

UCH-FC
MAG-F
L 864
C.1



Transporte de excitaciones en sistemas con desorden correlacionado en el régimen lineal y no lineal.

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Dany Alexis López González

Septiembre, 2016

Director de Tesis: **Dr. Mario I. Molina Gálvez**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Dany Alexis López González

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con Mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 6 de Septiembre de 2016.

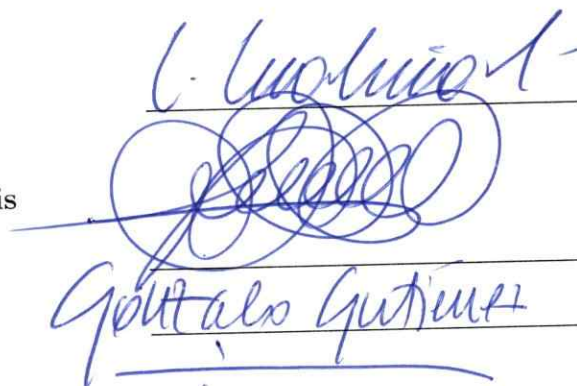
Director de Tesis

Dr. Mario I. Molina Gálvez

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Carlos Saavedra

Dr. Gonzalo Gutiérrez (Presidente)



C. Saavedra
Gonzalo Gutierrez
Gonzalo Gutierrez

Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo. Albert Einstein.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a todos quienes tuvieron algo que ver con que esta tesis llegara a buen término. En especial al Grupo de Óptica de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, cuyos integrantes siempre me recibieron con cordialidad y también con entusiasmo en mi desarrollo como investigador. Agradecer al profesor Rodrigo Vicencio por abrirme las puertas a este grupo y atender dudas y/o ideas a lo largo de este periodo. Al profesor Mario Molina por acompañarme en mi etapa de investigación. También deseo agradecer a mi compañero y amigo, Luis Esteban Morales por sus infinitos consejos, conversaciones y apoyo. Agradecer también a mi colega y amigo, Tomás Echeverría por su continua motivación y visión del mundo que han sido fundamentales en mi proceso. Finalmente agradecer a la piedra angular en todo mi proceso de investigación, a mi familia, por su incondicional y constante apoyo.

Mi permanencia en el plan de magíster fue posible gracias a una Beca de Magíster CONICYT. También al Nucleo Milenio de óptica avanzada RC-130001. Además, este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT no. 1120123 y Programa de Financiamiento Basal CONICYT (FB0824/2008). Finalmente, agradecer al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias por la Beca de Pedagogía de Laboratorio.

Índice

1. Introducción	1
2. Ecuación no lineal de Schrödinger discreta	5
2.1. No linealidad tipo Kerr	10
2.2. Propiedades lineales y difracción discreta	12
2.3. Modos estacionarios no lineales	16
3. Desorden	20
3.1. Matriz de transferencia	21
3.2. Impurezas	24
3.3. Sistemas con desorden de impurezas y localización de Anderson	28
4. Desorden correlacionado	36
4.1. Impureza individual de n -meros	38
4.1.1. Trímero simétrico	39
4.1.2. Tetramero	42
4.1.3. Pentámero	44
4.1.4. Hexámero	48
4.2. Sistemas aleatorios de n -meros	50
4.2.1. Transmisión en función del tamaño del sistema en el régimen lineal	51
4.2.2. Transmisión en función del tamaño del sistema en el régimen no-lineal	56
4.2.3. Transporte de excitaciones inicialmente localizadas	62
4.2.4. Régimen lineal	63
4.2.5. Régimen no-lineal	68

	v
5. Modos localizados y desorden en bandas planas	71
5.1. Régimen lineal	73
5.1.1. Estabilidad dinámica	77
5.2. Régimen no lineal	85
6. Conclusiones	92
A. Apéndice	95
A.1. Identidad de Chebyshev	95
A.2. Estabilidad modos no lineales	96

RESUMEN

En esta tesis se estudia el transporte de excitaciones extendidas y localizadas en una red lineal uni-dimensional donde se han incrustado de manera aleatoria n -meros simétricos lineales y no lineales. Enfocándonos en las resonancias de la transmisión de ondas planas a través de una impureza de n -meros, buscamos la región de parámetros para sintonizar o mezclar las resonancias del sistema. Por otra parte, estudiamos numéricamente y analíticamente las propiedades espectrales de tres redes cuasi-uni-dimensionales, la red de Kagome, Lieb y Stub, que se caracterizan por tener bandas planas en su espectro lineal. Para estos tres casos, se analizó la estabilidad del modo fundamental de la banda plana ante la presencia de perturbaciones en la amplitud y en los parámetros del sistema (estabilidad estructural). Finalmente, estudiamos las propiedades de los modos compactos de cada red cuando se incluyen efectos no lineales.

ABSTRACT

In this thesis we examine the transport of extended and localized excitations in one-dimensional linear chains populated by linear and nonlinear symmetric identical n -mers randomly distributed. Concerning the transmission of plane waves across a single linear n -mer we pay attention to its resonances, and we look for the parameter conditions that allow resonances to merge. On the other hand, we examine analytically and numerically the spectral properties of three quasi-one-dimensional lattices, Kagome, Lieb and Stub lattices, which are characterized for having flatbands in their spectrum. For all three cases we computed the stability of the fundamental band mode against perturbation of their amplitude and system parameters (structural stability). Finally, we studied the compact modes' properties of each ribbon when we include nonlinear effects.

Capítulo 1

Introducción

Uno de los principales problemas que se ha encargado de estudiar la física del estado sólido en las últimas décadas, es el problema de la conductividad eléctrica y las transiciones que se dan en los materiales para determinar si se comportan como conductores o aislantes. Esta pregunta se ha intentado responder hace ya un siglo, y con los avances de la teoría cuántica se ha logrado dar respuesta parcial a algunas de estas preguntas. En esta línea, uno de los modelos que más impacto y relevancia tuvo fue el de P. W. Anderson [1] en 1958, en el que explica el fenómeno de transición metal-aislador mediante la presencia de desorden en una red infinita. Tres años después, Mott *et al* [2] también publica un trabajo donde explica la transición metal-aislante mediante la interacción electrón-electrón. En el trabajo de P. W. Anderson, el comportamiento de los electrones se modeló mediante la aproximación tipo "Tight-Binding", y se analizó el transporte de los electrones en un sistema desordenado. Para el caso de un sistema sin la presencia de desorden (perfectamente ordenado), se tiene que todos los autoestados del sistema son deslocalizados y corresponden a los modos de Bloch [3]. Esto conduce a un transporte "balístico" de los electrones y deja de existir ante cualquier presencia de desorden en el sistema. En este sentido, P.W. Anderson concluyó que cualquier grado de desorden, sin importar qué tal débil sea, conduce que todos los autoestados del sistema sean exponencialmente localizados.

Posterior al trabajo de Anderson y Mott, numerosos estudios teóricos analizaron el problema de la presencia de desorden y su efecto en el transporte electrónico que se da en metales [4]. Lo anterior no fue una tarea sencilla debido a la complejidad que existía para caracterizar los sistemas desordenados y su efecto en la localización.

Uno de los aportes teóricos más relevantes que permitió clarificar la teoría sobre la localización en sistemas desordenados, fue la teoría del escalamiento [5,6]. Esta teoría consiste en que para cada dimensión, un sólo parámetro caracteriza completamente la transición a la localización, permitiendo describir así, el comportamiento entre la longitud de localización del sistema y el efecto en la conductividad. Numerosos estudios posteriores tanto teóricos como numéricos han dado validez y fuerza a esta teoría [7].

La observación experimental de la localización de Anderson ha tomado mayor tiempo, debido a que sólo era posible medir o cuantificar la localización mediante el estudio de la conductividad electrónica, impidiendo la observación directa de los autoestados localizados debido a la presencia de desorden. Sin embargo, pocos años atrás se observó por primera vez de forma directa la localización de Anderson en condensados de Bose-Einstein [8-10] y en guías de ondas [11-13]. Debido a la flexibilidad de la técnica con la que se escriben estas guías de ondas, que se hace mediante un láser de femtosegundos [14-18], ha prometido ser una gran herramienta para estudiar experimentalmente sistemas desordenados ya que pueden ser tratados como sistemas discretos y por lo tanto, es posible modelarlos con la ecuación no lineal de Schrödinger discreta, que corresponde a un caso de la ecuación tipo Tight Binding.

Ahora bien, los resultados obtenidos en materia de localización [1, 2, 7], no son completamente válidos cuando el sistema presenta desorden correlacionado, es decir, desorden no perfecto. En este sentido, uno de los trabajos pioneros en investigar la localización y deslocalización de los estados ante estos sistemas fue el de J. C. Flores en 1989 [19], donde investigando la correlación entre la componente diagonal del hamiltoniano (o energías de sitio) del modelo tight-binding, observó una fracción de estados electrónicos que poseen coeficiente de reflexión igual a cero, y por lo tanto, son extendidos en una dimensión. Estos resultados estaban en contradicción con los resultados que se tenía a través de la teoría del escalamiento [6], donde prohibía la existencia de estados extendidos en una dimensión. El resultado obtenido por Flores, abrió la interrogante acerca de los requisitos que deben cumplirse para la existencia de estados extendidos en sistemas de una dimensión con desorden. No tardó mucho tiempo, para que surgieran modelos que atendieran a esta pregunta, donde los trabajos de Phillips *et al* [20-24] destacan enormemente. Estos trabajos estudian el modelo del dímero aleatorio propuesto inicialmente por Dunlap *et al.* [20, 21], que consiste en una aleación binaria aleatoria en la componente diagonal del hamiltoniano. Lo

anterior conduce a la existencia aproximada de \sqrt{N} estados extendidos, con N el tamaño del sistema. Además, se observó que debido a la existencia de estos estados deslocalizados y para un cierto rango de grado de desorden, un electrón que se encuentra inicialmente localizado se propaga de forma superdifusiva. Esto permitió dar una explicación a la conducción de ciertos polímeros como la polianilina [23, 24].

Similares resultados se han presentado en otros sistemas con desorden correlacionado y para otro tipo de excitaciones, tales como magnones [25] y fonones [26]. Dentro del mismo contexto del modelo tight binding, Giri et al. [27] muestra para el modelo trímero aleatorio en una cadena unidimensional, se exhiben a lo más dos resonancias en la transmisión de energías y en el que posteriormente Z.Okbani et al. [28] analiza la naturaleza de los estados extendidos para dicho modelo. En este mismo camino, Huang [29] encuentra que para el modelo del trímero simétrico aleatorio existe incluso difusión cuando la energía de sitio del sitio central está dado de manera aleatoria sin correlación. Finalmente, la generalización evidente del modelo del dímero y trímero aleatorio corresponde al modelo del n -mero aleatorio [30-33]. Observaciones experimentales acerca de la deslocalización en sistemas correlacionados se ha dado en super-redes de GaAs-AlGaAs [34-36] y en guías de ondas [37, 38]. Cabe destacar el trabajo experimental desarrollado por U. Naether *et al* [38] en el que se observó por primera vez en el contexto óptico, mediante el método de fluorescencia [39], el transporte super-difusivo de una condición inicialmente localizada.

Por otro lado, el fenómeno de localización no sólo puede deberse a la presencia de desorden, sino que también a efectos no lineales [40-42] y donde en este caso, los sistemas discretos son bastante útiles para describir este tipo de interacciones en diferentes sistemas físicos [43, 44]. Los modos localizados que se dan en estos tipos de sistemas considerando sólo los efectos de no linealidad se conocen como solitones discretos o modos no lineales localizados [45]. Éstos han sido predichos en condensados de Bose-Einstein [46] y en cristales fotónicos [47-49] por mencionar algunos. Ahora bien, también se ha estudiado teórica [50-54] y experimentalmente [12, 55] el efecto de la no linealidad ante la inclusión de desorden y los efectos que se tienen sobre la Localización de Anderson. En estos trabajos se ha demostrado que sobre un cierto valor crítico en la no linealidad, la localización de Anderson se destruye [56]. También se ha mostrado que la competencia entre la no linealidad y desorden puede contribuir para algunas condiciones iniciales a la localización o al transporte [57-60].

Recientemente se ha estudiado con gran interés otro método que permite lograr localización sin la inclusión de algunos de los ingredientes usuales que promuevan la localización, tales como la inclusión de impurezas, desorden o no linealidad. Este método consiste en la creación de redes no convencionales que presentan bandas planas [61, 62]. El concepto de banda tiene su origen en la física del estado sólido donde se explica que un electrón sometido a un potencial periódico sólo posee ciertas energías permitidas y se distribuyen en forma de "bandas y gaps" [63]. Los autoestados o superposición de éstos que pertenecen a una de las bandas planas no presentan evolución dinámica debido a que la velocidad de grupo es cero. Lo anterior permite la formación de modos compactos que son completamente localizados en el espacio y es posible gracias a las condiciones precisas de interferencia que se dan debido a la geometría. Este tipo de sistemas se ha estudiado en diferentes áreas, tales como en óptica [64, 65] y redes fotónicas [66-69], superconductores [70, 71], y en condensados excitón-polaritón [72, 73]. Finalmente, la observación experimental de modos lineales que pertenecen a esta banda plana ha sido investigada en la red tipo Lieb [67, 68].

Capítulo 2

Ecuación no lineal de Schrödinger discreta

En este Capítulo introduciremos los conceptos y las bases físicas sobre el comportamiento de la luz ante un potencial periódico. Este potencial corresponde a distribuciones periódicas en el índice de refracción del medio, y se conoce como guías de ondas [11–13]. Este estudio comienza con la discusión de las propiedades fundamentales de la luz en estos medios, que en este caso consiste el tratamiento de las ecuaciones de Maxwell, en la cual se derivarán, bajo ciertas aproximaciones, las ecuaciones que gobernarán la dinámica de la luz. La aproximación a considerar en nuestro modelo consiste en que se puede aproximar el campo eléctrico del sistema como una superposición de campos eléctricos que se encuentran localizados en cada guía de ondas y además que la amplitud del campo eléctrico en cada una de estas guías varía lentamente en el espacio. De lo anterior se desprenderá la teoría de modos débilmente acoplados para dos guías de ondas, luego bajo este mismo formalismo, es posible ampliar dicho modelo para un gran número de guías de ondas.

Es posible describir la propagación de la luz en un medio utilizando las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Donde \mathbf{E} es el vector campo eléctrico, ρ corresponde a la densidad de carga, \mathbf{B} corresponde al vector campo magnético y \mathbf{J} la densidad de corriente. El vector desplazamiento \mathbf{D} y el campo magnético \mathbf{H} determinan la respuesta del medio ante un campo eléctrico y magnético respectivamente, y vienen dadas por las siguientes relaciones constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (2.6)$$

Donde ϵ_0 corresponde a la permitividad eléctrica y μ_0 a la permeabilidad del vacío \mathbf{P} , \mathbf{M} corresponde al vector polarización eléctrica y magnético respectivamente.

Ahora bien, el estudio de esta tesis se centra en materiales que no son conductores eléctricos y que no poseen propiedades magnéticas, por lo que $\mathbf{M} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$ y $\rho = 0$.

Luego, bajo las condiciones que se impusieron anteriormente y aplicando rotor a la ecuación (2.4), y utilizando las relaciones constitutivas (ecuaciones (2.6) y (2.5)), junto con la ecuación (2.3) se obtiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Aplicando la relación $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y definiendo $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, la ecuación (2.7) queda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

que corresponde a la ecuación de ondas con fuentes.

Estudiemos el caso donde la propagación de la luz se da en un medio sin polarización, es decir, para el caso donde $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, luego la ecuación (2.8) queda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Ahora bien, asumiendo que la dirección de propagación del campo es en la dirección \hat{z} y que éste puede expresarse como una combinación lineal de distintos modos, se propone como ansatz que el campo sea de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{f}_j(x, y) a e^{i(k_j z - w_j t)} + cc. \right], \quad (2.10)$$

donde k_j y w_j representa el número de onda y la frecuencia temporal del modo j respectivamente. a corresponde a la amplitud y $\vec{f}_j(x, y)$ corresponde a la forma transversal del modo j . Reemplazando en ansatz en la ecuación (2.9), se obtiene la siguiente relación

$$a \left(\nabla_{\perp}^2 - k_j^2 + \frac{w_j}{c^2} \right) \vec{f}_j(x, y) = 0, \quad (2.11)$$

válida para cada j , y donde $\nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Consideremos ahora el caso donde existe la presencia de polarización, $\mathbf{P} \neq 0$, por lo que para resolver la ecuación (2.8), proponemos el siguiente ansatz en base al ansatz propuesto en la ecuación (2.10), donde adicionamos una función $a(z)$ en \hat{z} que representa la variación lenta de la amplitud de la envolvente del modo,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\vec{f}_j(x, y) a_j(z) e^{i(k_j z - w_j t)} + cc. \right]. \quad (2.12)$$

Para distinguir los distintos campos de cada guía de ondas, es conveniente introducir una notación particular, que nos permite modelar las guías de ondas como un sistema discreto, en el sentido de que el modo de cada guía de ondas se encuentra localizado en éstas y solo existe interacción entre ellas por su decaimiento exponencial, lo anterior se encuentra representado en Fig. 1. En el estudio de esta tesis, las interacciones entre los modos sólo será entre las guías vecinas más cercanas (interacción a primeros vecinos más cercanos), y donde en este caso particular sólo describiremos la interacción para dos guías de ondas, esto facilita en gran medida el entendimiento del problema y su notación, permitiendo así su generalización a un sistema de n guías [74], donde sólo se debe tener en cuenta las interacciones a primeros vecinos en cada configuración especial dada de guías de ondas. Para distinguir los distintos campos introducimos la siguiente notación $\mathbf{E}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{E}_{\alpha}^{\beta}, \mathbf{P}_{\alpha}^{\beta}$, donde el índice α indica el origen del campo respectivo y β indica donde se encuentra el campo respectivo.

Dado que estudiaremos dos guías de ondas, los índices α y β toman los valores los valores $\alpha = \{1, 2\}$ y $\beta = \{1, 2\}$. Usando esta notación la ecuación (2.12) queda

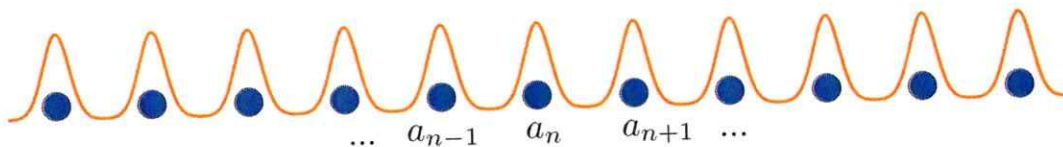


Fig. 1. Representación esquemática de la amplitud del campo eléctrico en cada guía de ondas que representa el modelo discreto en un arreglo periódico unidimensional.

$$\mathbf{E}_\alpha^\beta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\bar{f}_{\alpha,j}^\beta(x, y) a_\alpha^\beta(z) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right]. \quad (2.13)$$

Reemplazando el campo dado por la ecuación (2.13) en la ecuación (2.8), se obtiene

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_\alpha^\beta}{\partial t^2} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1}{2} \sum_j \left[\bar{f}_{\alpha,j}^\beta(x, y) a_{\alpha,j}^\beta(z) e^{i(k_j z - \omega t)} + c.c. \right], \quad (2.14)$$

Usando $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, lo anterior queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_\alpha^\beta}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \sum_j \left[\left\{ a_{\alpha,j}^\beta(z) \left(\overbrace{\nabla_\perp^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}^{=0} \right) \bar{f}_{\alpha,j}^\beta(x, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{f}_{\alpha,j}^\beta(x, y) \left(\frac{\partial^2 a_{\alpha,j}^\beta(z)}{\partial z^2} + 2ik_z \frac{\partial a_{\alpha,j}^\beta(z)}{\partial z} \right) \right\} e^{i(k_j z - \omega t)} + c.c. \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_j \left[i2k_z \bar{f}_{\alpha,j}^\beta(x, y) \frac{\partial a_{\alpha,j}^\beta(z)}{\partial z} e^{i(k_j z - \omega t)} + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde se ha utilizado la ecuación (2.11) que corresponde a la ecuación de ondas sin fuentes y es válida para todos los modos $\bar{f}_{\alpha,j}^\beta(x, y)$ y además se ha utilizado la aproximación de que la amplitud $a_{\alpha,j}^\beta(z)$ varía lentamente en la dirección longitudinal

(dirección de propagación \hat{z}), es decir $\left| \frac{\partial^2 a_{\alpha,j}^\beta}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k_j \frac{\partial a_{\alpha,j}^\beta}{\partial z} \right|$.

