

UCH-FC  
MAG-F  
1491  
1

# Plasmas y sistemas dinámicos: un estudio de la ecuación DNLS

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias

por



Pablo Rubén Muñoz Gutberlet

Julio, 2007

Directores de Tesis: Dr. Juan Alejandro Valdivia  
Dr. José Rogan  
Dr. Víctor Muñoz

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN

TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

**Pablo Rubén Muñoz Gutberlet**

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias Físicas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 29 de Junio de 2007.

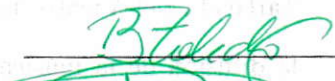
**Director de Tesis**

Dr. Juan Alejandro Valdivia



**Comisión de Evaluación de la Tesis**

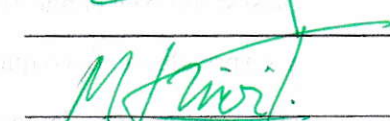
Dr. Benjamín Toledo



Dr. José Rogan



Dr. Víctor Muñoz



Dr. Miguel Kiwi



## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer en primer lugar al profesor Alejandro Valdivia por su constante apoyo, la confianza y paciencia hacia mi persona desde la época de la licenciatura. Gracias además por incentivar desde siempre el gusto por la investigación. A los profesores José Rogan y Víctor Muñoz por sus comentarios y correcciones que ayudaron a darle forma a esta tesis.

Agradezco especialmente a mi familia, que por largo tiempo han generado en el hogar el ambiente idóneo para divagar por el mundillo de la física sin complejos. A mi madre, Berta, que me ha aguantado tanto tiempo. Sin su apoyo incondicional esta tesis no hubiera sido posible. A mi hermano Carlos, quien con su mundo e idioma propios mantiene viva en mí la capacidad de asombro.

A todos mis amigos y compañeros de la universidad, quienes han colaborado de tantas y tan distintas formas. A los entrañables personajes de la generación del 98 y del 99. En especial a Cristóbal Espinoza, Andrea Rohrer, Eduardo Ibar, Cristián López, Pedro Vidal y Xavier Andrade, que siempre confiaron en mi capacidad. Ellos, además de colegas, son por sobre todas las cosas, amigos de toda la vida. Sepan que pueden contar conmigo como yo he contado con ustedes en algún momento a pesar de las tremendas distancias.

A mis compañeros de oficina por escuchar tantas horas de plasmas y caos, y por compartir ideas que de alguna u otra forma están presentes en este trabajo.

A mi pareja Daniela, quien en la última parte de este trabajo fue un importante pilar que me dio el alimento espiritual necesario para seguir adelante.

Agradezco a todos los miembros del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias por soportar mi desordenada presencia por tanto tiempo. Siempre recordaré ese gesto de infinita tolerancia.



# Índice



|   |    |
|---|----|
| 1. Introducción   | 1  |
| 2. Ecuación no lineal de Schrödinger                    | 5  |
| 2.1. Ecuaciones MHD                                     | 5  |
| 2.2. Obtención de la ecuación DNLS a partir de MHD      | 6  |
| 2.3. Conservación de la energía en la ecuación DNLS     | 11 |
| 3. Sistemas Dinámicos                                   | 15 |
| 3.1. Mapas  | 15 |
| 3.2. Puntos fijos y atractores                          | 16 |
| 3.2.1. Estabilidad de los puntos fijos                  | 17 |
| 3.2.2. Atractores extraños                              | 19 |
| 3.2.3. Variedades estables e inestables de puntos fijos | 21 |
| 3.3. Bifurcaciones                                      | 22 |
| 3.3.1. Diagrama de bifurcación                          | 22 |
| 3.3.2. Bifurcaciones locales genéricas                  | 24 |
| 3.3.3. Transición de Feigenbaum                         | 26 |
| 3.3.4. Crisis   | 27 |
| 3.4. Detección de órbitas periódicas inestables         | 31 |

|  |    |
|--|----|
| 4. Análisis de la ecuación DNLS como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias | 34 |
| 4.1. Reducción de la ecuación DNLS a un sistema ODE                                    | 34 |
| 4.2. $a = 0$ : Ondas periódicas, solitones y <i>shocks</i>                             | 36 |
| 4.3. $a \neq 0, \nu = 0$ : sistema hamiltoniano forzado                                | 42 |
| 4.4. $a \neq 0, \nu \neq 0$ : sistema con disipación y forzamiento                     | 46 |
| 4.5. Crisis interior e intermitencia   | 51 |
| 5. Ecuación DNLS forzada con dos frecuencias   | 56 |
| 5.1. Caso 1: bifurcación a partir de una órbita estable                                | 57 |
| 5.2. Caso 2: bifurcación a partir de un atractor extraño                               | 59 |
| 5.3. Control de caos   | 63 |
| 6. Solución numérica de la ecuación parcial diferencial                                | 68 |
| 6.1. Sistema sin disipación ni forzamiento, $\eta = 0$ y $A = 0$                       | 69 |
| 6.1.1. Ondas de amplitud modulada  | 72 |
| 6.2. Sistema con disipación y forzamiento, $\eta \neq 0$ y $A \neq 0$                  | 75 |
| 6.2.1. Comportamiento espacial de las soluciones                                       | 76 |
| 6.2.2. Evolución temporal de las soluciones  | 81 |
| 6.3. Velocidad de fase   | 88 |
| 7. Ecuación DNLS forzada con ondas localizadas   | 93 |
| 7.1. DNLS forzada por un paquete gaussiano   | 94 |
| 7.1.1. Dependencia respecto de $L$   | 94 |
| 7.1.2. Dependencia respecto de $\lambda$   | 95 |
| 7.1.3. Dependencia respecto de $V_s$   | 97 |



|   |            |
|---|------------|
|   | VI         |
| 7.1.4. Dependencia respecto de $A_0$ . . . . .                            | 99         |
| 7.2. Evolución temporal de la energía . . . . .                           | 100        |
| 7.2.1. Oscilación de la energía . . . . .                                 | 100        |
| 7.2.2. Resonancia de las soluciones . . . . .                             | 102        |
| <b>8. Conclusiones</b>  | <b>104</b> |
| 8.1. Caracterización de la ecuación DNLS en su aproximación ODE . . . . . | 105        |
| 8.1.1. Sistema ODE forzado con dos frecuencias . . . . .                  | 106        |
| 8.2. Ecuación parcial diferencial DNLS . . . . .                          | 108        |
| 8.3. Fuente gaussiana . . . . .   | 111        |
| 8.4. Conclusión general . . . . .   | 112        |
| 8.5. Trabajo futuro . . . . .   | 113        |
| <b>A. Exponente espacial de Lyapunov en PDE</b>                           | <b>115</b> |



## RESUMEN

En esta tesis se estudiaron las ondas no lineales de Alfvén descritas por la ecuación no lineal de Schrödinger (DNLS) en presencia de un forzamiento externo, desde la perspectiva de los sistemas dinámicos.

En la primera parte se estudiaron las soluciones que se propagan con velocidad constante, descritas por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se reprodujeron resultados conocidos y se exploró la posibilidad de control mediante un segundo forzamiento. En la segunda parte se estudió la ecuación DNLS sin aproximaciones. El sistema mostró poseer distintos comportamientos como periodicidad, cuasiperiodicidad, caos temporal y espacio-temporal para distintos valores de la amplitud de forzamiento. Se encontró la secuencia de bifurcaciones que muestra como el sistema transita por los diferentes estados. Además, se estudió la respuesta del sistema al usar un paquete de ondas gaussianas como forzamiento.

## ABSTRACT

In this thesis driven nonlinear Alfvén waves described by the derivative nonlinear Schrödinger equation (DNLS) are studied, from a dynamical systems point of view.

In the first part solutions with constant propagation speed, described by a system of ordinary differential equations are studied. Known results were reproduced and the possibility to control the system by including a second driver was explored. In the second part, the driven DNLS equation without approximations are studied. The system presents different kinds of behavior, such as periodicity, quasiperiodicity, temporal and spatio-temporal chaos when the driver amplitude is varied. The bifurcation sequence that shows how the system changes between states was found. Furthermore, the system's response to a gaussian wave packet driver are studied.

# Capítulo 1

## Introducción

Un plasma es un sistema donde la materia está ionizada, es decir, existen partículas cargadas libres. Las interacciones entre partículas se deben por una parte al potencial coulombiano, a través de los campos electromagnéticos, y por otra a las colisiones. Debido al gran número de partículas las herramientas de la mecánica estadística son útiles para estudiar el comportamiento de estos sistemas. En particular, para un plasma en donde el tiempo entre colisiones es mucho mayor que el tiempo que tarda el sistema en llegar al equilibrio, la distribución de velocidades de las partículas está descrita por la ecuación de Vlasov. La distribución de velocidades es la función de peso que sirve para construir las variables de fluidos macroscópicas (densidad, velocidad, presión, etc.) a partir de los promedios sobre todas las partículas. Las ecuaciones que gobiernan dichas variables se obtienen al reescribir los promedios que las definen usando la ecuación de Vlasov. El conjunto de ecuaciones parciales diferenciales (PDE) que describe la evolución de un fluido magnético o plasma son una combinación de las ecuaciones de fluidos clásicas (continuidad de masa, conservación de momentum, conservación de la energía) con las ecuaciones de Maxwell. Éstas son conocidas como las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) [1], y representan uno de los modelos más usados para el estudio de los plasmas en general.



La generación y propagación de ondas en plasmas tipo MHD es de sumo interés en áreas de estudio tales como la física espacial [2], en diversos ámbitos de la astrofísica [3, 4], en la física de fusión de plasmas, etc. Luego, su estudio es muy relevante para comprender gran cantidad de los fenómenos que se observan en los sistemas mencionados anteriormente, como la absorción, disipación y transporte de energía, organización, turbulencia, etc.

Las ecuaciones MHD poseen varias características que las hacen difíciles de tratar en forma general: alta dimensionalidad, no linealidad y alto grado de acoplamiento. Esto ha llevado a desarrollar técnicas que enfrentan estas dificultades, y que en la práctica sirven para construir ecuaciones más simples (reducción de la dimensión), que describen las perturbaciones sobre un plasma magnetizado que previamente ha adquirido un estado de equilibrio. Está demostrado mediante simulaciones numéricas [5] y modelos analíticos [6] que sistemas descritos por las ecuaciones MHD como, por ejemplo, la interacción del viento solar con la magnetósfera, son capaces de alcanzar estados de cuasiequilibrio temporal, siendo entonces sistemas en los cuales se pueden hallar los fenómenos descritos por los modelos que basan su descripción en la perturbación hecha sobre soluciones estacionarias. Entre estos modelos, la reducción de las ecuaciones de MHD a la ecuación en derivadas parciales no lineal de Schrödinger (DNLS) tiene la ventaja de que esta ecuación admite soluciones tipo onda viajera y en particular soluciones solitónicas [7, 8]. Dichas soluciones representan en la práctica el comportamiento de la dinámica de las ondas de Alfvén no lineales. Es posible a su vez describir dichas ondas por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) obtenidos a partir de la ecuación DNLS, las que son presentadas en esta tesis.

El estudio de sistemas ODE en el ámbito de los sistemas complejos ha llevado

a desarrollar métodos de descripción basados en el comportamiento de las ecuaciones para distintos valores de los parámetros involucrados. La aparición de estados periódicos y caóticos alternados para ciertas regiones del espacio de parámetros de los sistemas ODE, obtenidos a partir de la ecuación DNLS, es un indicio de que éstos son una buena descripción de fenómenos como la turbulencia intermitente en las ondas de Alfvén observados en la heliósfera y el viento solar [9, 10]. A su vez el análisis de datos de la heliósfera interna tomados por la sonda Helios 2 muestra que el exponente de Lyapunov localmente es positivo [11], es decir, las variables involucradas (campo magnético, velocidad del fluido) fluctúan de forma impredecible y además el sistema sería sensible a las condiciones iniciales, características propias de un sistema caótico determinista. Esta clase de sistemas dinámicos típicamente son descritos por ecuaciones ODE.

En el presente trabajo se estudiarán las soluciones de la ecuación DNLS, poniendo particular atención en el caso en que el sistema está forzado por una onda externa. En el capítulo 2 se deducirá la ecuación DNLS a partir de las ecuaciones MHD mediante el método de las perturbaciones reductivas [12, 13], además de la conservación de la energía de dicha ecuación. En el capítulo 3 se hará una breve introducción a los conceptos y herramientas de sistemas dinámicos utilizados en esta tesis. En el capítulo 4 se hará una revisión detallada del trabajo hecho por Hada *et al.* [14] y Chian *et al.* [15] basado en la reducción de la ecuación DNLS a un sistema ODE que describe las ondas de Alfvén que viajan a una velocidad constante, en el caso en que el sistema es forzado con una onda monocromática de igual velocidad. En el capítulo 5 se estudiará el sistema de ecuaciones descrito en el capítulo 4 cuando es afectado por dos ondas externas de distinta frecuencia. La motivación para esto es que en el viento solar hay en principio un espectro continuo de frecuencias de forzamiento, por

lo que en primera aproximación esto puede servir como mejora en la construcción de un modelo más realista. Además se explorará la posibilidad de controlar un estado caótico a partir de la inclusión de una segunda onda. En el capítulo 6 se estudiará la ecuación DNLS parcial diferencial forzada con una onda viajera, relacionando los resultados obtenidos en este capítulo con los del capítulo 4, para establecer concordanancias y diferencias entre el modelo ODE y la ecuación parcial diferencial (PDE). El enfoque aquí seguirá siendo el de los sistemas dinámicos, pues la idea es relacionar los estados caóticos del sistema ODE (capítulos 4 y 5) con los posibles estados de desorden en el sistema PDE, relacionándolos a su vez con la turbulencia alfvénica observada en el viento solar. Para esto se construirán distintos tipos de diagramas de bifurcación en función de la amplitud de forzamiento, que permitan obtener información acerca de la forma en que se ordenan los modos de oscilación espacial y temporal, y que ocurre cuando existe caos espacio-temporal, teniendo en cuenta que la turbulencia se asocia a sistemas con este tipo de soluciones. Se analizará también la validez del modelo ODE (velocidad de propagación constante) durante dichos estados. Finalmente, en el capítulo 7 se estudiará el efecto de forzar la ecuación DNLS con una onda localizada (paquete de ondas) para encontrar numéricamente la dependencia entre la respuesta del sistema y los parámetros que dan forma a la fuente en el caso en que ésta es algo más realista.

## Capítulo 2

# Ecuación no lineal de Schrödinger

### 2.1. Ecuaciones MHD

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un plasma de conductividad infinita en un régimen adiabático y presión isotrópica, son las llamadas ecuaciones de la magnetohidrodinámica, o MHD [5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + l \left( \frac{\rho_0}{\mu} \right)^{1/2} \nabla \times \frac{1}{\rho} (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = -\gamma P \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

En este caso, el segundo término al lado derecho de la ecuación (2.3) se debe al efecto Hall. Aquí  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{v}$  la velocidad,  $\mathbf{B}$  el campo magnético,  $P$  la presión,  $\gamma$  la constante adiabática y  $\mu$  la permeabilidad magnética del vacío. Además,

$$l = \left( \frac{m_i^2}{\mu e^2 \rho_0} \right)^{1/2}$$

es la inercia de los iones, donde  $m_i$  es la masa de los iones, y  $e$  es la carga del protón.

## 2.2. Obtención de la ecuación DNLS a partir de MHD

Un tipo de soluciones particulares de las ecuaciones (2.1)–(2.4) son las llamadas ondas de Alfvén [16], las que se encuentran al asumir que las soluciones son de la forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_1 e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t}, \quad (2.7)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = P_0 + P_1 e^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t}, \quad (2.8)$$

donde las cantidades con subíndice 0 corresponden a una solución estática y homogénea de las ecuaciones (2.1)–(2.4) y dado cualquier campo  $\mathbf{f}$  se cumple que  $|\mathbf{f}_1|/|\mathbf{f}_0| \ll 1$ . Al reemplazar las expresiones (2.5)–(2.8) en las ecuaciones MHD ideales [1], despreciando los términos de segundo orden en las cantidades con subíndice 1, se encuentra que uno de los modos que se propagan, en ausencia de disipación, satisface la relación de dispersión

$$\omega = \pm V(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0), \quad (2.9)$$

donde  $\hat{\mathbf{B}}_0$  es un vector unitario que apunta en la dirección del campo magnético y  $V = |\mathbf{B}_0|/\sqrt{\mu\rho_0}$  es la velocidad de propagación de las ondas, conocida como velocidad de Alfvén. Las ondas de Alfvén se propagan en la dirección de las líneas del campo magnético de fondo  $\mathbf{B}_0$  y pueden ser excitadas en cualquier plasma que está en

presencia de un campo magnético externo. Han sido observadas en la magnetósfera de la Tierra [17], en plasmas interplanetarios [18] y en la atmósfera solar [19]. En todos estos contextos también han sido observados estados turbulentos, donde el valor de los campos involucrados cambia bruscamente en el tiempo. La descripción hecha anteriormente describe las ondas de Alfvén lineales. Para poder describir, en parte, fenómenos como la turbulencia en las ondas de Alfvén es necesario incluir los efectos no lineales.

Para obtener una ecuación que describa el comportamiento no lineal de las ondas de Alfvén se considerará un plasma de iones y electrones magnetizado homogéneamente en una dirección particular, para lo que se harán perturbaciones en una dimensión, con dependencia sólo en la coordenada  $x$ , en el sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ . El subíndice 0 indicará, como antes, cantidades sin perturbar.

Para el trabajo matemático que sigue, será importante tener en cuenta la velocidad del sonido en el plasma, la velocidad de Alfvén en la dirección  $x$  y el coeficiente  $\beta$ ,

$$c_s^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}, \quad V^2 = \frac{B_x^2}{\mu \rho_0}, \quad \beta = \frac{c_s^2}{V^2}, \quad (2.10)$$

donde  $B_x = \text{constante}$  es la componente  $x$  del campo magnético. Se supondrá que  $\beta \gg 1$  y que  $\epsilon = \beta^{-1}$  es un parámetro pequeño [12, 20], aunque el resultado es equivalente si se considera  $\epsilon = \beta \ll 1$  [21].

Se usará el método de perturbaciones reductivas [13], introduciendo el siguiente cambio de variables

$$\xi = \epsilon(x - Vt), \quad (2.11)$$

$$\tau = \epsilon^2 t. \quad (2.12)$$

Por último, se descomponen la velocidad del fluido y el campo magnético en su

componente  $x$  más una componente perpendicular:

$$\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}_\perp, \quad \mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_\perp.$$

Antes que nada, a partir del cambio de variables que se introducirá se deduce que las derivadas espacial y temporal toman la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} - \epsilon V \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.14)$$

Es necesario reescribir las ecuaciones MHD considerando sólo la dependencia respecto de  $x$ . Así, la ecuación (2.1) toma la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable dado por (2.13)–(2.14), se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - \epsilon V \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + u \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \epsilon \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - V \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(u\rho) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.2), separada en sus componentes paralela y perpendicular, respecto al campo magnético de fondo, queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^2}{\partial x 2\mu}, \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial x} \right) &= \frac{B_x}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables a las ecuaciones anteriores se tiene

$$\rho \left( \epsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} - V \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( P + \frac{\mathbf{B}_\perp^2}{2\mu} \right), \quad (2.16)$$

$$\rho \left( \epsilon \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial \tau} - V \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial \xi} + u \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial \xi} \right) = \frac{B_x}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}_\perp^2}{\partial \xi}. \quad (2.17)$$

La ecuación (2.3), en tanto, se reescribe

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial x} = B_x \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial x} - \mathbf{B}_\perp \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial x} \right).$$

Al aplicar (2.13)–(2.14) a la ecuación anterior, se tiene

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial \tau} - V \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial \xi} = B_x \frac{\partial \mathbf{v}_\perp}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} (u \mathbf{B}_\perp) + \epsilon \chi V l \hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \mathbf{B}_\perp}{\partial \xi} \right), \quad (2.18)$$

donde  $\chi = \text{sign}(B_x)$  es la función signo de  $B_x$ .

La ecuación (2.4), finalmente, puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{constante}. \quad (2.19)$$

Para las condiciones de borde se usará que todas las perturbaciones son despreciables en infinito, es decir,  $\rho \rightarrow \rho_0$ ,  $P \rightarrow P_0$ ,  $u \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{v}_\perp \rightarrow 0$  y  $\mathbf{B}_\perp \rightarrow \mathbf{B}_{\perp 0}$  cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Ahora se buscarán soluciones para las ecuaciones (2.15)–(2.19) en la forma de series de potencias de  $\epsilon$ . Entonces, la presión se escribe como

$$P = \epsilon^{-1} \tilde{P}_0 + P_1 + \epsilon P_2 + \dots,$$

donde  $\tilde{P}_0 = \epsilon P_0$ . El resto de los campos tiene la forma

$$f = f_1 + \epsilon f_2 + \dots$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (2.15)–(2.19), y reuniendo los términos de orden  $\epsilon^0$ , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$V \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial \xi} = 0, \quad (2.20)$$



$$\rho_1 \left( V \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p_1 + \frac{|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2}{2\mu} \right), \quad (2.21)$$

$$\rho_1 \left( V \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 1}}{\partial \xi} - u_1 \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 1}}{\partial \xi} \right) = -\frac{B_x}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi}, \quad (2.22)$$

$$V \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi} = -B_x \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 1}}{\partial \xi} + \frac{\partial (u_1 \mathbf{B}_{\perp 1})}{\partial \xi}, \quad (2.23)$$

$$\frac{P_0}{\rho_1^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}. \quad (2.24)$$

Ahora, usando las condiciones de borde en infinito, se encuentran las siguientes relaciones:

$$\rho_1 = \rho_0, \quad (2.25)$$

$$u_1 = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{v}_{\perp 1} = -\frac{V}{B_x} (\mathbf{B}_{\perp 1} - \mathbf{B}_{\perp 0}), \quad (2.27)$$

$$P_1 = -\frac{1}{2\mu} (|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2 - |\mathbf{B}_{\perp 0}|^2). \quad (2.28)$$

Tomando los términos del orden de  $\epsilon$  se obtiene

$$V \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} - \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0, \quad (2.29)$$

$$\rho_0 V \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p_2 + \frac{\mathbf{B}_{\perp 1} \cdot \mathbf{B}_{\perp 2}}{\mu} \right), \quad (2.30)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 1}}{\partial \tau} - V \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 2}}{\partial \xi} \right) = \frac{B_x}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 2}}{\partial \xi}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \tau} - V \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 2}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (B_x \mathbf{v}_{\perp 2} - u_2 \mathbf{B}_{\perp 1}) + \chi V l \hat{x} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi^2}, \quad (2.32)$$

$$P_1 = \tilde{c}_s^2 \rho_2, \quad (2.33)$$

donde  $\tilde{c}_s = \epsilon c_s$ .

Usando las condiciones de borde en infinito, y las ecuaciones (2.28), (2.29) y (2.33)

$$u_2 = -\frac{V}{2\mu\rho_0\tilde{c}_s^2}(|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2 - |\mathbf{B}_{\perp 0}|^2). \quad (2.34)$$

Con este resultado y (2.27), se pueden reescribir (2.31) y (2.32):

$$V\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 2}}{\partial \xi} + B_x \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 2}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \tau}, \quad (2.35)$$

$$V\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 2}}{\partial \xi} + B_x \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp 2}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \tau} - \frac{V}{2\mu\rho\tilde{c}_s^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{B}_{\perp 1}(|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2 - |\mathbf{B}_{\perp 0}|^2)] + \chi V l \hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi^2}. \quad (2.36)$$

Igualando (2.35) con (2.36), se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \tau} - \frac{V}{4\mu\rho\tilde{c}_s^2} \frac{\partial}{\partial \xi} [\mathbf{B}_{\perp 1}(|\mathbf{B}_{\perp 1}|^2 - |\mathbf{B}_{\perp 0}|^2)] + \frac{1}{2} \chi V l \hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\perp 1}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.37)$$

Volviendo a las variables originales  $(x, t)$ , se llega finalmente a la ecuación no lineal de Schrödinger diferencial (DNLS).

$$\frac{\partial B}{\partial t} + V \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{V}{4\beta B_x^2} \frac{\partial}{\partial x} [B(|B|^2 - |B_0|^2)] + \frac{i}{2} \chi V l \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0, \quad (2.38)$$

donde  $B_0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} B$  y  $B = B_y + iB_z$ .

## 2.3. Conservación de la energía en la ecuación DNLS

Al hacer una transformación galileana  $x \rightarrow x - Ct$  a la ecuación (2.38) [8], con  $C = V(1 - 1/4\beta)$ , se obtiene la siguiente ecuación DNLS:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) - i\mu \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0, \quad (2.39)$$

donde  $b = b_y + ib_z$ .

La energía del sistema está dada por

$$E(t) = \int_I |b(x, t)|^2 dx. \quad (2.40)$$

En la expresión (2.40) se ha absorbido en  $b$  el término  $1/8\pi$  delante de la integral, puesto que es una constante que sólo representa un factor de escala. En este caso  $I$  es el intervalo de integración, que según la situación puede ser todo el espacio o un intervalo finito, si es que se consideran condiciones de borde periódicas. Si el intervalo de integración es todo el espacio, las condiciones de borde consideradas en la sección 2.2 implican que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} b = 0$ . A continuación, se demostrará que la energía se conserva, es decir, que la derivada temporal de la expresión (2.40) es siempre nula.

La derivada temporal de (2.40)

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} |b|^2 dx. \quad (2.41)$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial t} |b|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (bb^*) = \frac{\partial b}{\partial t} b^* + b \frac{\partial b^*}{\partial t}. \quad (2.42)$$

De (2.39),

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) + i\mu \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b^*) - i\mu \frac{\partial^2 b^*}{\partial x^2}. \quad (2.44)$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial t} |b|^2 = -\alpha \left( b^* \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) + b \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b^*) \right) + i\mu \left( b^* \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 b^*}{\partial x^2} \right). \quad (2.45)$$

Ahora (2.41) es

$$\frac{dE}{dt} = -\alpha \int \left( b^* \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) + b \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b^*) \right) dx + i\mu \int \left( b^* \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 b^*}{\partial x^2} \right) dx. \quad (2.46)$$

La segunda integral del lado derecho de (2.46), correspondiente al término de Hall, se puede reescribir como

$$i\mu \int \left( b^* \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 b^*}{\partial x^2} \right) dx = -2\mu \Im \left( \int b^* \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} dx \right),$$

donde la función  $\Im(z)$  es la parte imaginaria del número complejo  $z$ . Al evaluar la integral anterior, se obtiene

$$\int b^* \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} dx = b^* \frac{\partial b}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial b^*}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} dx = - \int \left| \frac{\partial b}{\partial x} \right|^2 dx. \quad (2.47)$$

Claramente la integral (2.47) es real, por lo que al evaluar su parte imaginaria da cero. Esto quiere decir que el término correspondiente al efecto Hall en la ecuación (2.39) no extrae ni inyecta energía al sistema.

Para calcular la primera integral del lado derecho de (2.46), correspondiente al aporte de la parte no lineal de la ecuación (2.39) a la variación temporal de energía, primero se obtendrá dicho término a partir de las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x} (b|b|^2 b^*) = b|b|^2 \frac{\partial b^*}{\partial x} + b^* \frac{\partial}{\partial x} (b|b|^2), \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (b|b|^2 b^*) = b^* |b|^2 \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial x} (b^* |b|^2). \quad (2.49)$$

Sumando (2.48) y (2.49) se tiene

$$2 \frac{\partial}{\partial x} |b|^4 = |b|^2 \frac{\partial}{\partial x} |b|^2 + \left( b^* \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b) + b \frac{\partial}{\partial x} (|b|^2 b^*) \right). \quad (2.50)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (2.50) corresponde al primer término del lado derecho de la ecuación (2.46). Al integrarla con respecto a  $x$ , por las condiciones de borde el lado izquierdo de (2.50) se anula. La integral del primer término en el lado derecho es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |b|^2 \frac{\partial}{\partial x} |b|^2 dx = |b|^4 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |b|^2 \frac{\partial}{\partial x} |b|^2 dx. \quad (2.51)$$

Al pasar la integral del lado derecho al izquierdo, se obtiene la siguiente relación:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} |b|^2 \frac{\partial}{\partial x} |b|^2 dx = |b|^4 \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (2.52)$$

Tanto el lado izquierdo como el primer término de la derecha de (2.50) son nulos, por lo tanto la integral de la parte no lineal de (2.45) vale 0, y con esto queda demostrado que la ecuación DNLS (2.39) conserva la energía. Es importante señalar que la pasada demostración también es válida cuando la condición de borde es periódica.

# Capítulo 3

## Sistemas Dinámicos

### 3.1. Mapas

Un sistema dinámico es un proceso determinista, en el cual el valor de una función cambia de acuerdo a una regla, definida en términos del valor actual de la función. En el caso de tiempo continuo dicha regla de evolución está dada por una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{F}(x, \{p_i\}), \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{F}$  es una función vectorial,  $x$  un vector de  $\mathbb{R}^d$  (con  $d$  la dimensión del sistema) que se conoce como la variable dinámica, y  $t$  es la variable dependiente del sistema. Es importante notar que un sistema representado por una ecuación diferencial de orden  $d$  siempre puede ser escrito como un sistema de  $d$  ecuaciones diferenciales de primer orden, que es la forma de la ecuación (3.1). Además,  $\{p_i\}$  es una familia de parámetros que en principio están fijos, y que definen al sistema.

El estado del sistema para un tiempo particular está caracterizado por el valor de  $x$  en dicho tiempo y solamente un vector describe dicho estado para cada tiempo. El espacio de todos los estados posibles es llamado espacio de fase.

Se define el flujo  $\phi(t; \mathbf{x}_0)$  como la solución de la ecuación (3.1) para una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  después de un tiempo  $t$ . La curva que genera este flujo en el espacio de fase se conoce como la órbita de  $\mathbf{x}_0$ .

Una técnica usual para estudiar sistemas dinámicos no lineales es a través del mapa de Poincaré [22]. Éste reemplaza el flujo de un sistema continuo de orden  $d$  por un sistema discreto de orden  $d - 1$ , simplificando el análisis y la visualización de la dinámica. Existen varias maneras de definir un mapa de Poincaré, en particular, la llamada proyección estroboscópica [23]

$$\mathbf{x}_{n+1} = \phi(T; \mathbf{x}_n), \quad (3.2)$$

donde  $T$  es constante. La ecuación anterior equivale a integrar la ecuación (3.1) desde  $t = 0$  hasta  $t = T$  usando como condición inicial a  $\mathbf{x}_n$ . De este modo, se obtiene un mapa, que puede ser representado en general en la forma

$$\mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n, \{p_i\}). \quad (3.3)$$

## 3.2. Puntos fijos y atractores

Un atractor es un conjunto de puntos  $A$  del espacio de fase hacia el cual convergen todas las condiciones iniciales en una vecindad dada. Matemáticamente,  $A$  es el conjunto cerrado e invariante mínimo que atrae a un conjunto  $U$  de condiciones iniciales. La unión de todos los conjuntos que son atraídos a un mismo atractor se conoce como la cuenca de atracción de  $A$  [24]. En el caso de mapas existen dos tipos de atractores: a) puntos fijos u órbitas periódicas, y b) atractores extraños. De estos últimos se hablará más adelante.

Un punto fijo de la ecuación (3.1) es una solución constante, es decir, un punto  $\mathbf{x}^*$  para el cual  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$ , o equivalentemente  $\phi(t; \mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ . Una órbita periódica es

una solución de (3.1) que siempre repite su comportamiento después de un intervalo fijo de tiempo, o sea,  $\phi(t; \mathbf{x}) = \phi(t + \tau; \mathbf{x})$  para todo  $t$  y algún período  $\tau > 0$ .

Un punto fijo del mapa (3.3) cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}(\mathbf{x}^*). \quad (3.4)$$

Para el caso de puntos fijos de período  $m > 1$  se tiene que

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{M}^m(\mathbf{x}^*). \quad (3.5)$$

El lado derecho de (3.5) equivale a aplicar el mapa  $\mathbf{M}$  un número  $m$  de veces. Claramente, una órbita periódica del sistema descrito por (3.1) es un punto fijo para el sistema discreto dado por (3.2).

### 3.2.1. Estabilidad de los puntos fijos

Los puntos fijos pueden ser estables o inestables. Un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  se dice estable si para cualquier vecindad  $U$  en torno a  $\mathbf{x}^*$  existe una vecindad  $V$  (más pequeña que  $U$ ) tal que  $\mathbf{M}^s(V) \subset U$  para todo  $s \geq 0$ . Esto quiere decir que una condición inicial que parte cerca de  $\mathbf{x}^*$  se mantendrá cerca de él siempre. En caso contrario, esto es, si para una condición inicial cercana al punto fijo el mapeo comienza a alejarse de éste, se dice que  $\mathbf{x}^*$  es inestable.

Para determinar la estabilidad de un punto fijo se debe estudiar qué le ocurre a una perturbación  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}^* + \delta_n$ . La evolución de esta perturbación está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}^* + \delta_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}^* + \delta_n) \approx \mathbf{M}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{M}(\mathbf{x}^*) \cdot \delta_n, \\ &\approx \mathbf{x}^* + D\mathbf{M}(\mathbf{x}^*) \cdot \delta_n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $D\mathbf{M}(\mathbf{x}^*)$  es la matriz jacobiana de  $\mathbf{M}$  evaluada en el punto fijo. De la relación anterior, la evolución de  $\delta_n$  a primer orden se escribe como

$$\delta_{n+1} = \mathbf{L} \cdot \delta_n = \mathbf{L}^2 \cdot \delta_{n-1} = \dots = \mathbf{L}^{n+1} \cdot \delta_0, \quad (3.7)$$



con  $\mathbf{L} = D\mathbf{M}(\mathbf{x}^*)$  una matriz cuadrada de dimensión  $d$ . En este caso  $\delta_0$  es una condición inicial para el mapa definido por  $\mathbf{L}$ . Sean  $\{\lambda_i\}, i \in [1, d]$  el conjunto de autovalores de  $\mathbf{L}$  y  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_d\}$  la base definida por sus autovectores. Además,  $\delta_0 = (\delta_0^1, \dots, \delta_0^d)$  es la condición inicial  $\delta_0$  escrita en dicha base. Entonces

$$\delta_n = \delta_0^1 \lambda_1^n \mathbf{b}_1 + \delta_0^2 \lambda_2^n \mathbf{b}_2 + \dots + \delta_0^d \lambda_d^n \mathbf{b}_d. \quad (3.8)$$

Si todos los autovalores  $|\lambda_i| < 1$ , entonces se cumple que la perturbación  $\delta_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto quiere decir que el punto  $\mathbf{x}^*$  atrae hacia él las condiciones iniciales cercanas, por lo que se dice que  $\mathbf{x}^*$  es estable. En cambio, se dice que  $\mathbf{x}^*$  es inestable cuando alguno de los autovalores cumple con  $|\lambda_i| > 1$ , puesto que cualquier condición inicial cercana al punto será repelida de él. En particular, para el caso  $d = 2$ , se pueden distinguir tres casos:

1.  $|\lambda_1| < 1$  y  $|\lambda_2| < 1 \rightarrow \mathbf{x}^*$  es estable.
2.  $|\lambda_1| < 1$  y  $|\lambda_2| > 1 \rightarrow \mathbf{x}^*$  es hiperbólico o *saddle*.
3.  $|\lambda_1| > 1$  y  $|\lambda_2| > 1 \rightarrow \mathbf{x}^*$  es inestable.

Existe otro caso,  $|\lambda_{1,2}| = 1$ , en el que  $\mathbf{x}^*$  no atrae ni repele, pero es poco común y en particular no se encuentra en sistemas disipativos.

Para determinar la estabilidad de órbitas de cierto período  $m$ , el cálculo es esencialmente el mismo. En el mapa  $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M}^m$ , una órbita de período  $m$  aparece como un punto fijo. Luego, la evolución de una perturbación  $\delta_n$  a primer orden está dada por

$$\delta_{n+1} = D\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}^*) \cdot \delta_n. \quad (3.9)$$

Luego, los valores propios de  $D\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}^*)$  definirán la estabilidad de  $\mathbf{x}^*$  en este caso.

