenemos que:

$$|\pi^r| = \text{diam}(B') = \text{diam}(B)|\pi| = |\pi^{s+1}|,$$

luego $r = s + 1$. Además, como $B' \subseteq B$, se tiene que $b \in B[a, |\pi^s|]$. Lo que nos lleva a que $B = B[b, |\pi^s|]$, ya que si $t \in B[b, |\pi^s|]$ entonces $|t - b| \leq |\pi^s|$, luego $|t - a| \leq \max\{|t - b|, |b - a|\} \leq |\pi^s|$ y la contención contraria se demuestra análogamente. Luego, por la biyección dada en el lema anterior, se tiene que las bolas corresponden a reticulados de la forma:

$$B \mapsto \Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$B' \mapsto \Lambda_{B'} = \left\langle \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Observese que $\Lambda_B \supseteq \Lambda_{B'}$. Además tenemos que:

$$\Lambda_B / \Lambda_{B'} \cong \mathcal{O}/(1) \oplus \mathcal{O}/(\pi).$$

Así los factores invariantes de $\Lambda_{B'}$ y Λ_B son respectivamente $d_1 = 1$ y $d_2 = \pi$. Por lo tanto la distancia entre los órdenes \mathfrak{D}_{Λ_B} y $\mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$ es, por definición $d(\mathfrak{D}_{\Lambda_B}, \mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}) =$

$|v(d_1) - v(d_2)| = 1$. Es decir los órdenes \mathfrak{D}_{Λ_B} y $\mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$ son vecinos. Luego, si $\mathcal{V}(B)$ es el conjunto de vecinos de la bola B y $\mathcal{V}(\mathfrak{D}_{\Lambda_B})$ es el conjunto de vecinos del orden $\mathfrak{D}_{\Lambda_B} = \Sigma(B)$, tenemos que $\Sigma(\mathcal{V}(B)) \subset \mathcal{V}(\mathfrak{D}_{\Lambda_B})$. Observe que, si $\{a_i\}_i$ es un conjunto de representantes de \mathbb{K} , tenemos que el conjunto de vecinos de $B = B[a, |\pi^r|]$ es $\mathcal{V}(B) = \{B[a + a_i\pi^r, |\pi^{r+1}|]\}_{a_i \in \mathbb{K}} \cup \{B[a, |\pi^{r-1}|]\}$. Luego $|\mathcal{V}(B)| = |\mathbb{K}| + 1 = |\mathcal{V}(\mathfrak{D}_{\Lambda_B})|$. Por lo tanto $\Sigma(\mathcal{V}(B)) = \mathcal{V}(\mathfrak{D}_{\Lambda_B})$ y, como Σ es una función biyectiva, se tiene que B, B' son bolas vecinas si y solamente \mathfrak{D}_{Λ_B} y $\mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$ son órdenes vecinos. \square

Lo demostrado en los dos lemas anteriores muestra los grafos $\mathcal{B}(K)$ y $\mathcal{T}(K)$ son isomorfos. Esto da una segunda demostración al hecho de que $\mathcal{T}(K)$ es un árbol.

Ahora bien, queremos encontrar una manera de representar la conjugación por matrices en este nuevo árbol. Para esto utilizaremos las transformaciones de Moebius. En efecto, dada una matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ u & w \end{pmatrix} \in \text{Gl}_2(K)$, existe una transformación de Moebius asociada a A , la cual definimos por:

$$\tau_A(z) = \frac{xz + y}{uz + w}.$$

Toda transformación de Moebius es de esta forma. Denotemos al conjunto de transformaciones de Moebius sobre K por $\mathcal{M}(K)$.

Observación 8.4. Para todo $A, B \in \text{Gl}_2(K)$ se cumple que:

$$\tau_{AB} = \tau_A \circ \tau_B,$$

es decir la correspondencia anteriormente explicitada, es un epimorfismo de grupos.

Ahora bien como $\tau_A = id$ solamente para las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, para $x \in K^*$, se tiene que $\text{PGL}_2(K) = \text{Gl}_2(K)/K^*$ es isomorfo al grupo de transformaciones de Moebius $\mathcal{M}(K)$. Es por esto que desde ahora trabajaremos con la matrices definidas en $\text{PGL}_2(K)$ y no en $\text{Gl}_2(K)$.

Definición 8.5. ([AA-C]) Las transformaciones de Moebius actúan sobre las bolas en K vía:

$$\tau.B = D,$$

para dos bolas B y D , si y solamente si:

$$\tau(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D),$$

donde $\mathcal{P}(B) = \{B^c, B_1, \dots, B_p\}$ y B_1, \dots, B_p son las bolas de radio menor a B tales que $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i \neq j$ y $\cup_{i=1}^p B_i = B$. Observe que las bolas B_i son las subbolas vecinas de B y que toda partición de $\mathbb{P}^1(K)$ en $p + 1$ bolas y complementos de estas es de este tipo. Al conjunto $\mathcal{P}(B)$ se le llama partición definida por B .

Lema 8.6. Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ u & w \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(K)$. Considere $\tau_A(z) = \frac{xz+y}{uz+w}$ la transformación de Moebius asociada a A . Entonces:

$$A\mathfrak{D}_B A^{-1} = \mathfrak{D}_D,$$

si y solamente si:

$$\tau_A.B = D.$$

Demostración. Es un hecho conocido, que el grupo $\text{Gl}_2(K)$ está generado por las matrices:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para más detalle ver [O]. Observe que si demostramos que la proposición del Teorema 8.6 es cierta para los generadores de $\text{Gl}_2(K)$, entonces tenemos lo pedido. Verificaremos esto, dividiendo la demostración en casos.

i.- Supongamos que $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $|\lambda| = |\pi^s|$, para cierto $s \in \mathbb{Z}$.

Entonces $\tau_A(z) = \lambda z$. Considere la bola $B = B[a, |\pi^r|]$ y las $p = |\mathbb{K}|$ sub-bolas vecinas $B_i = B[a + a_i\pi^r, |\pi^{r+1}|]$ de B . Tenemos que:

$$\tau_A(B_i) = B[\lambda(a + a_i\pi^r), |\lambda\pi^{r+1}|].$$

Por otro lado, tomando un representante a_j de un elemento en \mathbb{K} tal que $a_j \equiv \frac{\lambda}{\pi^s} a_i \pmod{\pi}$, tenemos que $B[\lambda(a + a_i\pi^r), |\lambda\pi^{r+1}|] = B[\lambda a + a_j\pi^{r+s}, |\pi^{r+s+1}|]$. Luego $\tau_A(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $D = B[\lambda a, |\pi^{r+s}|]$. Por lo tanto debemos probar que $A\mathfrak{D}_B A^{-1} = \mathfrak{D}_D$. Por la Observación 6.8, tenemos que $A\mathfrak{D}_B A^{-1} = \mathfrak{D}_D$ si y solamente si existe $t \in K^*$ tal que $A\Lambda_B = t\Lambda_D$. Por otro lado tenemos que:

$$A\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{r+s} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \Lambda_D.$$

Luego, si tomamos $t = 1$, concluimos lo pedido.

ii.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\tau_A(z) = z + \eta$. Considere la bola $B = B[a, |\pi^r|]$ y

las $p = |\mathbb{K}|$ sub-bolas vecinas $B_i = B[a + a_i\pi^r, |\pi^{r+1}|]$ de B . Luego la acción de la transformación de Moebius τ_A sobre B_i tiene por imagen a:

$$\tau_A(B_i) = B[a + \eta + a_i\pi^r, |\pi^{r+1}|].$$

Luego tenemos que $\tau_A(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $D = B[a + \eta, |\pi^r|]$. Por lo tanto, debemos probar que $A\mathfrak{D}_B A^{-1} = \mathfrak{D}_D$. Por la Observación 6.8, tenemos que $A\mathfrak{D}_B A^{-1} = \mathfrak{D}_D$ si y solamente si existe $t \in K^*$ tal que $A\Lambda_B = t\Lambda_D$, luego debemos probar que $A\Lambda_B = t\Lambda_D$, para cierto $t \in K^*$. En efecto, tenemos que:

$$A\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} a + \eta \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \Lambda_D.$$

Luego, si tomamos $t = 1$, concluimos lo pedido.

iii.- Finalmente si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\tau_A(z) = \frac{1}{z}$. Dividiremos este análisis en dos partes.

a.- Sea $B = B[a, |\pi^r|]$ una bola en K tal que $0 \in B$. Entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $B = B[0, |\pi^r|]$. Para la bola $B_0 = B[0, |\pi^{r+1}|]$, tenemos que:

$$\tau_A(B_0) = \left\{ \frac{1}{x} \in K : |x| \leq |\pi^{r+1}| \right\} = B[0, |\pi^{-r}|]^c.$$

Observe que si la imagen de un elemento en $\mathcal{P}(B)$ es el complemento de una bola D , entonces $\tau(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$. Concluimos que $D = B[0, |\pi^{-r}|]$. Por lo

tanto debemos probar que $A\Lambda_B = t\Lambda_D$, para cierto $t \in K^*$. En efecto:

$$A\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi^r \end{pmatrix} \right\rangle = \pi^r \Lambda_D.$$

Luego, si tomamos $t = \pi^r$, concluimos lo pedido.

b.- Sea $B = B[a, |\pi^r|]$ una bola en K tal que $0 \notin B$. Entonces $|a| > |\pi^r|$. Escribimos $a = u\pi^s$, donde $u \in \mathcal{O}^*$ y $s < r$, entonces para todo elemento $z = a + l\pi^r \in B$ se tiene que:

$$\tau_A(z) = \frac{1}{a + l\pi^r} = \frac{\pi^{-s}}{u + \pi^{r-s}l},$$

donde $l \in \mathcal{O}$. Como $\frac{1}{u + \pi^{r-s}l} \equiv u^{-1} \pmod{\pi^{r-s}}$, tenemos que:

$$\tau_A(z) = \frac{1}{u\pi^s} + l_0\pi^{r-2s} = \frac{1}{a} + l_0\pi^{r-2s},$$

para cierto $l_0 \in \mathcal{O}$. Luego tenemos que $\tau_A(B) \subseteq B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|]$. Utilizando el mismo argumento anterior, para la bola $B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|]$, deducimos que $\tau_A(B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|]) \subseteq B[a, |\pi^r|]$. Por otro lado, como $\tau_A^2 = \text{Id}$, tenemos que $B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|] = \tau_A^2(B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|]) \subseteq \tau_A(B)$. Concluimos que $\tau_A(B) = B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|]$. Luego $\tau_A(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $D = B[a^{-1}, |\pi^{r-2s}|]$. Por lo tanto debemos demostrar que $A\Lambda_B = t\Lambda_D$, para cierto $t \in K^*$. En efecto:

$$A\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi^r \end{pmatrix} \right\rangle,$$

Haciendo el cambio de variable que consiste en restarle al vector $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi^r \end{pmatrix}$ el vector $u^{-1}\pi^{r-s}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, con $u^{-1}\pi^{r-s} \in \mathcal{O}$, obtenemos que:

$$A\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{r-s} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Por lo tanto, si tomamos $t = a$, obtenemos que $A\Lambda_B = t\Lambda_D$. □

Observación 8.7. De la demostración del Teorema 8.6 se sigue que, si $\tau(\infty) = \infty$ entonces $\tau.B = D$ si y solamente si $\tau(B) = D$.

Los lemas 8.3, 8.6 y la observación 8.4, determinan un isomorfismo Σ de árboles con acción de grupo:

$$(\mathcal{B}(K), \mathcal{M}(K)) \cong (\mathcal{T}(K), \text{PGL}_2(K))$$

donde la correspondencia entre vértices está dada por $\Sigma(B[a, |\pi^r|]) = \mathfrak{D}_\Lambda$, para $\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, y la correspondencia entre grupos está determinada por $\tau_A \mapsto [A] \in \text{PGL}_2(K)$. Usando esta correspondencia podemos definir un concepto de gran utilidad para la mejor comprensión del trabajo que se realizará en las secciones siguientes.

Definición 8.8. Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K)$ y $B = B[a, |\pi^r|]$ la bola tal que $\Sigma(B) = \mathfrak{D}$. Definimos la altura del vértice $\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K)$ como $h(\mathfrak{D}) = -r$.

Observación 8.9. De ahora en adelante usaremos la misma notación para ambos árboles de Bruhat-Tits y los simbolizaremos por $\mathcal{T}(K)$.

8.1. Aplicación: Extremos en el árbol de Bruhat-Tits y caminos maximales. Para una mejor comprensión de ciertos conceptos empleados en esta tesis, en especial de los caminos maximales, estudiaremos más detalladamente la estructura del árbol $\mathcal{T}(K)$. Específicamente analizaremos los extremos de $\mathcal{T}(K)$ y veremos que dichos objetos están en correspondencia con $\mathbb{P}^1(K)$. Luego aplicaremos esto a los caminos maximales.

Como antes, K es un cuerpo local no arquimediano con $\pi \in K$ un parámetro uniformizante. En todo lo que sigue haremos uso del isomorfismo entre el árbol de bolas y de órdenes maximales e identificaremos los vértices en $\mathcal{T}(K)$ con los elementos del conjunto $\{B[a, |\pi^r|] : a \in K, r \in \mathbb{Z}\}$.

Sea B_0 un vértice en $\mathcal{T}(K)$ y considere un rayo T que parte en B_0 y cuyos vértices están sucesivamente a menor altura. Es decir, B_0 tiene por único vecino a B_1 y este vértice está a menor altura que B_0 , B_1 tiene por único vecino, distinto de B_0 , a B_2 y este vértice está a menor altura que B_1 y así sucesivamente. Entonces los radios de las bolas en la sucesión $\{B_i\}_{i=0}^\infty$ satisfacen $\text{diam}(B_i) = |\pi| \text{diam}(B_{i-1})$.

Por otro lado, por la condición de vecindad entre las bolas, se sigue que $B_i \supset B_{i+1}$. Luego tenemos una sucesión decreciente estricta de conjuntos compactos en un espacio completo, cuyos radios convergen a 0. Por ello se tiene que $\bigcap_{i=0}^\infty B_i = \{a\}$, para cierto $a \in K$. Como $a \in B_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $B_i = B[a, |\pi^{i+t}|]$, para cierto $t \in \mathbb{Z}$. Luego, todo rayo descendente T en $\mathcal{T}(K)$ es de la forma $T = \{B_i = B[a, |\pi^{i+t}|]\}_{i=0}^\infty$, para cierto $t \in \mathbb{Z}$ y $a \in K$. A dicho punto $a \in K$ le llamaremos extremo inferior de $\mathcal{T}(K)$.

Sea nuevamente B_0 un vértice en $\mathcal{T}(K)$ y consideremos ahora un rayo T que parte en B_0 y cuyos vértices B_i están sucesivamente a mayor altura. Entonces los radios de las bolas $\{B_i\}_{i=0}^\infty$ forman una sucesión que satisfacen $\text{diam}(B_i) = |\pi|^{-1} \text{diam}(B_{i-1})$. Por otro lado, por la condición de vecindad entre las bolas, tenemos que $B_i \subset B_{i+1}$. Luego $\bigcup_{i=0}^\infty B_i = K$. Al único extremo de esta rama le llamaremos extremo superior de $\mathcal{T}(K)$ y lo denotaremos por $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$. Lo mencionado anteriormente motiva la siguiente definición:

Definición 8.10. Un extremo en $\mathcal{T}(K)$ es un extremo inferior o el extremo superior de $\mathcal{T}(K)$, como se definió en los párrafos anteriores.

Dichos extremos se visualizan en la Figura 2 de la página 28. Usando esta definición podemos enunciar el siguiente lema, cuya demostración se encuentra la discusión precedente.

Lema 8.11. El conjunto de extremos de $\mathcal{T}(K)$ está en biyección con los puntos en $\mathbb{P}^1(K)$.

Consideremos ahora un camino maximal S en $\mathcal{T}(K)$. Sabemos que, por definición de camino maximal, S es un camino que posee infinitos vértices en dos direcciones. Por esto definimos dos puntos de $\mathbb{P}^1(K)$ que llamamos los extremos de S en $\mathcal{T}(K)$. Analicemos más en detalle esto.

Supongamos que S tiene un vértice a mayor altura que cualquier otro en el mismo camino. Dicho vértice es único pues si existieran dos vértices a altura maximal, digamos $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ entonces, por la conexidad de S , estos vértices se conectan mediante un camino finito contenido en S , constituido por vértices a altura menor o igual a la de \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' . Luego, considerando el camino que une a \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' mediante vértices a mayor altura que estos, que existe en $\mathcal{T}(K)$ según la Figura 2, obtenemos un ciclo en $\mathcal{T}(K)$, lo que nos lleva a una contradicción, pues $\mathcal{T}(K)$ es un árbol. Denotemos

al único vértice a altura maximal de S por B_0 . Entonces podemos considerar los vecinos B_1 y B'_1 de B , luego los vecinos B_2 y B'_2 de B_1 y B'_1 respectivamente y así sucesivamente. De esta forma obtenemos dos rayos descendentes cuyo vértice de partida es B . Los extremos de estos rayos son dos elementos finitos, digamos $a, b \in K$. Esta situación se ilustra en la Figura 9 de la pagina 60.

Por otro lado si S no tiene un vértice a mayor altura, entonces S corresponde a un camino maximal cuyo extremos son ∞ y cierto $a \in K$. A este tipo de camino maximal le llamamos liana o K -liana, si se quiere enfatizar el cuerpo. Dichos caminos maximales serán de gran interés en la Sección §14. Lo dicho en los párrafos anteriores demuestra el siguiente lema.

Lema 8.12. Los extremos de un camino maximal S en $\mathcal{T}(K)$ son dos puntos $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$ tales que $a \neq b$.

Finalmente, dados dos puntos $a, b \in K$, podemos construir el camino que los une. Para esto, construimos dos K -lianas cuyos extremos inferiores son a y b respectivamente. Dichas lianas se encuentran por la conexidad de $\mathcal{T}(K)$, de hecho lo hacen en la bola B de menor radio tal que $a, b \in B$. Observe que si $a = \infty$, para construir el camino que lo une con $b \in K$, basta tomar la K -liana cuyo extremo inferior es $b \in K$. Esto demuestra lo siguiente:

Lema 8.13. Todo camino maximal S en $\mathcal{T}(K)$ está unívocamente determinado por sus extremos $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$, los cuales satisfacen que $a \neq b$. Es decir existe la correspondencia siguiente:

$$\{\text{caminos maximales en } \mathcal{T}(K)\} \leftrightarrow \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{P}^1(K), a \neq b\}.$$

En §11 daremos una correspondencia entre caminos maximales y elementos idempotentes del álgebra $\mathbb{M}_2(K)$. La siguiente aplicación será útil para ello.

8.2. Aplicación: Cálculo de ramas de idempotentes. Para ilustrar la potencia del árbol de bolas y las transformaciones de Moebius como herramienta en el análisis de ramas de órdenes, estudiaremos la rama $S = S(w)$, para $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. De esta manera recuperaremos el cálculo realizado en §7.3 y daremos una demostración alternativa al Teorema 7.6.

Partamos con un pequeño análisis. Obsérvese que para todo reticulado Λ y toda matriz invertible $A \in \text{GL}_2(K)$ tenemos que $A\mathcal{D}_\Lambda A^{-1} = \mathcal{D}_{A\Lambda}$. Luego, si $A\mathcal{D}_\Lambda A^{-1} = \mathcal{D}_\Lambda$, se tiene que $\mathcal{D}_\Lambda = \mathcal{D}_{A\Lambda}$. Esto último es equivalente a que:

$$(5) \quad A\Lambda = k\Lambda,$$

para cierto $k \in K^*$. Por otro lado, en alguna base apropiada $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} : x, y \in \mathcal{O} \right\}$ y $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{M}_2(\mathcal{O})$, luego $B\Lambda \subseteq \Lambda$ implica que $B \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O})$. Así $\Lambda = B\Lambda$ implica que $B \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O})^*$. Poniendo $B = k^{-1}A$ en la identidad (5) obtenemos que $B\Lambda = \Lambda$, por lo tanto $B \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O})^*$. Se sigue que $A \in K^*\mathcal{D}_\Lambda^*$. De esto se obtiene el siguiente lema.

Lema 8.14. $A\mathcal{D}_\Lambda A^{-1} = \mathcal{D}_\Lambda$ si y solamente si $A \in K^*\mathcal{D}_\Lambda^*$.

Definición 8.15. Una matriz $A \in \mathbb{M}_2(K)^*$ es unidad de $\mathbb{M}_2(\mathcal{O})$ si A y A^{-1} son matrices enteras sobre \mathcal{O} , es decir, si su polinomio minimal $m_A(x)$:

$$m_A(x) = x^2 + ax + b,$$

cumple con $b \in \mathcal{O}^*$, $a \in \mathcal{O}$. Lo anterior se debe a que $A^{-1} = -\frac{A+aI}{b}$.

Corolario 8.16. Si A es unidad entonces $A\mathfrak{D}_\Lambda A^{-1} = \mathfrak{D}_\Lambda$ si y solamente si $A \in \mathfrak{D}_\Lambda$.

Demostración. Primero si $A\mathfrak{D}_\Lambda A^{-1} = \mathfrak{D}_\Lambda$, entonces $A\Lambda = k\Lambda$, en donde sin pérdida de generalidad $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} : x, y \in \mathcal{O} \right\}$ y $k \in K^*$. Tomando el volumen al reticulado obtenemos que $k^2\mathcal{O}^* = \det(A)\mathcal{O}^* = b\mathcal{O}^* = \mathcal{O}^*$. Luego $A\Lambda = \Lambda$, es decir $A \in \mathfrak{D}_\Lambda^*$. En particular $A \in \mathfrak{D}_\Lambda$. Recíprocamente si A es unidad y $A \in \mathfrak{D}_\Lambda$ entonces $A \in \mathfrak{D}_\Lambda^*$, esto pues $A^{-1} = b^{-1}(-A - aI) \in \mathfrak{D}_\Lambda$, de donde tenemos que $A\mathfrak{D}_\Lambda A^{-1} = \mathfrak{D}_\Lambda$. \square

Ahora restrinjamonos al análisis de la rama $S = S(w)$, donde $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K)$. Observe que por lo mencionado en la observación 6.25, se tiene que $S^{[v(2)]} = S(2w - 1)$. Por lo tanto S es una rama que posee el mismo tallo que $S(2w - 1)$ y cuya profundidad es $p(S) = p(S(2w - 1)) - v(2)$. También observe que el polinomio minimal de $A = 2w - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es:

$$m_A(x) = x^2 - 1.$$

Luego $2w - 1$ es una unidad. Por lo dicho anteriormente $A \in \mathfrak{D}_\Lambda$ si y solamente si $A\mathfrak{D}_\Lambda A^{-1} = \mathfrak{D}_\Lambda$. Observe que si τ_A denota la transformación de Moebius correspondiente a A , entonces $\tau_A(z) = -z$. Recuerdese que $A\mathfrak{D}_{\Lambda_B} A^{-1} = \mathfrak{D}_{\Lambda_B}$ si y solamente si $\tau_A.B = B$. Como $\tau_A(\infty) = \infty$, lo anterior es equivalente a que $\tau_A(B) = B$. Luego la rama que define $S(2w - 1)$ en el árbol de Bruhat-Tits de K es la definida por las bolas $B[a, |\pi^r|]$ tales que $B[a, |\pi^r|] = B[-a, |\pi^r|]$. Observe que $B[a, |\pi^r|] = B[-a, |\pi^r|]$ si y solamente si $|2a| \leq |\pi^r|$, es decir $|a| \leq |\pi^{r-v(2)}|$. Luego $S(2w - 1)$ es una rama de profundidad $p = v(2)$ respecto del tallo $\{B[0, |\pi^r|] : r \in \mathbb{Z}\}$, esto se puede visualizar en la Figura 2:

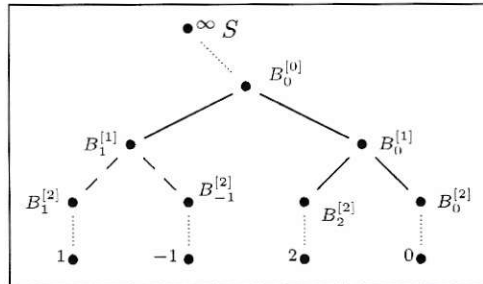


FIGURA 2. En la imagen $K = \mathbb{Q}_2$ y $B_a^{[t]} = B[a, |\pi^t|]$. Los vértices unidos por líneas continuas son los que pertenecen a $S(2w - 1)$. La profundidad de dicha rama es $v_K(2)$, que en este caso es 1.

Por ende S es un rama de profundidad nula, más aún coincide con $T(2w - 1)$. Usando la correspondencia entre órdenes y bolas obtenemos que S es la rama cuyos elementos son los órdenes del tipo:

$$\mathfrak{D}_r = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^r \mathcal{O} \\ \pi^{-r} \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, r \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, como todo elemento idempotente es conjugado a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos el siguiente lema.

Lema 8.17. Cada elemento idempotente $w \in \mathcal{A}$ define una rama $S(w) \subseteq \mathcal{T}(K)$ que es un camino maximal dentro del árbol $\mathcal{T}(K)$. Es decir, $S(w)$ es una rama de profundidad nula y con infinitos vértices en dos direcciones.

Ahora tomemos un cuaternión puro $q \in \mathcal{A}$ tal que $q^2 = \beta^2$, donde $\beta \in \mathcal{O}_K$. Entonces el cuaternión $x = \frac{q}{\beta}$ cumple con $x^2 = 1$. Luego, como $x \neq 1, -1$, se tiene que en alguna base $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto la profundidad de la rama $S = S(x)$ es $p(S) = v(2)$. Pero como $S(x)^{[v(\beta)]} = S(q)$, se tiene que $p(S(q)) = v(2\beta)$. Esto prueba el siguiente lema.

Teorema 8.18. Sea $\mathcal{A} = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)$ álgebra de cuaterniones tal que $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$. Considere un cuaternión puro $i \in \mathcal{A}$ que cumple con $i^2 = \alpha$. Entonces si $\alpha = \beta^2$, para $\beta \in \mathcal{O}_K$, tenemos que la profundidad p de la rama $S = S_K(i)$ es $p = v_K(2\beta)$ y el tallo de S es un camino maximal.

9. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA PRINCIPAL

Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(K)$ el álgebra de matrices, que identificaremos con el álgebra de cuaterniones descompuesta. En todo lo que sigue supondremos que $\text{car}(K) \neq 2$.

El problema central de esta tesis es describir la rama asociada a un par de cuaterniones puros no nilpotentes, es decir, describir $S(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{T}(K)$, para $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$, donde i, j son cuaterniones puros tales que $i^2, j^2 \neq 0$. Observe que, por lo mencionado en el ejemplo 6.16, $S(\mathfrak{H}) = S(i) \cap S(j)$. Luego el problema anterior se traduce en describir las ramas $S(i)$ y $S(j)$, para luego determinar su intersección.

Partamos por encontrar condiciones sobre i, j necesarias y suficientes para que $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$ sea un orden en $\mathbb{M}_2(K)$. Observe que si i, j son cuaterniones puros no nilpotentes entonces $\alpha = i^2 = -N(i) \in K^*$ y $\beta = j^2 = -N(j) \in K^*$. Se define el producto simetrizado λ entre dos cuaterniones puros por $\lambda = \frac{ij+ji}{2}$. Observe que $\bar{\lambda} = \frac{(-j)(-i)+(-i)(-j)}{2} = \lambda$, donde $\bar{(\cdot)}$ es la conjugación en $\mathbb{M}_2(K)$ definida en 3.4. Por lo tanto $\lambda \in K$. Ahora bien, si \mathfrak{H} es un orden en $\mathbb{M}_2(K)$ entonces \mathfrak{H} es un \mathcal{O}_K -módulo finitamente generado. En particular, todos los elementos de \mathfrak{H} son enteros sobre \mathcal{O}_K . Por otro lado, como $i, j \in \mathfrak{H}$ tenemos que $i^2, j^2, ij + ji \in \mathfrak{H}$. Luego $i^2, j^2, ij + ji$ son elementos enteros sobre \mathcal{O}_K . Concluimos que $\alpha, \beta, 2\lambda \in \mathcal{O}_K$. Recíprocamente si $\alpha, \beta, 2\lambda \in \mathcal{O}_K$ entonces el anillo generado $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$ satisface que $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K + i\mathcal{O}_K + j\mathcal{O}_K + ij\mathcal{O}_K$, pues este último \mathcal{O}_K -módulo es cerrado bajo productos. Por lo tanto \mathfrak{H} es un \mathcal{O}_K -módulo finitamente generado. Por lo mencionado en el Lema 5.3 tenemos que \mathfrak{H} es un \mathcal{O}_K -reticulado. Debido a que \mathfrak{H} es un subanillo de $\mathbb{M}_2(K)$ con $1 \in \mathfrak{H}$ tenemos que \mathfrak{H} es un orden en $\mathbb{M}_2(K)$. Esto demuestra el siguiente lema.

Lema 9.1. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ cuaterniones puros tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Entonces el \mathcal{O}_K -módulo $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i, j]$ es un orden en $\mathbb{M}_2(K)$ si y solamente si $\alpha, \beta, 2\lambda \in \mathcal{O}_K$.

Observe que si tomamos dos cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$ con $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$ y $\lambda \in K$ cualesquiera, entonces siempre se tiene que los anillos $\mathfrak{H}_1 = \mathcal{O}_K[i]$ y $\mathfrak{H}_2 = \mathcal{O}_K[j]$ son órdenes en $\mathbb{M}_2(K)$. Luego están definidas las ramas $S_K(i)$ y $S_K(j)$. Observe que si $2\lambda \notin \mathcal{O}_K$ se tiene que $S_K(i, j) = \emptyset$. Esto pues, si $i, j \in \mathfrak{D}$ entonces $ij + ji = 2\lambda \in \mathfrak{D}$. Por lo tanto $2\lambda \in K$ es entero sobre \mathcal{O}_K , y entonces $2\lambda \in \mathcal{O}_K$.