El lado izquierdo de la ecuación (2.15) requiere de la expresión explícita para el vector polarización \mathbf{P}_α^β , para ello separaremos \mathbf{P}_α^β en una dependencia lineal y no lineal, donde la parte lineal es no local y depende de todos los modos involucrados en el sistema, mientras que la parte no lineal sólo tiene una dependencia local y depende del modo en cada guía de ondas. Entonces, de manera general podemos escribir la polarización mediante una serie de potencias del campo eléctrico \mathbf{E}_α^β , es decir

$$\mathbf{P} = \underbrace{\epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}}_{\text{Parte lineal}} + \underbrace{\epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots}_{\text{Parte no lineal}}, \quad (2.16)$$

donde las susceptibilidades cumplen la condición $\chi^{(1)} > \chi^{(2)} > \chi^{(3)} \dots$, es decir, el término dominante en la polarización corresponde a la parte lineal. Lo anterior se puede escribir de forma más compacta considerando la polarización \mathbf{P}_α^β como una suma sobre todos los modos j del sistema, tanto por sus contribuciones lineales como no lineales

$$\mathbf{P}_\alpha^\beta = \mathbf{P}_\alpha^{\beta,L} + \mathbf{P}_\beta^{\beta,NL} = \sum_j \left[\mathbf{P}_{\alpha,j}^{\beta,L} + \mathbf{P}_{\beta,j}^{\beta,NL} \right]. \quad (2.17)$$

Ahora bien, la polarización lineal dentro de la guía β del modo j puede escribirse como

$$\mathbf{P}_{\alpha,j}^{\beta,L}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi_j^{(1),\beta} \mathbf{E}_\alpha^\beta(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi_j^{(1),\beta} \left[(\bar{f}_{1,j}^\beta(x, y) a_{1,j}^\beta(z) + \bar{f}_{2,j}^\beta(x, y) a_{2,j}^\beta(z)) e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c.c. \right]. \quad (2.18)$$

Reemplazando la ecuación anterior en la parte izquierda de la ecuación (2.15) y reordenando los términos una vez efectuada la doble derivada temporal, obtenemos para la guía β

$$\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{\beta,NL}}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \sum_j \left[\left\{ i 2k_z \bar{f}_{1,j}^\beta(x, y) \frac{\partial a_{1,j}^\beta}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_1^{(1),\beta} \left(\bar{f}_{1,j}^\beta(x, y) a_{1,j}^\beta(z) + \bar{f}_{2,j}^\beta(x, y) a_{2,j}^\beta(z) \right) \right\} e^{i(k_j z - \omega t)} + c.c. \right]. \quad (2.19)$$

2.1. No linealidad tipo Kerr

En medios centrosimétricos la polarización satisface la inversión de simetría, por lo que todos los términos de potencia par se anulan, es decir $\chi^{(2)} = 0$. Por lo tanto, el primer término no lineal que contribuye a la polarización corresponde al de susceptibilidad $\chi^{(3)}$. Considerando sólo una dependencia no lineal de orden tres en la polarización se tiene una dependencia lineal entre el índice de refracción con la intensidad, fenómeno que se conoce como Efecto Kerr.

Sin pérdida de generalidad, en el estudio de esta tesis, trataremos el problema considerando un modo, es decir, se considera $j = 1$ en la ecuación (2.19), lo que se traduce en considerar $\omega_j \rightarrow w$ y $k_j \rightarrow k$. Considerando lo anterior, la contribución no lineal de la polarización queda expresada como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\beta}^{\beta,NL}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \chi^{(3),\beta} \left| \mathbf{E}_{\beta}^{\beta}(\mathbf{r}, t) \right|^2 \mathbf{E}_{\beta}^{\beta}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{\epsilon_0}{8} \left[3\chi_w^{(3),\beta} |\bar{f}_{\beta}^{\beta}|^2 \bar{f}_{\beta}^{\beta} a_{\beta}^{\beta}(z) e^{i(kz-wt)} + \chi_{3w}^{(3),\beta} (\bar{f}_{\beta}^{\beta})^3 (a_{\beta}^{\beta})^3 e^{i(kz-3wt)} + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Reemplazando la ecuación anterior en la ecuación (2.19) obtenemos, una vez efectuada la derivada temporal

$$\begin{aligned} & - \frac{3w^2}{8c^2} \chi_w^{(3),\beta} |\bar{f}_{\beta}^{\beta}|^2 |a_{\beta}^{\beta}(z)|^2 a_{\beta}^{\beta}(z) \bar{f}_{\beta}^{\beta} e^{i(kz-wt)} + c.c. \\ & = \left\{ ik \bar{f}_{\beta}^{\beta}(x, y) \frac{\partial a_{\beta}^{\beta}(z)}{\partial z} + \chi^{(1),\beta} \frac{w^2}{2c^2} (\bar{f}_1^{\beta}(x, y) a_1^{\beta}(z) + \bar{f}_2^{\beta}(x, y) a_2^{\beta}(z)) \right\} e^{i(kz-wt)} + c.c. \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde no se han considerado términos de tercera armónico ($w' = 3w$), por ser un fenómeno que requiere "phase-matching" [75].

Finalmente, ya que la ecuación (2.21) se satisface separadamente para $e^{i(kz-wt)}$ y su conjugado, obtenemos finalmente

$$- \frac{3w^2}{8c^2} \chi_w^{(3),\beta} |\bar{f}_{\beta}^{\beta}|^2 \bar{f}_{\beta}^{\beta} |a_{\beta}^{\beta}(z)|^2 a_{\beta}^{\beta}(z) = ik \bar{f}_{\beta}^{\beta}(x, y) \frac{\partial a_{\beta}^{\beta}(z)}{\partial z} \chi^{(1),\beta} \frac{w^2}{2c^2} (\bar{f}_1^{\beta}(x, y) a_1^{\beta}(z) + \bar{f}_2^{\beta}(x, y) a_2^{\beta}(z)). \quad (2.22)$$

Como se mencionó antes, dado que estamos estudiando 2 guías, eliminamos el índice β asignándolo por 1 y 2 según corresponda. Y por otro lado, para eliminar la dependencia transversal se multiplica la ecuación (2.22) por el complejo conjugado $\bar{f}_\beta^{\beta*}$ y se integra con respecto a x e y , obteniendo un sistema de dos ecuaciones diferenciales que determina la dinámica de cada guía de ondas

$$-i \frac{da_1(z)}{dz} = \nu a_1(z) + V_2 a_2(z) + \gamma |a_1(z)|^2 a_1(z), \quad (2.23)$$

$$-i \frac{da_2(z)}{dz} = \nu a_2(z) + V_1 a_1(z) + \gamma |a_2(z)|^2 a_2(z),$$

con $a_1^1(z) = a_1^2(z) = a_1(z)$ y $a_2^1(z) = a_2^2(z) = a_2(z)$ y donde la constante de propagación ν se define como

$$\nu = \frac{w^2}{2kc^2} \chi^{(1)} = \frac{1}{2cn} \chi^{(1)}. \quad (2.24)$$

La constante de acoplamiento V_n viene dada por

$$V_n = \nu \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_n^\beta \bar{f}_\beta^{\beta*} dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}_\beta^\beta|^2 dx dy}, \quad n = \{1, 2\}. \quad (2.25)$$

donde $\beta = \{1, 2\}$ toma un valor distinto al valor asignado por n . Y finalmente, definimos el coeficiente no lineal dado por

$$\gamma = \frac{3kw^2}{8c^2} \chi_w^{(3),\beta} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}_\beta^\beta|^4 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}_\beta^\beta|^2 dx dy}, \quad \beta = \{1, 2\}. \quad (2.26)$$

La ecuación (2.23) se puede generalizar para un sistema unidimensional de N guías, donde considerando nuevamente interacción a primeros vecinos queda

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \nu a_n + V(a_{n-1} + a_{n+1}) + \gamma |a_n|^2 a_n = 0. \quad (2.27)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación No Lineal de Schödinger discreta (DNLS por sus siglas en inglés) [76]

La ecuación (2.27) describe el comportamiento de la luz cuando las guías de ondas están debilmente acopladas y corresponde a la ecuación dinámica de la luz para el caso de una dimensión. Esta ecuación puede ser generalizada a más dimensiones quedando

$$\frac{\partial a_{\mathbf{n}}}{\partial z} + \nu_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{n}} V_{\mathbf{n},\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}} + \gamma |a_{\mathbf{n}}|^2 a_{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.28)$$

con $\nu_{\mathbf{n}}$ la energía de sitio (que en este caso corresponde a la constante de propagación) y $V_{\mathbf{n},\mathbf{m}}$ corresponde al acoplamiento entre las guías en \mathbf{n} con \mathbf{m} . En este caso, la información específica de cada red y su dimensión está contenida en el subíndice \mathbf{n} . Por ejemplo, para una red bi-dimensional cuadrada considerando acoplamiento a primeros vecinos, el término $\sum_{\mathbf{m} \neq \mathbf{n}} V_{\mathbf{n},\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}}$ que relaciona la interacción de una guía ubicada en el sitio (n, m) viene dado por $V(a_{n,m+1} + a_{n,m-1} + a_{n+1,m} + a_{n-1,m})$.

2.2. Propiedades lineales y difracción discreta

Primero que todo, debemos entender las propiedades fundamentales que se desprenden de la ecuación DNLS, para ello estudiaremos las propiedades lineales fundamentales en estos sistemas periódicos discretos. Una representación de un sistema periódico de guías de ondas se observa en la Fig. 2.

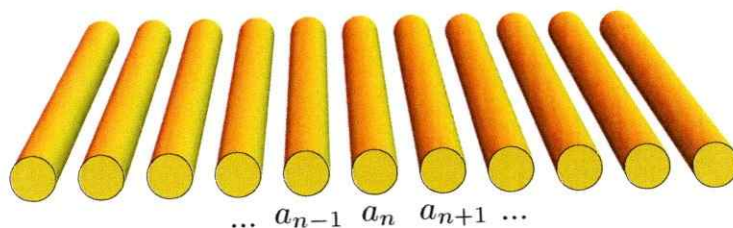


Fig. 2. Representación esquemática de un sistema de guías de ondas acoplados.

En este caso, se ha considerado solamente acoplamiento a primeros vecinos.

En el régimen lineal ($\gamma = 0$), este sistema puede ser descrito por la ecuación lineal de Schrödinger (DLS) y al considerar solo acoplamiento a primeros vecinos, se tiene la siguiente ecuación que gobierna la dinámica completa para un sistema de N guías de ondas,

$$i \frac{\partial a_n}{\partial z} + \nu a_n + V(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0. \quad (2.29)$$

En este caso, se ha considerado que todas las guías de ondas son idénticas, por lo que cada constante de propagación ν es la misma para todas. Se puede eliminar

este factor realizando la siguiente transformación $a_n(z) = u_n(z)e^{-ivz}$, quedando la ecuación (2.29)

$$i \frac{\partial u_n}{\partial z} + V(u_{n-1} + u_{n+1}) = 0. \quad (2.30)$$

Buscando soluciones extendidas para ello u_n toma la forma $u_n(z) = U_0 e^{i(nk + \Omega z)}$, que corresponde a ondas extendidas a lo largo de todo el arreglo. Reemplazando la expresión de $u_n(z)$ en la ecuación (2.30), se obtiene la siguiente relación de dispersión

$$\Omega(k) = 2V \cos(k). \quad (2.31)$$

Donde k corresponde al vector de onda, Ω corresponde a la constante de propagación o la frecuencia espacial. La forma de la relación de dispersión dentro de la primera zona de Brillouin [63] se encuentra en la Fig. 3. De la periodicidad de $\Omega(k)$ se tiene que los autovalores o bandas del sistema está acotada entre los valores $-2V \leq \Omega \leq 2V$. Además la velocidad de grupo $v_g(k)$ que se define como

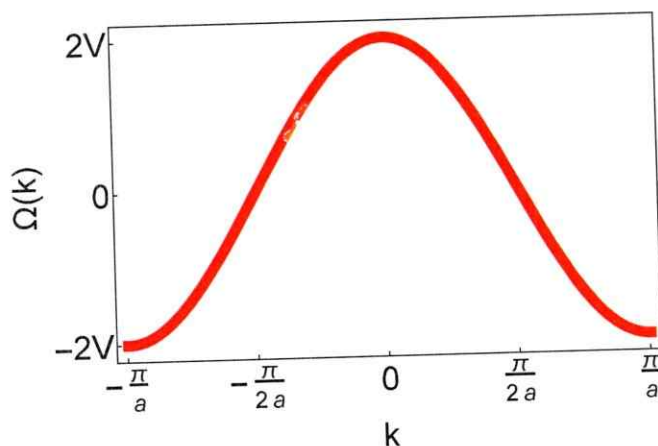


Fig. 3. Relación de dispersión $\Omega(k)$ en función del vector de onda k . En este caso a representa el parámetro de red o la distancia (periódica) entre cada guía de ondas.

$$v_g(k) = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = -2V \sin(k), \quad (2.32)$$

que también se encuentra acotada por $-2V \leq v_g(k) \leq 2V$ presentando un máximo $v_{gm}(k)$ en $k = \pm \frac{\pi}{2a}$ en la primera zona de Brillouin, con valor $v_{gm}(k = \pi/2) = 2V$.

Finalmente, en la Fig. 4 se muestran los modos estacionarios característicos con su respectivo autovalor asociado correspondiente a la banda lineal del sistema.

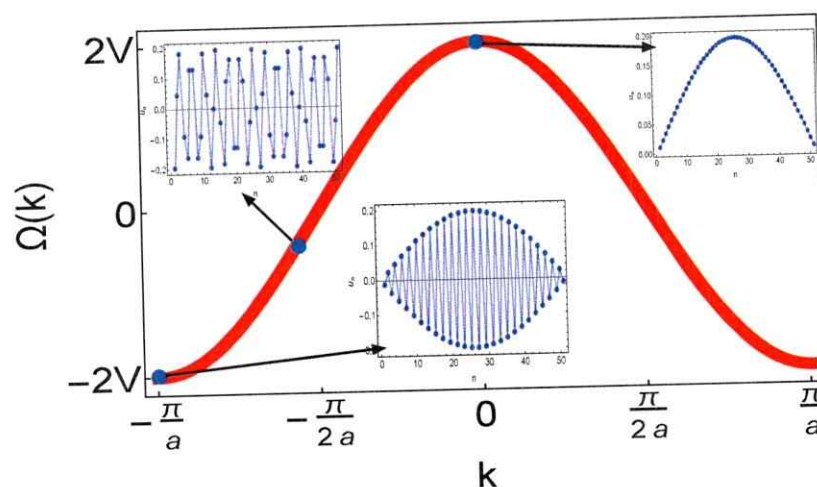


Fig. 4. Relación de dispersión $\Omega(k)$ en función del vector de onda k para un sistema compuesto de 51 guías considerando $a = 1$. Cada recuadro de la figura representa la forma del modo estacionario para tres valores de $\Omega(k)$. El modo del recuadro superior izquierdo es para un valor de $\Omega(k) = -0.24$; Modo del recuadro inferior es para un valor $\Omega = -2V$ (banda inferior para $k = -\pi$) y finalmente el modo del recuadro superior derecho es para un valor de $\Omega = 2V$ (banda superior para $k = 0$).

De lo anterior y a través de la relación de dispersión de la ecuación (2.31) y de la Fig. 4 nuestro modelo discreto lineal posee modos extendidos que se conocen como modos de Bloch [3].

Por otro lado, si inyectamos en nuestro sistema de guías de ondas, una condición inicial fuertemente localizada (función tipo delta δ), la solución para todo z de la ecuación (2.30) se puede encontrar de forma exacta [77] y viene dada por

$$u_n = Ai^n J_n(2Vz), \quad (2.33)$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de orden n y A es la amplitud. La evolución dinámica de esta solución se encuentra en la Fig. 5, que corresponde a la evolución dinámica de la amplitud de la función de onda de cada guía de un arreglo unidimensional 1D (Fig. 2). La evolución dinámica observada en Fig. 5 se conoce como difracción discreta en un arreglo homogéneo, este fenómeno es característico en los sistemas de guías de ondas o sistemas discretos y es bastante diferente a la difracción que se da en sistemas continuos, ya que la luz en vez de difractar o expandirse con el máximo de la distribución en el lugar donde fue excitada inicialmente, presenta lóbulos laterales de gran intensidad, mientras que en el sitio donde inicialmente fue excitado existe una pequeña amplitud apreciable. Esta dinámica que se presenta en los arreglos discretos abre un campo para estudiar la dinámica de condiciones inicialmente localizada al incluir desorden y no linealidad y que se estudiarán en las siguientes secciones.

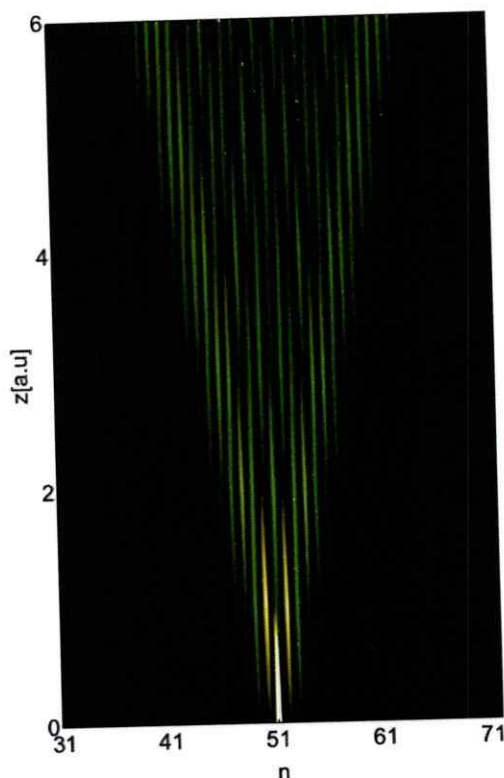


Fig. 5. Evolución dinámica a lo largo de la componente longitudinal z de una red 1D de guías de ondas. La condición inicial tipo delta se inyectó inicialmente en la guía $n = 51$.

2.3. Modos estacionarios no lineales

Esta sección se discutirán de forma breve algunas de las propiedades de los modos no-lineales localizados. Para ello, se considera $\gamma \neq 0$ en la ecuación (2.27) y efectuando la misma transformación comentada en la sección anterior para eliminar la variable ν , se tiene la ecuación DNLS

$$i \frac{\partial u_n}{\partial z} + V(u_{n-1} + u_{n+1}) + \gamma |u_n|^2 u_n = 0. \quad (2.34)$$

A continuación, se buscan soluciones no lineales estacionarias de la forma $u_n(z) = u_n e^{i\Omega z}$, con $u_n \in \mathbb{R}$ y donde Ω es la constante de propagación o frecuencia espacial.

