

UCH-FC  
MAG-E  
n 827  
C.1

# UNA SOLUCION EXACTA PARA UN SISTEMA QUE PRESENTA RESONANCIA ESTOCASTICA

Tesis  
Entregada a la  
Universidad de Chile  
En cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magister en Ciencias con Mención en Física

Facultad de Ciencias  
por

LUIS FERNANDO MORA GOMEZ

Enero, 2005



Director de Tesis      Dr. Enrique Tirapegui  
Codirector de Tesis    Dr. Hector Calisto

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACION

TESIS DE MAGISTER


Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magister presentada por el candidato

LUIS FERNANDO MORA GOMEZ

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como Requisito para optar al grado de Magister en Ciencias con mención en Física, en el exámen de Defensa de Tesis rendido el día 7 de Enero de 2005.

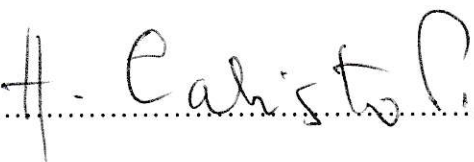
Director de Tesis:

Dr. Enrique Tirapegui

  
.....

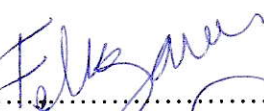
Codirector de Tesis

Dr. Hector Calisto

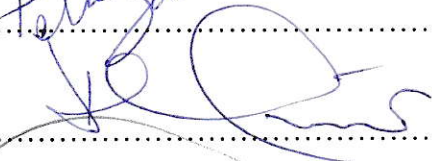
  
.....

Comisión de Evaluación de la Tesis

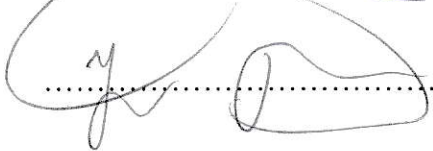
Dr. Felipe Barra

  
.....

Dr. David Gottlieb

  
.....

Dr. Jaime Rössler

  
.....



# AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a mi Director de tesis Enrique Tirapegui por su apoyo constante y su estímulo permanente durante mis estudios de Postgrado. También a mi Codirector Hector Calisto por haberme enseñado y guiado en el estudio del fenómeno de resonancia estocástica. Un agradecimiento especial a los integrantes de la Comisión David Gottlieb y Jaime Rossler por su entusiasmo y buena disposición para discutir los aspectos del problema de esta tesis. Además a Felipe Barra por haber participado como miembro de la comisión. Finalmente a Romualdo Tabensky por valiosas discusiones.



# INDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUCCION</b>	
1.1	Introducción.....	1
<b>2</b>	<b>PROCESOS ESTOCASTICOS Y LA INTEGRAL DE WIENER</b>	
2.1	Procesos Estocásticos.....	3
2.2	Integrales de Camino de Wiener.....	6
<b>3</b>	<b>RESONANCIA ESTOCASTICA</b>	
3.1	Historia.....	15
3.2	El modelo de dos estados.....	16
<b>4</b>	<b>FORMULACION DEL PROBLEMA</b>	
4.1	Motivación.....	21
4.2	Solución por Integrales de Camino.....	21
<b>5</b>	<b>RESULTADOS Y CONCLUSIONES</b>	
5.1	Resultados.....	26
5.2	El límite de Barzykin et al.....	29
5.3	Conclusiones.....	31
<b>6</b>	<b>APENDICE</b>	
6.1	Solución de la ecuación de difusión.....	33
6.2	Reescalamiento de las variables del problema.....	34
<b>7</b>	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>36</b>





# 1 INTRODUCCION

## 1.1 Introducci3n

El objetivo de esta tesis es calcular una soluci3n exacta para un modelo que describe el llamado fen3meno de *Resonancia Estoc3stica*. El concepto que fu3 introducido por primera vez en 1981, en el trabajo de Benzi et al, como una forma de explicar la recurrencia de las eras glaciales en el clima terrestre, consiste esencialmente en tres ingredientes: un potencial biestable, una fuente de ruido y una perturbaci3n peri3dica externa. Dado lo anterior, la respuesta del sistema exhibe un comportamiento resonante en *funci3n de la intensidad del ruido* y muestra un valor m3ximo, para un valor del ruido *distinto de cero*, una vez que han sido fijados los dem3s par3metros que caracterizan el sistema din3mico.

En este trabajo se examina un sistema lineal (lineal se refiere simplemente a que cuando se examina el sistema en t3rminos de la variable din3mica la ecuaci3n diferencial resultante es lineal y de primer orden en esta variable) sometido a un ruido llamado t3cnicamente proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Las caracter3sticas del ruido multiplicativo (promedio, funci3n de correlaci3n, probabilidad estacionaria) hacen que la amplitud promedio (que es nuestro observable) de la ecuaci3n que describe el sistema din3mico pueda ser calculada en forma exacta, usando la t3cnica de Integral de Camino de Wiener. B3sicamente se puede hacer en forma exacta porque la formulaci3n de integral de camino reduce el problema a un c3lculo de integrales gaussianas que son conocidas. Adem3s, comparando nuestra soluci3n con la de Barzykin et al, logramos reproducirla, haciendo concordar las funciones de correlaci3n de ambos ruidos con lo cual ambos problemas son id3nticos.

La tesis est3 estructurada como sigue: en el cap3tulo 2 se da una breve introducci3n a los conceptos b3sicos de procesos estoc3sticos y una introducci3n a la integral de Camino de Wiener, construida a partir del movimiento browniano de una part3cula. El desarrollo de esta parte es puramente formal, enfatizando al final que la Integral de Wiener es una herramienta para calcular promedios de funcionales, sin ahondar en el m3todo de c3lculo de estos procedimientos los cuales pueden ser encontrados en las referencias indicadas al final. En el cap3tulo 3 se introduce la resonancia estoc3stica y se resuelve anal3ticamente el llamado modelo de dos estados que permite cuantificar el efecto. En el cap3tulo 4 se plantea el problema lineal y se resuelve anal3ticamente usando la Integral de Camino de Wiener. Finalmente en el cap3tulo 5 se muestran los resultados y las conclusiones de este trabajo, mostrando adem3s como la soluci3n anal3tica de esta tesis reproduce la soluci3n exacta de Barzykin et al. Se

incluyen además dos apéndices, el primero con la solución de la ecuación de difusión y el segundo con el reescalamiento de las variables del sistema dinámico, que permite reducir el número de parámetros del problema.

Una de las características más interesantes de la técnica de Integral de Camino es que permite una visión unificada para la resolución de problemas en áreas distintas de la física teórica, tales como la teoría de procesos estocásticos, mecánica cuántica, teoría cuántica de campos, teoría de supercuerdas y mecánica estadística.

Para ser concretos, veamos dos ejemplos: la forma genérica del objeto básico en la teoría de Procesos Estocásticos es la Probabilidad de Transición  $W(x_f, t_f|x_0, t_0)$  que se escribe

$$W(x_f, t_f|x_0, t_0) \sim \sum_{\substack{\text{todas las trayectorias} \\ \text{desde } x_0 \text{ a } x_f}} \exp \left[ -\frac{1}{4D} F[x(\tau)] \right] \quad (1.1.1)$$

aquí  $x_0$  denota el conjunto de coordenadas del sistema estocástico bajo estudio en el instante  $t_0$  y  $W(x_f, t_f|x_0, t_0)$  es la probabilidad de que el sistema se encuentre en las coordenadas  $x_f$  en el instante  $t_f$ . La forma explícita del funcional  $F[x(\tau)]$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t_f$ , como también el valor y significado de la constante  $D$  dependen de las propiedades particulares tanto del sistema como del medio en que está inmerso. El signo de suma es simbólico y significa una suma sobre todas las trayectorias del sistema.

En Mecánica Cuántica, el objeto básico de estudio es la llamada Amplitud de Transición  $K(x_f, t_f|x_0, t_0)$ , no una probabilidad, y la expresión de integral de camino para ella tiene una forma que es similar a la expresión (1.1.1), i. e.,

$$K(x_f, t_f|x_0, t_0) \sim \sum_{\substack{\text{todas las trayectorias} \\ \text{desde } x_0 \text{ a } x_f}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S[x(\tau)] \right] \quad (1.1.2)$$

aquí,  $S[x(\tau)]$  es la acción del sistema en función de las variables del espacio de configuración. Aún cuando ahora se tienen exponentes puramente imaginarios, en contraste con el caso de los procesos estocásticos, formalmente la estructura de las expresiones (1.1.1) y (1.1.2) es totalmente análoga. Aún más, se puede demostrar que la integral de camino (1.1.2), también conocida como Integral de Feynmann puede ser transformada en la Integral de Wiener, realizando una transformación a variable de tiempo puramente imaginaria, i.e.,  $\tau \rightarrow it$ .

## 2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y LA INTEGRAL DE WIENER

### 2.1 Procesos Estocásticos

Sea un sistema [1] cuyas propiedades son susceptibles de ser descritas en función de una variable  $X$  que toma valores continuos  $x$  tales que  $x \in R^N$ . Supondremos que este sistema es factible de ser descrito probabilísticamente y que además evoluciona en el tiempo. Llamaremos a  $W_1(x_1, t_1)$  la densidad de probabilidad para que la variable  $X$  tome el valor  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ ;  $W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$  a la densidad de probabilidad conjunta para que la variable  $X$  tome el valor  $x_1$  en el tiempo  $t_1$  y el valor  $x_2$  en el tiempo  $t_2$ . Generalizando para  $n$  instantes de tiempo  $t_1, t_2, \dots, t_n$  se escribe  $W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$  y significa la densidad de probabilidad conjunta para que la variable  $X$  tome el valor  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ , el valor  $x_2$  en el tiempo  $t_2; \dots$ ; el valor  $x_n$  en el tiempo  $t_n$ .