Cuando se conoce analíticamente la forma del mapa  $\mathbf{M}$  resulta muy sencillo determinar la estabilidad de los puntos fijos del mapa. Pero si el mapa es construido a partir de un flujo, como en (3.2), en principio no se conoce la forma analítica de  $\mathbf{M}$ . En este caso, una forma de construir  $D\mathbf{M}(\mathbf{x}^*)$  es la siguiente: se escogen  $N$  condiciones iniciales  $\mathbf{x}^* + \delta_0^{(i)}$  en la vecindad del punto fijo, y se iteran una vez en el mapa definido por (3.2), obteniéndose un conjunto de  $N$  puntos de la forma  $\mathbf{x}^* + \delta_1^{(i)}$ . Luego, en la aproximación lineal se cumple (3.7), es decir

$$\begin{pmatrix} \delta_1^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_1^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0^{(1)} \\ \vdots \\ \delta_0^{(N)} \end{pmatrix} \mathbf{L}. \quad (3.10)$$

Matricialmente, la ecuación anterior se puede escribir como  $\Delta_1 = \Delta_0 L$ , donde  $\Delta_0$  y  $\Delta_1$  son matrices conocidas de  $N \times 2$ . Finalmente,  $L = (\Delta_0^T \Delta_0)^{-1} \Delta_0^T \Delta_1$ . La precisión de ésta estimación depende del número de perturbaciones iniciales  $N$ , y del tamaño de éstas.

### 3.2.2. Atractores extraños

Un atractor extraño es el tipo de solución que posee un sistema dinámico cuando se encuentra en estado caótico. Un sistema caótico posee dos características fundamentales: impredecibilidad temporal y sensibilidad a las condiciones iniciales. El primer hecho implica que los puntos pertenecientes a un atractor extraño, también llamado caótico, se mapean en otros puntos dentro del atractor sin un orden aparente, aunque estos objetos suelen estar acotados en el espacio de fase. La segunda característica de los sistemas caóticos implica que la distancia entre dos condiciones iniciales muy cercanas en el atractor (tanto como se quiera) luego de pocas iteraciones habrá crecido exponencialmente. Es decir, la distancia  $\delta_0$  entre dos condiciones

crece como  $\delta_n \sim \delta_0 e^{\lambda n}$ . Claramente  $\lambda$  guarda cierta relación con los valores propios vinculados a la estabilidad de los puntos fijos. Este se conoce como el exponente de Lyapunov [25] e indica la tasa de alejamiento de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Un atractor posee tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones el sistema, y si al menos uno de ellos es positivo, se dice que el atractor es caótico. Otra característica implícita en el comportamiento descrito antes es la impredecibilidad de una trayectoria sobre el atractor [26].

Para calcular el exponente de Lyapunov máximo, se procede de la siguiente forma [27]:

- i) Se escoge una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  sobre el atractor y una perturbación  $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \delta_0$ .
- ii) Se iteran una vez  $\mathbf{x}'_0$  y  $\mathbf{x}_0$ , y se mide la distancia  $\delta_1$  entre las condiciones ya iteradas.
- iii) La dirección que une  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}'_1$  define la dirección de la perturbación sobre  $\mathbf{x}_1$  de tamaño  $\delta_0$  que se usará para repetir el paso 2. Es decir

$$\mathbf{x}'_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 + \delta_1 \frac{|\delta_0|}{|\delta_1|}.$$

Este paso se ilustra en la figura 3.1.

- iv) Finalmente, con la nueva condición perturbada y la iteración sobre el atractor, se repite el paso ii)  $N$  veces.

Finalmente, el valor del exponente de Lyapunov máximo estará dado por

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{\delta_i}{\delta_0} \right). \quad (3.11)$$

Si el estado de un sistema es caótico, el exponente de Lyapunov máximo indica a que tasa se separan dos condiciones iniciales cercanas en la dirección de mayor dilatación.

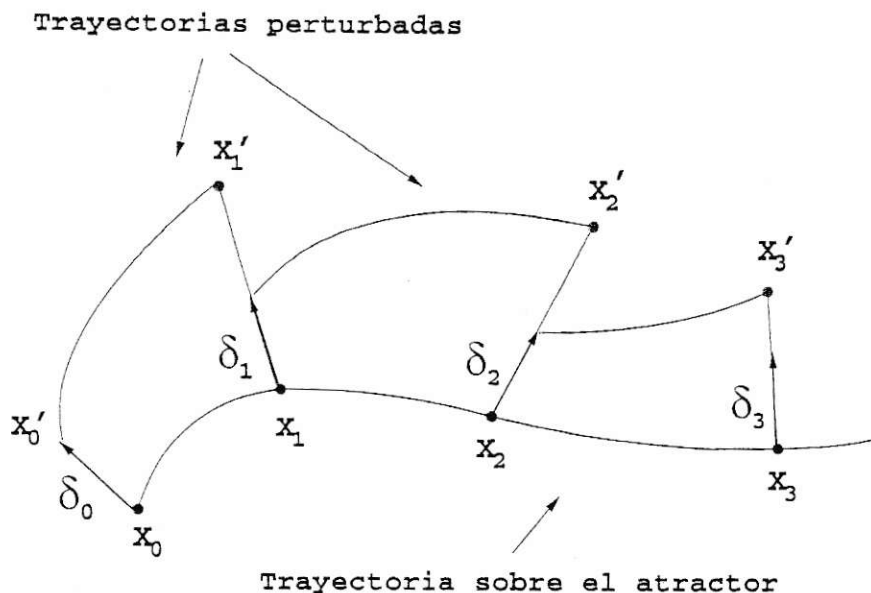


Figura 3.1: Generación de trayectorias perturbadas  $x'_i$  en la dirección de máximo alejamiento del atractor, para calcular el exponente de Lyapunov máximo.

### 3.2.3. Variedades estables e inestables de puntos fijos

Para un punto fijo, los vectores propios  $v_i$  de la matriz  $DM(x^*)$  definen un espacio tangente a  $x^*$ . Este espacio puede ser descompuesto en los subespacios o direcciones estable  $E^-$  ( $|\lambda_i| < 1$ ), inestable  $E^+$  ( $|\lambda_i| > 1$ ) y centro  $E^0$  ( $|\lambda_i| = 1$ ). La variedad estable de un punto fijo  $x^*$  se define como

$$W^s(x^*) = \{x \in U \mid \lim_{n \rightarrow \infty} M^n(x) \rightarrow x^*, \text{ con } x_n \in U \forall n \in \mathbb{Z}^+\}. \quad (3.12)$$

Es decir,  $W^s$  es un conjunto de puntos que convergen al punto fijo a través de la dirección definida por el vector  $v_i$  tal que  $|\lambda_i| < 1$ . Esta variedad es particularmente importante cuando el punto fijo es hiperbólico, puesto que juega un rol vital en la formación de las llamadas crisis, como se verá en la subsección 3.3.4. Para definir la

variedad inestable basta iterar el mapa  $\mathbf{M}$  hacia atrás en el tiempo

$$W^u(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in U \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} \mathbf{M}^n(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^*, \text{ con } \mathbf{x}_n \in U \forall n \in \mathbb{Z}_-\}. \quad (3.13)$$

Las variedades estable  $W^s$  e inestable  $W^u$  son por construcción invariantes, puesto que  $\mathbf{M}(W^{s,u}) = W^{s,u}$ . Localmente se puede definir la variedad  $W_{\text{loc}}^{s,u}$  con el vector propio asociado  $\mathbf{v}^{s,u}$  como

$$W_{\text{loc}}^{s,u} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{x}^* + \epsilon \mathbf{v}^{s,u} \mid \forall \epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0], 0 < \epsilon_0 \ll 1\}. \quad (3.14)$$

Iterando  $W_{\text{loc}}^s$  hacia atrás en el tiempo, se puede construir numéricamente la variedad estable. Esto sólo es posible para mapas invertibles, pero en particular los mapas provenientes de ecuaciones diferenciales son invertibles. La variedad inestable se obtiene iterando  $W_{\text{loc}}^u$  hacia adelante.

### 3.3. Bifurcaciones

Las ecuaciones (3.1) y (3.3) indican que el comportamiento de los sistemas dinámicos depende del valor de una familia de parámetros  $\{p_i\}$ . Esto quiere decir que la estabilidad de un atractor depende del valor de los parámetros. Además, puede ocurrir que al mover el valor de algún parámetro, aparezca o desaparezca un atractor. Cuando ocurre alguna de las situaciones anteriores, y en general, cuando el aspecto del espacio de fase cambia sustancialmente, se dice que ocurre una bifurcación.

#### 3.3.1. Diagrama de bifurcación

Si se grafica el estado final de un sistema (punto fijo, órbita de período  $m$  o atractor extraño) en función del valor de algún parámetro  $p$ , se puede observar cuáles son los cambios que sufre la organización del sistema. Este gráfico se conoce como diagrama de bifurcación, y es una de las herramientas más útiles para tener una idea

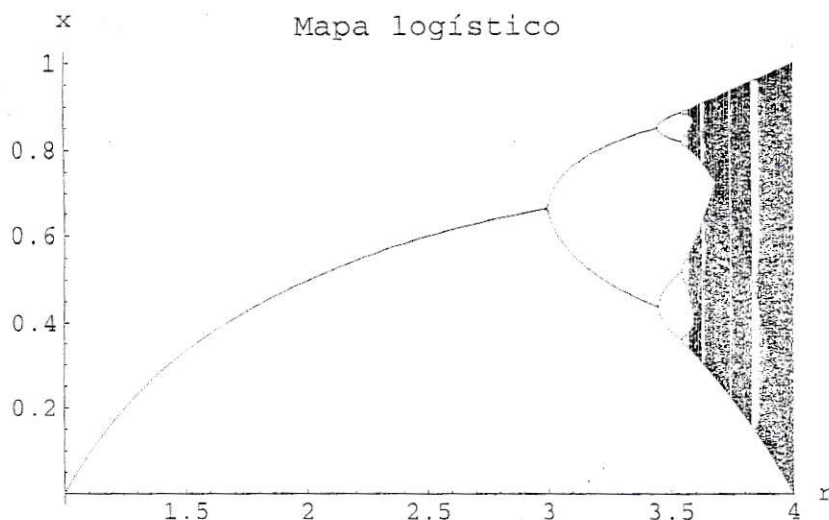


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación del mapa logístico, para  $r \in [1, 4]$ . Se usó como condición inicial  $x_0 = 0.2$ , y se graficaron  $N = 300$  puntos, tras un transiente de 500 iteraciones para cada valor de  $r$ .

rápida de cuáles son las bifurcaciones que ocurren al variar  $p$ , y la posible relación entre éstas. Este diagrama se construye iterando algunas condiciones iniciales, distribuidas aleatoriamente en el espacio de fase, durante un tiempo largo, para asegurar la convergencia al atractor, desechando las iteraciones iniciales conocidas como las transientes. Luego, se registran los  $N$  últimos estados  $\{x_{i=1,\dots,N}\}$ , para distintos valores de  $p$  en la zona del espacio de parámetros de interés. Un ejemplo muy conocido es el diagrama de bifurcación del mapa logístico  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  (figura 3.2).

Las bifurcaciones se pueden clasificar en locales y globales [24]. Las bifurcaciones locales son aquellas en que aparecen (o desaparecen) puntos fijos, o cambia la estabilidad de éstos, y se caracterizan porque el carácter básico de ellas no se modifica al agregar pequeñas perturbaciones arbitrarias al mapa. Las bifurcaciones globales son aquellas que no están vinculadas al cambio de estabilidad o a la aparición o desaparición de puntos fijos, sino más bien al cambio de posición de las variedades estables

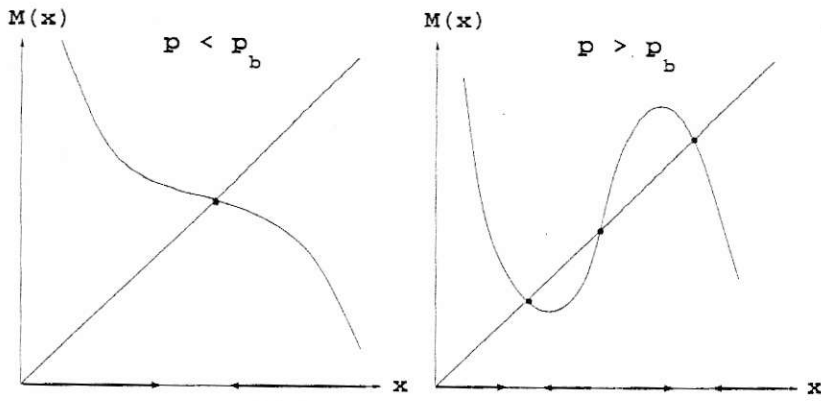
e inestables de puntos hiperbólicos. Estas últimas juegan un rol fundamental al momento de entender la formación, destrucción o cambio de los atractores extraños. Las bifurcaciones de este tipo más relevantes son las llamadas crisis.

### 3.3.2. Bifurcaciones locales genéricas

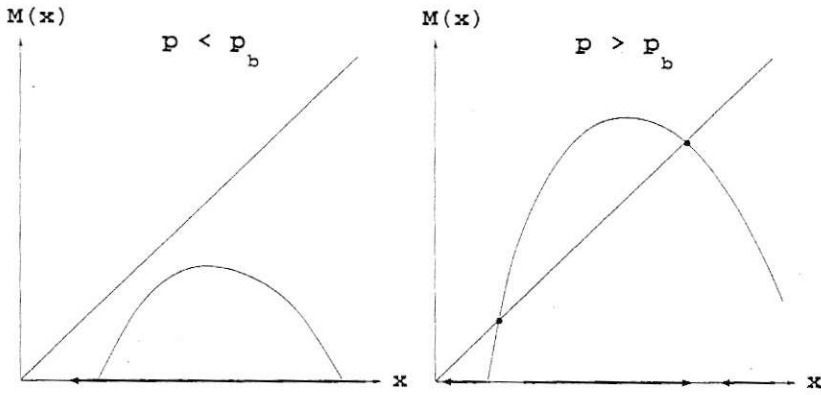
Para mapas, existen tres tipos de bifurcaciones de este tipo:

1. Doblamiento de período. En este caso una órbita de período  $m$  estable da paso a una órbita inestable de período  $m$  y una estable de período  $2m$  al mover un parámetro  $p$ . En la figura 3.3a se representa esta bifurcación para un mapa de una dimensión  $M(x)$ . La línea recta es la identidad. Un punto fijo cumple con la relación (3.4), por lo que dichos puntos aparecen en la figura como la intersección entre  $M(x)$  y la identidad. El punto es estable/inestable si el módulo de la derivada de  $M(x)$  en el punto fijo es menor/mayor que la identidad. Antes de que el parámetro llegue al valor de bifurcación  $p_b$  sólo existe un punto fijo estable. Todas las condiciones iniciales vecinas al punto convergen a éste. La bifurcación ocurre cuando  $p = p_b$ . Para valores del parámetro mayores que  $p_b$  existen dos puntos fijos: el antiguo, ahora inestable, y uno nuevo estable, que posee el doble de período que el primero y que en la figura 3.3a se ve como las dos intersecciones con la identidad que lo rodean.
2. Bifurcación tangente o *saddle-node*. Al variar el parámetro  $p$ , aparecen dos órbitas, una inestable (el *saddle*) y otra estable (el *node*). En la figura 3.3b se representa esta bifurcación, que se caracteriza por la creación de dos nuevos puntos fijos.
3. Doblamiento de período invertido. Una órbita de período  $m$  inestable cambia a

(a) Doblamiento de período



(b) Bifurcación tangente



(c) Doblamiento de período invertido

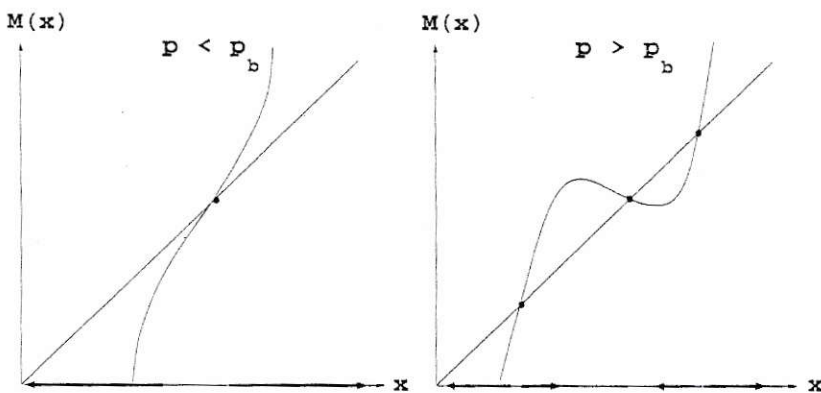


Figura 3.3: Bifurcaciones genéricas locales. a) Doblamiento de período. b) Bifurcación tangente. c) Doblamiento de período invertido.



estable, y al hacerlo genera una órbita de período  $2m$  inestable. Esencialmente es la misma bifurcación que en el caso 1, salvo que inicialmente existe un punto fijo inestable que luego de la bifurcación pasa a ser estable, creándose un punto inestable con el doble de período que el original. Esta bifurcación se esquematiza en la figura 3.3c.

Una característica importante de este tipo de bifurcaciones es que el flujo dentro del espacio de fase se mantiene inalterado. Las flechas en la figura 3.3 indican el sentido del flujo, es decir, hacia donde convergen las condiciones iniciales en las distintas zonas del espacio de fase. Si antes de una bifurcación el flujo tiene un sentido, por ejemplo hacia la izquierda en la figura 3.3b, luego de la bifurcación el flujo global sigue siendo hacia la izquierda. Por lo tanto, cada vez que se crea una órbita estable, debe crearse otra inestable, y viceversa.

### 3.3.3. Transición de Feigenbaum

Una de las rutas al caos más común es la cascada de doblamientos de período, también conocida como transición de Feigenbaum [14]. En el diagrama de bifurcación del mapa logístico (figura 3.2) se puede observar que a partir de  $r = 3$  comienzan a ocurrir sucesivos doblamientos de período al incrementarse el valor del parámetro  $r$  hasta que, para  $r_c \approx 3.57$ , el sistema se vuelve caótico. Cada vez que ocurre un doblamiento de período, aparece una órbita periódica inestable en la posición de la órbita estable existente antes de la bifurcación, por lo que una región acotada del espacio de fase comienza a llenarse de estas órbitas, que son infinitas para  $r > r_c$ . La única órbita “estable”, que tiene período infinito, es el atractor extraño. La figura 3.4 muestra cómo la existencia de infinitas órbitas inestables genera trayectorias caóticas dentro de una zona acotada del espacio de fase, atrayendo a la solución por

las variedades estables y repeliéndola por las variedades inestables de las órbitas. La transición de Feigenbaum es muy importante, pues muestra claramente cómo la estructura interna de los atractores extraños está formada por objetos más simples que ocupan una zona común del espacio de fase.

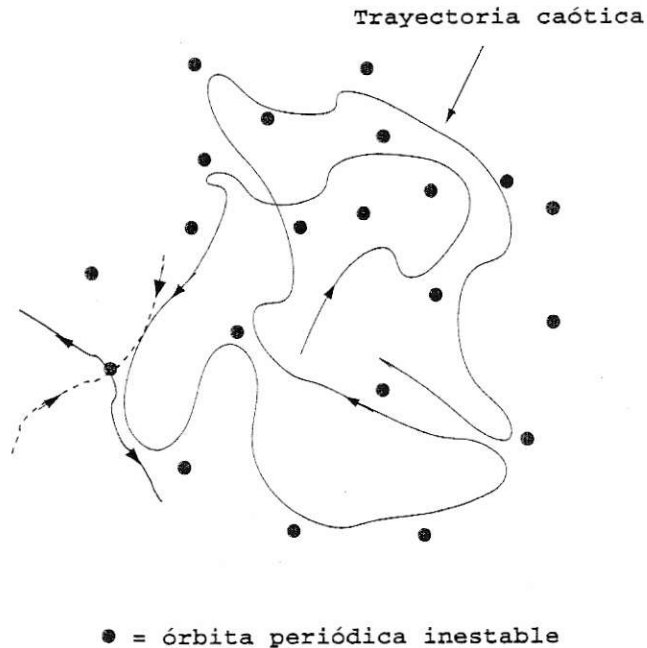


Figura 3.4: Trayectoria caótica viajando entre infinitas órbitas periódicas inestables (puntos). La variedad estable de una órbita (línea punteada) atrae a la solución hacia ésta hasta que la variedad inestable (línea sólida) la repele hacia otra órbita inestable, donde ocurre la misma situación.

### 3.3.4. Crisis

El estudio del diagrama de bifurcación tanto de sistemas discretos como continuos ha mostrado la existencia de un tipo de bifurcación discontinua, llamada crisis. Cuando ocurre una crisis se observa un repentino cambio en algún atractor extraño presente en el sistema al variar cierto parámetro  $p$ . Hay tres tipos de cambios que ocurren en un atractor [28]:

(1) *Destrucción del atractor.* A partir de un cierto valor  $p_c$  del parámetro  $p$ , el atractor repentinamente desaparece. Inmediatamente después de haber sobrepasado este valor crítico, las órbitas permanecen en la antigua cuenca de atracción  $A$  del atractor extraño por una cierta cantidad de tiempo, luego del cual las órbitas abandonan esta región para no regresar más, siendo atraídas por otro atractor presente en el sistema. Mientras más se acerque  $p$  a  $p_c$ , el tiempo de permanencia promedio  $\tau$  en el interior de  $A$  tiende a infinito. Un ejemplo de esta repentina destrucción es la llamada crisis de borde.

(2) *Crecimiento del atractor.* Al sobrepasar  $p$  un cierto valor  $p_c$  el atractor extraño crece repentinamente, y con él su cuenca de atracción. Justo después de ocurrida la bifurcación las órbitas permanecen cierto tiempo dentro de la antigua cuenca, para luego formar parte de una cuenca mayor, donde permanecen un pequeño tiempo, luego de lo cual la órbita retorna a la cuenca antigua, ciclo que se repite *ad infinitum*. El tiempo promedio  $\tau$  entre cada aparición del comportamiento caótico fuera de la vieja cuenca también aumenta mientras más cercano es  $p$  al valor crítico. Un clásico ejemplo de este tipo de cambio es la crisis interior.

(3) *Unión de dos (o más) atractores.* Cuando el parámetro  $p$  pasa un cierto valor crítico  $p_c$ , dos (o más) atractores colisionan, junto a sus cuencas de atracción, generando así un atractor único más grande. Este fenómeno es más bien frecuente en sistemas con alguna simetría, como los péndulos no lineales, donde cada atractor posee un gemelo. También se puede observar en el caso de órbitas de período  $m$ , en el cual el mapa original iterado  $m$  veces posee  $m$  puntos fijos, los cuales pueden llegar a colisionar. Tras la colisión, se observa que una órbita pasa cierto tiempo en un atractor, para luego saltar repentinamente al otro. La relación entre el tiempo promedio  $\tau$  entre saltos y el valor de  $p$  tiene el mismo comportamiento que en los

otros casos.

Greboji *et al.* [28] mostraron que la relación entre  $\tau$  y  $p$  está dada por

$$\tau \sim (p - p_c)^{-\gamma}, \quad (3.15)$$

hecho que ha sido confirmado numéricamente para una gran variedad de sistemas. Cuando la crisis corresponde a una en que ocurre lo descrito por (2) y (3), se está en presencia de la llamada *intermitencia inducida por crisis*. La intermitencia es un fenómeno que ha sido observado en muchos sistemas naturales [9, 29, 30] y que aparece como un factor relevante cuando se genera turbulencia [15].

En las crisis, la destrucción del atractor y la intermitencia entre estados observada no están vinculadas al cambio en la estabilidad de los puntos fijos involucrados, sino al cambio de la geometría de las variedades estables e inestables de algún punto hiperbólico (dentro y/o fuera del atractor), que se ve afectada al variar el valor de un parámetro. Las colisiones de estas variedades entre sí y con otros objetos del espacio de fase, como órbitas periódicas (puntos fijos) y atractores extraños es capaz de cambiar drásticamente la dinámica de las soluciones. Estas colisiones son llamadas tangencias y existen de dos tipos:

1. *Tangencia heteroclina*. En este caso, la variedad estable de una órbita inestable  $B$  colisiona tangencialmente con la variedad inestable de otra órbita inestable  $A$ , dentro del atractor (figura 3.5a). El exponente  $\gamma$  de la ecuación (3.15) asociado a esta tangencia es

$$\gamma_{\text{het}} = \frac{1}{2} + \frac{\ln |\lambda_1^A|}{\ln |\lambda_2^A|}, \quad (3.16)$$

donde  $|\lambda_1^A| > 1$  y  $|\lambda_2^A| < 1$  son los autovalores asociados a la órbita  $A$ .

2. *Tangencia homoclina*. Ocurre cuando la variedad estable de una órbita inestable  $B$  colisiona tangencialmente con su variedad estable (figura 3.5b). Para esta

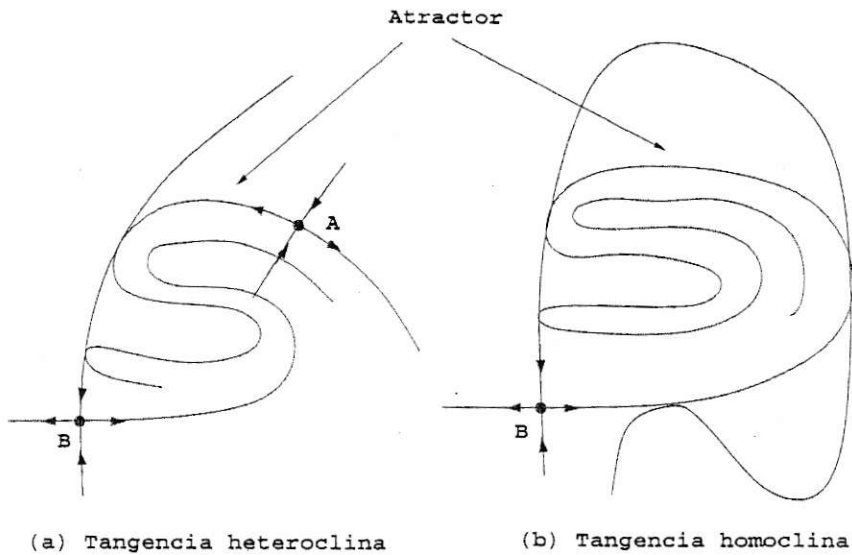


Figura 3.5: Los dos tipos de tangencia posibles: a) Tangencia heteroclinica, b) tangencia homoclinica.

tangencia, el exponente  $\gamma$  asociado es

$$\gamma_{\text{hom}} = \frac{\ln |\lambda_2^B|}{2 \ln |\lambda_1^B \lambda_2^B|}, \quad (3.17)$$

donde  $|\lambda_1^B| > 1$  y  $|\lambda_2^B| < 1$  son los autovalores asociados a la órbita  $B$ .

En ambos casos, las órbitas periódicas inestables pueden o no pertenecer a un atractor extraño. Como ya se vio, cualquier bifurcación local genera este tipo de órbitas, las cuales siguen existiendo para un intervalo amplio de  $p$ . Así mismo la existencia de atractores extraños es muy común debido a la presencia de las transiciones de Feigenbaum. La estructuración del comportamiento global del sistema en el espacio de parámetros se debe en gran medida al juego que existe entre estas transiciones y las crisis.

Se puede comprobar por inspección que, una vez ocurrida una tangencia, cuando una órbita dentro del atractor se acerca a la tangencia a través de la variedad inestable, puede ser atraída por la variedad estable cercana a la tangencia. Esta variedad

llevará a la órbita a otro estado, fuera del atractor, como se observa en la figura 3.6. La existencia de las variedades estables hace entonces posible la rica fenomenología descrita hasta aquí. Esto habla de la necesidad de encontrar las órbitas hiperbólicas involucradas en los cambios, saber dónde son generadas, y construir sus variedades estables e inestables.

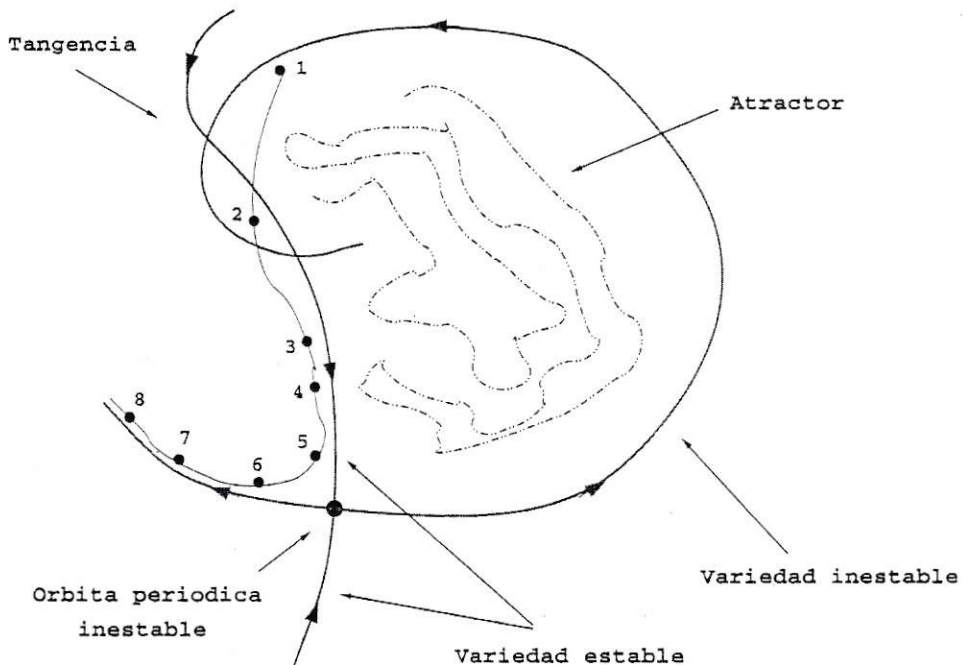


Figura 3.6: Crecimiento de un atractor debido a una tangencia homoclina. La intersección que se genera después de la crisis permite a las soluciones escapar de la cuenca de atracción del antiguo atractor, para eventualmente volver a ésta. El tiempo que toma en repetirse este proceso es  $\tau$ .

### 3.4. Detección de órbitas periódicas inestables

Las órbitas periódicas inestables juegan un rol vital en las transiciones entre estados de orden o de cuasiperiodicidad hacia comportamientos caóticos, así como entregan información acerca de la estructura interna de los atractores extraños [31,

32], por lo que hallar su ubicación se torna muy importante. Se han desarrollado variadas técnicas para encontrar órbitas periódicas inestables. A continuación, se mencionan dos de éstas:

*Método de Newton-Raphson.* Este método permite encontrar ceros de una función  $F(\mathbf{x})$ . Dada una semilla  $\mathbf{x}_0$  en la vecindad  $V$  de un cero, la sucesión siguiente converge a la posición del cero en cuestión:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{F(\mathbf{x}_k)}{DF(\mathbf{x}_k)}, \quad (3.18)$$

donde  $DF(\mathbf{x}_k)$  es el Jacobiano de  $F$  evaluado en  $\mathbf{x}_k$ .

Si se considera que una órbita periódica inestable cumple la ecuación 3.4, encontrarla equivale a encontrar el cero de

$$F(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - \mathbf{x}.$$

Este método tiene la ventaja de converger rápidamente a  $\mathbf{x}^*$ , esto es, en pocas iteraciones y con muy buena precisión, cuando se tiene una idea de la ubicación de la vecindad  $V$ . De lo contrario, dependiendo de la no linealidad del mapa, puede ser muy inestable. Esto es un problema cuando se desea encontrar órbitas inestables en una amplia región del espacio de fase sin tener conocimiento previo acerca de la posición aproximada de la órbita.

*Método SD.* Este método fue desarrollado por Schmelcher y Diakonov [33, 34], y consiste en estabilizar los puntos inestables  $\mathbf{x}_i^*$  de un mapa  $M_U$  construyendo un mapa  $M_S$  cuyos puntos fijos están en la misma posición que los del mapa  $M_U$ , pero donde éstos son estables. La condición anterior es satisfecha por la transformación

$$M_S^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \Lambda_k [M_U(\mathbf{x}) - \mathbf{x}]. \quad (3.19)$$

Si  $\mathbf{x}_i^*$  es un punto fijo de  $M_U$ , entonces el paréntesis del lado derecho de (3.19) es cero, por lo que  $\mathbf{x}_i^*$  también es un punto fijo de  $M_S^k$ . Por otro lado, si  $\mathbf{x}_i^*$  es punto fijo de  $M_S^k$ ,

y  $\Lambda_k$  no es una matriz singular, entonces el paréntesis del lado derecho debe ser cero, por lo que  $\mathbf{x}_i^*$  también es punto fijo de  $\mathbf{M}_U$ . Schmelcher y Diakonov [33,34] mostraron que existen un conjunto finito de matrices  $\Lambda_k = \lambda \mathbf{C}_k$ , con  $0 < |\lambda| \ll 1$ , que hacen que los puntos fijos de la transformación (3.19) tengan valores propios con valor absoluto estrictamente menor que uno, lo que asegura que éstos sean estables. En particular, en el caso de dos dimensiones, existen cinco matrices  $\mathbf{C}_k$  que estabilizan a los puntos fijos de  $\mathbf{M}_U$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{C}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{C}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ & & \mathbf{C}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{C}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Para encontrar el conjunto de puntos  $\mathbf{x}_i^*$  es necesario encontrar los puntos fijos de cada transformación  $\mathbf{M}_S^k$ . Para esto se usan muchas condiciones iniciales escogidas al azar desde la región de interés del espacio de fase. Este método, debido a su carácter global, resulta muy útil cuando no se sabe mucho acerca del sistema, pues aun condiciones lejanas a la vecindad lineal de los puntos fijos son atraídas a éstos después de pocas iteraciones. La gran desventaja es que mientras más grande es el período de las órbitas, más pequeño debe ser  $\lambda$ , lo que aumenta el tiempo de convergencia [33], volviendo poco eficiente al método cuando se buscan órbitas de períodos grandes.

Debido a que los dos métodos mostrados antes tienen ventajas comparativas uno respecto del otro, una búsqueda confiable de puntos fijos inestables se puede hacer usando el método SD para hacer un barrido general del espacio de fase, y el método de Newton-Raphson para mejorar la precisión de los puntos encontrados con SD.



## Capítulo 4

# Análisis de la ecuación DNLS como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo se estudiará la ecuación DNLS en el contexto de los sistemas complejos, usando la aproximación hecha por [14], que consiste en buscar sólo las soluciones que viajan con velocidad constante. Aunque se mostrarán resultados ya conocidos [14, 15], se profundizará en el uso de las herramientas que ~~entrega~~ la teoría de sistemas dinámicos para el diagnóstico de los fenómenos observados en los experimentos numéricos.

### 4.1. Reducción de la ecuación DNLS a un sistema ODE

La dinámica no lineal de las ondas de Alfvén de gran amplitud viajando a través de un campo magnético en la dirección  $x$  está descrita por la siguiente ecuación DNLS disipativa y forzada [15]:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [b(|b|^2)] - i(\mu + i\eta) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = S(b, x, t), \quad (4.1)$$

donde  $\eta$  y  $\mu$  son los parámetros disipativo y dispersivo respectivamente,  $b = b_y + ib_z$  es el campo magnético de la onda normalizado al campo de fondo constante  $B_0$ . El tiempo está normalizado al inverso de la frecuencia ciclotrónica de los iones  $\omega_{ci} = eB_0/m_i$ , donde  $e$  es la carga del protón y  $m_i$  la masa de un ión. La distancia está normalizada a  $c_A/\omega_{ci}$ , donde  $c_A$  es la velocidad de Alfvén. Además,  $\alpha = 1/[4(1 - \beta)]$ ,  $\beta = c_S^2/c_A^2$  y  $c_S = \sqrt{P_0/\gamma\rho_0}$  es la velocidad de las ondas de sonido. Consideremos el forzamiento externo como  $S(b, x, t) = A \exp(ik\phi)$ , es decir, una onda monocromática polarizada circularmente hacia la izquierda con fase  $\phi = x - Vt$ , donde  $V$  es la velocidad constante de la onda,  $A$  y  $k$  son constantes arbitrarias.