Definimos los siguientes conceptos con el fin de simplificar el problema anteriormente planteado.

Definición 9.2. Dadas dos ramas S, S' se define la distancia entre estas como $d(S, S') = \min \{d(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) : \mathfrak{D}_1 \in S, \mathfrak{D}_2 \in S'\}$.

Recordemos que, según lo mencionado en §6.1, toda rama de un orden $S \subseteq \mathcal{T}(K)$ es el engrosado de un camino, el cual puede ser finito, un rayo o maximal, salvo si $S = S(a + \eta)$ donde $\eta \in \mathbb{M}_2(K)$ es un cuaternión nilpotente y por ende puro, mientras que $a \in \mathcal{O}_K$ es un escalar. Como nuestras ramas $S(i)$ y $S(j)$ están asociadas a cuaterniones puros cuyo cuadrado no es nulo, i, j no pueden ser nilpotentes y por ende los tallos de dichas ramas están definidos.

Definición 9.3. Sean S, S' dos ramas que poseen tallos T, T' respectivamente. Determinar la posición relativa de las ramas S, S' significa encontrar la distancia a la que se encuentran los tallos T, T' de las ramas respectivas y determinar cuales son los vértices en cada tallo en los que se alcanza dicha distancia. Cuando la distancia es nula, determinar la posición relativa se traduce en encontrar el largo de la rama de intersección de los tallos T, T' y determinar como dicha intersección se incluye dentro de T y T' . Esto se muestra en las Figuras 3 y 4.

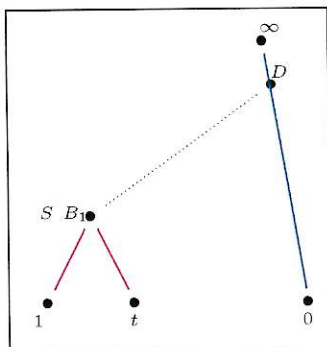


FIGURA 3. Posición relativa de los caminos que unen los puntos 1 con t y 0 con ∞ . Dichos caminos son destacados con los colores rojo y azul, respectivamente. La distancia en cuestión es la que se tiene entre la bola B_1 y D . Esta se grafica con línea punteada.

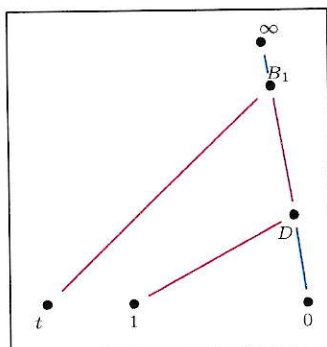


FIGURA 4. Posición relativa de los caminos que unen los puntos 1 con t y 0 con ∞ . Dichos caminos son destacados con los colores rojo y azul, respectivamente. La línea de color púrpura representa el segmento de intersección entre dichas ramas.

Luego si determinamos la posición relativa entre las ramas $S(i)$, $S(j)$ y calculamos los grosores respectivos, habremos determinado $S = S(\xi)$. Para este último efecto, en [A3-Sa] y [Sa] existen fórmulas que nos dicen cual es el grosor de $S(i)$, en términos del cuaterión puro i . Dichas fórmulas se demostrarán, mediante un método distinto al de la referencia, en §14.

Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ valores fijos. Una pregunta importante es determinar para qué valores de $\lambda \in \mathcal{O}_K$ existen pares de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes (l.i.) tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Esto se debe a que sólo en caso de que existan dichos cuaterniones tiene sentido preguntarse por la rama correspondiente $S(\mathfrak{H}) = S(i, j)$. Nos restringimos al caso en que i, j son linealmente independientes, ya que si $i = yj$, para $y \in K^*$, entonces por lo mencionado en la observación 6.25 se tiene que si $y \in \mathcal{O}_K$ entonces $S(\mathfrak{H}) = S(i)$ y en caso de que $y^{-1} \in \mathcal{O}_K$ se tiene que $S(\mathfrak{H}) = S(j)$. Lo anterior da una solución fácil al problema central de esta tesis cuando los cuaterniones i, j son linealmente dependientes, por lo que excluiremos dicho caso. Lo mencionado anteriormente motiva a determinar, para $\alpha, \beta \in K^*$, el conjunto:

$$\Lambda_{(\alpha, \beta)} := \left\{ \lambda \in K : \exists i, j \in \mathbb{M}_2(K) \text{ cuat. puros l.i. : } i^2 = \alpha, j^2 = \beta, \frac{ij + ji}{2} = \lambda \right\}.$$

Para estudiar dicho conjunto $\Lambda_{(\alpha, \beta)}$ definimos la siguiente K -álgebra \mathcal{A}_λ vía generadores y relaciones:

$$(6) \quad \mathcal{A}_\lambda := \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle,$$

y estudiaremos cuando existe un homomorfismo de K -álgebras:

$$(7) \quad \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathbb{M}_2(K),$$

con $\dim_K(\text{Im}(\mathcal{A}_\lambda)) \geq 3$. Para exhibir la equivalencia entre el estudio del conjunto $\Lambda_{(\alpha, \beta)}$ y los homomorfismos anteriores, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 9.4. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ valores fijos y supongamos que \mathcal{A}_λ es una K -álgebra simple. Entonces existen pares de cuaterniones puros i, j linealmente independientes tales $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$ si y solamente si $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Demostración. En el Teorema 10.5 se muestra que $\dim_K \mathcal{A}_\lambda = 4$. En lo que sigue de demostración haremos uso de este hecho. En efecto, si existen cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda$, entonces existe un homomorfismo de K -álgebras $\phi : \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ no nulo. Luego, si \mathcal{A}_λ es un álgebra simple, se tiene que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$. Es decir ϕ es inyectivo. Como $\dim_K(\mathcal{A}_\lambda) = \dim_K(\mathbb{M}_2(K)) = 4$, se tiene ϕ es isomorfismo. Por otro lado, si ϕ es isomorfismo, entonces las imágenes de i, j bajo ϕ son dos cuaterniones que satisfacen las relaciones pedidas. La única objeción posible es que dichos cuaterniones pueden no ser puros. Pero si $\phi(i) = a_0 + q$, con $a_0 \in K$ y q cuaternión puro, entonces como $\alpha = \phi(i^2) = (a_0 + q)^2 = a_0^2 + 2a_0q + q^2$, se tiene que $2a_0q = 0$. Si $q = 0$, entonces $\phi(i) = \phi(a_0)$ y por la inyectividad de ϕ llegamos a que $i = a_0$ es un elemento central y por ende $\lambda = ij + ji = 2ij$. Dividiendo por a_0 la igualdad anterior obtenemos que $j = \frac{\lambda}{2a_0}$ y por lo tanto nuestra álgebra $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$ es conmutativa, lo que claramente es contradictorio. Así, $\phi(i)$ es un cuaternión puro. Lo mismo ocurre con $\phi(j)$. Observe que $\phi(i), \phi(j)$ son elementos linealmente independientes. Esto se debe a que si \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones, entonces $\dim_K(\mathcal{A}_\lambda) = 4$. Por ende $\{1, i, j, ij\}$ es base de \mathcal{A}_λ . Luego sus imágenes bajo ϕ deben ser linealmente independientes. En particular, lo son las imágenes de $\{i, j\}$. \square

Por el razonamiento anterior, una manera de determinar el conjunto $\Lambda_{(\alpha, \beta)}$ es encontrar condiciones bajo las cuales \mathcal{A}_λ sea un álgebra de cuaterniones y en dicho caso encontrar condiciones sobre α, β, λ necesarias y suficientes para que $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$. Observe que cuando el álgebra \mathcal{A}_λ no es simple el problema puede ser

más complicado, ya que ϕ no es necesariamente un isomorfismo. Ambos casos se estudiarán en §10 y §13.

Definición 9.5. Denotamos a la K -álgebra \mathcal{A}_λ definida en (6) por $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda$.

Ejemplo 9.6. Es un hecho desmotrado en [[O], §63] que la única álgebra de división sobre el cuerpo local K , módulo isomorfía, es $\left(\frac{\pi, \Delta}{K}\right)$, donde π es un parámetro uniformizante y Δ un unidad no ramificada. Por otro lado, observe que $\left(\frac{\pi, \pi + \Delta}{K}\right)_{-\pi} \cong \langle i, k : i^2 = \pi, k^2 = \Delta, ik + ki = 0 \rangle = \left(\frac{\pi, \Delta}{K}\right)$, con $k = i + j$. Luego $\left(\frac{\pi, \pi + \Delta}{K}\right)_{-\pi}$ es un álgebra de cuaterniones de división. Por lo tanto no existen en $\mathbb{M}_2(K)$ cuaterniones i, j puros tales que $i^2 = \pi$, $j^2 = \pi + \Delta$ y $\frac{ji + ij}{2} = -\pi$.

10. SIMPLICIDAD DE LAS ÁLGEBRAS \mathcal{A}_λ

En esta sección estudiaremos la simplicidad de las álgebras K -álgebras \mathcal{A}_λ definidas en §9 por generadores y relaciones como:

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle.$$

En todo lo que respecta a ésta sección K es un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$. Esto pues es éste el contexto en el cual el estudio de las álgebras \mathcal{A}_λ nos es relevante. Por otro, lado haciendo las definiciones análogas, uno puede concluir todo lo que se dirá en esta sección para cuerpos arbitrarios de característica distinta de 2.

Partamos por estudiar bajo que condiciones las álgebras \mathcal{A}_λ son álgebras de cuaterniones, es decir son K -álgebras centrales simples de dimensión 4. Para ello, analizaremos bajo que condiciones \mathcal{A}_λ tiene una base ortogonal respecto al producto interno $B(x, y) = \frac{x\bar{y} + y\bar{x}}{2}$ definido en §3. Considere $i' = i \in \mathcal{A}_\lambda$ y $j' = i + sj \in \mathcal{A}_\lambda$ tal que:

$$B(i, j') = \frac{i'j' + j'i'}{2} = 0$$

y

$$N(j') = B(j', j') \neq 0.$$

Si reemplazamos j' en la primera ecuación obtenemos que $s = \frac{-\alpha}{\lambda}$. Observe que si $\lambda = 0$ entonces \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones, con base ortogonal $\{i, j\}$ y no hay que hacer este análisis. Ahora bien, nos falta corroborar que j' cumpla con la segunda condición. Observe que $N(j') = -j'^2 = \alpha \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\lambda^2} \right)$. Denotamos a $-N(j')$ por β' . Entonces tenemos que $\beta' \neq 0$ si y solamente si $\alpha\beta \neq \lambda^2$. Como el cambio de variable anterior es lineal, es fácil ver que i' y j' generan \mathcal{A}_λ . Es decir, se tiene que:

$$(8) \quad \mathcal{A}_\lambda = \langle i', j' : i'^2 = \alpha, j'^2 = \beta', i'j' + j'i' = 0 \rangle,$$

donde $\beta' \neq 0$ para $\alpha\beta \neq \lambda^2$. Observe que la K -álgebra descrita en el miembro derecho de (8) tiene los mismos generadores y cumple con las mismas relaciones que un álgebra de cuaterniones. Luego, por lo mencionado en el Lema 3.5, se tiene que \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones si $\alpha\beta \neq \lambda^2$ y $\lambda \neq 0$. Por otro lado, si $\lambda = 0$ se obtiene inmediatamente que \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones y como $\alpha, \beta \neq 0$, se tiene que $\lambda^2 \neq \alpha\beta$.

Recíprocamente, supongamos que existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{A}_\lambda \rightarrow Q$, donde Q es un álgebra de cuaterniones y $\lambda \neq 0$. Demostremos que se cumple que $\lambda^2 \neq \alpha\beta$. En efecto, observe que $\phi(i) \in Q$ es un cuaternión tal que $\phi(i)^2 = \alpha \in K^*$. Por lo dicho en el Lema 3.2, se tiene que $\phi(i)$ es un cuaternión puro o $\phi(i) \in K^*$. Si $\phi(i) = a_0 \in K^*$ entonces $\phi(i) = \phi(a_0)$, luego $i = a_0 \in K^*$ es un elemento central, por lo que j e i conmutan. Luego $j \in \mathcal{A}_\lambda$ es un elemento central y por ende $\mathcal{A}_\lambda \cong Q$ es conmutativa. Esto es falso, por lo tanto $\phi(i)$ es un cuaternión puro. Ahora bien, por el Lema 3.7, se tiene que existe un cuaternión puro q invertible y ortogonal a

$\phi(i)$. Luego si $x = \phi^{-1}(q) = a_0 + a_1i + a_2j + a_3ij$, entonces $xi + ix = 0$ y $x^2 \in K^*$. De la primera ecuación resulta:

$$0 = 2a_0i + 2a_1\alpha + 2a_2\lambda + 2a_3\lambda i.$$

Por ello $a_0 = -a_3\lambda$ y $a_1\alpha = -a_2\lambda$, donde $\lambda \neq 0$. Por lo tanto $x = -a_3\lambda + a_1i - \frac{a_1\alpha}{\lambda}j + a_3ij$. Usando ahora la segunda ecuación obtenemos que:

$$x^2 = a_3^2\lambda^2 + 2a_3\lambda \left(a_1i - \frac{a_1\alpha}{\lambda}j + a_3ij \right) + a_1^2\alpha + \frac{a_1^2\alpha^2}{\lambda^2}\beta - a_3^2\alpha\beta + 2a_1a_3 - 2\alpha a_1^2.$$

Como $x^2 \in K^*$ obtenemos que $a_3 = 0$ o $a_1i - \frac{a_1\alpha}{\lambda}j + a_3ij = 0$. Observe que, por hipótesis, \mathcal{A}_λ isomorfa a un álgebra de cuaterniones, luego $\dim_K(\mathcal{A}_\lambda) = 4$. Es sencillo demostrar, a partir de la definición de \mathcal{A}_λ , que el conjunto $\{1, i, j, ij\}$ genera \mathcal{A}_λ . Por ende el conjunto $\{1, i, j, ij\}$ es base de \mathcal{A}_λ . Luego si $a_1i - \frac{a_1\alpha}{\lambda}j + a_3ij = 0$ tenemos que $a_1 = a_3 = 0$. Por lo tanto $x = 0$, lo que nos lleva a una contradicción. Luego $a_3 = 0$. Así llegamos a que se debe cumplir que $\frac{a_1^2\alpha^2\beta}{\lambda^2} - a_1^2\alpha \neq 0$, es decir $\lambda^2 \neq \alpha\beta$. Esto nos permite deducir el siguiente teorema.

Teorema 10.1. La K -álgebra:

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle,$$

definida para $\alpha, \beta \in K^*$ y $\lambda \in K$, es isomorfa a un álgebra de cuaterniones, es decir es una K -álgebra central simple de dimensión 4, si y solamente si $\lambda^2 \neq \alpha\beta$. De hecho, si $\lambda^2 \neq \alpha\beta$, se tiene que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda \cong \left(\frac{\alpha, \frac{\alpha\beta - \lambda^2}{\lambda^2}}{K} \right)$.

Corolario 10.2. Si $\lambda^2 \neq \alpha\beta$ entonces $\dim_K \mathcal{A}_\lambda = 4$.

En lo que resta de la sección trabajaremos sobre las álgebras \mathcal{A}_λ , definida para $\alpha\beta = \lambda^2$.

Lema 10.3. Considere la K -álgebra $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda$, para $\alpha = c^2a$ y $\beta = d^2b$ con $c, d \in K^*$, entonces si $\mu = \frac{\lambda}{cd}$ se tiene que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda \cong \left(\frac{a, b}{K} \right)_\mu$.

Demostración. Considere

$$\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle$$

y

$$\left(\frac{a, b}{K} \right)_\mu = \langle i, j : i^2 = a, j^2 = b, ij + ji = 2\mu \rangle.$$

Definimos el homomorfismo $\phi : \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda \rightarrow \left(\frac{a, b}{K} \right)_\mu$ vía $\phi(i) = ci, \phi(j) = dj$. Observe que ϕ está bien definido pues $\phi(i)^2 = \alpha, \phi(j)^2 = \beta$ y $\phi(i)\phi(j) + \phi(j)\phi(i) = 2cd\mu = 2\lambda$. Además ϕ tiene inversa φ definida por $\varphi(i) = \frac{i}{c}, \varphi(j) = \frac{j}{d}$. \square

Corolario 10.4. La clase de isomorfía de la K -álgebra $\left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda$ depende solo de las imágenes de α y β en K^*/K^{*2} , en tanto λ se defina apropiadamente. En particular, podemos suponer que $\alpha, \beta \in \text{SR}$ (ver §4). De forma análoga, la existencia de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ que satisfagan $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ y $ij + ji = 2\lambda$, depende solo de las imágenes de α y β en K^*/K^{*2} , en tanto λ se defina apropiadamente.

Observe que si los parámetros α, β, λ del Lema 10.3 satisfacen que $\alpha\beta = \lambda^2$, entonces dividiendo cada término en la ecuación anterior por c^2d^2 obtenemos que $ab = \mu^2$. Es decir, la condición sobre α, β y λ , para que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda$ no sea un álgebra de cuaterniones, se mantiene al reducir módulo cuadrados.

Tomemos $\alpha, \beta \in \text{SR}$. Entonces si $\alpha\beta = \lambda^2$ se puede suponer que $\alpha = \beta$ y que $\pm\alpha = \lambda$. Por lo tanto nuestras K -álgebras en este caso se reescriben como:

$$\mathcal{A}_\alpha = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \alpha, ij + ji = 2\alpha \rangle,$$

o bien:

$$\mathcal{A}_{-\alpha} = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \alpha, ij + ji = -2\alpha \rangle.$$

En lo que sigue usaremos la siguiente notación para trabajar con nuestras álgebras independientemente del signo de $\frac{\lambda}{\alpha}$:

$$\mathcal{A}_{\pm\alpha} = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \alpha, ij + ji = \pm 2\alpha \rangle = \begin{cases} \mathcal{A}_\alpha & \text{si } \lambda = \alpha \\ \mathcal{A}_{-\alpha} & \text{si } \lambda = -\alpha \end{cases}.$$

En lo que sigue demostraremos que $\dim_K(\mathcal{A}_\lambda) = 4$, incluso en el caso en que $\lambda^2 = \alpha\beta$. En principio, dado que $\{1, i, j, ij\}$ genera \mathcal{A}_λ , tenemos que $\dim_K(\mathcal{A}_\lambda) \leq 4$. En efecto, si $\alpha \neq 1$, considere la representación $\varphi : \mathcal{A}_{\pm\alpha} \rightarrow \mathbb{M}_2(K(\sqrt{\alpha}))$, definida por $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}$, $\varphi(j) = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 1 \\ 0 & -\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$, $\varphi(i) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}$, dependiendo del signo de $\frac{\lambda}{\alpha}$. Observe que φ está bien definida pues $\varphi(i)\varphi(j) + \varphi(j)\varphi(i) = \begin{pmatrix} \pm 2\alpha & 0 \\ 0 & \pm 2\alpha \end{pmatrix}$ y $\varphi(j)^2 = \varphi(i)^2 = \alpha \text{Id}$. Entonces:

$$\varphi(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{\alpha} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

es una K -álgebra de dimensión 4. Por ende tenemos que $\mathcal{A}_{\pm\alpha}/\text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$. Como sabemos que $\dim(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) \leq 4$, concluimos que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Por lo tanto la representación anterior es fiel y $\dim_K(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = 4$.

Por otro lado si $\alpha = 1$, podemos considerar la representación:

$$\varphi : \mathcal{A}_{\pm\alpha} \rightarrow \mathbb{M}_2(K \times K),$$

definida por $\varphi(1) = \begin{pmatrix} (1, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 1) \end{pmatrix} = \text{Id}$, $\varphi(j) = \begin{pmatrix} (1, -1) & (1, 1) \\ (0, 0) & (-1, 1) \end{pmatrix}$, $\varphi(i) = \begin{pmatrix} \pm(1, -1) & (0, 0) \\ (0, 0) & \pm(-1, 1) \end{pmatrix}$, dependiendo del signo de $\frac{\lambda}{\alpha}$. Observe que φ está bien definida pues $\varphi(i)\varphi(j) + \varphi(j)\varphi(i) = \begin{pmatrix} \pm 2(1, 1) & 0 \\ 0 & \pm 2(1, 1) \end{pmatrix}$ y $\varphi(j)^2 = \varphi(i)^2 = \text{Id}$. Entonces la imagen $\varphi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$ corresponde a la K -álgebra:

$$\left\langle \begin{pmatrix} (1, 1) & 0 \\ 0 & (1, 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm(1, -1) & 0 \\ 0 & \mp(-1, 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (1, 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm(1, -1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

la cual tiene dimensión 4 sobre K . Por ende tenemos que $\mathcal{A}_{\pm\alpha}/\text{Ker}(\varphi) \cong \varphi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$. Como sabemos que $\dim(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) \leq 4$, concluimos que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Por lo tanto la representación anterior es fiel y $\dim_K(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = 4$. Observe, por 10.1, tenemos $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ no es un álgebra de cuaterniones. Todo lo dicho en esta sección nos permite concluir lo siguiente:

Teorema 10.5. Considere la K -álgebra:

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle,$$

donde K es un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$, entonces:

- i.- Si $\alpha\beta = \lambda^2$ entonces \mathcal{A}_λ es una K -álgebra de dimensión 4 sobre K , que no es isomorfa a un álgebra de cuaterniones. Si $\alpha \notin K^{*2}$ entonces \mathcal{A}_λ se puede incrustar en $\mathbb{M}_2(K(\sqrt{\alpha}))$. En caso contrario, es decir si $\alpha \in K^{*2}$, entonces \mathcal{A}_λ se puede incrustar en $\mathbb{M}_2(K \times K)$.
- ii.- Si $\alpha\beta \neq \lambda^2$ entonces \mathcal{A}_λ es una K -álgebra central simple de dimensión 4, es decir un álgebra de cuaterniones.

Sabemos que las K -álgebras \mathcal{A}_λ definidas en §9 no son simples cuando $\alpha\beta = \lambda^2$. A pesar de que en dicho caso, el estudio de \mathcal{A}_λ carece de importancia para efectos de esta tesis, en lo que resta de esta sección estudiaremos que tan lejos están estas álgebras de ser simples. Para esto haremos uso de la representación regular mostrada en la Definición 7.2. Usaremos también otras herramientas de la teoría de representaciones las cuales aparecen en [M2] y en [S]. En todo lo que sigue haremos uso del Lema 10.3, que nos permite, en este caso, restringirnos a analizar las álgebras $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_{\pm\alpha}$, para $\alpha = \beta$, $\lambda = \pm\alpha$. Asumiremos también que $\text{car}(K) \neq 2$.

Definición 10.6. Sea D una K -álgebra de división y $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{M}_n(D)$ una K -representación de \mathcal{A} . Decimos que ϕ es una representación irreducible, si los únicos K -subespacios vectoriales $W \subset D^n$ tales que $\phi(\mathcal{A})W \subset W$ son $W = \{0\}$ y $W = D^n$.

Supongamos que $\alpha \notin K^{*2}$, entonces existe una K -representación ϕ conmutativa de grado 2 de $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$, definida por $\phi : \mathcal{A}_{\pm\alpha} \rightarrow K(\sqrt{\alpha})$, donde $\phi(i) = \sqrt{\alpha}$, $\phi(j) = \pm\sqrt{\alpha}$ y $\phi(1) = 1$. Observe que ϕ está bien definido pues $\phi(ij + ji) = \pm 2\alpha = \phi(\pm 2\alpha)$ y $\phi(i)^2 = \phi(j)^2 = \alpha$. Además se cumple que $\phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = K(\sqrt{\alpha})$. Sea $W \subset K(\sqrt{\alpha})$ un K -subespacio tal que $\phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})W \subset W$. Si existe $w \in W$ tal que $w \neq 0$ entonces para todo $r \in K(\sqrt{\alpha})$ tenemos que $rw^{-1} \in \phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$ y por ende $r \in W$. Por lo tanto $W = K(\sqrt{\alpha})$. Concluimos que ϕ es una K -representación irreducible de grado 2 del álgebra $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$.

Por otro lado si $\alpha \in K^{*2}$, entonces podemos reducirnos al caso $\alpha = 1$, por lo mencionado en 10.3. Observe que, en este caso, existe una K -representación conmutativa ϕ de grado 2 de $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$, definida por $\phi : \mathcal{A}_{\pm\alpha} \rightarrow K \times K$, donde $\phi(i) = (1, -1)$, $\phi(j) = \pm(1, -1)$ y $\phi(1) = (1, 1)$. Observe además que ϕ está bien definida pues $\phi(ij + ji) = \pm 2(1, 1) = \phi(\pm 2\alpha)$ y $\phi(i)^2 = \phi(j)^2 = 1$. Claramente se tiene que $\phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = K \times K$. Luego el $\phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$ -módulo $K \times K$ se descompone como suma de dos $\phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$ -módulos, a saber $M_1 = K \times \{0\}$ con la multiplicación de $\phi(\mathcal{A}_{\pm\alpha})$ definida por $(a, b)(c, 0) = (ac, 0)$ y $M_2 = \{0\} \times K$ con multiplicación $(a, b)(0, d) = (0, bd)$. Es un hecho de la teoría de representaciones (ver [[D], §18.1]) que los módulos M_1 y M_2 determinan dos representaciones distintas ϕ_1, ϕ_2 de $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ tales que $\phi = \phi_1 \oplus \phi_2$ y $\phi_1(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = K \times \{0\}$, $\phi_2(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = \{0\} \times K$.

Probemos que las representaciones anteriores determinan todas representaciones irreducibles de $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$. Para esto haremos uso de un submódulo de $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$.

Definición 10.7. Sea \mathcal{A} una K -álgebra. Se define el radical $R(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} como:

$$R(\mathcal{A}) = \bigcap_{W \text{ irred}} \text{Ann}_{\mathcal{A}} W.$$

Observe que toda representación irreducible de \mathcal{A} se factoriza a una representación irreducible de $\mathcal{A}/R(\mathcal{A})$, pues la imagen del radical, bajo la representación, actúa trivialmente en el módulo correspondiente.

Se dice que una K -álgebra \mathcal{A} de dimensión finita es semi-simple si \mathcal{A} es suma directa de ideales izquierdos irreducibles. Un hecho importante es que toda álgebra semi-simple \mathcal{A} cumple con $\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$, donde D_i es un álgebra de división sobre K . El hecho anterior es el Teorema de Wedderburn. Otro hecho conocido es que las proyecciones $\pi_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$ son todas las representaciones irreducibles de \mathcal{A} . Con lo anterior en mente, enunciemos un teorema que nos permitirá trabajar con las álgebras antes mencionadas.

Proposición 10.8. (ver [M2, §4]) Para cualquier K -álgebra \mathcal{A} se tiene que $\mathcal{A}/R(\mathcal{A})$ es semi-simple.

Tenemos que si $\alpha \notin K^{*2}$ entonces existe una representación irreducible $\bar{\phi} : \mathcal{A}_{\pm\alpha}/R(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) \rightarrow K(\sqrt{\alpha})$. Por lo tanto, si $\alpha \notin K^{*2}$, entonces $\mathcal{A}_{\pm\alpha}/R(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) \cong K(\sqrt{\alpha}) \oplus W$, para cierto $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ -módulo semi-simple W .

Análogamente, si $\alpha \in K^{*2}$ entonces tenemos dos representaciones distintas $\bar{\phi} : \mathcal{A}_{\pm\alpha}/R(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) \rightarrow K$. Por lo tanto, si $\alpha \in K^{*2}$, entonces $\mathcal{A}_{\pm\alpha}/R(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) \cong K \oplus K \oplus W$, para cierto $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ -módulo semi-simple W . En particular, en ambos casos, $\dim_K(R(\mathcal{A}_{\pm\alpha})) \in \{0, 1, 2\}$. Analicemos dicho radical. Para esto, utilizaremos el siguiente teorema.

Proposición 10.9. (ver [M2, §4]) Sea \mathcal{A} una K -álgebra de dimensión finita. Si $I \subset \mathcal{A}$ es un ideal izquierdo nilpotente, es decir si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = \{0\}$, entonces $I \subset R(\mathcal{A})$.