La evolución temporal de un sistema que presenta las características anteriores es lo que se llama un *Proceso Estocástico*  $X = X(t)$ . Para un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  el conjunto de valores de  $X(t) \in [t_1, t_2]$  es llamado una *realización* del proceso estocástico y constituye una curva en el espacio  $X$ . Las funciones de probabilidad conjunta  $W_n$  cumplen las siguientes condiciones de consistencia:

$$W_n \geq 0 \tag{2.1.1}$$

$$W_n \text{ es simétrica bajo intercambio de pares } (x_j, t_j) \text{ y } (x_k, t_k) \tag{2.1.2}$$

$$\int dx_k W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k; \dots; x_n, t_n) = W_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{k-1}, t_{k-1}; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n) \tag{2.1.3}$$

$$\int d\mathbf{x} W_1(\mathbf{x}, t) = 1 \tag{2.1.4}$$

En (2.1.4),  $d\mathbf{x}$  se refiere al elemento de volumen en  $R^n$   $d\mathbf{x} = dx^1 dx^2 \dots dx^n$  y las integrales son calculadas sobre todo el dominio de la variable  $\mathbf{x}$ .

Un proceso estocástico  $X(t)$  se dice *estacionario* si todas las funciones  $W_n$  permanecen invariantes bajo desplazamientos de todos los tiempos  $t_i$  en una cantidad constante  $\tau$ .

Se define también la llamada densidad de *probabilidad condicional* que se escribe como  $P(x_1, t_1 | x_2, t_2)$  y significa la densidad de probabilidad condicional para que el proceso estocás-

tico  $X(t)$  tome el valor  $x_1$  en el instante  $t_1$  sabiendo que su valor en el instante  $t_2$  es  $x_2$ . Su definición es:

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2) = \frac{W_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{W_1(x_2, t_2)} \quad (2.1.5)$$

Combinando las ecuaciones (2.1.5) y ((2.1.3) se obtiene una relación entre las densidades de probabilidad a tiempos diferentes, i.e.,

$$W_1(x_1, t_1) = \int dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) W_1(x_2, t_2) \quad (2.1.6)$$

La densidad de probabilidad condicional es no negativa y normalizada, i.e.,

$$\int dx_1 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) = 1 \quad (2.1.7)$$

De manera general,  $P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | z_1, \tau_1; \dots; z_m, \tau_m)$  es la densidad de probabilidad conjunta condicional de modo que el proceso estocástico  $\mathbf{X}(t)$  tome el valor  $x_1$  en el instante  $t_1$ ; ..., el valor  $x_n$  en el instante  $t_n$ , sabiendo que en los instantes  $\tau_1, \dots, \tau_m$  toma los valores  $z_1, \dots, z_m$  respectivamente. Esta densidad es definida por la expresión

$$P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | z_1, \tau_1; \dots; z_m, \tau_m) = \frac{W_{n+m}(x_1, t_1; \dots; z_m, \tau_m)}{W_m(z_1, \tau_1; \dots; z_m, \tau_m)} \quad (2.1.8)$$

En la definición anterior es usual considerar los tiempos ordenados según

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq \tau_1 \geq \dots \geq \tau_m \quad (2.1.9)$$

Con el ordenamiento anterior se puede escribir a partir de (2.1.8)

$$\begin{aligned} W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= P(x_1, t_1 | x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \\ &P(x_2, t_2 | x_3, t_3; \dots; x_n, t_n) \dots \\ &P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) W_1(x_n, t_n) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Lo anterior significa que para determinar la función densidad de probabilidad conjunta a  $n$  tiempos, con una condición inicial dada en el instante  $t_n$  se debe conocer la historia completa del proceso desde  $t_{n-1}$  a  $t_n$ . La importancia de las densidades de probabilidad conjunta reside en el hecho que el conjunto de ellas, o sea  $\{W_1[x_1, t_1], W_2[x_1, t_1; x_2, t_2], W_3[x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3], \dots\}$



caracterizan un proceso estocástico dado (Kolmogorov). También existen procesos estocásticos que muestran correlaciones entre los valores tomados en instantes diferentes. En el caso anterior se dice que el proceso estocástico tiene *memoria*.

## Procesos de Markov

En términos simples se llama *Proceso de Markov* a aquel proceso estocástico que no guarda memoria de su pasado en probabilidad. Lo anterior implica una simplificación en las expresiones de la densidad de probabilidad conjunta y densidad de probabilidad conjunta condicional. Para ser concretos se dice que el proceso estocástico  $X(t)$  es Markoviano si para la serie completa  $n + m$  de instantes sucesivos  $(t_1, t_2, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_m)$  que verifican la relación (2.1.9) se cumple

$$P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | z_1, \tau_1; \dots; z_m, \tau_m) = P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n | z_1, \tau_1) \quad (2.1.11)$$

, es decir, si la densidad de probabilidad conjunta condicional es enteramente determinada por la condición más reciente. Entonces, el proceso estocástico  $\mathbf{X}(t)$  "pierde" toda la memoria de sus valores para tiempos anteriores a  $\tau_1$ . Usando ahora la definición de Proceso de Markov se puede escribir (2.1.10) como

$$W_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \prod_{j=1}^{n-1} P(x_j, t_j | x_{j+1}, t_{j+1}) W_1(x_n, t_n) \quad (2.1.12)$$

en que  $t_j > t_{j+1} > t_n$ . Luego, un Proceso de Markov queda determinado completamente especificando dos funciones: La densidad de probabilidad para que el proceso estocástico tome el valor  $x$  en el instante  $t$ , i.e.,  $W_1(x_n, t_n)$  y la densidad de probabilidad condicional  $P(x, t | x', t')$  llamada *Densidad de Probabilidad de Transición*, desde  $x'$  a  $x$  entre los instantes  $t'$  y  $t$ . Al integrar ambos miembros de (2.1.12) sobre el conjunto de valores  $x_2, x_4, \dots, x_n$  y usando las expresiones (2.1.8) y (2.1.10) se obtiene la relación de Chapman-Kolmogorov para procesos de Markov

$$P(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 P(x_1, t_1 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_3, t_3), \quad t_1 \geq t_2 \geq t_3 \quad (2.1.13)$$

## Movimiento Browniano y el Proceso de Wiener

La teoría del movimiento browniano [2] ha jugado un papel central en la teoría de fenó-

menos estocásticos tanto en física como en matemáticas. En el año 1828, el botánico Inglés Robert Brown publicó sus observaciones referentes al movimiento errático de pequeñas partículas de polen suspendidas en agua, movimiento que era visible bajo el microscopio. La definición actual del movimiento browniano, que es avalada por observaciones experimentales, es el movimiento rápido, perpetuo e irregular de pequeñas partículas suspendidas en un fluido. Las características esenciales de este movimiento que se deducen del experimento son

- i) Las partículas más pequeñas se mueven más rápido
- ii) Al disminuir la viscosidad el movimiento también se hace más rápido
- iii) El movimiento se vuelve más activo al aplicar calor al fluido
- iv) El movimiento no cesa nunca y sus trayectorias son tan irregulares, con detalles tan finos, que parecen no tener tangente, i.e., la velocidad de una partícula Browniana no está definida.

El movimiento caótico de las moléculas en suspensión en el fluido es debido a las colisiones con las moléculas del fluido circundante. Debido al movimiento térmico de estas moléculas de fluido, una partícula Browniana experimenta en un intervalo de tiempo muy corto un enorme número de colisiones, típicamente  $10^{21}$  por segundo. Debido a que cada partícula es mucho más pesada que las moléculas de fluido, el efecto de cada colisión es despreciable. Sin embargo, debido al gran número de colisiones que ocurren continuamente, el efecto final es un movimiento efectivo que es posible observar bajo el microscopio. Aún más, debe notarse que las colisiones son independientes entre sí. Tomando en cuenta todo esto, es que es posible construir una descripción matemática de tal movimiento; el resultado es lo que se conoce como *Proceso de Wiener*.

## 2.2 Integrales de Camino de Wiener

La idea de esta sección es especificar lo siguiente:

Consideremos [3] el movimiento de un gran número de partículas Brownianas a lo largo de un cierto eje (consideraremos por simplicidad un movimiento en una dimensión) y las cuales no interactúan mutuamente. Sea  $\rho(x, t)dx$  el número de partículas en un pequeño intervalo  $dx$  en el punto  $x$  en el tiempo  $t$  (i.e., la densidad de partículas) y sea además  $j(x, t)$  la corriente de partículas (i.e., el número de partículas Brownianas que pasan por el punto  $x$  en la dirección creciente de  $x$  por unidad de tiempo). Se sabe que la corriente de partículas es proporcional al gradiente de su densidad, i. e.,

$$j(x, t) = -D \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \quad (2.2.1)$$

La relación anterior permite definir la llamada *constante de difusión*  $D$ . Cuando no hay ni creación ni destrucción de partículas, la densidad y la corriente satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \quad (2.2.2)$$

y usando la relación para la corriente se obtiene

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.2.3)$$

que es la llamada *Ecuación de Difusión*.

Consideremos ahora la relación entre la densidad  $\rho$  y la distribución de probabilidad de partículas  $w(x, t)$

$$w = K\rho \quad (2.2.4a)$$

aquí  $K$  es un factor constante que significa el número  $K$  de partículas Brownianas. Esto se puede justificar debido a que a mayor concentración de partículas, mayor probabilidad de encontrarlas, de modo que la concentración de estas y su probabilidad deben ser proporcionales. La ecuación de difusión (2.2.3) se escribe entonces

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.2.4b)$$

Sea ahora la condición inicial

$$w(x, t) \rightarrow \delta(x) \text{ cuando } t \rightarrow 0 \quad (2.2.5)$$

La ecuación anterior posee como solución (ver apéndice)

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4Dt} \right\} \quad (2.2.6)$$

Además se puede verificar directamente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4Dt} \right\} = 1 \quad (2.2.7)$$

expresión que es compatible con la interpretación probabilística de  $w(x, t)$  como la *probabilidad de encontrar la partícula Browniana en la posición  $x$  en el tiempo  $t$* , si esta se encontraba en el origen  $x = 0$  en  $t = 0$ .