Usando el ansatz anterior en la ecuación homogénea 1D descrita por la ecuación DNLS (2.34), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones no lineales

$$\Omega u_n = V(u_{n-1} + u_{n+1}) + \gamma u_n^3, \quad (2.35)$$

que corresponde a un set de N ecuaciones no lineales acopladas. Para resolver el sistema de ecuaciones (2.35) usamos el método multidimensional de Newton-Raphson en varias variables, tomando como *semilla* o punto de partida un perfil fuertemente localizado (límite anticontínuo), dado por

$$u_n = u_n \delta_{n,n_0}, \quad (2.36)$$

con n_0 el sitio donde se centra inicialmente el modo localizado no-lineal. En el límite dado por la ecuación (2.36) se tiene un modo no lineal fuertemente localizado que a partir del sistema de ecuaciones (2.35) se deduce que es de la forma $\Omega \approx \gamma u_{n_0}^2$. Lo anterior, se da para el caso donde Ω está alejado en ambos bordes de la banda lineal $[-2V, 2V]$ (ver Fig. 6 en los puntos anaranjados y rojos alejados de la banda lineal). Ahora bien, cuando la constante de propagación Ω del modo no lineal se aproxima a los bordes de la banda lineal el modo tiende a deslocalizarse hasta que converge a la forma del modo lineal (ver Fig. 6 para los puntos rojos y anaranjados en el borde de la banda lineal, es decir, para el caso $\Omega = -2V$ y $\Omega = 2V$).

Existen dos cantidades conservadas para el sistema descrito por la ecuación (2.34), que corresponde a la potencia óptica (Norma), dada por

$$P = \sum_{\mathbf{n}} |u_{\mathbf{n}}|^2, \quad (2.37)$$

y el Hamiltoniano

$$H = - \sum_{\mathbf{n}} \left(\sum_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{m}} u_{\mathbf{n}}^* + c.c. + \frac{\gamma}{4} |u_{\mathbf{n}}|^4 \right), \quad (2.38)$$

donde en este caso las coordenadas \mathbf{n} y \mathbf{m} dependen de la dimensión y del tipo de red que se está considerando, por ejemplo, para una red 1D que es el caso que se está tratando se tiene $\mathbf{n} = n; \mathbf{m} = m$, mientras que para una red 2D se tendrá que $\mathbf{n} = (p, q)$ y $\mathbf{m} = (r, s)$. Para una red 1D el Hamiltoniano queda

$$H = - \sum_n \left(u_{n+1} u_n^* + u_{n-1} u_n^* + \frac{\gamma}{4} |u_n|^4 \right), \quad (2.39)$$

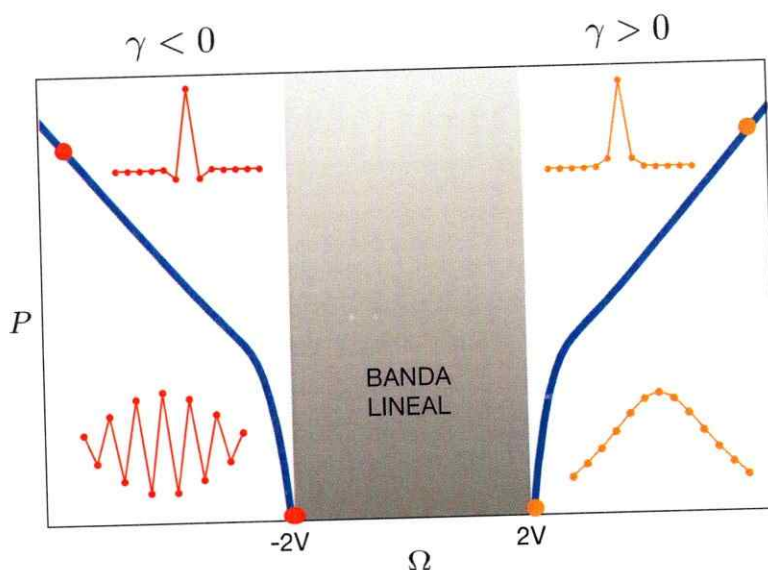


Fig. 6. Diagrama de P en función de Ω de los modos no lineales para $\gamma < 0$ (izquierda) y $\gamma > 0$ (derecha). Los puntos anaranjados (rojos) representan el valor de P para valores de Ω alejados de la banda lineal y en el borde de la banda lineal para $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$).

Finalmente, una cantidad que nos permite dar cuenta del grado de localización del modo sea tanto lineal o no lineal, es el grado de participación R [78], que se define como

$$R = \frac{(\sum_n |u(z)|^2)^2}{\sum_n |u(z)|^4}. \quad (2.40)$$

Para una condición inicial tipo delta (donde sólo se excita un sólo sitio) el valor de la razón de participación toma el valor $R = 1$ y para un modo totalmente extendido en el sistema el valor de la razón de participación se aproximará al valor $R = N$ con N el número de sitios o guías total.

En Fig. 6 se observa un como lucen la "banda" no lineales para una red 1D con no linealidad tipo Kerr. En este caso, se ha gráficado la Normal o potencia del modo no lineal en función de la constante de propagación Ω . Tal como se puede observar en los puntos rojos y anaranjados que se encuentran lejos de la banda lineal, los modos no lineales en el limite anticontinuo están fuertemente localizados teniendo un valor $R \approx 1$ y a medida que el modo no lineal se aproxima al borde de las bandas lineales, su valor de R crece aproximandose a un valor $R \approx N$, que corresponde al valor de R de los modos con $\Omega = \pm 2V$.

Capítulo 3

Desorden

A través de los estudios realizados por P. W. Anderson [1] se sabe que la presencia de desorden en un red infinita produce la localización de los modos del sistema, dicho fenómeno se conoce como localización de Anderson y no sólo aplica al contexto de materia condensada [1,6] donde fue estudiado inicialmente, sino que también se ha estudiado en otros contextos de la física tales como fenómenos ópticos [12], acusticos [79], condensados de Bose-Einstein [10,46], entre otros. Uno de los efectos o consecuencias de este fenómeno de localización es que la difusión de un paquete de ondas se dificulta a medida que el grado de dicho desorden aumenta [4,5]. Lo anterior, puede verse alterado si se incluyen efectos no lineales, donde bajo cierto umbral del parámetro no lineal, se puede favorecer o desfavorecer la localización y por lo tanto promover o inhibir la difusión de un paquete de ondas. [50-52].

En esta sección se discutirá y analizará los aspectos generales al considerar sistema de guías de ondas desordenadas en el contexto óptico [75], que en este caso específico se analizó el efecto del desorden en las energías de sitios (desorden lineal) o en las constantes de propagación cuando se estudia en el contexto de las guías de ondas. Este desorden, se traduce en una distribución aleatoria en las energías de sitio de nuestro sistema unidimensional de guías de ondas. Si bien también puede se considerar desorden en los acoplamientos y en la no linealidad, en esta tesis no estudiaremos el efecto de incluir dichos tipos de desorden. Para lograr un mayor entendimiento de los conceptos, se ha optado por describir el método de la matriz de transferencia para luego estudiar sistemas de impurezas aisladas y desordenadas a través del coeficiente de transmisión y reflexión que se desprende del método mencionado anteriormente. Finalmente, se darán a conocer los aspectos generales que

se han observado en la propagación de condiciones inicialmente localizadas y transporte de ondas planas en sistemas desordenados tanto en el régimen lineal y no lineal.

3.1. Matriz de transferencia

La ecuación DNLS dada por la ecuación (2.27) considera el caso donde todas las energías de sitios son iguales, para este caso, consideraremos que cada guía posee una constante de propagación ν distinta de las demás, para ello nombraremos a cada una de las constantes de propagación o energías de sitio de la forma $\nu \rightarrow \epsilon_n$, que representa la energía de sitio de la guía n -ésima. Estamos interesados en la ecuación estacionaria de Schrödinger, para ello realizamos la transformación $a_n(z) = a_n e^{i\Omega z}$ en la ecuación (2.27), quedando

$$-\Omega a_n = \epsilon_n a_n + V(c_{n+1} + c_{n-1}) + \gamma |a_n|^2 a_n. \quad (3.1)$$

Consideremos una red unidimensional infinita donde en una región de largo N (es decir, existen N sitios o guías de ondas), se encuentran guías de ondas con diferentes energías de sitios $\epsilon_n \neq 0$, mientras que las energías de sitio de las guías que rodean dicha región poseen igual energía de sitio ϵ_l . Lo anterior se encuentra representado en Fig. 7

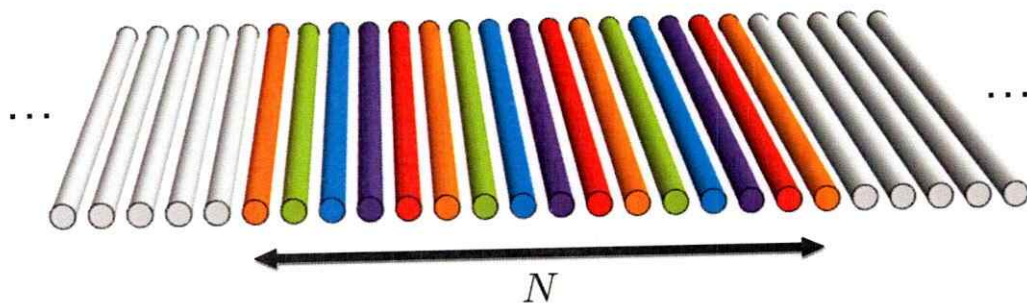


Fig. 7. Representación esquemática de un sistema de N guías de ondas con distinta energía de sitio (representada por colores) incrustada en un sistema de guías de ondas idénticas entre sí.

La ecuación (3.1) en forma matricial queda de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\Omega - \epsilon_n - \gamma|a_n|^2 a_n)}{V} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Sin pérdida de generalidad en este caso, consideraremos $V = 1$. La forma que se observa en la ecuación (3.2) nos permite definir la matriz de transferencia M_n [80] para la ecuación discreta de Shrödinger

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega - \epsilon_n - \gamma|a_n|^2 a_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Tal como se puede observar, la matriz de transferencia M_n relaciona los dos vectores que se encuentran en ambos extremos de la ecuación (3.3), y estos contienen la información entre las amplitudes de dos modos más cercanos. Ahora bien, nos interesa el problema de una onda moviéndose a la izquierda y a la derecha en un sitio n , para ello expresaremos la ecuación (3.3) en términos de éstas dos ondas moviéndose, es decir, en el sitio n tenemos

$$c_n = Ae^{ink} + Be^{-ink}. \quad (3.4)$$

Luego, los vectores que se encuentran en la ecuación (3.3) se pueden escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik} & e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{ink} \\ Be^{-ink} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Ae^{ink} \\ Be^{-ink} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

y también

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik} & e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{i(n+1)k} \\ Be^{-i(n+1)k} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} Ae^{i(n+1)k} \\ Be^{-i(n+1)k} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

donde se ha definido \mathbf{Q} [80]. Reemplazando las ecuaciones (3.5) y (3.6) en la ecuación (3.3) se obtiene

$$\begin{pmatrix} Ae^{i(n+1)k} \\ Be^{-i(n+1)k} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} M_n \mathbf{Q} \begin{pmatrix} Ae^{ink} \\ Be^{-ink} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

donde la matriz inversa \mathbf{Q}^{-1} viene dado por

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2i \sin(k)} \begin{pmatrix} e^{ik} & -1 \\ -e^{-ik} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

De lo anterior y aprovechandonos de la definición de \mathbf{Q} , se puede redefinir el la matriz de transferencia M_n , quedando

$$M_n = \mathbf{Q}^{-1} M_n \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} \Omega - \epsilon_n - \gamma |a_n|^2 a_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Q}. \quad (3.9)$$

En este caso la matriz de transferencia M_n relaciona la función de onda entre los sitios n y $n + 1$.

Tal como se observa en la ecuación (3.8) la matriz \mathbf{Q} (o \mathbf{Q}^{-1}) sólo depende del vector de onda k , por lo que la expresión dada en la ecuación (3.7) es válida tanto para la matriz de transferencia en un sólo sitio n como también, para un conjunto de varias guías de ondas. Luego, para un conjunto de N guías (ver Fig. 7), la matriz de transferencia del sistema total M^N viene dada por la multiplicación de las matrices de transferencias de cada sitio, es decir

$$M^{(N)} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1. \quad (3.10)$$

Dado que la matriz \mathbf{Q} no depende de la energía de sitio ϵ_n , entonces a través de las ecuaciones (3.9) y (3.10), la matriz de transferencia resultante $M^{(N)}$ para un sistema de N guías, vendrá dada por

$$M^{(N)} = \mathbf{Q}^{-1} M^{(N)} \mathbf{Q}. \quad (3.11)$$

Finalmente, el coeficiente de transmisión T y el de reflexión [80] vienen dados por

$$T = \left| M_{22}^{(N)} \right|^2; \quad R = 1 - T = 1 - \left| M_{22}^{(N)} \right|^2. \quad (3.12)$$

La forma dada por la ecuación (3.11) y la manera en que se relaciona ésta con el coeficiente de transmisión y reflexión (ecuación (3.12)) tiene la particularidad de entregar de forma compacta las relaciones entre las amplitudes de cada guía de ondas permitiendo así estudiar sistemas desordenados a través de cálculos numéricos que se desarrollarán en esta tesis.

3.2. Impurezas

En esta sección se detallará de forma explícita el cálculo del coeficiente de transmisión para un sistema de impurezas de N sitios, para ello detallemos explícitamente el sistema que fue representado en la Fig. 7. La región que está contenida en los sitios $n = 0, 1, \dots, N - 1$, poseen energías de sitios ϵ_n diferentes entre si y están dados de forma arbitraria, mientras que $\epsilon_n \equiv \epsilon_l = 0$ para $\forall n \leq 0$ y $n > N$. Lo anterior se observa de mejor manera en Fig. 8.

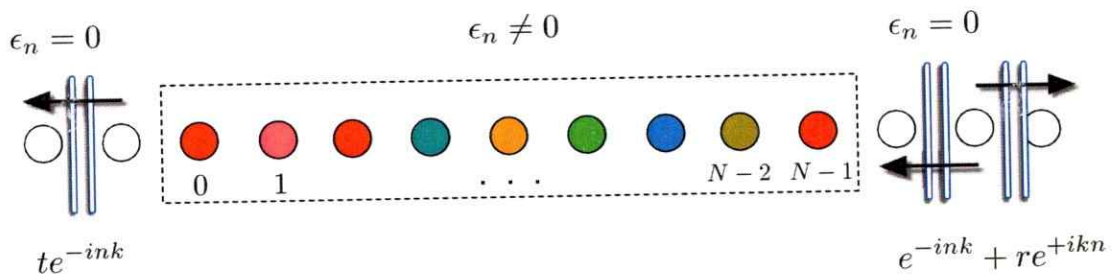


Fig. 8. Vista transversal de un sistema de N guías de ondas con distinta energía de sitio (representada por colores) incrustada en un sistema de guías de ondas idénticas entre sí con $\epsilon_n = 0$. En ambos extremos del conglomerado, se observan las ondas planas con su respectiva dirección de propagación.

Tal como se observa en Fig. 8, consideremos el caso de una onda plana que viene desde la derecha e^{-ink} y se enfrenta a la "impureza" de N sitios. A la izquierda, en la región fuera de la impureza sólo existirá una onda transmitida te^{-ikn} que se propaga hacia la izquierda. A su vez, dado que la onda que proviene desde la derecha se

enfrenta a una región de "impurezas" existirá también una onda que se refleja re^{ikn} el sentido contrario. Como "condición inicial"¹ tendremos que la función de onda en los sitios $n = 0$ y $n = -1$ vendrán dadas por

$$a_{-1} = t_0 e^{-ik}, \quad a_0 = t. \quad (3.13)$$

Usando ahora la matriz de transferencia, podemos relacionar la función de onda de los sitios a_{N-1} y a_N con a_0 y a_{-1} de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a_N \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = M_{N-1} M_{N-2} \dots M_1 M_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} = M^N \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (3.14) por la matriz \mathbf{Q}^{-1} , se tiene

$$\mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} a_N \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} M^N \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Usando la definición de \mathbf{Q}^{-1} dada por la ecuación (3.8) y además usando la definición de M^N dada por la ecuación (3.11), la ecuación (3.15) queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{2i \sin(k)} \begin{pmatrix} e^{ik} a_N - a_{N-1} \\ -e^{-ik} a_N + a_{N-1} \end{pmatrix} = M^{(N)} \frac{1}{2i \sin(k)} \begin{pmatrix} e^{ik} a_0 - a_{-1} \\ -e^{-ik} a_0 + a_{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Ahora bien, de la ecuación (3.13), se desprende que $e^{ik} a_0 - a_{-1} = 0$ y $-e^{-ik} a_0 + a_{-1} = 2ti \sin(k)$, por lo que el lado derecho de la ecuación (3.16) queda

$$\frac{1}{2i \sin(k)} \begin{pmatrix} e^{ik} a_N - a_{N-1} \\ -e^{-ik} a_N + a_{N-1} \end{pmatrix} = M^{(N)} \frac{1}{2i \sin(k)} \begin{pmatrix} 0 \\ 2ti \sin(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{12}^{(N)} \\ tM_{22}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

¹Si bien, en esta tesis sólo trataremos el caso de desorden en las energías de sitios (desorden lineal), estudiaremos también el efecto de considerar dicho desorden en un medio no lineal ($\gamma \neq 0$). Por lo anterior y para evitar efectos de multiestabilidad [43] debido a que la ecuación (3.1) es no lineal, se utilizará el método del "Fixed Output Method" [43] para poder determinar una expresión unívoca para el coeficiente de transmisión y reflexión.

Finalmente, usando la definición dada por la ecuación (3.12) se tiene que el coeficiente de transmisión y de reflexión quedan expresados de la siguiente forma

$$T = \frac{4 \sin^2(k) |t_0|^2}{|-e^{-ik} a_N + a_{N-1}|^2}, \quad (3.18)$$

$$R = \left| \frac{e^{ik} a_N - a_{N-1}}{e^{-ik} a_N - a_{N-1}} \right|^2.$$

La ecuación (3.18) será de gran utilidad y sólo exige conocer las amplitudes a_N y a_{N-1} , y mediante una simple iteración numérica usando la ecuación (3.14), permite conocer el coeficiente de transmisión y reflexión para cualquier sistema, ya sea incluyendo desorden en las energías de sitio o no.

Impureza individual lineal

Consideremos el caso más simple de impureza, que corresponde a una impureza lineal para $\gamma = 0$ y se encuentra en el sitio $n = 0$, de forma general tenemos $\epsilon_n = \delta_{n,0} \epsilon_0$, $\forall n$. Como se considera el caso $\gamma = 0$, entonces sin pérdida de generalidad, consideramos $t = t_0 = 1$. Finalmente a través de la expresión dada en la ecuación (3.13) y por $N = 0$, el coeficiente de transmisión y de reflexión dado por la ecuación (3.18), para una impureza individual lineal queda expresada en forma compacta como

$$T = \frac{4 \sin^2(k)}{4 \sin^2(k) + \epsilon_0^2}, \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

$$R = \frac{\epsilon_0^2}{4 \sin^2(k) + \epsilon_0^2}. \quad (3.21)$$

Notemos que $T = 1$ sólo cuando $\epsilon_0 = 0$.