Analicemos el ideal izquierdo $I = \mathcal{A}_\alpha(i-j)$ generado por el idempotente $i-j$, cuando $\lambda = \alpha$. Observe que I está generado sobre K por los elementos $i-j$, $i(i-j) = \alpha - ij$, $j(i-j) = \alpha - ij$ e $ij(i-j) = \alpha i - \alpha j$. Por lo tanto $\dim_K I = 2$. Además, dados dos elementos cualquiera $x = a_0(i-j) + a_1(\alpha - ij)$ e $y = a_3(i-j) + a_4(\alpha - ij)$ se tiene que $xy = a_0a_3(i-j)^2 + a_1a_3(\alpha - ij)(i-j) + a_0a_4(i-j)(\alpha - ij) + a_1a_4(\alpha - ij)^2 = 0$, pues cada sumando es nulo. Luego $I^2 = \{0\}$ y por ende $I \subset R(\mathcal{A}_\alpha)$. Por otro lado si $\lambda = -\alpha$, consideremos el ideal izquierdo $I = \mathcal{A}_{-\alpha}(i+j)$. Observe que I está generado sobre K por los elementos $i+j$, $i(i+j) = \alpha + ij$, $j(i+j) = -\alpha - ij$ e $ij(i+j) = -\alpha i - \alpha j$. Por lo tanto $\dim_K I = 2$. Además, dados dos elementos cualquiera $x = a_0(i+j) + a_1(\alpha + ij)$ e $y = a_3(i+j) + a_4(\alpha + ij)$ se tiene que $xy = a_0a_3(i+j)^2 + a_1a_3(\alpha + ij)(i+j) + a_0a_4(i+j)(\alpha + ij) + a_1a_4(\alpha + ij)^2 = 0$, pues cada sumando es nulo. Luego $I^2 = \{0\}$ y por ende $I \subset R(\mathcal{A}_{-\alpha})$. En cualquiera de los dos casos, tenemos que $\dim_K R(\mathcal{A}_{\pm\alpha}) = 2$. Luego $W = \{0\}$. Por lo tanto $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ tiene una única representación irreducible, si $\alpha \notin K^{*2}$. Si $\alpha \in K^{*2}$, $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ tiene dos representaciones irreducibles distintas. En particular tenemos que el mayor cociente semi-simple de $\mathcal{A}_{\pm\alpha}$ corresponde a lo que se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 10.10. Considere K cuerpo no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$ y sea $\mathcal{A}_\alpha = \left(\frac{\alpha, \alpha}{K}\right)_\alpha = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \alpha, ij + ji = 2\alpha \rangle$ una K -álgebra, donde $R(\mathcal{A}_\alpha)$ es su radical. Entonces:

- i.- Si $\alpha \in K^{*2}$ se tiene que $\mathcal{A}_\alpha/R(\mathcal{A}_\alpha) \cong \mathcal{A}_{-\alpha}/R(\mathcal{A}_{-\alpha}) \cong K \times K$.
- ii.- Si $\alpha \notin K^{*2}$ se tiene que $\mathcal{A}_\alpha/R(\mathcal{A}_\alpha) \cong \mathcal{A}_{-\alpha}/R(\mathcal{A}_{-\alpha}) \cong K(\sqrt{\alpha})$.

Si reescribimos el corolario anterior, teniendo en cuenta el isomorfismo mostrado en el Lema 10.3, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 10.11. Considere K cuerpo no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$. Considere además $\alpha, \beta, \lambda \in K$ tales que $\lambda^2 = \alpha\beta$. Sea

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle,$$

una K -álgebra, donde $R(\mathcal{A}_\lambda)$ es su radical. Entonces si $\alpha \in K^{*2}$ se tiene que $\mathcal{A}_\lambda/R(\mathcal{A}_\lambda) \cong K \times K$. Por otro lado, si $\alpha \notin K^{*2}$ se tiene que $\mathcal{A}_\lambda/R(\mathcal{A}_\lambda) \cong K(\sqrt{\alpha})$.

11. CAMINOS MAXIMALES, ELEMENTOS IDEMPOTENTES Y FORMAS
CUADRÁTICAS

En esta sección analizaremos la estrecha relación entre los elementos idempotentes del álgebra $\mathbb{M}_2(K)$ y ciertas ramas del árbol de Bruhat-Tits constituido sobre $\mathbb{M}_2(K)$, donde K es un cuerpo local no arquimediano con parámetro uniformizante $\pi = \pi_K$, valuación $v_K : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ y anillo de enteros $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$. Además estudiaremos la relación entre, los caminos definidos por un par de cuaterniones puros cuyo cuadrado es 1, y su producto simetrizado.

Sea $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(K)$. Tomemos un elemento idempotente no trivial $w \in \mathcal{A}$. Es decir, consideremos $w \in \mathcal{A}$ tal que $w^2 = w$ y $w \neq 0, 1$. Sea $w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces en alguna base $w = w_0$. Luego, por lo mencionado en §8.2, se tiene que:

$$S(w_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^i \mathcal{O} \\ \pi^{-i} \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} : i \in \mathbb{Z} \right\},$$

que corresponde a un camino maximal en el árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(K)$. A este camino lo denotaremos por S_0 . Observe que w_0 y $1 - w_0$ son los únicos idempotentes que definen dicho camino. En efecto si $S(\mu_0) = S_0$, entonces $\mu_0 \in \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^i \mathcal{O} \\ \pi^{-i} \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Tomando la intersección entre los órdenes anteriores obtenemos que $\mu_0 \in \begin{pmatrix} \mathcal{O} & 0 \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix}$. Luego $\mu_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Usando la relación de idempotencia obtenemos que $a^2 = a$ y $b^2 = b$. Como $\mu_0 \neq 0, 1$, concluimos que $\mu_0 = w_0$ o $\mu_0 = 1 - w_0$.

Esto determina una función inyectiva:

$$\{(w, 1 - w) : w \in \mathbb{M}_2(K) \text{ idempotente}\} \rightarrow \{\text{caminos maximales en } \mathcal{T}(K)\}.$$

Ahora nos hacemos la pregunta recíproca. Si tomamos un camino maximal en $\mathcal{T}(K)$ digamos S , ¿Existe un idempotente $w \in \mathcal{A}$ tal que $S = S(w)$? Esto se responde en el siguiente lema. En todo lo que sigue haremos uso de la correspondencia mencionada en §8.1 entre caminos maximales y pares de elementos distintos en $\mathbb{P}^1(K)$.

Lema 11.1. Sea S un camino maximal que tiene por extremos $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$, como se vió en el Lema 8.13. Entonces, si $a \neq b$:

$$w = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a & ab \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

es un elemento idempotente de \mathcal{A} cumple que $S = S(w)$. Si $a = \infty$ entonces $w = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a & ab \\ -1 & b \end{pmatrix}$ tiene la propiedad análoga.

Demostración. Sea S camino maximal con extremos $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$, entonces la transformación de Moclbius:

$$(9) \quad \tau(z) = \frac{z-b}{z-a}$$

envía S a S_0 , donde S_0 es el camino maximal que une a ∞ con 0 . Esto siempre que $a, b \neq \infty$. Si $a = \infty$ entonces $\tau(z) = z - b$ es una transformación de Moebius que tiene por imagen se S a S_0 . Análogamente si $b = \infty$ entonces $\tau(z) = z - a$ es una transformación que cumple con lo requerido. Por el isomorfismo entre grafos con acción de grupo, mencionado en 8.3 y 8.6, tenemos que:

$$S = \{A^{-1}\mathfrak{D}_i A : \mathfrak{D}_i \in S_0\},$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ es la matriz correspondiente a la transformación de Moebius (9).

Ahora bien como $S_0 = S(\mu)$, donde $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$S = A^{-1}S(\mu)A = S(A^{-1}\mu A).$$

Luego $w = A^{-1}\mu A = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a & ab \\ -1 & b \end{pmatrix}$ es un elemento idempotente que cumple lo pedido. Observe que si $a = \infty$ entonces vía el razonamiento anterior, reemplazando $\frac{z-b}{z-a}$ por $z - b$, obtenemos que $w = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} -a & ab \\ -1 & b \end{pmatrix}$. \square

Observación 11.2. Si en el lema anterior tomamos $\tau(z) = \frac{z-a}{z-b}$, también tenemos que τ lleva S en S_0 , pero entonces el elemento idempotente que determina el camino S es:

$$w' = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} -b & ab \\ -1 & a \end{pmatrix} = -w + 1.$$

Lo mismo sucede si consideramos el elemento idempotente $1 - w_0$, en vez de w_0 , para definir el camino S_0 . Finalmente, si tomamos la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{z-a}{z-b}$ y el elemento idempotente $1 - w_0$, obtenemos el mismo idempotente que en el teorema anterior.

Observe que si tomamos un elemento idempotente cualquiera $w \in \mathcal{A}$ entonces por lo dicho al inicio, en alguna base $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego el camino que determina es S_0 . Así la transformación de Moebius que se toma en la demostración anterior es $\tau(z) = z$. Por ello el $w' \in \mathcal{A}$ determinado en el lema anterior es $w' = -w + 1$ o $w' = w$. Esto prueba que la función que a cada rama le asocia un par de elementos idempotentes $(w, 1 - w)$ es inversa de la función que a dichos elementos le asigna su rama. Luego el lema anterior determina una correspondencia biunívoca entre pares de elementos idempotentes $(w, 1 - w)$ del álgebra \mathcal{A} y caminos maximales de $\mathcal{T}(K)$, como muestra el siguiente diagrama.

$$\{(w, 1 - w) : w \in \mathbb{M}_2(K) \text{ idempotente}\} \longleftrightarrow \{\text{caminos maximales } S \subseteq \mathcal{T}(K)\}.$$

Lo anterior, a la luz del Lema 8.13, determina una correspondencia biunívoca entre pares de elementos idempotentes y pares de elementos distintos en $\mathbb{P}^1(K)$. Esto se muestra en el siguiente diagrama.

$$\{(w, 1 - w) : w \in \mathbb{M}_2(K) \text{ idempotente}\} \leftrightarrow \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{P}^1(K), a \neq b\}.$$

Ahora, sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros linealmente independientes tales que $i^2 = 1$, $j^2 = 1$ c $ij + ji = 2\lambda$, donde $\lambda \in K$. En §13 demostraremos que siempre existen dichos cuaterniones. Dado que en ciertas demostraciones en las secciones §12 y §14 consideraremos cuaterniones puros con producto simetrizado

no entero, en este análisis tomaremos $\lambda \in K$ y no nos restringiremos al caso de $2\lambda \in \mathcal{O}_K$, como nos dice el Lema 9.1. Observe que siempre es posible hablar de las ramas $S_K(i)$ y $S_K(j)$, pues $i^2, j^2 \in \mathcal{O}_K$, pero si $2\lambda \notin \mathcal{O}_K$ entonces $S_K(i, j) = \emptyset$. Esto último se debe a que si $i, j \in \mathfrak{D}$, con \mathfrak{D} orden maximal, entonces $ij + ji = 2\lambda \in \mathfrak{D}$ es entero sobre \mathcal{O}_K , por lo que $2\lambda \in \mathcal{O}_K$. En particular, si $2\lambda \notin \mathcal{O}_K$ entonces $S_K(i) \cap S_K(j) = \emptyset$.

Dado que $i^2 = 1$ se tiene que el polinomio minimal del elemento $i \in \mathbb{M}_2(K)$ es:

$$m_i(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

luego en cierta base:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

así que $\eta = \frac{i+1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un elemento idempotente. Lo mismo se tiene para $w = \frac{j+1}{2}$. Luego, por lo mencionado en §8.2, las ramas $S = S(\eta)$ y $S' = S(w)$ son dos caminos maximales en $\mathcal{T}(K)$ que corresponden a las ramas $T(i)$ y $T(j)$ respectivamente. Esto nos lleva a preguntarnos ¿Cómo estos caminos se relacionan con λ ? y ¿En que medida lo determinan?

Para responder estas preguntas hacemos el siguiente análisis. Tomemos los caminos maximales anteriores S, S' en $\mathcal{T}(K)$, cuyos extremos son $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$ y $c, d \in \mathbb{P}^1(K)$ respectivamente. Si $S = S'$ entonces por la correspondencia entre caminos maximales y pares de elementos idempotentes, tenemos que $w = \eta$ o $w = 1 - \eta$. Recordemos que $i = 2\eta - 1$ y que $j = 2w - 1$. Entonces en el primer caso obtenemos que $i = j$ y en el segundo tenemos que $i = -j$. Ningún caso puede ocurrir, pues i, j son elementos linealmente independientes. Por lo tanto $S \neq S'$, lo cual implica que $4 \geq |\{a, b, c, d\}| \geq 3$.

Lema 11.3. Existe una transformación de Moebius que lleva los pares (a, b) y (c, d) en los pares $(0, \infty)$ y $(1, t)$ respectivamente, donde $t = [a, b; c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}$ es la razón cruzada entre los cuatro puntos.

Demostración. Como $S \neq S'$ se tiene que $4 \geq |\{a, b, c, d\}| \geq 3$. Luego el lema se sigue de un resultado general de transformaciones de Moebius actuando sobre 3 o 4 puntos en $\mathbb{P}^1(K)$. Para más detalle ver [C, §3]. \square

De lo anterior se sigue que el problema se parametriza por $t = [a, b; c, d]$, por lo que podemos restringirnos al caso en que los dos caminos son como se muestra en la Figura 5.

Observe que, por lo mostrado en §8, hacer actuar la transformación de Moebius anterior, es equivalente a conjugar los cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$. Observe además que las relaciones que estos cumplen se mantienen al conjugarlos. Luego los cuaterniones determinados por los caminos mostrados en la Figura 5 cumplen con las mismas relaciones que i, j y por ende los identificaremos.

Usando la correspondencia mencionada en el Lema 11.1, tenemos que las matrices $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\eta = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} -1 & t \\ -1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(K)$ son elementos idempotentes tales que $S(\eta) = S$ y $S(w) = T$. Por otro lado los elementos idempotentes w y η se relacionan con los cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ mediante las siguientes relaciones:

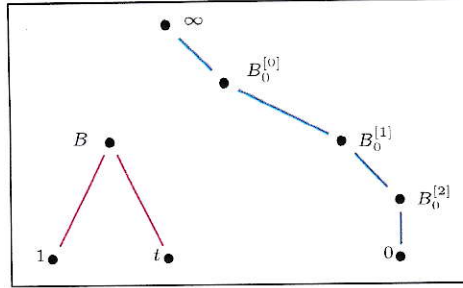


FIGURA 5. Caminos maximales, parametrizados por el punto $t = [a, b; c, d]$. En rojo se muestra la rama $T(j)$ y en azul la rama $T(i)$.

$$i = 2\eta - 1 = \frac{1}{t-1} \begin{pmatrix} -t-1 & 2t \\ -2 & t+1 \end{pmatrix},$$

y

$$j = 2w - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $i^2 = j^2 = 1$ y además:

$$(10) \quad \lambda = \frac{ij + ji}{2} = \frac{1}{1-t} \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix},$$

luego $\lambda = \frac{t+1}{1-t}$, donde $t = [a, b; c, d]$ es la razón cruzada entre los 4 puntos que conforman los extremos de los caminos determinados por w y η .

Observe que el idempotente $\eta' = -\eta + 1$, el cual cumple con las mismas relaciones que η según lo visto en la observación 11.2, define, por el proceso que define i a partir de η , al elemento $i' = 2\eta' - 1 = -i$. Luego, si λ' se define de manera análoga a λ , se tiene que:

$$\lambda' = \frac{-t-1}{1-t} = -\lambda.$$

Esto da respuesta a la pregunta planteada al inicio de este análisis. Los caminos maximales $S = S(\frac{i+1}{2})$ y $S' = S(\frac{i'+1}{2})$, que corresponden a las ramas $T(i)$ y $T(j)$ respectivamente, determinan el producto simetrizado entre los cuaterniones puros i, j , salvo multiplicación por -1 .

Considere la forma bilineal $B(\cdot, \cdot) : \mathbb{M}_2(K) \times \mathbb{M}_2(K) \rightarrow K$, cuya regla de asignación, mostrada en §3, es $B(v, w) = \frac{v\bar{w} + w\bar{v}}{2}$. En lo que resta de esta sección relacionaremos los caminos maximales anteriores con la forma bilineal en el subespacio generado por i, j . En efecto la matriz de Gram asociada a esta forma bilineal, en el subespacio generado por i y j , es:

$$G = \begin{pmatrix} B(i, i) & B(i, j) \\ B(j, i) & B(j, j) \end{pmatrix}.$$

Luego, como $B(i, i) = i^2 = 1$, $B(j, j) = j^2 = 1$ y $B(i, j) = B(j, i) = \frac{ij+ji}{2} = \lambda$, tenemos que:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\lambda = p(t) = \pm \frac{1+t}{1-t}$ y t es la razón cruzada entre los 4 puntos que determinan las ramas $T(i)$ y $T(j)$. Lo dicho en esta sección nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 11.4 (cf. def. 6.1). Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ cuaterniones puros linealmente independientes tales que $i^2 = j^2 = 1$. Sea $\lambda = \frac{ij+ji}{2}$ su producto simetrizado. Entonces $T(i)$ y $T(j)$ determinan $\lambda \in K$, salvo multiplicación por -1 . Más específicamente $\lambda = \frac{1+t}{1-t}$ o bien $\lambda = \frac{1+t}{t-1}$, donde t es la razón cruzada entre los 4 puntos que conforman los extremos de los caminos correspondientes a $T(i)$ y $T(j)$.

Corolario 11.5. Sea $\mathcal{A} = \langle i, j : i^2 = 1, j^2 = 1, ij + ji = 0 \rangle$. Entonces $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$ y este isomorfismo puede escogerse de modo que en el árbol de Bruhat-Tits asociado a esta álgebra $T(i)$ y $T(j)$ sean los caminos maximales cuyos extremos son $0, \infty$ y $1, -1$ respectivamente.

Demostración. El hecho de que $\mathcal{A} \cong \mathbb{M}_2(K)$ es consecuencia del Teorema 10.1 y de la Proposición 9.4. Observe que i, j son linealmente independientes, ya que si $i = kj$ entonces $0 = \frac{ij+ji}{2} = k$. Luego, usando el teorema anterior, tenemos que $0 = \lambda = \frac{1+t}{t-1}$. Por lo tanto $t = -1$. \square

12. CÁLCULO DE FORMAS CUADRÁTICAS A PARTIR DE CAMINOS MAXIMALES

En esta sección estudiaremos la relación entre el producto simetrizado $\lambda = \frac{ij+ji}{2}$, de dos cuaterniones puros linealmente independientes $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ y las ramas $T_L(i)$ y $T_L(j)$, donde $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. De esta forma profundizaremos lo dicho en §11.

En todo lo que respecta a esta sección K es un cuerpo local no arquimediano, tal que $\text{car}(K) \neq 2$. En esta sección y las que siguen, se usará la notación $S_K(\mathfrak{H})$, para hacer notar que la rama se considera en el árbol de Bruhat-Tits construido sobre el cuerpo local K . De la misma forma se consideran las ramas $S_L(\mathfrak{H})$, para extensiones L de K . Además, dado que en ciertas demostraciones de esta sección consideraremos los cuaterniones puros $i' = \frac{i}{\sqrt{\alpha}}$ y $j' = \frac{j}{\sqrt{\beta}}$, con producto simetrizado posiblemente no entero, en este análisis tomaremos $\lambda \in K$ y no nos restringiremos al caso de $2\lambda \in \mathcal{O}_K$, como se hizo en el Lema 9.1.

Construyamos el álgebra $\mathbb{M}_2(L)$ mediante la extensión de escalares del álgebra $\mathbb{M}_2(K)$ al cuerpo $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$, es decir $\mathbb{M}_2(L) \cong \mathbb{M}_2(K) \otimes_K L$. De esta forma podremos construir los árboles de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(L)$ y $\mathcal{T}(K)$ cuyos vértices son los órdenes maximales provenientes de las álgebras $\mathbb{M}_2(L)$ y $\mathbb{M}_2(K)$ respectivamente. Observe que existe un homomorfismo inyectivo $\mathbb{M}_2(K) \hookrightarrow \mathbb{M}_2(L)$, que identifica a cada $q \in \mathbb{M}_2(K)$ con su imagen $q \otimes 1$. Observe que $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ e $i \otimes 1, j \otimes 1 \in \mathbb{M}_2(L)$ satisfacen las mismas relaciones. Por ende podemos trabajar con las ramas $S_L(i)$ y $S_L(j)$, utilizando la identificación precedente. En lo sucesivo se escribe q en vez de $q \otimes 1$.

Partamos por demostrar un resultado que nos permite incrustar $\mathcal{T}(K)$ en $\mathcal{T}(L)$ y además nos permite analizar $S_K(i)$ como subconjunto de $S_L(i)$. Esto último será crucial en §14 pero no en esta sección.

Sea \mathfrak{H} un \mathcal{O}_K -orden. Definimos el \mathcal{O}_L -orden \mathfrak{H}_L por $\mathfrak{H}_L = \mathfrak{H} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$. Usando esta convención enunciamos el siguiente lema.

Lema 12.1. Sea K cuerpo local y L una extensión de K . Para cualquier \mathfrak{H} orden en $\mathbb{M}_2(K)$ existe una incrustación natural de $S_K(\mathfrak{H})$ en $S_L(\mathfrak{H}_L)$. En particular, podemos considerar $\mathcal{T}(K) \subset \mathcal{T}(L)$. Además la distancia en $\mathcal{T}(L)$ entre dos vértices vecinos en $\mathcal{T}(K)$ es $e = e(L/K)$, donde $e(L/K)$ es el índice de ramificación de la extensión.

Demostración. Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K)$. Dado en alguna base $\mathfrak{D} = \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_K)$, se tiene que $\mathfrak{D}_L = \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_L)$, en la misma base. Por ello \mathfrak{D}_L es un orden maximal en $\mathbb{M}_2(L)$. En otras palabras $\mathfrak{D}_L \in \mathcal{T}(L)$. Por otro lado, si $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{D}$, con $\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K)$, entonces $\mathfrak{H}_L \subset \mathfrak{D}_L$. Esto prueba que existe una función $\psi : S_K(\mathfrak{H}) \rightarrow S_L(\mathfrak{H}_L)$, definida por $\psi(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$. Ahora bien si tomamos dos órdenes maximales $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \in S_K(\mathfrak{H})$ distintos, por la conexidad de $S_K(\mathfrak{H})$, existe un camino que los une. Luego, en alguna base se tiene que:

$$(11) \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K & \pi^t \mathcal{O}_K \\ \pi^{-t} \mathcal{O}_K & \mathcal{O}_K \end{pmatrix},$$

donde $\pi = \pi_K$ parámetro uniformizante de K . De aquí se tiene que:

$$(12) \quad \mathfrak{D}_L = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_L & \mathcal{O}_L \\ \mathcal{O}_L & \mathcal{O}_L \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}'_L = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_L & \pi^t \mathcal{O}_L \\ \pi^{-t} \mathcal{O}_L & \mathcal{O}_L \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto \mathfrak{D}_L es un orden maximal distinto de \mathfrak{D}'_L . Luego ψ es una función inyectiva, por lo que existe una incrustación natural de $S_K(\mathfrak{H})$ en $S_L(\mathfrak{H}_L)$. Tomando $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K$, obtenemos que $\mathcal{T}(K)$ se incrusta dentro de $\mathcal{T}(L)$. Por último, tomando $t = 1$ en las igualdades 11 y 12, obtenemos que la distancia en $\mathcal{T}(L)$ entre dos vértices vecinos en $\mathcal{T}(K)$ es $e = e(L/K)$, donde $e(L/K)$ es el índice de ramificación de la extensión. \square

Observación 12.2. En lo que resta de esta sección y en las secciones siguientes haremos uso de la incrustación anterior e identificaremos $S_K(\mathfrak{H})$ con su imagen isomorfa vía ψ , con el fin de escribir $S_K(\mathfrak{H}) \subset S_L(\mathfrak{H}_L)$. Además, identificaremos \mathfrak{H} con su imagen $\mathfrak{H}_L = \mathfrak{H} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ vía extensión de escalares. Por ello hablaremos de la rama $S_L(\mathfrak{H})$.

Recordemos que si $S = S_K(\mathfrak{H})$ es un camino maximal, entonces sin pérdida de generalidad podemos asumir que es el camino maximal que une a 0 con ∞ . Luego la demostración anterior nos dice que $S_L = S_L(\mathfrak{H})$ es el camino maximal en que une a 0 con ∞ en $\mathcal{T}(L)$. En particular la inclusión anterior no cambia los extremos de los caminos maximales en $\mathcal{T}(K)$. Por esto identificaremos S con el camino maximal en $\mathcal{T}(L)$ que tiene los mismos extremos que $S \subset \mathcal{T}(K)$.

Haciendo uso de la notación anterior, si existe un camino maximal S tal que $S_K(\mathfrak{H}) = S^{[t]}$ en $\mathcal{T}(K)$, entonces se tiene que $S_L(\mathfrak{H}) = S^{[k]}$, donde $e(t+1) > k \geq et$ y donde S se interpreta como un subconjunto de $\mathcal{T}(L)$ con las convenciones precedentes. Esto se debe a que $S_K(\mathfrak{H}) = S_L(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{T}(K)$ y a la demostración del Lema 12.1. Esto se ilustra en la Figura 6. En §14.4 mostraremos que $k = te$.

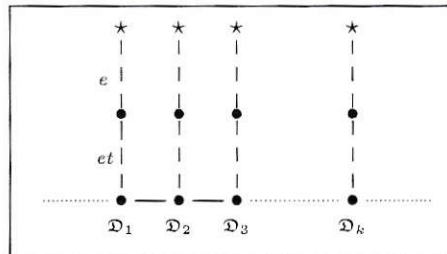


FIGURA 6. En la figura los vértices \mathfrak{D}_i de la base forman el tallo S de $S_K(\mathfrak{H}_L)$. Los vértices en $S_K(\mathfrak{H})$ a mayor distancia de S se simbolizan con puntos redondos. Los vértices con estrella no pertenecen a $S_K(\mathfrak{H})$ ni a $S_L(\mathfrak{H})$.

Volvamos al problema de relacionar el producto simetrizado de cuaterniones con los tallos que sus ramas definen. Observe que si $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^2$ entonces nos podemos reducir a lo dicho en §11. Esto se debe a que si $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$ entonces los tallos de i, j son los mismos que los de $i' = \frac{i}{a}$ y $j' = \frac{j}{b}$ mientras que $i'^2 = j'^2 = 1$.

Supongamos que $\beta \notin \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ y sea $L = K(\sqrt{\beta})$. Si $\alpha \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ entonces, por lo dicho en §11 y §8.2, se puede asumir que $T_L(i)$ es el camino maximal que une a 0 con ∞ . Observe que no imponemos condiciones sobre $T_L(j)$. Luego las ramas $T' = T_L(i)$ y $T = T_L(j)$ son como se muestra en la Figura 7.

En la Figura 7 el camino que une a 0 con ∞ es el tallo de la rama $S_L(i)$ y el camino que une a $z_3 = c + d\sqrt{\beta}$ con $z_4 = c' + d'\sqrt{\beta}$ es el tallo de la rama $S_L(j)$.

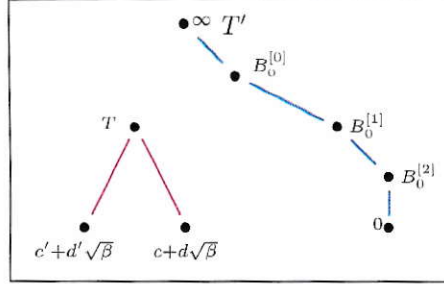


FIGURA 7. Tallos de $S_L(i)$ y $S_L(j)$ cuando $\alpha \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ y $\beta \notin \mathcal{O}_K^2$. El tallo $T_L(i)$ de $S_L(i)$ se ilustra con azul, mientras que su homólogo $T_L(j)$ se muestra en rojo.

Por otro lado, si $\alpha \notin \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ entonces los tallos de las ramas en cuestión, vistos en $\mathcal{T}(L)$ para $L = K(\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha})$, son como se muestra en la Figura 8. Esto se debe a que en las extensiones intermedias $L_1 = K(\sqrt{\alpha})$, $L_2 = K(\sqrt{\beta})$ los tallos de las ramas respectivas $S' = S_{L_1}(i)$ y $S = S_{L_2}(j)$ están definidas. Luego usamos el hecho de que $\mathcal{T}(L) \supseteq \mathcal{T}(L_1), \mathcal{T}(L_2)$ de forma tal que los caminos maximales que conforman los tallos de las ramas $S_{L_1}(i)$ y $S_{L_2}(j)$ no cambian al extender los escalares de L_i a L .

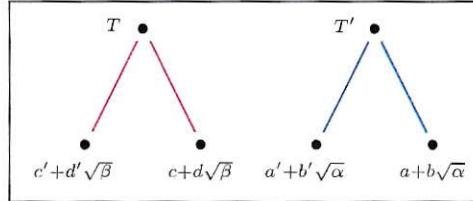


FIGURA 8. Tallos de $S_L(i)$ y $S_L(j)$ cuando $\alpha, \beta \notin \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$. El tallo $T_L(i)$ de $S_L(i)$ se ilustra con azul, mientras que su homólogo $T_L(j)$ se muestra en rojo.

En la Figura 8 el camino que une a $z_1 = a + b\sqrt{\alpha}$ con $z_2 = a' + b'\sqrt{\alpha}$ es el tallo de la rama $S_L(i)$ y el camino que une a $z_3 = c + d\sqrt{\beta}$ con $z_4 = c' + d'\sqrt{\beta}$ es el tallo de la rama $S_L(j)$. Analizaremos dichos caminos, para expresarlos en términos de un solo extremo. Más precisamente, probaremos que los extremos mostrados en las Figuras 7 y 8 son pares conjugados, es decir $c' + d'\sqrt{\beta} = c - d\sqrt{\beta}$ en ambos casos y $a' + b'\sqrt{\alpha} = a - b\sqrt{\alpha}$ en la Figura 8.

Observe que L es una extensión Galoisiana de K y que:

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong C_2,$$

si $\alpha \in K^2$, si $\beta \in K^2$, o si $\alpha, \beta \notin K^2$ y $\alpha\beta \in K^2$. En otro caso, es decir si $\alpha, \beta \notin K^2$ y $\alpha\beta \notin K^2$, se tiene que:

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_2.$$

Para probar que los extremos de los caminos en la Figura 7 y 8 son conjugados hagamos actuar el grupo de Galois sobre los órdenes maximales que componen el

árbol $\mathcal{T}(L)$. Sea $a \in L$ y considere la bola $B = B[a, |\pi_L^r|]$, entonces se tiene que $\sigma.B = B[\sigma(a), |\pi_L^r|]$. Por definición $\mathfrak{D}_{\sigma B}$ es el orden maximal correspondiente a la bola $\sigma.B$. Esta notación nos ayuda a enunciar el siguiente lema.