Introduzcamos ahora la *probabilidad de transición*

$$W(x, t | x_0, 0) \quad (2.2.8)$$

o para un momento arbitrario inicial

$$W(x_t, t | x_0, t_0) \quad x_t = x(t) \quad x_0 = x(t_0) \quad (2.2.9)$$

También introducimos la *evolución de la densidad de probabilidad*

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 W(x_t, t | x_0, t_0) w(x_0, t_0) \quad (2.2.10)$$

Puesto que  $w(x_0, t_0)$  es una función arbitraria, que satisface la condición de normalización (2.2.7), esto significa a su vez que la probabilidad de transición también satisface la ecuación de difusión, i. e.,

$$\frac{\partial W(x_t, t | x_0, t_0)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W(x_t, t | x_0, t_0)}{\partial x^2} \quad t_0 < t \quad (2.2.11)$$

con la condición inicial

$$W(x_t, t | x_0, t_0) \rightarrow \delta(x_t - x_0) \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0 \quad (2.2.12)$$

que es consecuencia de la expresión (2.2.5). La solución de la ecuación de difusión anterior con la condición inicial (2.2.12) es entonces

$$W(x_t, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{(x_t - x_0)^2}{4D(t - t_0)} \right\} \quad (2.2.13)$$

y además satisface la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_t W(x_t, t | x_0, t_0) = 1 \quad (2.2.14)$$

La expresión (2.2.13) es la distribución de probabilidad normal (o Gaussiana) con valor medio

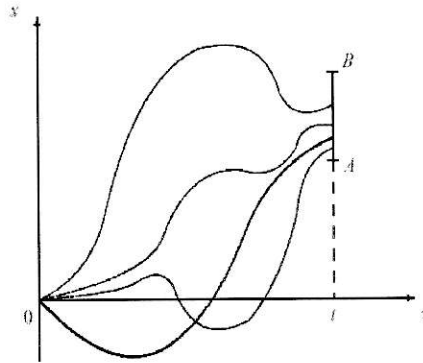
$x_0$  y dispersion  $D = \sqrt{2D(t - t_0)}$ .

### La Integral de Wiener

En lo que sigue, discutiremos la descripción original del movimiento browniano seguida por Wiener (1921, 1923, 1924). Es en este contexto en que se introdujo por primera vez el concepto de integral de camino.

Consideremos por simplicidad un movimiento browniano en una dimensión. Podemos escribir la siguiente expresión para la probabilidad de encontrar una partícula browniana en un instante  $t$  en cualquier parte del intervalo  $[A, B]$  (ver figura 2.2.1):

$$P\{x(t) \in [A, B]\} = \int_A^B dx w(x, t) \tag{2.2.15}$$



*Figura 2.2.1 Trayectorias de una partícula Browniana que comienzan en el origen y que pasan a través de cualquier punto del intervalo  $AB$  en el instante  $t$*

Lo esencial de este movimiento es la probabilidad de un evento compuesto. Esto significa la probabilidad de que la partícula, al comenzar el movimiento en  $x(0) = 0$ , pase sucesivamente a través de los intervalos  $A_1 \leq x(t_1) \leq B_1, A_2 \leq x(t_2) \leq B_2, \dots, A_N \leq x(t_N) \leq B_N$  en los instantes de tiempo correspondientes  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , tal como se muestra en la figura 2.2.2

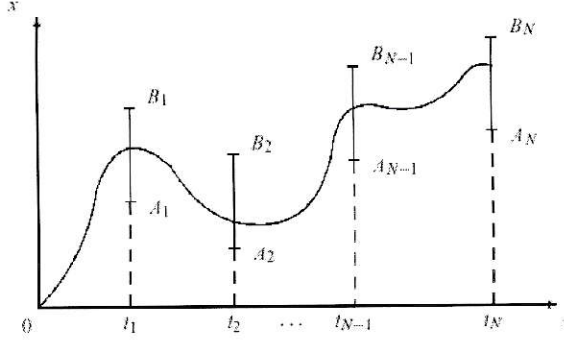


figura 2.2.2 Una trayectoria que comienza en el origen y que pasa a través de los intervalos  $A_i B_i$  en los instantes  $t_i$  ( $i = 1, \dots, N$ )

La independencia estadística de los desplazamientos posteriores de esta partícula Browniana (propiedad Markoviana) permite escribir la probabilidad conjunta como el producto de las probabilidades para cada uno de los intervalos, es decir,

$$\begin{aligned}
 P\{x(t_1) \in [A_1, B_1], x(t_2) \in [A_2, B_2], \dots, x(t_N) \in [A_N, B_N]\} \\
 &= \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \frac{\exp\{-\frac{x_1^2}{4D t_1}\}}{\sqrt{4\pi D t_1}} \int_{A_2}^{B_2} dx_2 \frac{\exp\{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{4D (t_2 - t_1)}\}}{\sqrt{4\pi D (t_2 - t_1)}} x \\
 &\quad \dots \int_{A_N}^{B_N} dx_N \frac{\exp\{-\frac{(x_N - x_{N-1})^2}{4D (t_N - t_{N-1})}\}}{\sqrt{4\pi D (t_N - t_{N-1})}}
 \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

En el límite en que el tiempo es continuo, es decir, disminuyendo el tamaño de cada intervalo y aumentando al mismo tiempo su número

$$(t_i - t_{i-1}) \equiv \Delta t_i \rightarrow 0 \quad 1 \leq i \leq N \tag{2.2.17}$$

la posición de la partícula, depende en forma continua de la variable  $t$  y en ese caso se obtiene lo que ya conocemos como *proceso estocástico*. Un proceso estocástico con incrementos independientes, como en la relación (2.2.16) se dice que no tiene memoria y es llamado como ya vimos, un *proceso de Markov*. En general, la definición de tal proceso no impone restricciones tanto sobre la distribución inicial  $w(x, 0)$  como sobre las probabilidades de transición:

$$W(x_t, t | x_0, t_0) dx_t \equiv P\{x(t) \in [x_t, x_t + dx_t] | x(t_0) = x_0\} \quad t_0 < t \tag{2.2.18}$$

excepto por normalización, la positividad y que satisfagan la relación de Chapman-Kolmogorov.

Sin embargo en el caso del movimiento Browniano, la distribución inicial es de la forma

$$w(x, t) \rightarrow \delta(x) \text{ cuando } t \rightarrow 0 \quad (2.2.19a)$$

o en general si el punto inicial es arbitrario

$$w(x, t) \rightarrow \delta(x - x_0) \text{ cuando } t \rightarrow 0 \quad (2.2.19b)$$

y las probabilidades de transición están dadas por

$$W(x_t, t | x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{(x_t - x_0)^2}{4D(t - t_0)} \right\} \quad (2.2.20)$$

dando como resultado la distribución de probabilidad conjunta

$$\begin{aligned} P\{x(t_1) \in [A_1, B_1], x(t_2) \in [A_2, B_2], \dots, x(t_N) \in [A_N, B_N]\} & \quad (2.2.21) \\ = \int_{A_1}^{B_1} dx_1 \frac{\exp\{-\frac{(x_1 - x_0)^2}{4D t_1}\}}{\sqrt{4\pi D t_1}} \int_{A_2}^{B_2} dx_2 \frac{\exp\{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{4D (t_2 - t_1)}\}}{\sqrt{4\pi D (t_2 - t_1)}} & \\ \dots \int_{A_N}^{B_N} dx_N \frac{\exp\{-\frac{(x_N - x_{N-1})^2}{4D (t_N - t_{N-1})}\}}{\sqrt{4\pi D (t_N - t_{N-1})}} & \end{aligned}$$

Un proceso estocástico con las características anteriores se dice un *Proceso de Wiener*. Antes de seguir introduzcamos otro importante proceso estocástico.

### Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Este proceso [4] es uno de los modelos más importantes en el estudio de la relajación de sistemas dinámicos. Por ejemplo, supongamos que deseamos estudiar una partícula con velocidad  $v$  que se encuentra inmersa en un fluido a temperatura  $T$ . Entonces la influencia de las fluctuaciones térmicas debidas a la temperatura se reflejará en el caracter estocástico o aleatorio de  $v$ . Además por otra parte el fluido ejerce un frenado (llamado también *termalización*) sobre la velocidad de la partícula. Luego se supone que en el estado estacionario el valor medio de la velocidad de la partícula es nulo y que la función de correlación temporal de esta velocidad decae con una ley exponencial que solo depende del *largo del intervalo de tiempo* considerado. Estos dos ingredientes definen en forma completa lo que se llama un proceso estocástico Gaussiano y Estacionario. La caracterización de tal proceso es a través de

los llamados dos primeros momentos, es decir, su valor medio y su correlación. En términos matemáticos

$$\langle v(t) \rangle = 0 \quad (2.2.22a)$$

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{D}{2\gamma} \exp\{-\gamma|t-t'|\} \quad (2.2.22b)$$

### Transición al límite de un número infinito de “intervalos”: la medida de Wiener y la Integral de Camino de Wiener

Considerando el límite continuo en (2.2.21), se obtiene la probabilidad de que la partícula Browniana se mueva a través de un número infinito de intervalos infinitesimales a lo largo de la trayectoria  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4D(t_i - t_{i-1})} \right\} \prod_{i=1}^N \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D(t_i - t_{i-1})}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \exp \left\{ - \frac{1}{4D} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 \Delta t_i \right\} \prod_{i=1}^N \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D \Delta t_i}} \\ &\equiv \exp \left\{ - \frac{1}{4D} \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau) \right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D d\tau}} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

o dicho de otra manera, se obtiene la probabilidad para el movimiento de la partícula Browniana en el interior de un tubo delgado que encierra la trayectoria  $x(t)$  o simplemente moviéndose a lo largo de esta.

Sea ahora  $\mathcal{C}\{\mathbf{x}_1, t_1; B, t_2\}$  el conjunto de trayectorias con origen en  $\mathbf{x}_1$  en el tiempo  $t_1$  y destino el punto  $\mathbf{x}_2$  en el instante  $t_2$  en algún dominio  $B$  de  $R^d$ . En particular la notación:

·  $\mathcal{C}\{\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2\}$  se refiere al conjunto de trayectorias con origen en  $\mathbf{x}_1$  y destino el punto  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ ;

·  $\mathcal{C}\{\mathbf{x}_1, t_1; [A, B], t_2\}$  se refiere en el caso de una dimensión al conjunto de trayectorias con origen en  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$  y destino el intervalo  $[A, B]$  en el instante  $t_2$ ;

Hagamos sin embargo una simplificación de la notación para el caso especial siguiente:

Si una trayectoria tiene un destino final arbitrario en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  para todas las coordenadas, entonces se omitirá la indicación explícita del espacio completo  $R^d$ :  $\mathcal{C}\{\mathbf{x}_1, t_1; R^d, t_2\} \equiv \mathcal{C}\{\mathbf{x}_1, t_1; t_2\}$ .