N Impurezas lineales idénticas

Bajo la misma línea, si consideramos sistemas de impurezas más grandes e idénticas entre sí: $\epsilon_n = \epsilon$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, existe una expresión general para el coeficiente de transmisión que se obtiene a través de la identidad de Chebyshev, ver

Apéndice (A) para más detalles. Entonces para un sistema de N impurezas idénticas el coeficiente de transmisión viene dado por

$$T_N = \frac{4 \sin^2(k) \sin^2(q)}{4 \sin^2(k) \sin^2(q) + \epsilon^2 \sin(Nq)}, \quad (3.22)$$

$$R_N = \frac{\frac{\epsilon^2}{4 \sin^2(k)} \frac{\sin^2(Nq)}{\sin^2(q)}}{1 + \frac{\epsilon^2}{4 \sin^2(k)} \frac{\sin^2(Nq)}{\sin^2(q)}}$$

donde $2 \cos(q) = \Omega - \epsilon$. A través del coeficiente de reflexión dado por la ecuación (3.22) se puede obtener de manera más rápida los vectores de onda k que cumplen con la condición de resonancia ($T = 1$), para ello imponemos $R = 0$ en la ecuación (3.22), quedando

$$\sin(Nq) = 0. \quad (3.23)$$

Usando la expansión del $\sin(Nx)$ como una multiplicación de funciones $\sin(x)$, se tiene

$$\sin(Nq) = 2^{N-1} \prod_{m=0}^{N-1} \sin\left(\frac{m\pi}{N} + q\right) = 0. \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

Usando la expresión $\cos(q) = \frac{\Omega - \epsilon}{2} = \frac{2 \cos(k) - \epsilon}{2}$ se obtienen explícitamente los vectores de onda k resonantes del sistema, dados por

$$k = \arccos\left(\cos\left(\frac{m\pi}{N}\right) + \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (3.26)$$

válido para cada $m = 1, 2, \dots, N-1$ y como condición extra se debe tener que $k \in \mathbb{R}$. En Fig. 9 se muestran algunas curvas de transmisión para diferentes valores de $N = 1, 2, 3, 6$ y 18 , todos para un valor de $\epsilon = 0.5$. Como se observa en Fig. 9 dependiendo del número de sitios de la impureza se dan diferentes zonas donde $T = 1$, que corresponden a los vectores de onda k resonantes que no son "escatereados" por dicha impureza.

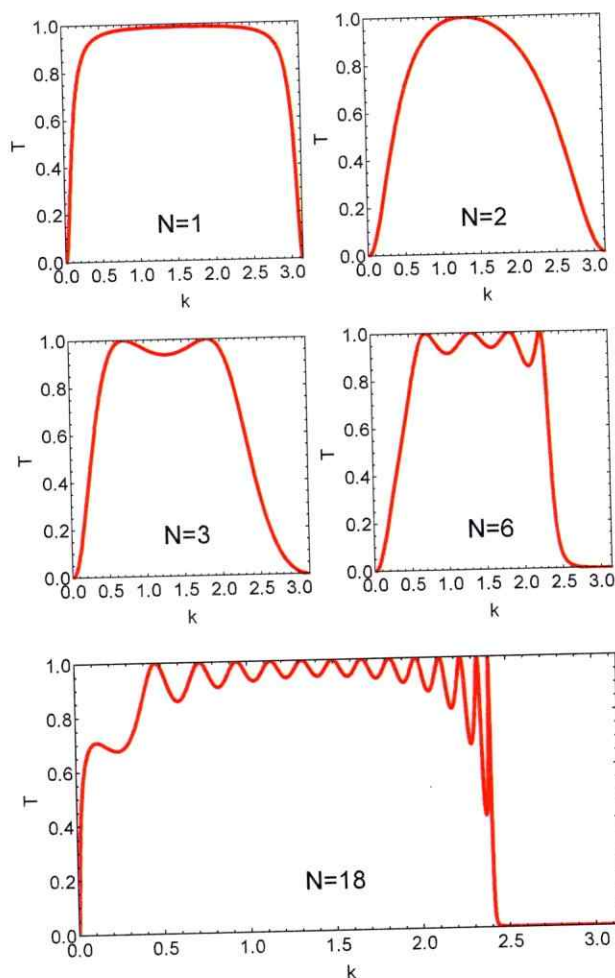


Fig. 9. Coeficiente de transmisión en función de k para 5 diferentes tipos impurezas de largo $N = 1, 2, 3, 6$ y 18 para $\epsilon = 0.5$

3.3. Sistemas con desorden de impurezas y localización de Anderson

En esta sección estudiaremos el coeficiente de transmisión para modelos desordenados donde se considerará una variación aleatoria en la constante de propagación ϵ_n de las guías de ondas, este modelo llevado a la DLS se conoce como Modelo de Anderson. Debido a dicho desorden, la forma analítica del coeficiente de transmisión

se convierte en una tarea casi imposible de efectuar, por lo que usando el formalismo de la matriz de transferencia e iteraciones numéricas estudiaremos este modelo. También estudiaremos los efectos de la no linealidad en el coeficiente de transmisión,

Una de las distribuciones de desorden para la constante de propagación ϵ_n que se usará en esta tesis corresponde a la llamada distribución rectangular, y se define como

$$p(\epsilon) = \begin{cases} W^{-1}, & -W/2 < \epsilon < W/2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.27)$$

donde el parámetro W determina el ancho de desorden. Además, se asumirá que el valor promedio $\langle \epsilon \rangle$ de las constantes de propagación aleatorias es cero y que dos valores aleatorios de la constante de propagación ϵ_n son estadísticamente independientes una de otra:

$$\langle \epsilon \rangle = \int \epsilon p(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad \text{y} \quad \langle \epsilon_n, \epsilon_{n'} \rangle = 0. \quad (3.28)$$

A partir de la ecuación (3.18) calcularemos numéricamente el coeficiente de transmisión para un sistema desordenado de N guías, con el tipo de desorden considerado anteriormente, es decir $\epsilon_n \in [-W, W]$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y por simplicidad consideraremos que las constantes de propagación externas a esta región serán cero, es decir, $\epsilon_n = 0$ para $n < 0$ y $n > (N - 1)$.

Análogamente a como fue explicado en la sección (3.2), consideraremos $t = 1$, por lo que $c_0 = 1$ y $c_{-1} = e^{-ik}$ y usando la matriz de transferencia M_n dada por la ecuación (3.14) iteramos numéricamente hasta encontrar la función de onda en los sitios $N - 1$ y N , encontrando finalmente el coeficiente de transmisión usando la ecuación (3.18).

En Fig. 10 se muestra como luce el coeficiente de transmisión T en función de la energía $E = \cos(k)$ de la onda que intenta propagarse en el medio desordenado con un ancho de desorden $W = 0.4$ (considerando sólo una realización de desorden). Primero se observan que existen "peaks" de transmisiones e inmediatamente cercano a éstos se tienen valores de $T \approx 0$. Existen grandes fluctuaciones en T incluso para valores muy cercanos de E . Lo anterior puede entenderse observando cómo lucen las amplitudes de los modos para dichas energías, ya que el coeficiente de transmisión depende de cómo es la forma espacial de dichos modos. En este caso, en Fig. 10

para un valor $T \approx 0$ (punto rojo con $E = 0.743$) se tiene un modo que para dicha energía E se encuentra localizado, calculando su razón de participación [78] se obtiene $R \approx 30$, en cambio, para un valor de $T \approx 1$ (punto azul con $E = 0.686$) se tiene un modo extendido en el sistema con un valor en la razón de participación $R \approx 230$.

Ahora bien, es interesante preguntarse cómo varía la transmisión de ondas planas en función del largo L para un sistema desordenado. Esto fue estudiado antes [53,54] y en la figura 11 se observa cómo varía el $\langle \ln T \rangle$ en función del largo N , donde se ha promediado sobre un total de 100 configuraciones distintas de desorden y se han considerado tres casos de ancho de desorden $W = 1, 1.5$ y 2.0 .

En este caso se tiene que el $\langle \ln T \rangle$ varía de forma lineal con respecto al largo L del sistema, lo anterior se debe a que para un valor chico de $L = N$ la probabilidad de que el sistema soporte estados extendidos (en el sentido de modos que tengan un extensión del orden del largo del sistema) es más alta en comparación con sistemas más grandes donde en este caso los modos del sistema tienen una extensión mucho menor en comparación con el tamaño N o cuando el tamaño del sistema es más grande que la longitud de localización ξ [81]. La longitud de localización ξ se relaciona con el coeficiente de transmisión de la siguiente manera

$$\langle \ln T \rangle = -\frac{2L}{\xi}, \quad L = N. \quad (3.29)$$

Finalmente, de lo anterior se concluye que el coeficiente de transmisión T decrece de forma exponencial en función del largo del sistema desordenado y se debe a que en ciertas regiones de nuestro sistema desordenado la función de onda se encuentra localizada, tal como se observa en la Fig. 10 (punto rojo) y fuera de esta región donde la función se encuentra localizada, la amplitud del modo a_n decrece de la forma $|a_n| \sim e^{-(N-n)/\xi}$.

Por otro lado, si consideramos un sistema desordenado en un régimen no-lineal con $\gamma \neq 0$, el coeficiente de transmisión vendrá dado por la ecuación (3.18)

$$T = \frac{4 \sin^2(k) |t_0|^2}{|-e^{-ik} a_N + a_{N-1}|^2}.$$

Cuando $\gamma = 0$ el coeficiente de transmisión depende solamente del vector de on-

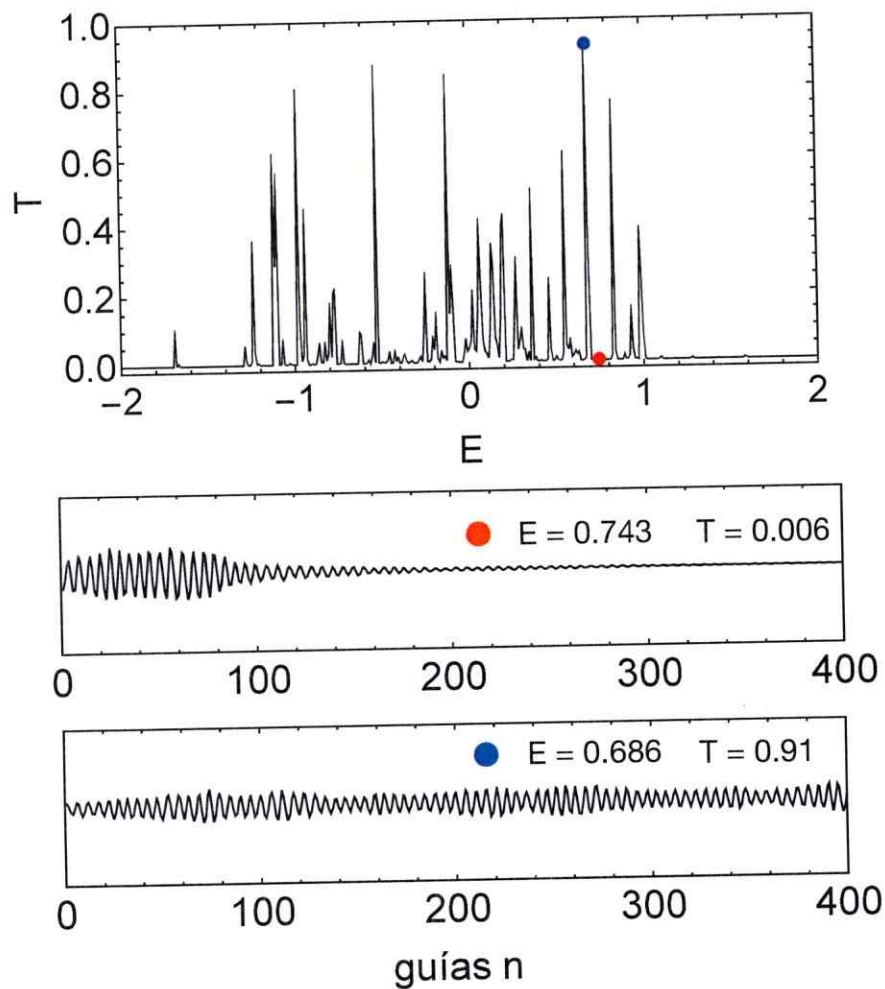


Fig. 10. Figura de arriba: transmisión T en función de la energía $E = 2 \cos(k)$ de la onda propagante en un sistema de $N = 400$ sitios desordenados. La figura corresponde una sola realización de desorden considerando $W = 0.4$. El punto rojo(azul) representa el valor en el cual $T \approx 0$ ($T \approx 1$). Figuras de abajo: Amplitud del modo en función de cada una de las guías para el valor de $E = 0.743$ (punto rojo) y $E = 0.686$ (punto azul).

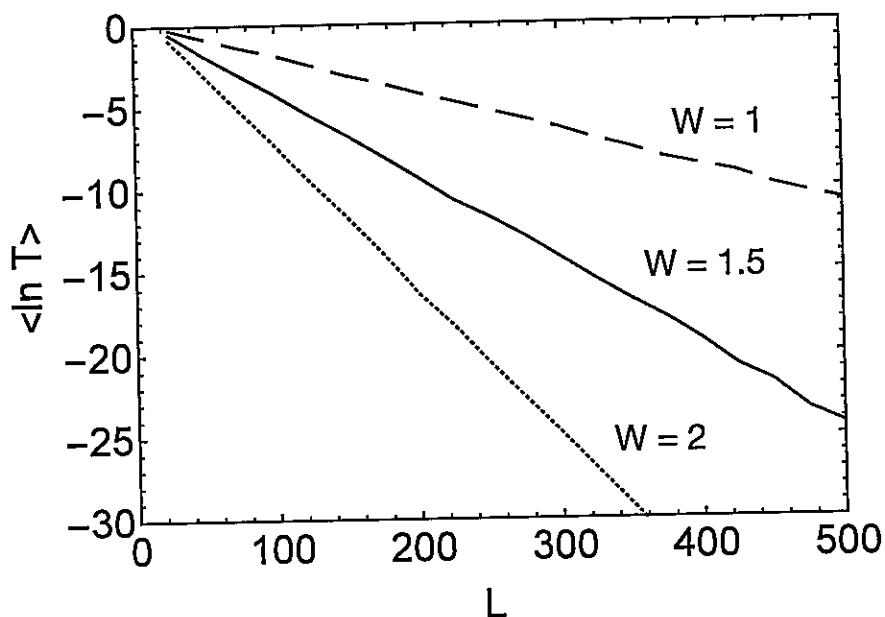


Fig. 11. $\langle \ln T \rangle$ en función del largo L de arreglo de guías de ondas desordenadas en su constante de propagación. Se ha promediado sobre un total de 100 configuraciones distintas de desorden y se han hecho para tres anchos de desorden $\epsilon_n \in [-1, 1]$ (línea segmentada), $\epsilon_n \in [-1.5, 1.5]$ (línea continua), $\epsilon_n \in [-2, 2]$ (línea punteada).

da k . Ahora bien, cuando consideramos $\gamma \neq 0$ el coeficiente de transmisión ya no sólo dependerá del vector de onda k sino que también de la intensidad de la onda transmitida [43], pero notemos que cambiar la amplitud transmitida es equivalente a variar el parámetro no-lineal γ (y viceversa). Lo anterior puede verse a través de la ecuación DNLS (3.1) que puede ser escrita de la forma

$$a_{n+1} = - [\Omega + \epsilon_n + \gamma |a_n|^2] a_n - a_{n-1}. \quad (3.30)$$

Si realizamos el siguiente re-escalamiento $a_n \rightarrow \chi a_n$, la relación anterior queda

$$a_{n+1} = - [\Omega + \epsilon_n + (\chi^2 \gamma) |a_n|^2] a_n - a_{n-1}. \quad (3.31)$$

que muestra que cambiar a_n es equivalente a cambiar γ , es decir,

$$a_n \rightarrow \chi a_n \iff \gamma \rightarrow \chi^2 \gamma.$$

Por otro lado, si cambiamos $\gamma \rightarrow \chi \gamma$, la ecuación (3.30), queda

$$\phi_{n+1} = - [\Omega + \epsilon_n + \gamma |a_n|^2] \phi_n - \phi_{n-1}, \quad (3.32)$$

donde $\phi_n = \sqrt{\chi} a_n$. Esto dice que cambiar γ es equivalente a cambiar a_n de la forma

$$\gamma \rightarrow \chi \gamma \iff a_n \rightarrow \sqrt{\chi} a_n.$$

Lo que implica que el coeficiente de transmisión será afectado por un factor χ , $T \rightarrow \chi T$

Por lo anterior, calcularemos el coeficiente de transmisión considerando $t_0 = 1$ en la ecuación (3.18) e iremos variando el parámetro no-lineal γ . Para encontrar a_N y a_{N-1} podemos usar la matriz de transferencia (ecuación (3.3)) o bien, usar de forma iterativa la ecuación (3.30).

Tal como lo estudió M.I Molina [54], en la figura 12 se muestra las zonas de transmisión $T \approx 1$ (zona clara) y zonas de nula transmisión $T \approx 0$ (zona oscura) en el plano $\gamma - k$ para un sistema desordenado en la constante propagación de largo $L = 50$ sitios. Se observa la forma "fractal" que adopta la región de transmisión dando cuenta de regiones de multiestabilidad, es decir, para un valor de γ existen diferentes valores k para el cual $T \approx 1$.

Finalmente, hemos estudiado el efecto de la no linealidad en función del largo en un sistema desordenado donde para largos inferiores a $L = 500$ sitios se ha observado que el promedio de la transmisión (sobre 100 realizaciones de desorden) decae de forma exponencial, de manera similar a caso lineal, es decir $\langle T \rangle \sim e^{-b(\gamma)L}$ con $b(\gamma)$ una función que depende de la no linealidad. Por el contrario para valores grandes de L se observa un decaimiento en serie de potencia en el promedio de la transmisión, es decir, $\langle T \rangle \sim L^{C(\gamma)}$, con $C(\gamma)$ una función del parámetro no lineal γ . Lo anterior se observa en la Fig. 13 para dos casos de ancho de desorden $\epsilon_n \in [0, 1]$ (figura superior) y $\epsilon_n \in [0, 0.1]$ (figura inferior) para diferentes valores de γ .