Lema 12.3. Sea $w \in \mathbb{M}_2(L)$. Si definimos la matriz $\sigma(w)$ haciendo actuar σ sobre los coeficientes de w , entonces $w \in \mathfrak{D}_B$ si y solamente si $\sigma(w) \in \mathfrak{D}_{\sigma B}$.

Demostración. Si $B = B[a, |\pi_L^r|]$ y $b = \sigma(a)$ entonces:

$$\mathfrak{D}_B = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x_1 - a\pi_L^{-r}x_2 & \pi_L^{-r}x_2 \\ a x_1 + \pi_L^r x_3 - a^2 \pi_L^{-r} x_2 + x_4 & a\pi_L^{-r} x_2 + x_4 \end{array} \right) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{O}_L \right\},$$

y también, dado que $\sigma(\pi_L) = u\pi_L$, para cierto $u \in \mathcal{O}_L^*$, tenemos que $\mathfrak{D}_{\sigma B}$ es:

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} x_1 - bu^{-r}\pi_L^{-r}x_2 & u^{-r}\pi_L^{-r}x_2 \\ bx_1 + u^r\pi_L^r x_3 - b^2 u^{-r}\pi_L^{-r}x_2 + x_4 & bu^{-r}\pi_L^{-r}x_2 + x_4 \end{array} \right) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{O}_L \right\}.$$

Recordando que el anillo de enteros \mathcal{O}_L satisface $\sigma\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L$, puesto que $|x| \leq 1$ si y solo si $|\sigma(x)| \leq 1$, se tiene que $w \in \mathfrak{D}_B$ si y solamente si $\sigma(w) \in \mathfrak{D}_{\sigma B}$. \square

Con estas herramientas, demostremos que los extremos de los caminos en la Figura 4 y 5 son conjugados. Sea $w = \frac{j+\sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}}$. Observe que la rama $S_L(j)$ cumple con $S_L(j) = S_L(w)^{[v(2\sqrt{\beta})]}$. Además $w^2 = w$. Por lo mencionado en §8.2, la rama $S(w)$ es un camino maximal y, por lo visto en el ejemplo 6.25, dicha rama coincide con el $T_L(j)$. Por otro lado:

$$\sigma(w) = \frac{-j + \sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}} = 1 - w,$$

para $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ tal que $\sigma(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$. Luego, como $S(w) = S(1-w)$, se tiene que $S(w) = S(\sigma(w))$. Por el lema anterior, tenemos que $\mathfrak{D}_B \in S(w)$ si y solamente si $\mathfrak{D}_{\sigma B} \in S(\sigma(w)) = S(w)$. Por otro lado uno de los rayos que une un extremos del camino $S_L(w)$ con su vértice a mayor altura está conformado por las bolas $B_r = B[c + d\sqrt{\beta}, |\pi_L^r|]$, donde $r > r_0$ para cierto r_0 . Luego $\sigma.B_r = B[c - d\sqrt{\beta}, |\pi_L^r|] \in S_L(w)$, para todo $r > r_0$. En particular, $c - d\sqrt{\beta}$ es un extremo de $S_L(w)$. Por el mismo argumento, concluimos que $c' - d'\sqrt{\beta}$ es un extremo de $S_L(w)$. De esta forma $c + d\sqrt{\beta} = c' - d'\sqrt{\beta}$ o bien $d' = d = 0$. Si $d' = d = 0$ entonces existe una transformación de Moebius τ definida sobre K tal que:

$$\tau.S_L(w) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \mathcal{O}_L & \pi_L^i \mathcal{O}_L \\ \pi_L^{-i} \mathcal{O}_L & \mathcal{O}_L \end{array} \right) : i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por lo tanto existe $A \in \text{Gl}_2(K)$ tal que $AwA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bien $AwA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De esta forma $AjA^{-1} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\beta} \end{pmatrix}$. Luego como $AjA^{-1} \in \mathbb{M}_2(K)$ se tiene que $\beta \in K^2$, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto $c + d\sqrt{\beta} = c' - d'\sqrt{\beta}$.

Debido a lo anterior, el tallo de la rama T debe ser un camino cuyos extremos son conjugados. Además, cualquier elemento $\sigma \in G$ tal que $\sigma(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$ deja fijo el conjunto $S_L(w)$ y sólo intercambia sus extremos. Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 12.4. Considere la rama $S_L(j) \subset \mathcal{T}(L)$, donde $j^2 = \beta \notin \mathcal{O}_K^2$ y $L = K(\sqrt{\beta})$. Entonces cualquier elemento $\sigma \in G = \text{Gal}(L/K)$ tal que $\sigma(\sqrt{\beta}) = -\sqrt{\beta}$, actúa sobre $T_L(j)$ intercambiando cada vértice bajo el de mayor altura de $T_L(j)$ por su homólogo a la misma altura, pero en el otro rayo descendente.

Ahora bien si $\alpha, \beta \notin \mathcal{O}_K^2$, podemos pasar a las dos extensiones intermedias de grado 2, a saber $L_1 = K(\sqrt{\alpha})$ y $L_2 = K(\sqrt{\beta})$ y en estas, mediante el razonamiento anterior, considerar las ramas S y T como caminos con extremos conjugados. Luego, dado que los extremos de los caminos maximales no cambian al incrustar los árboles de Bruhat-Tits en sus extensiones, se tiene que los extremos de los caminos mostrados en las Figuras 7 y 8 son conjugados en los cuerpos respectivos. Volvamos a nuestro problema inicial y dividámoslo en casos.

12.1. $\alpha \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ y $\beta \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$: Este caso fue estudiado en §11.

12.2. $\alpha \in \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$ y $\beta \notin \mathcal{O}_K^2 \setminus \{0\}$: Sin pérdida de generalidad, admitiremos que $\alpha = 1$. Esto se debe a que si $\alpha = v^2 \pi^{2t}$, con $v \in \mathcal{O}_K^*$ entonces al definir $i' = \frac{i}{v\pi^t}$, elemento que cumple $i'^2 = 1$, tenemos, por lo dicho en el ejemplo 6.25, que $T_K(i') = T_K(i)$. Debido a las anteriores consideraciones, la matriz de Gram asociada al subespacio $\langle i, j \rangle$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \beta \end{pmatrix}.$$

Observe que $j' = \frac{j}{\sqrt{\beta}}$ es un elemento que cumple con $j'^2 = 1$ y $T_L(j) = T_L(j')$. Entonces por lo mencionado en §11, aplicado a los tallos de las ramas definidas por los elementos i' y j' , en la extensión $L = K(\sqrt{\beta})$, tenemos que:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\beta}} = \frac{ij + ji}{2\sqrt{\beta}} = \pm \frac{1+t}{1-t},$$

donde $t = [a + b\sqrt{\beta}, a - b\sqrt{\beta}; 0, \infty] = \frac{a - b\sqrt{\beta}}{a + b\sqrt{\beta}}$. Luego:

$$\lambda = \pm \frac{a}{b}.$$

Recordemos que lo expuesto en §11 se aplica cuando los caminos maximales son distintos. En este caso, esto se cumple debido a que para $b \neq 0$ se tiene que $a + b\sqrt{\beta} \neq \infty$ y $a - b\sqrt{\beta} \neq 0$. Por último, observe que $\lambda \in K$.

12.3. $\alpha \notin \mathcal{O}_K^2, \beta \notin \mathcal{O}_K^2$: Por lo dicho en el Lema 12.3 podemos asumir que las ramas S' y S , mencionadas en un inicio, tienen como extremos a los puntos $z_1 = a + b\sqrt{\alpha}, z_2 = a - b\sqrt{\alpha}$ y $z_3 = c + d\sqrt{\beta}, z_4 = c - d\sqrt{\beta}$ respectivamente. Por otro lado la matriz de Gram asociada al subespacio $\langle i, j \rangle$ es:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \lambda & \beta \end{pmatrix}.$$

Considere $i' = \frac{i}{\sqrt{\alpha}}$ y $j' = \frac{j}{\sqrt{\beta}}$, elementos tales que $i'^2 = 1, j'^2 = 1$ y cuyos tallos asociados coincidan con los de i, j respectivamente. Entonces por lo mencionado en §11, aplicado a los elementos i', j' en la extensión $L = K(\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha})$, se tiene que:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{ij + ji}{2\sqrt{\alpha\beta}} = \pm \frac{1+t}{1-t},$$

donde $t = [z_1, z_1; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$. Reemplazando los valores conocidos en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$(13) \quad \lambda = \pm \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a - c)^2}{2bd}.$$

Observe que $\lambda \in K$ está bien definido, pues $b, d \neq 0$, dado que en caso contrario $T_L(i)$ o $T_L(j)$ no es un camino. Recordemos que el cálculo anterior es válido si $T_L(i) \neq T_L(j)$. Supongamos que son iguales, es decir $a + b\sqrt{\alpha} = c + d\sqrt{\beta}$ o bien $a + b\sqrt{\alpha} = c - d\sqrt{\beta}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir el primer caso. Entonces $\sqrt{\alpha} = x + y\sqrt{\beta}$. Luego $\alpha = x^2 + 2xy\sqrt{\beta} + y^2\beta$. Por ende o bien $y = 0$ o bien $x = 0$. En el primer caso $\alpha \in K^{*2}$, lo que no puede pasar por hipótesis. Luego $\alpha = y^2\beta$, es decir $\sqrt{\alpha} = \pm y\sqrt{\beta}$. Recordemos que $T_L(i)$ y $T_L(j)$ están definidos por los pares de elementos idempotentes $(\eta, 1 - \eta)$ y $(w, 1 - w)$ respectivamente, donde $\eta = \frac{i + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}$ y $w = \frac{j + \sqrt{\beta}}{2\sqrt{\beta}}$. Luego $\eta = w$ o bien $\eta = 1 - w$. En el primer caso tenemos que $i = 2\eta\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha} = \pm yj$, dependiendo del signo de $\frac{\sqrt{\alpha}}{y\sqrt{\beta}}$. En el segundo caso obtenemos que $i = 2\eta\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha} = y(\sqrt{\beta} - 2w\sqrt{\beta}) = \mp yj$. En particular $\lambda = \pm yj$ o $\lambda = \mp yj$, luego $\lambda^2 = \alpha\beta$. En ambos casos los cuaterniones i, j son linealmente dependientes. Esto nos lleva a una contradicción. En particular, si $\lambda^2 \neq \alpha\beta$ entonces los tallos de S y S' son distintos y se puede aplicar la identidad (13) para el producto simetrizado.

Proposición 12.5. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ cuaterniones puros, no nilpotentes, tales que $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Si $\alpha, \beta \notin K^{*2}$ y $\alpha\beta \neq \lambda^2$ entonces existen $a, c \in K$, $b, d \in K^*$ tales que $\lambda = \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a - c)^2}{2bd}$ o bien $\lambda = -\frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a - c)^2}{2bd}$.

Demostración. Supongamos que $i^2 = \alpha$ y $j^2 = \beta$ con $\alpha\beta \neq \lambda^2$. Entonces existen $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha = \pi_K^{-2t_1}\alpha'$, $\beta = \pi_K^{-2t_2}\beta'$, donde $\alpha', \beta' \in \mathcal{O}_K$. Observe que $\lambda' = \lambda\pi_K^{t_1+t_2}$ cumple con $\lambda'^2 \neq \alpha'\beta'$ si y solamente si $\lambda \neq \alpha\beta$. Luego por lo mencionado en la subsección anterior tenemos que existen $a', c' \in K$ y $b', d' \in K^*$ tales que:

$$\lambda' = \pm \frac{b'^2\alpha' + d'^2\beta' - (a' - c')^2}{2b'd'},$$

es decir:

$$\lambda' = \pm \frac{b'^2\alpha\pi_K^{2t_1} + d'^2\beta\pi_K^{2t_2} - (a' - c')^2}{2b'd'},$$

multiplicando la igualdad anterior por $\pi_K^{-(t_1+t_2)}$ obtenemos que:

$$\lambda = \pm \frac{b'^2\alpha\pi_K^{t_1-t_2} + d'^2\beta\pi_K^{t_2-t_1} - (a' - c')^2\pi_K^{-(t_1+t_2)}}{2b'd'}.$$

Reescribimos la igualdad anterior como:

$$\lambda = \pm \frac{(b'\pi_K^{t_1-t_2})^2\alpha + d'^2\beta - (a'\pi_K^{-t_2} - c'\pi_K^{-t_2})^2}{2(b'\pi_K^{t_1-t_2})d'}.$$

Luego los elementos $b = b'\pi_K^{t_1-t_2}$, $d = d'$, $a = a'\pi_K^{-t_2}$ y $c = c'\pi_K^{-t_2}$ cumplen lo pedido. □

12.4. Independencia del producto simetrizado. Sea K cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$. Sabemos, por lo demostrado en esta sección y en §11, que existe una manera de determinar el producto simetrizado entre dos cuaterniones puros enteros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ no nilpotentes y linealmente independientes, teniendo solamente información sobre $T_L(i)$ y $T_L(j)$, donde L es una extensión de K .

Decimos que dos pares de cuaterniones puros (i, j) e (i', j') son K -equivalentes y lo denotamos por $(i, j) \approx (i', j')$ si $i, j, i', j' \in \mathbb{M}_2(K)$ son cuaterniones que cumplen con $i^2 = \alpha = i'^2$, $j^2 = \beta = j'^2$ y $2\lambda = ij + ji$, $2\lambda' = i'j' + j'i'$ donde $\lambda = \lambda'$ o bien $\lambda = -\lambda'$. En esta sección demostraremos que si (i, j) e (i', j') son K -equivalentes entonces existe una transformación de Moebius definida sobre K que lleva $T_L(i)$ y $T_L(j)$ a $T_L(i')$ y $T_L(j')$. Luego, para efectos de calcular la posición relativa de las ramas, podemos considerar cualquiera de los diagramas cuyo valor de λ asociado sea el correcto. Al igual que en los razonamientos de las secciones anteriores, dividiremos nuestro estudio dependiendo de si $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ son cuadrados o no.

Partamos suponiendo que $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K^2$. Entonces, por lo visto en §11, existe una transformación de Moebius τ_1 que lleva $T_K(i)$ y $T_K(j)$ en los caminos que unen 0 con ∞ y 1 con $t \in \mathbb{P}^1(K)$ respectivamente. Por lo mismo, existe una transformación de Moebius τ_2 que lleva las ramas $T_K(i')$ y $T_K(j')$ en los caminos que unen 0 con ∞ y 1 con $s \in \mathbb{P}^1(K)$ respectivamente. Ahora bien en la misma sección calculamos que $\lambda = \frac{ij+ji}{2} = \pm \frac{1+t}{1-t}$. Por lo mismo $\lambda' = \frac{i'j'+j'i'}{2} = \pm \frac{1+s}{1-s}$. Luego si $\lambda = \lambda'$ o $\lambda = -\lambda'$ tenemos que $t = s$ o bien $ts = 1$. Si $t = s$, entonces $\tau_1^{-1} \circ \tau_2$ lleva los extremos de $T_K(i')$ y $T_K(j')$ en los extremos de $T_K(i)$ y $T_K(j)$. Por otro lado, si $s = \frac{1}{t}$, la transformación de Moebius $\tau_1^{-1} \circ \tau \circ \tau_2$, donde $\tau(z) = tz$, lleva los extremos de $T_K(i')$ y $T_K(j')$ en los extremos de $T_K(i)$ y $T_K(j)$.

Supongamos ahora que $\alpha \in \mathcal{O}_K^2$ y que $\beta \notin \mathcal{O}_K^2$. Sea $L = K(\sqrt{\beta})$. Entonces, por lo dicho en la sección 12, existe una transformación de Moebius τ_1 que lleva los extremos de $T_L(i)$ en 0 con ∞ y los de $T_L(j)$ siguen teniendo la forma $a \pm b\sqrt{\beta}$, donde $a, b \in K$. Por lo mismo, existe una transformación de Moebius τ_2 que lleva los extremos de $T_L(i')$ en 0 con ∞ y los de $T_L(j')$ siguen teniendo la forma $a' \pm b'\sqrt{\beta}$, donde $a', b' \in K$. Ahora bien, en §12.2 calculamos que $\lambda = \frac{ij+ji}{2} = \pm \frac{a}{b}$. Por lo mismo $\lambda' = \frac{i'j'+j'i'}{2} = \pm \frac{a'}{b'}$. Luego si $\lambda = \lambda'$ o $\lambda = -\lambda'$ tenemos que $a = a'r$, donde $r = \pm \frac{b}{b'}$ y donde el signo depende de los signos tomados en las tres igualdades anteriores. Esto nos dice que si $\tau(z) = r^{-1}z$, entonces $\tau_1^{-1} \circ \tau \circ \tau_2$ es una transformación de Moebius que lleva los extremos de $T_L(i')$ y $T_L(j')$ en los extremos de $T_L(i)$ y $T_L(j)$.

Finalmente trabajemos en el caso en que $\alpha \notin \mathcal{O}_K^2$ y $\beta \notin \mathcal{O}_K^2$. Sea $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. Entonces, por lo visto en el Teorema 12.4, las ramas $T_L(i)$ y $T_L(j)$ son los caminos que unen $a + b\sqrt{\alpha}$ con $a - b\sqrt{\alpha}$ y $c + d\sqrt{\beta}$ con $c - d\sqrt{\beta}$ respectivamente, donde $a, b, c, d \in K$. Por lo mismo, las ramas $T_L(i')$ y $T_L(j')$ son los caminos que unen $a' + b'\sqrt{\alpha}$ con $a' - b'\sqrt{\alpha}$ y $c' + d'\sqrt{\beta}$ con $c' - d'\sqrt{\beta}$ respectivamente, donde $a', b', c', d' \in K$. Ahora bien, en §12.2 calculamos que $\lambda = \frac{ij+ji}{2} = \pm \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd}$. Por lo mismo $\lambda' = \frac{i'j'+j'i'}{2} = \pm \frac{b'^2\alpha + d'^2\beta - (a'-c')^2}{2b'd'}$. En §13 se probará que, para $\alpha, \beta \notin \mathcal{O}_K^2$, las ramas $T_L(i)$ y $T_L(j)$ son iguales si y solamente si $\lambda^2 = \alpha\beta$. Por ello separamos este análisis en casos. Si $T_L(i) = T_L(j)$ entonces $\alpha\beta = \lambda^2$ y por ende $T_L(i') = T_L(j')$ son iguales. Luego basta considerar una transformación de Moebius que lleve a en a' y b en b' , para concluir lo pedido. Por lo tanto, si $T_L(i) \neq T_L(j)$, entonces $\alpha\beta \neq \lambda^2$ y por ende $T_L(i') \neq T_L(j')$. En este caso, por lo

demostrado en el Teorema 10.5 se tiene que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda$ es un álgebra central simple de dimensión 4, es decir un álgebra de cuaterniones. Como existen cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ y $2\lambda = ij + ji$, se tiene, por lo mostrado en §9, que $\left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$, además $\mathbb{M}_2(K)$ está generada por i, j como álgebra. Supongamos que $\lambda = \lambda'$. Entonces, como $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ e $i', j' \in \mathbb{M}_2(K)$ satisfacen las mismas relaciones se tiene que existe un isomorfismo $\phi : \mathbb{M}_2(K) \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ tal que $\phi(i) = i'$ y $\phi(j) = j'$. Por otro lado si $\lambda = -\lambda'$ entonces $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ e $i', -j' \in \mathbb{M}_2(K)$ satisfacen las mismas relaciones. Luego se tiene que existe un isomorfismo $\phi : \mathbb{M}_2(K) \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ tal que $\phi(i) = i'$ y $\phi(j) = -j'$. Por el Teorema de Skolem-Noether (ver Proposición 3.6) se tiene que dicho isomorfismo es interior, es decir existe una matriz $A \in \text{Gl}_2(K)$ tal que $i = Ai'A^{-1}$ y $j = Aj'A^{-1}$ o bien $i = Ai'A^{-1}$ y $j = -Aj'A^{-1}$. Por lo tanto $S_L(i) = AS_L(i')A^{-1}$ y $S_L(j) = AS_L(j')A^{-1}$, en ambos casos. Utilizando la correspondencia entre acciones de matrices y transformaciones de Moebius en $\mathcal{T}(K)$, obtenemos que la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ correspondiente a la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cumple con lo pedido.

Decimos que dos pares de caminos maximales son K -equivalentes y lo denotamos por $(S, T) \sim (S', T')$ si existe una transformación de Moebius τ definida sobre K tal que $\tau(S) = S'$ y $\tau(T) = T'$. Con esta definición podemos enunciar el siguiente resultado, que fue probado en esta sección.

Teorema 12.6. Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ fijos. Sea $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ una extensión de K en donde $T_L(i)$ y $T_L(j)$ sean caminos maximales. Entonces el valor del producto simetrizado, salvo signo, de dos cuaterniones puros enteros y no nilpotentes $i, j \in \mathbb{M}_2(L)$ tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ esta determinado por $T_L(i)$ y $T_L(j)$, salvo K -equivalencia.

13. EL SÍMBOLO DE HILBERT

Sea K un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$. En la Sección §10 estudiamos la simplicidad de las K -álgebras \mathcal{A}_λ definidas por generadores y relaciones como:

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle.$$

En dicha sección demostramos que la condición $\lambda^2 \neq \alpha\beta$ es equivalente a que \mathcal{A}_λ es una K -álgebra central simple de dimensión 4, es decir es un álgebra de cuaterniones. Bajo el supuesto anterior, en esta sección encontraremos condiciones necesarias y suficientes para que \mathcal{A}_λ sea isomorfa a un álgebra de matrices. Luego aplicaremos esto al problema de determinar si existen cuaterniones puros i, j linealmente independientes tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ y $2\lambda = ij + ji$. También estudiaremos la existencia de dichos cuaterniones en el caso excluido, es decir cuando $\alpha\beta = \lambda^2$.

Lema 13.1. (ver [O, §57]) Un álgebra de cuaterniones \mathcal{A} definida sobre un cuerpo F es isomorfa a un álgebra de matrices $\mathbb{M}_2(F)$ si y solamente si existe $x \in \mathcal{A} - \{0\}$ con $N(x) = 0$, donde N es la norma definida en 3.1.

Sea $x = a_1 + a_2i + a_3j + a_4ij \in \mathcal{A}_\lambda$. Se define su conjugado mediante $\bar{x} = a_1 - a_2i - a_3j + a_4ji$, además se define la norma de $x \in \mathcal{A}_\lambda$ por $\mathfrak{N}(x) = x\bar{x}$. Mediante un cálculo se demuestra la siguiente expresión para \mathfrak{N} en terminos de los coeficientes $a_i \in K$ y los parámetros fijos $\alpha, \beta, \lambda \in K$:

Lema 13.2. Sea $\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda$ un álgebra de cuaterniones y considere un elemento arbitrario $x = a_1 + a_2i + a_3j + a_4ij \in \mathcal{A}_\lambda$. Entonces

$$(14) \quad \mathfrak{N}(x) = a_1^2 - a_2^2\alpha - a_3^2\beta + a_4^2\alpha\beta + 2a_1a_4\lambda - 2a_2a_3\lambda.$$

Una aplicación interesante de la norma \mathfrak{N} es la siguiente. Supongamos que existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{A}_\lambda \rightarrow Q$, donde Q es un álgebra de cuaterniones. Supongamos además que $\mathfrak{N}(x) = 0$, para $x = a_0 + a_1i + a_2j + a_3ij \neq 0$. Entonces $\{1, i, j, ij\} \subseteq \mathcal{A}_\lambda$ es una base de \mathcal{A}_λ , pues dicho conjunto genera \mathcal{A}_λ y $\dim_K \mathcal{A}_\lambda = 4$. Luego se tiene que $\{1, \phi(i), \phi(j), \phi(ij)\}$ es una base de Q . Por lo tanto, como $\phi(x) \neq 0$, se tiene que $\phi(\bar{x}) = a_0 - a_1\phi(i) - a_2\phi(j) - a_3\phi(ij) \neq 0$. Por otro lado $\phi(x)\phi(\bar{x}) = \phi(x\bar{x}) = 0$. Luego Q tiene divisores de cero y por ende $\mathcal{A}_\lambda \cong Q \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Lema 13.3. Consideremos la K -álgebra $\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K} \right)_\lambda$ y supongamos que dicha álgebra es de cuaterniones, donde $\alpha, \beta \notin K^{*2}$. Supongamos además que existen $a, c \in K, b, d \in K^*$ tales que:

$$\lambda = \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd}, \text{ o } \lambda = -\frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd},$$

entonces $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Demostración. Transformando la igualdad anterior en $(a-c)^2 - b^2\alpha - d^2\beta + 2db\lambda = 0$, en el primer caso y en $(a-c)^2 - b^2\alpha - d^2\beta - 2db\lambda = 0$ en el segundo caso, tenemos que $\mathfrak{N}((a-c) + bi - dj) = 0$ o bien $\mathfrak{N}((a-c) + bi + dj) = 0$. Observe que, como

$b, d \neq 0$ se tiene que los elementos en los que se anula la norma \mathfrak{N} son no nulos, por lo tanto $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$. \square

Por otro lado, si $\phi : \mathcal{A}_\lambda \rightarrow \mathbb{M}_2(K)$ es isomorfismo, entonces \mathcal{A}_λ es central simple. Esto implica que $\lambda^2 \neq \alpha\beta$. Tomando las imágenes vía ϕ de $i, j \in \mathcal{A}_\lambda$ obtenemos dos cuaterniones puros no nilpotentes $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes que cumplen con $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ y $2\lambda = ij + ji$. Luego, aplicando la Proposición 12.5, obtenemos la implicancia recíproca del lema anterior. En lo que sigue usaremos la notación \pm , en donde se entenderá que si $a = \pm b$ entonces $a = b$ o $a = -b$. Usando esta notación tenemos el siguiente resultado.

Corolario 13.4. Considere la K -álgebra $\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda$, para $\alpha \notin K^{*2}$ y $\beta \notin K^{*2}$. Supongamos que \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones. Entonces existen $a, c \in K, b, d \in K^*$ tales que:

$$\lambda = \pm \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd},$$

si y solamente si $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Todavía nos queda un caso por estudiar y este es el correspondiente al álgebra $\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda$ definida por $\alpha \in K^{*2}$ o $\beta \in K^{*2}$.

Lema 13.5. Si $\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda$ satisfacc $\alpha \in K^{*2}$ o $\beta \in K^{*2}$, y si $\alpha\beta \neq \lambda^2$, entonces $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.

Demostración. Supongamos que $i^2 = \alpha \in K^{*2}$. Entonces sin pérdida de generalidad $i^2 = k^2$, con $k \in K^*$. Luego $(i-k)(i+k) = 0$, con $i \neq k$ y $i \neq -k$. Por ello, en el álgebra de cuaterniones \mathcal{A}_λ hay divisores de cero. Luego $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$. El caso correspondiente a $j^2 \in K^{*2}$ se concluye de la misma manera. \square

De lo mencionado en este capítulo, sumado a lo expuesto en el Teorema 10.5, se sigue el siguiente teorema.

Teorema 13.6. Considere la K -álgebra

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{\alpha, \beta}{K}\right)_\lambda = \langle i, j : i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij + ji = 2\lambda \rangle,$$

donde K es un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$. Entonces:

- i.- Si $\alpha\beta = \lambda^2$: \mathcal{A}_λ es una K -álgebra de dimensión 4 que no es isomorfa a un álgebra de cuaterniones sobre K . Si $\alpha \notin K^{*2}$ entonces \mathcal{A}_λ se puede incrustar en $\mathbb{M}_2(K(\sqrt{\alpha}))$. En caso contrario, es decir si $\alpha \in K^{*2}$, entonces \mathcal{A}_λ se puede incrustar en $\mathbb{M}_2(K \times K)$.
- ii.- Si $\alpha \in K^{*2}$ o $\beta \in K^{*2}$ y $\alpha\beta \neq \lambda^2$, entonces \mathcal{A}_λ es una K -álgebra de cuaterniones con $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.
- iii.- Si $\alpha \notin K^{*2}, \beta \notin K^{*2}$ y $\alpha\beta \neq \lambda^2$ entonces \mathcal{A}_λ es un álgebra de cuaterniones. En este caso se cumple que existen $a, c \in K, b, d \in K^*$ tales que:

$$\lambda = \pm \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd},$$

si y solamente si $\mathcal{A}_\lambda \cong \mathbb{M}_2(K)$.

El teorema anterior nos da criterios para determinar los conjuntos $\Lambda_{(\alpha,\beta)} - \{\pm\sqrt{\alpha\beta}\}$, donde $\Lambda_{(\alpha,\beta)}$ fue definido en §9. Esto se debe a lo argumentado en la misma sección. Por ende solo nos debemos enfocar en la existencia de cuaterniones puros no nilpotentes i, j que cumplan con $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ y $ij + ji = \lambda$, donde $\lambda^2 = \alpha\beta$. Recordemos el siguiente hecho mostrado en el corolario 10.4.

Observación 13.7. A fin de estudiar la existencia de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ que satisfagan $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ y $ij + ji = 2\lambda$, podemos escoger α, β en un conjunto de representantes $\text{SR} \subset \mathcal{O}_K$ del cociente K^*/K^{*2} , en donde consideramos que $1 \in \text{SR}$. Esto se debe a que si $\alpha = c^2a$ y $\beta = d^2b$ entonces existen $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ satisfacen las relaciones anteriores si y sólomente si existen $\mathbf{i} = \frac{i}{c}, \mathbf{j} = \frac{j}{d} \in \mathbb{M}_2(K)$ que satisfacen $\mathbf{i}^2 = a, \mathbf{j} = b$ e $\mathbf{i}\mathbf{j} + \mathbf{j}\mathbf{i} = \frac{\lambda}{cd}$. Además si $\alpha\beta = \lambda^2$ entonces $ab = (\frac{\lambda}{cd})^2$.