Así, por ejemplo,  $\mathcal{C}\{0, 0, t\}$  se refiere al conjunto de trayectorias que parten en el origen en  $t = 0$  y que terminan en un punto arbitrario en el instante  $t$ .

Ahora, es claro que para obtener la probabilidad de que la partícula pase por algún punto del intervalo  $[AB]$  en el tiempo  $t$ , es necesario sumar las probabilidades (2.2.23) sobre el conjunto  $\mathcal{C}\{0, 0; [A, B], t\}$  de todas las trayectorias que terminan en el intervalo  $[AB]$ , i.e.,

$$\begin{aligned}
 P\{x(t) \in [AB]\} &= \int_{\mathcal{C}\{0,0;[A,B],t\}} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D} d\tau} \exp\left\{-\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau)\right\} \\
 &= \int_A^B dx \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\}
 \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

El símbolo

$$\int_{\mathcal{C}\{0,0;[A,B],t\}}$$

se refiere formalmente a una suma sobre el conjunto de trayectorias y puesto que este conjunto es continuo, se ha usado el símbolo de integral. La suma sobre el conjunto de trayectorias del tipo anterior se llama la *Integral de Camino de Wiener*.

En el caso límite  $A = B = x_t$ , el conjunto  $\mathcal{C}\{0, 0; x_t, t\}$  consiste en aquellas trayectorias para las cuales los puntos extremos están fijos (ver figura 2.2.3).

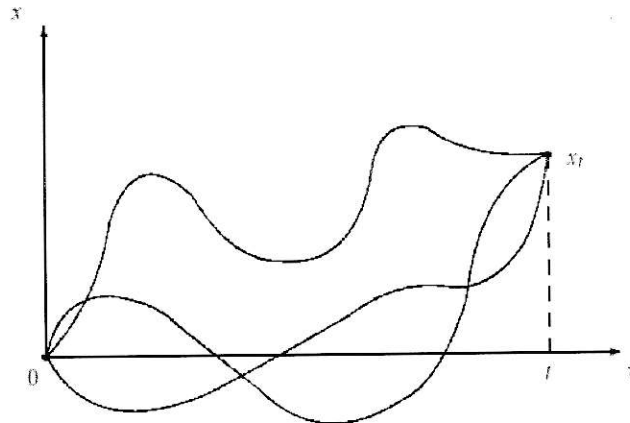


figura 2.2.3 Trayectorias de la partícula Browniana con puntos iniciales y finales fijos

La integración sobre este conjunto arroja la densidad de probabilidad de transición (ecuación

(2.2.13)):

$$W(x_t, t | 0, 0) = \int_{\mathbb{C}\{0,0;x_t,t\}} d_w x(\tau) \quad (2.2.25)$$

en que se llama a la expresión

$$d_w x(\tau) \equiv \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int_0^t d\tau \dot{x}^2(\tau) \right\} \prod_{\tau=0}^t \frac{dx(\tau)}{\sqrt{4\pi D} d\tau} \quad (2.2.26)$$

la *medida de Wiener* (Wiener 1921, 1923, 1924, Paley y Wiener 1934).

Desde la perspectiva de la teoría de probabilidades, la construcción de la Integral de Camino de Wiener es simplemente una forma de generalizar la noción de distribución de probabilidad  $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a una *distribución funcional*  $\Omega[f(\tau)]$  que describe la probabilidad de encontrar una función perteneciente a algún conjunto dado, en una vecindad infinitesimal de alguna función particular  $f(\tau)$  de este conjunto:

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \Omega[f(\tau)]$$

$$\begin{aligned} \langle g(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle &\equiv \int dx_1 dx_2 \dots dx_n w(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\rightarrow \langle F[f(\tau)] \rangle \equiv \int Df(\tau) \Omega[f(\tau)] F[f(\tau)] \end{aligned}$$

Aquí la notación  $\langle \dots \rangle$  denota un valor esperado o valor medio,  $Df(\tau)$  denota simbólicamente una medida funcional y se escribe usualmente, para el caso del movimiento Browniano

$$Df(\tau) \Omega[f(\tau)] \equiv d_w x(\tau)$$

En lo que respecta al método de cálculo de estas integrales, esta tesis usa la definición de la integral funcional mediante discretizaciones introducida por Langouche, Roekaerts, Tirapegui [5]. Así, si la integral múltiple obtenida a través de este método puede ser calculada en forma exacta, esto arroja en principio, tomando el límite apropiado, una expresión exacta para la Integral de Camino.

### 3 RESONANCIA ESTOCASTICA

#### 3.1 Historia

Básicamente la *Resonancia Estocástica* [6] [7] [8] [9] es un fenómeno en el cuál la respuesta de un *Sistema Dinámico* a una *Perturbación Externa* es optimizada por la presencia de un cierto *nivel de Ruido*.

Para fijar ideas consideremos el movimiento sobreamortiguado de una partícula de masa  $m$  y coeficiente de fricción  $\gamma$  en un potencial biestable simétrico  $V(x)$  tal como se muestra en la siguiente figura

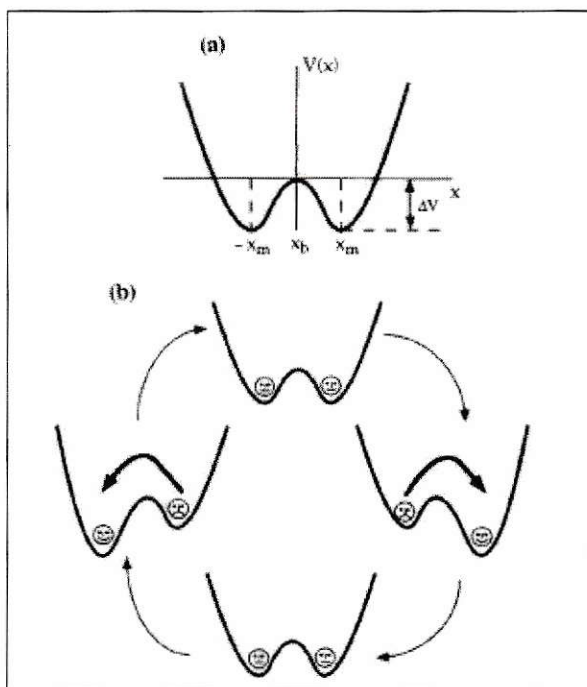


Figura 3.1.1 Partícula en un potencial biestable.

La partícula está sometida a fluctuaciones (ruido) que pueden ser debidas, por ejemplo, al contacto con una fuente de calor. Estas fuerzas causan transiciones entre los pozos del potencial con una tasa dada por la famosa *tasa de Kramers*

$$r_k = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi\gamma} \exp \left[ -\frac{\Delta V}{D} \right] \quad (3.1.1)$$

en que  $\omega_0^2 = V''(x_m)/m$  es la frecuencia angular de oscilación en los mínimos  $\pm x_m$  del potencial y  $\omega_b^2 = V''(x_b)/m$  la frecuencia en el máximo  $x_b$ ;  $\Delta V$  es la altura de la barrera de potencial que separa los dos mínimos y  $D$  es la intensidad del ruido que depende de la temperatura según  $D = k_B T$ . Si se perturba el sistema con una fuerza periódica débil, de frecuencia  $\Omega$ , el potencial biestable es balanceado periódicamente hacia arriba y abajo, subiendo y bajando en forma periódica la barrera de potencial. Aún cuando la perturbación es demasiado débil para forzar a la partícula a saltar entre los dos pozos, los saltos debido al ruido entre los dos pozos pueden sincronizarse con la perturbación periódica débil. Esta sincronización, de carácter estadístico, ocurre cuando el *tiempo promedio de espera*  $T_k(D) = 1/r_k$  entre dos transiciones entre los pozos inducidas por el ruido es comparable con la mitad del período  $T_\Omega = 2\pi/\Omega$ . Lo anterior proporciona la llamada condición de *coincidencia de escala de tiempo* para la llamada resonancia estocástica, i.e.,

$$T_k \approx \frac{1}{2} T_\Omega \quad (3.1.2)$$

El concepto de resonancia estocástica fué introducido en el trabajo de Benzi et al en el año 1981, en el contexto de un modelo para explicar el cambio en el clima de la tierra entre eras glaciales y períodos de clima normal, considerando un período de alrededor de 100.000 años. En este modelo el clima global es representado por un potencial biestable, en que un mínimo representa una baja temperatura terrestre correspondiente a una situación de era glacial. La pequeña modulación de la excentricidad de la tierra es representada como una perturbación periódica débil. Las fluctuaciones climáticas de corto término, tales como las fluctuaciones de mediano plazo (no estacionales) de la radiación solar son modeladas como ruido blanco Gaussiano. Si el ruido es "sintonizado" según la ecuación (3.1.2), entonces un salto sincronizado entre el clima glacial y normal aumentará significativamente la respuesta del clima terrestre a una perturbación débil causada por la variación de la excentricidad orbital de la tierra, según los argumentos de Benzi et al (1981, 1982).