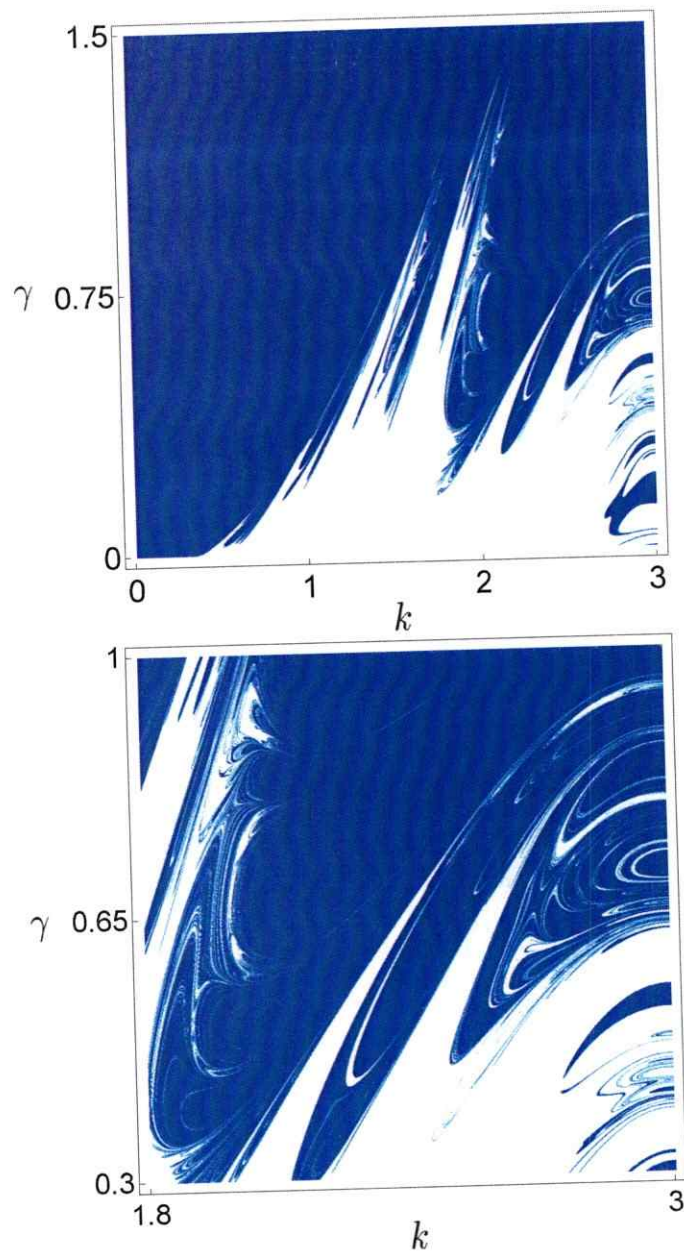


Fig. 12. Región de transmisión $T \approx 1$ (zona blanca) y $T \approx 0$ (zona azulada) en el plano $\gamma - k$ obtenido para una realización de desorden. En la figura de abajo se observa el comportamiento fractal al ampliar la imagen de arriba.

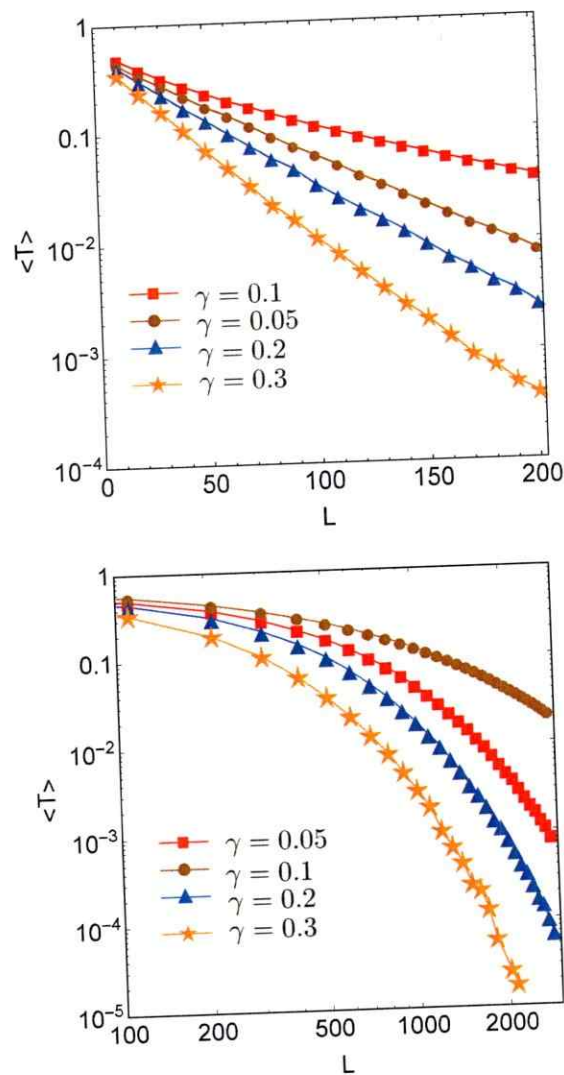


Fig. 13. Promedio sobre diferentes configuraciones de desorden y de vectores de onda k en la transmisión de ondas planas a través de un sistema no lineal-desordenado de largo L . Se promediaron sobre 100 configuraciones distintas de desorden, donde para el caso de la figura superior se consideró $\epsilon_n \in [0, 1]$ y para la figura inferior se consideró $\epsilon_n \in [0, 0.1]$. Notal la escala semi-logarítmica en la figura de arriba y la escala logarítmica en ambos ejes en la figura de abajo.

Capítulo 4

Desorden correlacionado

La presencia de desorden sin importar el grado de éste es suficiente para que todos los auto-estados del sistema sean exponencialmente localizados y se da tanto en una y dos dimensiones [82]. Dicha presencia de desorden causa una completa ausencia de transporte. Ahora bien, esto sucede cuando se considera un desorden “perfecto” o sin correlación como el tipo de desorden que se estudió en la sección (3), sin embargo a principios del año 1990 se estudiaron sistemas con desorden correlacionado, dando cuenta que un cierto grado de transporte si era posible [19–24]. La correlación en dichos estudios, establece una relación en la asignación de las energías de sitios de una red, donde por ejemplo, el modelo más simple de desorden correlacionado corresponde al modelo del dímero aleatorio, en el que una aleación binaria de energías de sitio ϵ_a y ϵ_b es asignada de manera aleatoria en una red con una probabilidad q y $1 - q$ respectivamente. Desde esa fecha hasta ahora se han estudiado los efectos de transporte ante diferentes tipos de desorden con correlación [19–25, 27–36]. En esta tesis nos centraremos en un tipo especial de correlación que en inglés se denomina *random n-mer* [30–33], que consiste en la inclusión aleatoria de un sistema desordenado formado por n sitios en una macro red. El caso $n = 2$ corresponde al modelo del dímero aleatorio que fue comentado anteriormente y en la Fig. 14 a)) se representa de forma esquemática por colores la asignación binaria aleatoria de las energías de sitio (o constantes de propagación). La principal característica que se ha examinado en este modelo, es la transición a la localización sobre cierto umbral de desorden, permitiendo así el transporte super-difusivo bajo cierto umbral en la propagación de una condición inicialmente localizada. Ahora bien, el caso siguiente corresponde al modelo del trímero aleatorio [27, 28] y el primero en estudiarlo en detalle fue Giri *et al* donde tras analizar las resonancias presente en el coeficiente de transmisión

en función de k (o la energía), concluyó que bajo ciertas condiciones especiales de configuración de este trímero (trímero simétrico, ver Fig. 14 b), donde la constante de propagación del sitio central es diferente de los bordes de dicho trímero) se observó una propagación sub-balística, superior a la propagación super-difusiva dada para el caso del *random dimer*.

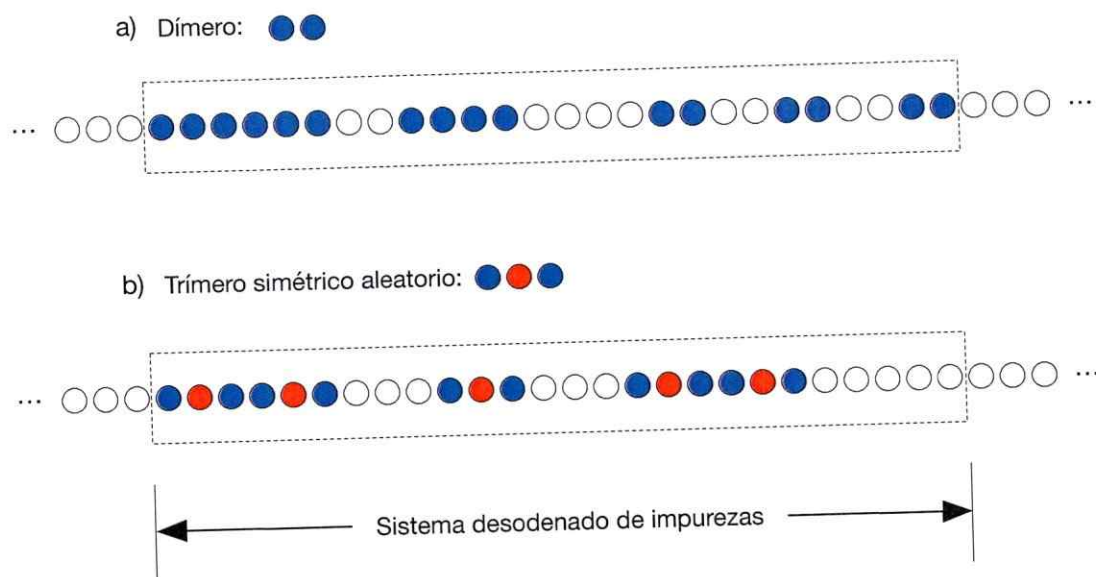


Fig. 14. Sistemas desordenados de dos n -meros particulares. El caso a) corresponde al modelo del dímero aleatorio (RDM) y b) al modelo del trímero simétrico aleatorio. En ambos casos la región rectangular punteada corresponde al sistema desordenado adosado a ambos lados por redes semi-infinitas totalmente homogéneas.

Hasta este momento dicha configuración especial (i.e. simetría en torno a un centro) y su implicancia en las resonancias del sistema, no ha sido estudiada aún para el modelo *random n-mero*. Por lo anterior es que en esta tesis estudiaremos 4 casos de configuraciones distintas de sistemas: *random trimer*, *random tetramer*, *random pentamer* y *random hexamer*. Cada uno de los casos anteriores, presenta una simetría en torno a un centro, tal como se muestra en Fig. 15 a) b) c) y d), y corresponden a una generalización de los casos homogéneos (n -mer con la misma energía de sitio),

donde éstos presentan a lo más $n - 1$ [30–33] resonancias en el sistema, pero en la cual no existe posibilidad alguna de ajustarlas.

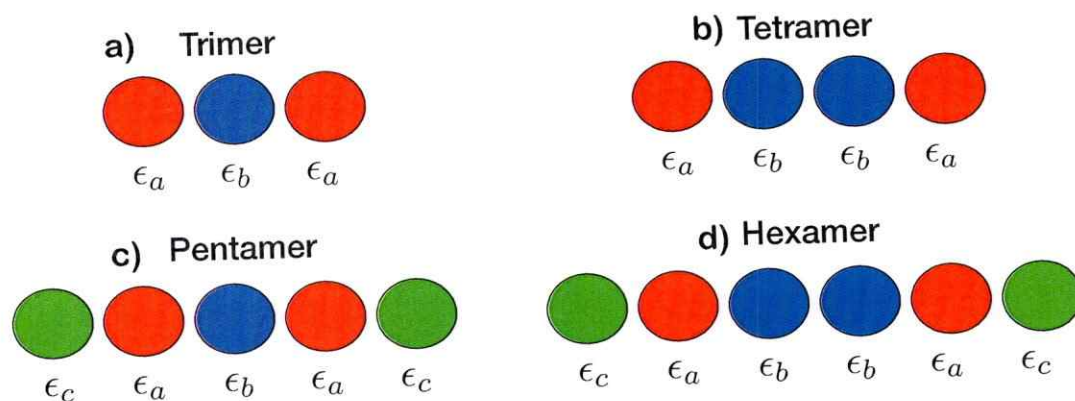


Fig. 15. Esquema representativo de 4 tipos de n -meros simétricos. a) Trímero b) Tetramero c) Penámero y d) Hexámero simétrico.

La organización de este capítulo es la siguiente. En la sección 3.1 se calculará el coeficiente de transmisión y reflexión de ondas planas a través de sólo un defecto de impureza de trimeros, tetrameros, pentámeros y hexámeros insertados en una cadena unidimensional homogénea y estudiaremos la región de parámetros (constantes de propagación que componen los n -meros) en la cual es posible ajustar las posiciones de las resonancias del sistema. En la sección 3.2, se analizará el efecto en la transmisión de ondas planas cuando se consideran inclusiones desordenadas de los n -meros en un porcentaje de un 50% en una cadena unidimensional homogénea, lo anterior se hará estudiando la transmisión en función del largo para las distintas configuraciones y se estudiará el efecto de la no linealidad sobre el sistema. En la sección 3.3 se estudiará la dinámica de un pulso fuertemente localizado ante sistemas desordenados de estos n -meros mediante el desplazamiento cuadrático medio y finalmente se estudiará el efecto de la no linealidad sobre dicha dinámica.

4.1. Impureza individual de n -meros

Comencemos considerando un n -mero lineal ($\gamma = 0$) y encontremos las condiciones para la existencia de transmisiones resonantes en el sistema. Tal como se

mencionó en la sección 2. en general existen $n - 1$ resonancias (ver ecuación (3.26)) y se desea encontrar la región de parámetros para “controlar” dichas resonancias, “controlar” en el sentido de encontrar ciertas relaciones entre las energías de sitios de estos n -meros para poder juntar dos o más de estas resonancias en una sola. Tal como se verá en las secciones posteriores, esto tendrá un fuerte impacto en el número de estados extendidos en el sistema y además en las propiedades de transporte de condiciones inicialmente localizadas cuando se consideran sistemas desordenados de estos n -meros. La idea consiste en que, en una cadena unidimensional rellena de forma aleatoria por estos n -meros, el número de estados que presentan una longitud de localización más grande que el largo del arreglo tiene directa relación con el ancho de la curvatura alrededor de estas resonancias, estos estados son los responsables de la deslocalización y dan lugar a transporte (que en este contexto vendrá dado por transporte óptico o en el contexto de física del estado sólido vendrá dado por transporte electrónico), esto fue mostrado por Dunlap *et al* para el caso $n = 2$, donde se dedujo que el número aproximados de estados extendidos para un cadena de largo N viene dado por \sqrt{N} .

4.1.1. Trímero simétrico

Consideremos un segmento formado por tres sitios ubicados en los sitios $n = 0, 1$ y 2 , con energías de sitio distribuidas de la forma $\{\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_a\}$ tal como se muestra en Fig. 15 a). Usando el formalismo desarrollado en la sección (3), a través de la ecuación (3.18), se obtiene el coeficiente de transmisión y de reflexión dados por

$$T = \left| \frac{(-1 + e^{2ik})}{(-1 + e^{2ik}) + e^{3ik}\epsilon_a^2\epsilon_b + e^{ik}B - e^{2ik}C} \right|^2, \quad (4.1)$$

$$R = \left| \frac{(1 + \epsilon_a^2)\epsilon_b - A \cos(k) + 2\epsilon_a \cos(2k)}{(-1 + e^{2ik}) + e^{3ik}\epsilon_a^2\epsilon_b + e^{ik}B - e^{2ik}C} \right|^2, \quad (4.2)$$

donde los coeficientes A, B y C vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= 2\epsilon_a(\epsilon_a + \epsilon_b), \\ B &= (2\epsilon_a + \epsilon_b), \\ C &= \epsilon_a(\epsilon_a + e^{2ik}\epsilon_a + 2\epsilon_b). \end{aligned} \quad (4.3)$$

La condición de resonancia ($T = 1$), da lugar a la siguiente ecuación cuadrática

$$4 \cos(k)^2 \epsilon_a + \cos(k)(-2\epsilon_a^2 - 2\epsilon_a \epsilon_b) + \epsilon_b + \epsilon_a^2 \epsilon_b - 2\epsilon_a = 0, \quad (4.4)$$

Después de resolver la ecuación cuadrática se obtienen dos resonancias

$$\cos(k) = \frac{\epsilon_b + \epsilon_a}{2} \pm \sqrt{p^2 - 4q}, \quad (4.5)$$

donde, $p = \epsilon_b - \epsilon_a$ y $q = (\epsilon_b/\epsilon_a) - 2$.

Cuando $p^2 = 4q$ se da un caso especial y corresponde al caso en que dos resonancias se juntan en una sola [27]. Lo anterior sucede cuando se da la siguiente relación entre las energías de sitio del trímero simétrico

$$\epsilon_b = \epsilon_a \left[\frac{8 + \epsilon_a^2}{2 + \epsilon_a^2 + 2\sqrt{1 - \epsilon_a^2}} \right], \quad (4.6)$$

que corresponde a un resultado análogo al que obtuvo Giri. *et al.* Notemos que para el caso del trímero homogéneo, $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon$ se dan dos resonancias $\cos(k) = (\epsilon \pm 1)/2$, donde para $\epsilon \leq 1$ existen dos resonancias dadas tanto por el signo positivo y negativo, en cambio para $1 \leq \epsilon \leq 3$ sólo existe una resonancia, dada por el signo negativo solamente. Si $\epsilon > 3$ no existen resonancias en el sistema. Finalmente, para el trímero homogéneo la ecuación (4.6) no existe posibilidad de sintonización de las resonancias, ya que exigiría $\epsilon < 0$, por lo que solamente para el trímero simétrico existe la posibilidad de juntar las dos resonancias del sistema. Lo anterior se observa en Fig. 16 que corresponde al coeficiente de transmisión dado por la ecuación (4.1) para diferentes valores de ϵ_b en función de k y donde se ha fijado el valor de $\epsilon_a = 0.5$. En este caso las zonas blancas corresponden a zonas cercanas a $T \approx 1$ y tal como se ve, a medida que ϵ_b se aproxima a $\epsilon_b \approx 1.03$ (valor que proviene de reemplazar $\epsilon_a = 0.5$ en la ecuación (4.6)) las dos resonancias que inicialmente estaban separadas se juntan para dar lugar a sólo una.

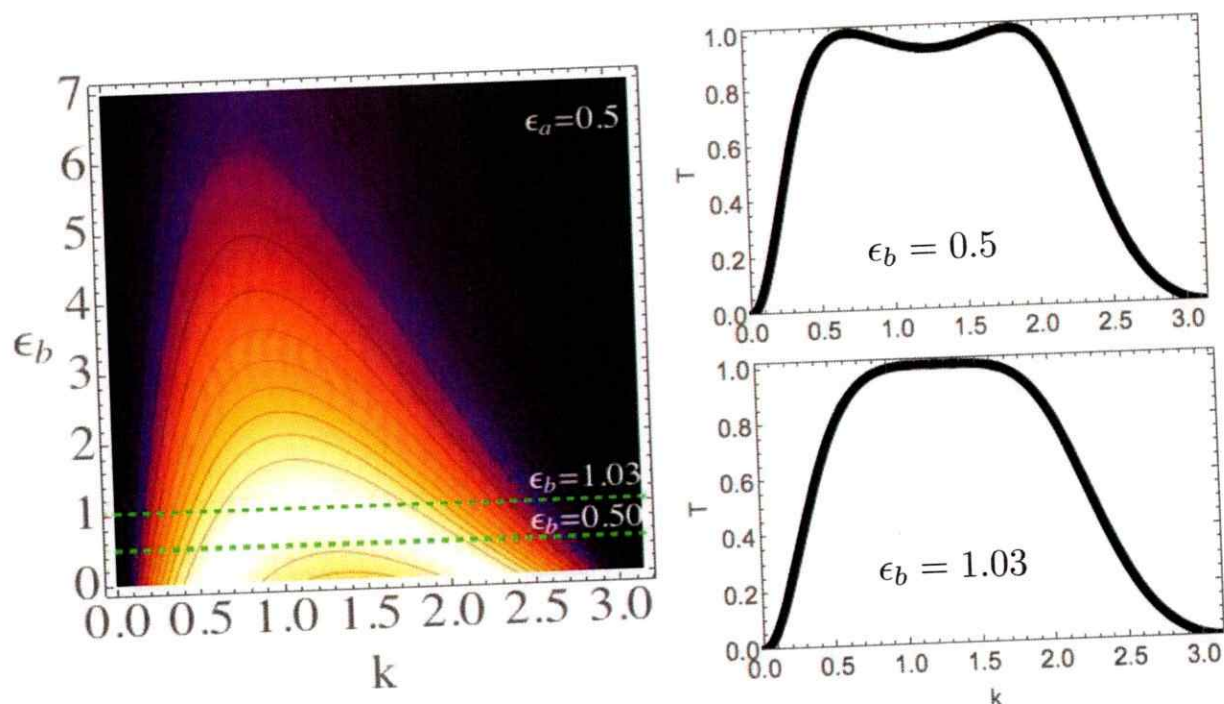


Fig. 16. Figura de la izquierda: Gráfico de densidad de ϵ_b en función de k para $\epsilon_a = 0.5$ de la transmisión de ondas planas a través de un trímero como defecto, las zonas blancas (negras) corresponden a casos donde $T \approx 1$ ($R \approx 0$). Figura derecha superior: coeficiente de transmisión en función de k para un valor de $\epsilon_a = \epsilon_b = 0.5$ que corresponde a la línea horizontal punteada verde en la figura de la izquierda. Figura derecha inferior: coeficiente de transmisión en función de k para un valor de $\epsilon_a = 0.5$ y $\epsilon_b = 1.03$, valor para el cual las dos resonancias se juntan y corresponde a la línea horizontal verde superior en la figura de la izquierda.