El argumento dado en la observación anterior nos permite reducirnos a estudiar el problema en el caso en que $\alpha, \beta \in \text{SR}$. Además, si $\alpha\beta = \lambda^2$ podemos suponer que los parámetros cumplen con $\alpha = \beta$ y $\lambda = \pm\alpha$. Dividiremos nuestro estudio en dos casos, dependiendo de si $\alpha = 1$ o $\alpha \notin K^{*2}$.

En el primer caso, si $\alpha = \beta = 1$ y $\lambda = \pm 1$, existen en $\mathbb{M}_2(K)$ cuaterniones $i = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que satisfacen las relaciones $i^2 = j^2 = 1$ y $ij + ji = \pm 2$. De la identidad (4) mostrada en la Observación 3.4 se deduce que i, j son cuaterniones puros. Observe que dichos cuaterniones generan ramas cuyos tallos son distintos. Esto último se debe a que i no es un múltiplo escalar de j y a lo mencionado en §11 respecto a los idempotentes que comparten rama.

Sólo nos queda determinar condiciones necesarias y suficientes para que existan cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes que satisfagan las relaciones $i^2 = j^2 = \alpha$ y $ij + ji = \pm 2\alpha$, cuando $\alpha \notin K^{*2}$. Afirmamos que en este caso no existe un par de cuaterniones distintos, módulo signo, que satisfagan estas relaciones. Supongamos que existen. Sean $p, q \in \mathbb{M}_2(K)$ dichos cuaterniones puros. Entonces como $q^2 = \alpha$, tenemos que la transformación lineal en $K \times K$ definida por q no tiene autovectores no triviales. Esto se debe a que si $q(v) = cv$, entonces $\alpha v = q^2(v) = c^2v$, luego si $v \neq 0$, entonces $\alpha = c^2 \in K^{*2}$. Tomemos un vector $v \in K \times K - \{0\}$ cualquiera. Entonces la matriz de q en la base $\{v, q(v)\}$ es $[q] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Luego existe $A \in \text{Gl}_2(K)$ tal que $AqA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $ApA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Observe que ApA^{-1}, AqA^{-1} satisfacen las mismas relaciones que p, q . Evaluando las matrices correspondientes, en la identidad del producto simetrizado obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} \pm 2\alpha & 0 \\ 0 & \pm 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pm 2\alpha & 0 \\ 0 & \pm 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + b\alpha & a + d \\ \alpha a + \alpha d & \alpha b + c \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que $d = -a$ y $c + \alpha b = \pm 2\alpha$. Luego $ApA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha(\pm 2 - b) & -a \end{pmatrix}$.

Utilizando la relación $p^2 = \alpha$, obtenemos que:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha(\pm 2 - b) & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b\alpha(\pm 2 - b) & 0 \\ 0 & a^2 + b\alpha(\pm 2 - b) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $a^2 = (b \mp 1)^2 \alpha$. Si $b = \pm 1$, dependiendo del signo de λ , se tiene que $a = 0$ y entonces $ApA^{-1} = \pm AqA^{-1}$, es decir $p = \pm q$. Si $b \neq 1$, obtenemos que $\alpha = \left(\frac{a}{b-1}\right)^2 \in K^{*2}$, lo que es contradictorio. De la identidad (4) mostrada en la Observación 3.4 se deduce que los cuaterniones p, q son puros. Concluimos que, si consideramos $\alpha \notin K^{*2}$ obtenemos que existen cuaterniones puros que satisfacen las relaciones requeridas, pero estos son necesariamente iguales salvo signo. Lo mostrado en esta sección, junto con la observación 13.7, prueba el siguiente teorema.

Teorema 13.8. Sea K es un cuerpo local no arquimediano tal que $\text{car}(K) \neq 2$, entonces:

- i.- Si $\alpha\beta = \lambda^2$ y $\alpha, \beta \in K^{*2}$ entonces siempre existe un par de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$.
- ii.- Si $\alpha\beta = \lambda^2$ y $\alpha, \beta \notin K^{*2}$ entonces existen cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$, pero dichos cuaterniones son siempre linealmente dependientes.
- iii.- Si $\alpha \in K^{*2}$ o $\beta \in K^{*2}$ y $\alpha\beta \neq \lambda^2$, entonces siempre existe un par de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$.
- iv.- Si $\alpha \notin K^{*2}, \beta \notin K^{*2}$ y $\alpha\beta \neq \lambda^2$ entonces existen un par de cuaterniones puros $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ linealmente independientes tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ e $ij + ji = 2\lambda$ si y sólo si existen $a, c \in K, b, d \in K^*$ tales que $\lambda = \frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd}$ o bien $\lambda = -\frac{b^2\alpha + d^2\beta - (a-c)^2}{2bd}$.

Observación 13.9. Supongamos que $\alpha, \beta, 2\lambda \in \mathcal{O}_K$. Entonces en el caso [ii] del teorema anterior, los cuaterniones puros j e i generan ramas con el mismo tallo, por lo que el problema de determinar $S_K(i, j)$ se soluciona trivialmente. De esto se habló en §9 y en la parte final de §12.3. Recordemos que en §12.3 probamos que si los tallos coinciden entonces se cumple que $\lambda^2 = \alpha\beta$. Luego se tiene que si $\alpha, \beta \notin K^2$ entonces $\lambda^2 = \alpha\beta$ si y solamente si $T_L(i) = T_L(j)$ en $\mathcal{T}(L)$, para $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$. Además, esto último es equivalente a que los cuaterniones puros i, j sean linealmente dependientes. En los demás casos del Teorema 13.8, los tallos son distintos por lo mencionado en §12.3 §12.2 y §11.

14. RAMAS EN ÁRBOLES DE BRUHAT-TITS DEFINIDOS SOBRE EXTENSIONES

Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea $\mathcal{A} = \mathbb{M}_2(K)$ el álgebra de cuaterniones descompuesta. Considere un cuaternión puro $i \in \mathcal{A}$ tal que $i^2 = \alpha \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$. Sea $L = K(\sqrt{\alpha})$. Entonces definimos $\mathcal{A}_L := \mathcal{A} \otimes_K L = \mathbb{M}_2(L)$. Luego, por lo mencionado en el Lema 12.1, podemos asumir que $\mathcal{T}(K) \subset \mathcal{T}(L)$, como conjunto de vértices. Adoptamos esta convención en todo lo que sigue.

En esta sección veremos como dentro del árbol $\mathcal{T}(L)$ aparece naturalmente la rama $S_K(i)$ y analizaremos su posición relativa respecto de la rama $S_L(i)$ definida en $\mathcal{T}(L)$.

Siempre podemos asumir que $\alpha \in \mathcal{O}_K$ pertenece a un conjunto dado de representantes SR de K^*/K^{*2} . Recordemos que podemos suponer que $\text{SR} = \{1, \Delta\} \cup \Omega \cup \Pi$, donde Δ es una unidad no ramificada de K , Ω el conjunto de representantes de las unidades ramificadas en K^*/K^{*2} y Π el conjunto de representantes que corresponde a los parámetros uniformizantes en el mismo cociente. Además $\Omega = \emptyset$ si K no es diádico (ver §4). En toda esta sección w denotará al elemento idempotente $\frac{i+\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}$.

Recordemos que el Lema 12.1 nos dice que la distancia en $\mathcal{T}(L)$ entre dos vértices vecinos en $\mathcal{T}(K)$ es igual a $e = e(L/K)$, el índice de ramificación de la extensión. Sea $i \in \mathbb{M}_2(K)$ un cuaternión puro tal que $i^2 = \alpha \in \text{SR}$. Aplicando el Lema 12.1 a $L = K(\sqrt{\alpha})$ y $\mathfrak{S} = \mathcal{O}_K[i]$ obtenemos el siguiente resultado:

Lema 14.1. Sea $\mathcal{T}(L), \mathcal{T}(K)$ árboles de Bruhat-Tits construido sobre los cuerpos locales K y $L = K(\sqrt{\alpha})$, para algún $\alpha \in K$. Entonces $S_K(i) \subseteq S_L(i)$. Además las distancias entre vértices es igual en ambos árboles si L/K no ramifica. En caso contrario los vértices vecinos en $\mathcal{T}(K)$ se encuentran al doble de distancia en $\mathcal{T}(L)$.

Dicho esto, para simplificar el estudio de la rama $S_L(i)$, necesitamos analizar el idempotente w que define su tallo en $\mathcal{T}(L)$.

Observación 14.2. Recordemos que el Lema 8.18 nos dice que para $\alpha \in \mathcal{O}_K$ la rama $S_L(i) = S_L(w)^{|t|}$, donde $t = v_L(2\sqrt{\alpha})$. Nótese además que, como $w \in \mathcal{A}$ es un elemento idempotente, por lo dicho en §11 tenemos que $S_L(w)$ es un camino maximal. En síntesis, $S_L(w) = T_L(i)$ y la profundidad de $S_L(i)$ es $v_L(2\sqrt{\alpha})$.

Recordemos que existe una correspondencia biunívoca entre bolas en K y órdenes maximales de un álgebra de matrices con coeficientes en K , definida por:

$$\Sigma : B = B[a, |\pi^r|] \mapsto \mathfrak{D}_{\Lambda_B},$$

donde $\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, como fue expuesto en §8. En lo sucesivo usaremos la equivalencia que existe entre los árboles de Bruhat-Tits para bolas en L y para órdenes maximales. Por ello diremos que los vértices en el árbol de Bruhat-Tits de L son bolas de L .

Recordemos que en §8.1 definimos una K -liana como un camino maximal que tiene por extremos a ∞ y algún punto $a \in K$. Observe que esto es equivalente a que las bolas $\{B_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ que constituyen dicha rama cumplan con $a \in B_i, \forall i \in \mathbb{Z}$. Luego la K -liana T que tiene por extremos a ∞ y $a \in K$ se puede escribir como $T = \{B[a, |\pi^i|] : i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{T}(L)$.

Lema 14.3. Considere el camino maximal S que tiene por extremos los puntos $a, b \in K$, como en la Figura 9. Entonces la bola a mayor altura en S es $B = B[a, |a - b|] = B[b, |a - b|]$.

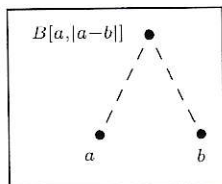


FIGURA 9. Camino maximal de extremos a y b .

Demostración. Recordemos que el punto a mayor altura B es la bola de la cual a y b son ambos centros y cuyo radio es el menor posible. De esto se desprende que $B = B[a, |a - b|] = B[b, |a - b|]$. \square

Supongamos que $1 \neq \alpha \in \text{SR}$ y sea $S = S_L(w)$ el tallo de la rama $S_L(i)$, determinado por el elemento idempotente $w = \frac{i + \sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}$. Queremos determinar la K -liana más cercana a S . Esto se ilustra en la Figura 10.

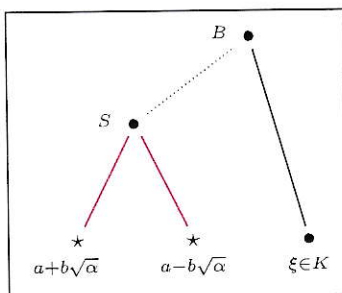


FIGURA 10. S es el tallo en cuestión, el cual denotamos con rojo. El camino que pasa por la bola B y que une el punto ξ con ∞ es la K -liana más cercana a S . Usamos la línea continua para hacer notar que el extremo de este camino es un elemento de K .

De la Figura 7 y el lema previo se desprende que para determinar la K -liana más cercana a S , basta calcular el punto $\xi \in K$ tal que:

$$d(\xi, a + b\sqrt{\alpha}) = |a + b\sqrt{\alpha} - \xi|,$$

sea minimal. Por la extensión única del valor absoluto tenemos que:

$$|a + b\sqrt{\alpha} - \xi| = |a - b\sqrt{\alpha} - \xi|,$$

Por lo tanto tenemos que encontrar $\xi \in K$ tal que:

$$|(a - \xi)^2 - b^2\alpha|,$$

es minimal, es decir:

$$b^2\alpha = (a - \xi)^2 + \kappa,$$

donde $\kappa = (a - \xi)^2 - b^2\alpha$, es minimal. Por lo mostrado en §4, el ideal generado por dicho (κ) es el defecto cuadrático $\delta(b^2\alpha)$, que sabemos que debe cumplir con:

$$(\kappa) = b^2\delta(\alpha).$$

Además $\xi = bc + a$, donde c es un elemento tal que $\delta(\alpha) = (c^2 - \alpha)$. Esto prueba el siguiente lema.

Lema 14.4. El extremo ξ de la K -liana más cercana al camino maximal que une $a + b\sqrt{\alpha}$ con $a - b\sqrt{\alpha}$ satisface que $\xi = bc + a$, donde $c \in K$ es un elemento tal que $\delta(\alpha) = (c^2 - \alpha)$.

Observación 14.5. En este análisis y en todo lo que sigue, trabajaremos en extensiones L de K en donde emplearemos la valuación normalizada por $v(\pi_L) = \frac{1}{e(L/K)}$. Por lo tanto la distancia en $\mathcal{T}(L)$ puede también tomar valores fraccionarios. Note que $v|_K = v_K$.

Analizaremos la posición de la K -liana del Lema 14.4 con respecto a S . Con esta información, estudiaremos la posición relativa de S con respecto a la rama $S_K(i)$. Como el defecto cuadrático varía dependiendo del valor de α , dividiremos el problema en casos.

14.1. $\alpha = \Delta$: Si $\alpha = \Delta$ es una unidad no ramificada entonces, como $L = K(\sqrt{\alpha})$ es una extensión de K que no ramifica, se tiene que la extensión correspondiente de cuerpos residuales \mathbb{L}/\mathbb{K} tiene grado 2. Luego cada vértice en el árbol $\mathcal{T}(L)$ tiene q^2+1 vecinos, donde $q+1$ es el número de vecinos de un vértice cualquiera en $\mathcal{T}(K)$. Las ramas que aparecen en $\mathcal{T}(L)$ y no en $\mathcal{T}(K)$ les llamamos ramas fantasmas. Estas ramas se ilustran en la Figura 11.

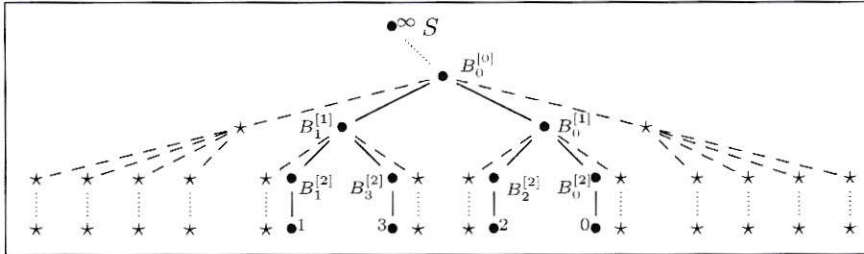


FIGURA 11. Árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(L)$, para una extensión cuadrática L de \mathbb{Q}_2 no ramificada. En la figura los vértices con estrellas están en $\mathcal{T}(L) - \mathcal{T}(K)$ y las ramas que se forman uniendo estos vértices son las denominadas ramas fantasmas. Estas se simbolizan con líneas discontinuas. Los extremos con estrella están en $L - K$.

De lo dicho al principio de esta subsección e ilustrado en la Figura 11, se deduce el siguiente lema.

Lema 14.6. Sea $\mathcal{T}(L)$ el árbol de Bruhat-Tits construido sobre $L = K(\sqrt{\Delta})$, para K cuerpo local y $\Delta \in K$ una unidad no ramificada. Entonces un vértice $B = B[a, |\pi^r|]$ de $\mathcal{T}(L)$ está en $\mathcal{T}(K)$ si y solamente si existe algún centro b de B tal que $b \in K$.

Por otro lado:

$$\delta(b^2\Delta) = b^2\delta(\Delta) = (4b^2),$$

ya que, según lo visto en §4, se tiene que $\delta(\Delta) = (4)$. Así $|a + b\sqrt{\Delta} - \xi| = |2b| = |2b\sqrt{\Delta}|$, por lo que $B[a + b\sqrt{\Delta}, |2b\sqrt{\Delta}|] = B[\xi, |2b|]$. Luego, por el lema previo, como $\xi \in K$, se tiene que $B[a + b\sqrt{\Delta}, |2b\sqrt{\Delta}|] = B[\xi, |2b|] \in \mathcal{T}(K)$. Es decir, la K -liana más cercana a S intersecciona a la rama S en el vértice a mayor altura de esta. Esto se ilustra en la Figura 12.

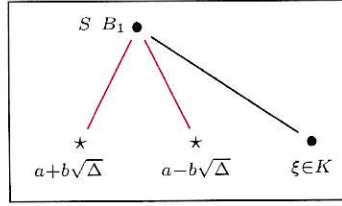


FIGURA 12. En la figura $B_1 = B[a + b\sqrt{\Delta}, |2b|] = B[\xi, |2b|]$ y $T_K(i) = \{B_1\}$. El camino que une B_1 con el extremo ξ se simboliza con línea continua para hacer notar que dicho extremo está en K . El camino en rojo corresponde a la rama S .

Ahora bien, la identidad $S_K(i) = S_L(i) \cap \mathcal{T}(K)$ se cumple para todo cuaternión puro $i \in \mathbb{M}_2(K)$. Además, debido a la observación 14.2 se tiene que la rama $S_L(i)$ es un engrosado en $p = v(2)$ del camino maximal $S_L(w)$. Por otro lado, ninguna de las bolas en $S_L(w)$ a menor altura que la bola $B_1 = B[a + b\sqrt{\Delta}, |2b|]$ es estable bajo la acción del elemento no trivial σ del grupo de Galois. Esto se debe a que si $B = B[a \pm b\sqrt{\Delta}, r]$ es una bola a menor altura que la bola B_1 entonces $\sigma.B = B[a \mp b\sqrt{\Delta}, r] \neq B$, puesto que la distancia entre $a \pm b\sqrt{\Delta}$ y $a \mp b\sqrt{\Delta}$ es mayor a r . Sea B' una bola tal que $d(B', T_L(w)) \leq v(2)$ y tal que el vértice en $S_L(w)$ más cercano a B' no sea B_1 . Entonces la acción de σ en B' tiene por imagen una bola distinta de B' . Por lo tanto, ningún vértice a distancia $t \leq v(2)$ de una bola $B \neq B_1$ en $S_L(w)$ pertenece a $S_K(i)$. En cambio, las $q + 1$ bolas vecinas de B_1 en $\mathcal{T}(K)$ pertenecen a $S_K(i)$. Más aún, toda bola en $\mathcal{T}(K)$ a distancia $t \leq v(2)$ de B_1 es un vértice de $S_K(i)$. Luego, como $B_1 \in S_K(i)$, se tiene que $S_K(i)$ es un engrosado en $t = v(2)$ de $\{B_1\}$. Por lo tanto $T_K(i) = \{B_1\}$, donde $B_1 = B[a + b\sqrt{\Delta}, |2b\sqrt{\Delta}|] = B[\xi, |2b|]$ y la rama $S_K(i)$ tiene profundidad $p_K(S_K(i)) = v(2)$. En particular, tenemos que $T_K(i)$ se incrusta en $T_L(i)$, como se muestra en la Figura 12.

14.2. $\alpha = \pi \in \Pi$: Si $\alpha = \pi$ es un parámetro uniformizante de K entonces podemos suponer que $\pi_L^2 = \pi_K$. Luego, en el árbol $\mathcal{T}(L)$, aparecen vértices entre los puntos vecinos de $\mathcal{T}(K)$. Dicho vértices se denominan puntos o vértices intermedios. Esto se ilustra en la Figura 13.

De lo dicho acerca de la forma del árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(L)$ y mostrado en la Figura 13, se desprende el siguiente lema.

Lema 14.7. Sea $\mathcal{T}(L)$ el árbol de Bruhat-Tits construido sobre $L = K(\sqrt{\pi})$, para K cuerpo local y π parámetro uniformizante de K . Entonces un vértice $B = B[a, |\pi_L^r|]$ de $\mathcal{T}(L)$ está en $\mathcal{T}(K)$ si y solamente si $r \in 2\mathbb{Z}$ y $a \in K$, para algún centro a de la bola B .

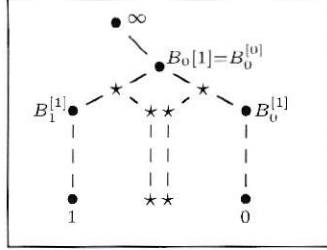


FIGURA 13. Árbol de Bruhat-tits $\mathcal{T}(L)$, de una extensión cuadrática ramificada L de \mathbb{Q}_2 . En la figura los vértices con estrellas están en $\mathcal{T}(L) - \mathcal{T}(K)$ y los extremos con estrellas están en $L - K$.

Por otro lado:

$$\delta(b^2\pi) = b^2\delta(\pi) = (b^2\pi),$$

ya que, según lo visto en §4, se tiene que $\delta(\pi) = (\pi)$. Así $|a + b\sqrt{\pi} - \xi| = |b\pi_L|$. Por esto $B_1 = B[a + b\sqrt{\pi}, |2b\pi_L|]$, el vértice a mayor altura de $S = S_L(w)$, está a distancia $d = v(2)$ del punto $B = B[\xi, |b\pi_L|]$ de la K -liana a menor distancia de S y podemos escoger $\xi = a$. Esto se ilustra en la Figura 14.

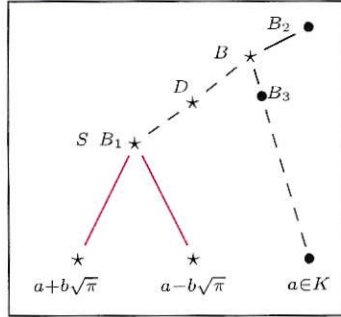


FIGURA 14. En la figura $B_1 = B[a + b\sqrt{\pi}, |2b\sqrt{\pi}|]$, $B = B[a, |b\sqrt{\pi}|]$ y $T_K(i)$ consiste en los vértices $B_2 = B[a, |b|]$ y $B_3 = B[a, |b\pi|]$. El camino en rojo corresponde a la rama S .

Recordemos que $S_K(i) = S_L(i) \cap \mathcal{T}(K)$. Además, debido a lo mencionado en la observación 14.2 se tiene que la rama $S_L(i)$ es un engrosado en $p = v(2) + \frac{1}{2}$ del camino maximal $S_L(w)$. Sea $D = B[a + b\sqrt{\pi}, |b\pi|]$. Si consideramos un vértice $D' \in S_L(i)$ tal que $d(D', D) < d(D', B)$, entonces se tiene que $D' \notin S_K(i)$. Esto se debe a que si $D' = B[c, |\pi_L^r|] \in \mathcal{T}(K)$, entonces $c \in K$ y $r = 2s$, para $s \in \mathbb{Z}$. Luego si tomamos las bolas $B^n = B[c, |\pi_K^{s+n}|]$, para $n \in \mathbb{Z}$, construimos una K -liana más cercana a $S_L(w)$ que la considerada en un principio. Esto nos lleva a una contradicción. De la misma manera, si un vértice $F = B[f, |b\pi|]$, vecino a $B = B[a, |b\sqrt{\pi}|]$ y distinto de $B_3 = B[a, |b\pi|]$, fuese un vértice de $\mathcal{T}(K)$ entonces el vértice B cumpliría con $B \in \mathcal{T}(K)$. Esto último se debe a que B correspondería a la bola $B[a, |f - a|] \in \mathcal{T}(K)$. Esto también nos lleva a una contradicción.

Sumando lo anterior al hecho de que $B_2 = B[a, |b|]$ y $B_3 = B[a, |b\pi|]$ son los vértices en $S_L(i) \cap \mathcal{T}(K)$ a mayor distancia de $S_L(w)$, concluimos que $S_K(i) = \{B_2, B_3\}$. Es decir $S_K(i)$ es una rama de profundidad nula cuyo tallo está constituido por los vértices B_2 y B_3 . En particular la rama $T_K(i)$ está constituida por dos vértices a distancia $v(2) + \frac{1}{2}$ de la rama $T_L(i)$.

14.3. $\alpha = u \in \Omega$: Si $\alpha = u$ es una unidad ramificada entonces, como L/K ramifica, se tiene que $\pi_L^2 \mathcal{O}_L = \pi_K \mathcal{O}_L$. Luego en el árbol $\mathcal{T}(L)$ aparecen puntos intermedios como en la sección anterior. Esto se ilustra en la Figura 15. Note que este caso solo se tiene cuando K es un cuerpo local diádico.

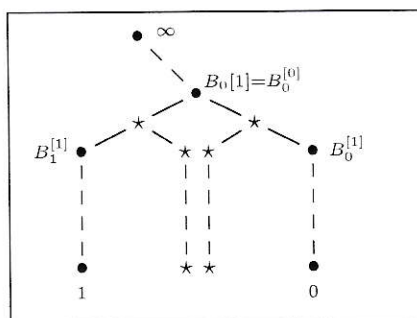


FIGURA 15. Árbol de Bruhat-tits $\mathcal{T}(L)$, de una extensión cuadrática ramificada L de \mathbb{Q}_2 . En la figura los vértices con estrellas están en $\mathcal{T}(L) - \mathcal{T}(K)$ y los extremos con estrellas están en $L - K$.

De lo mencionado acerca del árbol construido sobre L e ilustrado en la Figura 15, se desprende el siguiente lema.

Lema 14.8. Sea $\mathcal{T}(L)$ el árbol de Bruhat-Tits construido sobre $L = K(\sqrt{u})$, para K un cuerpo local y una unidad ramificada $u \in K$. Entonces un vértice $B = B[a, |\pi_L^r|]$ de $\mathcal{T}(L)$ está en $\mathcal{T}(K)$ si y solamente si $r \in 2\mathbb{Z}$ y $a \in K$, para algún centro a de la bola B .

Por otro lado:

$$\delta(b^2 u) = b^2 \delta(u) = (b^2 \pi^{2t+1}),$$

ya que según lo visto en §4, se tiene que $\delta(u) = (\pi^{2t+1})$, donde $0 \leq t < e = v_K(2)$. Así $|a + b\sqrt{u} - \xi| = |b\pi_L^{2t+1}|$. Por esto $B_1 = B[a + b\sqrt{u}, |2b|]$, el punto a mayor altura de $S = S_L(w)$, está a distancia $d = v(2) - t - \frac{1}{2}$ del vértice $B = B[\xi, |b\pi_L^{2t+1}|]$, que es el vértice de la K -liana más cercano a S . Esto se ilustra en la Figura 16.

Recuérdese que $S_K(i) = S_L(i) \cap \mathcal{T}(K)$. Además, debido a lo mencionado en la observación 14.2, la rama $S_L(i)$ es un engrosado en $p = v(2)$ del camino maximal $S_L(w)$. Sea $D = B[a + b\sqrt{u}, |b\pi_K^{t+1}|]$. Si consideramos un vértice $D' \in S_L(i)$ tal que $d(D', D) < d(D', B)$, se tiene que $D' \notin S_K(i)$. Esto se debe a que si $D' = B[c, |\pi_L^r|] \in \mathcal{T}(K)$, entonces $c \in K$ y $r = 2s$, para algún $s \in \mathbb{Z}$. Luego, si tomamos las bolas $B^n = B[c, |\pi_K^{s+n}|]$, para $n \in \mathbb{Z}$, construimos una K -liana más cercana a $S_L(w)$ que la considerada en un principio. Esto nos lleva a una contradicción. De la misma manera, si un vértice $F = B[f, |b\pi_K^{t+1}|]$, vecino a $B = B[\xi, |b\pi_L^{2t+1}|]$ y

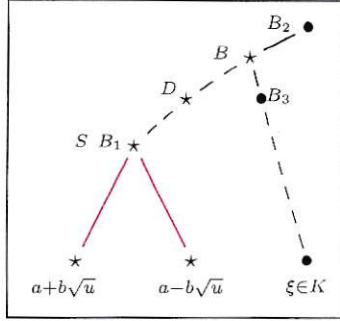


FIGURA 16. En la figura $B_1 = B[a+b\sqrt{u}, |2b|]$, $B = B[\xi, |b\pi^{2t+1}|]$ y $T_K(i)$ consiste en los vértices $B_2 = B[\xi, |b\pi^t|]$ y $B_3 = B[\xi, |b\pi^{t+1}|]$. El camino señalado en rojo corresponde a S .

distinto de $B_3 = B[\xi, |b\pi^{t+1}|]$, estuviese en $\mathcal{T}(K)$ entonces el vértice B cumpliría con $B \in \mathcal{T}(K)$. Esto último se debe a que B correspondería a la bola $B[\xi, |f - \xi|] \in \mathcal{T}(K)$. Esto nos lleva a otra contradicción.

Sumando lo anterior al hecho de que $B_2 = B[\xi, |b\pi^t|]$ y $B_3 = B[\xi, |b\pi^{t+1}|]$ son los vértices en $S_L(i) \cap \mathcal{T}(K)$ a menor distancia de $S_L(w)$, concluimos que $S_K(i)$ es un engrosado en $p(S_K(i)) = t$ del camino finito con vértices $\{B_2, B_3\}$. Es decir, la rama $T_K(i)$ es el camino finito $\{B_2, B_3\}$ y la profundidad de la rama $S_K(i)$ es $p(S_K(i)) = t$. En particular, la rama $T_K(i)$ está constituida por dos vértices a distancia $v(2) - t$ de la rama $T_L(i)$.

Lo dicho en §14.1, §14.2 y §14.3 nos proporciona un método para encontrar la profundidad de las ramas $S = S_K(i)$ en el árbol de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(K)$. Esto se ilustra en el siguiente teorema.