### 3.2 El modelo de dos estados

El modelo generico para introducir la resonancia estocástica y que permite un cálculo analítico es el de una partícula en un potencial biestable. La posición de la partícula se "filtra", considerando solo en que pozo del potencial se encuentra en un cierto instante de tiempo. Consideremos entonces un sistema simétrico (potencial biestable), no sometido a perturbaciones externas que realiza transiciones entre dos estados  $\pm x_m$  con una tasa  $W_0$ . Estas transiciones

puede ser debidas al ruido que el sistema experimenta al estar en contacto con una fuente térmica. Sea  $n_{\pm}(t)$  la probabilidad que el sistema ocupe alguno de los dos estados  $\pm$  en el tiempo  $t$ , es decir,  $x(t) = \pm x_m$ . Si el sistema es perturbado por una señal externa periódica  $A(t) = A_0 \cos[\Omega t]$ , entonces realizará transiciones entre los puntos  $\pm$ , en forma alternada y las *densidades de probabilidad de transición*  $W_{\pm}(t)$  (*tasas de transición* para abreviar), desde los estados  $\pm x_m$ , dependerán del tiempo en forma periódica. Luego se puede escribir una ecuación maestra para las probabilidades  $n_{\pm}(t)$

$$\frac{dn_{\pm}(t)}{dt} = -W_{\mp}(t)n_{\pm}(t) + W_{\pm}(t)n_{\mp}(t) \quad (3.2.1a)$$

o haciendo uso de la condición de normalización  $n_+ + n_- = 1$ ,

$$\frac{dn_{\pm}(t)}{dt} = -[W_{\pm}(t) + W_{\mp}(t)]n_{\pm}(t) + W_{\pm}(t) \quad (3.2.1b)$$

Al integrar formalmente la ecuación (3.2.1b) se obtiene

$$n_{\pm}(t) = g(t) \left[ n_{\pm}(t_0) + \int_{t_0}^t d\tau W_{\pm}(\tau) g^{-1}(\tau) \right] \quad (3.2.2a)$$

$$g(\tau) = \exp \left[ - \int_{t_0}^{\tau} d\tau [W_+(\tau) + W_-(\tau)] \right] \quad (3.2.2b)$$

en que  $n_{\pm}(t_0)$  es una condición inicial arbitraria. Siguiendo a Mcnamara y Wiesenfeld (1989), se escribe para las tasas de transición las llamadas *tasas periódicas de transición moduladas* del tipo Arrhenius

$$W_{\mp}(\tau) = r_k \exp \left[ \mp \frac{A_0 x_m}{D} \cos(\Omega t) \right] \quad (3.2.3)$$

Supongamos ahora que la amplitud de modulación es pequeña, es decir,

$$\frac{A_0 x_m}{D} \ll 1$$

luego se puede expandir en serie con respecto al parámetro pequeño  $\frac{A_0 x_m}{D}$ . Así

$$W_{\mp}(\tau) = r_k \left[ 1 \mp \frac{A_0 x_m}{D} \cos(\Omega t) + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0 x_m}{D} \right)^2 \cos^2(\Omega t) \mp \dots \right]$$

$$W_+(t) + W_-(t) = 2r_k \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{A_0 x_m}{D} \right)^2 \cos^2(\Omega t) + \dots \right] \quad (3.2.4)$$

Integrando entonces las ecuaciones (3.2.2a,b) y reteniendo términos hasta el primer orden en el parámetro  $\frac{A_0 x_m}{D}$ ,

$$\begin{aligned} n_+(t|x_0, t_0) &= 1 - n_-(t|x_0, t_0) \\ &= \frac{1}{2} \{ \exp[-2r_k(t - t_0)] [2\delta_{x_0, x_m} - 1 - \kappa(t_0)] + 1 + \kappa(t) \} \end{aligned} \quad (3.2.5a)$$

en que

$$\kappa(t) = \frac{2r_k \left( \frac{A_0 x_m}{D} \right)}{\sqrt{4r_k^2 + \Omega^2}} \cos(\Omega t - \bar{\phi}) \quad (3.2.5b)$$

$$\bar{\phi} = \arctan\left(\frac{\Omega}{2r_k}\right) \quad (3.2.5c)$$

La expresión  $n_+(t|x_0, t_0)$  se debe leer como la probabilidad condicional de que  $x(t)$  se encuentre en el estado + en el tiempo  $t$ , sabiendo que el estado inicial era  $x_0 \equiv x(t_0)$ . La delta de Kronecker  $\delta_{x_0, x_m}$  refleja el estado discreto del sistema y vale 1 cuando el sistema se encuentra inicialmente en el estado +.

La solución (3.2.5a,b,c) permite el cálculo de cualquier cantidad estadística de interés del proceso discreto  $x(t)$  a primer orden en el parámetro de expansión  $\frac{A_0 x_m}{D}$ . En particular, calculemos la respuesta temporal promedio del sistema frente a la perturbación periódica.

Por definición de valor medio o esperado

$$\langle x(t)|x_0, t_0 \rangle = \int dx P(x, t|x_0, t_0) x \quad (3.2.6a)$$

en que la probabilidad condicional se escribe

$$P(x, t|x_0, t_0) \equiv n_+(t)\delta(x - x_m) + n_-(t)\delta(x + x_m) \quad (3.2.6b)$$

donde nuevamente las deltas de Dirac obligan a la partícula a estar en uno u otro pozo del potencial. Reemplazando y tomando el límite asintótico  $t_0 \rightarrow -\infty$  lo que nos define el llamado *promedio estacionario* y que denotamos por el símbolo  $\langle x(t) \rangle_{st}$  podemos escribir finalmente:

$$\langle x(t) \rangle_{st} \equiv \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle x(t) | x_0, t_0 \rangle = \bar{x}(D) \cos(\Omega t - \phi(D)) \quad (3.2.7a)$$

$$\bar{x}(D) = \frac{A_0 x_m^2}{D} \frac{2r_k}{\sqrt{4r_k^2 + \Omega^2}} \quad (3.2.7b)$$

$$\phi(D) = \arctan\left(\frac{\Omega}{2r_k}\right) \quad (3.2.7c)$$

Examinando la expresión anterior se puede ver el comportamiento de  $\bar{x}(D)$  como función de la intensidad del ruido  $D$  tal como lo muestra la siguiente figura. A la expresión  $\bar{x}(D)$  la llamamos *amplitud del promedio estacionario*.

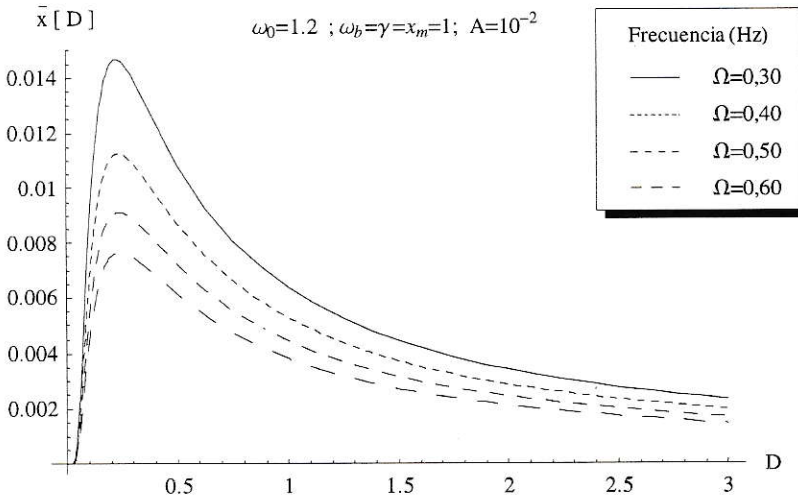


Fig. 3.2.1 Amplitud  $\bar{x}(D)$  versus  $D$

El gráfico muestra el comportamiento de la amplitud del promedio estacionario, como función de la intensidad del ruido, para distintos valores de la frecuencia. Notese que cada curva, exhibe un máximo, para un valor del ruido *distinto de cero*; este máximo es lo que se denomina resonancia estocástica y el valor del ruido para el cual ocurre este máximo es lo que se llama el valor de resonancia estocástica. A medida que la frecuencia aumenta, el efecto de resonancia disminuye. Debe notarse sin embargo que la condición de resonancia  $T_k \approx \frac{1}{2}T_\Omega$  es solo aproximada, lo esencial es que ambas escalas de tiempo básicamente son del mismo orden de magnitud. La tabla de la pagina siguiente muestra la anterior afirmación. En esta se ha calculado, primero el tiempo de correlación,  $T_D$  que es el inverso del valor del ruido  $D$  para el cual una curva con cierta frecuencia presenta un máximo. Luego para la frecuencia de esa

curva se calcula su período  $T_\Omega = 2\pi/\Omega$  y finalmente se calcula el cuociente de ambas escalas de tiempo  $T_D/T_\Omega$

$T_D$	$T_\Omega$	$\frac{T_D}{T_\Omega}$
4,76	20,9	0,23
4,35	15,7	0,28
4,00	12,6	0,32
3,85	10,5	0,37

Tabla 3.1



## 4 FORMULACION DEL PROBLEMA

### 4.1 Motivación: Resonancia en un Sistema Lineal

Hasta hace un tiempo se pensaba que la biestabilidad de un sistema dinámico era un requisito esencial del fenómeno de resonancia estocástica; sin embargo también se encontró que existe en sistemas lineales [10] [11] [12], es decir, sistemas con un potencial cuadrático sometidos tanto al llamado ruido multiplicativo dicotómico (dos valores) como también para ruido multiplicativo Gaussiano. Estrictamente la presencia del término de ruido origina que el sistema sea no lineal en su respuesta. La denominación lineal se refiere simplemente a que cuando se mira el sistema en términos de la variable dinámica  $x$  la ecuación diferencial resultante es lineal y de primer orden en esta variable. Sin embargo, las soluciones que existen son solo aproximadas, aunque la referencia (Barzykin et al) propone una solución exacta para el caso especial de ruido multiplicativo Gaussiano. El modelo considerado es del tipo

$$\dot{x}(t) = - (a_o + a_1\xi(t)) x(t) + A \sin(\Omega t) \quad (4.1.1)$$

en que  $\xi(t)$  es un término de ruido, que es caracterizado por su valor medio,  $\langle \xi(t) \rangle$  y por la llamada correlación  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle$ . Los factores  $a_o$ ,  $a_1$  son factores constantes y el término  $A \sin(\Omega t)$  se refiere a una perturbación periódica externa de intensidad  $A$  y frecuencia  $\Omega$ . La motivación para la existencia de la ecuación anterior es que surge en problemas de cruce de barreras fluctuantes en química, cinemática de enzimas en biología y resonancia nuclear magnética. Cuando el término de ruido va multiplicado por la variable dinámica  $x$  se habla de *ruido multiplicativo* (en contraposición al caso en que el término de ruido aparezca sumado caso que se denomina *ruido aditivo*).