Finalmente, en Fig. 17 se observa la región de parámetros $\epsilon_b - \epsilon_a$ que entrega la relación que debe darse entre las energías de sitios del trímero para que dos resonancias se junten o se sintonicen (ecuación (4.6)). La curva de resonancia termina para los valores $\epsilon_a = 1, \epsilon_b = 3$.

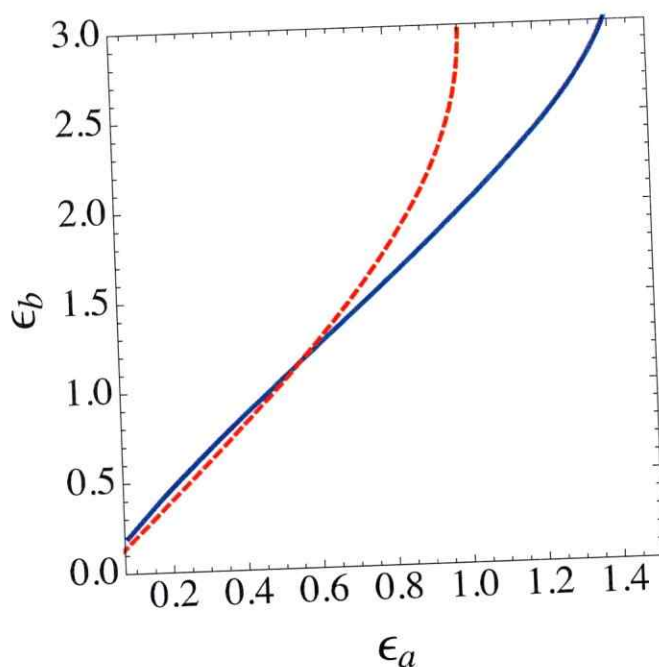


Fig. 17. Región de parámetro en el plano $\epsilon_a - \epsilon_b$ en el que se tiene ajuste o sintonización de las resonancias. La curva para el caso del trímero (línea discontinua roja) es obtenida de forma analítica y viene dada por la ecuación (4.6), mientras que para el caso del tetrámero (curva azul continua) se obtiene de forma numérica a través de la ecuación (4.9).

4.1.2. Tetrámero

Ahora consideremos un segmento de $n = 4$ con una distribución simétrica en su constante de propagación de la forma $\{\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_b, \epsilon_a\}$ (ver Fig. 15 b)). De la misma forma que se realizó para el caso del trímero simétrico el coeficiente de reflexión viene

dado por

$$R = \left| \frac{Z - A \cos(k) + B \cos(2k) - 2\epsilon_a \cos(3k)}{X - e^{ik}W - 2e^{3ik}C + e^{2ik}D + e^{4ik}E} \right|^2, \quad (4.7)$$

donde los coeficientes A, B, C, D, E, X, W y Z vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= 2\epsilon_b(1 + \epsilon_a(2\epsilon_a + \epsilon_b)), \\ B &= 2\epsilon_a(\epsilon_a + 2\epsilon_b), \\ C &= \epsilon_a\epsilon_b(\epsilon_a + \epsilon_b), \\ D &= (-1 + \epsilon_a^2 + 4\epsilon_a\epsilon_b + \epsilon_b^2), \\ E &= \epsilon_a(\epsilon_a + 2\epsilon_b + \epsilon_a\epsilon_b^2), \\ X &= 1 + e^{6ik}\epsilon_a^2 - 2e^{5ik}\epsilon_a^2\epsilon_b \\ W &= 2(\epsilon_a + \epsilon_b), \\ Z &= \epsilon_a^2 + 2\epsilon_a\epsilon_b + (1 + \epsilon_a^2)\epsilon_b^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La condición de resonancia ($R = 0$), da lugar una ecuación algebraica de tercer orden,

$$0 = 8\epsilon_a \cos(k)^3 - 4\epsilon_a(\epsilon_a + 2\epsilon_b) \cos(k)^2 + (2\epsilon_b(1 + \epsilon_a(2\epsilon_a + \epsilon_b)) - 6\epsilon_a) \cos(k) + \epsilon_a^2\epsilon_b^2 - (\epsilon_a + \epsilon_b)^2 + 2\epsilon_a(\epsilon_a + 2\epsilon_b), \quad (4.9)$$

que tiene tres posibles soluciones reales que corresponderían a tres posibles resonancias del sistema. Esta ecuación si bien tiene soluciones analíticas, son altamente difíciles de tratar en la práctica por lo que resolveremos la ecuación (4.9) de forma numérica para encontrar la región de parámetros en el plano $\epsilon_a - \epsilon_b$ donde dos o tres de estas resonancias se pueden juntar o sintonizar en una sola. Para determinar las soluciones, asignamos previamente los valores de ϵ_a y ϵ_b y recolectamos todos los k reales posibles que cumplan con la condición $|k_i - k_j| \leq 10^{-6}$, donde k_i, k_j corresponden solución numérica de la ecuación (4.9). Cuando la condición anterior se cumple, se marca un punto en el plano $\epsilon_a - \epsilon_b$. La curva que se obtuvo una vez efectuado los pasos anteriores, se observa en Fig. 17 (curva continua azul) y en este caso también la curva tiene límites dados por $\epsilon_a = 1.414$, $\epsilon_b = 3.275$. Tras realizar un ajuste no lineal, la curva que representa de forma analítica la relación entre ϵ_b con ϵ_a para el tetrémero simétrico viene dada por

$$\epsilon_b \approx \epsilon_a \left[\frac{0.732 + 1.694\epsilon_a^2}{-0.890 + 0.4613\epsilon_a + \sqrt{\sqrt{2} - \epsilon_a + \epsilon_a^2}} \right]. \quad (4.10)$$

Tal como se puede apreciar, las curvas tanto para el trímero como para el tetrámero simétrico son cualitativamente similares, posiblemente debido a que ambos poseen una simetría en torno al centro y en este el caso el tetrámero simétrico puede verse como un trímero simétrico efectivo. Finalmente, como se mencionó antes, para el tetrámero homogéneo $\{\epsilon_a, \epsilon_a, \epsilon_a, \epsilon_a\}$ no es posible juntar algunas las tres resonancias que presenta en una sola.

En Fig. 18 se muestra al coeficiente de transmisión dado por la ecuación (4.7) para diferentes valores de ϵ_b en función de k y donde se ha fijado el valor de $\epsilon_a = 0.35$. Tal como se ve, a medida que ϵ_b se aproxima a $\epsilon_b \approx 0.77$ (valor que proviene de reemplazar $\epsilon_a = 0.35$ en la ecuación (4.10)) dos de las tres resonancias que inicialmente estaban separadas (ver Fig. 18 inferior izquierda que corresponde a la línea azul para $\epsilon_b = 0.25$) se juntan para dar lugar a sólo una (ver Fig. 18 inferior derecha que corresponde a la línea verde). Esta fenomenología es análoga para cualquier par $\epsilon_a - \epsilon_b$ que se relaciona según la ecuación (4.10) donde sólo se da la posibilidad de sintonizar dos resonancias del sistema.

4.1.3. Pentámero

Ahora consideremos un segmento con $n = 5$ y una distribución simétrica en su constante de propagación de la forma $\{\epsilon_c, \epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_a, \epsilon_c\}$ (ver Fig. 15 c)) ubicadas en los sitios $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 de una cadena unidimensional. De la misma forma que se realizó para los casos anteriores, el coeficiente de transmisión y de reflexión vienen dados por

$$T = \left| \frac{-1 + e^{2ik}}{(K_1 + e^{ik}A_1 + e^{3ik}B_1 - e^{2ik}C_1)G_1} \right|^2, \quad (4.11)$$

$$R = \left| \frac{D}{(K_1 + e^{ik}A_1 + e^{3ik}B_1 - e^{2ik}C_1)G_1} \right|^2, \quad (4.12)$$

donde los coeficientes D, A_1, B_1, C_1, G_1 , y K_1 vienen dados por

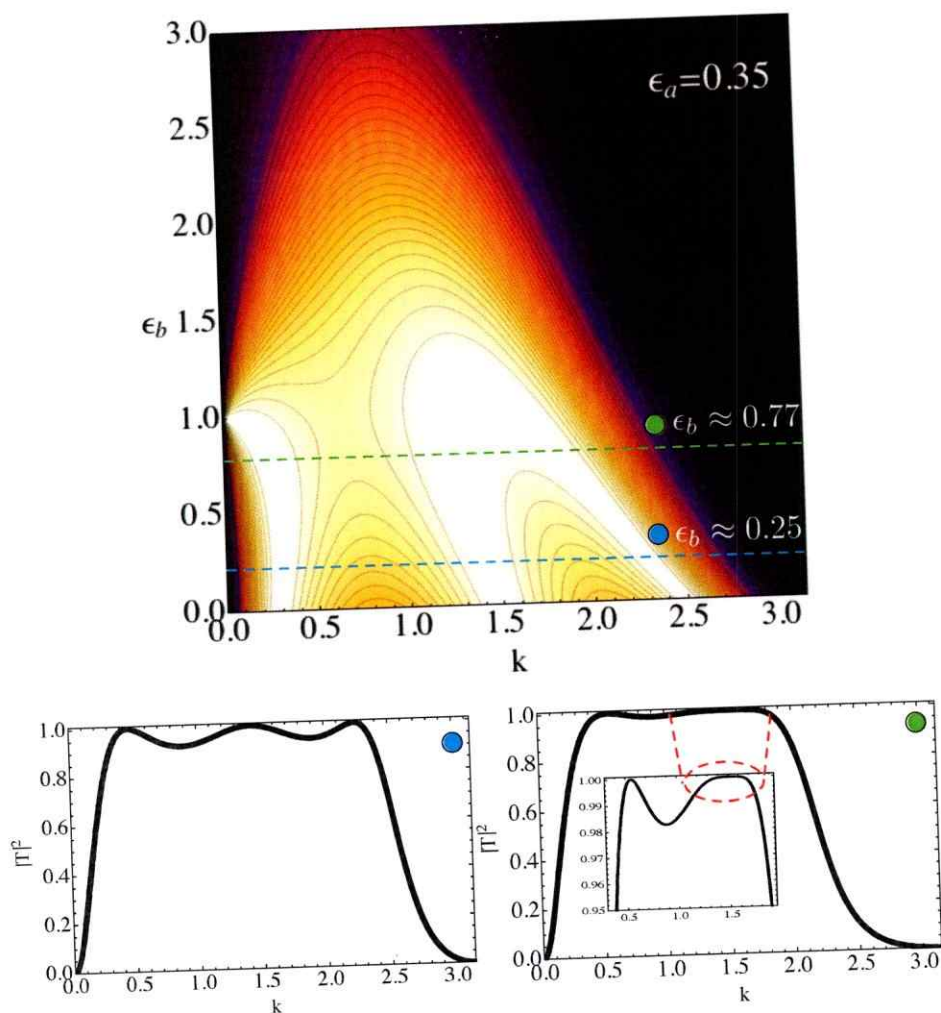


Fig. 18. Figura superior: Gráfico de densidad de ϵ_b en función de k para $\epsilon_a = 0.35$ de la transmisión de ondas planas a través de un tetrámero como defecto, las zonas blancas(negras) corresponden a casos donde $T \approx 1$ ($R \approx 0$). Figura inferior izquierda: coeficiente de transmisión en función de k para un valor de $\epsilon_a = 0.35$, $\epsilon_b = 0.25$ que corresponde a la línea horizontal azul en la figura de arriba. Figura inferior derecha: coeficiente de transmisión en función de k para un valor de $\epsilon_a = 0.77$ y $\epsilon_b = 0.35$ valor para el cual dos resonancias se juntan y corresponde a la línea horizontal verde en la figura de arriba. El recuadro pequeño corresponde a una ampliación entre $0.3 \leq k \leq 1.9$ y $0.95 \leq |T|^2 \leq 1$.

$$D = F_1 - E_1 \cos(k) + D_1 \cos(2k) - X_1 \cos(3k) + 2\epsilon_c \cos(4k), \quad (4.13)$$

con $D_1, E_1, y F_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= \epsilon_c + \epsilon_a + \epsilon_b, \\ B_1 &= \epsilon_a(1 + \epsilon_c \epsilon_b), \\ C_1 &= (-1 + \epsilon_a \epsilon_b + \epsilon_c(\epsilon_a + \epsilon_b)), \\ D_1 &= 2(\epsilon_a(1 + \epsilon_c(2\epsilon_c + \epsilon_a)) + \epsilon_c(\epsilon_c + 2\epsilon_a)\epsilon_b), \\ E_1 &= 2(\epsilon_a(\epsilon_a + \epsilon_b) + \epsilon_c^2(1 + \epsilon_a^2 + 2\epsilon_a \epsilon_b) + \epsilon_c(\epsilon_b + \epsilon_a(2 + \epsilon_a \epsilon_b))), \\ F_1 &= 2\epsilon_c \epsilon_a(\epsilon_c + \epsilon_a) + (1 + 2\epsilon_c \epsilon_a + \epsilon_a^2 + \epsilon_c^2(2 + \epsilon_a^2))\epsilon_b, \\ G_1 &= 1 - e^{ik} \epsilon_a + e^{2ik} \epsilon_c(\epsilon_a - 2 \cos k), \\ K_1 &= -1 + e^{5ik} \epsilon_c - e^{4ik} \epsilon_c(\epsilon_a + \epsilon_b), \\ X_1 &= 2\epsilon_c(\epsilon_c + 2\epsilon_a + \epsilon_b). \end{aligned} \quad (4.14)$$

La condición de resonancia ($R = 0$), entrega una ecuación algebraica de cuarto orden, dada por

$$\begin{aligned} 0 &= 16\epsilon_c \cos(k)^4 + 4(-2\epsilon_c^2 - 4\epsilon_c \epsilon_a - 2\epsilon_c \epsilon_b) \cos(k)^3 \\ &+ (4\epsilon_a + 4\epsilon_c^2(2\epsilon_a + \epsilon_b) + 2\epsilon_c(-2 + 4\epsilon_a^2 + 8\epsilon_a \epsilon_b)) \\ &\cdot ((2\epsilon_c^2 - \epsilon_a(\epsilon_a + \epsilon_b) + 2\epsilon_c(2\epsilon_a + \epsilon_b)) \cos(k)^2 \\ &- \epsilon_c \epsilon_a(\epsilon_a \epsilon_b + \epsilon_c(\epsilon_a + 2\epsilon_b))) \cos(k) + \epsilon_c^2 \epsilon_a^2 \epsilon_b + \\ &(2\epsilon_c - 2\epsilon_a + \epsilon_b) + \epsilon_a(-2\epsilon_c^2 - 2\epsilon_c \epsilon_b + \epsilon_a \epsilon_b). \end{aligned} \quad (4.15)$$

De la ecuación anterior, tendremos hasta 4 resonancias en el sistema. Para encontrar la región de parámetros $\epsilon_a - \epsilon_b$ en la cual es posible sintonizar las resonancias, procedemos forma similar a como se hizo para el caso del tetramero (4.1.2), donde en este caso debemos fijar los valores ϵ_c, ϵ_a y ϵ_b .

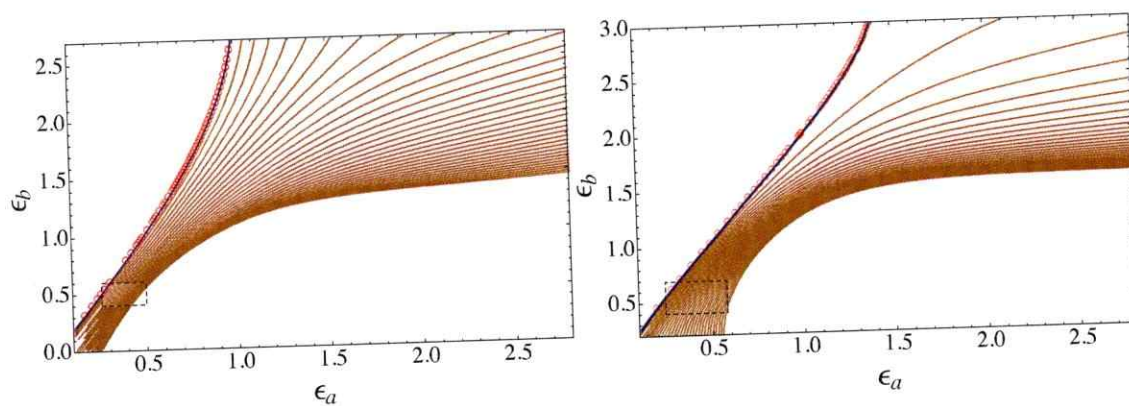


Fig. 19. Región de parámetros en el plano $\epsilon_a - \epsilon_b$ para el caso del pentámero (figura izquierda) y el hexámero (figura derecha), donde es posible sintonizar dos resonancias. Cada curva en café es para diferentes valores de ϵ_c y corresponde a un aumento progresivo desde $\epsilon_c = 0$ hasta $\epsilon_c = 0.31$ en pasos de 0.01. La línea azul denota el caso del trímero simétrico (figura izquierda) y del tetramero simétrico (figura derecha) que corresponde al caso $\epsilon_c = 0$ y los puntos rojos corresponde a las soluciones numéricas de las ecuaciones (4.15) y (4.20) respectivamente.

En la Fig. 19 izquierda se muestra la región de parámetros para sintonizar dos resonancias para diferentes valores de ϵ_c . Tal como se espera para $\epsilon_c = 0$ (línea azul con puntos rojos), que corresponde al caso del trímero simétrico, la curva coincide bastante bien con el resultado obtenido por Giri *et al.* (ver ecuación (4.6)). Cambiando los valores de ϵ_c somos capaces de determinar otras curvas en el plano $\epsilon_a - \epsilon_b$ para sintonizar las resonancias en el caso del pentámero, donde incrementando el valor de ϵ_c de forma progresiva en pasos cada vez más pequeños se obtendrá una región en la cual la sintonización es posible. Para este caso del pentámero simétrico, no se observó que tres o más resonancias se pudieran juntar.