Teorema 14.9. Sea $i \in \mathbb{M}_2(K)$ un cuaternión puro tal que $i^2 = \alpha$, para $\alpha \in \mathcal{O}_K$ no nulo. Entonces la profundidad p de la rama $S = S_K(i)$, satisface que $\delta(\alpha) = (\pi^{2p+1})$, excepto cuando $\alpha = u^2\pi^{2r}\Delta$, para $u \in \mathcal{O}_K^*$, en cuyo caso $\delta(\alpha) = (\pi^{2p})$ y cuando $\alpha = \beta^2$, en cuyo caso $p = v_K(2\beta)$.

Demostración. Observe que si $\alpha = ab^2$, para $b \in \mathcal{O}_K$, entonces definiendo $i' = \frac{i}{b}$ tenemos que $i'^2 = a$. Además se cumple que $S_K(i) = S_K(i')^{[v(b)]}$. Por lo tanto $p(S_K(i)) = v(b) + p(S_K(i'))$. Por otro lado, la identidad $\delta(ab^2) = b^2\delta(a) = \pi^{2v(b)}\delta(a)$ se cumple para cada par $(a, b) \in K^2$. Esta observación nos permite asumir, sin pérdida de generalidad, que α pertenece al conjunto de representantes SR, definido al principio de esta sección y en §4. Asumiendo esto y usando el Lema 8.18 demostremos lo pedido, por casos como sigue:

- i.- Si $\alpha = 1$ se concluye, mediante un cálculo directo en el Lema 8.18, que la profundidad p de la rama $S_K(i)$ es $p = p_K(S_K(i)) = v_K(2)$.
- ii.- Si $\alpha = \Delta$, entonces por lo mostrado en §14.1 tenemos que la profundidad de la rama $S_K(i)$ es $p = p_K(S_K(i)) = v_K(2)$.
- iii.- Si $\alpha = \pi$, entonces por lo demostrado en §14.2 tenemos que la profundidad de la rama $S_K(i)$ es $p = p_K(S_K(i)) = 0$.
- iv.- Si $\alpha = u$, entonces por lo demostrado en §14.3 tenemos que la profundidad de la rama $S_K(i)$ es $p = p_K(S_K(i)) = t$, donde $\delta(u) = (\pi^{2t+1})$. \square

Esto da una demostración alternativa a [A3-Sa, Lema 3.2], probado por Luis Arenas-Carmona e Ignacio Saavedra.

14.4. Estudio de los caminos maximales sobre extensiones. Sea K un cuerpo local no arquimediano con valuación v y considere una extensión de grado finito L de K . Denotamos por $e = e(L/K)$ al índice de ramificación de la extensión. Al igual que en las secciones anteriores usaremos la valuación normalizada en L inducida por $v(\pi_L) = \frac{1}{e}$. Dicha valuación induce una distancia normalizada en $\mathcal{T}(L)$ definida por $\varrho(\mathfrak{D}_L, \mathfrak{D}'_L) = \frac{1}{e}$, donde $\mathfrak{D}_L, \mathfrak{D}'_L$ son vértices vecinos en $\mathcal{T}(L)$.

Sea $i \in \mathbb{M}_2(K)$ cuaternión puro tal que $i^2 = \beta^2 \in \mathcal{O}_K^2$. Recordemos que, por lo mostrado en el Lema 8.18, la rama $S_K(i)$ corresponde al engrosado en $t = v(2\beta)$ de un camino maximal. Por ello en esta subsección estudiaremos el comportamiento de los caminos maximales engrosados $S_K(\mathfrak{H}) \subset \mathcal{T}(K)$, al considerarlos como subconjuntos de $\mathcal{T}(L)$. Luego aplicaremos esto al caso particular $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i]$.

Recordemos que si S es un camino maximal entonces existe una transformación de Moebius τ que lleva S al camino maximal que une a 0 con ∞ . Luego la demostración del Lema 12.1 nos dice que $\tau.S_L$ es el camino maximal que une a 0 con ∞ en $\mathcal{T}(L)$. Por lo tanto S_L tiene los mismos extremos que S . Es decir la inclusión del Lema 12.1 no cambia los extremos de los caminos maximales en $\mathcal{T}(K)$. Esto nos dice que la rama $T_K(i)$ está contenida en $T_L(i)$, lo que da respuesta al problema de determinar la posición relativa de las ramas $S_K(i)$ y $S_L(i)$. Al igual que en la sección §12 identificaremos S con el camino maximal en $\mathcal{T}(L)$ que tiene los mismos extremos que $S \subset \mathcal{T}(K)$.

Haciendo uso de la notación anterior, si existe un camino maximal S tal que $S_K(\mathfrak{H}) = S^{[t]}$ en $\mathcal{T}(K)$, entonces se tiene que $S_L(\mathfrak{H}) = S^{[k]}$, donde $e(t+1) > k \geq et$ y donde S se interpreta como un subconjunto de $\mathcal{T}(L)$ con las convenciones precedentes. Esto se debe a que $S_K(\mathfrak{H}) = S_L(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{T}(K)$ y a la demostración del Lema 12.1. En lo que sigue mostraremos que $k = te$.

Considere $\mathfrak{D} \in S_K(\mathfrak{H})$. Decimos que un vértice \mathfrak{D} tiene valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$ si tiene solamente un vecino en $S_K(\mathfrak{H})$. Observe que el Lema 12.1 prueba que $k \neq et$ si y solamente si todo vértice de valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$ tiene valencia mayor a 1 en $S_L(\mathfrak{H})$.

Sea $\mathfrak{D} \in S_K(\mathfrak{H})$. Recordemos que, por la correspondencia vista en §6, entre reticulados y órdenes maximales, existe un reticulado $\Lambda \subset K^2$ tal que $\mathfrak{D} = \text{End}_{\mathcal{O}_K}(\Lambda) = \mathfrak{D}_\Lambda$. Sea $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}/\pi_K \mathfrak{H}$. Como $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{D}$ tenemos que $T\Lambda \subset \Lambda$, para cualquier $T \in \mathfrak{H}$. Definimos la representación $\phi : \bar{\mathfrak{H}} \rightarrow \text{End}(\Lambda/\pi_K \Lambda) \cong \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$ por $\phi(\bar{T})(\bar{w}) = \bar{T}w$, donde $w \in \Lambda/\pi_K \Lambda \cong \mathbb{K}^2$. Usando estas definiciones enunciamos el siguiente lema.

Lema 14.10. Sea $\mathfrak{H} \subset \mathbb{M}_2(K)$ un \mathcal{O}_K -orden contenido en más de un orden maximal. Entonces $\mathfrak{D} \in S_K(\mathfrak{H})$ tiene valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$ si y solamente si existe $h \in \mathfrak{H}$ tal que $\phi(\bar{h})$ es nilpotente y no trivial.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{D}_{\Lambda'}$ es un orden maximal vecino a $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\Lambda$. Entonces, por lo visto en §6, se tiene que $\Lambda' = \pi_K \Lambda + v\mathcal{O}_K$, donde $v \in \Lambda - \pi_K \Lambda$. Sea $T \in \mathfrak{D}_{\Lambda'}$. Afirmamos que $T \in \mathfrak{D}_{\Lambda'}$ si y solamente si $\bar{T} \in \mathfrak{D}/\pi_K \mathfrak{D}$ cumple con $\bar{T}\bar{v} \in \mathbb{K}\bar{v}$, donde $\bar{v} \in \Lambda/\pi_K \Lambda$ es la imagen de v bajo el epimorfismo canónico.

Supongamos que $T \in \mathfrak{D}_{\Lambda'}$. Entonces $T\Lambda' \subset \Lambda'$, luego $T(\pi_K\Lambda + \mathcal{O}_K v) \subset \pi_K\Lambda + \mathcal{O}_K v$. Por lo tanto, en el cociente, se tiene que $\overline{T\bar{v}} \in \overline{\pi_K\Lambda + \mathcal{O}_K v} = \mathbb{K}\bar{v}$. Recíprocamente, si $\overline{T\bar{v}} \in \mathbb{K}\bar{v}$, entonces $Tv = \lambda v + \pi v_1$, con $v_1 \in \Lambda$ y $\lambda \in \mathcal{O}_K$. Luego $T(\mathcal{O}_K v) = \mathcal{O}_K Tv \subset \mathcal{O}_K v + \pi\Lambda$. Como $T\Lambda \subset \Lambda$, tenemos que $T(\pi_K\Lambda + v\mathcal{O}_K) \subset \pi_K\Lambda + v\mathcal{O}_K$, es decir $T \in \mathfrak{D}_{\Lambda}$.

Este resultado nos dice que $\mathfrak{D}_{\Lambda'} \in S_K(\mathfrak{H})$ si y solamente si $\overline{T\bar{v}} \in \mathbb{K}\bar{v}$, para cualquier $T \in \mathfrak{H}$. En particular \mathfrak{D} tiene valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$ si y solamente si existe un único vector $\bar{v} \in \Lambda/\pi_K\Lambda$, salvo multiples, tal que $\overline{T\bar{v}} \in \mathbb{K}\bar{v}$, para cualquier $T \in \mathfrak{H}$.

Supongamos ahora que \mathfrak{D} tiene valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$. Por lo mencionado en el párrafo anterior, la representación $\phi : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, definida por $\phi(\overline{T})(\bar{w}) = \overline{T\bar{w}}$, es indescomponible. Luego, tomando en \mathbb{K}^2 la base compuesta por \bar{v} y otro vector \bar{v}' linalmente independiente a \bar{v} , tenemos que $\phi(\overline{T}) = \begin{pmatrix} \overline{a_T} & \overline{c_T} \\ 0 & \overline{b_T} \end{pmatrix}$, donde $a_T, b_T, c_T \in$

\mathcal{O}_K . Como ϕ es indescomponible existe $T \in \mathfrak{H}$ tal que $\phi(\overline{T}) = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$, con $c \notin \pi_K\mathcal{O}_K$. Considere $T_1 = T - a\text{Id} \in \mathfrak{H}$, de modo que $\phi(\overline{T_1}) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c} \\ 0 & \bar{b} - \bar{a} \end{pmatrix}$. Observe que $\phi(\overline{T_1})^2 = \overline{(b-a)}\phi(\overline{T_1})$. Si $\bar{b} = \bar{a}$ obtenemos un elemento nilpotente no trivial. Si $\overline{b-a} \neq 0$, entonces existe una base en la cual $\phi(\overline{T_1}) = \begin{pmatrix} \overline{b-a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Considere $T_2 \in \mathfrak{H}$ tal que $\phi(\overline{T_2}) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{w} \\ \bar{z} & \bar{y} \end{pmatrix}$, con $\bar{z} \neq 0$ o $\bar{w} \neq 0$. Este elemento existe pues ϕ es indescomponible. Entonces $T_3 = T_2 - x\text{Id} \in \mathfrak{H}$ cumple con $\phi(\overline{T_1 T_3}) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{w(b-a)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que es un elemento nilpotente no trivial, si $\bar{w} \neq 0$. En caso contrario $\phi(\overline{T_3 T_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{z(b-a)} & 0 \end{pmatrix}$ es un elemento nilpotente no trivial. Esto demuestra que, en cualquier caso, existe $h \in \mathfrak{H}$ tal que $\phi(\overline{h})$ es nilpotente y no trivial.

Por otro lado si existe $h \in \mathfrak{H}$ tal que $\phi(\overline{h})$ es nilpotente y no trivial, tenemos que $\phi(\overline{\mathfrak{H}})$ contiene alguna matriz no diagonal en cualquier sistema de coordenadas. Por lo tanto ϕ es indescomponible. Luego existe a lo más un vector $\bar{v} \in \Lambda/\pi_K\Lambda$ tal que $\overline{T\bar{v}} \in \mathbb{K}\bar{v}$, para cualquier $T \in \mathfrak{H}$. Esto nos permite concluir que $\mathfrak{D} \in S_K(\mathfrak{H})$ tiene valencia 1, ya que por hipótesis, la valencia de \mathfrak{D} no es 0, pues $S_K(\mathfrak{H})$ tiene más de un elemento. \square

Estudiemos el comportamiento de los vértices de valencia 1 de una rama al incrustar $\mathcal{T}(K) \subset \mathcal{T}(L)$. Supongamos que $\mathfrak{D} \in S_K(\mathfrak{H})$ es un vértice de valencia 1. Entonces existe $h \in \mathfrak{H}$ tal que $\phi(\overline{h})$ es nilpotente y no trivial, donde la representación ϕ es la definida en el párrafo que precede al Lema 14.10.

Observe que si $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\mathcal{O}_K}$ entonces tomando la matriz P tal que $P(\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K) = \Lambda$ se tiene que $\mathfrak{D} = P\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_K)P^{-1}$. Luego, la imagen $\mathfrak{D}_L = \mathfrak{D} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ del vértice \mathfrak{D} en $\mathcal{T}(L)$, cumple con $\mathfrak{D}_L = P\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_L)P^{-1} = \text{End}_{\mathcal{O}_L}(\Lambda \otimes \mathcal{O}_L)$.

Considere $\mathfrak{H}_L = \mathfrak{H} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$. Entonces la representación $\phi_L : \overline{\mathfrak{H}_L} \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{L})$ asociada a la acción de \mathfrak{H}_L sobre el reticulado $\Lambda \otimes \mathcal{O}_L$ cumple con $\phi_L(\overline{T \otimes 1}) = \phi(\overline{T})$. Considere entonces el elemento $h_L = h \otimes 1 \in \mathfrak{H}_L$, con h como antes, de modo que

$\phi_L(\overline{h \otimes 1}) = \phi(\overline{h})$ es un elemento idempotente no trivial. Utilizando el lema previo tenemos que \mathfrak{D}_L es un vértice de valencia 1 en $S_L(\mathfrak{H}_L)$.

Teorema 14.11. Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea L una extensión de este. Sea $\mathfrak{D} \in S_K(\mathfrak{H})$ un vértice de valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$. Entonces la imagen $\mathfrak{D}_L = \mathfrak{D} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ del vértice \mathfrak{D} en $\mathcal{T}(L)$ tiene valencia 1 en $S_L(\mathfrak{H})$.

Consideremos ahora una rama $S_K(\mathfrak{H})$ tal que existe un camino maximal S que cumple con $S_K(\mathfrak{H}) = S^{[t]}$ en $\mathcal{T}(K)$. Haciendo uso del teorema anterior, demosntremos que la profundidad de la rama $S_K(\mathfrak{H})$ en $\mathcal{T}(L)$ es $k = et$. En efecto ya sabemos que $e(t+1) > k \geq et$, donde $k \neq et$ si es que existe algún vértice de valencia 1 en $S_K(\mathfrak{H})$ que no tiene valencia 1 en $S_L(\mathfrak{H})$. Haciendo uso del teorema anterior concluimos que esto último no puede suceder. Gráficamente, esto quiere decir que los vértices de la frontera de la rama $S_K(\mathfrak{H})$ son también vértices de la frontera de la rama $S_L(\mathfrak{H})$. Ahora bien, como en $\mathcal{T}(L)$ dos vértices son vecinos si y solamente si están a distancia $\frac{1}{e}$, se tiene que la profundidad normalizada de la rama $S_L(\mathfrak{H})$ en $\mathcal{T}(L)$ es t .

Teorema 14.12. Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea L una extensión finita de este. Considere los árboles de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(K)$ y $\mathcal{T}(L)$ definidos sobre K y L respectivamente. Si la rama $T_K(\mathfrak{H})$ es un camino maximal cuyos extremos son a, b , y si la profundidad de la rama $S_K(\mathfrak{H})$ en $\mathcal{T}(K)$ es t , entonces $T_L(\mathfrak{H})$ es el único camino maximal en $\mathcal{T}(L)$ con los mismos extremos a, b , y la profundidad normalizada de $S_L(\mathfrak{H})$ en $\mathcal{T}(L)$ es también t .

Aplicando este último resultado al orden $\mathfrak{H} = \mathcal{O}_K[i]$, donde i es un cuaternión puro tal que $i^2 = \beta^2$, concluimos el siguiente resultado.

Corolario 14.13. Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea L una extensión finita de este. Considere los árboles de Bruhat-Tits $\mathcal{T}(K)$ y $\mathcal{T}(L)$ definidos sobre K y L respectivamente. Sea $i \in \mathbb{M}_2(K)$ cuaternión puro tal que $i^2 = \beta^2 \in \mathcal{O}_K^2$. Si la rama $T_K(i)$ es un camino maximal cuyos extremos son a, b entonces $T_L(i)$ es el único camino maximal en $\mathcal{T}(L)$ con los mismos extremos a, b y la profundidad normalizada de $S_L(i)$ en $\mathcal{T}(L)$ es $v_K(2\beta)$.

15. DISTANCIA ENTRE TALLOS

Sea K un cuerpo local no arquimediano y sea $\pi = \pi_K$ un parámetro uniformizante de K . En esta sección, así como en §16 y en §17, estudiaremos la posición relativa entre las ramas $S = S_K(i) = \{\mathfrak{D} \in \mathcal{T}(K) : i \in \mathfrak{D}\}$ y $T = S_K(j)$, donde i, j son cuaterniones puros tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ son enteros y no nulos. Por lo mencionado en §4, podemos asumir que $\alpha, \beta \in \text{SR} = \{1, \Delta\} \cup \Omega \cup \Pi$, donde Δ es una unidad no ramificada de K , Ω es un conjunto de representantes de las unidades ramificadas en K^*/K^{*2} y Π es un conjunto de representante de los parámetros uniformizantes en el mismo cociente.

En lo que sigue trabajaremos en los cuerpos locales $L = K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$, en donde emplearemos la valuación normalizada por $v(\pi_L) = \frac{1}{e(L/K)} = \varrho(\mathfrak{D}_L, \mathfrak{D}'_L)$, para ϱ la distancia normalizada en $\mathcal{T}(L)$ y $\mathfrak{D}_L, \mathfrak{D}'_L$ vértices vecinos en el mismo árbol. Dividiremos el análisis de estas distancia en varios casos dependiendo de los valores de $\alpha, \beta \in \text{SR}$.

Partamos analizando el caso más elemental, que se da cuando $\alpha = \beta = 1$. En este caso trabajamos en $L = K$, en donde, por los cálculos hechos en §11, tenemos que $T_K(i)$ y $T_K(j)$ son dos caminos maximales. Si i, j son cuaterniones linealmente independientes, podemos asumir que $T_K(i)$ es el camino maximal que une a 0 con ∞ (en azul en las figuras) y que $T_K(j)$ es el camino que une a 1 con t (en rojo en las figuras), donde $\lambda = \pm \frac{1+t}{1-t}$.

Si $|1-t| < 1$ tenemos una configuración como la que se exhibe en la Figura 17. Luego la distancia d entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es:

$$d = v(1-t).$$

Teniendo en cuenta que $|1-t| < 1$ implica $|1| = |t|$, tenemos que $d = v\left(1 - \frac{1}{t}\right)$. De esto se sigue que $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)$. Reescribiendo la igualdad anterior, en términos del producto simetrizado λ , obtenemos que:

$$d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - 1}{4}\right).$$

Sea $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la función definida por $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - 1}{4}\right)$. Si $|1-t| > 1$ entonces $0 \in B[1, |1-t|]$, luego $B[0, |1-t|] = B[1, |1-t|]$. En este caso el vértice a mayor altura de $T_K(j)$ es un vértice de $T_K(i)$. Entonces la distancia entre los tallos es nula, puesto que se intersectan. Esto se ilustra en la Figura 18. De la misma figura se sigue que el largo l del segmento de intersección entre las ramas $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $l = -v(1-t)$. Esto debido a que el segmento de intersección es el que tiene por vértice de inicio $D = B[0, 1]$ y por vértice final a $B_1 = B[0, |1-t|]$. Por otro lado, como $B[1, |1-t|] = B[0, |t|]$ se tiene que $l = v\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)$. Así obtenemos que:

$$l = v\left(\frac{\lambda^2 - 1}{4}\right) = -2d_f(\lambda)$$

Observe que si $t = \infty$, es decir si $\lambda = \pm 1$, tenemos que $l = \infty$. Este caso se obtiene identificando los extremos correspondientes en la Figura 18. En dicho caso

la rama de intersección esta conformada por las bolas $B = B[0, |\pi^r|]$, con $r \leq 0$ y es un rayo.

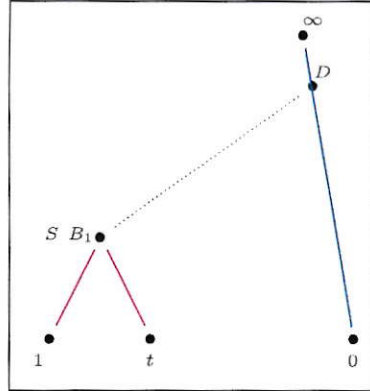


FIGURA 17. Posición relativa de $S_K(j)$ (en rojo) y $S_K(i)$ (en azul) para $|1 - t| < 1$. En la figura $B_1 = B[1, |1 - t|]$ y $D = B[0, 1]$. La rama $T_K(j)$ tiene por vértice a mayor altura a B_1 . La distancia en cuestión es la que se tiene entre la bola B_1 y D . Esta se grafica con línea punteada.

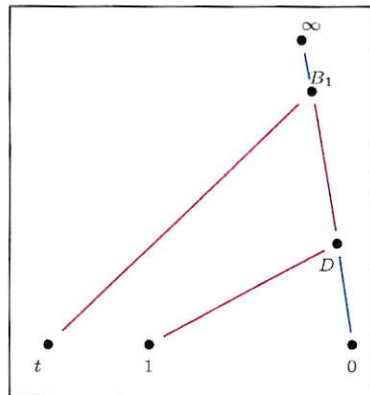


FIGURA 18. Posición relativa de $S_K(j)$ (en rojo) y $S_K(i)$ (en azul) para $|1 - t| > 1$. En la figura $B_1 = B[1, |1 - t|]$ y $D = D[0, 1]$. $T_K(j)$ es la rama que tiene por extremos a 1 y t . La línea púrpura representa el segmento de intersección entre los tallos.

Por último si $|1 - t| = 1$, se tiene que $0 \in B[1, |1 - t|]$. Luego $B[0, 1] = B[0, |1 - t|] = B[1, |1 - t|]$. Por lo tanto la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es nula. Esto se ilustra en la Figura 19.

De hecho, en este caso el largo del segmento de intersección entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $l = v(t)$. Observe que $v(1 - t) = 0$. Por lo tanto $l = v\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)$. Esto nos permite

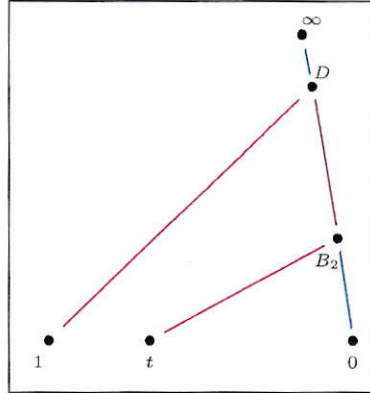


FIGURA 19. Posición relativa de $S_K(j)$ (en rojo) y $S_K(i)$ (en azul) para $|1-t|=1$. En la figura $B_2 = B[0, |t|]$ y $D = B[0, 1]$. $T_K(j)$ es el camino maximal que tiene por extremos a 1 y t . La línea de color púrpura representa el segmento de intersección entre los tallos.

reescribir el largo del segmento de intersección entre las ramas $T_K(i)$ y $T_K(j)$ como:

$$l = v \left(\frac{\lambda^2 - 1}{4} \right) = -2d_f(\lambda).$$

Además, si i, j son cuaterniones puros linealmente dependientes, entonces $i = \pm j$, ya que $i^2 = j^2 = 1$. Luego $\lambda = \frac{ij+ji}{2} = \pm 1$. Por otro lado sabemos que en este caso las ramas $T_K(i)$ y $T_K(j)$ coinciden, es decir se intersectan en un camino maximal, por lo que podemos asumir que $l = \infty$. Observe que poniendo $\lambda = \pm 1$ en la fórmula para el largo de la rama de intersección obtenemos el mismo resultado. Luego, para efectos de la expresión del largo de la rama de intersección y la distancia entre tallos, la hipótesis de independencia lineal se puede eliminar. No obstante, si $\lambda = \pm 1$, $l = \infty$ no distingue el caso linealmente independiente, en el que $T_K(i) \cap T_K(j)$ es un rayo, del caso linealmente dependiente, en el que $T_K(i) = T_K(j)$. Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 15.1. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(k)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = 1$, $j^2 = 1$ e $ij + ji = 2\lambda$, y considere $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v \left(\frac{\lambda^2 - 1}{4} \right)$. Entonces la distancia d entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = \max \{0, d_f(\lambda)\}$. Si $d = 0$ entonces el largo l del segmento de intersección entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $l = -2d_f(\lambda)$.

Observación 15.2. Si $\lambda = 0$, entonces $d = v(2)$. De esta manera recuperamos los resultados de Ignacio Saavedra en [Sa, §4].

16. ANÁLISIS DE DISTANCIAS PARA $\alpha = 1$

En esta sección seguiremos con el estudio que comenzamos en §15. Específicamente, estudiaremos aquí la posición relativa de las ramas $S = S_K(i)$ y $T = S_K(j)$, donde i, j son cuaterniones puros enteros, para los cuales podemos asumir, por lo dicho en §13, que $i^2 = \alpha = 1$ y $j^2 = \beta \in \text{SR} - \{1\}$. Observe que en este caso los cuaterniones i, j son linealmente independientes, pues de lo contrario $\lambda^2 = \alpha\beta$, luego $\beta \in K^2 \cap \text{SR} = \{1\}$. Dividiremos nuestro estudio de acuerdo al valor de β . Además, dado β , trabajaremos en la extensión cuadrática $L = K(\sqrt{\beta})$ de K .

En este capítulo asumiremos que $T_L(i)$ es el camino maximal que une a 0 con ∞ . Esto ya que en alguna base $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y en esta base hacemos todo el análisis. Luego, por lo mencionado en §12, la rama $T_L(i)$ coloreada en azul y la rama $T_L(j)$ coloreada con rojo lucen como en la Figura 20.

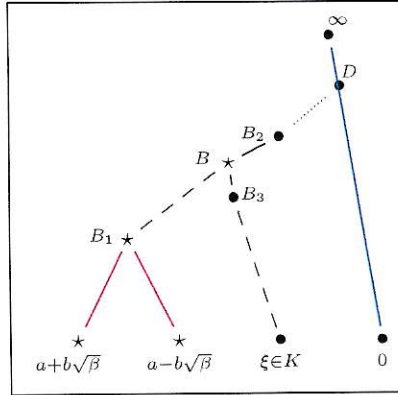


FIGURA 20. En la figura $B_1 = B[a + b\sqrt{\beta}, |2b\sqrt{\beta}|]$ y si $\beta \neq \Delta$ entonces $T_K(j)$ tiene por vértice más alto B_2 . Bajo el mismo supuesto $B \notin \mathcal{T}(K)$ y en este caso la distancia en cuestión es la que se muestra entre la bola B_2 y $D = B[0, |a + b\sqrt{\beta}|]$. Esta se grafica con línea punteada. Si $\beta = \Delta$ entonces el único vértice de $T_K(j)$ es $B \in \mathcal{T}(K)$ y la distancia en cuestión es la que se muestra entre las bolas B y D . De hecho, en este caso $B = B_1$.

Observe que $T_K(j)$ puede estar constituido, dependiendo del valor de β , tanto por un vértice como por dos. Esto se debe a lo calculado en §7.

16.1. $\beta = \Delta$. En este caso trabajamos en $L = K(\sqrt{\Delta})$, extensión de grado 2 que no ramifica sobre K . En la Figura 12 y la Figura 21 se muestra como lucen, en este caso, los tallos $T_L(i)$ y $T_L(j)$. Observe que el punto a mayor altura en el tallo de $T_L(j)$, es el tallo de $S_K(j)$ (cf. §14). Por ello la distancia normalizada entre los tallos en $\mathcal{T}(L)$ es:

$$d = v \left(\frac{2b\sqrt{\Delta}}{a + b\sqrt{\Delta}} \right) = -v \left(\frac{a + b\sqrt{\Delta}}{2b} \right),$$

donde v es la valuación normalizada, definida en 14.5. Sin embargo, como $|\frac{a}{b} + \sqrt{\Delta}| = |\frac{a}{b} - \sqrt{\Delta}|$, tenemos que:

$$d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta}{4}\right) \geq 0,$$

donde $\lambda = \pm \frac{a}{b}$ es el producto simetrizado de i y j . Observe que, por la definición de v , se tiene que d es la distancia en $\mathcal{T}(K)$ entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$. Como $T_K(j)$ consiste en un único vértice, este está contenido en $T_K(i)$ si y solo si $d = 0$.

Observación 16.1. Observe que si $\lambda = 0$, es decir si i, j son ortogonales, entonces:

$$d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\Delta}{4}\right) = v(2).$$

Esto concuerda con lo expuesto en [Sa, §4].

Analicemos la distancia $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta}{4}\right)$ obtenida anteriormente, haciendo variar $\lambda \in K$.

- i.- Si $|\lambda| > 1$ entonces por principio de dominancia tenemos que $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2}{4}\right) = v(2) - v(\lambda) > v(2) \geq 0$.
- ii.- Si $|\lambda| \leq 1$ entonces $\lambda^2 - \Delta \in \mathcal{O}_K$. Supongamos que $\lambda^2 - \Delta = u\pi^s$, con $s \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathcal{O}_K^*$. Entonces, como $|\sqrt{\Delta} - \lambda| = |\sqrt{\Delta} + \lambda| = |\pi_L^t| = |\pi^t|$, tenemos que $s = 2t$, ya que L es una extensión no ramificada de K . Por lo tanto $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{u\pi^{2t}}{4}\right) = v(2) - t$. Observe que en este caso $|\lambda^2 - \Delta| \geq |\delta(\Delta)| = |4|$, donde $\delta(\cdot)$ denota el defecto cuadrático. Por lo tanto, en este caso, $d \geq 0$, con igualdad cuando $(\lambda^2 - \Delta)$ coincide con el defecto cuadrático de Δ . En este último caso la rama $S_K(j)$ está contenida en $S_K(i)$. Gráficamente, esta distancia se puede observar en la Figura 21.