Se buscarán en este capítulo soluciones estacionarias, de forma tal que  $b = b(\phi)$ . Un camino a seguir es suponer que el campo tiene la forma  $b = \bar{b}e^{i\theta}$ , suponiendo que tanto la envolvente  $\bar{b}$  como la fase  $\theta$  dependen de  $\phi$ . Este método fue empleado en la Ref. [8] para la ecuación DNLS sin disipación y fuente externa, encontrándose tres tipos de soluciones que se propagan con velocidad constante: ondas monocromáticas, ondas con envolvente modulada periódicamente y solitones.

En este caso, como se quieren incluir los efectos de la disipación y la fuente externa, se trabajará directamente con la forma compleja de la onda  $b = b_y + ib_z$ , sin suponer nada acerca de la fase. Haciendo el cambio de variable correspondiente, las derivadas tanto del tiempo como respecto a  $x$  pasan a ser derivadas totales respecto de  $\phi$ , por lo que (4.1) queda:

$$-V \frac{db}{d\phi} + \alpha \frac{d}{d\phi} (|b|^2 b) - i(\mu + i\eta) \frac{d^2 b}{d\phi^2} = A \exp(ik\phi).$$

Integrando la ecuación anterior una vez respecto a  $\phi$ , y separando la parte real de la imaginaria, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\eta \frac{db_y}{d\phi} + \mu \frac{db_z}{d\phi} = (\alpha |b|^2 - V) b_y + \frac{A}{k} \text{sen } k\phi,$$

$$\eta \frac{db_z}{d\phi} - \mu \frac{db_y}{d\phi} = (\alpha|b|^2 - V)b_z - \frac{A}{k} \cos k\phi.$$

El sistema anterior se puede reescribir como

$$\eta \frac{db_y}{d\phi} + \mu \frac{db_z}{d\phi} = -\frac{\partial H}{\partial b_y} + \frac{A}{k} \sin k\phi,$$

$$\mu \frac{db_y}{d\phi} - \eta \frac{db_z}{d\phi} = \frac{\partial H}{\partial b_z} + \frac{A}{k} \cos k\phi,$$

donde  $H(b) = (\alpha/4)(b^2 - b_0^2) - (V/2)(b - b_0)^2$ . En este caso  $b_0 = (b_{y0}, b_{z0})$  es una constante de integración. Finalmente, renormalizando, se tiene

$$\dot{b}_y - \nu \dot{b}_z = \frac{\partial H}{\partial b_z} + a \cos \theta, \quad (4.2)$$

$$\dot{b}_z + \nu \dot{b}_y = -\frac{\partial H}{\partial b_y} + a \sin \theta, \quad (4.3)$$

$$\dot{\theta} = \Omega, \quad (4.4)$$

donde

$$H = \frac{1}{4}(b^2 - 1)^2 - \frac{\delta}{2}(b - \hat{y})^2$$

y la derivación está hecha respecto a la nueva variable  $\tau = \alpha b_0^2 \phi / \mu$ . El parámetro de disipación normalizado es  $\nu = \eta / \mu$ ,  $b \rightarrow b / b_0$ ,  $\theta = \Omega \phi$ ,  $\Omega = \mu k / (\alpha b_0^2)$ ,  $a = A / (\alpha b_0^2 k)$ ,  $\delta = -1 + V / (\alpha b_0^2)$ .

En lo que sigue, se analizarán las ecuaciones (4.2)–(4.4) para diferentes valores de la amplitud de forzamiento  $a$ , haciendo previamente una descripción detallada de las soluciones que presenta el sistema sin forzamiento.

## 4.2. $a = 0$ : Ondas periódicas, solitones y *shocks*

Cuando no hay forzamiento en las ecuaciones (4.2)–(4.4), la dimensión del sistema baja a dos y las soluciones son regulares, es decir, no se intersectan en el espacio de

fase. Cuando  $a$  y  $\nu$  son cero, se tiene un sistema hamiltoniano (conservativo), y las soluciones son las trayectorias de "energía" constante en el espacio de fase, o sea

$$H(\mathbf{b}) = E, \quad (4.5)$$

donde  $E$  es una constante que depende de las condiciones iniciales. Las ecuaciones en este caso se reducen a

$$\dot{b}_y = \frac{\partial H}{\partial b_z}, \quad (4.6)$$

$$\dot{b}_z = -\frac{\partial H}{\partial b_y}. \quad (4.7)$$

Los puntos fijos del sistema son tales que

$$\frac{\partial H}{\partial b_z} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial b_y} = 0.$$

El sistema de ecuaciones resultante es de tercer grado, por lo que existen tres puntos fijos

$$\mathbf{fp}_1 = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\delta}}{2}, 0 \right\}, \quad \mathbf{fp}_2 = \{1, 0\}, \quad \mathbf{fp}_3 = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta}}{2}, 0 \right\}. \quad (4.8)$$

Haciendo perturbaciones lineales a las ecuaciones (4.6)–(4.7) en torno a los puntos fijos se generan sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\tau} = D\mathbf{F}(\mathbf{fp}_i)\mathbf{b},$$

donde  $D\mathbf{F}$  es el jacobiano del campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{b}) = \left( \frac{\partial H}{\partial b_z}, -\frac{\partial H}{\partial b_y} \right),$$

evaluado en alguno de los puntos fijos. La estabilidad de un punto fijo  $\mathbf{fp}_i$  se establece calculando los autovalores  $\lambda_i$  de la matriz  $DF(\mathbf{fp}_i)$ . A cada punto  $\mathbf{fp}_i$  corresponden dos autovalores. En este caso los valores propios para cada punto fijo son

$$\lambda_1^\pm = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{1+4\delta}(1-2\delta) - (1+4\delta)}{2}}, \quad (4.9)$$

$$\lambda_2^\pm = \pm \sqrt{(2-\delta)\delta}, \quad (4.10)$$

$$\lambda_3^\pm = \pm \sqrt{\frac{-\sqrt{1+4\delta}(1-2\delta) - (1+4\delta)}{2}}. \quad (4.11)$$

Como el sistema es conservativo los autovalores de los puntos fijos sólo pueden ser estrictamente imaginarios o reales. Los puntos fijos en la primera situación son los llamados centros, y se caracterizan porque alrededor de ellos se forman órbitas periódicas, que se ven como trayectorias cerradas en el espacio de fase, definidas por el valor de la constante  $E$  en (4.5). En el caso de autovalores estrictamente reales, debido a que el sistema es conservativo, un autovalor debe ser positivo y el otro debe ser negativo. Este tipo de puntos fijos son conocidos como *saddle* o puntos de ensilladura, puesto que poseen una dirección atractora, definida por el vector propio asociado a  $\lambda^-$ , y una dirección repulsiva, definida por el vector propio asociado a  $\lambda^+$ .

La figura 4.1a muestra la variación de la coordenada  $b_y$  de los tres puntos fijos posibles en función del parámetro  $\delta$ . Se observa que cuando  $\delta < -1/4$  los puntos  $\mathbf{fp}_1$  y  $\mathbf{fp}_3$  no existen, siendo  $\mathbf{fp}_2$  el único punto fijo del sistema. Las figuras 4.1b, c y d muestran las partes real e imaginaria de  $\lambda_1^+$ ,  $\lambda_2^+$  y  $\lambda_3^+$  en función de  $\delta$ . Cuando aparece  $\mathbf{fp}_1$ ,  $\lambda_1^+$  es real, y cuando lo hace  $\mathbf{fp}_3$ ,  $\lambda_3^+$  es imaginario. Por su parte,  $\lambda_2$  sólo tiene parte imaginaria, lo que junto a lo anterior ocurre mientras  $\delta < 0$ . Por

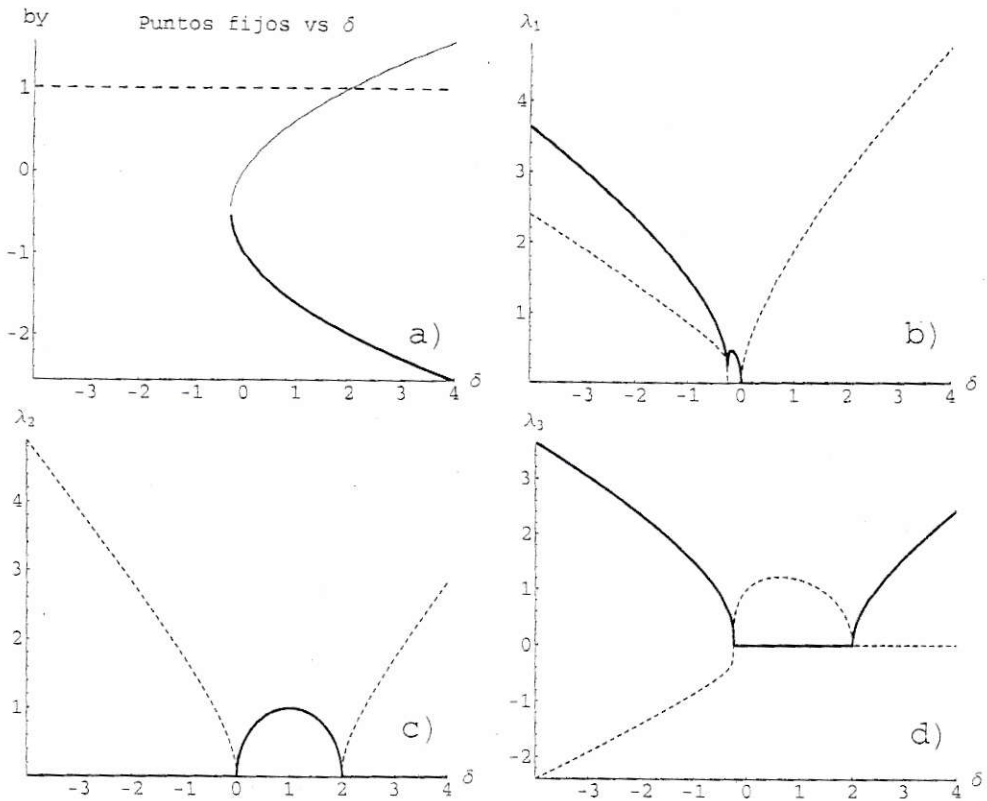


Figura 4.1: a) Coordenada  $y$  de los puntos  $fp_1$  (línea gruesa),  $fp_2$  (línea punteada) y  $fp_3$  (línea delgada) en función del parámetro  $\delta$ . Se observa como para  $\delta < -1/4$  los puntos  $fp_1$  y  $fp_3$  no existen. Además se muestran los gráficos de las partes real (línea gruesa) e imaginaria (línea punteada) de b)  $\lambda_1^+$ , c)  $\lambda_2^+$  y d)  $\lambda_3^+$  en función del parámetro  $\delta$ .

lo tanto para esos valores del parámetro  $fp_1$  es un *saddle*, mientras  $fp_2$  y  $fp_3$  son centros. Cuando  $\delta > 0$ ,  $fp_1$  cambia su estabilidad, convirtiéndose en un centro, al mismo tiempo que  $fp_2$  se convierte en un *saddle*. Esta situación se mantiene hasta que  $fp_2$  colisiona con  $fp_3$  cuando  $\delta = 2$ , como se observa en la figura 4.1a. Luego de esto,  $fp_2$  pasa a ser un centro y  $fp_3$  un *saddle*.

En lo que sigue se usará el valor  $\delta = 1/4$  para estudiar las soluciones del sistema, pues para este valor del parámetro coexisten los tres puntos fijos posibles, por lo que se podrán observar todos los tipos de soluciones que permite el sistema y su

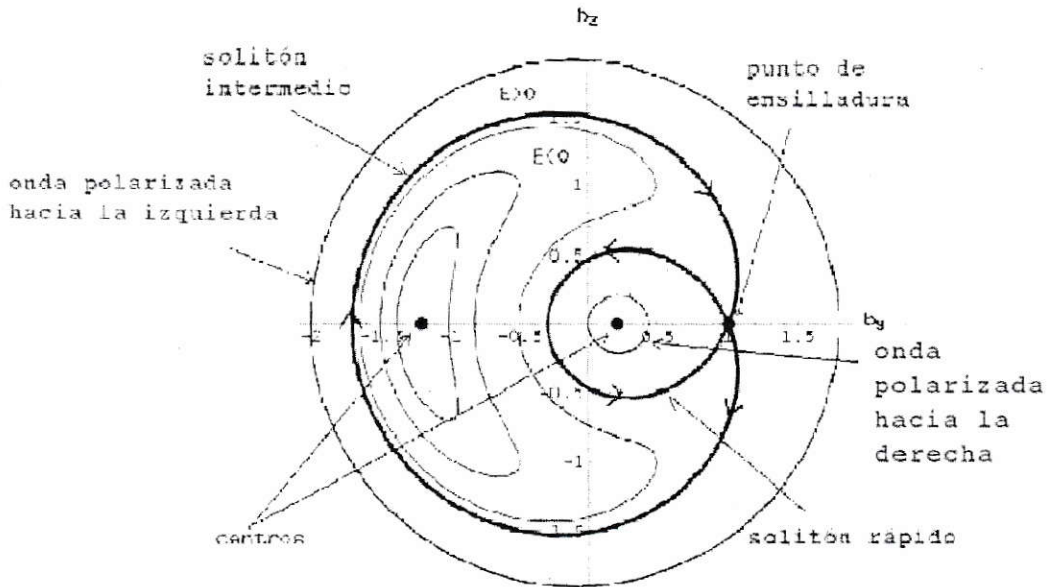


Figura 4.2: Diferentes regiones del espacio de fase para el caso  $a = 0$  y  $\nu = 0$ , con  $\delta = 0.25$ .

distribución en el espacio de fase. Cuando  $\delta = 1/4$  los puntos fijos están ubicados en

$$fp_1 = (-1.20711, 0), \quad fp_2 = (1, 0), \quad fp_3 = (0.20710, 0),$$

y sus valores propios son

$$\lambda_1^\pm = \pm 0.804019 i, \quad \lambda_2^\pm = \pm 0.661438, \quad \lambda_3^\pm = \pm 1.16342 i,$$

respectivamente.

La figura 4.2 muestra la distribución de las distintas soluciones en el espacio de fase cuando  $\delta = 1/4$ . Las curvas en la dirección repulsiva son órbitas que se conectan al *saddle* a través de la dirección atrayente, llamadas homoclinas, que a su vez encierran a los dos centros. Las homoclinas definen separatrices en el espacio de fase, y una condición inicial sobre ellas tarda un tiempo infinito en converger al *saddle*.

Estas curvas corresponden a solitones en el modo magnetohidrodinámico rápido e intermedio [14]. La homoclina correspondiente al modo rápido encierra al punto fijo  $\mathbf{fp}_3$ , alrededor del cual las soluciones son órbitas periódicas, correspondientes a ondas polarizadas circularmente hacia la derecha, mientras que fuera de la homoclina del modo intermedio las soluciones son órbitas periódicas correspondientes a ondas polarizadas circularmente hacia la izquierda.

La inclusión de disipación ( $\nu \neq 0$ ) permite soluciones que cruzan las curvas descritas por las soluciones del sistema en el caso sin disipación. Los valores propios de los puntos fijos en función del parámetro  $\nu$ , usando  $\delta = 1/4$ , son

$$\lambda_1^\pm(\nu) = -\frac{(4\sqrt{2} + 1)\nu}{4(1 + \nu^2)} \pm \sqrt{\frac{4(\sqrt{2} - 4) + (17 + 12\sqrt{2})\nu^2}{(1 + \nu^2)^2}}, \quad (4.12)$$

$$\lambda_2^\pm(\nu) = -\frac{3\nu}{4(1 + \nu^2)} \pm \sqrt{\frac{\frac{7}{16} + \nu^2}{(1 + \nu^2)^2}}, \quad (4.13)$$

$$\lambda_3^\pm(\nu) = \frac{(4\sqrt{2} - 1)\nu}{4(1 + \nu^2)} \pm \sqrt{\frac{-4(4 + \sqrt{2}) + (17 - 12\sqrt{2})\nu^2}{(1 + \nu^2)^2}}. \quad (4.14)$$

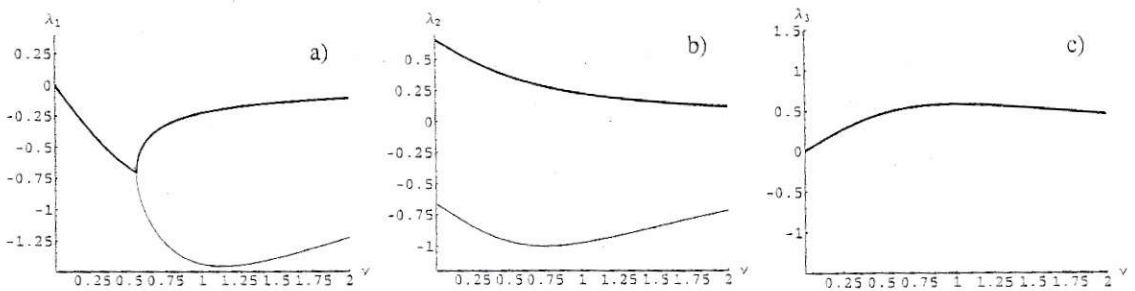


Figura 4.3: Partes reales de  $\lambda^+$  (línea gruesa) y  $\lambda^-$  (línea delgada) de los valores propios de los tres puntos fijos presentes en el sistema, en función del parámetro  $\nu$ , con  $\delta = 0.25$ . a)  $\lambda_1^\pm(\nu)$ , b)  $\lambda_2^\pm(\nu)$ , c)  $\lambda_3^\pm(\nu)$ .

La figura 4.3 muestra las partes reales de  $\lambda^+$  (línea gruesa) y  $\lambda^-$  (línea delgada) de los autovalores de los tres puntos fijos, como función de  $\nu$ , graficadas a partir de



las relaciones (4.12)–(4.14). El punto  $\mathbf{fp}_1$ , que antes era un centro, se convierte en un punto atractor ya que la parte real de sus dos autovalores es siempre negativa. El punto  $\mathbf{fp}_2$  continúa siendo un *saddle*, pero sus autovalores ya no tienen el mismo módulo. La parte real de los dos autovalores de  $\mathbf{fp}_3$  son positivas e iguales, por eso solamente se aprecia una línea en la figura 4.3c. Este punto se convierte en un repulsor al incluir disipación en el sistema.

Ahora las órbitas describen transiciones de *shocks*, que conectan dos de los tres puntos estacionarios, correspondientes a *shocks* MHD rápidos e intermedios [35]. Existen entonces tres posibles *shocks*: uno rápido que conecta  $\mathbf{fp}_3$  con  $\mathbf{fp}_2$  uniendo el máximo de potencial con el punto *saddle* (figura 4.4a), y dos intermedios, que conectan  $\mathbf{fp}_2$  con  $\mathbf{fp}_1$ , desde el máximo al mínimo (figura 4.4b), y  $\mathbf{fp}_3$  con  $\mathbf{fp}_1$ , que va desde el punto *saddle* hacia el mínimo por la zona intermedia (figura 4.4c).

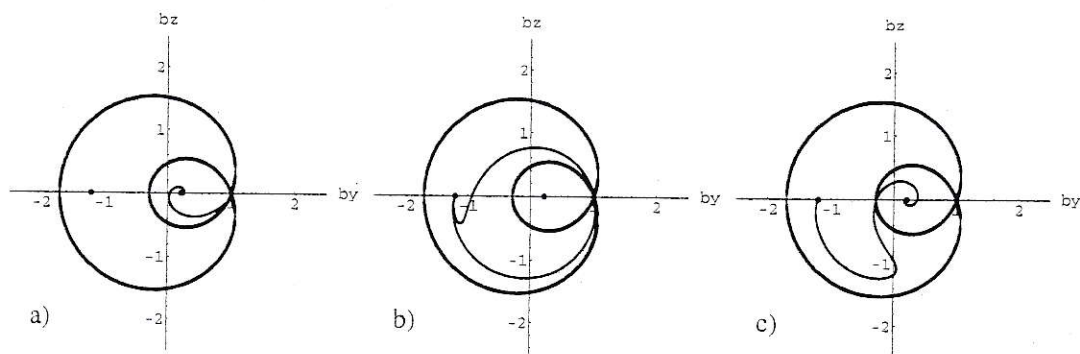


Figura 4.4: (a) *shock* rápido 3–2 (b) *shock* intermedio 2–1 (c) *shock* intermedio 3–1

### 4.3. $a \neq 0$ , $\nu = 0$ : sistema hamiltoniano forzado

En este caso, al agregar un forzamiento, la dimensión del sistema sube a tres, que es el mínimo número de dimensiones para tener soluciones caóticas en sistemas

continuos [22]. Los resultados de integrar numéricamente el sistema para  $a \in [0, 0.2]$  usando  $\Omega = -2$  se ven en la figura 4.5. Para cada  $a$ , las soluciones para distintas condiciones iniciales son proyectadas sobre el espacio de fase  $(b_y, b_z)$  usando el mapa estroboscópico definido por (3.2), donde el período es  $|2\pi/\Omega|$ .

Cuando  $a = 0$ , cada condición inicial genera un conjunto de puntos que están sobre la curva equipotencial que define dicha condición. Si el período de la onda asociada a una condición inicial es  $2\pi/\omega$ , entonces el corte de Poincaré se verá como un conjunto de puntos densamente distribuidos, que forman diferentes órbitas, salvo en los lugares en los cuales la frecuencia de la órbita cumpla con

$$\omega = \frac{n}{m} \Omega, \quad \text{con } n \text{ y } m \text{ enteros,}$$

los que representan puntos fijos (órbitas periódicas del mapa).

Cuando  $a = 0.002$ , las condiciones iniciales en torno al solitón intermedio generan un conjunto de puntos dispersos, señalando el comienzo de un comportamiento caótico. Esto se debe a que pequeñas perturbaciones en un sistema hamiltoniano producen movimiento caótico en una banda alrededor de una separatriz del espacio de fase (solitón intermedio) sin perturbar, haciendo “saltar” las trayectorias de adentro hacia afuera y viceversa, haciendo que una misma solución vaya hacia el punto *saddle* en cierto intervalo, para luego tender a alejarse de éste. Como consecuencia, las trayectorias cerca de  $\mathbf{fp}_2$  se vuelven sumamente complicadas. La interpretación física de esto es que las ondas presentan repentinos e impredecibles saltos de fase y sentido de la polarización.

Sin embargo, la mayor parte del espacio de fase contiene soluciones regulares con  $a = 0.002$ . En particular, las órbitas que se encuentran dentro del solitón rápido, aunque se encuentran cerca del punto *saddle*, tienen una polarización diferente (de-

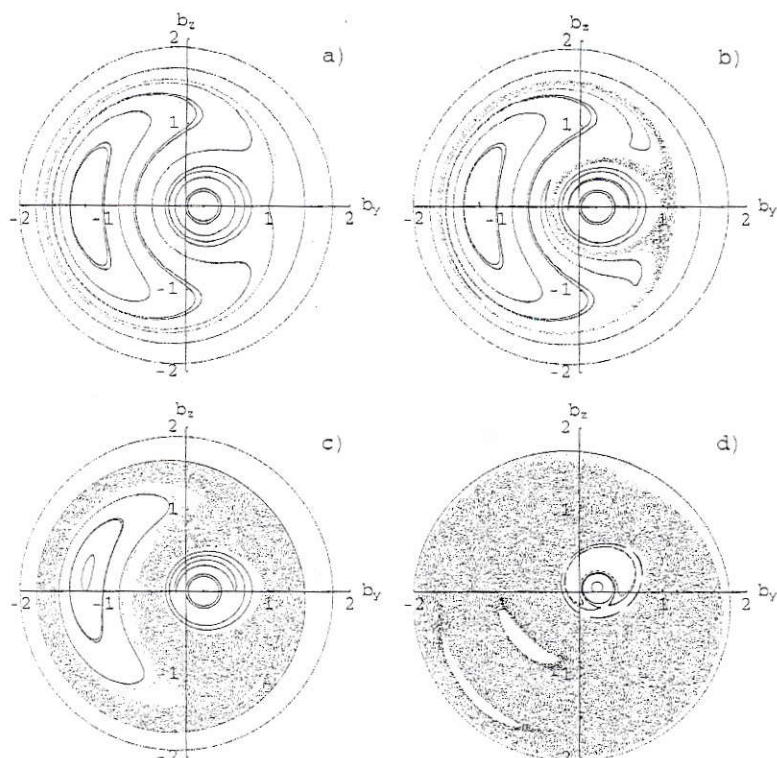


Figura 4.5: Cortes de Poincaré para diferentes valores de la amplitud de forzamiento. (a)  $a = 0$  (b)  $a = 0.002$  (c)  $a = 0.02$  (d)  $a = 0.2$

recha o  $\omega > 0$ ) a la del forzamiento,  $\Omega = -1$ . Las regiones que contienen órbitas caóticas son separadas de aquellas que contienen órbitas regulares por un tipo de objeto conocido como toro de KAM. La teoría de KAM (por Kolmogorov, Arnold y Moser) [14, 22] establece que en un sistema hamiltoniano, la mayoría de las superficies definidas por la condición (4.5), también llamadas toros, continuarán existiendo al aplicar una pequeña perturbación sobre el sistema. Para  $a = 0.002$  por ejemplo, se pueden observar dos toros de KAM rodeando la zona cercana al solitón rápido, uno entre la región de caos y las ondas polarizadas hacia la derecha, y otro entre la región de caos y las ondas intermedias, de polarización mezclada.

Al incrementar la amplitud del forzamiento la región caótica crece en el espacio

de fase. Cuando  $a = 0.2$ , la mayor parte del espacio de fase mostrada es caótica, excepto para unas pocas pequeñas islas.

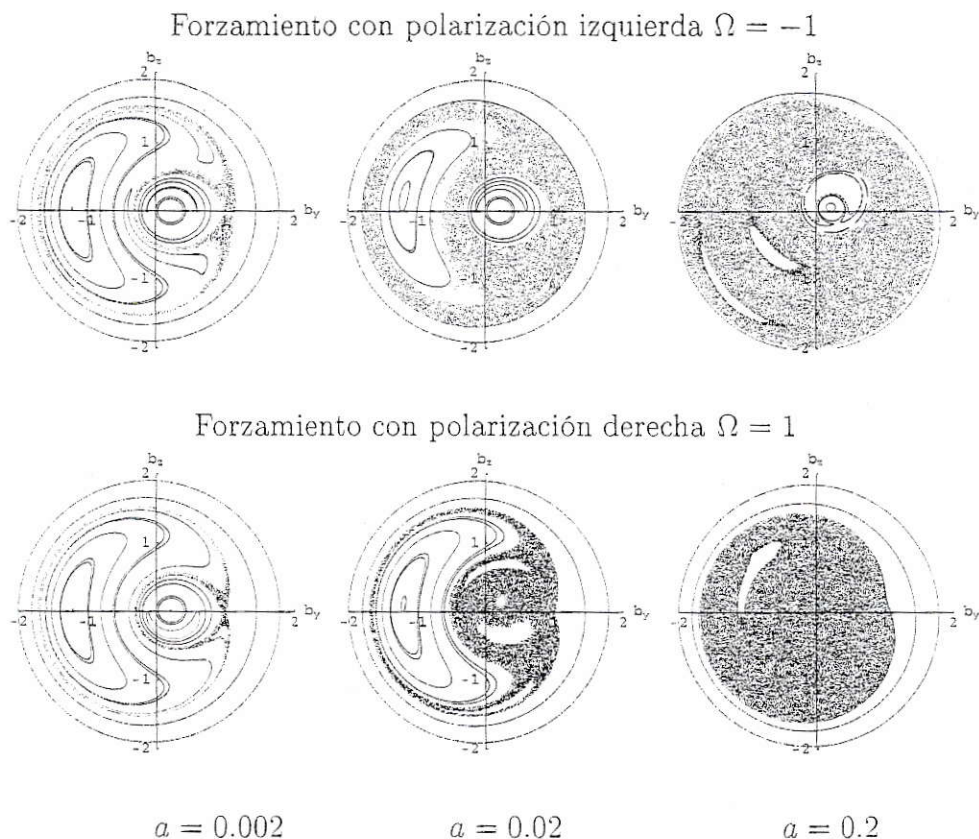


Figura 4.6: Comparación de los cortes de Poincaré para el sistema perturbado por una onda polarizada hacia la izquierda (arriba) y una onda polarizada hacia la derecha (abajo), para tres valores de la amplitud de forzamiento  $a$ .

Es interesante notar que mientras más grande es el parámetro  $a$ , la zona caótica aumenta su volumen en el espacio de fase, pero sólo en las regiones externas de la región polarizada hacia la derecha ( $\omega > 0$ ), es decir, en la región externa al solitón intermedio, con polarización izquierda, y en la región entre éste y el solitón rápido, donde las ondas tienen polarización mezclada. Esto se debe a que el forzamiento polarizado hacia la izquierda sólo puede inducir estocacidad en las regiones donde la

polarización de las ondas sin perturbar es hacia la izquierda ( $\omega < 0$ ). En la figura 4.6 están comparados los mapas de Poincaré del sistema siendo perturbado por una onda polarizada hacia la derecha ( $\Omega = 1$ ) y por una polarizada hacia la izquierda ( $\Omega = -1$ ), para tres valores de  $a$ . Se observa que en el caso del forzamiento con polarización hacia la derecha, se forma una isla de orden, es decir, una región del espacio de fase con soluciones regulares acotada por un toro de KAM, para  $a$  pequeños, dentro del solitón rápido, para luego dar paso a regiones más extensas de caos al incrementar  $a$ , las cuales se extienden por sobre la región intermedia hasta las fronteras del solitón intermedio. En esta zona también se forman islas, pero más notorio es que la zona totalmente polarizada hacia la izquierda contiene únicamente soluciones regulares, mientras que la isla estable se forma en torno al punto fijo  $\text{fp}_3$  asociado al sistema sin perturbar. Esto da cuenta de cómo influye la estructura del sistema sin perturbar en la topología del espacio de fase del sistema perturbado.

#### 4.4. $a \neq 0, \nu \neq 0$ : sistema con disipación y forzamiento

En esta sección se estudiará el comportamiento de los diferentes atractores presentes en el sistema para diferentes valores de la amplitud de forzamiento  $a$ , usando  $\Omega = -1, \nu = 0.002$  y  $\lambda = 0.25$ . El diagrama de bifurcación del sistema para valores de  $a$  entre 0 y 0.5 se muestra en la figura 4.7. Cuando  $a = 0$  y  $\nu \neq 0$ , existe un atractor estable, que corresponde al mínimo del potencial definido por  $H$ . Este atractor sufre una bifurcación de Hopf [22], inmediatamente al aparecer forzamiento ( $a > 0$ ). Al ocurrir este tipo de bifurcaciones un punto fijo estable se convierte en un ciclo límite que oscila en torno a la posición del antiguo punto fijo. En este caso el ciclo límite oscila en torno al mínimo del potencial  $H$  con período  $2\pi/\Omega$ . Este ciclo límite

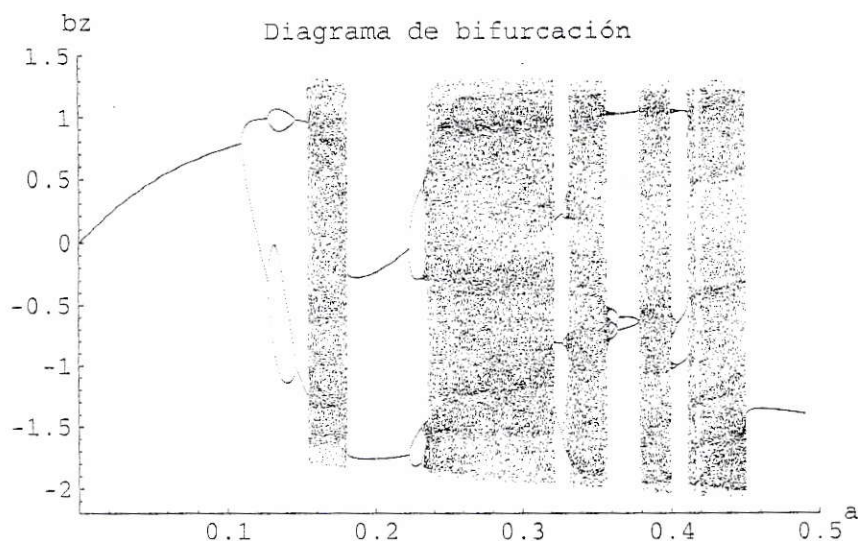


Figura 4.7: Diagrama de bifurcación del sistema (4.2)–(4.4), usando el corte estroboscópico, con  $\Omega = -1$ ,  $\delta = 0.25$  y  $\nu = 0.002$ , para  $a \in [0, 0.5]$ .

sufre dos doblamientos de período sucesivos, el primero en  $a \approx 0.109075$  y el segundo en  $a \approx 0.12712$ . Inmediatamente después, en  $a \approx 0.1456$ , las órbitas descienden su período a la mitad, proceso conocido como *period-halving*, y que se ha observado en gran variedad de sistemas [36]. Cuando  $a \approx 0.15395$ , el sistema se vuelve repentinamente caótico, a través de una bifurcación de *saddle-node*. En este caso, el atractor de período dos desaparece, apareciendo a su vez un atractor extraño, que aparece en la figura 4.7 como una colección densa de puntos. En la figura 4.8 se puede ver el aspecto de dicho atractor extraño en el espacio de fase, junto con un acercamiento para  $a = 0.16$ .

Volviendo a la figura 4.7, la región caótica se extiende hasta  $a \approx 0.1804$ , donde se produce un nuevo *saddle-node*, que vuelve inestable al atractor extraño [23] apareciendo una órbita de período dos. Esto se puede ver en detalle en la figura 4.9a. A partir de  $a \approx 0.2227$  ocurren sucesivos doblamientos de período que conducen

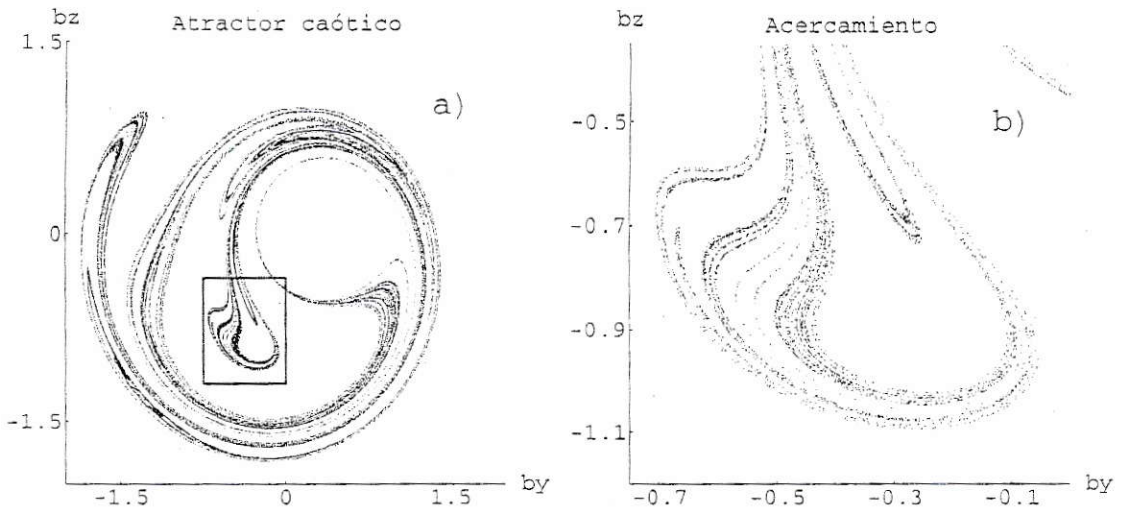


Figura 4.8: a) Atractor caótico presente en el sistema cuando  $a = 0.16$ . b) Ampliación de la zona encerrada en un rectángulo en (a).

al sistema a un estado caótico cuando  $a \approx 0.2324$ . Este atractor es más pequeño que el mostrado en la figura 4.8. La figura 4.9b muestra un acercamiento al intervalo  $a \in [0.22, 0.24]$ . En ésta se observa que cuando  $a \approx 0.2343$  aparece un atractor de período dos debido a una bifurcación *saddle-node* que coexiste con el atractor extraño ya presente. Este último desaparece abruptamente, debido a una crisis de borde (subsección 3.3.4) cuando  $a \approx 0.2352$ , valor del parámetro a partir del cual las condiciones iniciales convergen al atractor de período dos. Pronto éste comienza una nueva cascada de doblamientos de período (transición de Feigenbaum) que lo lleva a un estado caótico, para luego desaparecer debido a una nueva crisis en  $a \approx 0.2361$ , dando paso al antiguo atractor que desapareciera en la bifurcación *saddle-node* en  $a \approx 0.1804$ .