4.1.4. Hexámero

Finalmente, consideremos un segmento de $n = 6$ con una distribución simétrica en su constante de propagación de la forma $\{\epsilon_c, \epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_b\epsilon_a, \epsilon_c\}$ (ver Fig. 15 c)) ubicadas en los sitios $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5. De la misma forma que se realizó para los casos anteriores, el coeficiente de transmisión y de reflexión vienen dados por

$$T = \left| \frac{-1 + e^{2ik}}{(-1 + e^{ik}H_1)E_2} \right|^2, \quad (4.16)$$

$$R = \left| \frac{D_3}{(-1 + e^{ik}H_1)E_2} \right|^2, \quad (4.17)$$

donde los coeficientes D_3, H_1 and E_2 vienen dados por

$$\begin{aligned} D_3 &= (A_2 - 2B_2 \cos(k) + 2C_2 \cos(2k) - \\ & 2D_2 \cos(3k) + 2\epsilon_c(\epsilon_c + 2(\epsilon_a + \epsilon_b)) \cos(4k) - \\ & 2\epsilon_c \cos(5k)), \\ H_1 &= -1 + \epsilon_b + e^{ik}\epsilon_a(1 - \epsilon_b + 2 \cos(k)) + \\ & e^{2ik}\epsilon_c F_2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

con

$$\begin{aligned} A_2 &= \epsilon_a^2 + 2\epsilon_a\epsilon_b + (1 + \epsilon_a^2)\epsilon_b^2 + \epsilon_c^2(1 + \epsilon_a^2 + 6\epsilon_a\epsilon_b \\ & + (2 + \epsilon_a^2)\epsilon_b^2) + 2\epsilon_c(\epsilon_b + \epsilon_a(1 + 2\epsilon_a\epsilon_b + \epsilon_b^2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= 2\epsilon_c\epsilon_a(\epsilon_c + \epsilon_a) + \epsilon_b + 2(3\epsilon_c\epsilon_a + \epsilon_a^2 \\
&\quad + \epsilon_c^2(2 + \epsilon_a^2))\epsilon_b + (\epsilon_a + \epsilon_c(1 + 2\epsilon_c\epsilon_a + \epsilon_a^2))\epsilon_b^2, \\
C_2 &= \epsilon_a(\epsilon_a + 2\epsilon_b) + 2\epsilon_c(\epsilon_a + \epsilon_b)(1 + \epsilon_a\epsilon_b) + \\
&\quad \epsilon_c^2(1 + \epsilon_a^2 + 4\epsilon_a\epsilon_b + \epsilon_b^2), \\
D_2 &= \epsilon_c\epsilon_a^2 + \epsilon_c\epsilon_b(2\epsilon_c + \epsilon_b) + \epsilon_a(1 + 2\epsilon_c(\epsilon_c + 2\epsilon_b)), \\
E_2 &= -1 + e^{ik}(1 + \epsilon_b - e^{ik}\epsilon_a(1 + \epsilon_b - 2\cos(k))), \\
&\quad + e^{2ik}\epsilon_c(1 + \epsilon_a + \epsilon_a\epsilon_b - 2(1 + \epsilon_a + \epsilon_b) \cdot \\
&\quad \cos(k) + 2\cos(2k))), \\
F_2 &= (1 + \epsilon_a(-1 + \epsilon_b) - 2(-1 + \epsilon_a + \epsilon_b)\cos(k) \\
&\quad + 2\cos(2k)).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Luego, la condición de resonancia ($R = 0$) se obtiene a partir de la ecuación (4.2), lo que deja una ecuación de quinto orden para $\cos(k)$ de la forma

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon_c^2 + 2\epsilon_c\epsilon_a - \epsilon_a^2 - \epsilon_c^2\epsilon_a^2 + 2\epsilon_c\epsilon_b - 2\epsilon_a\epsilon_b - 2\epsilon_c^2\epsilon_a\epsilon_b + \epsilon_b^2 - 2\epsilon_c\epsilon_a\epsilon_b^2 + \epsilon_a^2\epsilon_b^2 + \epsilon_c^2\epsilon_a^2\epsilon_b^2 \\
&\quad - 32\cos(k)^5\epsilon_c + \cos(k)^4(16\epsilon_c^2 + 32\epsilon_c\epsilon_a + 32\epsilon_c\epsilon_b) + \cos(k)^3(40\epsilon_c - 8\epsilon_a - 16\epsilon_c^2\epsilon_a - \\
&\quad 8\epsilon_c\epsilon_a^2 - 16\epsilon_c^2\epsilon_b - 32\epsilon_c\epsilon_a\epsilon_b - 8\epsilon_c\epsilon_b^2) + \cos(k)^2(2\epsilon_c^2 + 4\epsilon_c\epsilon_a + 4\epsilon_a^2 + 4\epsilon_c^2\epsilon_a^2 + 4\epsilon_c\epsilon_b + \\
&\quad 8\epsilon_a\epsilon_b + 16\epsilon_c^2\epsilon_a\epsilon_b + 8\epsilon_c\epsilon_a^2\epsilon_b + 4\epsilon_c^2\epsilon_b^2 + 8\epsilon_c\epsilon_a\epsilon_b^2) + \cos(k)(-10\epsilon_c + 6\epsilon_a + 8\epsilon_c^2\epsilon_a + 2\epsilon_c\epsilon_a^2 \\
&\quad - 2\epsilon_b + 4\epsilon_c^2\epsilon_b + 12\epsilon_c\epsilon_a\epsilon_b - 4\epsilon_a^2\epsilon_b - 4\epsilon_c^2\epsilon_a^2\epsilon_b + 4\epsilon_c\epsilon_b^2 - 2\epsilon_a\epsilon_b^2 - 4\epsilon_c^2\epsilon_a\epsilon_b^2 - 2\epsilon_c\epsilon_a^2\epsilon_b^2).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde para encontrar la región de parámetros en la que es posible sintonizar las resonancias se resuelve numéricamente de manera análoga a los casos anteriores. El resultado se muestra en la Fig. 19 derecha para diferentes valores de ϵ_c , donde para el caso $\epsilon_c = 0$ re-obtenemos la curva para el tetrámero (ecuación (4.10)).

Si se desea ampliar el número de sitios de los n -meros más allá de $n = 6$ el número de parámetros de energías de sitios también aumenta y el problema se resume a la determinación de un región de parámetros multidimensional en el plano de energías de sitios para sintonizar las resonancias y por lo tanto se convierte en un problema bastante difícil de tratar. En este caso, se han mostrado los casos especiales en donde es posible sintonizar dos resonancias y se da para los casos en que los n -meros presentan simetría en torno al centro en relación a sus energías de sitios.

Finalmente, casos donde tres o más resonancias se sintonicen no ha sido observado por el momento.

En las siguientes secciones analizaremos el caso donde se consideran inclusiones de manera aleatoria de estos n -meros estudiados.

4.2. Sistemas aleatorios de n -meros

Las resonancias que se dan para un "defecto" individual de estos n -meros estudiados dan cuenta que ésta es prácticamente "transparente" para un vector de onda k_r (o energía) especial ante la transmisión de ondas planas que inciden sobre dicho defecto. Ahora bien, es natural preguntarse si esta situación sigue siendo válida cuando se consideran inclusiones aleatorias estos n -meros en una cadena unidimensional. Como primera impresión, se puede concluir que debido a la localización de Anderson la transmisión de ondas planas se verá impedida como también la difusión de excitaciones localizadas. Sin embargo, se han observado en sistemas con desorden correlacionado tales como el modelo del dímero y trímero aleatorio [21, 27], que para el vector de onda resonante k_r y alrededor de éste, existe una pequeña región en la que la longitud de localización es del orden del tamaño del sistema por lo que el dentro de dicha vecindad de vectores de onda k (o energía) la transmisión de ondas planas no es impedida.

En esta sección examinaremos numéricamente los resultados para el coeficiente de transmisión centrándonos en el caso del pentámero ($n = 5$), el comportamiento para los demás n -meros es cualitativamente similar y no entrega información adicional relevante. En la Fig. 20 se muestra el coeficiente de transmisión para una sola realización de desorden en ausencia de no-linealidad ($\gamma = 0$) en función de la energía $E = 2 \cos(k)$ para un largo $L = 400$ considerando los parámetros en las energías de sitios en la que es posible sintonizar dos resonancias del sistema, situación que se analizó en las secciones anteriores para $n = 3, 4, 5$ y 6. La Fig. 20 corresponde al caso de Anderson, tal como se estudió en la sección (3.3), donde las energías de sitios de las impurezas que se insertan de forma aleatoria de la forma $\epsilon_n \in [0, 0.25]$. Fig. 20 (b) corresponde al caso $\epsilon_c = 0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$ que viene siendo el caso del trímero simétrico y es por supuesto, un caso particular del pentámero. Los otros dos casos que restan, corresponden a (c) $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$; y (d) $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_b = 0.545, \epsilon_b = 0.511$ que representan en gran medida como lucen el coefi-

ciente de transmisión para el caso del pentámero. Estos casos corresponden a valores de las energías de sitios en el plano $\epsilon_a - \epsilon_b$ que están dentro del rectángulo encerrado en Fig. 19 y que cumplen la condición de sintonización de resonancia. Claramente, se observa un incremento en el ancho de la transmisión de ondas planas en comparación con el caso de Anderson (Fig. 20), este comportamiento también se observa para el caso del hexámero.

4.2.1. Transmisión en función del tamaño del sistema en el régimen lineal

Tal como se vió en la sección (3.3), en ausencia de correlación, la localización de Anderson es predominante y en este caso el coeficiente de transmisión en función del largo del sistema decrece exponencialmente. Veamos ahora que ocurre cuando se considera correlación a corto alcance, que son los casos que hemos estado considerando.

Consideremos el problema de calcular el coeficiente de transmisión de ondas planas a través de una cadena unidimensional de largo L , que se caracteriza por tener una distribución de energías de sitio ϵ_n y sin no-linealidad $\gamma = 0$, este segmento se encuentra unido a ambos lados por cadenas semi-infinitas homogéneas lineales ($\epsilon_n = \gamma = 0$). Dicho segmento contiene una fracción de 50% de pentámeros distribuidos de forma aleatoria y en este caso las distribuciones de estas energías de sitio ϵ_n obedecen las condiciones de resonancias que se dieron antes (ecuación (4.15)). Lo anterior se muestra esquemáticamente en Fig. 21.

Para calcular numéricamente el coeficiente de transmisión en función del largo, usamos la ecuación (3.18) y la definición de la matriz de transferencia dada por la ecuación (3.14), además promediamos doblemente sobre 200 configuraciones distintas de desorden y sobre todos los vectores de onda k . De la manera anterior, se obtiene un estimador global acerca de la transmisión en una cadena desordenada. Resultado de lo anterior se muestra en la Fig. 22, donde la transmisión decrece en forma de serie de potencia (más lenta que un decaimiento exponencial): $\langle T \rangle \sim aL^{-b}$, con a y b constantes que dependen de los valores de $\{\epsilon_n\}$.

Una forma de medir la extensión espacial de los auto-estados de nuestro sistema correlacionado viene dado por la razón de participación que se definió en la ecuación (2.40) [78]. En Fig. 23 se muestra la razón de participación R dividida por el largo

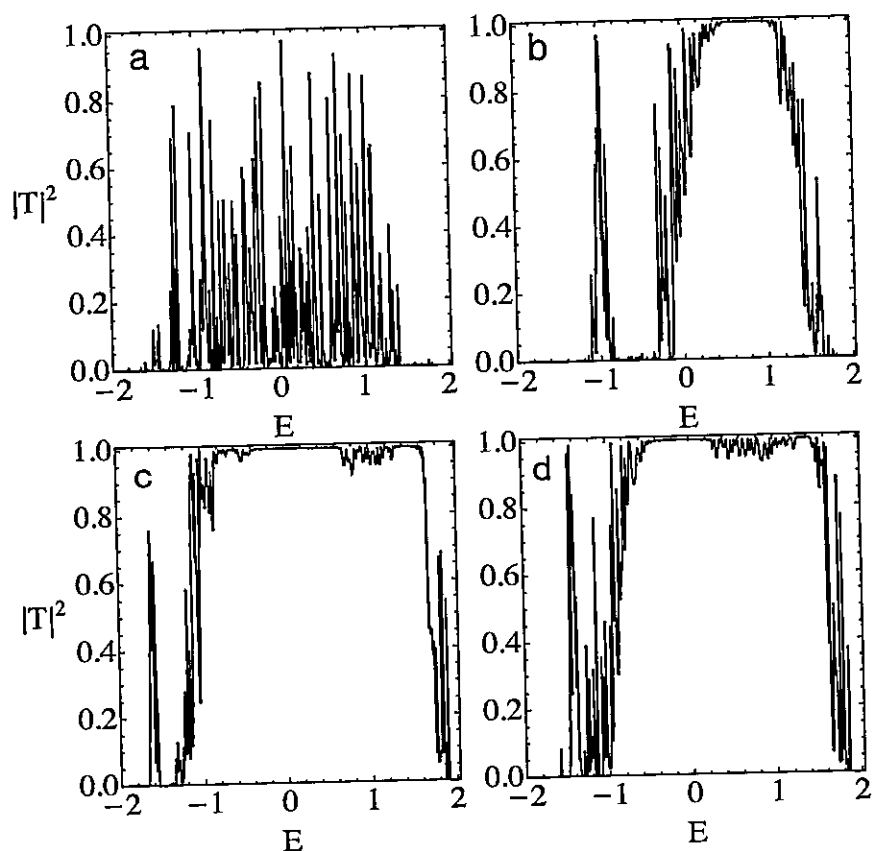


Fig. 20. Coeficiente de transmisión en función de la energía $E = 2 \cos k$ para una realización de desorden para una cadena de largo $L = 400$ que contiene insertada de forma aleatoria (a) impurezas individuales y (b)-(d) impurezas de pentámeros, a un 50% de concentración. El caso (a) corresponde al caso $\epsilon_n \in [-0.25, 0.25]$; (b) $\epsilon_c = 0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$ (trímero simétrico); (c) $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$; y (d) $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_a = 0.45, \epsilon_b = 0.511$. Valores que se encuentran dentro de la región rectangular en Fig. 19.

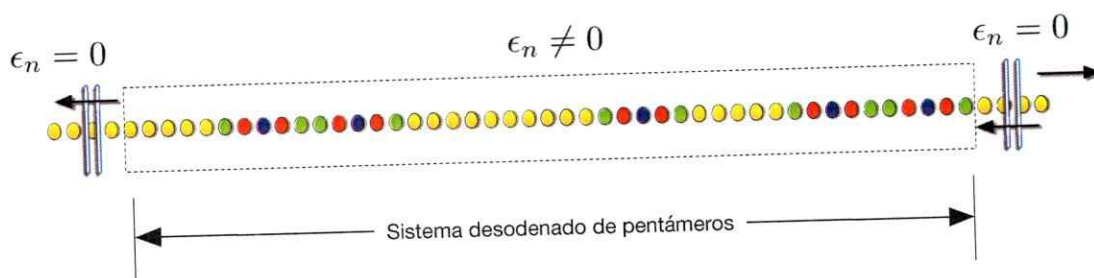


Fig. 21. Representación de un sistema de largo L donde se han insertado pentámeros de forma aleatoria. Lo colores representan las energías de sitios de cada guía donde el color amarillo representa $\epsilon_n = 0$.

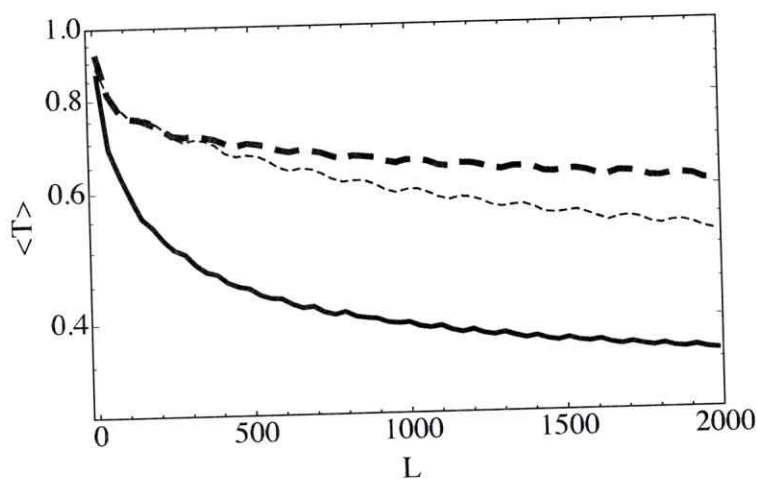


Fig. 22. Promedio de la transmisión en función del largo para algunos casos de pentámeros representativos. La línea entrecortada gruesa corresponde al caso $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$, la línea entrecortada delgada corresponde al caso $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_a = 0.45, \epsilon_b = 0.511$ y la línea continua corresponde al caso $\epsilon_c = 0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$ (trímero simétrico), casos que corresponden al recuadro en la Fig. 19. Note que el eje vertical se encuentra en escala logarítmica.

del sistema N para los casos representativos del pentámero, en este caso si $R/N = \mathcal{O}(1/N)$ se tienen estados completamente localizados, mientras que cuando $R/N = \mathcal{O}(1)$ se tienen estados totalmente extendidos. Cada punto en la Fig. 23 corresponde a un valor de R/N para una energía y configuración de desorden dada. En total, se consideraron 50 realizaciones distintas de desorden para un largo $L = 400$, además se muestra en color rojo el valor promedio sobre estas 50 realizaciones de desorden. Se observa la clara diferencia entre los estados que son efectivamente extendidos en comparación con el caso puro de Anderson (Fig. 23 a)) y que está en acuerdo con las curvas de transmisión en función de la energía E de Fig. 20. También se observa que los estados extendidos efectivos para el caso del trímero simétrico (Fig. 23b)) es menor en comparación a los estados extendidos efectivos para los otros dos casos del pentámero donde $\epsilon_c \neq 0$ [Fig. 23 c) y Fig. 23 d)], lo que implica que existe un número más grandes de vectores de onda con camino libre medio del orden del tamaño del sistema, implicando un aumento en el coeficiente de transmisión, lo que significa que el decaimiento en el coeficiente de transmisión es menor en comparación con el caso puro de Anderson y del trímero simétrico.

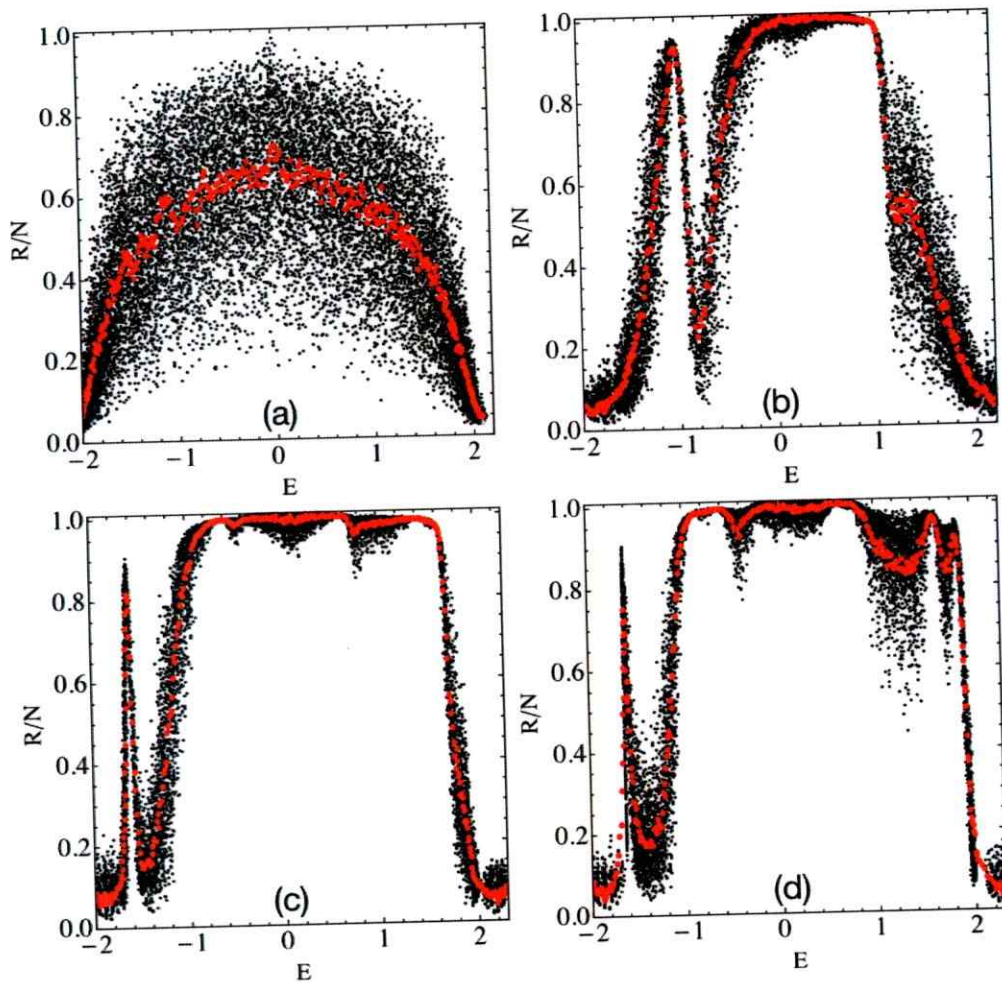


Fig. 23. Raz3n de participaci3n dividida por el tama3o del sistema $N = 400$ para los casos (a), (b), (c) y (d) de la Fig. 20. Se han considerado un total de 40 realizaciones diferentes de desorden (puntos en negro) y la curva en rojo representa el promedio sobre estas distintas realizaciones de desorden.