De este análisis se desprende lo siguiente.

Teorema 16.2. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = 1, j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde $\Delta \in K$ es una unidad no ramificada. Entonces la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta}{4}\right) \in \mathbb{N}$. Además la intersección entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ contiene un único vértice si $\lambda \in \mathcal{O}_K^*$ es tal que $(\lambda^2 - \Delta) = (4)$ y es vacía en cualquier otro caso.

16.2. $\beta = \pi \in \mathbb{I}$. En este caso trabajamos en la extensión $L = K(\sqrt{\pi})$ que ramifica sobre K . Sabemos como lucen, en este caso, las ramas $T_L(i)$ y $T_L(j)$, por lo dicho al comienzo de la sección y mostrado en la Figura 20. Dichas ramas se destacan en las figuras siguientes con azul y rojo, respectivamente. Observe que $T_K(j) = \{B_2, B_3\}$ está a distancia $v(2) + \frac{1}{2}$ del punto de mayor altura de $T_L(j)$. Esto fue demostrado en §14. Luego, si los tallos no se intersectan tenemos una configuración como la mostrada en la Figura 20 y la distancia d entre ellos es:

$$d = v\left(\frac{b}{a + b\sqrt{\pi}}\right) = -v\left(\frac{a + b\sqrt{\pi}}{b}\right),$$

donde $\pi = \pi_K$ y v es la valuación normalizada, definida en 14.5. De hecho se tiene que $|\frac{a}{b} + \sqrt{\pi}| = |\frac{a}{b} - \sqrt{\pi}|$, por lo que:

$$d = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi),$$

donde $\lambda = \pm \frac{a}{b}$ es el producto simetrizado de los cuaterniones i y j . Observe que, por la definición de v , se tiene que d es la distancia en $\mathcal{T}(K)$ entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$, cuando estos no se intersectan. Sea $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la función definida por $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi)$. En lo que sigue analizaremos la función d_f para entender como reinterpretarla en el caso en que los tallos de las ramas se intersecten. Para este propósito analizaremos d_f en distintos valores de $\lambda \in K$.

- i.- Si $|\lambda| > 1$ entonces por principio de dominancia $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v(\lambda^2) = -v(\lambda) > 0$ y los tallos de las ramas no se intersectan. Por lo tanto $d = d_f(\lambda)$.
- ii.- Si $|\lambda| < 1$, entonces se tiene que $\lambda = \pi^t u$, con $t > 0$, $u \in \mathcal{O}_K^*$. Note que es este caso $\pi|\lambda|$ y por lo tanto $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}$. Para interpretar este resultado hacemos el análisis siguiente. De la igualdad $\lambda = \pm \frac{a}{b} = u\pi^t$ se desprende que $a = \pm u\pi^t b$. Esto nos dice que los extremos de $T_L(j)$ son $\pm b(\pi^t u + \sqrt{\pi})$ y $\pm b(\pi^t u - \sqrt{\pi})$. Si hacemos actuar la transformación de Moebius $\tau(z) = \pm \frac{z}{b}$, entonces podemos asumir que $T_L(i)$ y $T_L(j)$ son como se muestra en la Figura 22.

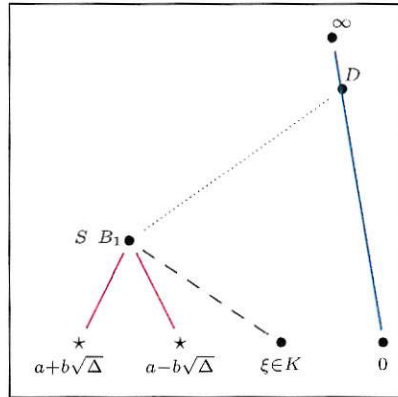


FIGURA 21. En la figura $B_1 = B[a + b\sqrt{\Delta}, |2b|] = B[\xi, |2b|]$ es el único vértice de $T_K(j)$ y $D = B[0, |a + b\sqrt{\Delta}|]$. La distancia en cuestión es la que se muestra con líneas punteadas y es igual a $v(2) - t$.

En este diagrama la K -liana más cercana a $T_L(j)$ tiene por extremo inferior al punto ξ , que en este caso coincide con $\lambda = u\pi^t$, por lo visto en §14.2. Luego $T_K(j)$ consiste en los vértices $B_2 = B[\lambda, |1|]$ y $B_3 = B[\lambda, |\pi|]$. Observe que $0 \in B_2$, debido a que $|\lambda - 0| = |\pi^t| \leq 1$. Luego $B_2 = B[0, 1]$. Por otro lado $0 \in B_3$, puesto que $\pi|\lambda$. Luego tenemos que $B_3 = B[0, |\pi|]$. Esto nos dice que si $t > 0$, y por ende $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}$, se tiene que $T_K(j) \subset T_K(i)$.

- iii.- Por último, asumimos que $|\lambda| = 1$. Mediante los mismos argumentos que se muestran en [ii], podemos asumir que $T_L(i)$ y $T_L(j)$ son como se muestra en la Figura 23. Además en este caso, por principio de dominancia, se tiene que $d_f(\lambda) = 0$.

Observe que $0 \in B_2$, debido a que $|\lambda - 0| = |\pi^t| \leq 1$. Luego $B_2 = B[0, 1]$. Por otro lado $0 \notin B_3$, puesto que $\pi \nmid \lambda$. Por lo tanto $T_K(i) \cap T_K(j) = \{B_2\}$.

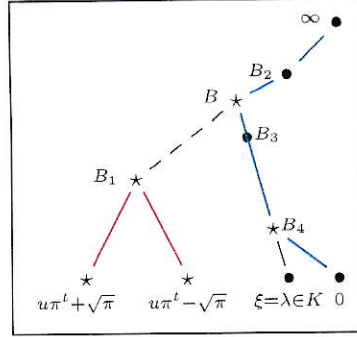


FIGURA 22. Configuración de las ramas para $t > 0$. En la figura $B_1 = B[u\pi^t + \sqrt{\pi}, |2\sqrt{\pi}|]$, $B = B[\lambda, |\sqrt{\pi}|]$, $B_4 = B[0, |\lambda|]$ y $T_K(j)$ consiste en los vértices $B_2 = B[\lambda, |1|]$ y $B_3 = B[\lambda, |\pi|]$.

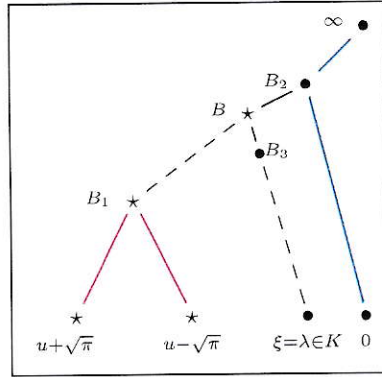


FIGURA 23. Configuración alternativa, para $t = 0$. En la figura $B_1 = B[u + \sqrt{\pi}, |2\sqrt{\pi}|]$, $B = B[\lambda, |\sqrt{\pi}|]$ y $T_K(j)$ consiste en los vértices $B_2 = B[\lambda, |1|]$ y $B_3 = B[\lambda, |\pi|]$.

Concluimos que $d_f(\lambda) = 0$ si y solamente si $T_K(i)$ y $T_K(j)$ se intersectan en sólo un vértice.

Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 16.3. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = 1$, $j^2 = \pi$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde π parámetro uniformizante de K , y considere $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi)$. La distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = \max\{0, d_f(\lambda)\}$. Además, si $|\lambda| \geq 1$ entonces $d_f(\lambda) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tomando el valor $d_f(\lambda) = 0$ si $|\lambda| = 1$, en cuyo caso $T_K(i)$ y $T_K(j)$ se intersectan en sólo un vértice. Por otro lado, si $|\lambda| < 1$ entonces $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}$, en cuyo caso $T_K(j) \subset T_K(i)$.

Observación 16.4. Observe que si $\lambda = 0$, es decir si nuestros cuaterniones i, j son ortogonales, entonces:

$$d_f(0) = -\frac{1}{2}v(\pi) = -\frac{1}{2},$$

en cuyo caso $d = 0$ y $T_K(j)$ está contenido en $T_K(i)$. Esto concuerda con [Sa, §4].

16.3. $\beta = u \in \Omega$. En este caso trabajamos en la extensión $L = K(\sqrt{u})$ que ramifica sobre K . Note que este caso solo puede darse cuando K es un cuerpo diádico, por lo mencionado en §4. Por otro lado, por lo dicho al comienzo de la sección y mostrado en la Figura 20, sabemos como lucen en este caso los tallos $T_L(i)$ y $T_L(j)$. Dichos tallos se destacan con azul y rojo respectivamente, en las figuras que siguen. Observe que $T_K(j) = \{B_2, B_3\}$ está a distancia $v(2) - t - 1$ del punto más alto B_1 de $T_L(j)$, donde $t \in [0, v(2)]$ cumple con $\delta(u) = (\pi^{2t+1})$. Luego, si los tallos no se intersectan se tiene una configuración como la mostrada en la Figura 20 y la distancia d entre estos es :

$$d = v \left(\frac{\pi_K^t b}{a + b\sqrt{u}} \right) = t - v \left(\frac{a + b\sqrt{u}}{b} \right),$$

donde v es la valuación normalizada definida en 14.5. Sin embargo $|\frac{a}{b} + \sqrt{u}| = |\frac{a}{b} - \sqrt{u}|$, de donde se sigue que:

$$d = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - u),$$

donde $\lambda = \pm \frac{a}{b}$ es el producto simetrizado entre los cuaterniones i y j . Observe que, por la definición de v , se tiene que d es la distancia en $\mathcal{T}(K)$ entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$, cuando estos no se intersectan. Sea $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la función definida por $d_f(\lambda) = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - u)$. En lo que sigue analizaremos la función d_f para entender como reinterpretarla en el caso en que los tallos se intersecten. Para este propósito analizaremos d_f para distintos valores $\lambda \in K$.

i.- Si $|\lambda| > 1$, entonces por principio de dominancia $d_f(\lambda) = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2) = t - v(\lambda) > 0$, y en este caso las ramas no se intersectan. Por lo tanto $d = d_f(\lambda)$.

ii.- Si $|\lambda| < 1$ entonces por principio de dominancia $d_f(\lambda) = t - \frac{1}{2}v(u) = t \geq 0$ y en este caso las ramas no se intersectan. Por lo tanto $d = d_f(\lambda)$.

iii.- Si $|\lambda| = 1$, entonces $\lambda^2 - u = \pi^s g$, con $s \geq 0$ y $g \in \mathcal{O}_K^*$. En este caso realizamos el cálculo en un diagrama como el que se aprecia en la Figura 24. Observe que $|\lambda^2 - u| \geq |\pi^{2t+1}|$, para todo $\lambda \in K$. Si $|\lambda^2 - u| = |\pi^{2t+1}|$, es decir si λ^2 es el cuadrado más cercano a u , entonces $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}$.

En la Figura 24, el elemento ξ es el extremo inferior de la K -liana más cercana a $T_L(j)$. Observe que si s es impar y $s \neq 2t + 1$ entonces el vértice más alto D del camino que une a 0 con ξ no pertenece a $\mathcal{T}(K)$. Esto no puede suceder debido a que el vértice más alto del camino maximal que une a 0 con ξ es $B[0, |\xi|] \in \mathcal{T}(K)$, por lo mostrado en el Lema 14.3. Esto nos lleva a la conclusión de que s es par o bien $s = 2t + 1$. Esto corresponde a la descripción del defecto cuadrático en [O, §63.A].

Si $s = 2t + 1$, entonces $B = D$ y $S_K(j)$ está contenido en $S_K(i)$. En este caso $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}$, el cual es el menor valor posible de d_f .

Por otro lado si s es par entonces $T_K(i)$ está a distancia $d_f(\lambda) = t - \frac{s}{2} \geq 0$ de $T_K(j)$. Si $s = 2t$ entonces $d_f(\lambda) = 0$. En este caso $T_K(j)$ intersecta a $T_K(i)$ solamente en el vértice $B_2 = D = B[0, |\pi^t|]$.

Lo anterior tiene por consecuencia lo siguiente:

Corolario 16.5. Sea $u \in K$ unidad ramificada. Entonces todos los números del conjunto $\{v(a^2 - u) : a \in K\}$ son pares, excepto el mayor de ellos, es decir $v(b^2 - u)$, donde $b \in K$ satisface $\delta(u) = (b^2 - u)$.

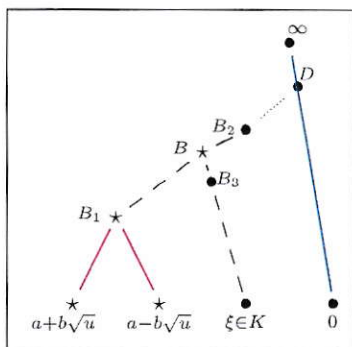


FIGURA 24. En la figura $B_1 = B[a + b\sqrt{u}, |2b|]$, $B = B[\xi, |b\pi_L^{2t+1}|]$ y $T_K(j)$ consiste en los vértices $B_2 = B[\xi, |b\pi^t|]$ y $B_3 = B[\xi, |b\pi^{t+1}|]$. El vértice D es igual a $B[0, |a + b\sqrt{u}|] = B[0, |b\pi_L^t|]$.

Teorema 16.6. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = 1$, $j^2 = u$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde u es una unidad ramificada de K y considere $d_f(\lambda) = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - u)$. La distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = \max\{0, d_f(\lambda)\}$. Además, $d_f(\lambda) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para cualquier $\lambda \in K$ a excepción de los $\lambda \in K$ tales que λ^2 es el cuadrado más cercano a u . Si $d_f(\lambda) = 0$, se tiene que $T_K(i)$ y $T_K(j)$ se intersecan en un solo vértice. Por otro lado, si λ^2 es el cuadrado más cercano a u , entonces $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}$, en cuyo caso $T_K(j) \subset T_K(i)$.

Observación 16.7. Si $\lambda = 0$, es decir si i, j son ortogonales, entonces:

$$d = d_f(0) = t - \frac{1}{2}v(u) = t.$$

Esto concuerda con [Sa, §4].

17. ANÁLISIS DE DISTANCIAS PARA $\alpha \neq 1$

En esta sección seguimos con el estudio que se desarrolla en §15 y §16. Específicamente, estudiamos la posición relativa de las ramas $S_K(i)$ y $S_K(j)$, donde i, j son cuaterniones puros tales que $i^2 = \alpha, j^2 = \beta \in \mathcal{O}_K$ y $\alpha, \beta \notin K^2$. Por lo dicho en §13, podemos considerar $\alpha, \beta \in \text{SR}$. Para ello, dividiremos nuestro estudio en varios casos, de acuerdo al valor que tomen dichos parámetros. Además, para α, β fijos, trabajaremos en la extensión $L = K(\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha})$.

17.1. Notaciones generales: En esta sección $h_1 \in K$ es un elemento tal que $v(h_1)$ es la mayor altura de un vértice de $T_K(j)$ y $h_2 \in K$ es un elemento tal que $v(h_2)$ es la mayor altura de un vértice de $T_K(i)$. Además ξ_1 es la K -liana más cercana a la rama $T_L(j)$ y ξ_2 es la K -liana más cercana a $T_L(i)$. Por último, en las figuras que siguen los tallos $T_L(i)$ y $T_L(j)$ se denotan con azul y rojo, respectivamente.

17.2. $\alpha = \Delta, \beta = \Delta$. En este caso tenemos dos cuaterniones puros i, j tales que $i^2 = j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Sabemos por lo visto en §14.1 que $T_K(i)$ y $T_K(j)$ corresponden a los vértices a mayor altura de los caminos maximales que determinan $T_L(i)$ y $T_L(j)$. Supongamos que $T_L(j)$ tiene por extremos $a + b\sqrt{\Delta}$ y $a - b\sqrt{\Delta}$. Haciendo actuar la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{z-a}{b}$, podemos asumir que $T_L(j)$ es el camino maximal que une a $\sqrt{\Delta}$ con $-\sqrt{\Delta}$. Partamos considerando la configuración para $T_L(i)$ y $T_L(j)$ que se muestra en la Figura 25.

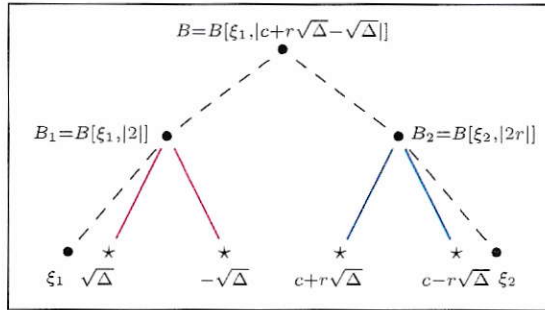


FIGURA 25. En la figura los tallos $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por los vértices B_2 y B_1 respectivamente. Además, la menor bola que contiene a $\sqrt{\Delta}$ y $c+r\sqrt{\Delta}$ es B y suponemos que esta está a una altura mayor o igual a B_1 y B_2 , pero no igual a ambas.

La distancia d entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ en $\mathcal{T}(L)$ está dada por:

$$d = -v \left(\frac{(c + (r-1)\sqrt{\Delta})^2}{4r} \right).$$

Por la unicidad del valor absoluto normalizado definido en 14.5, tenemos que $|c + r\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}| = |c - r\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}|$. Por lo tanto $d = -v \left(\frac{c^2 - (r-1)^2 \Delta}{4r} \right)$. Por otro lado, sabemos que $\pm\lambda = \frac{\Delta + r^2 \Delta - c^2}{2r}$. Luego $\pm\lambda - \Delta = -\frac{c^2 - (r-1)^2 \Delta}{2r}$, de lo que se sigue

que $d = -v\left(\frac{\pm\lambda - \Delta}{2}\right)$. Ahora bien, al cambiar i por $-i$ en el razonamiento previo $\pm\lambda$ cambia de signo. Esto, en el árbol de Bruhat-Tits, equivale a intercambiar los extremos de $T_L(i)$, lo que no cambia la posición relativa entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$. De esto se sigue que $d = -v\left(\frac{\pm\lambda + \Delta}{2}\right)$. Concluimos que bajo las hipótesis de la Figura 25 se tiene que:

$$d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right).$$

Definimos la función $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ por $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right)$. Sea $t = v(\xi_1 - \xi_2)$. Observe que la configuración de la Figura 25 se obtiene cuando $|\pi^t| \geq \max\{|2|, |2r|\}$ y $|\pi^t| > |2|$ o bien $|\pi^t| > |2r|$. En lo que sigue supondremos que esto no es así y dividiremos el caso $\alpha = \beta = \Delta$ en subcasos según el orden de los valores absolutos $|\pi^t|$, $|2|$ y $|2r|$.

Supongamos que $|2| < |\pi^t|$ y $|2r| \geq |\pi^t|$ o bien $|2| \leq |\pi^t|$ y $|2r| > |\pi^t|$. Entonces tenemos una configuración como la que se muestra en la Figura 26.

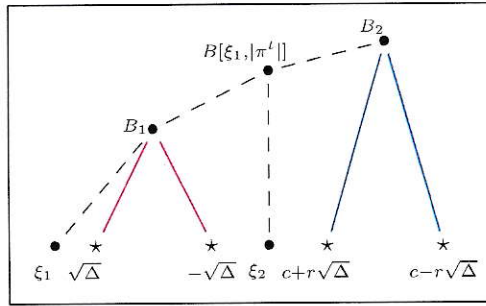


FIGURA 26. En la figura $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por los vértices B_2 y B_1 respectivamente.

En este caso la distancia d entre los tallos es $d = v(r)$, pero $|2r| = |c + r\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}| = |c + r\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}|$. Luego $d = -v\left(\frac{(c+(r-1)\sqrt{\Delta})^2}{4r}\right) = -v\left(\frac{(c+(r+1)\sqrt{\Delta})^2}{4r}\right)$. Concluimos que $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right) = d_f(\lambda)$.

Supongamos que $|2r| < |\pi^t|$ y $|2| \geq |\pi^t|$ o bien $|2r| \leq |\pi^t|$ y $|2| > |\pi^t|$. Entonces intercambiando i con j obtenemos la misma configuración que en el caso anterior y concluimos que $d = d_f(\lambda)$ análogamente.

Si $|\pi^t| < |2| < |2r|$ tenemos que $T_L(i)$ y $T_L(j)$ están dispuestos como en la Figura 27. En este caso la distancia d entre los tallos es $d = v(r)$. Observe que $|2| = |c + r\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}| = |c + r\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}|$. Podemos reescribir d como $d = -v\left(\frac{(c+(r-1)\sqrt{\Delta})^2}{4r}\right) = -v\left(\frac{(c+(r+1)\sqrt{\Delta})^2}{4r}\right)$. De esto se sigue que $d = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right) = d_f(\lambda)$. Lo mismo concluimos si $|\pi^t| < |2r| < |2|$.

Por último, si $|2| = |2r|$ entonces tenemos que la distancia en el grafo es nula. De hecho la configuración de las ramas debe ser la que se muestra en la Figura 28. Observe que:

$$-\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left[v\left(\frac{(c + r\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta})^2}{4r}\right) + v\left(\frac{(c + r\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta})^2}{4r}\right)\right].$$

Pero en este caso además se cumple que $|2| = |2r| = |c + r\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta}|$. Luego $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right) = -\frac{1}{2}v\left(\frac{(c+r\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta})^2}{4r}\right) = -v\left(\frac{c+r\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2}\right) \in \mathbb{Z}$ es un número negativo y el conjunto de valores que recorre, haciendo variar c, r no está acotado. Observe también que si tomamos cuaterniones i, j linealmente dependientes, entonces $\lambda^2 = \Delta^2$. En dicho caso los tallos de las ramas coinciden, pero la fórmula anterior dice que $d_f(\lambda) = -\infty$. Resumiendo todos los casos anteriores, se concluye que la distancia d entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = \max\{0, d_f(\lambda)\}$.

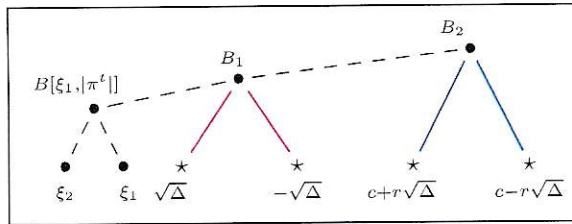


FIGURA 27. En la figura $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por los vértices B_2 y B_1 respectivamente.

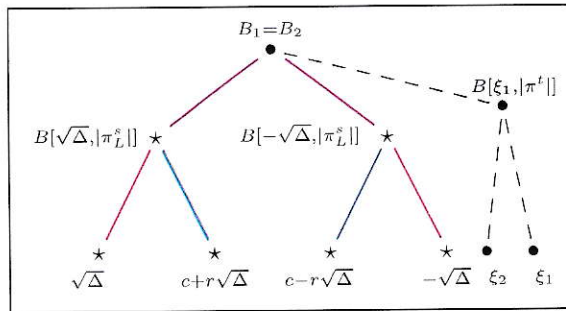


FIGURA 28. En la figura $T_K(i) = T_K(j) = \{B_1\}$. Además, $|\pi_L^s| = |c+r\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}| = |c-r\sqrt{\Delta}+\sqrt{\Delta}|$. La línea en púrpura representa la intersección de los caminos $T_L(i)$ y $T_L(j)$.

Teorema 17.1. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = \Delta$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde $\Delta \in K$ es una unidad no ramificada. Entonces la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = \max\left\{0, -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \Delta^2}{4}\right)\right\} \in \mathbb{N}$.

Observación 17.2. Observe que si $\lambda = 0$, es decir si i, j son ortogonales, entonces:

$$d = -v\left(\frac{-\Delta}{2}\right) = v(2).$$

Este resultado concuerda con [Sa, §4].

17.3. $\alpha = \pi \in \Pi, \beta = \Delta$. En este caso tenemos dos cuaterniones puros i, j linealmente independientes tales que $i^2 = \pi, j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Aquí trabajamos en la extensión $L = K(\sqrt{\pi}, \sqrt{\Delta})$, cuyo índice de ramificación y grado de inercia sobre K son ambos 2 y cuyo grupo de Galois es $\text{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_2$. Sabemos, por lo visto en §14.1, que $T_K(j)$ corresponde al vértice a mayor altura del camino maximal que determina $T_L(j)$. Además sabemos que $T_K(i)$ consiste en un par de vértices a distancia $v(2) + \frac{1}{2}$ del camino maximal que determina $T_L(i)$. Supongamos que el camino maximal $T_L(j)$ tiene por extremos $a + b\sqrt{\Delta}$ y $a - b\sqrt{\Delta}$. Haciendo actuar la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{z-a}{b}$ podemos asumir que $T_L(j)$ es el camino maximal que une a $\sqrt{\Delta}$ con $-\sqrt{\Delta}$. Partamos considerando la configuración para $T_L(i)$ y $T_L(j)$ que se ilustra en la Figura 29.

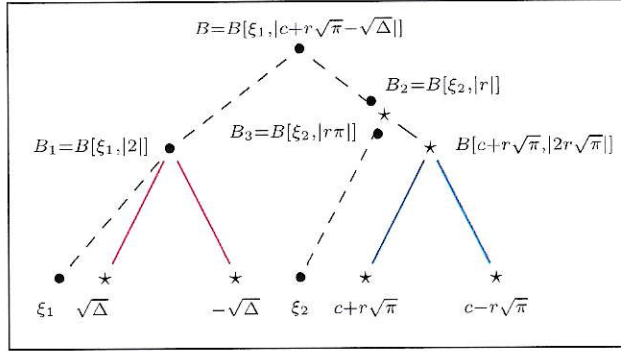


FIGURA 29. En la figura $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por el vértice B_1 , y el par $\{B_2, B_3\}$ respectivamente. Además, la menor bola que contiene a $\sqrt{\Delta}$ y $c + r\sqrt{\pi}$ es B y asumimos que esta está a una altura mayor o igual a B_1 y B_2 .

Luego la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ en $\mathcal{T}(L)$ es, en este caso:

$$d = -v \left(\frac{(c + r\sqrt{\pi} - \sqrt{\Delta})^2}{2r} \right).$$

Pero por la extensión única del valor absoluto tenemos que $|c + r\sqrt{\pi} - \sqrt{\Delta}| = |c - r\sqrt{\pi} + \sqrt{\Delta}| = |c + r\sqrt{\pi} + \sqrt{\Delta}| = |c - r\sqrt{\pi} - \sqrt{\Delta}|$. Por lo tanto tenemos que $d = -v \left(\frac{c^2 - r^2\pi - \Delta - 2r\sqrt{\pi\Delta}}{2r} \right) = -v \left(\frac{c^2 - r^2\pi - \Delta + 2r\sqrt{\pi\Delta}}{2r} \right)$. Pero $\pm\lambda = \frac{\Delta + r^2\pi - c^2}{2r}$, luego $\pm\lambda - \sqrt{\pi\Delta} = -\frac{c^2 - r^2\pi - \Delta + 2r\sqrt{\pi\Delta}}{2r}$ y $\pm\lambda + \sqrt{\pi\Delta} = -\frac{c^2 - r^2\pi - \Delta - 2r\sqrt{\pi\Delta}}{2r}$. Por lo tanto $d = -v \left(\pm\lambda - \sqrt{\pi\Delta} \right) = -v \left(\pm\lambda + \sqrt{\pi\Delta} \right)$. De esto se sigue que en este subcaso la distancia es:

$$d = -\frac{1}{2}v (\lambda^2 - \pi\Delta).$$

Definimos, en todo §17.3, la función $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ por $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v (\lambda^2 - \pi\Delta)$ y considere $t = v(\xi_1 - \xi_2)$. Note que tenemos que $v(h_2) = v(r)$. En el caso de la Figura 29 se cumple que $|\pi^t| \geq |h_2|, |2|$. En lo que sigue supondremos que esto no es así y dividiremos el caso $\alpha = \pi, \beta = \Delta$ en subcasos según el orden de los valores absolutos $|\pi^t|, |2|$ y $|h_2|$ (cf. 17.1).

Supongamos que $|2| < |\pi^t| \leq |h_2|$. Entonces tenemos una de las configuraciones mostradas en las Figuras 30 y 31 para $T_K(i)$ y $T_K(j)$.

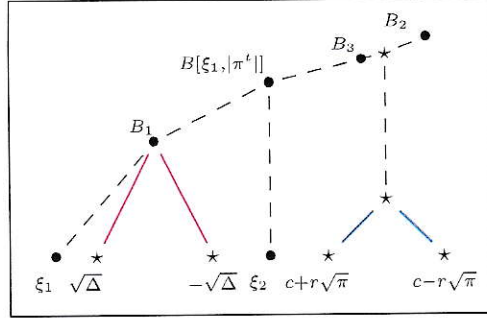


FIGURA 30. Configuración de las ramas para $|2| < |\pi^t| < |h_2|$. En la figura $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por el vértice B_1 y el par $\{B_2, B_3\}$ respectivamente.