El sistema se mantiene caótico hasta  $a \approx 0.3214$ , partiendo desde este punto sucesivas ventanas de orden, la primera con una órbita de período tres. En la figura 4.10

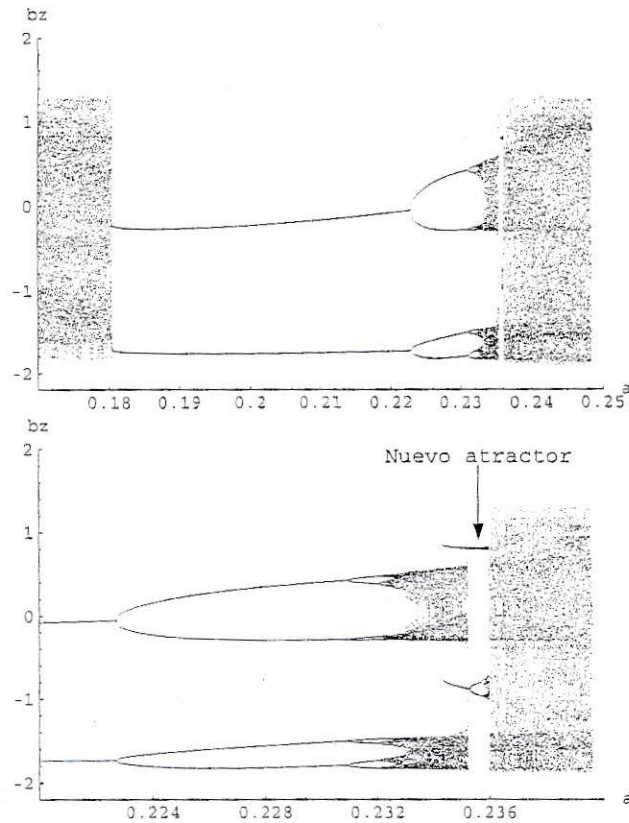


Figura 4.9: a) Diagrama de bifurcación para  $a \in [0.17, 0.25]$ . Se observa una bifurcación *saddle-node* en  $a \approx 0.1804$ , tras la cual desaparece el atractor extraño quedando en su lugar una órbita de período dos que se convierte en un órbita caótica a través de una transición de Feigenbaum. b) Acercamiento a la región  $a \in [0.22, 0.24]$ , donde se observa la coexistencia del atractor extraño y una órbita de período dos que aparece tras una bifurcación de *saddle-node*, que luego sufrirá una transición al caos via Feigenbaum. El atractor extraño mayor desaparece debido a una crisis de borde.

se observa esta ventana de orden en detalle. Las ventanas de orden más notorias luego de la anterior comienzan en  $a \approx 0.3561$  y  $a \approx 0.3995$ , aunque hay muchas más ocupando intervalos más pequeños del diagrama de bifurcación. Finalmente, en  $a \approx 0.45$  el sistema se vuelve estable, apareciendo un ciclo límite de período uno, que permanece aun cuando  $a \rightarrow \infty$ . Esto contrasta fuertemente con el hecho de que para el sistema hamiltoniano la región caótica crece a medida que aumenta el parámetro



a (figura 4.5d).

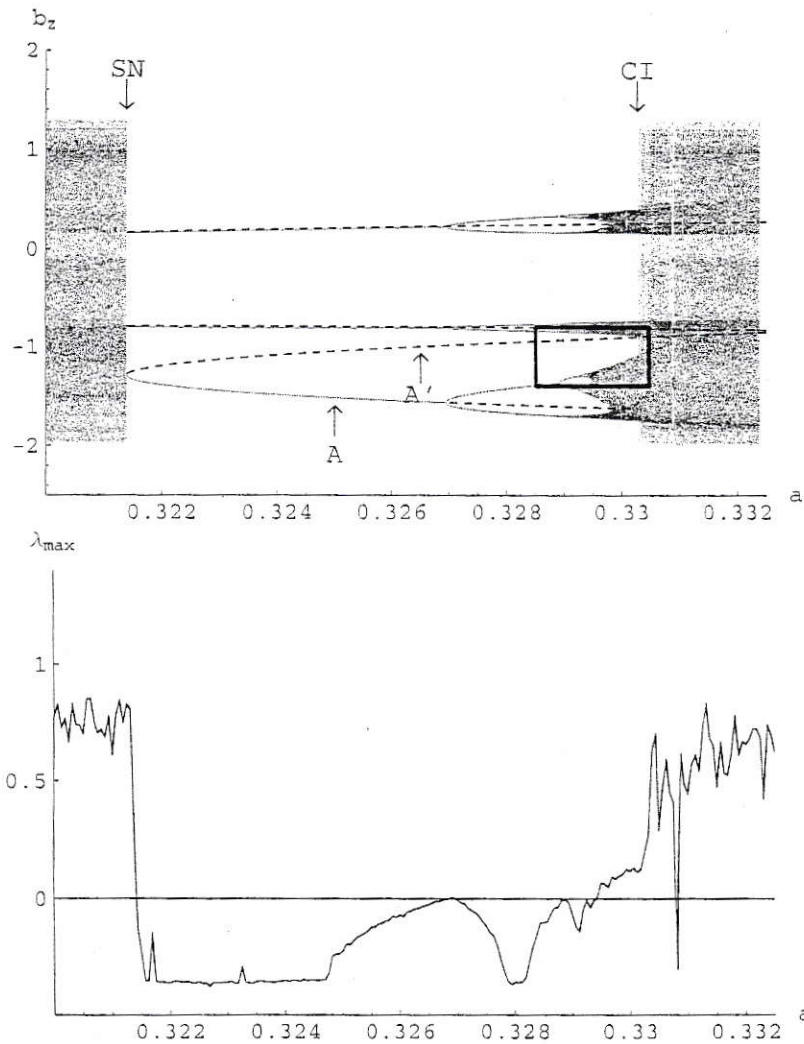


Figura 4.10: a) Diagrama de bifurcación para  $a \in [0.32, 0.3325]$ . Se observa una bifurcación tipo *saddle-node* (SN) en  $a = a_{SNB} \approx 0.321382$ , que genera dos órbitas de período tres, una estable  $A$  (línea continua) y una inestable  $A'$  (línea punteada). Además la figura muestra la ocurrencia de una crisis interior (IC) en  $a = a_c \approx 0.330249$ . b) Exponente de Lyapunov máximo en función del parámetro  $a$ . Se observa claramente el brusco aumento de  $\lambda_{\max}$  cuando ocurre la crisis interior.

## 4.5. Crisis interior e intermitencia

Las soluciones caóticas observadas en el diagrama de bifurcación del sistema (figura 4.7) han sido asociadas con la turbulencia observada en sistemas de plasmas tales como el viento solar [9,14] tanto del campo magnético transportado por el viento solar como en el campo de velocidades. Otro fenómeno que se ha observado a partir de los datos proporcionados por los satélites que monitorean el viento solar es el de la intermitencia [10,37]. Durante un evento de este tipo, el campo magnético fluctúa intermitentemente entre dos estados turbulentos diferentes. Este comportamiento también se observa en las soluciones de un sistema dinámico una vez ocurrida una crisis interior.

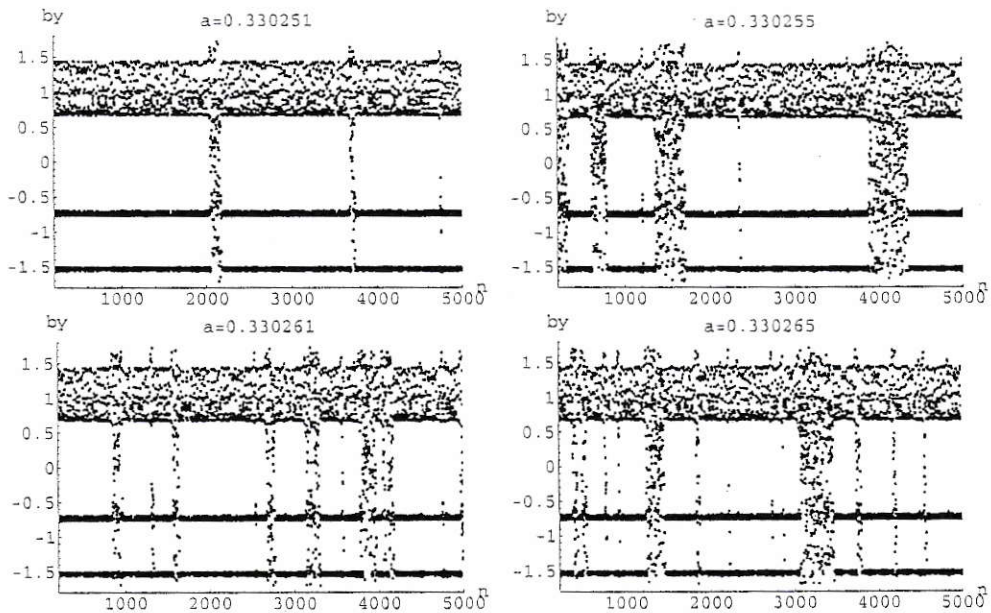


Figura 4.11: Mapas estroboscópicos de  $b_y$  para distintos valores de  $a$  tras la crisis interior sufrida por el sistema cuando  $a = a_c \approx 0.330248$ . Se observa claramente la intermitencia de las soluciones tras la crisis. Además, el tiempo  $\tau$  durante el cual la solución está en la nueva cuenca disminuye cuando  $a$  se aleja del valor crítico.

En la figura 4.10 se observan dos bruscos cambios en el comportamiento del

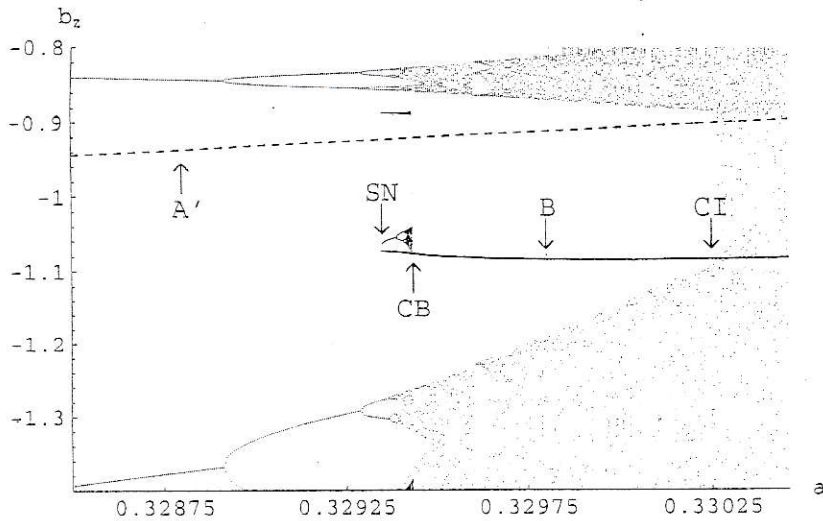


Figura 4.12:

sistema al variar el parámetro  $a$  en el intervalo  $[0.32, 0.3325]$ . El primero de éstos es una bifurcación *saddle-node*, que ocurre en  $a = a_{\text{SNB}} \approx 0.321382$ , tras la cual aparecen dos órbitas de período tres, una estable, rotulada como  $A$  en la figura 4.10a, y otra inestable representada por una línea punteada en la misma figura, rotulada como  $A'$ . Luego, en  $a \approx 0.326912$  la órbita  $A$  sufre un doblamiento de período, apareciendo así una órbita estable de período seis. La órbita  $A$  se vuelve inestable, siendo la primera órbita de este tipo que luego formará parte del atractor extraño que se forma tras los sucesivos doblamientos de período que ocurren al incrementarse el valor de  $a$ . El tamaño del atractor extraño crece repentinamente cuando  $a \approx a_c \approx 0.330248$ . El brusco incremento de tamaño del atractor se debe a una crisis interior. Prueba de esto es la intermitencia que muestran las soluciones, típica en esta forma de crisis, para valores del parámetro mayores al valor crítico  $a_c$ . La figura 4.11 muestra cuatro series de puntos de cortes de Poincaré para distintos valores de  $a > a_c$ . Se observa claramente la aparición de intermitencia, además de que el tiempo  $\tau$  entre

las apariciones de puntos en el atractor de mayor tamaño disminuye cuando  $a$  se aleja del valor crítico.

Cuando una crisis interior ocurre, el tamaño del atractor crece bruscamente. Luego, debido a que las soluciones pueden abarcar una zona mayor del espacio de fase, la impredecibilidad del sistema aumenta, y esto equivale a decir que el exponente de Lyapunov máximo  $\lambda_{\max}$  aumenta [26]. El exponente de Lyapunov máximo para distintos valores de  $a$ , calculado a partir de la expresión 3.11, es mostrado en la figura 4.10b.

Como se dijo en la subsección 3.3.4, en la tangencia que produce la crisis están involucradas las variedades estable e inestable de una o dos órbitas periódicas inestables. Al hacer una búsqueda de las órbitas periódicas inestables usando los métodos descritos en la sección 3.4, se encuentra que hay dos órbitas involucradas: la órbita inestable  $A$ , que forma parte del atractor, y una órbita  $B$  de período nueve que aparece en una bifurcación de *saddle-node* cuando  $a \approx 0.32935$ . La figura 4.12 muestra un acercamiento de la zona marcada encerrada en un rectángulo en la figura 4.10a donde se aprecia la formación de  $B$  junto a una órbita estable de período nueve que se convierte, tras una transición de Feigenbaum, se convierte en un pequeño atractor caótico, el que desaparece debido a una crisis de borde cuando  $a \approx 0.329437$ . Esta crisis se debe a la colisión de  $B$  con el pequeño atractor. Tras la crisis de borde la órbita  $B$  sigue existiendo, y cuando  $a = a_c$  ésta colisiona con el atractor principal presente en el sistema, provocando la crisis interior.

La figura 4.13a muestra la posición de las órbitas  $A$  y  $B$  (cruces) y el atractor extraño cuando  $a < a_c$ . En la figura 4.13b se graficaron la variedad estable de  $B$  (línea delgada) y la variedad inestable de  $A$  (línea gruesa) cuando  $a < a_c$ . En este caso la crisis aún no se ha producido, y tanto  $B$  como su variedad estable no tocan

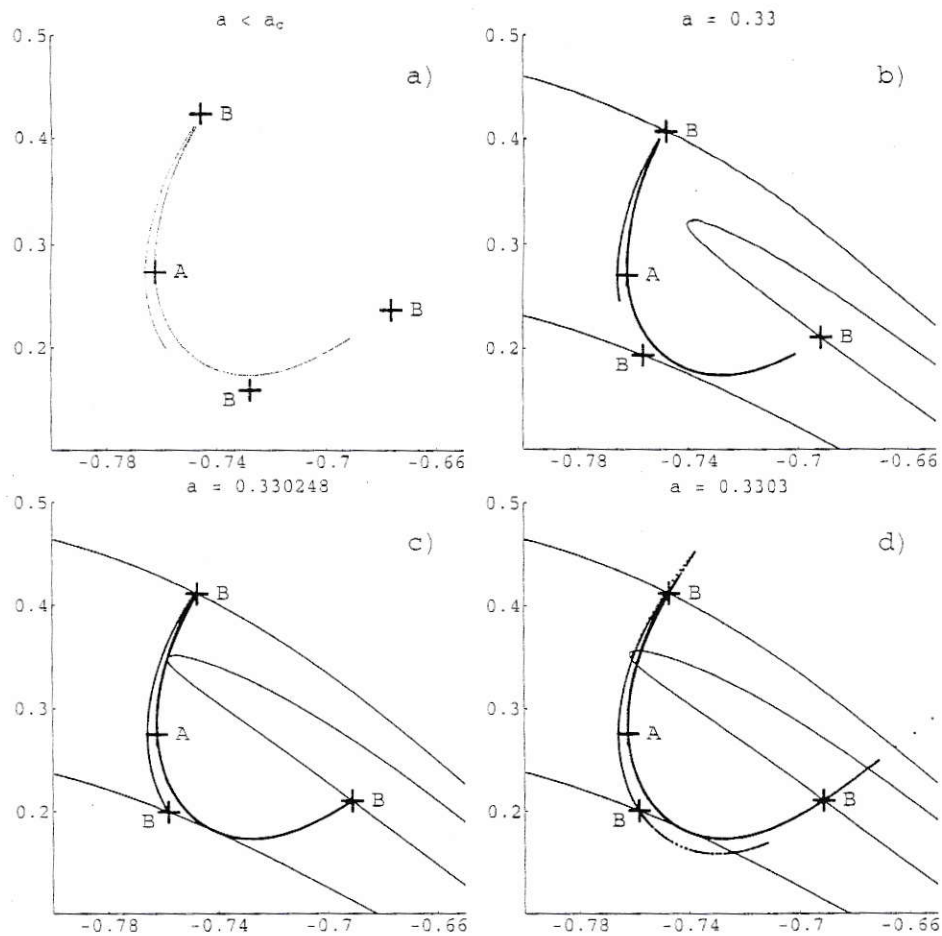


Figura 4.13: a) Corte de Poincaré del sistema, que muestra el brazo medio del atractor extraño antes de la crisis, y las posiciones de las órbitas inestables de período tres  $A$  y  $B$  (cruces) involucradas en la crisis interior justo antes de ésta. b) Variedad inestable de  $A$  (línea delgada) y variedad estable de  $B$  (línea gruesa) antes de que se produzca la tangencia, cuando  $a < a_c$ . c) Cuando  $a = a_c$  la variedad inestable de  $A$ , que es el borde del atractor extraño en a), colisiona con la variedad estable de  $B$ . d) Después de la tangencia heteroclina ( $a > a_c$ ) la cuenca de atracción crece, aunque la solución en el corte de Poincaré (puntos) visita en forma intermitente la cuenca del atractor pequeño.

la variedad inestable de  $A$ . Cuando  $a = a_c$  (figura 4.13c) la variedad estable de  $B$  colisiona con la variedad inestable de  $A$ , provocando la crisis interior, es decir, la tangencia responsable de la crisis es de tipo heteroclina. Cuando  $a > a_c$  (figura 4.13d)

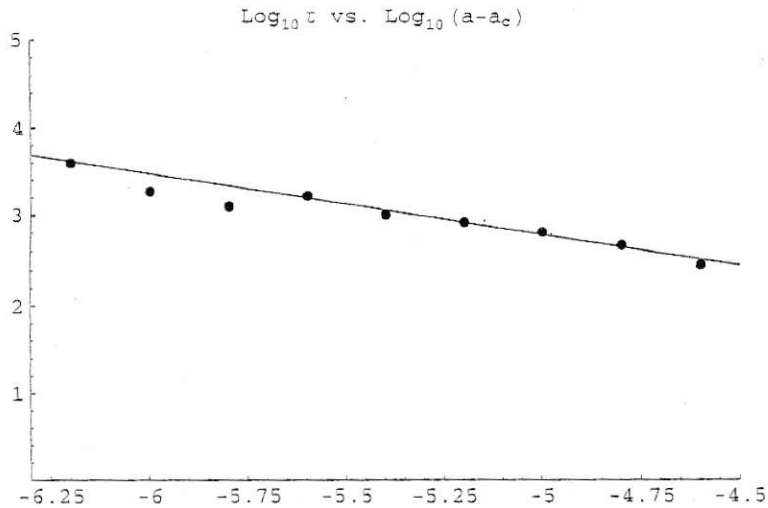


Figura 4.14: Dependencia del tiempo de intermitencia característico  $\tau$  respecto del parámetro  $a$ . Los puntos representan el tiempo promedio calculado directamente de los datos dados por el corte estroboscópico hecho a las soluciones numéricas, mientras que la línea es la recta de pendiente  $-\gamma_t$ , obtenida a partir de los autovalores de la órbita  $A$ .

las variedades se intersectan en varios puntos permitiendo la salida de condiciones desde la cuenca de atracción que existía antes de la crisis hacia la nueva cuenca. A pesar de esto las soluciones son intermitentes para valores de  $a$  cercanos a  $a_c$ , es decir, entran y salen de la antigua cuenca cada cierto tiempo.

Para la crisis interior el tiempo de intermitencia característico  $\tau$  definido en la subsección 3.3.4 está dado por la relación (3.15), y el exponente crítico  $\gamma_{\text{het}}$  por la relación (3.16), la cual depende de los valores propios de la órbita  $A$ . En este caso, cuando  $a = a_c$ , el valor del exponente crítico entregado por la teoría es  $\gamma_t = 0.68465$ . En la figura 4.14 se muestra el gráfico de  $\log_{10} \tau$  vs.  $\log_{10}(a - a_c)$  (puntos) obtenido directamente al calcular numéricamente el tiempo promedio de intermitencia  $\tau$  para diferentes valores de  $a$  más allá de la crisis, junto con la recta de pendiente  $-\gamma_t$ . Dicha recta se ajusta bien a los datos numéricos.

## Capítulo 5

# Ecuación DNLS forzada con dos frecuencias

En este capítulo se estudiará la ecuación (4.1) forzada con el *driver* original más un forzamiento extra. Para la frecuencia de éste se escogió el doble de la frecuencia de la onda entrante original. Esto, porque como se vio en el capítulo 4, una onda entrante de frecuencia  $\Omega$  es capaz de excitar un modo particular de oscilación, el cual transita entre el caos y el orden, dependiendo del tamaño de la amplitud de la onda. Se estudiará cómo afecta al sistema la inclusión de un segundo *driver* cuya frecuencia es el doble de la frecuencia del forzamiento original. El sistema de ecuaciones con este segundo driver luce de la siguiente forma

$$\dot{b}_y - \nu \dot{b}_z = \frac{\partial H}{\partial b_z} + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta, \quad (5.1)$$

$$\dot{b}_z + \nu \dot{b}_y = -\frac{\partial H}{\partial b_y} + A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta, \quad (5.2)$$

$$\dot{\theta} = \Omega. \quad (5.3)$$

El parámetro de control en este caso será  $A_2$ , que corresponde a la amplitud de la onda de frecuencia  $2\Omega$ . Primero se estudiarán dos casos, usando el intervalo  $A_1 \in [0.32, 0.3325]$  (figura 4.10), rango dentro del cual el sistema posee diferentes

comportamientos. Los valores del resto de los parámetros del sistema serán los mismos usados en el capítulo 4.

Caso 1.  $A_1 = 0.325$ , sistema inicialmente ordenado. Según se observa en el diagrama de bifurcación mostrado en la figura 4.10, donde  $A_2 = 0$ , cuando  $A_1 = 0.325$  el sistema posee un atractor, dado por una órbita de período tres.

Caso 2.  $A_1 = 0.331$ , sistema inicialmente caótico. Al inspeccionar la figura 4.10, se ve que cuando  $A_1 = 0.331$  el sistema se encuentra en un estado caótico, es decir, existe sólo un atractor, el cual es caótico.

## 5.1. Caso 1: bifurcación a partir de una órbita estable

La figura 5.1 muestra el diagrama de bifurcación para el sistema dado por las ecuaciones (5.1)–(5.3), cuando  $A_1 = 0.325$  y  $A_2 \in [-0.02, 0.02]$ . Al aumentar  $A_2$ , la órbita de período tres sigue existiendo, para desaparecer en una bifurcación *saddle-node* cuando  $A_2 \approx 0.01204$ , dando paso a un atractor extraño, cuyo aspecto es el mismo que el que existe antes de la bifurcación *saddle-node* en la figura 4.10. Esto se aprecia con claridad en la figura 5.2, donde se comparan el atractor antes del *saddle-node* cuando  $A_1 = 0.321378$  con  $A_2=0$ , y el atractor antes del *saddle-node* en este caso, donde  $A_1 = 0.325$  y  $A_2 = 0.012042$ . En la figura 5.1 también se muestra la evolución de la órbita periódica inestable (línea gruesa) al variar  $A_2$ . Ésta nace junto a la órbita estable en la bifurcación *saddle-node* que se observa en la figura 4.10. Claramente se ve que la bifurcación de *saddle-node* que sufre el sistema en  $A_2 \approx 0.01204$  proviene de la estructura que posee el sistema previo a la introducción de la onda de frecuencia  $2\Omega$ , puesto que dicha bifurcación involucra nuevamente a



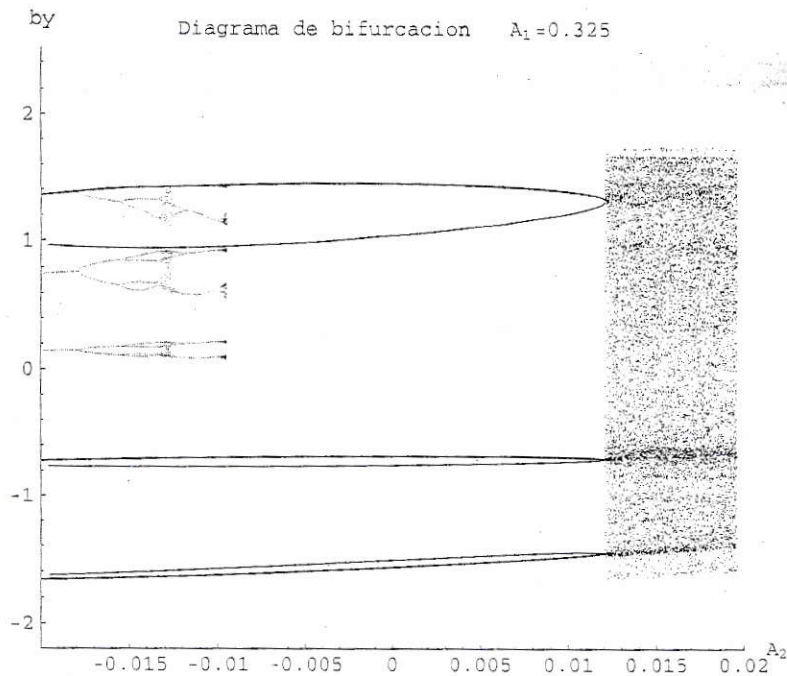


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación cuando  $A_1 = 0.325$  y  $A_2 \in [-0.02, 0.02]$ . La órbita inestable de período tres (línea gruesa) presente en el sistema cuando  $A_2 = 0$  sigue existiendo para  $A_2 < 0$  y desaparece en una bifurcación *saddle-node* cuando  $A_2 \approx 0.01204$ . Además se observa la aparición de un nuevo atractor cuando  $A_2 \approx -0.009528$  que coexiste con las órbitas estable e inestable de período tres.

ambas órbitas.

Cuando  $A_2$  es negativo, las dos órbitas de período tres continúan existiendo más allá de  $A_2 < -0.02$ , lo que sugiere que la dinámica global del sistema no se ve mayormente alterada. A pesar de esto, aparece un nuevo atractor debido a una crisis de borde (ver 3.3.4) en  $A_2 \approx -0.009528$ , el que coexiste con las órbitas de período tres para valores menores de  $A_2$  menores, y que posee a su vez un rico comportamiento, el que se aprecia en detalle en la figura 5.3.

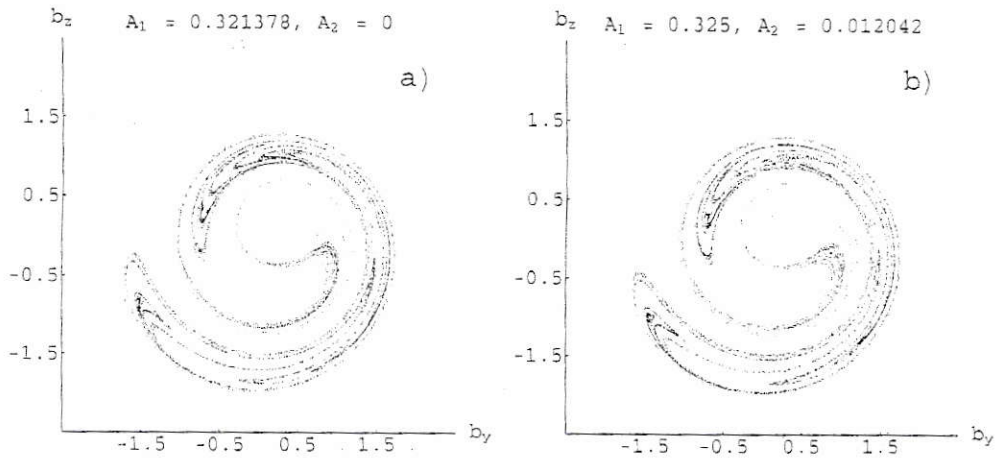


Figura 5.2: Atractores extraños para a)  $A_1 = 0.321378$  y  $A_2 = 0$ , b)  $A_1 = 0.325$  y  $A_2 = 0.012042$ .

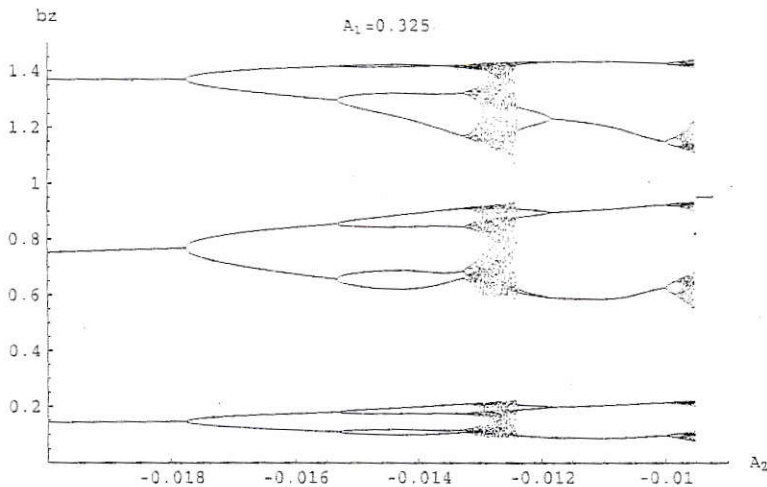


Figura 5.3: Detalle del diagrama de bifurcación del atractor que coexiste con las órbitas de período tres cuando  $A_2 < 0$ .

## 5.2. Caso 2: bifurcación a partir de un atractor extraño

La figura 5.4 muestra el diagrama de bifurcación cuando  $A_1 = 0.331$  y  $A_2$  es variado en el intervalo  $[-0.02, 0.02]$ . Además, se grafica en dicha figura la evolución de

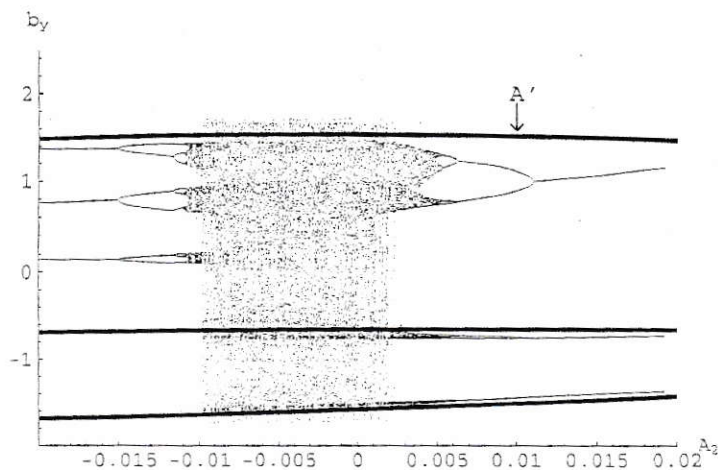


Figura 5.4: Diagrama de bifurcación del atractor estable y la órbita inestable de período tres  $A'$  (línea gruesa), cuando  $A_1 = 0.331$ , con  $A_2 \in [-0.02, 0.02]$ .

la órbita inestable de período tres  $A'$  existente cuando  $A_2 = 0$ . Se observan dos cambios bruscos en el tamaño del atractor, cuando  $A_2 \approx -0.0099$  y  $A_2 \approx 0.00247$ . En el segundo caso el atractor de menor tamaño es el mismo que se tiene antes de la crisis anterior estudiada en el capítulo 4. La figura 5.5a es un acercamiento al intervalo  $[0, 0.005]$  del parámetro  $A_2$  donde se muestra en detalle los cambios que sufre la dinámica del sistema al variar dicho parámetro. Se observa la aparición y desaparición de dos atractores pequeños. El primero aparece cuando  $A_2 \approx 0.00021$  debido a una crisis de borde (figura 5.5b). Cuando  $A_2 \approx 0.000378$  aparecen dos órbitas de período cinco, una estable y otra inestable, a través de una bifurcación *saddle-node*. La órbita estable se transforma en el pequeño atractor extraño al disminuir  $A_2$  mediante una transición de Feigenbaum. La órbita inestable creada en la bifurcación *saddle-node* colisiona con el atractor haciéndolo desaparecer. Las transiciones que sufre el atractor que aparece cuando  $A_2 \approx 0.00134$  y desaparece cuando  $A_2 \approx 0.00148$  son similares a las descritas anteriormente, pero esta vez dicho atractor posee período tres al aparecer. Es importante destacar que ambos atractores aparecen debido a la inclusión de

una segunda frecuencia en el *driver*, y que ambos coexisten con el atractor principal. Los espacios en los diagramas de bifurcación se deben a que mientras existen los atractores pequeños la condición inicial usada converge a ellos.

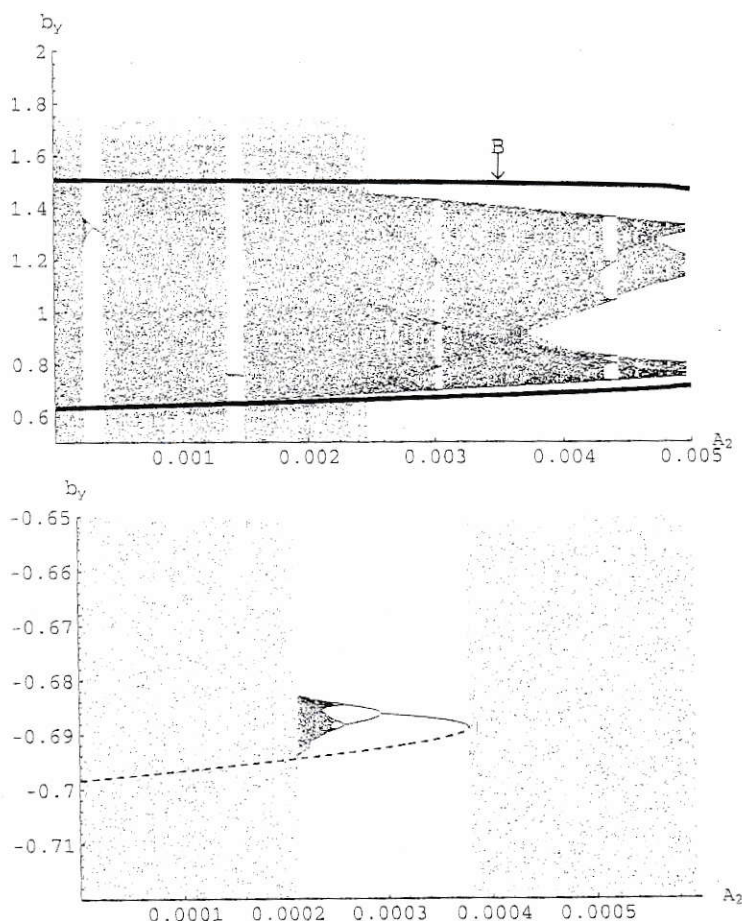


Figura 5.5: a) Diagrama de bifurcación para  $A_2 \in [0, 0.005]$ . La línea gruesa muestra la evolución de la órbita inestable de período nueve  $B$  existente para el problema del capítulo 4. b) Acercamiento al intervalo del parámetro  $A_2$  donde aparece un atractor de período 5, junto a la órbita inestable que produce la crisis de borde que lo hace desaparecer.