### 4.2 Solución por Integrales de Camino

El problema que consideraremos es descrito por un modelo lineal sometido a un ruido coloreado multiplicativo y perturbado por una señal externa periódica de amplitud  $A$  y frecuencia  $\Omega$ . Como tal puede ser descrito en la forma:

$$\dot{x}(t) = - (a_o + a_1\xi(t)) x(t) + A \sin(\Omega t) \quad (4.2.1)$$

en donde  $a_0, a_1$  son parámetros libres y  $\xi(t)$  es un ruido coloreado. Tomaremos  $\xi(t)$  como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck definido como:

$$\dot{\xi}(t) = -\gamma \xi(t) + \sqrt{c} \eta(t) \quad (4.2.2a)$$

con  $\gamma > 0$ , y  $c > 0$  es la intensidad del ruido blanco gaussiano  $\eta(t)$  definido como  $\langle \eta(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t')$ . Además para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (4.2.2b)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{c}{2\gamma} \exp[-\gamma |t - t'|] \quad (4.2.2c)$$

Integrando formalmente la ecuación (4.2.1) conduce a:

$$x(t) = x_0 e^{-a_0(t-t_0)} \psi[\xi(t); t, t_0] + A \int_{t_0}^t d\tau \sin(\Omega\tau) e^{-a_0(t-\tau)} \psi[\xi(t); t, \tau] \quad (4.2.3)$$

donde

$$\psi[\xi(t_2); t_2, t_1] = e^{-\int_{t_1}^{t_2} d\tau (a_1 \xi(\tau))} \quad (4.2.4)$$

Promediando la solución anterior

$$\langle x(t) \rangle = x_0 e^{-a_0(t-t_0)} \varphi(t, t_0) + A \int_{t_0}^t d\tau \sin(\Omega\tau) e^{-a_0(t-\tau)} \varphi(t, t_0) \quad (4.2.5)$$

en que

$$\varphi(t, t_0) = \left\langle e^{-\int_{t_0}^t d\tau (a_1 \xi(\tau))} \right\rangle \quad (4.2.6)$$

Para calcular el valor medio anterior se busca una representación de integral de camino, vale decir comenzamos discretizando (4.2.6):

$$s_j = t_0 + j\epsilon; \quad s_{N+1} = t \quad j = 0, 1, \dots, N+1, \quad \epsilon = \frac{t - t_0}{N+1} \quad (4.2.7)$$

La expresión discretizada es entonces

$$\varphi(t, t_0) = \left\langle e^{-\sum_{j=1}^{N+1} \epsilon (a_1 \xi_j)} \right\rangle = \int \prod_{j=0}^{N+1} d\xi_j W_{N+1} e^{-\sum_{j=1}^{N+1} \epsilon (a_1 \xi_j)} \quad (4.2.8)$$

en la cual

$$W_{N+1} = W_{N+1}(\xi_{N+1}, \tau_{N+1}; \dots; \xi_0, \tau_0) = \prod_{j=0}^{N+1} P(\xi_j, \tau_j \mid \xi_{j-1}, \tau_{j-1}) W_1(\xi_0, \tau_0) \quad (4.2.9)$$

es la densidad de probabilidad conjunta del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y

$$W_1(\xi_0, \tau_0) = P_{st}(\xi_0) = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi c}} e^{-\frac{\gamma}{2c} \xi_0^2} \quad (4.2.10)$$

es la probabilidad estacionaria del proceso anterior, la cual tomamos aquí como una condición inicial debido a que estamos interesados en las propiedades estacionarias del proceso  $x(t)$  definido por la ecuación (4.2.1) (de aquí en adelante esto significa el comportamiento para tiempos largos que será dependiente del tiempo y en consecuencia no estrictamente estacionario). Puesto que (4.2.2) es una ecuación independiente entonces

$$P(\xi_j, \tau_j \mid \xi_{j-1}, \tau_{j-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon c}} e^{-\frac{\epsilon}{2c} (\dot{\xi}_j + \gamma \xi_{j-1})^2} \quad (4.2.11a)$$

$$\epsilon = \tau_j - \tau_{j-1}, \quad \dot{\xi}_j \equiv \frac{\Delta \xi_j}{\epsilon}, \quad \Delta \xi_j \equiv \xi_j - \xi_{j-1} \quad (4.2.11b)$$

Reemplazando (4.2.9), (4.2.10) y (4.2.11) en (4.2.8) y después de una simplificación puramente algebraica con el fin de tomar ventaja de las técnicas de integración de camino, se puede escribir la expresión

$$\varphi(t, t_0) = e^{\frac{1}{2}\gamma(t-t_0)} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 d\xi e^{-\frac{\gamma}{2c} (\xi_0^2 + \xi^2)} I(\xi, t; \xi_0, t_0) \quad (4.2.12)$$

en que

$$I(\xi, t; \xi_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon c}} \int \prod_{j=1}^N \frac{d\xi_j}{\sqrt{2\pi\epsilon c}} e^{-\frac{\epsilon}{2c} \sum_{j=1}^{N+1} (\dot{\xi}_j^2 + \gamma^2 \xi_j^2 + 2c\alpha_1 \xi_j)} \quad (4.2.13)$$

Al completar cuadrados en el argumento de la exponencial, la expresión previa se puede escribir de manera formal como

$$I = e^{\frac{c\alpha_1^2}{2\lambda^2}(t-t_0)} \int D\xi e^{-\frac{1}{2c} \int_{t_0}^t dt \left( \dot{\xi}^2 + \gamma^2 \left( \xi + \frac{c\alpha_1}{\gamma^2} \right)^2 \right)} \delta(\xi(t) - \xi) \delta(\xi(t_0) - \xi_0) \quad (4.2.14)$$

en que las deltas de Dirac son usadas como una notación solamente para indicar que los valores de  $\xi$  en  $t$  y  $t_0$  son fijos para propósitos de la presente integración.

Realizando ahora la transformación

$$\chi(t) = \xi(t) + \frac{ca_1}{\gamma^2} \quad (4.2.15)$$

que no cambia la medida de integración  $D\xi = D\chi$  ni tampoco otro factor en la integración puesto que el Jacobiano es uno, se obtiene

$$I(\xi, t; \xi_0, t_0) = e^{\frac{ca_1^2}{2\gamma^2}(t-t_0)} \int D\chi e^{-\frac{1}{2c} \int_{t_0}^t dt (\dot{\chi}^2 + \gamma^2 \chi^2)} \times \delta(\chi(t) - \chi) \delta(\chi(t_0) - \chi_0) \quad (4.2.16a)$$

$$\chi(t) = \xi(t) + \frac{ca_1}{\gamma^2} \quad (4.2.16b)$$

$$\chi(t_0) = \xi(t_0) + \frac{ca_1}{\gamma^2} \quad (4.2.16c)$$

Ahora podemos usar las técnica introducidas por Langouche-Roekaerts-Tirapegui para el cálculo del funcional cuadrático [5], lo que arroja finalmente

$$I = e^{\frac{ca_1^2}{2\gamma^2}(t-t_0)} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi c \sinh \rho}} e^{\left(\frac{-\gamma}{2c} \frac{\cosh \rho}{\sinh \rho} \chi^2 + \frac{\gamma}{c \sinh \rho} \chi \chi_0 - \frac{\gamma}{2c} \frac{\cosh \rho}{\sinh \rho} \chi_0^2\right)} \quad (4.2.17)$$

en que  $\rho(t) = \gamma(t - t_0)$ .

Reemplazando la expresión (4.2.1) en (4.2.11) y usando la transformation (4.2.15) se puede escribir  $d\xi_0 d\xi = d\chi_0 d\chi$ , y realizando todas las transformaciones apropiadas más una simple integración gaussiana finalmente se llega a la relación

$$\varphi(t, t_0) = \exp \left[ \left( \frac{ca_1}{2\gamma^2} \right)^2 (t - t_0) - \frac{ca_1^2}{2\gamma^3} (1 - e^{-\rho}) \right] \quad (4.2.18)$$

Examinando la ecuación (4.2.5) se puede ver que para tener un estado estacionario  $\langle x(t) \rangle_{st}$  es necesario analizar  $e^{-a_0(t-t_0)} \varphi(t, t_0)$  para el caso límite  $t_0 \rightarrow -\infty$ . De la ecuación (4.2.18) se deduce que esto implica la condición

$$\left( a_0 - \frac{ca_1^2}{2\gamma^2} \right) > 0 \quad (4.2.19)$$

Luego es directo ver que

$$\langle x(t) \rangle_{st} = A \int_{-\infty}^t d\tau \sin(\Omega\tau) e^{-a_0(t-\tau)} \varphi(\gamma(t-\tau)) \quad (4.2.20)$$

donde

$$\varphi(\gamma(t-\tau)) = \left\langle e^{-\int_{\tau}^t d\tau' (a_1 \xi(\tau'))} \right\rangle \quad (4.2.21)$$

el cual es calculado de manera análoga a  $\varphi(t, t_0)$  y posee la misma estructura matemática con  $\tau$  reemplazando  $t_0$ .

Realizando ahora en la fórmula el cambio de variable  $u = \gamma(t - \tau)$ , se puede escribir

$$\langle x(t) \rangle_{st} = -\frac{A}{\gamma} \int_0^{\infty} du \theta(u) e^{-a_0 u} \varphi(u) \quad (4.2.22a)$$

en que la función  $\theta(u)$  está dada por la expresión

$$\theta(u) = \sin\left(\Omega t - \frac{\Omega}{\gamma} u\right) \quad (4.2.22b)$$

Finalmente realizando una simple manipulación algebraica se llega a la solución buscada para el estado estacionario

$$\langle x(t) \rangle_{st} = -\frac{A}{\gamma} \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\Omega t - \phi) \quad (4.2.23a)$$

donde

$$B_1 = \int_0^{\infty} du \cos\left(\frac{\Omega}{\gamma} u\right) \zeta(u) \quad (4.2.23b)$$

$$B_2 = \int_0^{\infty} du \sin\left(\frac{\Omega}{\gamma} u\right) \zeta(u) \quad (4.2.23c)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{B_1}{B_2}\right) \quad (4.2.23d)$$

$$\zeta(u) = \exp\left[-\left(a_0 - \frac{ca_1^2}{2\gamma^2}\right) \frac{u}{\gamma} - \frac{ca_1^2}{2\gamma^3} (1 - e^{-u})\right] \quad (4.2.23e)$$

# 5 RESULTADOS Y CONCLUSIONES

## 5.1 Resultados

El primer paso en el análisis del resultado analítico (4.2.23) es encontrar las condiciones bajo las cuales las integrales de la solución (4.2.23) existen.