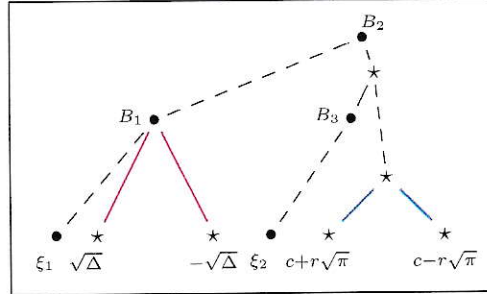


FIGURA 31. Configuración alternativa, en el caso $|2| < |\pi^t| = |h_2|$.

Así, en el caso de la Figura 30, tenemos que la distancia d entre los tallos es $d = -v \left(\frac{\pi h_2}{2} \right)$, pero $|c+r\sqrt{\pi}-\sqrt{\Delta}| = |c+r\sqrt{\pi}+\sqrt{\Delta}| = |h_2\pi_L|$, donde $|\pi_L|^2 = |\pi|$. Luego podemos reescribir d como $d = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi}-\sqrt{\Delta})^2}{2h_2} \right) = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi}+\sqrt{\Delta})^2}{2h_2} \right)$. Por el mismo argumento que en el caso anterior deducimos que $d = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi\Delta) = d_f(\lambda)$. Por otro lado, en el caso de la Figura 31, tenemos que la distancia d entre los tallos es $d = -v \left(\frac{\pi}{2} \right)$, pero $|c+r\sqrt{\pi}-\sqrt{\Delta}| = |c+r\sqrt{\pi}+\sqrt{\Delta}| = |h_2|$. Luego $d = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi}-\sqrt{\Delta})^2}{2h_2} \right) = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi}+\sqrt{\Delta})^2}{2h_2} \right)$. Esto nos permite obtener que $d = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi\Delta) = d_f(\lambda)$.

Supongamos que $|h_2| < |\pi^t| \leq |2|$. Entonces tenemos una configuración como la que se ilustra en la Figura 32. En este caso la distancia d entre los tallos es $d = v \left(\frac{h_2}{2} \right)$, pero $|2| = |c+r\sqrt{\pi}-\sqrt{\Delta}| = |c+r\sqrt{\pi}+\sqrt{\Delta}|$. Luego tenemos que $d = v \left(\frac{c+r\sqrt{\pi}+\sqrt{\Delta}}{2h_2} \right) = -v \left(\frac{c+r\sqrt{\pi}-\sqrt{\Delta}}{2h_2} \right)$. Utilizando lo dicho en los párrafos anteriores obtenemos que $d = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi\Delta) = d_f(\lambda)$.

Por último, si $|\pi^t| \leq |2|, |h_2|$ entonces, como las K -lianas se intersectan en un vértice a menor altura que el vértice a mayor altura de $T_K(i)$ y $T_K(j)$, tenemos que podemos considerarlas como iguales para el análisis de la posición relativa. Esto último, ya que cualquiera de las K -lianas nos define $T_K(i)$ y $T_K(j)$, como en §14. Este caso es análogo al ilustrado en la Figura 32. Concluimos que la distancia d entre los tallos es $d = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi\Delta) = d_f(\lambda)$. Lo probado en §17.3 nos permite concluir el siguiente teorema.

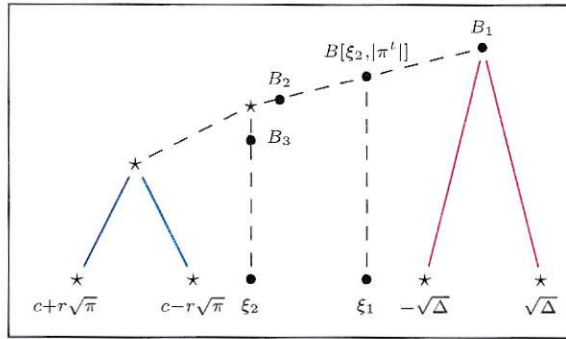


FIGURA 32. Configuración alternativa, en el caso $|h_2| < |\pi^t| \leq |2|$.

Teorema 17.3. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = \pi$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde $\Delta \in K$ es una unidad no ramificada y π es un parámetro uniformizante. Entonces la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = -\frac{1}{2}v(\lambda^2 - \pi\Delta) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observación 17.4. Observe que si $\lambda = 0$, el álgebra $\left(\frac{\pi, \Delta}{K}\right)_0$ no es álgebra de matrices. Luego no existen $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \pi$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 0$. Por ende no se puede estudiar la posición relativa de las ramas en este caso.

17.4. $\alpha = u \in \Omega, \beta = \Delta$. En este caso tenemos dos cuaterniones puros i, j linealmente independientes tales que $i^2 = u$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$. Aquí trabajamos en la extensión $L = K(u, \sqrt{\Delta})$ cuyo índice de ramificación y grado de inercia sobre K son ambos iguales a 2 y cuyo grupo de Galois es $\text{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_2$. Note que, por lo mencionado en §4, este caso solo tiene sentido cuando K es diádico. Sabemos por lo visto en §14.1 que $T_K(j)$ corresponde al vértice a mayor altura del camino maximal que determina $T_L(j)$. Además sabemos que $T_K(i)$ contiene exactamente dos vértices, los cuales están a distancia $v(2) - t$ del camino maximal que determina $T_L(i)$, donde $t < v(2)$ es el número natural tal que $\delta(u) = (\pi^{2t+1})$. Supongamos que $T_L(j)$ tiene por extremos $a + b\sqrt{\Delta}$ y $a - b\sqrt{\Delta}$. Haciendo actuar la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{z-a}{b}$ podemos asumir que $T_L(j)$ es el camino maximal que une a $\sqrt{\Delta}$ con $-\sqrt{\Delta}$. Asumamos primero que la configuración de $T_L(i)$ y $T_L(j)$ es la que se muestra en la Figura 33.

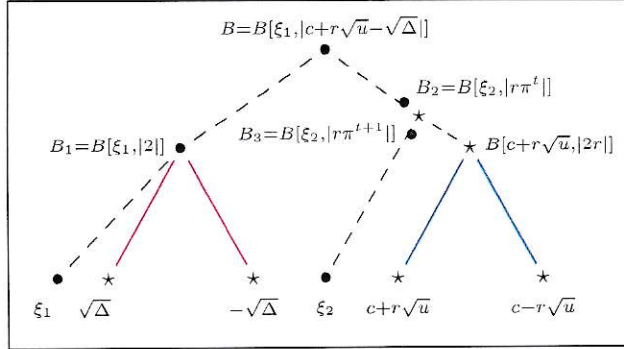


FIGURA 33. En la figura $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por el vértice B_1 y el par $\{B_2, B_3\}$ respectivamente. Además, la menor bola que contiene a $\sqrt{\Delta}$ y $c+r\sqrt{u}$ es B y está a una altura mayor o igual a B_1 y B_2 .

En este caso, la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ en $\mathcal{T}(L)$ es:

$$d = v \left(\frac{2r\pi^t}{(c+r\sqrt{u}-\sqrt{\Delta})^2} \right),$$

es decir $d = t - v \left(\frac{(c+r\sqrt{u}-\sqrt{\Delta})^2}{2r} \right)$. Por un argumento análogo al dado en el primer sub-caso de la sección §17.3, tenemos que:

$$d = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - u\Delta).$$

Ahora bien, se demuestra análogamente a lo dicho en §17.3, poniendo $h_2 = r\pi^t$, que la fórmula anterior es válida para cualquier configuración de $T_L(i)$ y $T_L(j)$. Esto demuestra el siguiente resultado.

Teorema 17.5. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = u$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde $\Delta \in K$ es una unidad no ramificada y u es una unidad ramificada. Entonces la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - u\Delta) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observación 17.6. Observe que si $\lambda = 0$, es decir si nuestros cuaterniones i, j son ortogonales, entonces:

$$d = t - \frac{1}{2}v(-u\Delta) = t.$$

Esto concuerda con [Sa, §4].

Lo expuesto en §16.1, §17.2, §17.4 y §17.3 nos permite concluir que si existen cuaterniones puros linealmente independientes $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$ entonces $v(\lambda^2 - \Delta\alpha)$ es par, independientemente del valor de $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Un resultado más es el siguiente.

Teorema 17.7. Supongamos que $\lambda^2 \neq \Delta\alpha$. Entonces existen cuaterniones puros linealmente independientes $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$ si y solamente si $v(\lambda^2 - \Delta\alpha)$ es par.

Demostración. Por lo ya demostrado sabemos que la existencia de cuaterniones implica la paridad en la valuación. Damos aquí una demostración alternativa de este hecho. Supongamos que $v(\lambda^2 - \alpha\Delta)$ es impar, es decir $\lambda^2 - \Delta\alpha = u\pi^{2t+1}$, para cierto $t \in \mathbb{Z}$ y $u \in \mathcal{O}_K^*$. Observe que, como $\lambda^2 \neq \alpha\Delta$, tenemos, por lo mostrado en el Teorema 10.1, que $\left(\frac{\alpha, \Delta}{K}\right)_\lambda \cong \left(\frac{\frac{\Delta}{\lambda^2}(-\lambda^2 + \Delta\alpha), \Delta}{K}\right)$. Luego $\left(\frac{\alpha, \Delta}{K}\right)_\lambda \cong \left(\frac{-\Delta u \pi^{2t+1}, \Delta}{K}\right) \cong \left(\frac{\pi_2, \Delta}{K}\right)$, donde $\pi_2 = -\Delta u \pi$ es otro parámetro uniformizante de K . Observe que esta última álgebra es de división y, por lo mostrado en la Proposición 9.4, esto implica que no existen cuaterniones puros linealmente independientes $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$.

Por otro lado, si $v(\lambda^2 - \Delta\alpha)$ es par, entonces $\left(\frac{\alpha, \Delta}{K}\right)_\lambda \cong \left(\frac{-\Delta u \pi^{2t}, \Delta}{K}\right)$, para cierto parámetro uniformizante π y cierta unidad $u \in \mathcal{O}_K$. Luego tenemos que $\left(\frac{\alpha, \Delta}{K}\right)_\lambda \cong \left(\frac{-\Delta u, \Delta}{K}\right)$. Observe que, por ser el símbolo de Hilbert un pareo dual, tenemos que $(-\Delta u, \Delta)(\pi, \Delta) = (\pi_2, \Delta) = -1$, dado que $\pi_2 = -\pi u \Delta$ es un parámetro uniformizante. Además $(\pi, \Delta) = -1$, por la misma razón. Por lo tanto $(-\Delta u, \Delta) = 1$. Esto implica que $\left(\frac{\alpha, \Delta}{K}\right)_\lambda \cong \left(\frac{-\Delta u, \Delta}{K}\right) \cong \mathbb{M}_2(K)$. Luego, se sigue de la Proposición 9.4 que existen cuaterniones puros linealmente independientes $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ tales que $i^2 = \alpha$, $j^2 = \Delta$ e $ij + ji = 2\lambda$. \square

17.5. $\alpha = \pi_2 \in \Pi, \beta = \pi_1 \in \Pi$. En este caso tenemos dos cuaterniones puros i, j tales que $i^2 = \pi_2$, $j^2 = \pi_1$ e $ij + ji = 2\lambda$. En lo que sigue supondremos que i, j son cuaterniones puros linealmente independientes lo que, por lo dicho en el Teorema 13.8, equivale a que $\lambda^2 \neq \pi_1\pi_2$. Observe además, que en este caso trabajamos en la extensión $L = K(\sqrt{\pi_1}, \sqrt{\pi_2})$ cuyo índice de ramificación $e(L/K)$ cumple con:

$$e(L/K) = \begin{cases} 2 & \text{si } \pi_1 = \pi_2 \text{ o bien } \pi_1 = \Delta\pi_2 \\ 4 & \text{si no} \end{cases},$$

y cuyo grupo de Galois es:

$$\text{Gal}(L/K) \cong \begin{cases} C_2 & \text{si } \pi_1 = \pi_2 \\ C_2 \times C_2 & \text{si } \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}.$$

Sabemos, por lo visto en §14.2, que $T_K(j)$ está compuesto por dos vértices a distancia $v(2) + \frac{1}{2}$ del camino maximal que determina $T_L(j)$. Lo mismo vale para $T_K(i)$. Supongamos que $T_L(j)$ tiene los extremos $a + b\sqrt{\pi_1}$ y $a - b\sqrt{\pi_1}$. Haciendo actuar la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{z-a}{b}$ podemos asumir que $T_L(j)$ es el camino maximal que une a $\sqrt{\pi_1}$ con $-\sqrt{\pi_1}$. Primero asumimos la configuración de la Figura 34 para $T_L(i)$ y $T_L(j)$.

En este caso la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ en $\mathcal{T}(L)$ es:

$$d = -v\left(\frac{(c + r\sqrt{\pi_2} - \sqrt{\pi_1})^2}{r}\right).$$

De la figura 34 se deduce que $|c + r\sqrt{\pi_2} - \sqrt{\pi_1}| = |c - r\sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_1}| = |c + r\sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_1}| = |c - r\sqrt{\pi_2} - \sqrt{\pi_1}|$, pues este valor corresponde al radio de la bola B . Por lo tanto tenemos que $d = -v\left(\frac{c^2 - r^2\pi_2 - \pi_1 - 2r\sqrt{\pi_1\pi_2}}{r}\right) = -v\left(\frac{c^2 - r^2\pi_2 - \pi_1 + 2r\sqrt{\pi_1\pi_2}}{r}\right)$. Por otro lado, sabemos que $\pm\lambda = \frac{\pi_1 + r^2\pi_2 - c^2}{2r}$, luego $\pm\lambda - \sqrt{\pi_1\pi_2} = -\frac{c^2 - r^2\pi_2 - \pi_1 + 2r\sqrt{\pi_1\pi_2}}{2r}$

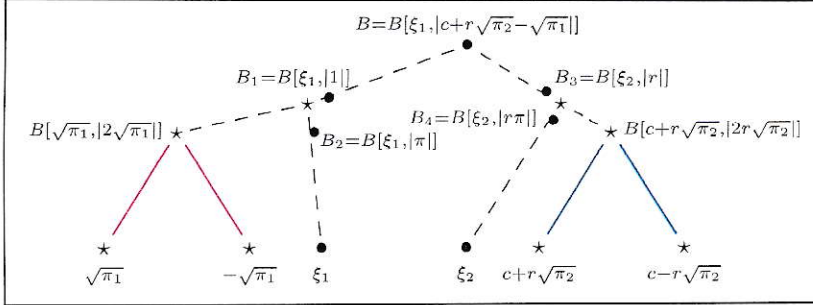


FIGURA 34. En la figura $T_K(i)$ y $T_K(j)$ están constituidos por los pares de vértices $\{B_3, B_4\}$ y $\{B_1, B_2\}$ respectivamente. Además, la menor bola que contiene a $\sqrt{\pi_1}$ y $c+r\sqrt{\pi_2}$ es B y está a una altura mayor o igual a B_1 y B_3 .

y $\pm\lambda + \sqrt{\pi_1\pi_2} = -\frac{c^2-r^2\pi_2-\pi_1-2r\sqrt{\pi_1\pi_2}}{2r}$. Por lo tanto $d = -v(2(\pm\lambda - \sqrt{\pi_1\pi_2})) = -v(2(\pm\lambda + \sqrt{\pi_1\pi_2}))$. De esto se sigue que:

$$d = -\frac{1}{2}v(4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2)).$$

Sea, en toda §17.5, $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la función definida por $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v(4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2))$ y sea $t = v(\xi_1 - \xi_2)$. En este caso $|h_1| = |1|$, $|h_2| = |r|$. En el caso de la Figura 34 tenemos que $|\pi^t| \geq |h_1|, |h_2|$. En lo que sigue supondremos que esto no es así y dividiremos el caso $\alpha = \pi_1$, $\beta = \pi_2$ en subcasos según el orden de los valores absolutos $|\pi^t|$, $|h_1|$ y $|h_2|$.

Supongamos que $|h_1| < |\pi^t| \leq |h_2|$. Entonces tenemos una configuración para $T_K(i)$ y $T_K(j)$ como la que se muestra en las Figuras 35 y 36.

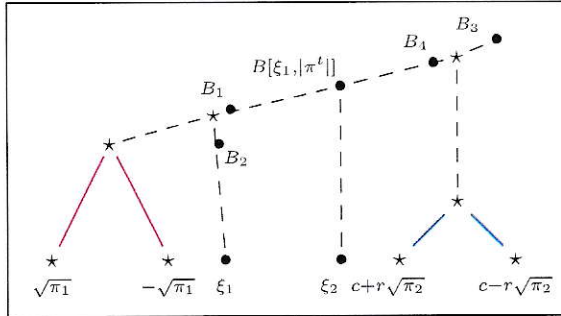


FIGURA 35. Configuración de las ramas para $|h_1| < |\pi^t| < |h_2|$.

En el caso de la Figura 35, tenemos que la distancia d entre los tallos es $d = -v\left(\frac{\pi h_2}{h_1}\right)$, pero por lo visto en §14.2 tenemos que $|c+r\sqrt{\pi_2} - \sqrt{\pi_1}| = |c+r\sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_1}| = |h_2\pi^{\frac{1}{2}}|$. Luego podemos reescribir d como $d = -v\left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}-\sqrt{\pi_1})^2}{h_2h_1}\right) =$

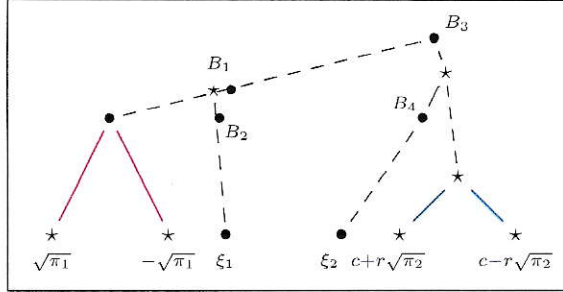


FIGURA 36. Configuración de las ramas para $|h_1| < |\pi^t| = |h_2|$.

$-v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_1})^2}{h_2h_1} \right)$. Utilizando el mismo argumento que en el caso anterior deducimos que $d = -\frac{1}{2}v (4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2)) = d_f(\lambda)$. Por otro lado, en el caso de la Figura 36, tenemos que la distancia d entre los tallos es $d = -v \left(\frac{\pi^t}{h_1} \right)$, pero $|c+r\sqrt{\pi_2} - \sqrt{\pi_1}| = |c+r\sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_1}| = |\pi^t|$. Luego $d = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}-\sqrt{\pi_1})^2}{h_2h_1} \right) = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_1})^2}{h_2h_1} \right)$. Esto nos permite obtener que $d = -\frac{1}{2}v (4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2)) = d_f(\lambda)$. Si suponemos que $|h_2| < |\pi^t| \leq |h_1|$, entonces obtenemos dos diagramas del mismo tipo a los mostrados en las Figuras 35 y 36. Mediante el mismo argumento, se obtiene que la distancia d entre los tallos es $d = -\frac{1}{2}v (4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2)) = d_f(\lambda)$.

Por último, supongamos que $|\pi^t| < |h_2|, |h_1|$. En este caso tenemos que tanto la K -liana definida por el extremo ξ_1 , como la K -liana definida por el extremo ξ_2 , son K -lianas de $T_L(i)$ y $T_L(j)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|h_1| \leq |h_2|$. Luego si $|h_1| < |h_2|$ tenemos una configuración como la ilustrada en el Figura 37.

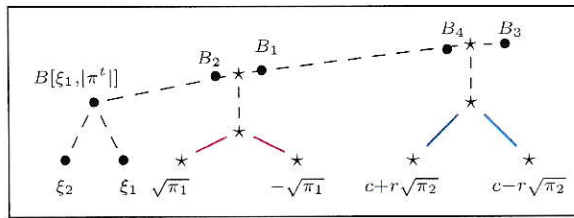


FIGURA 37. Configuración de las ramas para $|\pi^t| < |h_1| < |h_2|$.

Observe que si $|h_1| = |h_2|$ entonces $T_K(i) \cap T_K(j) \neq \emptyset$. Es más, dichos tallos deben coincidir, pues $B[\xi_1, |\pi h_1|] = B[\xi_2, |\pi h_2|]$. Luego si $|h_1| = |h_2|$, tenemos un diagrama como los que se ilustran en la Figura 38.

Luego, en el caso mostrado en la Figura 37, tenemos que la distancia d entre los tallos es $d = -v \left(\frac{\pi h_2}{h_1} \right)$, pero por lo visto en §14.2 tenemos que $|c+r\sqrt{\pi_2} - \sqrt{\pi_1}| = |c+r\sqrt{\pi_2} + \sqrt{\pi_1}| = |h_2\pi^{\frac{1}{2}}|$. Luego podemos reescribir d como $d = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}-\sqrt{\pi_1})^2}{h_2h_1} \right) = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_1})^2}{h_2h_1} \right)$. Esto implica que la distancia entre los tallos es $d = -\frac{1}{2}v (4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2)) = d_f(\lambda)$.

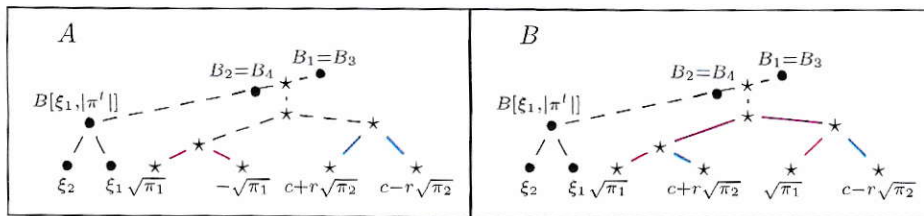


FIGURA 38. Configuración de las ramas para $|\pi^t| < |h_1| = |h_2|$. La línea de color púrpura representa la rama de intersección entre $T_L(i)$ y $T_L(j)$.

Por otro lado, en el caso de la Figura 38, tenemos que la distancia en el grafo entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es nula. Por otro lado, para cualquier $c, r \in K$ se tiene que $d_f(\lambda) = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}-\sqrt{\pi_1})^2}{h_2 h_1} \right) = -v \left(\frac{(c+r\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_1})^2}{h_2 h_1} \right)$. Pero $|(c+r\sqrt{\pi_2}+\sqrt{\pi_1})^2|, |(c+r\sqrt{\pi_2}-\sqrt{\pi_1})^2| \leq |h_1^2 \pi|$, esto implica que $d_f(\lambda) \in]-\infty, -1]$. Además que este es el único subcaso en el cual $T_K(i) = T_K(j)$. Luego $d_f(\lambda) \in]-\infty, -1]$ si y solamente si los tallos de $S_K(i)$ y $S_K(j)$ coinciden. Lo mismo se sigue si los cuaterniones i, j son linealmente dependientes, pues en este caso $d_f(\lambda) = -\infty$ y $T_K(i) = T_K(j)$. Lo mostrado en esta subsección nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 17.8. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(K)$ dos cuaterniones puros tales que $i^2 = \pi_1$, $j^2 = \pi_2$ e $ij + ji = 2\lambda$, donde $\pi_1, \pi_2 \in K$ son parámetros uniformizantes y considere $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v(4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2))$. La distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es $d = \max\{0, d_f(\lambda)\}$. Además, si $d_f(\lambda) = 0$ entonces $T_K(i)$ y $T_K(j)$ se intersectan en un solo vértice, y si $d_f(\lambda) < 0$ entonces $T_K(i) = T_K(j)$.

Observación 17.9. Observe que si $\lambda = 0$, entonces:

$$d_f(0) = -\frac{1}{2}v(4(\lambda^2 - \pi_1\pi_2)) = -\frac{1}{2}v(-4\pi_1\pi_2) = -(v(2) + 1) < 0,$$

luego en este caso $T_K(i) = T_K(j)$. Esto concuerda con [Sa, §4].

17.6. $\alpha = \pi \in \Pi, \beta = u \in \Omega$. Sean i, j dos cuaterniones puros tales que $i^2 = \pi$, $j^2 = u$ e $ij + ji = 2\lambda$. En este caso trabajamos en la extensión $L = K(\sqrt{\pi}, \sqrt{u})$ cuyo índice de ramificación sobre K es 4. Además el grupo de Galois $\text{Gal}(L/K)$ cumple con $\text{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_2$. Note que, por lo visto en §4, este caso tiene sentido solo si K es un cuerpo diádico. Sabemos por lo visto en §14.2 que $T_K(i)$ contiene exactamente dos vértices a distancia $v(2) + \frac{1}{2}$ del camino maximal que determina $T_L(i)$. Además por lo visto en §14.3 tenemos que $T_K(j)$ está compuesto por dos vértices a distancia $v(2) - t$ del camino maximal que determina $T_L(j)$, donde $t < v(2)$ y $\delta(u) = (\pi^{2t+1})$. Supongamos que $T_L(j)$ tiene por extremos $a + b\sqrt{u}$ y $a - b\sqrt{u}$. Haciendo actuar la transformación de Moebius $\tau(z) = \frac{z-a}{b}$ podemos asumir que $T_L(j)$ es el camino maximal que une a \sqrt{u} con $-\sqrt{u}$. Primero asumimos la configuración de la Figura 39 para $T_L(i)$ y $T_L(j)$:

En este caso la distancia entre $T_K(i)$ y $T_K(j)$ en $\mathcal{T}(L)$ es:

$$d = -v \left(\frac{(c + r\sqrt{\pi} - \sqrt{u})^2}{r\pi^t} \right).$$

Observación 17.13. Observe que si $\lambda = 0$, entonces:

$$d_f(0) = t_1 + t_2 - \frac{1}{2}v(4(\lambda^2 - u_1u_2)) = t_1 + t_2 - \frac{1}{2}v(-4u_1u_2) = t_1 + t_2 - v(2),$$

luego $T_K(i) = T_K(j)$ si $v(2) > t_1 + t_1$ y se intersectan en un punto si $t_1 + t_2 = v(2)$. Además, si $v(2) < t_1 + t_1$ se tiene que $T_K(i)$ está a distancia $d = t_1 + t_2 - v(2)$ de $T_K(j)$. Este resultado concuerda con lo descrito en [Sa, §4].

18. TEOREMA GENERAL PARA LA DISTANCIA

Los teoremas demostrados en §15, §16 y §17 se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 18.1. Sean $i, j \in \mathbb{M}_2(k)$ dos cuaterniones puros que satisfacen $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ y $ij + ji = 2\lambda$. Asuma que α y β pertenecen al conjunto de representantes

$$\text{SR} = \{1, \Delta, u_1, \dots, u_r, \pi_1, \dots, \pi_{r+2}\},$$

de clases en K^*/K^{*2} , donde Δ es una unidad no ramificada, $\{u_1, \dots, u_r\}$ es un conjunto de unidades ramificadas y $\{\pi_1, \dots, \pi_{r+2}\}$ es un conjunto de representantes constituido por parametros uniformizantes. Sea $d_f : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{0\}$ la función definida por casos como sigue:

1. Si $\alpha, \beta \in \{1, \Delta\}$, entonces $d_f(\lambda) = -\frac{1}{2}v\left(\frac{\lambda^2 - \alpha\beta}{4}\right)$.
2. Si $\alpha \in \{1, \Delta\}$, mientras que $\beta \notin \{1, \Delta\}$, entonces $d_f(\lambda) = t - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - \alpha\beta)$, donde el defecto cuadrático de β es (π^{2t+1}) .
3. Si $\alpha \notin \{1, \Delta\}$ y $\beta \in \{1, \Delta\}$, entonces $d_f(\lambda) = s - \frac{1}{2}v(\lambda^2 - \alpha\beta)$, donde el defecto cuadrático de α es (π^{2s+1}) .
4. Si $\{\alpha, \beta\} \cap \{1, \Delta\} = \emptyset$, entonces $d_f(\lambda) = s + t - \frac{1}{2}v(4(\lambda^2 - \alpha\beta))$, donde los defectos cuadráticos de α y β son (π^{2s+1}) y (π^{2t+1}) respectivamente.

Entonces, si $d_f(\lambda) > 0$, este valor es igual a la distancia entre los tallos $T_K(i)$ y $T_K(j)$. Por otro lado, el largo de intersección entre las ramas $T_K(i)$ y $T_K(j)$ es

$$\min\{-2d_f(\lambda), l(i), l(j)\},$$

donde $l(q)$ es el largo de $T_K(q)$, el cual es 0, 1 o ∞ (ver §14 y §15).

REFERENCIAS

- [A1] L. Arenas-Carmona, *Representation fields for commutative orders*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 62 (2012), 807-819.
- [A2] L. Arenas-Carmona, *Eichler orders, trees and representation fields*, Int. J. Number Theory 9 (2013), 1725-1741.
- [A3-Sa] L. Arenas-Carmona and Ignacio Saavedra, *On some branches of the Bruhat-Tits tree*, Int. J. Number Theory 12 (2016), 813-831.
- [AA-C] L. Arenas-Carmona, Manuel Arenas and Jaime Contreras *On optimal embeddings and trees*, Preprint arXiv:1606.06396.
- [C] J. B. Conway, *Functions of one complex variable*, Second edition, Springer.
- [D] D. Dummit and R. Foote, *Abstract algebra*, Third edition, J. Wiley and sons, 2004.
- [M1] J. S. Milne, *Algebraic number theory*, Course notes, Versión 3.05, 2013, con acceso en <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/>.
- [M2] J. S. Milne, *Class field theory*, Course notes, Versión 4.40, 2013, con acceso en <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/>.
- [O] O. T. O'Meara, *Introduction to quadratic form*, Springer, Berlin 1973.
- [S] B. Steinberg, *Representation theory of finite group*, Springer, 2009.
- [Sa] I. Saavedra, *Cálculos explícitos de la imagen espinorial local relativa para órdenes cíclicos*, Master Thesis, Universidad de Chile, Santiago, 2014.
- [Se] J.-P. Serre, *Trees*, Springer, Berlin 1980.
- [V] M.-F. Vignéras, *Aritmétique des algèbres de quaternions*, Springer, Berlin 1980.