La órbita inestable de período nueve  $B$  responsable de la crisis descrita en el capítulo 4 sigue existiendo al aumentar el parámetro  $A_2$ , pero según se observa en la figura 5.5, el cambio observado en el atractor cuando  $A_2 \approx 0.00247$  no se debe

a una tangencia de  $B$  con el atractor. La figura 5.6 muestra el atractor junto a la variedad estable de  $B$  antes y después de la disminución de tamaño. Claramente la órbita  $B$  no está involucrada en la transición sufrida por el atractor al variar  $A_2$ , pues en ambos casos no existe tangencia con el atractor.

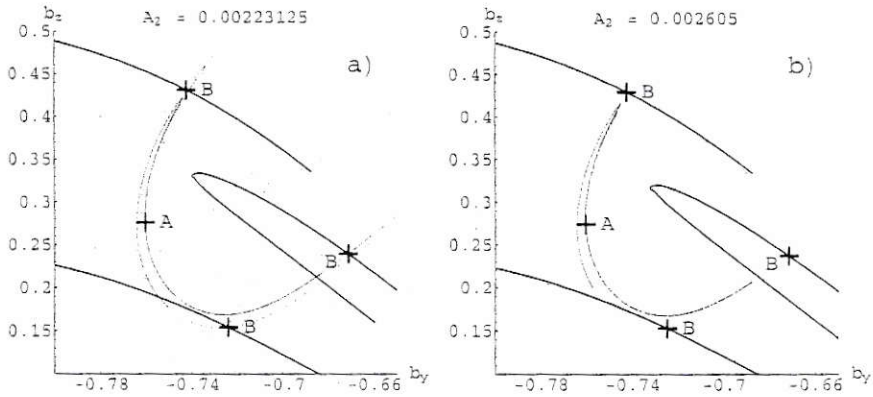


Figura 5.6: Variedad estable de la órbita  $B$  (línea) junto al atractor extraño. a) Antes de la transición, cuando  $A_2 < 0.00247$ . b) Después de la transición, cuando  $A_2 > 0.00247$ . En ambos casos la variedad no toca al atractor, por lo que en este caso la órbita  $B$  no está involucrada en el cambio sufrido por éste.

A pesar de lo anterior, existe evidencia de que el cambio de tamaño observado en la figura 5.5 se debe a una crisis interior. Dos hechos apoyan esta conjetura. Primero, el brusco cambio del exponente de Lyapunov máximo, que indica la tasa de separación entre dos condiciones iniciales cercanas. Esto se observa en la figura 5.7. Por otra parte, la figura 5.8 muestra la intermitencia de las soluciones antes de la disminución de tamaño del atractor. Se observa que mientras más cercano sea el parámetro al valor para el cual ocurre la transición, el tiempo de permanencia en la cuenca más pequeña aumenta. El tiempo de intermitencia promedio  $\tau$ , obtenido integrando las ecuaciones (5.1)–(5.3) para distintos valores de  $A_2$ , es mostrado en la figura 5.10 (puntos). Además se grafica en la misma figura la recta de pendiente

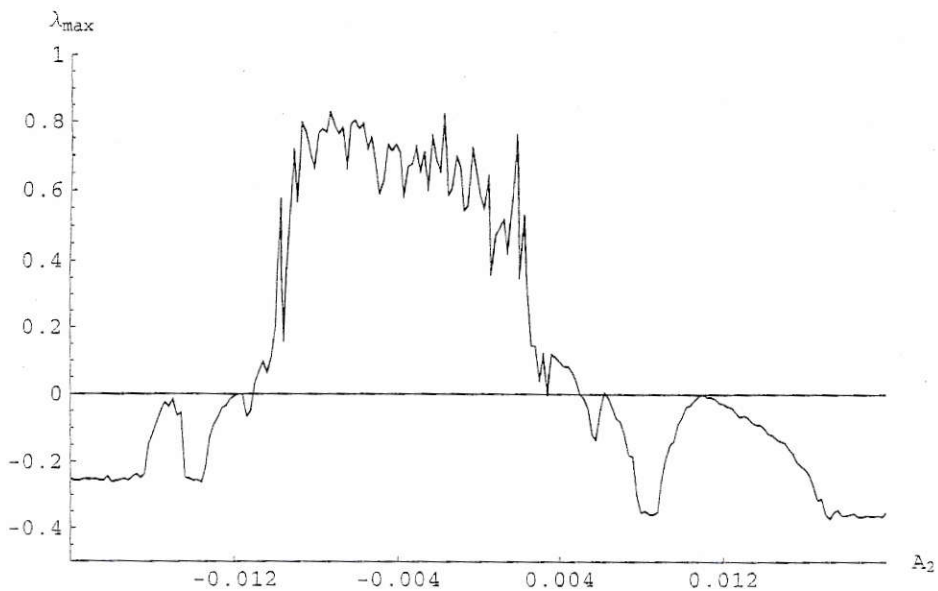


Figura 5.7: Exponente de Lyapunov máximo en función de  $A_2$ . Cuando se produce la transición en  $A_2 \approx 0.00247$  el exponente de Lyapunov sufre una brusca disminución, pero sigue siendo positivo.

$\gamma_t = -0.683264$ , que es el exponente crítico calculado a partir de los autovalores de la órbita inestable de período tres  $A$  ya existente en el sistema forzado con un *driver*, y que sigue existiendo al incluir una segunda frecuencia. La recta teórica se ajusta bien a los datos de la simulación numérica, lo que es un indicio de que la transición es provocada por una tangencia entre la variedad inestable de  $A$  con alguna órbita inestable presente en el sistema al incluir el nuevo forzamiento.

### 5.3. Control de caos

Se entiende por control de caos el cambio de la dinámica global de un sistema en estado caótico para que las soluciones adquieran algún comportamiento particular, debido a la alteración de éste por medio de pequeñas perturbaciones, que dependerán del tiempo, sobre algún parámetro [38].

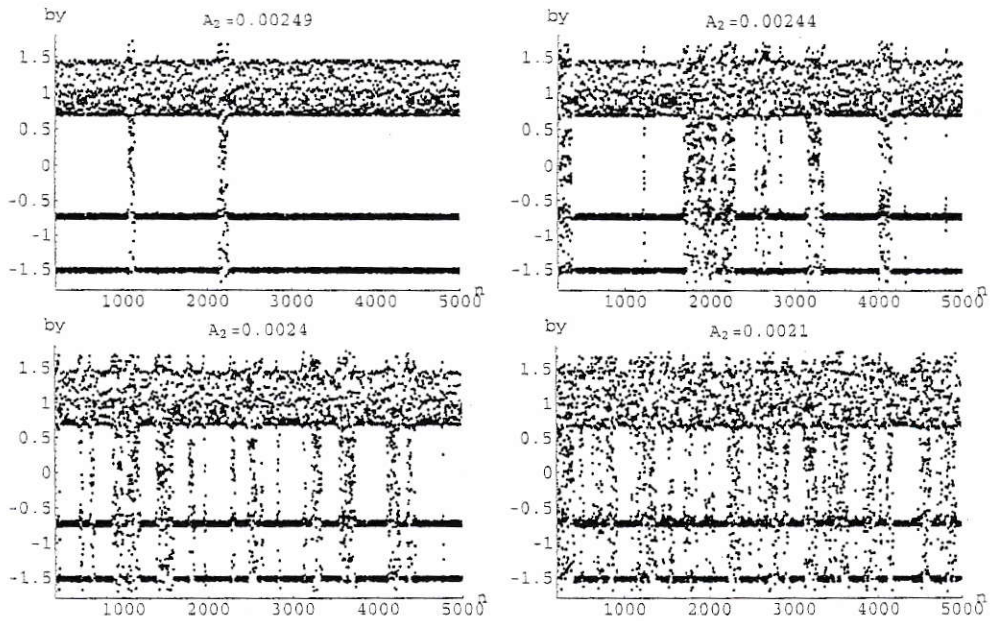


Figura 5.8: Intermitencia de las soluciones para  $A_2 < 0.00247$ . Mientras más se aleja  $A_2$  del valor crítico, el tiempo de intermitencia disminuye.

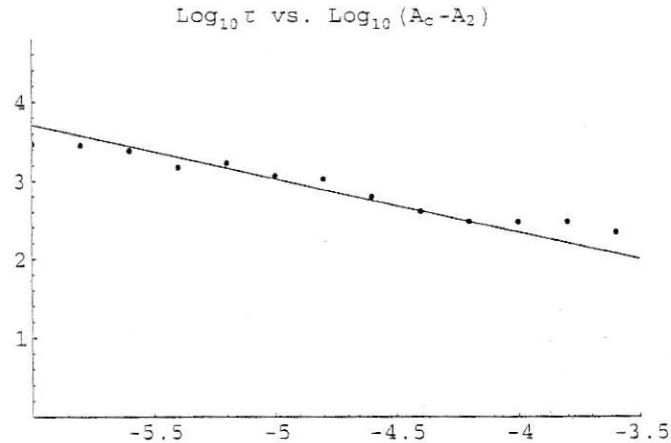


Figura 5.9: Tiempo de intermitencia  $\tau$  en función del parámetro  $A_2$ , junto con la recta de pendiente  $\gamma_t$  calculada a partir de los autovalores de la órbita inestable de período tres  $A$ .

La inclusión de una perturbación en el forzamiento cuya frecuencia es el doble de la original mostró que las soluciones recobran estados dados en el sistema sin

perturbar, moviéndose a través de nuevas bifurcaciones. En particular, es posible volver el sistema a un estado ordenado desde uno caótico al mover el parámetro  $A_2$ . Luego, es posible considerar la introducción de una segunda onda de pequeña amplitud como una forma de control del sistema.

En este caso el estado controlado del sistema será la órbita estable de período tres de la figura 4.10. El estado del sistema comienza estando completamente caótico, más allá de la crisis interior que se produce cuando  $A_1 = A_c$ . La idea es saber cuál es el valor de  $A_2$  necesario para que el único atractor presente en el sistema sea la órbita de período tres, en función del valor de  $A_1$ . Se consideraron dos frecuencias distintas. Primero, usando la perturbación de primer armónico (estudiada en la sección anterior), de frecuencia  $2\Omega$ . El segundo caso resulta más natural de pensar, y es el hecho de que si lo que se desea es inducir al sistema a volver al atractor de período tres, entonces el sistema debe ser forzado con la frecuencia de esta órbita, es decir,  $\Omega/3$ . Lo anterior no sería más que llevar al continuo la idea expuesta en [39], donde se propone el control de caos en el mapa logístico, alterando el parámetro de éste cada  $p$ -ésima iteración, donde  $p$  es el período de la órbita deseada. Para construir la función de control se procedió de la siguiente manera. Primero, dado un valor de  $A_1$  más allá de la crisis, se exploraron valores de  $A_2 \in [0, 0.4]$  desde cero, con  $\Delta A_2 = 0.0002$ , hasta encontrar el valor de  $A_2$  en el que comienzan los doblamientos de período de la órbita de período tres, formando así el par  $\{A_1, A_2\}$ . La figura 5.10 muestra las funciones de control así obtenidas en los dos casos mencionados antes, donde la abscisa representa la diferencia  $\Delta A_1 = A_1 - A_c$ . Al perturbar el sistema con el doble de la frecuencia original, se obtiene orden con valores de  $A_2$  siempre por sobre  $\Delta A_1$ . Por otro lado, cuando la frecuencia de perturbación es  $\Omega/3$ , el valor de  $A_2$  se mantiene acotado en el intervalo  $[0.005, 0.01]$ , que es del orden de  $\Delta A_1$ .



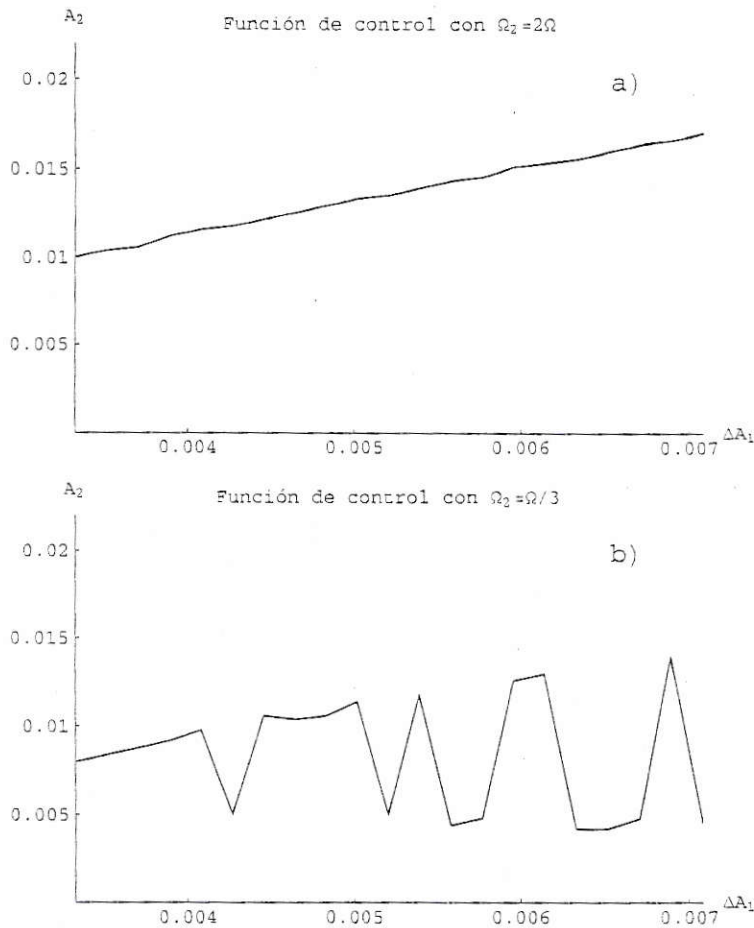


Figura 5.10: Dependencia del valor de control de  $A_2$  en función de  $\Delta A_1 = A_1 - A_c$ . a) Cuando la frecuencia es  $2\Omega$  es necesario aumentar linealmente el valor de  $A_2$  para obtener control. b) Al perturbar con  $\Omega/3$ , el valor de  $A_2$  se mantiene acotado al intervalo  $[0.005, 0.01]$ .

A partir de los resultados obtenidos en este capítulo se comprueba que el estado de una onda no lineal de Alfvén que nace producto de la excitación del sistema por una fuente externa se verá alterado considerablemente si la fuente sufre alguna variación. En este caso se observó que un estado caótico se controla al perturbar el *driver* original sumando otro de frecuencia distinta, siendo este control más eficiente si la frecuencia de la perturbación es igual al de la órbita periódica estable más

cercana, en el sentido del diagrama de bifurcación.

En plasmas como el viento solar es de esperar que las ondas que inyectan energía al sistema sean en realidad una suma de modos de oscilación. Además, debido a la inhomogeneidad del campo magnético de fondo y la densidad, la variación temporal de la amplitud en algún modo es igualmente esperable. Ambos hechos sugieren que el tipo de control descrito antes se produce naturalmente en el viento solar.

## Capítulo 6

# Solución numérica de la ecuación parcial diferencial

En los capítulos 4 y 5 se estudió la dinámica de las ondas de Alfvén en el caso particular en que son perturbadas con una onda viajera cuya velocidad de propagación es igual a la velocidad de las soluciones estudiadas. La dinámica del sistema resulta ser caótica para ciertos valores de la amplitud de la perturbación, lo que equivale a hablar de un estado turbulento del sistema. Junto con esto se observó la característica intermitencia de las soluciones inducida por crisis. Una visión del fenómeno de la turbulencia ha sido expuesta por [40] como la coexistencia de infinitas frecuencias propias (sobre un continuo) dentro de un fluido. En este caso dicho fluido es un plasma. En el caso de lo observado en los capítulos 4 y 5, las infinitas frecuencias son las contenidas dentro de un atractor extraño.

Debido a la aproximación hecha para obtener las ecuaciones (4.2)–(4.4), es válido pensar que el modelo expuesto en los capítulos anteriores carece de generalidad. En primer lugar, las perturbaciones que interactúan con un plasma en general no son ondas monocromáticas, sino más bien paquetes que contienen un continuo de frecuencias. Además, la velocidad de fase de las ondas no lineales depende de la amplitud de éstas.

En este capítulo se mostrarán los distintos tipos de soluciones numéricas de la ecuación (6.1), en los distintos casos posibles, para establecer hasta qué punto el modelo estudiado en los capítulos 4 y 5 es válido, es decir, si las soluciones propagantes observadas en dicho sistema se correlacionan con lo observado al considerar la ecuación completa

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [b(|b|^2)] - i(\mu + i\eta) \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = S(x, t). \quad (6.1)$$

Tal como en el capítulo 4, se pueden distinguir distintos casos, dependiendo del valor de  $\eta$  (disipación) y  $A$  (amplitud de la onda viajera). Las soluciones en todos los casos fueron obtenidas con el programa *Mathematica* 5.0 [41], considerando condiciones de borde periódicas.

## 6.1. Sistema sin disipación ni forzamiento, $\eta = 0$ y $A = 0$

Como fue mostrado en el capítulo 4, en este caso existen dos tipos de soluciones viajeras cuya velocidad de propagación es constante: ondas periódicas y solitones. La figura 6.1 muestra la evolución temporal de ambos tipos de condiciones iniciales. El comportamiento de las soluciones muestra lo esperado en este caso: tanto el solitón como la onda periódica circularmente polarizada mantienen su forma, viajando con velocidad constante.

En el caso de las ondas periódicas, la relación de dispersión se puede calcular suponiendo una solución de la forma

$$b(x, t) = a_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.2)$$

y reemplazando directamente en la ecuación (6.1). Al hacer esto se obtiene la siguiente

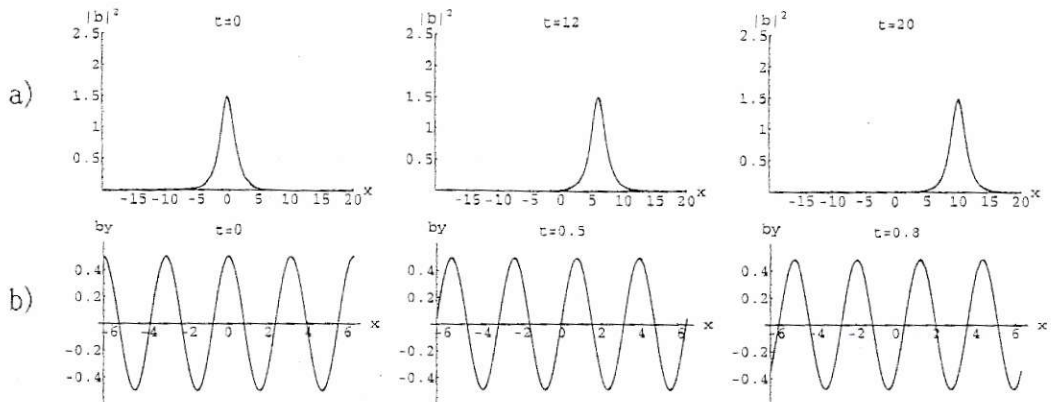


Figura 6.1: Evolución temporal de las soluciones que se propagan con velocidad constante. a) Solitón, b) onda periódica.

relación de dispersión:

$$\omega(k) = \alpha a_0^2 k + \mu k^2. \quad (6.3)$$

Se obtiene una relación de dispersión no lineal dependiente de la amplitud de las ondas. Además, si  $\mu < 0$ , no existirán soluciones propagándose cuando el número de onda es  $k_* = -\alpha a_0^2 / \mu$ . Esto se puede comprobar numéricamente calculando las frecuencias temporales  $\omega$  de diferentes soluciones obtenidas a partir de condiciones iniciales sinusoidales con distinto  $k$ . La frecuencia de una solución se calcula con el procedimiento descrito a continuación. Primero, a partir de una solución particular  $b(x, t)$  se obtiene el comportamiento temporal de ésta en un punto  $x_0$  cualquiera del espacio. Luego, a dicha función del tiempo se le calcula numéricamente su transformada de Fourier. La frecuencia temporal de la solución está dada por la posición del máximo en la transformada. La figura 6.2 muestra la relación de dispersión obtenida con el método descrito antes, para dos valores de  $a_0$ , con  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 1/2$  y  $\mu = -1/2$ , respectivamente, comparada con la relación de dispersión teórica (6.3).

Los resultados numéricos concuerdan con la relación de dispersión (6.3) cuando

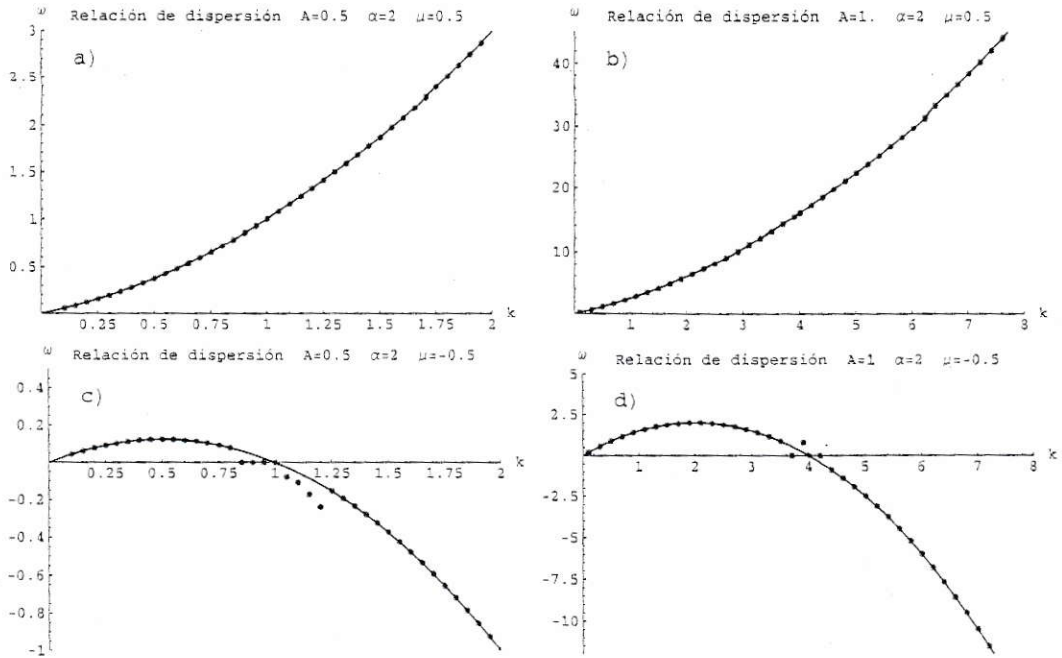


Figura 6.2: Relación de dispersión de la ecuación DNLS, calculada numéricamente (puntos) junto con el gráfico de la expresión (6.3) (línea). Las figuras a) y b) corresponden al caso  $\mu > 0$ , c) y d) al caso  $\mu < 0$ , para  $a_0 = 0.5$  y  $a_0 = 1$ , respectivamente.

$\mu > 0$ . Cuando  $\mu < 0$ , los valores de  $\omega$  obtenidos numéricamente calzan con la expresión teórica, salvo cuando el número de onda es cercano a  $k_*$ . Este problema se debe a que, para valores de  $k$  cercanos a  $k_*$ , las soluciones se propagan con lentitud ( $|\omega| \ll 1$ ). Para que la frecuencia aparezca en la transformada de Fourier, se necesita conocer la solución en el tiempo al menos hasta un período, lo que significa tiempos de integración muy grandes cuando  $k$  es cercano a  $k_*$ , lo que a su vez induce errores numéricos en el algoritmo de integración.

### 6.1.1. Ondas de amplitud modulada

Un comportamiento interesante se presenta al observar qué ocurre con una onda periódica cuya amplitud es modulada por una envolvente gaussiana, es decir

$$b(x, 0) = A_0 e^{i \frac{2\pi x}{\lambda}} e^{-\left(\frac{x}{L}\right)^2}, \quad (6.4)$$

donde  $A_0$  es la amplitud,  $\lambda$  la longitud de onda y  $L$  el tamaño de la modulación. Este caso, que representa de buena forma a un solitón perturbado [42], también es de interés en el ámbito de los plasmas astrofísicos, como el viento solar, ya que por diversas razones (no uniformidad del mecanismo de producción de plasma, inestabilidades u otras) en dichos medios se forman paquetes, en los cuales las ondas de Alfvén presentan una modulación espacial [43].

Se tienen cuatro situaciones distintas en función del signo de la no linealidad para la ecuación (6.1), dado por  $\alpha$ , y el signo de la dispersión  $\mu$ , que además cambia el sentido de polarización de las soluciones. En la figura 6.3 se observa la evolución temporal de la condición 6.4, con  $A_0 = 0.5$ ,  $\lambda = 8$  y  $L = 24$ , para  $\alpha = -1$  y  $\alpha = 1$ , usando  $\mu = \frac{1}{2}$ . El intervalo de integración usado fue  $x \in [-120, 120]$ , y se integró hasta  $t = 42$  en el caso  $\alpha > 0$  y  $t = 20$  cuando  $\alpha < 0$ .

Cuando  $\alpha < 0$ , la solución es inestable de forma creciente, ya que la amplitud aumenta rápidamente con el tiempo, además de que el ancho de la modulación decrece, o sea que la densidad de energía de la onda se incrementa. Lo anterior se puede interpretar como el resultado de la competencia entre la no linealidad, responsable de la generación de solitones, y la dispersión. En este caso el término no lineal domina por sobre la dispersión, desestabilizando las soluciones de forma creciente. Otro hecho que se observa es que al evolucionar, la solución pierde la simetría original de la condición inicial, pues se forma una “cola” por delante de la onda. Por otra parte,

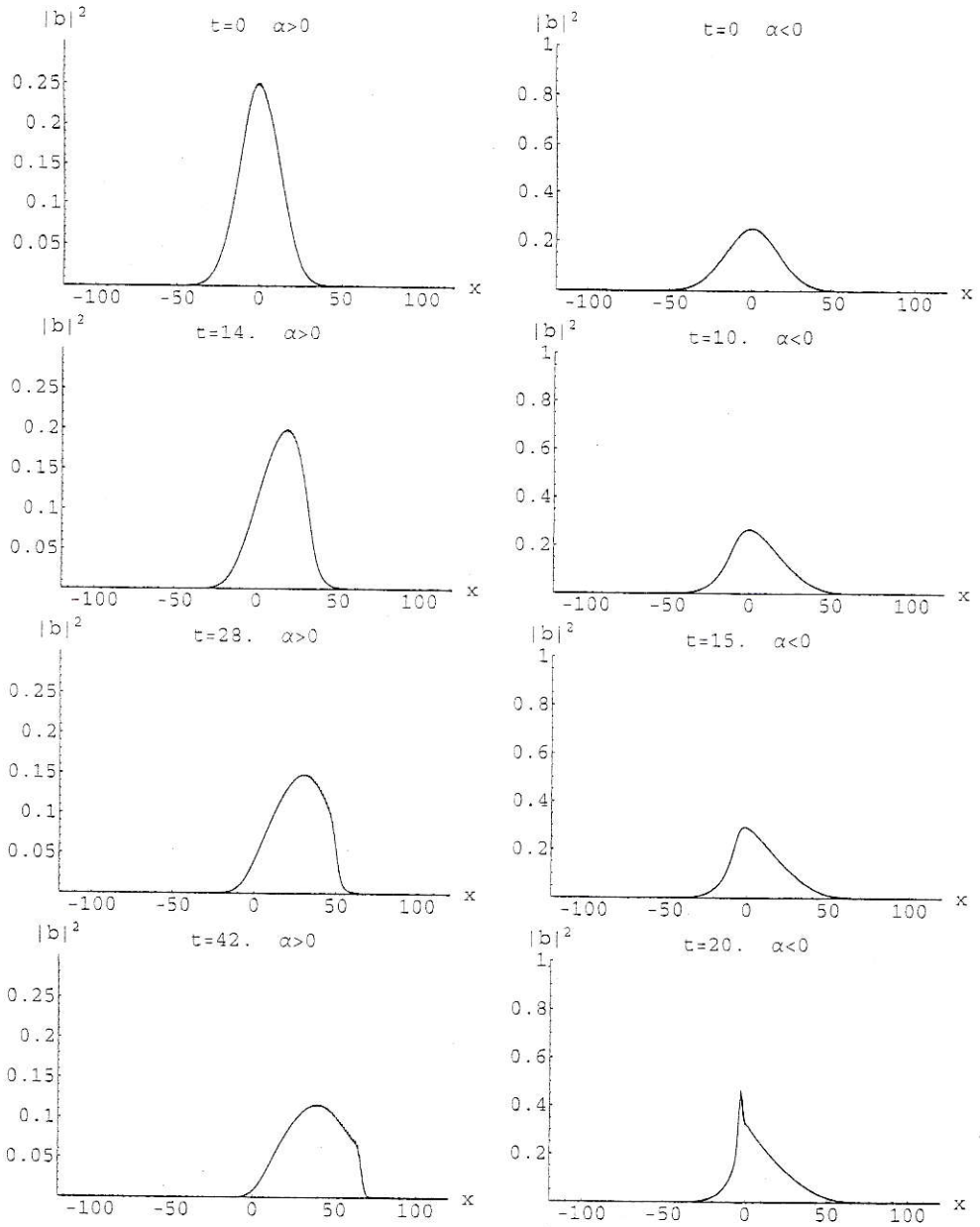


Figura 6.3: Evolución temporal de la condición inicial (6.4), con la no linealidad  $\alpha > 0$  (columna izquierda), donde se presenta un decaimiento de la amplitud del paquete; y con  $\alpha < 0$  (columna derecha), valor para el cual la solución crece inestablemente.

cuando  $\alpha > 0$ , la amplitud de la onda decae con el tiempo, mientras que el ancho de la modulación aumenta. La inestabilidad creciente también aparece cuando  $\alpha > 0$  y



$\mu < 0$ , como se observa en la figura 6.4, y el decaimiento cuando  $\alpha < 0$  y  $\mu < 0$ , por lo que en realidad hay dos situaciones posibles.

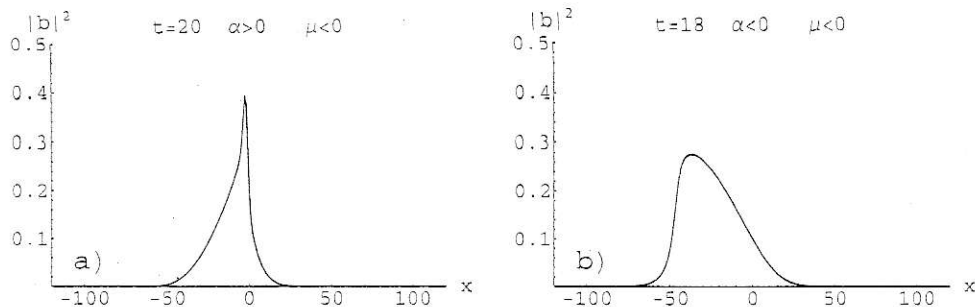


Figura 6.4: a) Inestabilidad en el caso  $\alpha > 0$  y  $\mu < 0$ . b) Decaimiento en el caso  $\alpha < 0$  y  $\mu < 0$ .

La energía del sistema está dada por la integral

$$E(t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} |b(x, t)|^2 dx. \quad (6.5)$$

La figura 6.5 muestra la función  $E(t)$  para los dos casos anteriores. Para ambos valores de  $\alpha$  la energía permanece constante, por lo que ésta sólo se dispersa ( $\alpha > 0$ ) o se concentra ( $\alpha < 0$ ). Esto, además de ser consistente con el cálculo analítico hecho en la sección 2.3, en el sentido de que la energía se conserva en la ecuación DNLS sin disipación ni forzamiento, es una buena prueba para considerar como confiables las soluciones obtenidas numéricamente.

Un hecho notable que se observa en ambas formas de evolución de la condición (6.4) es el traspaso de energía entre modos de oscilación. La figura 6.6 muestra la evolución temporal de la transformada de Fourier espacial de la solución en el caso  $\alpha = 1$  y  $\mu = \frac{1}{2}$ . La transformada de Fourier se calculó usando una grilla de 200 puntos. Ésta muestra cómo al avanzar el tiempo el modo principal de oscilación  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ , que en la grilla es el punto  $n_0 = 31$ , en torno al cual se agrupan un continuo

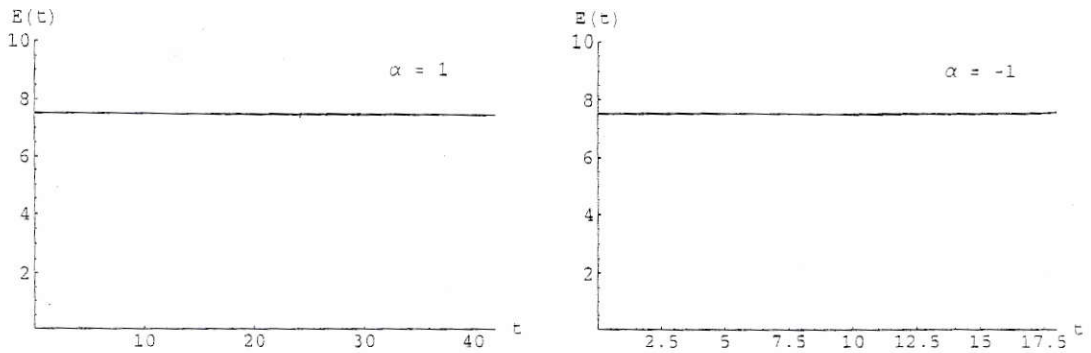


Figura 6.5: Energía  $E(t)$  en función del tiempo. a)  $\alpha > 0$ , b)  $\alpha < 0$ . En ambos casos la energía se conserva.

de modos que decrecen al alejarse de  $k_0$ , traspassa energía a dos grupos de modos, uno agrupado en torno a un valor  $k_+ > k_0$  de menor longitud de onda, y otro agrupado en torno a un valor  $k_- < k_0$  de mayor longitud de onda. Estos dos grupos se alejan entre sí a medida que avanza el tiempo, observándose que el modo dominante menor se estaciona en  $n_- = 26$ , mientras que el modo mayor tiende a desaparecer con el paso del tiempo. Este comportamiento es un fuerte indicio numérico del mecanismo necesario para la ocurrencia de un estado turbulento: el intercambio de energía entre modos de oscilación [44].

## 6.2. Sistema con disipación y forzamiento, $\eta \neq 0$ y $A \neq 0$

Como ya se dijo en el capítulo 4, el término  $\eta$  en la ecuación (6.1) representa la disipación, es decir, la tasa de pérdida de energía del sistema. Comparando (6.1) con la ecuación de difusión es claro que el signo de  $\eta$  debe ser negativo para que exista pérdida. De lo contrario el sistema absorbería energía espontáneamente, lo que no tiene sentido físico. Por otra parte, para estudiar la ecuación DNLS cuando

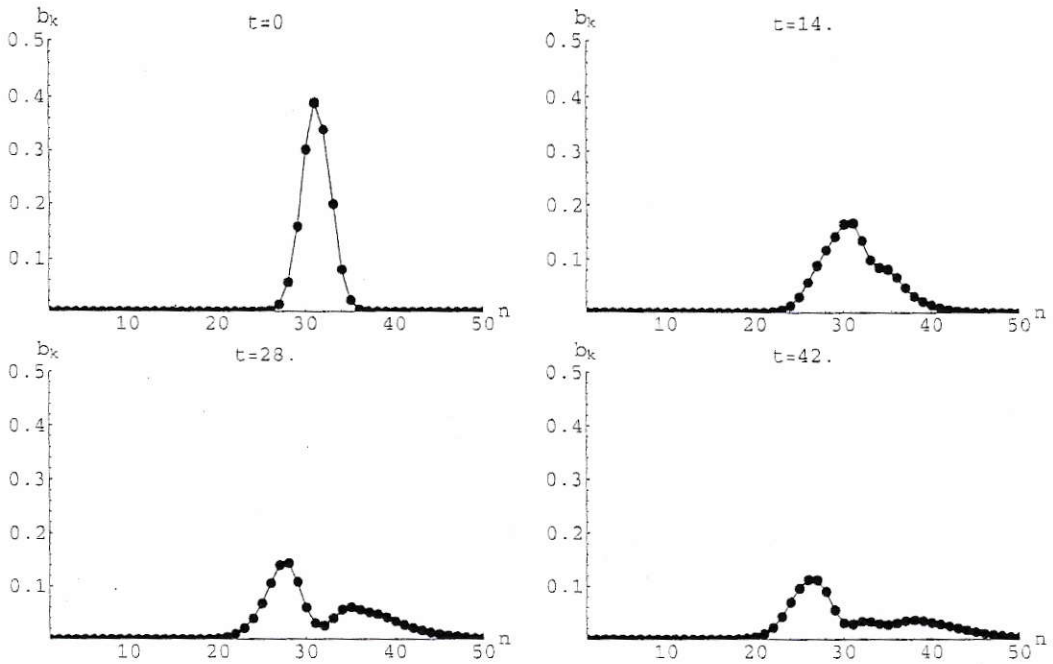


Figura 6.6: Evolución temporal de la transformada de Fourier espacial para el paquete gaussiano, en el caso del decaimiento. Se observa la dispersión de los modos de oscilación alrededor del modo principal  $k_0$ , correspondiente al punto  $n_0 = 31$  de la grilla.

existe inyección de energía (como el caso de una onda monocromática entrante), se hace necesaria la inclusión de disipación, pues de lo contrario las soluciones crecerían indefinidamente, lo que carece de interés físico.