Queremos graficar la expresión que llamamos *Amplitud del Promedio Estacionario*, definida por

$$\chi_{st} \equiv \frac{A}{\gamma} \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \quad (5.1.1)$$

en función del parámetro de ruido  $\gamma$ .

Primero se tiene el siguiente espacio de parámetros:

$$\{a_0, a_1, A, \Omega, c, \gamma\}$$

Queremos fijar los primeros 5 parámetros de la expresión anterior y deseamos construir familias de curvas para la expresión  $\chi_{st}$  versus la variación del parámetro de ruido  $\gamma$ .

Examinando la expresión anterior se ve en forma inmediata que depende de la relación (4.2.23e). En efecto el análisis muestra que las integrales son convergentes si

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \zeta(u) = 0$$

lo cual implica

$$\left( a_0 - \frac{ca_1^2}{2\gamma^2} \right) > 0 \quad (5.1.2)$$

Entonces ahora se procede como sigue: dado un  $\gamma \neq 0$  tal que  $\gamma \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$  y fijados los valores de  $a_0, a_1$  se encuentra una relación funcional para  $c$  en que se debe cumplir para cualquier  $\gamma$

$$c < 2 \frac{a_0}{a_1^2} \gamma^2$$

con  $\gamma$  en el intervalo  $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ . Luego, dados los  $\gamma$  entonces los valores de  $c$  son tales que definen el intervalo de variación

$$c \in [0, 2 \frac{a_0}{a_1^2} \gamma_{\min}^2] \quad (5.1.3)$$

pués así  $c$  siempre cumplirá la desigualdad (5.1.2). El método ahora es construir lo que llamamos *superficies de resonancia*, en que fijamos 4 parámetros y graficamos  $\chi_{st}$  versus  $c$  y

$\gamma$ . El siguiente es el resultado de una superficie de resonancia (vista desde dos ángulos) para los siguientes valores de los parámetros

$$\{a_0; a_1; A; \Omega\} = \{1; 1; 1; 0, 73\} \quad (5.1.4)$$

tal como lo muestran las figuras 5.1.1 y 5.1.2. Se debe hacer notar que la elección de los parámetros  $\{a_0; a_1; A\} = \{1; 1; 1\}$  no hace perder generalidad, esto se debe tal como se muestra en el apéndice 6.2, a que las variables del sistema dado por (4.2.1) y (4.2.2a) se pueden reescalar, fijando arbitrariamente 3 de ellas  $\{a_0; a_1; A\}$  y arrojando como parámetros libres para el estudio, el conjunto  $\{\gamma; c; \Omega\}$ .

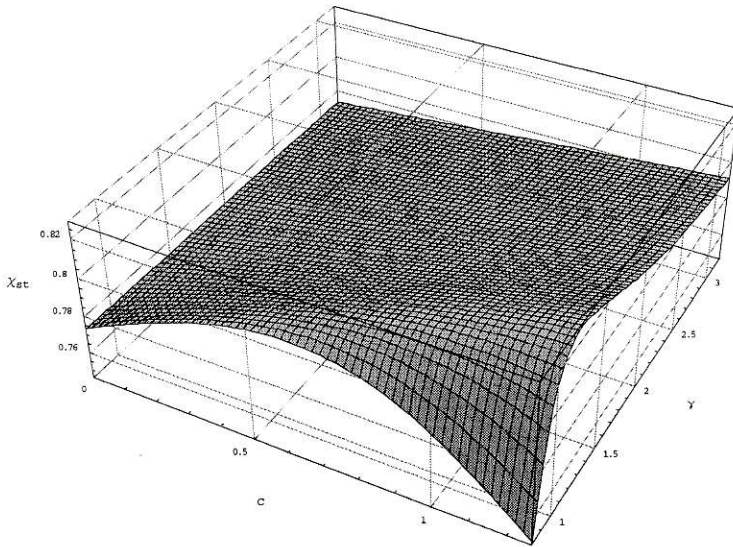


fig. 5.1.1 La superficie de resonancia:  $\chi_{st}$  versus  $c$  y  $\gamma$

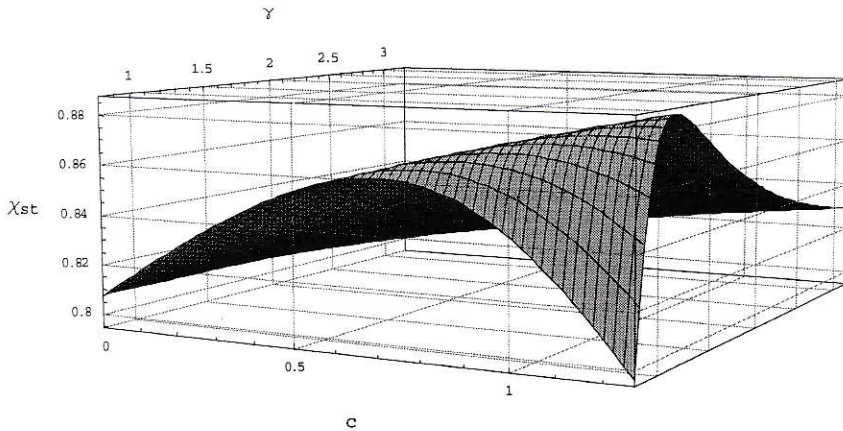


fig. 5.1.2 La superficie de resonancia:  $\chi_{st}$  versus  $c$  y  $\gamma$

Este método nos proporciona en realidad infinitas curvas de resonancia. Basta ahora hacer un corte en un  $c$  particular y graficar la expresión resultante haciendo variar ahora  $\gamma$  y  $\Omega$ . Los gráficos siguientes muestran dos familias de curvas de resonancia, con los siguientes valores de parámetros

$$\{a_0; a_1; A; c\} = \{1; 1; 1; 0,98\} \quad (5.1.5)$$

$$\{a_0; a_1; A; c\} = \{1; 1; 1; 0,72\} \quad (5.1.6)$$

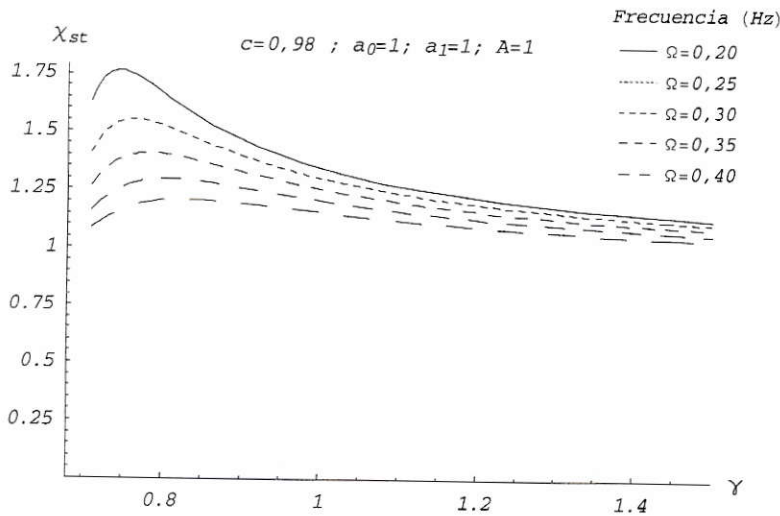


fig. 5.1.3a  $\chi_{st}$  versus el parámetro de ruido  $\gamma$  para  $c = 0,98$

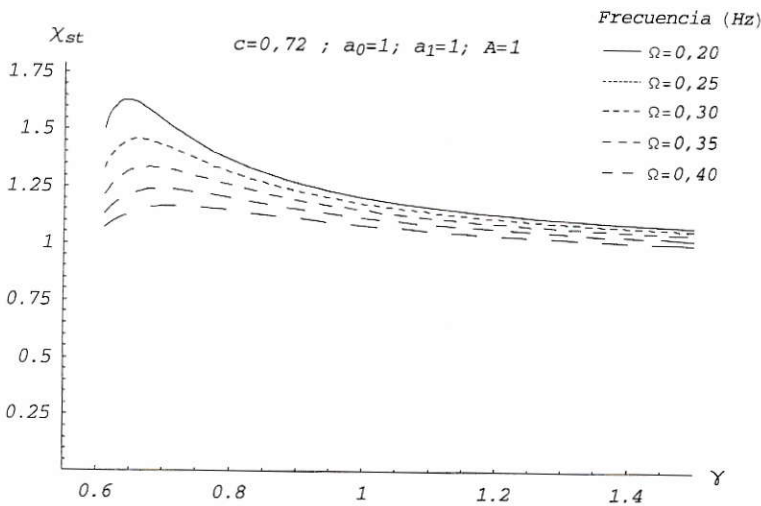


fig. 5.1.3b  $\chi_{st}$  versus el parámetro de ruido  $\gamma$ , para  $c = 0,72$



Cada familia de curvas es caracterizada por un valor de  $c$  y por distintos valores de la frecuencia  $\Omega$  y demuestra la existencia del fenómeno de resonancia estocástica para las expresiones de la solución de la amplitud del promedio estacionario.