### 6.2.1. Comportamiento espacial de las soluciones

Se integró numéricamente la ecuación (6.1) en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , con el modo de oscilación de la onda entrante  $k_0 = 2$ , para distintos valores de la amplitud, con  $\eta = -0.002$ , partiendo con  $b(x, 0) = 0$  como condición inicial. El tiempo de integración fue igual a cien períodos de oscilación  $\tau = \frac{2\pi}{k_0 V}$ , donde  $V = \frac{1}{2}$  es la velocidad de la onda entrante. La figura 6.7 muestra las partes real e imaginaria de  $b$ , correspondientes a las componentes  $b_y$  y  $b_z$  del campo magnético, para distintos

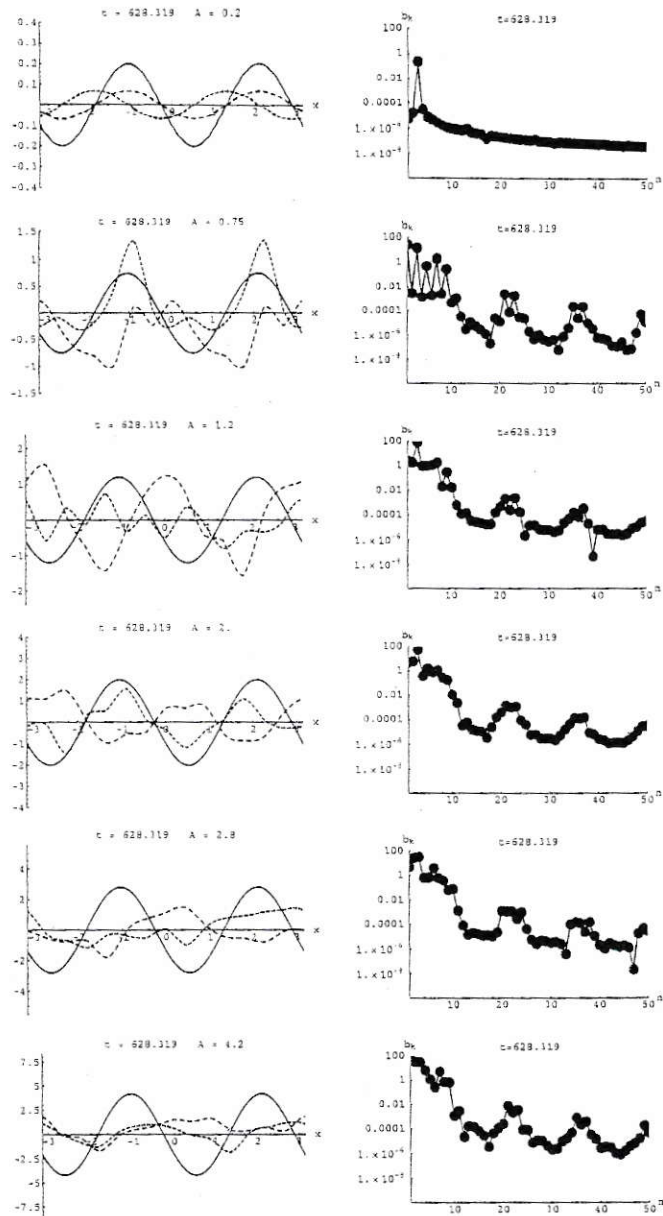


Figura 6.7: Soluciones numéricas de la ecuación DNLS forzada con disipación, para distintos valores de la amplitud de onda entrante. Se muestran la componentes  $b_y$  y  $b_z$  (líneas punteadas) del campo magnético (líneas punteadas) y la componente  $y$  de la onda entrante (línea sólida). a)  $A = 0.2$ , b)  $A = 0.75$ , c)  $A = 1.2$ , d)  $A = 2$ , e)  $A = 2.8$  y f)  $A = 4.2$ . La columna derecha muestra la transformada de Fourier espacial en cada caso.

valores de  $A \in [0.1, 5]$  cuando  $t_f = 100\tau$ . Estas figuras también son acompañadas de una de las componentes de la fuente. Además, se muestra la transformada de Fourier espacial de las soluciones, calculada usando una grilla de 200 puntos. Para los valores anteriores, el punto de la grilla en la transformada de Fourier correspondiente a la onda de entrada es  $n_0 = 3$ .

Cuando la amplitud es pequeña, como  $A = 0.2$ , las soluciones tienen el aspecto de ondas periódicas cuya longitud de onda es la misma que la de la onda entrante. Prueba de esto es que el único modo de oscilación espacial que se levanta en la transformada de Fourier es  $n_0 = 3$ . Este hecho muestra cómo para bajas amplitudes el sistema responde aproximadamente de forma lineal, y concuerda con lo mostrado en el capítulo 4, en el diagrama de bifurcación de la figura 4.7, que muestra que para amplitudes de forzamiento pequeñas, el sistema oscila con la frecuencia de la fuente. Cuando  $A = 0.75$  se observan modos de oscilación extras alrededor, que se traspan energía entre sí a medida que avanza el tiempo. El número de modos espaciales presentes en las soluciones va creciendo a medida que aumenta el valor de la amplitud  $A$ , apareciendo en grupos bien notorios, el primero de los cuales va desde  $n \approx 20$  a  $n \approx 25$ .

Para visualizar el desorden espacial de las soluciones en función del parámetro  $A$  se calculó el exponente de Lyapunov espacial promedio, definido en el apéndice A, para 250 valores de  $A$  en el intervalo  $[0, 5]$ . La figura 6.8 muestra el resultado de dicho cálculo, hecho cada vez en el tiempo  $t = 50\tau$ . El exponente de Lyapunov promedio mide el nivel de desorden espacial de las soluciones a partir de la ley diferencial que éstas obedecen [45]. Cuando  $A$  es pequeño  $\lambda \approx 0.0144$  y se mantiene relativamente constante hasta  $A \approx 0.8$ , donde presenta un repentino crecimiento hasta  $\lambda \approx 0.0147$ , bajando nuevamente casi de inmediato. Luego, cuando  $A \approx 1.2$ ,

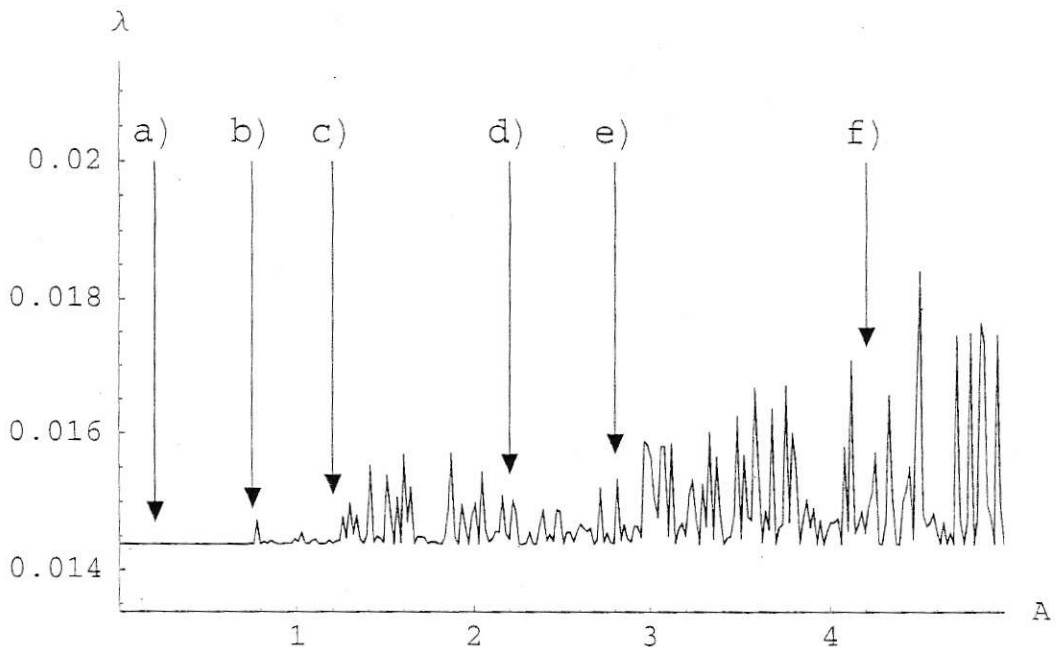


Figura 6.8: Exponente de Lyapunov promedio en función de la amplitud  $A$ . Las flechas marcan los distintos casos mostrados en la figura 6.9.

el exponente comienza a crecer, variando fuertemente a medida que cambia  $A$ , señal del inicio del desordenamiento espacial del sistema. Cuando  $A \approx 1.66$   $\lambda$  vuelve a descender al valor que tenía inicialmente, para volver a crecer en  $A \approx 1.83$ . A partir de aquí  $\lambda$  fluctúa entre 0.0144 y 0.0153 hasta  $A \approx 2.95$ , valor de la amplitud a partir del cual el exponente comienza a adquirir valores mayores a 0.016, aunque con zonas de disminución del valor en pequeños intervalos. Globalmente, la figura 6.8 indicaría que a partir de  $A \approx 3$  la estructura espacial de las ondas es más irregular que para valores de  $A$  más pequeños. Esta irregularidad espacial se debería a la presencia de un continuo de modos espaciales a partir de  $A \approx 1.2$  (figura 6.7). Esto sería un indicio de un comportamiento espacial caótico.

La figura 6.9 es un gráfico paramétrico (se graficó  $\{b_y(x, 100\tau), b_z(x, 100\tau)\}$ ) en el espacio de fase, desde  $x = -\pi$  hasta  $x = \pi$ ) de las seis soluciones anteriores. Cuando

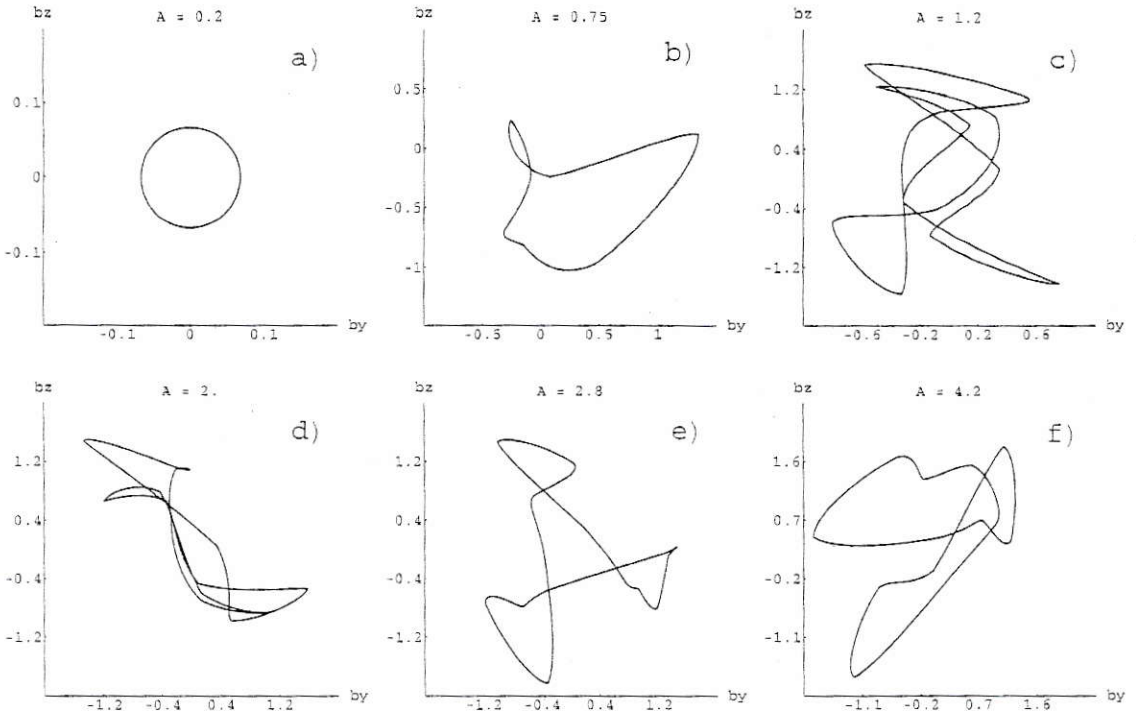


Figura 6.9: Aspecto de las ondas de Alfvén no lineales en el espacio de fase  $b_y$ - $b_z$ , al ser forzadas por una onda monocromática externa. a) Cuando la amplitud de dicha onda es pequeña, el sistema responde linealmente, generando una solución monocromática, coherente con la onda externa. b) La coherencia espacial ya se ha perdido cuando  $A = 0.75$ . c) y d) Al aumentar la amplitud del *driver* la onda comienza a adquirir un comportamiento espacial más irregular. e) Estado más ordenado presente en la región del parámetro previa al crecimiento del exponente de Lyapunov promedio. f) Solución para un valor de  $A$  en el que  $\lambda$  ha disminuido su valor dentro de una zona de desorden espacial.

$A = 0.2$  la onda se ve como una órbita cerrada en el espacio de fase que no se cruza consigo misma. Al aumentar la amplitud hasta  $A = 0.75$  la órbita aparece con un cruce sobre sí misma, signo de la aparición de los primeros modos resonantes. Aún para ese valor de  $A$  la solución no presenta un aspecto espacial muy complejo, lo que es acorde al valor del exponente de Lyapunov espacial promedio en este caso. La solución aparece con múltiples cruces sobre sí misma para  $A = 1.2$ . Cercano a

ese valor se produce uno de los aumentos de  $\lambda$  en la figura 6.8. Algo no muy distinto se observa cuando  $A = 2$ . Cuando  $A = 2.8$  la onda en el espacio de fase posee una forma más regular, lo que es acorde al valor de  $\lambda$  asociado. Algo similar ocurre con la solución en el caso  $A = 4.2$ .

### 6.2.2. Evolución temporal de las soluciones

Como se vio en la sección anterior, al aumentar el valor de la amplitud de la onda de entrada, ésta es capaz de excitar otros modos espaciales de oscilación del sistema, además del propio. Luego es de suponer que también ocurre lo mismo en el comportamiento temporal. Para estudiar en forma global la evolución temporal de las soluciones a medida que crece la amplitud se construyó un diagrama de bifurcación basado en un corte estroboscópico de las soluciones. Éste queda definido por el mapa

$$b_n = \{b_y(x_0, n\tau), b_z(x_0, n\tau)\}, \quad (6.6)$$

con  $x_0 = 0$  es un punto dentro del intervalo espacial de integración. La figura 6.10 muestra el resultado de dicho cálculo para valores de  $A$  entre 0 y 5.

Se puede apreciar que en un primer intervalo las soluciones poseen la frecuencia de la onda externa, lo que se ve como un punto para cada valor de la amplitud en el diagrama de bifurcación. En ese intervalo del valor del parámetro, la solución es un punto fijo del mapa definido en (6.6). Cuando  $A \approx 0.71785$  el sistema sufre una bifurcación, y las soluciones dejan de tener sólo el período de la onda externa, y se excitan otros modos de oscilación temporal, cuyas frecuencias no son conmensurables con la frecuencia de la onda externa, por lo que al hacer un corte estroboscópico de las soluciones el mapa aparece como un continuo de puntos. La figura 6.11a muestra un acercamiento a la región del parámetro donde ocurre la bifurcación. La zona más oscura indica que los puntos del mapa pasan más veces por ese lugar



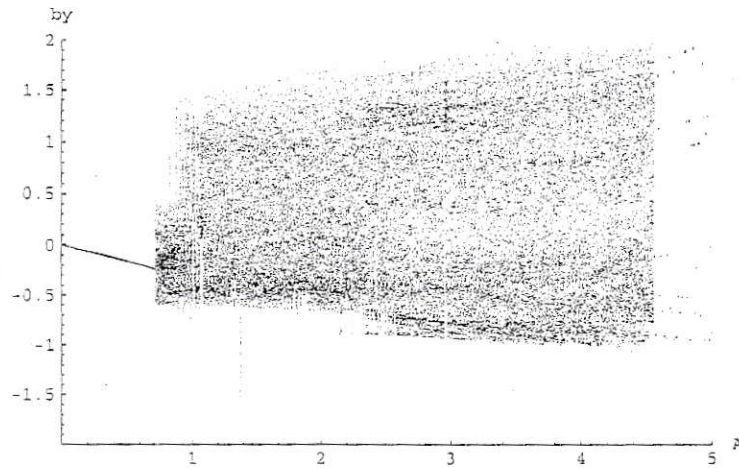


Figura 6.10: Diagrama de bifurcación basado en el mapa estroboscópico (6.6).

del espacio de fase, pero de forma intermitente. Lo anterior y el hecho de que esta bifurcación es similar a las observadas en el diagrama de bifurcación de la figura 4.10, sugieren que es una bifurcación *saddle-node* y la intermitencia observada sería del tipo Pomeau-Maneville [15]. El estado del sistema después de ocurrida la bifurcación es el conocido como cuasiperiodicidad [22], y se caracteriza por la presencia de dos o más frecuencias independientes entre sí en la solución. La figura 6.12 muestra el espectro de frecuencias de las soluciones antes y después de ocurrida la transición observada en el diagrama de bifurcación. Antes, el espectro presenta el máximo correspondiente a la frecuencia de forzamiento  $\omega_0 = 1$ , y después se observa la aparición de una nueva frecuencia,  $\omega_1 = 11.04$ . La cuasiperiodicidad observada en las soluciones luego de esta primera bifurcación indicaría la presencia de un segundo atractor. Una prueba de ello es que al seguir aumentando la amplitud, ocurre una nueva transición cuando  $A \approx 0.848$ , aumentando el tamaño de la región del espacio de fase visitada por los puntos del mapa (figura 6.11b). Lo anterior sugiere que las soluciones en esta región del parámetro  $A$  están visitando las cuencas de atracción de los atractores existentes.

Volviendo a la figura 6.10, un nuevo crecimiento de la región del espacio de fase que contiene a los puntos del mapa ocurre cuando  $A = A_c \approx 2.3202$ .

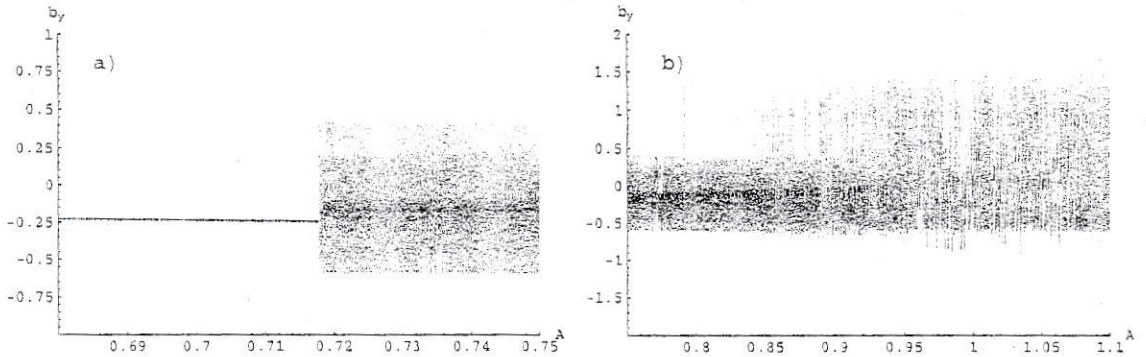


Figura 6.11: Acercamientos a dos zonas del parámetro  $A$ . a) Se observa la brusca pérdida de periodicidad del sistema. b) Repentino crecimiento del atractor. Se observan además pequeñas ventanas, donde la cuasiperiodicidad contiene menos frecuencias.

Hasta antes de esta última bifurcación, se observan dos comportamientos relevantes. Primero, la existencia de ventanas dentro del diagrama, que se aprecian como bandas más claras en el diagrama de bifurcación, y segundo, el incremento de las frecuencias presentes en los estados cuasiperiódicos a medida que aumenta el valor del parámetro. La figura 6.13a muestra el espectro de frecuencias de una ventana en  $A \approx 0.9722$ , donde las frecuencias presentes aparecen claramente localizadas (sin otros máximos alrededor). En la figura 6.13b se observa que antes del último crecimiento del atractor la cantidad de frecuencias presentes en la solución se ha multiplicado dramáticamente, aunque los modos más altos son múltiplos de las frecuencias más bajas ya presentes en el sistema. Una vez ocurrida la transición, la densidad de frecuencias aumenta hasta llegar al continuo, lo que significa que las soluciones presentan un comportamiento temporal caótico.

La última bifurcación que se observa en la figura 6.10 ocurre cuando  $A \approx 4.552$ . En este punto las soluciones se vuelven periódicas en el tiempo, pero la fase en el

corte estroboscópico para cada valor de  $A$  es distinta, por lo que no se forma una línea continua como ocurre para  $A < 0.71785$ .

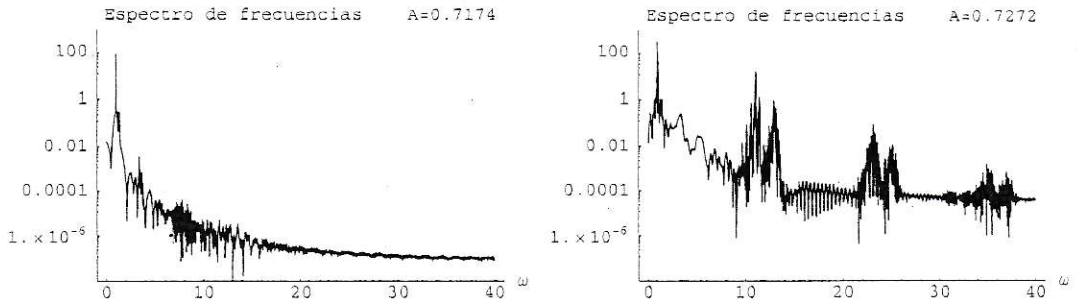


Figura 6.12: Espectros de frecuencia obtenidos a partir del comportamiento temporal de las soluciones del sistema para dos valores de  $A$ . a) Cuando  $A = 0.7174$  la única frecuencia es la de la onda externa,  $\omega_0 = 1$ . b) Cuando  $A > 0.71785$ , las soluciones son cuasiperiódicas, y el espectro presenta dos máximos en  $\omega_1 = 11.04$  y  $\omega_2 = 2.9$ , frecuencias que son independientes del forzamiento  $\omega_0$ .

Una estrategia posible para aclarar lo que ocurre en las distintas bifurcaciones es mirar el diagrama de bifurcación que se obtiene a partir del espectro de frecuencias de las soluciones. La figura 6.14a muestra dicho diagrama de bifurcación en el intervalo del espacio de parámetros  $A \in [0.1, 5]$ . El eje horizontal representa la variación del parámetro  $A$ , mientras el eje vertical marca el valor de las frecuencias presentes en el sistema. Se observa a partir de  $A > 0.71785$ , en la figura 6.14b la aparición de la nueva frecuencia  $\omega_1 = 11.04$ , ésta junto a la frecuencia del forzamiento  $\omega_0 = 1$ , coexisten solas hasta  $A \approx 0.848$ . A partir de este valor aparecen nuevas frecuencias en las soluciones, que se aparecen a intervalos en el diagrama. Esto último se puede entender debido a que se está usando una sola condición inicial para integrar la ecuación, por lo que si existe más de un atractor, dicha condición puede llevar a distintos atractores para diferentes valores de  $A$ , y esto a su vez explicaría la intermitencia observada en el diagrama 6.11b.

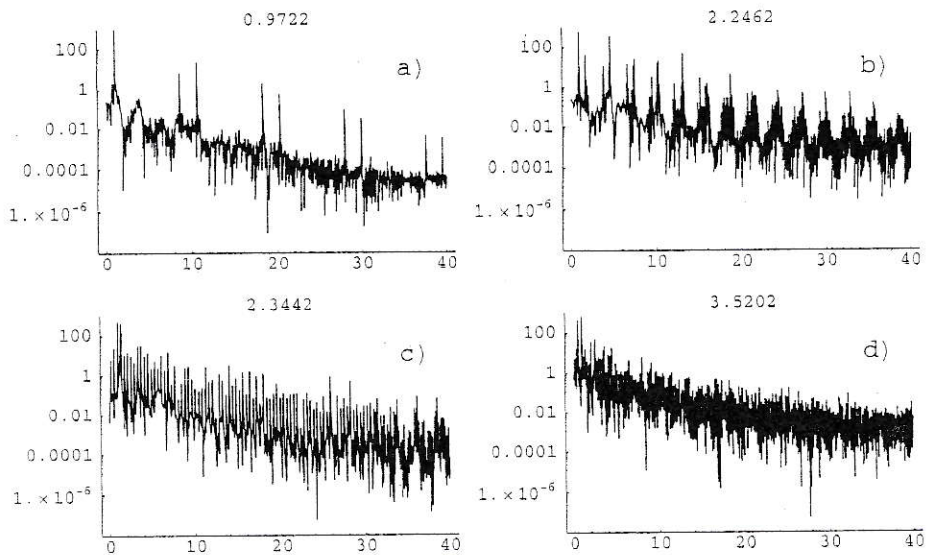


Figura 6.13: Secuencia de espectros de frecuencia, para distintos valores de  $A$ . a) Ventana de cuasiperiodicidad, donde las frecuencias aparecen como máximos bien localizados. b) Estado cuasiperiódico antes de la bifurcación en  $A = A_c$ . Aún es posible distinguir una secuencia de frecuencias puntuales en el espectro. c) Gran cantidad de frecuencias aparecen inmediatamente después de la bifurcación ocurrida cuando  $A = A_c$ , d) llegando al continuo a través de la excitación de modos intermedios, lo que indica que el sistema se comporta de forma caótica en el tiempo.

La figura 6.14c muestra la región de  $A$  en la cual ocurre el segundo crecimiento observado en el diagrama de la figura 6.10. Aquí vuelve a ocurrir una multiplicación repentina del número de frecuencias presentes en el sistema, a partir de  $A \approx 2.3202$ . A diferencia de la bifurcación ocurrida antes, la cantidad de frecuencias y su densidad es mucho mayor, concentrándose en el intervalo  $[0, 5]$  del espacio de frecuencias (eje vertical de las figuras 6.10, más cercano a la frecuencia de la onda externa). Esto quiere decir que a medida que aumenta  $A$  en esta región la energía es disipada por los modos de oscilación altos, mientras un atractor caótico se forma en la zona de frecuencias bajas del espectro temporal. Un hecho importante es la relación entre las figuras 6.8 y 6.14a. La primera da cuenta del desorden espacial de las soluciones

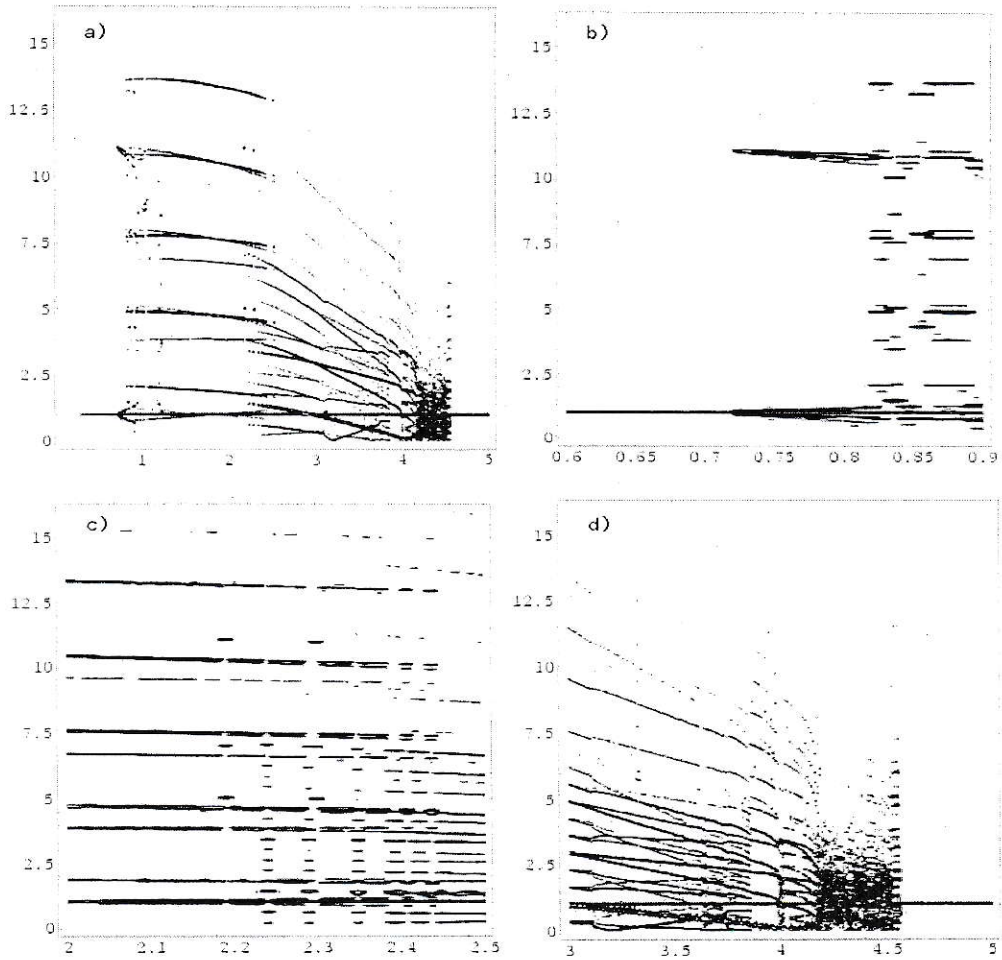


Figura 6.14: a) Diagrama de bifurcación construido a partir del espectro de frecuencias temporales de las soluciones para valores de  $A \in [0.1, 5]$ . El parámetro  $A$  varía en el eje horizontal, mientras el eje vertical corresponde al espacio de frecuencias. b) Acercamiento a la región del parámetro  $A$  donde ocurre la primera bifurcación, donde se aprecia la aparición de la frecuencia  $\omega_1 = 11.04$  en  $A \approx 0.71785$ . c) Diagrama de bifurcación en el intervalo  $A \in [2, 2.5]$ , dentro del cual ocurre la segunda bifurcación, aumentando el número de frecuencias presentes en el sistema. d) Diagrama en el intervalo  $A \in [3, 5]$ . El valor de las frecuencias comienza a bajar y concentrarse en el intervalo  $[0, 5]$  del espacio de  $\omega$ . A partir de  $A \approx 4.2$  las frecuencias presentes en el sistema forman un continuo hasta  $A \approx 4.552$ , donde el sistema vuelve a tener sólo la frecuencia de la fuente.

en función del parámetro  $A$  mediante el exponente de Lyapunov espacial promedio. El exponente sufre un brusco aumento cuando  $A \approx 0.8$ , valor cercano a la primera bifurcación observada en el diagrama del espectro de frecuencias temporales. Esto indica que el desorden espacial del sistema está correlacionado con la presencia de modos de oscilación temporales extras. La región  $A \in [3, 5]$  en la figura 6.8 contiene los valores más altos del exponente de Lyapunov espacial, zona que coincide con el intervalo  $A \in [4.2, 4.552]$  de caos temporal encontrado en el diagrama del espectro de frecuencias. Esto indicaría que en esa zona, donde coinciden un alto desorden espacial y caos temporal, existe caos espacio-temporal, en otras palabras, el sistema se comporta de forma turbulenta.

La secuencia de bifurcaciones a medida que aumenta la amplitud del forzamiento puede ser representada por el siguiente esquema:

*órbita periódica*  $\rightarrow$  *cuasiperiodicidad*  $\rightarrow$  *caos temporal*  $\rightarrow$  *caos espacio-temporal*  
(*turbulencia*)  $\rightarrow$  *órbita periódica*.

Una secuencia similar ha sido descrita por [46] para la ecuación disipativa y forzada de onda larga al estudiar los diferentes estados de las soluciones en función de la amplitud del forzamiento. Además, en ese trabajo se sugiere que la transición de caos temporal a caos espacio-temporal (*turbulencia*) se debe a una crisis que ocurre tras la tangencia entre el atractor temporalmente caótico y una órbita periódica inestable. Para poder entender la naturaleza de las transiciones mostradas en esta sección sería necesario aislar las órbitas periódicas inestables así como sus variedades. Estos tópicos no fueron abordados en este trabajo, quedando propuestos para un trabajo futuro.

### 6.3. Velocidad de fase

Una aproximación fuerte que se hizo en el capítulo 4 fue que la velocidad de propagación (y también de fase) es constante en las soluciones estudiadas allí. Por otra parte, esa misma aproximación llevó a mostrar que existen soluciones que se propagan que pueden ser ondas periódicas o solitones, siendo la velocidad de propagación un parámetro libre, pudiendo en principio coexistir dos de estas soluciones con distintas velocidades en el sistema sin aproximación. Por otra parte, se conjetura que

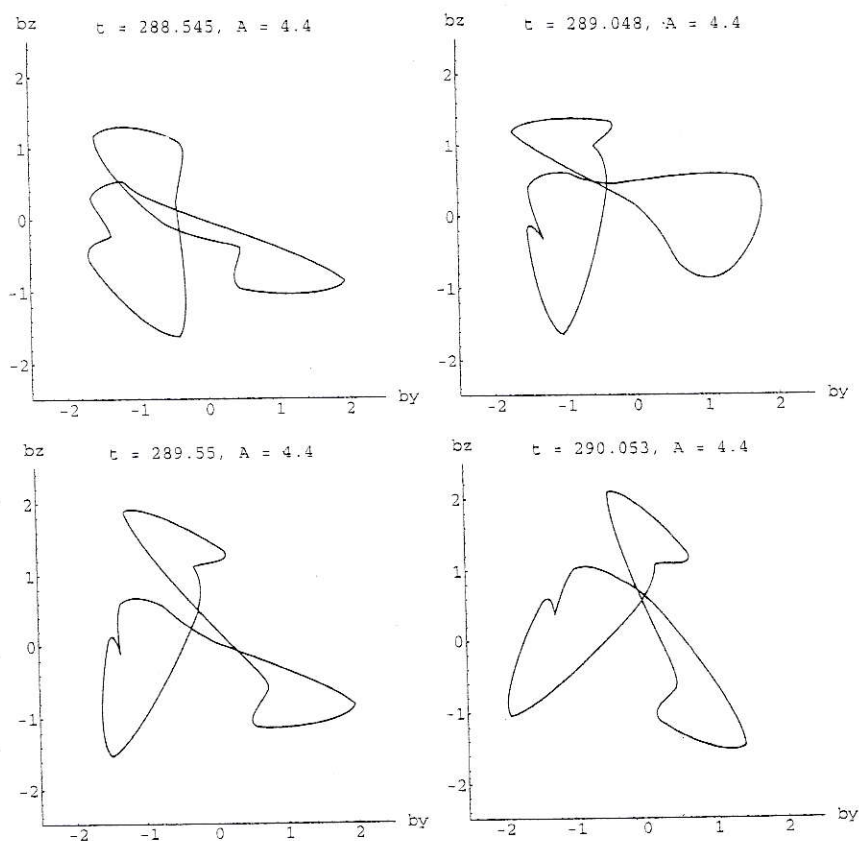


Figura 6.15: Forma de  $b$  en el espacio de fase  $b_y$ - $b_z$  en cuatro instantes de tiempo, cuando  $A = 4.4$ . La onda está rotando y además va cambiando su forma con el tiempo.

las transiciones observadas en los diagramas de bifurcación temporales son producto

de la consecutiva interacción de ondas de distinta frecuencia, es decir, cuya fase evoluciona temporalmente distinto [14, 42]. Para estudiar específicamente el problema de la turbulencia se considerará la solución obtenida cuando  $A = 4.4$ , cuyo comportamiento temporal es totalmente caótico, y se comparará con la solución ordenada obtenida con  $A = 4.6$ . Las figuras 6.15 y 6.16 muestran cuatro instantes en el tiempo

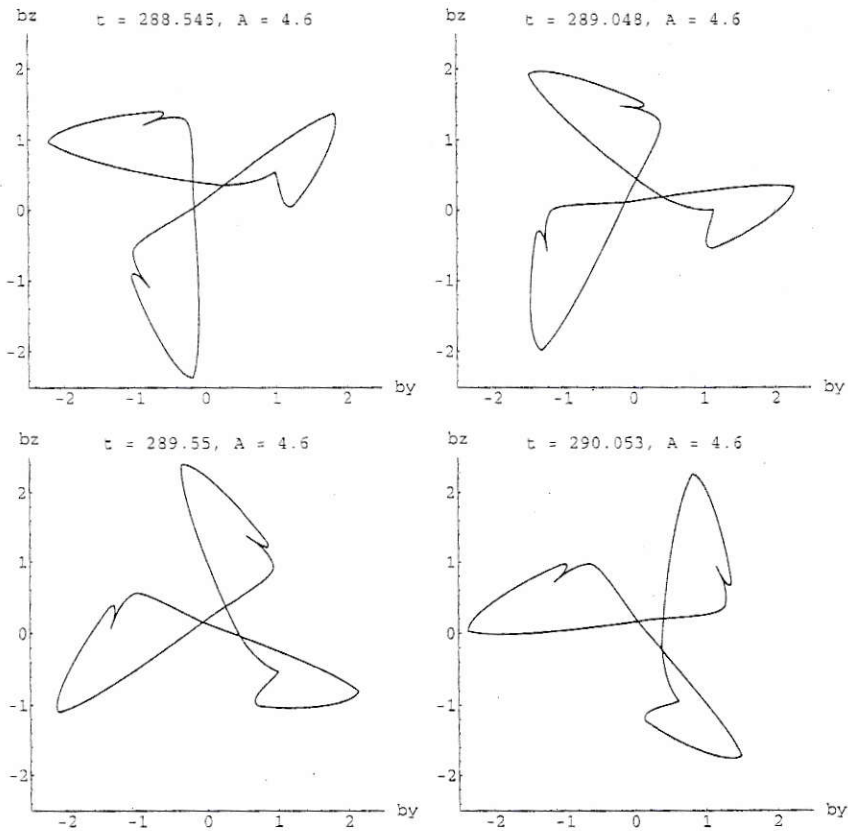


Figura 6.16: Forma de  $b$  en el espacio de fase  $b_y$ - $b_z$  en cuatro instantes de tiempo, cuando  $A = 4.6$ . La onda está rotando en el espacio de fase, sin cambiar su forma.

para las soluciones correspondientes a  $A = 4.4$  y  $4.6$ , respectivamente, en el espacio de fase  $b_y$ - $b_z$ . Cuando  $A = 4.4$  el sistema posee un comportamiento temporal completamente caótico, y espacialmente se forma la estructura de la figura, que gira y además cambia de forma al hacerlo, siendo ambos movimientos irregulares. En cam-



bio, cuando  $A = 4.6$ , temporalmente el sistema es periódico, por lo que la estructura espacial de la solución no varía de forma con el tiempo, sino sólo de orientación.

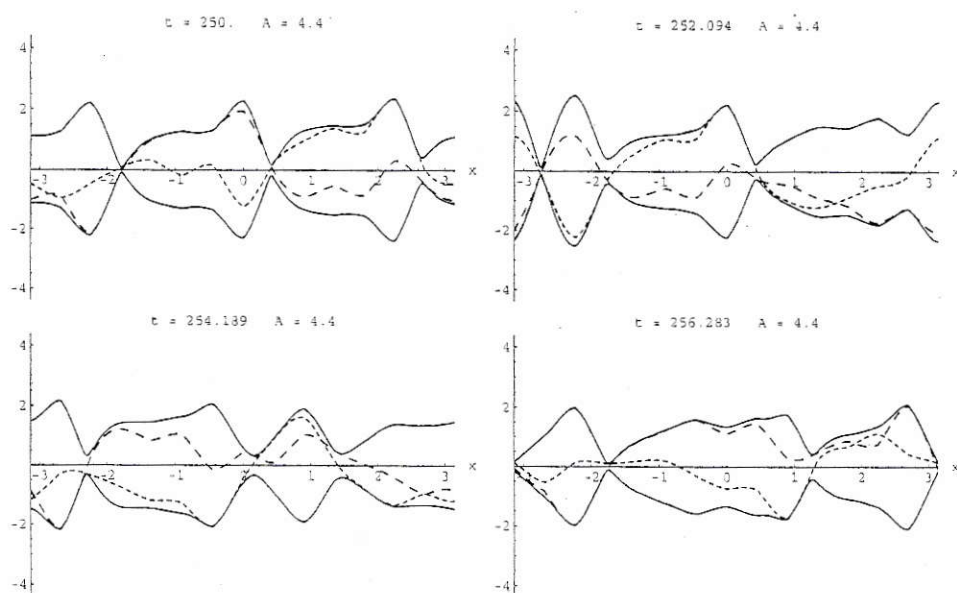


Figura 6.17: Forma espacial de las componentes  $b_y$  y  $b_z$  (líneas punteadas) de la solución cuando  $A = 4.4$ , junto a la envolvente  $|b|$  (línea sólida) para cuatro instantes de tiempo dentro de un período de oscilación del forzamiento. En este caso el sistema posee un comportamiento turbulento.

Por otro lado, las figuras 6.17 y 6.18 muestran las componentes  $b_y$  y  $b_z$  de las soluciones, junto con la envolvente  $|b|$ , para los dos valores de  $A$  considerados. Dos hechos que se observan en la figura 6.18 llaman la atención: la envolvente es invariante en el tiempo, así como lo es la forma de la onda en el espacio de fase, y además es periódica en el espacio. Es decir, la onda externa excita una onda cuya envolvente está modulada periódicamente, similar a las mostradas en las figuras 2r y 2s en [8]. La forma de la onda en la figura 6.17 sugiere entonces que previo a la bifurcación que lleva al sistema a tener el estado ordenado final, la onda con envolvente modulada convive con otros modos, que a su vez pueden ser ondas con envolvente modulada

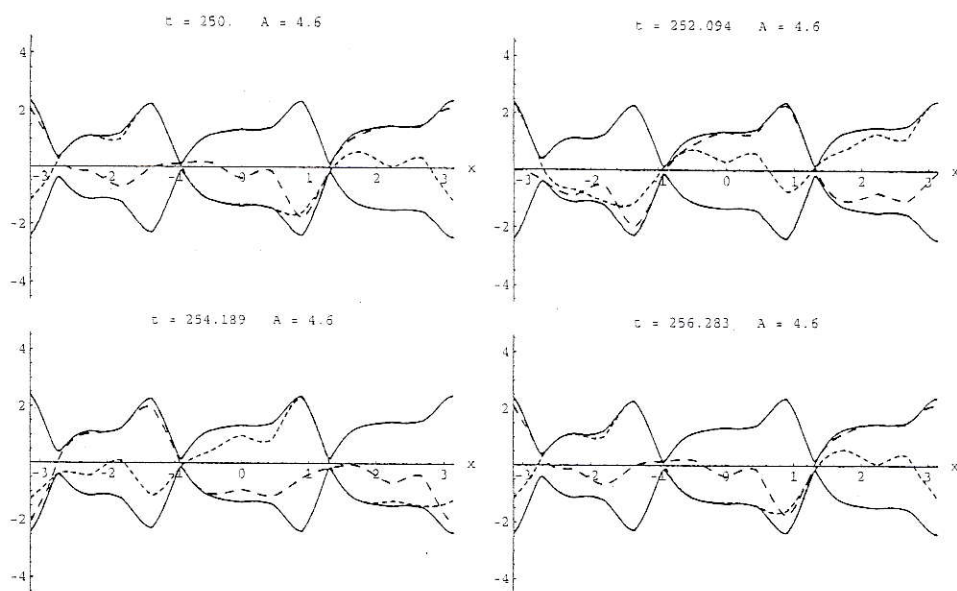


Figura 6.18: Forma espacial de las componentes  $b_y$  y  $b_z$  (líneas punteadas) de la solución cuando  $A = 4.6$ , junto a la envolvente  $|b|$  (línea negra) para cuatro instantes de tiempo. La envolvente se mantiene invariante en el tiempo y en el espacio, además de ser periódica.

o solitones. En ambos casos, esto debiera reflejarse en la forma de la velocidad de propagación en función del tiempo, puesto que la velocidad de propagación es un parámetro que define en parte la familia de este tipo de soluciones.

La figura 6.19 muestra la fase y la velocidad de propagación como función del tiempo para  $A = 4.4$  y  $A = 4.6$ , respectivamente. Se ve que tanto la fase como la velocidad de la onda cuando  $A = 4.4$  (zona de parámetros turbulenta), presentan una evolución irregular. Es decir, el estado caótico observado en el comportamiento espacial se debería a turbulencia de fase, que haría “saltar” al estado del sistema en soluciones con diferente velocidad de propagación. Cuando  $A = 4.6$  (estado de modulación periódica), la fase crece suavemente con el tiempo, aunque al examinar la velocidad se observa que ésta oscila, probablemente debido a la modulación periódica

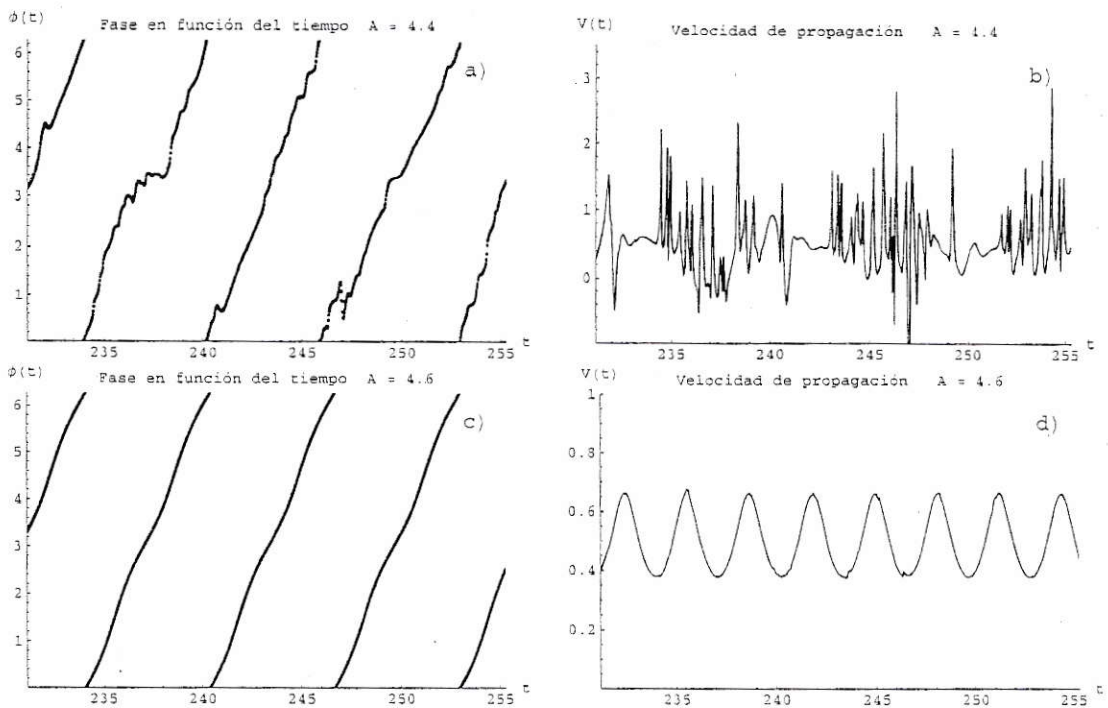


Figura 6.19: a) Fase en función del tiempo y b) velocidad de propagación en función del tiempo cuando  $A = 4.4$ , el sistema se encuentra en estado turbulento. c) Fase y d) velocidad de propagación en función del tiempo cuando  $A = 4.6$ , el sistema posee un comportamiento regular en el espacio y el tiempo.

espacial de la envolvente. Aun así, el valor promedio de la velocidad  $\langle V \rangle \approx 1/2$  coincide con la velocidad de la fuente.

## Capítulo 7

# Ecuación DNLS forzada con ondas localizadas

En el capítulo 6 se estudiaron las soluciones de la ecuación DNLS en presencia de una onda viajera monocromática. Se observó que a partir de cierta amplitud de la onda, con el resto de los parámetros fijos, el sistema sufre una serie de bifurcaciones, lo que finalmente provoca que las soluciones presenten un comportamiento espacio-temporal caótico. Como muestra el análisis de Fourier de estas soluciones (figura 6.13), coexisten en ese estado un continuo de modos de oscilación, los cuales pueden ser considerados como la base que genera las soluciones turbulentas observadas en el intervalo de parámetros estudiada. La idea expuesta en [42] propone que los solitones que son solución de la ecuación DNLS sin disipación ni forzamiento (6.1) forman dicha base, considerando que el índice del espacio de proyección es la velocidad de propagación. Luego, una forma de aislar las estructuras que componen las soluciones turbulentas que caracterizan a la ecuación forzada puede ser forzándola con una fuente  $S(x, t)$  de estructura localizada. En este capítulo se estudiará la respuesta del sistema al ser forzado con una fuente de este tipo.

## 7.1. DNLS forzada por un paquete gaussiano

La expresión de un paquete de onda cuya amplitud está modulada por una envolvente gaussiana viajando a lo largo del eje  $x$  es

$$S(x, t) = A_0 e^{i \frac{2\pi(x - V_s t)}{\lambda}} e^{-\left(\frac{x - V_s t}{L}\right)^2}, \quad (7.1)$$

donde  $A_0$  es la amplitud máxima del paquete,  $\lambda$  es la longitud de onda característica,  $L$  es el parámetro asociado al ancho del paquete, y  $V_s$  es la velocidad de propagación de la envolvente.

Se usó la expresión (7.1) como fuente en la ecuación DNLS 6.1. Como la fuente depende de cuatro parámetros, se integró la ecuación DNLS para distintos valores de éstos, dejando en cada caso el resto de los parámetros fijo, para así poder apreciar cómo cambia la respuesta del sistema en función de los parámetros característicos de la fuente.

En cada caso se integró la ecuación (6.1) en el intervalo espacial  $[-150, 1000]$  usando  $\alpha = 1$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$  y  $\eta = -0.002$ , que son los valores para dichos parámetros usados en el capítulo 6.

### 7.1.1. Dependencia respecto de $L$

Primero se dejaron fijos los valores de la amplitud, la longitud de onda y la velocidad, para mover el parámetro  $L$ , que controla el ancho de la envolvente gaussiana, en un intervalo de valores pequeños comparados con el intervalo de integración espacial. En este caso se usó  $A_0 = 0.5$ ,  $\lambda = 5$  y  $V_s = 0.5$ . La figura 7.1 muestra la forma espacial de la densidad de energía,  $|b|^2$ , de las soluciones (línea sólida) para distintos valores de  $L$ , en el instante en que la amplitud de ésta es máxima. La fuente está graficada con líneas punteadas. Tanto la forma como la amplitud de las soluciones

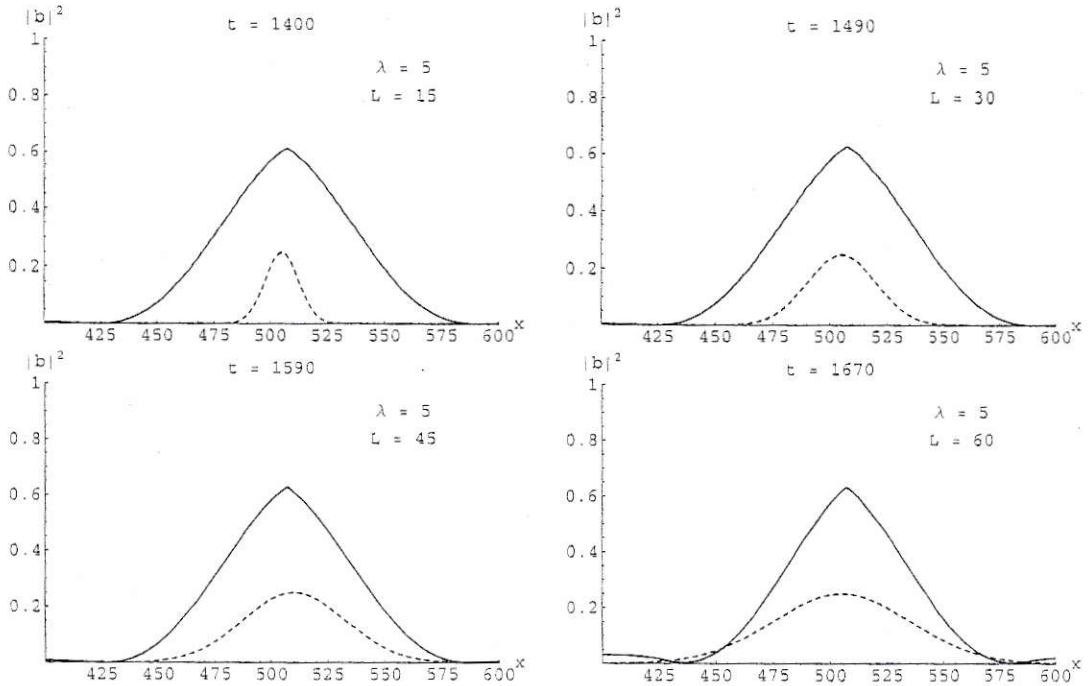


Figura 7.1: Forma de la envolvente  $|b|^2$  (línea punteada) para diferentes valores del ancho  $L$  de la onda gaussiana (línea sólida). Tanto la forma como la amplitud no varían cualitativamente al cambiar dicho parámetro en el intervalo  $L \in [15, 60]$ .

no se ve alterada al variar el ancho de la fuente.

Cuando  $L$  tiende a infinito, la fuente gaussiana toma la forma de una fuente monocromática. Este caso corresponde al estudiado en el capítulo 6 con el resto de los parámetros fijos. En el caso estudiado aquí el ancho del paquete gaussiano en todos los casos de la figura 7.1 es más pequeño que el intervalo espacial de integración pues interesa saber la respuesta del sistema al estímulo de una fuente de energía localizada.

### 7.1.2. Dependencia respecto de $\lambda$

En la figura 7.2 se aprecia la forma de  $|b|^2$  para distintos valores de  $\lambda$ , con  $A_0 = 0.5$ ,  $L = 45$  y  $V_s = 0.5$ . Al aumentar la longitud de onda, es decir, cuando disminuye el número de oscilaciones espaciales de la fuente por unidad de largo, la amplitud de la

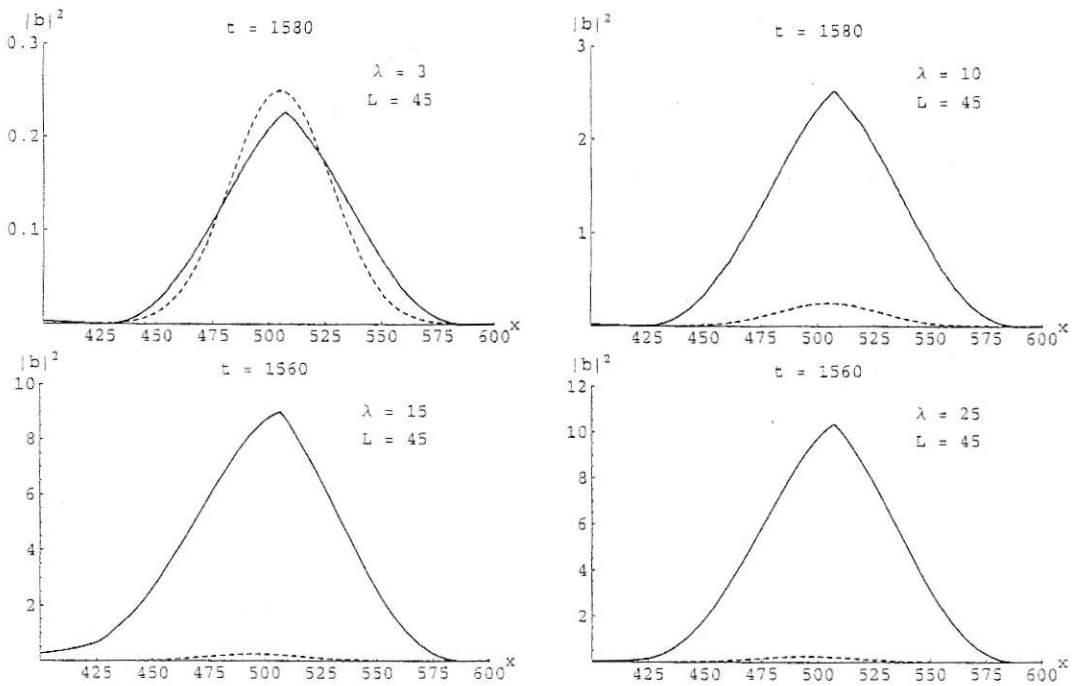


Figura 7.2: Forma de las soluciones para distintos valores de la longitud de onda  $\lambda$ . Al aumentar este parámetro, la amplitud de la solución aumenta rápidamente.

densidad de energía aumenta, aunque la distribución mantiene su forma.

Para analizar en detalle cómo depende la amplitud de  $|b|^2$  con la longitud de onda de la fuente, se calculó la amplitud máxima  $|b|_{\max}^2$  para valores de  $\lambda$  en el intervalo  $[2, 35]$ . La figura 7.3 muestra el resultado de dicho cálculo. Se observa que para valores de  $\lambda$  menores que 13 la energía aumenta suavemente, para luego presentar bruscos saltos a ciertos intervalos, a medida que aumenta  $\lambda$ . Este hecho indicaría que el traspaso de energía es más eficiente para ciertos valores precisos de la longitud de onda de la fuente. En otras palabras, existe resonancia entre la fuente y el sistema.

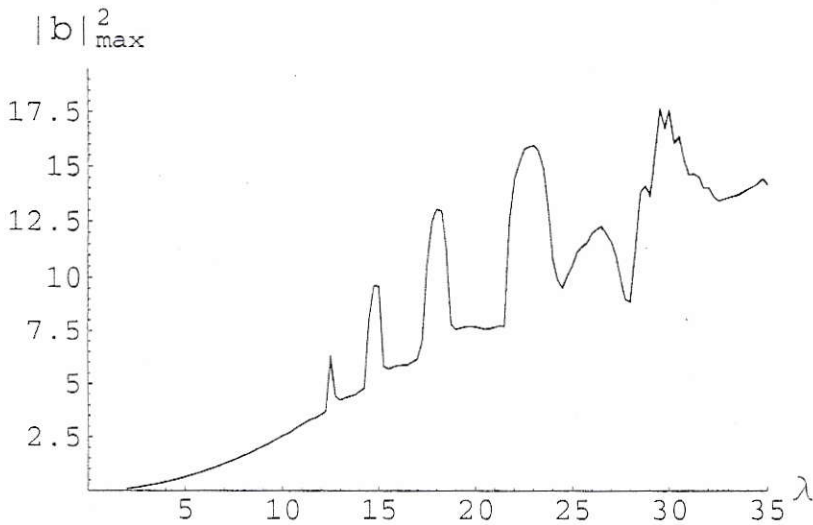


Figura 7.3: Gráfico de la densidad de energía máxima en el espacio vs. la longitud de onda de la fuente. La figura presenta un crecimiento suave de la amplitud máxima de la energía para valores de  $\lambda$  pequeños, para luego dar paso a la aparición de máximos, que indicarían resonancia entre el sistema y la fuente.

### 7.1.3. Dependencia respecto de $V_s$

La velocidad de propagación de la fuente fue variada usando los valores  $A_0 = 0.5$ ,  $\lambda = 5$  y  $L = 15$  para el resto de los parámetros. En la figura se observa la respuesta del sistema para diferentes valores de  $V_s$ . Al aumentar la velocidad de propagación, la amplitud de las soluciones va decreciendo, lo que hace conjeturar que mientras más rápida es la fuente, menor es la energía que ésta traspasa al sistema.

En la figura 7.5 se muestran las curvas  $|b|_{\max}^2$  versus  $V_s$ , para dos valores de  $\lambda$ . En ambos casos, para valores pequeños de  $V_s$  la energía crece rápidamente, decayendo asintóticamente a cero mientras más grande es la velocidad de la fuente. Existe una diferencia entre ambas curvas en el rango de velocidades pequeñas ( $V_s < 1$ ), es decir, cuando el sistema absorbe más energía. Cuando  $\lambda = 5$  la curva crece suavemente a medida que  $V_s \rightarrow 0$ . En cambio cuando  $\lambda = 10$ , la curva frena su crecimiento para



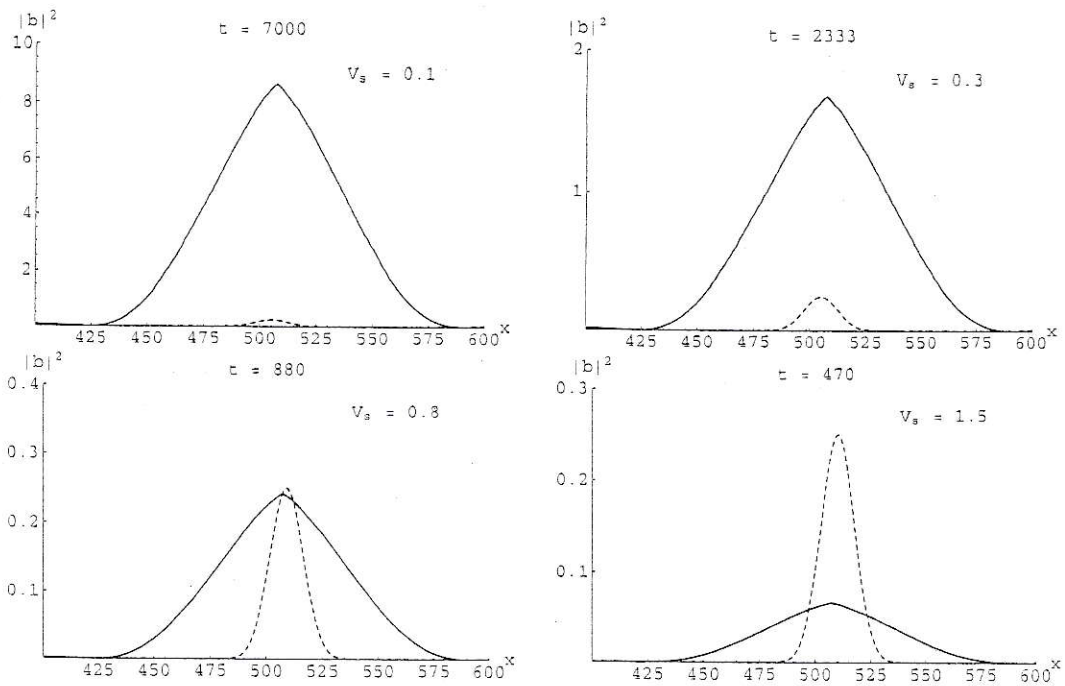


Figura 7.4: A medida que la velocidad de propagación de la fuente aumenta, a ésta se le vuelve más difícil el traspaso de energía al sistema, puesto que para valores más altos de  $V_s$  la amplitud de la envolvente (línea sólida) es más pequeña.

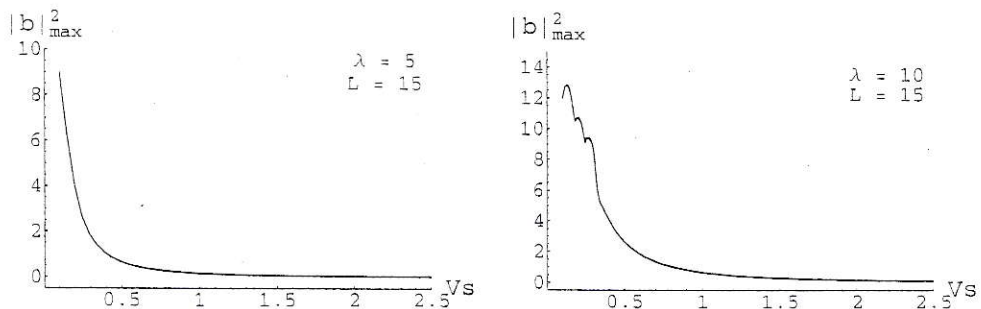


Figura 7.5: Curva de la densidad de energía máxima en el espacio vs. la velocidad de propagación de la fuente para dos valores de  $\lambda$ . A medida que aumenta la velocidad, disminuye la energía captada por el sistema. Para valores altos de  $V_s$  la curva muestra un comportamiento inversamente proporcional en ambos casos, pero en el segundo caso se observan irregularidades cuando  $V_s < 0.3$ .

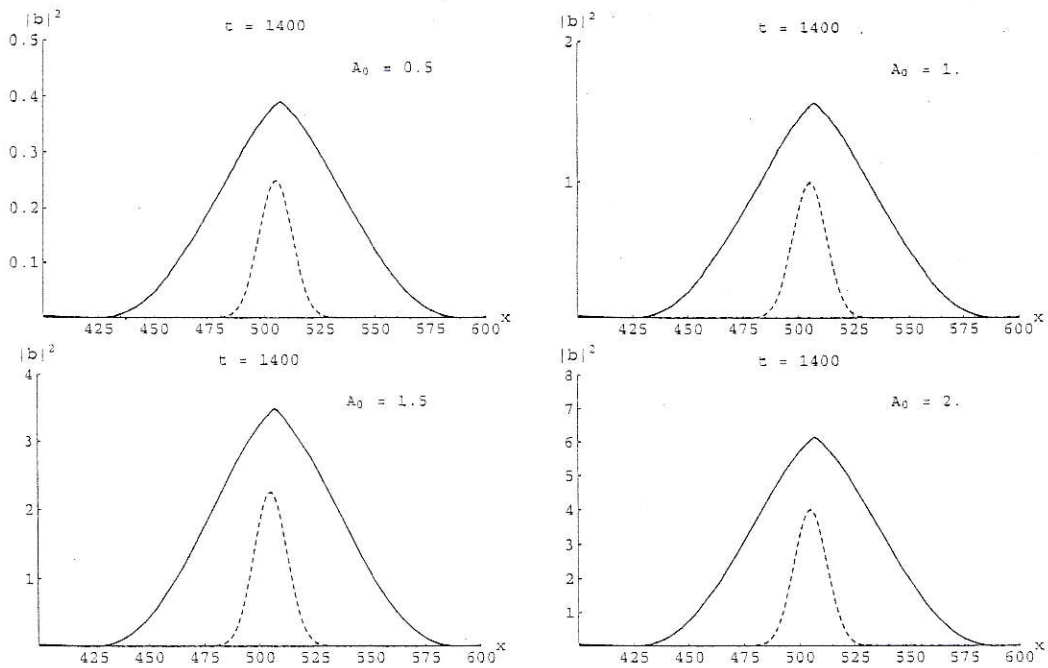


Figura 7.6: La amplitud de las soluciones (línea sólida) presenta un crecimiento cualitativamente lineal a medida que la amplitud de la fuente  $A_0$  (línea punteada) aumenta.

valores bien precisos de la velocidad de propagación de la fuente.

#### 7.1.4. Dependencia respecto de $A_0$

Por último, al fijar los parámetros  $\lambda = 4$ ,  $L = 15$  y  $V_s = 0.5$ , se puede ver cómo cambian las soluciones al variar la amplitud  $A_0$  de la fuente gaussiana. En la figura 7.6 se observa una clara correlación entre  $A_0$  y la amplitud de  $|b|^2$ , que indica que la amplitud de la fuente tan sólo es un factor de escala de las soluciones, puesto que la naturaleza de éstas cualitativamente permanece inalterada. Este hecho no está en contradicción con lo expuesto en el capítulo 6, pues cabe esperar que el efecto de una fuente localizada ( $L \ll x_{\max} - x_{\min}$ ) sobre el sistema sea distinto al de una onda monocromática. Esta diferencia motiva en parte el trabajo hecho en este capítulo.

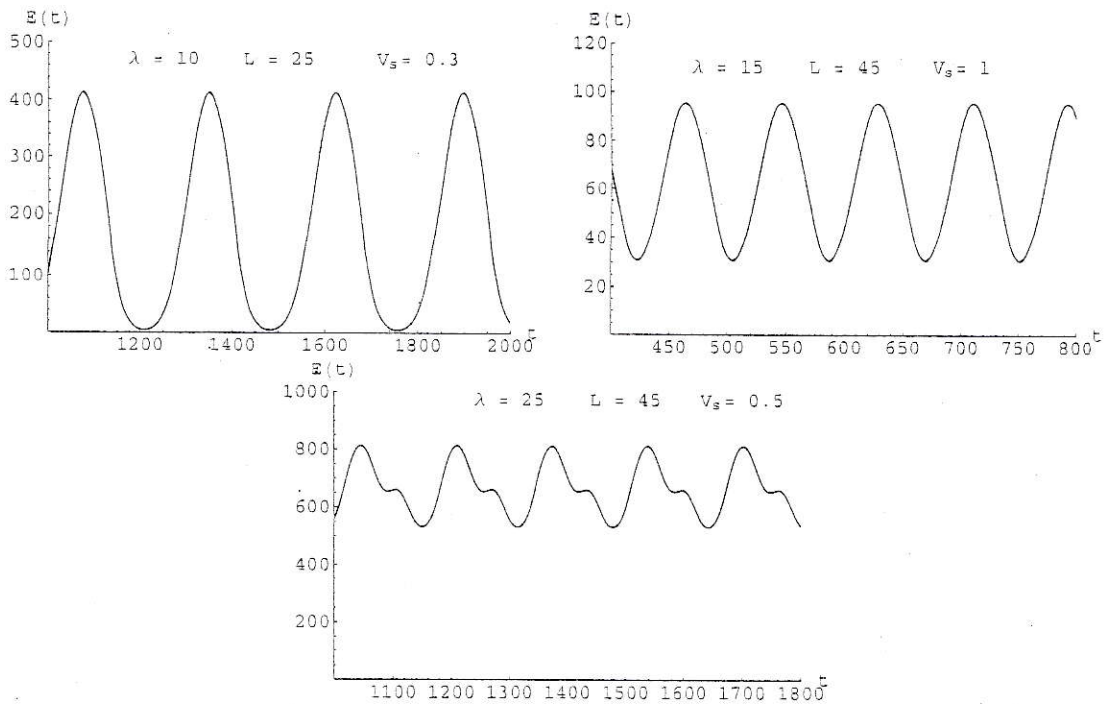


Figura 7.7: Variación de la energía en el tiempo para tres conjuntos de parámetros distintos. En los tres casos se observa oscilación en la energía.

## 7.2. Evolución temporal de la energía

### 7.2.1. Oscilación de la energía

Al observar la evolución temporal de la energía del sistema para tres configuraciones de parámetros distintas (figura 7.7) se comprueba que en todos los casos presenta un comportamiento oscilatorio, después de haber crecido hasta un valor máximo.

En los tres casos de la figura 7.7 el período de oscilación de la energía es distinto, por lo que ha de depender de alguno de los tres parámetros que modelan la fuente que fueron variados en los distintos gráficos. En la figura 7.8 se muestra el resultado de calcular el período  $T$  al variar la longitud de onda de la fuente  $\lambda$ . Claramente éste no es un parámetro que incida en la forma de absorción y disipación de la energía. Este

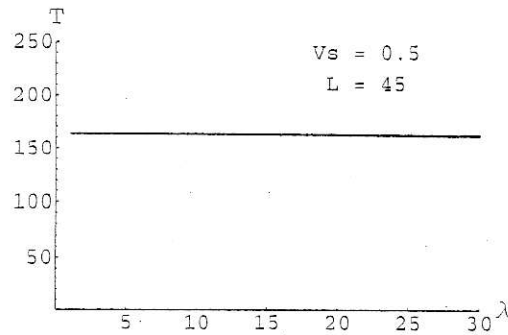


Figura 7.8: Dependencia del período de oscilación de la energía respecto de  $\lambda$ . El período no depende de  $\lambda$ , aún cuando ese parámetro fija la oscilación espacial de la fuente.

hecho se explica porque el posible período asociado a la interacción entre la forma de oscilación de la fuente  $\lambda$  y el sistema debiera ser más pequeño, y como se verá en la siguiente subsección, dicha interacción sólo aparece cuando ocurre resonancia.