## 5.2 El límite de Barzykin et al (1997)

Barzykin et al [11] consideran el modelo lineal

$$\dot{x}(t) = -(a_0 + a_1\xi(t))x(t) + A \sin(\Omega t) \quad (5.2.1)$$

en que  $\xi(t)$  representa un ruido Gaussiano, tal que

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (5.2.2a)$$

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \Delta^2 \exp\left[-\frac{|t_1 - t_2|}{\tau_c}\right] \quad (5.2.2b)$$

y con

$$a_0 = a_1 = A = 1 \quad (5.2.2c)$$

La solución de Barzykin et al se basa en el desarrollo de una serie, a diferencia de la solución de esta tesis. A partir de la expresión (4.2.2c) para la correlación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y de la solución (4.2.23a-e) haciendo la correspondencia siguiente:

$$\frac{c}{2\gamma} = \Delta^2 = 1 \quad (5.2.4a)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \tau_c \quad (5.2.4b)$$

y los valores anteriores (5.2.2.c) ambos problemas son idénticos y el cambio ocurre en la función (4.2.23e)

$$\zeta(u) = \exp\left[-\left(a_0 - \frac{ca_1^2}{2\gamma^2}\right)\frac{u}{\gamma} - \frac{ca_1^2}{2\gamma^3}(1 - e^{-u})\right]$$

que se transforma en

$$\zeta(u) = \exp\left[-(1 - \tau_c)u\tau_c - \tau_c^2(1 - e^{-u})\right] \quad (5.2.4c)$$

Notese que la correspondencia (5.2.4a) permite "eliminar" el parámetro  $c$  de la expresión final (5.2.4c). Usando entonces las formulas encontradas en esta tesis, graficamos la cantidad  $R$  definida como  $R = (B_1^2 + B_2^2)^{\frac{1}{2}}$ . El resultado es, con los valores de parámetros indicados en

el gráfico, que son los usados por los autores:

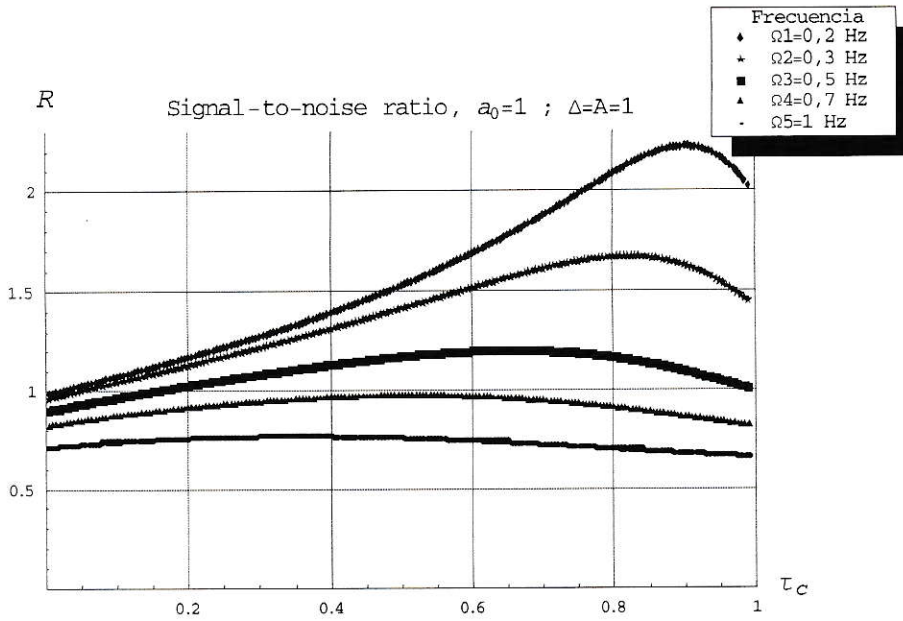


Figura 5.2.1 La solución de Barzykin et al.

que es el mismo gráfico obtenido por ellos.

### 5.3 Conclusiones

Se ha demostrado en forma concluyente que existe el fenómeno de resonancia estocástica en un sistema lineal sometido a ruido multiplicativo del tipo Ornstein-Uhlenbeck. También se ha demostrado que el cálculo basado en la técnica de integral de camino, logra reproducir una solución analítica encontrada por otro método (Barzykin et al). Sin embargo surgen algunas preguntas que deben ser motivo de ulterior estudio:

- No se ha mencionado el tema de la relación entre las escalas de tiempo, asociadas al ruido ( $T_\gamma \equiv 1/\gamma$ ) y a la perturbación periódica ( $T_\Omega \equiv 2\pi/\Omega$ ). En este caso un simple cálculo muestra que la relación esperada  $T_\gamma/T_\Omega \approx 0.5$  que se cumple en el caso de sistemas dinámicos con potencial biestable, aquí no ocurre. El cálculo muestra que la relación difiere por lo menos en un orden de magnitud, tal como lo muestran las tablas siguientes, (5.1) y (5.2) calculadas en base a los gráficos (5.1.3a,b) respectivamente, i.e.,

$T_\gamma$	$T_\Omega$	$\frac{T_\gamma}{T_\Omega}$
1, 35	31, 40	0, 04
1, 32	25, 12	0, 05
1, 29	20, 93	0, 06
1, 25	17, 94	0, 07
1, 20	15, 70	0, 08

tabla 5.1

$T_\gamma$	$T_\Omega$	$\frac{T_\gamma}{T_\Omega}$
1, 61	31, 40	0, 05
1, 54	25, 12	0, 06
1, 49	20, 93	0, 07
1, 47	17, 94	0, 08
1, 43	15, 70	0, 09

tabla 5.2

Las tiempos se calcularon de la siguiente manera, para cada curva, primero se calcula  $T_\gamma \equiv 1/\gamma$  usando para  $\gamma$  el valor para el que la curva presenta un máximo. Segundo  $T_\Omega \equiv 2\pi/\Omega$  con  $\Omega$  el asociado a la curva.

Lo anterior indica que el origen del fenómeno de resonancia estocástica se debe a un mecanismo distinto del caso de sistemas dinámicos con potencial biestable, mecanismo para el cual todavía no existe explicación.

- Se puede calcular la correlación por el mismo método, con el fin de calcular la razón señal a ruido, SNR, (básicamente espectro de potencia). En este caso el problema es técnicamente más complejo pues involucra el cálculo de integrales dobles para los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  de la solución (4.2.23b,c). Esto es de interés puesto que el espectro de potencia es una cantidad que es medible en el laboratorio, y además debido a que

los cálculos en la literatura tienden a basar el análisis de la resonancia estocástica en el comportamiento del SNR.

- No se ha abordado el problema lineal más general, es decir, la ecuación

$$\dot{x}(t) = - (a_o + a_1\xi(t) + a_2\xi(t)^2) x(t) + A \sin(\Omega t)$$

que contiene términos lineal y cuadrático en el ruido que es un problema que no ha sido aún abordado en la literatura. También la técnica de integral de camino permite un cálculo exacto. En este caso se puede calcular el caso interesante de un sistema lineal con ruido puramente cuadrático,

$$\dot{x}(t) = - (a_o + a_2\xi(t)^2) x(t) + A \sin(\Omega t)$$

que también es un problema nuevo y distinto del anterior y para el cuál tampoco existe solución en la literatura.

## 6 Apéndice

### 6.1 Solución de la ecuación de difusión

Sea la ecuación de difusión

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.1.1)$$

Sea ahora la condición inicial

$$w(x, t) \rightarrow \delta(x) \text{ cuando } t \rightarrow 0 \quad (6.1.2)$$

Sea la transformada de Fourier

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{w}(k, t) \quad (6.1.3)$$

Usando ahora la representación de Fourier para la función  $\delta(x)$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \quad (6.1.4)$$

se puede ver que la condición inicial, en función de la imagen de Fourier  $\tilde{w}(k, t)$  se transforma en

$$\tilde{w}(k, 0) = \frac{1}{2\pi} \quad (6.1.5)$$

Aplicando entonces la transformada de Fourier a la ecuación de difusión, previo cambio de variables, esta se convierte en

$$\frac{\partial \tilde{w}(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 \tilde{w}(k, t) \quad (6.1.6)$$

ecuación con solución

$$\tilde{w}(k, t) = \tilde{w}(k, 0) e^{-Dk^2 t} = \frac{1}{2\pi} e^{-Dk^2 t} \quad (6.1.7)$$

entonces la distribución de probabilidad puede ser representada en la forma

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{2\pi} e^{-Dk^2 t} e^{ikx} \quad (6.1.8)$$

Haciendo el cambio de variable  $k \rightarrow k - ix/(2Dt)$  y usando el valor de la integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (6.1.9)$$

se obtiene finalmente

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4Dt}\right\} \quad (6.1.10)$$

La expresión anterior es por construcción solución de la ecuación de difusión (6.1.1) con condición inicial (6.1.2).

## 6.2 Reescalamiento de las variables del problema

Mostraremos aquí como escalar la ecuación de base para quedarse solo con tres parámetros independientes.

El sistema inicial es

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(a_0 + a_1 \xi(t))x(t) + A \sin(\varpi t) \quad (6.2.1)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\gamma \xi(t) + \sqrt{c} \eta(t) \quad (6.2.2)$$

en donde  $\eta(t)$  es un ruido blanco gaussiano de media nula y delta correlado, o sea

$$\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) \quad (6.2.3)$$

Hacemos el scaling

$$x(t) = \lambda_1 X(T), \quad \xi(t) = \lambda_2 \zeta(T), \quad t = \sigma T, \quad (6.2.4)$$

y en términos de las nuevas variables las ecuaciones iniciales se escriben como

$$\frac{dX(T)}{dT} = -(1 + \zeta(T))X(T) + \sin(\Omega T) \quad (6.2.5a)$$

$$\frac{d\zeta(T)}{dT} = -\Gamma \zeta(T) + \sqrt{C} \phi(T), \quad (6.2.5b)$$

con

$$\lambda_1 = \frac{A}{a_o} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{a_o}{a_1} \quad , \quad \sigma = \frac{1}{a_o} \quad , \quad \Omega = \frac{\varpi}{a_o} \quad , \quad \Gamma = \frac{\gamma}{a_0} \quad , \quad \sqrt{C} = \frac{a_1 \sqrt{c}}{a_o \sqrt{a_o}} \quad (6.2.5c)$$

sistema con solo tres parámetros independientes:  $\{\Omega, \Gamma, C\}$

## 7 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Hector Calisto, Integración Funcional para Procesos Markovianos y no Markovianos, Tesis de Doctorado, Facultad de Física, PUC, 1993R.
- [2] W. Horsthemke and R. Lefever, Noise-Induced Transitions, Springer-Verlag, 1984
- [3] M. Chaichian, Path Integrals in Physics, Vol. I, IOP Publishing Ltd. 2001
- [4] Manuel O. Caceres, Elementos de estadística de no equilibrio y sus aplicaciones al transporte en medios desordenados, Ed. Reverte, 2003
- [5] F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui, Functional Integration and Semiclassical Expansions, Reidel Publishing Company, 1982
- [6] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, J. Phys. A 14, L453 (1981)
- [7] C. Nicolis, Sol. Phys. 74 473 (1981)
- [8] R. Benzi et al, Tellus 34 10 (1982)
- [9] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung and F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)
- [10] A. Fulinski, Phys. Rev. E 52, 4523 (1995)
- [11] A.V.Barzykin and K.Seki, Europhys Lett. 40, 117 (1997)
- [12] V. Berdichevsky and M. Gitterman, Europhys Lett. 36, 161 (1996)