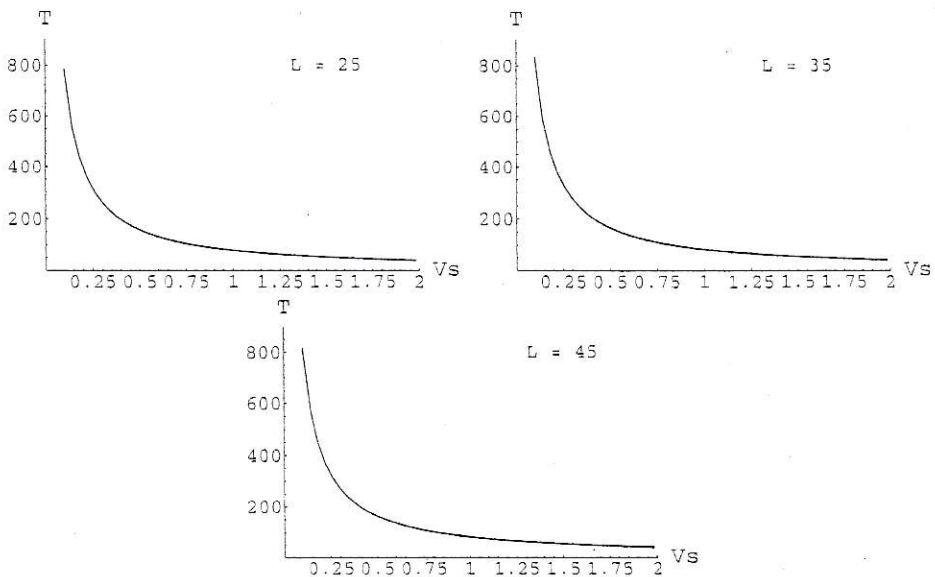


Figura 7.9: Dependencia del período de oscilación de la energía en función de la velocidad de propagación de la fuente, para tres valores de  $L$ . En los tres casos el período disminuye asintóticamente a cero a medida que la velocidad aumenta, sin que el valor de  $L$  influya notoriamente.

La figura 7.9 muestra la relación entre el período de oscilación  $T$  y la velocidad de propagación  $V_s$ , para tres valores de  $L$ . Al hacer un ajuste de los datos, en todos los casos el período resultó ser inversamente proporcional a la velocidad de propagación, o sea,  $T \sim 1/V_s$ . Además, parece no haber relación entre el ancho de la envolvente gaussiana y la oscilación de la energía absorbida por el sistema.

### 7.2.2. Resonancia de las soluciones

La resonancia que se observa en la figura 7.3 implica que la fuente entrega energía al sistema de forma más eficiente cuando el valor de  $\lambda$  está en los intervalos de resonancia, por lo que esto se debiera reflejar en la evolución temporal de la energía total de la solución. En la figura 7.10 se comparan la energía total en función del tiempo para dos valores de la longitud de onda de la fuente, usando los mismos valores que en la figura 7.5. Cuando  $\lambda = 15$  el sistema se encuentra en un estado resonante con la onda de amplitud modulada, mientras que para un valor muy cercano de la longitud de onda ( $\lambda = 16$ ), las soluciones contienen comparativamente menos energía.

En ambos casos la evolución temporal de la energía oscila con un período característico mayor  $T \approx 163$ , que como se mostró en la sección anterior (figura 7.9) depende sólo de la velocidad de la fuente. Por otra parte, se observa que para el caso resonante ( $\lambda = 15$ ) la energía posee otro período de oscilación más corto  $\tau \approx 33.3$ , que corresponde justamente al período de oscilación de la fuente para los parámetros usados, es decir,  $\tau_S = \lambda/V_s = 30$ . En otras palabras, cuando se produce resonancia, el sistema absorbe energía de la fuente siguiendo el patrón espacial de ésta.

La existencia de zonas de resonancia dependiendo del valor de  $\lambda$  puede ser la prueba de la existencia de una base de soluciones que se excitan ante la presencia de una fuente de energía externa. Dicha base debiera además depender de la velocidad

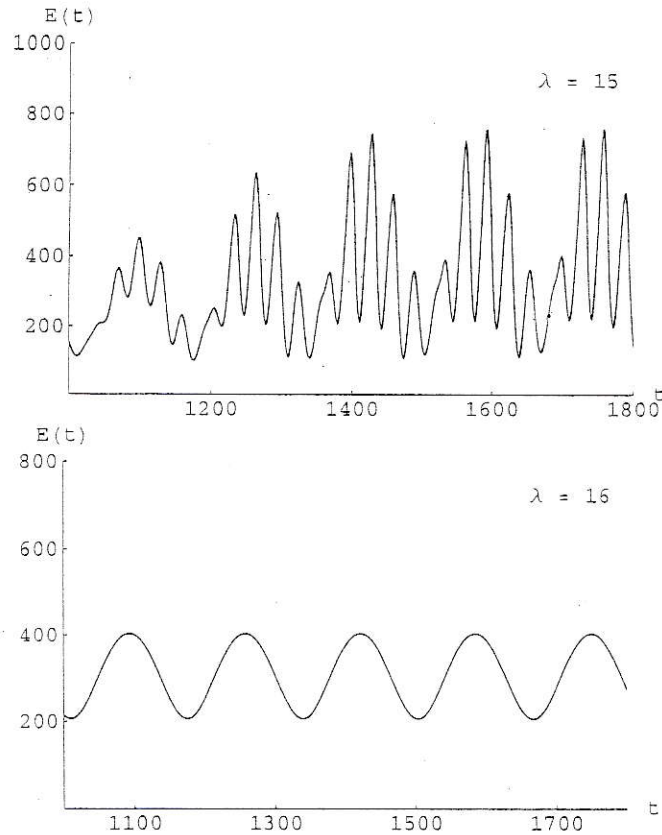


Figura 7.10: Comparación de la energía en función del tiempo para dos valores de la longitud de onda de la fuente,  $\lambda = 15$  (resonante) y  $\lambda = 16$  (no resonante). Ambas curvas tienen un período de oscilación mayor  $T \approx 163$ , pero la solución resonante posee además un período corto de oscilación  $\tau \approx 33.3$  que coincide con el período de oscilación de la fuente gaussiana.

de propagación, puesto que el sistema absorbe más energía para velocidades bajas, es decir, para frecuencias temporales bajas. La disipación ocurre entonces para frecuencias temporales altas. Como se vio en el capítulo 6 el continuo de frecuencias excitadas por la onda monocromática se agrupa en torno a la frecuencia de la fuente, en la zona baja del espectro. Esto es debido en parte a que el término disipativo usado en la ecuación DNLS (6.1) esencialmente quita energía a las ondas de longitud de onda baja [14] o de frecuencia alta.

# Capítulo 8

## Conclusiones

El presente trabajo abordó el problema de las ondas no lineales de Alfvén que son descritas por la ecuación DNLS, fundamentalmente en tres partes. Primero, se reprodujeron algunos resultados ya conocidos en el modelo simplificado de la ecuación (capítulo 4) usando las herramientas dadas por la teoría de sistemas dinámicos, y también se profundizó el estudio de los fenómenos observados en dicho modelo, en particular relacionándolos con el comportamiento de sistemas como el viento solar, el que presenta normalmente un comportamiento turbulento. Por ejemplo la figura 8.1 muestra la variación de la componente Norte-Sur del campo magnético que viaja con el viento solar, durante un lapso de 400 minutos. Estos datos son tomados permanentemente por el satélite ACE, cuya posición está cerca del punto lagrangiano L1, entre la Tierra y el Sol. Se observa cómo el campo magnético sufre bruscos e impredecibles fluctuaciones de tamaño y signo, lo que señala un comportamiento complejo. A esta primera parte se agrega el estudio del modelo simplificado cuando es forzado por dos ondas de distinta frecuencia, poniendo énfasis en la posibilidad de que el sistema se puede organizar bajo la presencia de un segundo *driver*.

La segunda parte del trabajo, expuesta en el capítulo 6, consistió en estudiar la ecuación DNLS sin aproximaciones, integrándola numéricamente, e intentando

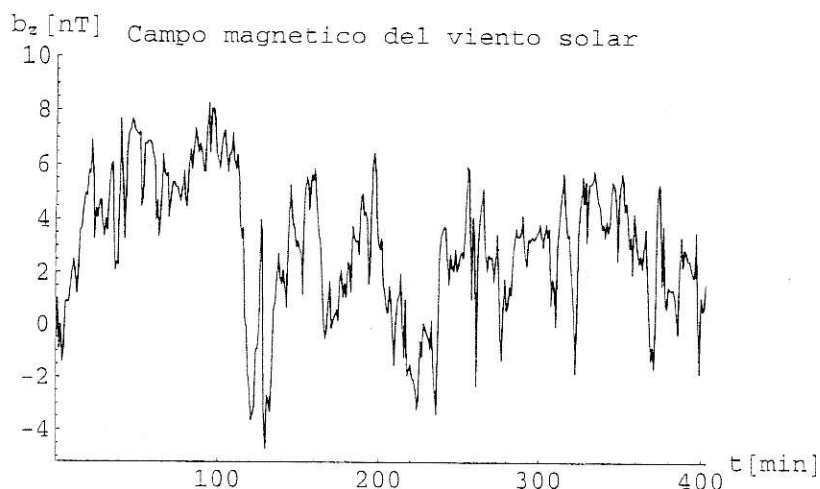


Figura 8.1:

conectar el modelo simplificado con las observaciones hechas a partir de la ecuación completa. Finalmente, en el capítulo 7 se mostró una posible variante en el enfoque del problema, el cual se basa en la idea de que detrás de un comportamiento turbulento, existe una base de soluciones que genera dicho comportamiento. La idea fue excitar soluciones solitónicas forzando el sistema con una fuente viajera localizada, estableciendo algunas dependencias entre la forma de la solución y los parámetros asociados a la fuente.

## 8.1. Caracterización de la ecuación DNLS en su aproximación ODE

A partir de la formulación planteada por [12] se obtuvo la ecuación DNLS, la cual describe la dinámica no lineal de las ondas de Alfvén en un plasma magnetizado en una dirección espacial. Las soluciones de dicha ecuación que se propagan con velocidad constante pueden ser descritas por un sistema de ecuaciones diferenciales



ordinarias, que a su vez, al ser forzado con una onda monocromática externa presenta una gran variedad de comportamientos.

Se mostró que al variar la amplitud del forzamiento (onda monocromática externa) el sistema sufre una serie de bifurcaciones, entre ellas las llamadas crisis. Esta bifurcación resulta de gran importancia puesto que asociada a ella aparece intermitencia en las soluciones (figura 4.11), lo cual puede tener relevancia puesto que la intermitencia alfvénica ha sido observada en estados turbulentos del viento solar [10].

Existen dos grandes problemas acerca de la aplicabilidad del modelo simplificado a observaciones reales del viento solar:

1. Las ondas de Alfvén en el viento solar no solo son perturbadas por agentes externos, como se supuso en principio, sino también por inestabilidades resonantes en las que están involucrados iones energéticos que sacan y/o entregan energía a las ondas, desestabilizándolas [14]. Es decir, el forzamiento debiera depender de la amplitud de las soluciones. Una idea para modelar esto podría ser acoplar dos ecuaciones DNLS, donde una genera la fuente y otra funcione como receptor. En dicho sistema se debieran observar estados de sincronización, que corresponderían al caso estudiado aquí.
2. Se supuso que la velocidad de las soluciones y la fuente son iguales, lo que restringe drásticamente el espacio de soluciones estudiado. Este problema no existe al considerar la ecuación DNLS completa.

### 8.1.1. Sistema ODE forzado con dos frecuencias

Una de las simplificaciones del modelo descrito en el capítulo 4 es haber usado una onda monocromática como fuente. Es posible que la inyección de energía en un

sistema como el viento solar se deba a la presencia de un paquete de ondas, que en general no oscilan con la misma frecuencia, por lo que estudiar el modelo ODE forzado con dos ondas sería algo más realista. Por otra parte, es interesante estudiar el efecto que la inclusión de un segundo *driver* produce sobre las soluciones del sistema.

Al forzar la ecuación ODE con dos frecuencias se estudiaron dos casos. Primero, partiendo de un estado ordenado en el sistema con un *driver* se encontró que el sistema no varía su estructura, es decir, el atractor presente en el sistema cambia al aumentar la amplitud del segundo *driver* como si en realidad se moviera la amplitud del primero, sufriendo la misma bifurcación. Además se observó la aparición de un nuevo atractor para valores negativos de  $A_2$  (figura 5.1) que coexiste con la órbita de período tres del sistema original.

Al introducir el nuevo *driver* partiendo de un estado inicial caótico aparecen nuevos atractores, los que coexisten con el atractor antiguo en intervalos pequeños del parámetro  $A_2$ . En este caso también se observó una transición que podría ser una crisis interior en el atractor antiguo, pero que no es producida por la órbita de período nueve que genera dicha crisis en el sistema sin perturbar. Este resulta ser un cambio importante al incluir un nuevo *driver*, puesto que la inclusión de una nueva onda cambia el mecanismo a través del cual el sistema se reorganiza al variar la amplitud de forzamiento. Aun así el exponente crítico para el tiempo de intermitencia calculado a partir de los autovalores de la órbita  $A$ , que está dentro del atractor, ajusta bien a los datos obtenidos de las simulaciones, por lo que es posible que la transición observada sea debido a una tangencia heteroclina de la variedad inestable de dicha órbita con la variedad estable de otra órbita inestable presente en el espacio de fase.

El hecho de que el sistema logre ordenarse al variar  $A_2$  llevó a pensar en la segunda

onda como una forma de control del sistema. Desde el punto de vista del control se exploraron dos casos: usando la onda con el doble de frecuencia, y una onda cuyo período fuese el mismo que el de la órbita estable cercana a la región caótica a partir de la cual se inició el control.

En ambos casos se encontraron las funciones de control, que dan cuenta del valor óptimo de  $A_2$  para el cual el sistema retorna al orden anterior, lo cual depende del valor de  $A_1$ . Para el caso en que la frecuencia de control es el doble que la original, dicha función crece linealmente al ir penetrando hacia la región caótica original. Además, el tamaño de la amplitud de control siempre fue mayor que la distancia  $\Delta A_1 = A_1 - A_c$ , por lo que la inclusión del segundo armónico sería una alteración fuerte al sistema, y no se podría hablar de control de caos en este caso. Cuando el período de la onda de control fue el mismo que la órbita a la que se quiere llegar (período 3), la amplitud  $A_2$  permanece acotada aproximadamente dentro del orden de  $\Delta A_1$ . Aún cuando esto todavía no se puede considerar control, a partir de  $\Delta A_1 \approx 0.006$  el valor de  $A_2$  necesario para volver a la órbita estable se mantiene más o menos constante en  $A_2 \approx 0.005$ .

Este tipo de control debiera aparecer naturalmente en los plasmas espaciales, pues los paquetes de ondas que viajan a través de dichos plasmas pueden afectar el comportamiento del mismo, logrando excitar modos de oscilación nuevos, que coexisten en el espacio de fase.

## 8.2. Ecuación parcial diferencial DNLS

Al integrar la ecuación DNLS sin aproximaciones incluyendo una fuente monocromática y disipación se consideraron dos enfoques: primero se estudió cómo cambia el comportamiento espacial de las soluciones al variar la amplitud de la fuente, para

luego observar el comportamiento temporal variando el mismo parámetro.

El análisis de Fourier de las soluciones muestra que, a medida que se aumenta la amplitud de la fuente, aparecen nuevos modos de oscilación espacial en el sistema, los que se traspan energía unos a otros al avanzar el tiempo. El exponente de Lyapunov espacial promedio mostró la existencia de dos grandes regiones de desorden espacial en el intervalo del espacio del parámetro  $A$  estudiado. En la primera de ellas ( $A \in [1.2, 2.4]$ ) el desorden es relativamente bajo, observándose una ventana de orden en dicha región. En la segunda región ( $A \in [3, 5]$ ) el exponente de Lyapunov espacial indicaría que el desorden espacial es mayor, aunque este intervalo también posee zonas más ordenadas.

El análisis temporal de las soluciones mostró que el sistema sufre una serie de bifurcaciones a partir de un estado periódico inicial, que perdura hasta  $A \approx 0.71785$ , cuando ocurre la primera bifurcación. La intermitencia observada en la figura 6.11a sugiere que esta bifurcación podría ser un *saddle-node*, a partir del cual se crea un atractor cuya frecuencia es inconmensurable con la frecuencia del forzamiento (cuasiperiodicidad), y que coexiste con el atractor excitado por el *driver* (figura 6.14b). Las nuevas frecuencias que aparecen a partir de  $A \approx 0.848$  son múltiplos enteros tanto de la frecuencia de la fuente como del segundo atractor. Este último desaparece (o se vuelve inestable) a partir de  $A \approx 2.3202$ . Justo en ese valor de  $A$  ocurre una explosiva aparición de frecuencias, que bajan su valor a medida que crece  $A$ , ocupando una pequeña región del espectro para repentinamente desaparecer cuando  $A \approx 3.86$  (figura 6.14d). Después de esta transición, el número de frecuencias presentes en el sistema baja considerablemente, para volver a crecer hasta llegar a formar un continuo cuando  $A \approx 4$ . Es posible que esta zona sea una típica ventana de orden acotada por un *saddle-node* y una crisis. Ambas bifurcaciones están asociadas

a la presencia de intermitencia.

Se encontró que el comportamiento espacial en función de la amplitud de forzamiento está correlacionado con la aparición de nuevas frecuencias temporales, puesto que el exponente de Lyapunov promedio experimenta fuertes aumentos para valores de la amplitud  $A$  en que el número de frecuencias temporales en el sistema se dispara. Cuando el exponente  $\lambda$  alcanza valores máximos en el intervalo del parámetro  $A \in [3, 5]$  el sistema posee un comportamiento temporal caótico en el subintervalo  $A \in [4.2, 4.552]$ , que está contenido en el primero. Las soluciones en el intervalo más pequeño presentan a la vez desorden espacial y temporal, es decir, existe en dicho intervalo caos espacio-temporal. En otras palabras, se encontraron pruebas de la existencia de turbulencia en la ecuación DNLS forzada con una onda monocromática externa.

Cada vez que ocurre una bifurcación se observa intermitencia (figuras 6.10 y 6.11), hecho que apoyaría el diagnóstico hecho anteriormente, puesto que la intermitencia es un fenómeno asociado a estados turbulentos del viento solar [10]. Se sabe que la intermitencia puede ser inducida por una crisis. Por otra parte, para que ocurra una crisis es necesaria la presencia de dos o más atractores en el sistema. Justamente este hecho queda en evidencia al notar que la envolvente de la solución, para un valor del parámetro del cual se sospecha un estado turbulento, evoluciona temporalmente (figura 6.17) conteniendo muchas ondas de distinta velocidad de propagación. El caos temporal se debería entonces a la turbulencia de fase provocada por la superposición de modos propagantes.

Es interesante notar que el modelo estudiado, que describe las fluctuaciones no lineales de las ondas de Alfvén en un plasma de densidad constante en presencia de un campo magnético homogéneo, presenta una gran variedad de fenómenos, sólo por

el hecho de incluir una fuente de energía externa. Más importante es el hecho de que algunos de los fenómenos observados a partir de los datos obtenidos en las simulaciones han sido observados en el viento solar, plasma que cumple las características del sistema descrito por la ecuación DNLS.

### 8.3. Fuente gaussiana

Se estudió la respuesta de la ecuación DNLS forzada con una onda de amplitud modulada por una gaussiana, encontrando como depende la respuesta del sistema en función de los diferentes parámetros que modelan a dicho *driver*. En el caso estudiado la fuente  $S(x, t)$  estaba bien localizada, es decir, el ancho de la envolvente era mucho más pequeño que el intervalo de integración espacial. Se encontró que la respuesta del sistema varía considerablemente tanto al variar la velocidad de propagación como la longitud de onda de la fuente.

En el primer caso se encontró que la amplitud de la densidad de energía decae asintóticamente con la velocidad de la fuente. Esto quiere decir que el sistema absorbe más energía mientras más lenta es la onda de entrada. Aunque esto parece natural de pensar, uno de los experimentos numéricos (figura 7.5b) mostró la presencia de un escalonamiento en la dependencia para valores pequeños de  $V_s$ . Esto en el caso en que la longitud de onda es similar al ancho de la envolvente del *driver*.

Al variar la longitud de onda, fijando los otros parámetros, se encontró que para determinados valores de  $\lambda$  la densidad de energía presenta máximos sobre una curva que crece de manera aproximadamente suave (7.3), lo que se interpreta como resonancia. El sistema es capaz de absorber mucha más energía en dichos estados resonantes, además de que la energía se absorbe a una tasa temporal idéntica al período de la fuente, lo que no ocurre cuando no existe resonancia (7.10). Por otra

parte, cuando los valores de  $\lambda$  tienden hacia el límite permitido dado por el ancho de la gaussiana, se evidencian irregularidades en la curva de dependencia de la densidad de energía. Si se considera que la pérdida de comportamiento normal ocurre también para la dependencia respecto de  $V_s$  cuando la longitud de onda se parece a  $L$ , entonces es posible concluir que en la región de parámetros dada por  $\lambda \sim L$  y  $V_s < 1$  el sistema es más sensible a sufrir bruscos cambios de comportamiento ante pequeñas perturbaciones de la fuente.

## 8.4. Conclusión general

La idea de esta tesis fue profundizar el trabajo realizado por Hada *et. al.* [14] y Chian *et al.* [15] acerca de las ondas no lineales de Alfvén descritas por la ecuación DNLS, a través de un modelo ODE en el contexto de los sistemas dinámicos. Este modelo predice la existencia de soluciones caóticas cuando son forzadas con una fuente monocromática. Por otra parte, la relevancia física del modelo es que se encuentra la presencia de intermitencia en él, fenómeno observado al analizar datos reales del viento solar [10]. Según el modelo, la intermitencia alfvénica sería inducida por dos mecanismos: al ocurrir una bifurcación *saddle-node* (intermitencia de Pomeau-Maneville) y tras una crisis interior (intermitencia inducida por crisis). Esta última tendría especial relevancia física, puesto que ocurre cuando el sistema se encuentra en un estado caótico. La evidencia observacional muestra que el viento solar se encuentra en un estado caótico [11], por lo que es posible relacionar un evento de intermitencia en dicho sistema con la ocurrencia de una crisis. Una idea planteada en esta tesis es que la presencia de una segunda onda, aun de distinta frecuencia que la original, puede lograr que el sistema se ordene, constituyendo una forma de control. A pesar de este avance, el modelo ODE no deja de ser una primera aproximación,

puesto que sus soluciones son ondas viajando con velocidad constante, parámetro que debe fijarse al integrar numéricamente las ecuaciones, truncando así el espacio de soluciones al que se tiene acceso.

El resultado más relevante en esta tesis se obtuvo al estudiar numéricamente la ecuación DNLS sin ningún tipo de aproximación, destacándose los resultados que permiten concluir la existencia de soluciones turbulentas e intermitencia, lo que conecta estos resultados con los obtenidos con el modelo ODE, y a su vez con la dinámica de un plasma real (viento solar). Por otra parte, cabe destacar que el enfoque general en esta parte siguió siendo el de los sistemas dinámicos. El diagrama de bifurcación más novedoso fue el construido a partir del espectro de frecuencias temporales de las soluciones (figura 6.14). Es interesante notar en este punto que la idea de diagrama de bifurcación que se tenía en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias apunta a la obtención de un mapa, mientras que la construcción de mapas en el caso de ecuaciones en derivadas parciales no es simple, o bien no resulta ser una herramienta muy útil. Entonces en este contexto se entiende por diagrama de bifurcación una colección de datos que dependen de cierto parámetro que controla el comportamiento global del sistema (hasta aquí es lo mismo) que den cuenta de alguna característica relevante del mismo: las frecuencias presentes en el sistema, algún índice de desorden como el exponente de Lyapunov, el flujo de energía, etc.

## 8.5. Trabajo futuro

Las siguientes son posibles líneas a seguir para continuar con el trabajo comenzado en esta tesis.

1. Sistemas dinámicos: para dar una explicación más cabal sobre las bifurcaciones descritas en el capítulo 6 es necesario aislar las órbitas periódicas inestables in-



volucradas en las transiciones. Una posibilidad es usar métodos de control para ecuaciones parciales diferenciales como el descrito en [47], donde se estabiliza una órbita periódica inestable presente en el sistema cuando éste se encuentra en un estado caótico mediante la excitación de un modo espacial. Dicha perturbación se disminuye por retroalimentación a medida que el sistema se controla. En la misma línea, se hace necesario obtener las variedades asociadas a las órbitas cuando se sospecha la ocurrencia de una crisis, pues al determinar qué tangencia es la que provoca la transición es posible establecer, en principio, características de la intermitencia asociada a ésta, tales como el tiempo de intermitencia.

2. En esta tesis se usó como fuente externa para la ecuación DNLS una onda monocromática, lo que obviamente es una simplificación. Una posibilidad para hacer más realista el modelo usado en este trabajo es acoplar dos ecuaciones DNLS, una que funcione como fuente y otra como sistema receptor. Habría que poner especial atención en el modelo de disipación a usar tanto en la ecuación que genere la fuente como en la ecuación receptora. La disipación tipo fluido usada en este trabajo no necesariamente representa bien los procesos de transporte de energía en plasmas como el viento solar, donde la inyección de energía proviene de inestabilidades resonantes en las cuales están involucradas ondas de alta energía [14]. Han sido probados otros modelos disipativos en la ecuación DNLS, como en [44], donde se usa un modelo de disipación que da cuenta de los efectos cinéticos.

# Apéndice A

## Exponente espacial de Lyapunov en PDE

Una ecuación parcial diferencial que describe la dinámica de cierta función  $u \equiv u(\mathbf{x}, t)$  en general se expresa como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{F}(u, \mathbf{x}, t), \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{F}$  es un operador que actúa sobre  $u$ . A través de un esquema de diferencias finitas, la ecuación (A.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = \mathbf{f}(\{u_j^k\}, \Delta x). \quad (\text{A.2})$$

Ahora  $\mathbf{f}$  es la representación del operador  $\mathbf{F}$  en el espacio discretizado, el cual se divide en  $N$  trozos de tamaño  $\Delta x$ , los cuales están rotulados con el subíndice  $j$ . A su vez, el tiempo, dividido en trozos de tamaño  $\Delta t$ , se rotula con el superíndice  $k$ . A partir de la ecuación (A.2) se puede encontrar la relación entre  $\{u_j^k\}$  y  $\{u_j^{k+1}\}$ . Considérese ahora la matriz jacobiana dada por

$$B_{k,N} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial u_1^k} & \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial u_3^k} & \dots & \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial u_N^k} \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_1^k} & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_3^k} & \dots & \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial u_N^k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_N^{k+1}}{\partial u_1^k} & \frac{\partial u_N^{k+1}}{\partial u_2^k} & \frac{\partial u_N^{k+1}}{\partial u_3^k} & \dots & \frac{\partial u_N^{k+1}}{\partial u_N^k} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

La matriz  $B_{k,N}$  contiene información acerca de la estabilidad lineal del sistema y el grado de desorden del campo  $u$  en el instante  $k$ -ésimo de tiempo. Es importante notar que el determinante de  $B_{k,N}$  da dicho grado de desorden [45]. Se define el exponente de Lyapunov promedio como

$$\lambda_k \equiv \frac{1}{N} \ln |B_{k,N}|, \quad (\text{A.4})$$

donde  $|\cdot|$  representa el determinante de la matriz. Cada entrada de  $B_{k,N}$  es a su vez una matriz de  $m \times m$ , siendo  $m$  la dimensión de  $u$ , o sea, el número de variables independientes. En el caso de la ecuación DNLS  $m = 2$ . Separando la parte real de la imaginaria en dicha ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [b_y (b_y^2 + b_z^2)] + \mu \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} = S_y, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} [b_z (b_y^2 + b_z^2)] - \mu \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} = S_z. \quad (\text{A.6})$$

Las ecuaciones (A.5) y (A.6) discretizadas son:

$$\begin{aligned} \frac{Y_j^{k+1} - Y_j^k}{\Delta t} = & -\frac{\alpha}{2\Delta x} [NY_{j+1}^k - NY_{j-1}^k] - \frac{\mu}{\Delta x^2} [Z_{j+1}^k - 2Z_j^k + Z_{j-1}^k] \\ & - \frac{\eta}{\Delta x^2} [Y_{j+1}^k - 2Y_j^k + Y_{j-1}^k] + SY_j^k, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{Z_j^{k+1} - Z_j^k}{\Delta t} = & -\frac{\alpha}{2\Delta x} [NZ_{j+1}^k - NZ_{j-1}^k] + \frac{\mu}{\Delta x^2} [Y_{j+1}^k - 2Y_j^k + Y_{j-1}^k] \\ & - \frac{\eta}{\Delta x^2} [Z_{j+1}^k - 2Z_j^k + Z_{j-1}^k] + SZ_j^k. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En las ecuaciones anteriores  $b_y \rightarrow Y$  y  $b_z \rightarrow Z$ ,  $NY = b_y(b_y^2 + b_z^2)$  y  $NZ = b_z(b_y^2 + b_z^2)$ . Como en el esquema de diferencias finitas usado las derivadas espaciales se aproximan a primeros vecinos, los únicos elementos no nulos de la matriz  $B_{k,N}$  serán la diagonal y los elementos vecinos a éstas. Éstos son

$$\frac{\partial Y_j^{k+1}}{\partial Y_j^k} = 1 + 2\eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial Y_j^{k+1}}{\partial Z_j^k} = 2\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial Z_j^{k+1}}{\partial Y_j^k} = -2\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial Z_j^{k+1}}{\partial Z_j^k} = 1 + 2\eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial Y_j^{k+1}}{\partial Y_{j+1}^k} = -\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} (3Y_{j+1}^{k^2} + Z_{j+1}^{k^2}) - \eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial Y_j^{k+1}}{\partial Z_{j+1}^k} = -\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} Y_{j+1}^k Z_{j+1}^k - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial Z_j^{k+1}}{\partial Y_{j+1}^k} = -\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} Y_{j+1}^k Z_{j+1}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial Z_j^{k+1}}{\partial Z_{j+1}^k} = -\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} (3Z_{j+1}^{k^2} + Y_{j+1}^{k^2}) - \eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial Y_j^{k+1}}{\partial Y_{j-1}^k} = \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} (3Y_{j-1}^{k^2} + Z_{j-1}^{k^2}) - \eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial Y_j^{k+1}}{\partial Z_{j-1}^k} = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} Y_{j-1}^k Z_{j-1}^k - \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial Z_j^{k+1}}{\partial Y_{j-1}^k} = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} Y_{j-1}^k Z_{j-1}^k + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial Z_j^{k+1}}{\partial Z_{j-1}^k} = \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} (3Z_{j-1}^{k^2} + Y_{j-1}^{k^2}) - \eta \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (\text{A.20})$$

# Referencia

- [1] N. A. Krall y A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (New York, 1973).
- [2] Y. Voitenko y M. Goossens, *Space Sci. Rev.* **107**, 387 (2003).
- [3] M. J. Vasconcelos, V. Jatenco-Pereira y R. Opher, *Space Sci. Rev.* **107**, 383 (2003).
- [4] J. Kim, D. Ryu, T. W. Jones y S. S. Hong, *Astrophys. J.* **514**, 506 (1999).
- [5] T. Ogino, *J. Geophys. Res.* **99**, 11027 (1994).
- [6] I. I. Alexeev, E. S. Belenkaya, S. Y. Bobrovnikov y V. V. Kalegaev, *Space Sci. Rev.* **107**, 7 (2003).
- [7] J.-H. Lee, Y.-C. Lee y C.-C. Lin, *J. Nonlinear Math. Phys.* **9**, 87 (2002).
- [8] T. Hada, C. F. Kennel y B. Buti, *J. Geophys. Res.* **94**, 65 (1989).
- [9] E. Marsch y S. Liu, *Ann. Geophys.* **11**, 227 (1993).
- [10] S. Patsourakos y J. C. Vial, *Astron. Astrophys.* **385**, 1073 (2002).
- [11] M. Macek y S. Redaelli, *Phys. Rev. E* **62**, 496 (2000).
- [12] M. S. Ruderman, *J. Plasma Phys.* **67**, 271 (2002).

- [13] T. Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn. **24**, 941 (2002).
- [14] T. Hada, C. F. Kennel, B. Buti y E. Mjølhus, Phys. Fluids B **2**, 2581 (1990).
- [15] A. C. L. Chian, F. A. Borotto, E. L. Rempel, E. E. N. Macau, R. R. Rosa y F. Christiansen, Space Sci. Rev. **107**, 447 (2003).
- [16] H. Alfvén, Nature **150**, 405 (1942).
- [17] J. Voigt, Surveys in Geophysics **23**, 335 (2002).
- [18] B. T. y C. M. Ho, Reviews Geophys. **37**, 517 (1999).
- [19] V. M. Nakariakov, L. Ofman, E. E. DeLuca, B. Roberts y J. M. Davila, Science **285**, 862 (1999).
- [20] S. R. Spangler y J. P. Sheerin, J. Plasma Phys. **27**, 193 (1982).
- [21] E. Mjølhus, J. Plasma Phys. **16**, 321 (1976).
- [22] E. Ott, *Chaos in dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [23] E. L. Rempel y A. C.-L. Chian, Adv. Spac. Res. **35**, 951 (2005).
- [24] J. A. Valdivia, *Notes of a Complexity course* (Departamento de física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, 2002).
- [25] V. Mehra y R. Ramaswamy, Phys. Rev. E **53**, 3420 (1996).
- [26] G. Boffetta, M. Cencini, M. Falcioni y A. Vulpiani, Phys. Rep. **356**, 367 (2002).
- [27] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney y J. A. Vastano, Physica D **16**, 285 (1985).

- [28] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras y J. A. Yorke, *Phys. Rev. A* **36**, 5365 (1987).
- [29] N. Tsukamoto, S. Miyazaki y H. Fujisaka, *Phys. Rev. E* **67**, 16212 (2003).
- [30] P. Charbonneau, *Sol. Phys.* **199**, 385 (2001).
- [31] D. Auerbach, P. Cvitanović, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne y I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387 (1987).
- [32] R. L. Davidchack, Y.-C. Lai, A. Klebanoff y E. M. Bollt, *Phys. Lett. A* **287**, 99 (2001).
- [33] P. Schmelcher y F. K. Diakonov, *Phys. Rev. E* **57**, 2739 (1998).
- [34] D. Pingel, P. Schmelcher, F. K. Diakonov y O. Biham, *Phys. Rev. E* **62**, 2119 (2000).
- [35] C. F. Kennel, R. D. Blandford y C. C. Wu, *Phys. Fluids B* **2**, 253 (1990).
- [36] L. Avilés, *Evol Ecol. Res.* **1**, 459 (1999).
- [37] R. Bruno y V. Carbone, *Planet. Space Sci.* **49**, 1201 (2001).
- [38] E. Ott, C. Grebogi y J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
- [39] K. A. Mirus y J. C. Sprott, *Phys. Rev. E* **59**, 5313 (1999).
- [40] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1959).
- [41] C. Wolfram, *Phys. Fluids* **31**, 1949 (1988).
- [42] S. Spangler y J. P. Sheerin, *Astrophys. J.* **257**, 855 (1982).
- [43] S. Spangler, J. P. Sheerin y G. L. Payne, *Phys. Fluids* **28**, 104 (1985).

- [44] S. Gosh y K. Papadopoulos, *Phys. Fluids* **30**, 1371 (1987).
- [45] H. Shibata, *Physica A* **264**, 226 (1999).
- [46] E. L. Rempel y A. C.-L. Chian, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 14101 (2007).
- [47] H. Gang y H. Kaifen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3794 (1993).