4.2.2. Transmisión en función del tamaño del sistema en el régimen no-lineal

Consideremos ahora una cadena de longitud L similar a la presentada en la sección (4.2.1) dada por Fig. 21, pero con la diferencia de que en este caso la región interna de largo L además de poseer una distribución de energías de sitios $\{\epsilon_n\}$ determinada por la inclusión aleatoria de los pentámeros, también posee no linealidad γ en todas las guías. Esta cadena unidimensional se conecta a ambos lados con cadenas semi-infinitas lineales idénticas entre si ($\epsilon_n = \gamma = 0$). De la misma forma, los pentámeros están insertados de manera aleatoria con una concentración del 50%. Tal como se comentó y describió en la sección (3.3) cuando consideramos el problema de transmisión en un segmento no-lineal, éste depende tanto del vector de onda k y de la amplitud de la onda incidente, por lo que, si se calcula el coeficiente de transmisión de la manera usual, se encuentra con el problema de que existen más de una onda transmitida para un valor de la onda incidente, lo que se conoce como multiestabilidad [43], es por esto, que de la misma forma que en la sección (3.3) se trabajará de manera inversa, es decir, para un k , γ y desorden de configuración fijos, fijamos el valor de la amplitud transmitida final (se impone $t_0 = 1$ en ecuación (3.18)) e iteramos hasta encontrar las amplitudes iniciales a_N y a_{N-1} para así, determinar el coeficiente de transmisión dado por la ecuación (3.18).

En la Fig. 24 se muestra de forma general, como luce la región de transmisión en función del parámetro no lineal y del vector de onda k para una sola realización de desorden de pentámeros. En este caso, las zonas claras corresponden a valores $T \approx 1$, lo que indica que para dicho par de valores (k, γ) la onda plana puede propagarse al interior del segmento de largo L pudiendo transmitirse, lo que corresponde a que la onda dentro de dicho segmento es oscilatoria y no diverge [43]. Lo contrario ocurre cuando $T \approx 0$ (zona oscura) donde típicamente, la onda al interior del segmento presenta un crecimiento exponencial dependiente del largo; e^{3L} [43] y por tanto diverge rápidamente a medida que L crece. El mismo comportamiento se da para el caso de Anderson con inclusión de no-linealidad [54] y da cuenta que efectivamente para desorden correlacionado también existe multiestabilidad.

Ahora bien, enfocándonos en la transmisión en función del largo, en Fig. 25 se muestran los resultados al realizar un ajuste a las curvas de transmisiones promedios

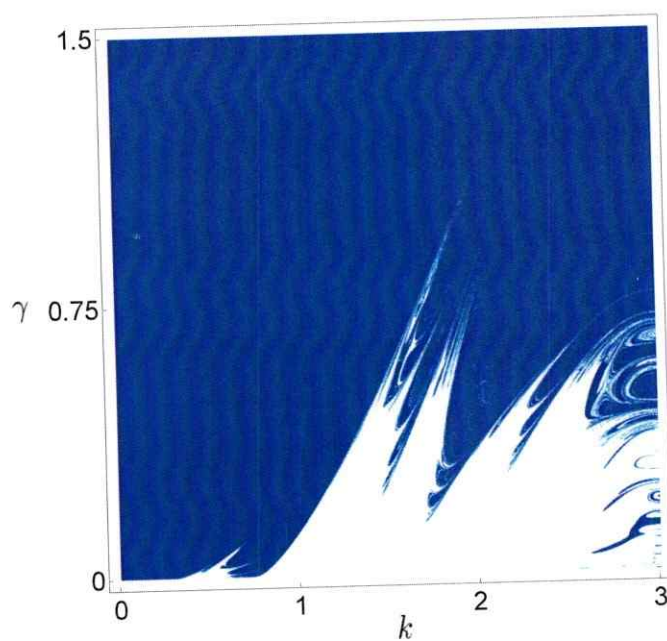


Fig. 24. Zonas de transmisión (zonas claras) y de no transmisión (zona oscura) para un caso de impurezas tipo pentámero con energía de sitio $\epsilon_c = 0.1$, $\epsilon_a = 0.34$ y $\epsilon_b = 0.465$.

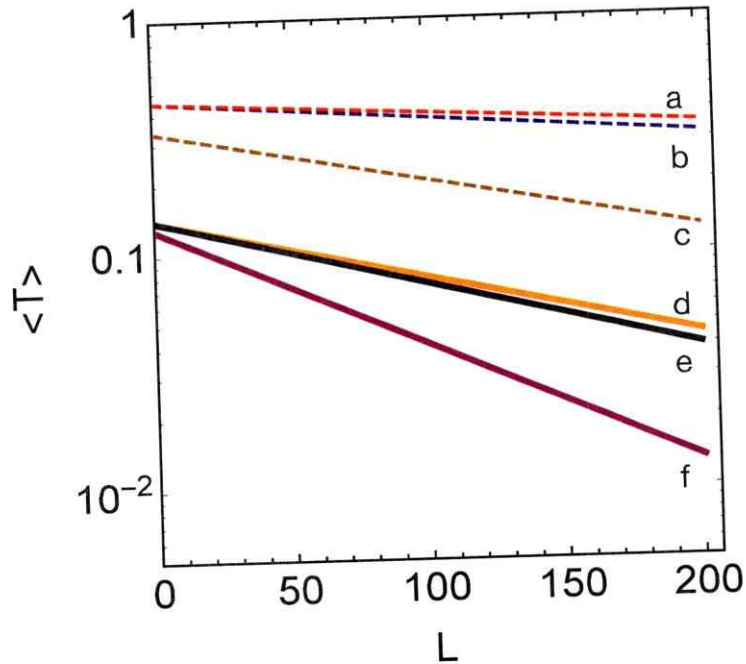


Fig. 25. Ajuste del promedio de las transmisiones $\langle T \rangle \sim \exp(-b(\gamma)L)$ como función del largo del segmento en el régimen no lineal, para $L_{max} = 200$ y sobre 100 configuraciones distintas de desorden. Las curvas entre cortada corresponde a un valor de $\gamma = 0.3$ y las curvas continuas para $\gamma = 0.7$. (a) Pentámero con $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$, con $b(\gamma) = 0.068 + 0.55\gamma + 11.99\gamma^2$ la función que lo ajusta (b) Pentámero con $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_a = 0.45, \epsilon_b = 0.511$, la función que lo ajusta $b(\gamma) = 0.108 + 3.97\gamma + 5.74\gamma^2$ y (c) Trímero con $\epsilon_c = 0.0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$, $b(\gamma) = -0.270 + 17.53\gamma - 1.19\gamma^2$ con función que lo ajusta (d) Pentámero con $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$ y $b(\gamma) = 0.068 + 0.55\gamma + 11.99\gamma^2$ la función que lo ajusta, (e) Pentámero con $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_a = 0.45, \epsilon_b = 0.511$ y $b(\gamma) = 0.108 + 3.97\gamma + 5.74\gamma^2$ la función que lo ajusta, y (f) Trímero con $\epsilon_c = 0.0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$, y $b(\gamma) = -0.270 + 17.53\gamma - 1.19\gamma^2$ la función que lo ajusta. Note la escala semi-logarítmica.

en función del largo L del sistema para los tres casos del pentámero usados. Se observa que el promedio de la transmisión es mayor para los dos casos del pentámero con $\epsilon \neq 0$ que para el trímero simétrico. Para segmentos de un largo $0 < L < 200$ el promedio de la transmisión se comporta de la forma $\langle T \rangle \sim \exp(-b(\gamma)L)$, donde $b(\gamma)$ es una función creciente con respecto a γ . Ahora bien, en Fig. 26 similar a lo mostrado en Fig. 25 se muestra el promedio de las transmisiones para segmentos mucho mas grandes. En este caso, las curvas decaen de forma más lenta a como lo hacen para segmentos mas chicos. Específicamente, el promedio de la transmisión decae de la forma $\langle T \rangle \sim L^{-c(\gamma)}$, con $c(\gamma)$ una función creciente respecto a γ .

Finalmente en la Fig. 27 a modo de ejemplo, se muestra como luce el promedio de la transmisión de ondas planas sobre 100 configuraciones distintas de desorden en función del largo para el caso particular del pentámero con energía de sitio $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34$ y $\epsilon_b = 0.465$. El comportamiento observado tanto para un largo $L < 200$ y para $200 < L < 30.000$ es cualitativamente similar para los demás n -meros tal como se observó en las Figs. 25 y 26.

Tal como se ve en Fig. 27 el comportamiento de la transmisión en función del largo en el regimen no-lineal es cualitativamente similar al que se presenta en el caso de Anderson puro [54], donde se observa que la presencia de la no linealidad inhibe el transporte de excitaciones extendidas y no depende en este caso del tipo de n -mer usado como tampoco de las condiciones de sintonización de las resonancias que se establecen entre las energías de sitio $\{\epsilon_n\}$. Tal como se verá en la próxima sección, el efecto de la no linealidad ante la propagación de excitaciones extendidas contrasta con los resultados que se dan en el régimen no lineal cuando se estudia la propagación de excitaciones inicialmente localizadas.

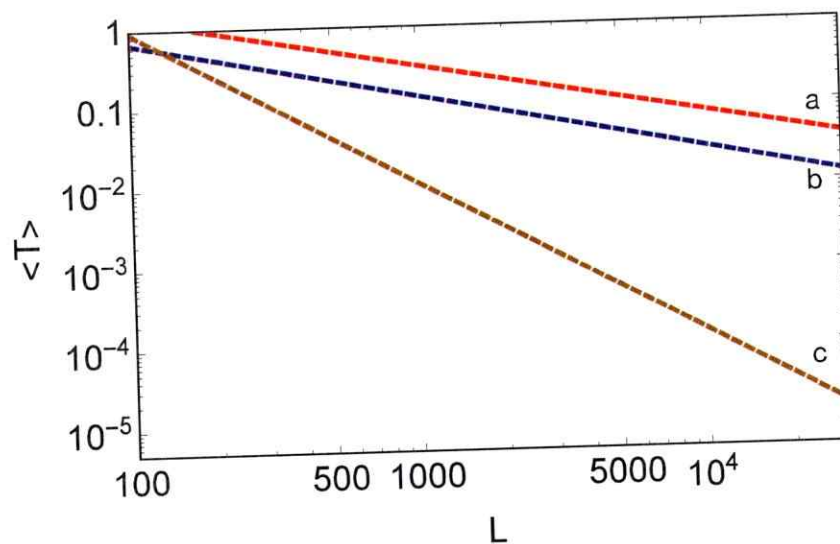


Fig. 26. Ajuste del promedio de las transmisiones $\langle T \rangle \sim L^{-c(\gamma)}$ como función del largo del segmento en el régimen no lineal, para $L_{max} = 30.00$ y sobre 100 configuraciones distintas de desorden y para un valor de $\gamma = 0.3$. (a) Pentámero con $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$, con $c(\gamma) = 0.421 - 0.228\gamma + 3.102\gamma^2$ la función que lo ajusta (b) Pentámero con $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_a = 0.45, \epsilon_b = 0.511$, la función que lo ajusta $c(\gamma) = 0.575 - 1.651\gamma + 6.85\gamma^2$ y (c) Trímero con $\epsilon_c = 0.0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$, y $c(\gamma) = 0.718 - 0.86\gamma + 16.202\gamma^2$ la función que lo ajusta. Note la escala logarítmica en ambos ejes.

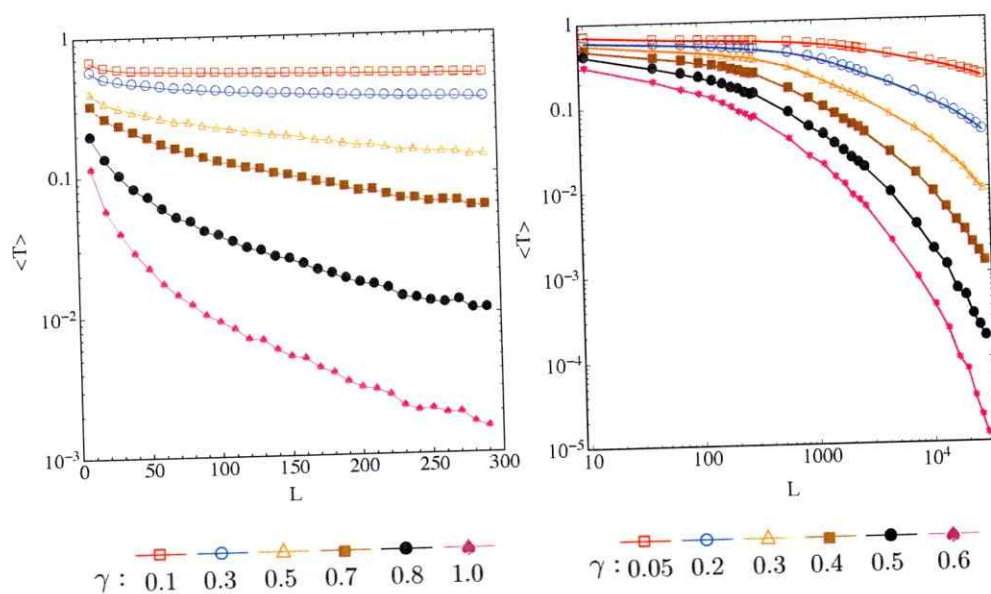


Fig. 27. Promedio sobre 100 configuraciones distintas de desorden de la transmisión $\langle T \rangle$ en función del largo para diferentes valores de la no linealidad γ y para el caso del pentámero de energía de sitio $\epsilon_c = 0.1$, $\epsilon_a = 0.34$ y $\epsilon_b = 0.465$. Figura de la izquierda corresponde a $\langle T \rangle$ para un largo máximo $L = 200$ mientras que la figura de la derecha corresponde al caso para un L máximo $L = 30.000$. Note la escala semi-logarítmica en la figura de la izquierda y la escala logarítmica en ambos ejes en la figura de la derecha.

4.2.3. Transporte de excitaciones inicialmente localizadas

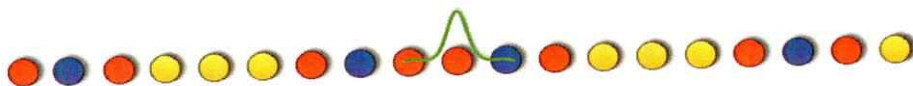


Fig. 28. Representación esquemática de una condición inicialmente localizada ubicada en el sitio $n = n_0$

Habiendo examinado en las secciones anteriores la propagación de excitaciones extendidas a lo largo de un medio no lineal que contiene n -meros distribuidos de manera aleatoria, es que ahora consideraremos la propagación de una excitación que está inicialmente localizada en un sólo sitio ($n = n_0$, ver Fig. 28) dentro de este segmento desordenado y no lineal. Para un valor fijo del parámetro no lineal γ , y una configuración de desorden de n -meros dada, veremos el comportamiento del desplazamiento cuadrático medio (MSD) en función de la componente longitudinal z ,

$$u(z) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n - n_0)^2 |a_n(z)|^2}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n(z)|^2}, \quad (4.21)$$

donde tras un promedio sobre diferentes configuraciones de desorden, obtenemos un promedio del MSD, $\langle u(z) \rangle$. En este caso, resolvemos numéricamente la ecuación dinámica DNLS (2.27) con el algoritmo de integración de Runge-Kutta de orden cuarto. La precisión numérica se verifica en todo instante monitoreando la norma $\sum_n |a_n|^2$, y para evitar efectos de borde, usamos el método de la red auto-expansiva [54].

Los principales resultados del cálculo del MSD en el régimen lineal ($\gamma = 0$) y no lineal ($\gamma \neq 0$) se encuentran en Fig. 29 para los tres casos del pentámero que se han tratado, donde las condiciones de sintonización de las resonancias se cumple. El caso del régimen lineal se tratará en la sección (4.2.4) mientras que el caso no lineal ($\gamma \neq 0$) se tratará en la sección (4.2.5).

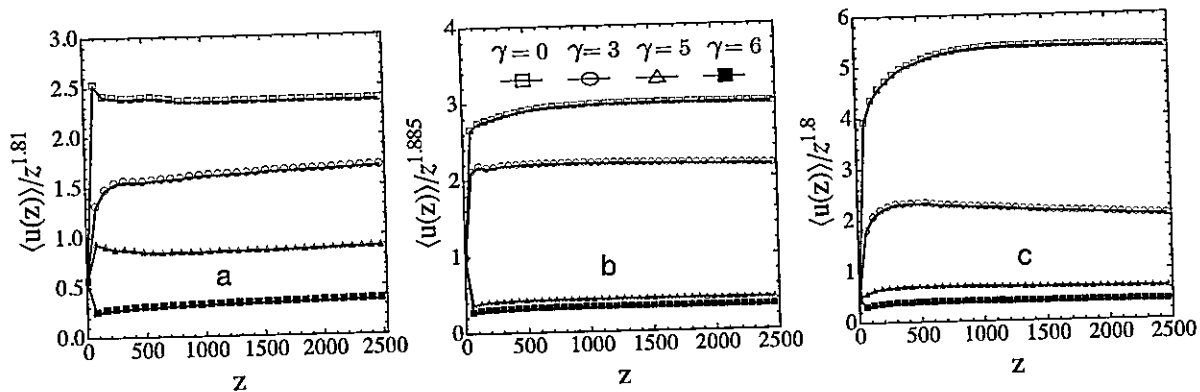


Fig. 29. MSD para diferentes valores de no-linealidad γ para los 3 casos de pentámero analizados. a) $\epsilon_c = 0.0, \epsilon_a = 0.27, \epsilon_b = 0.545$ (Trímero simétrico). b) $\epsilon_c = 0.1, \epsilon_a = 0.34, \epsilon_b = 0.465$ y c) $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_a = 0.45, \epsilon_b = 0.511$, todos tomados dentro del rectángulo demarcado en la Fig. 19 izquierda.

4.2.4. Régimen lineal

En los cálculos numéricos del MSD mostrados en la Fig. 29 se ha promediado sobre sólo 5 configuraciones distintas de desorden (para más configuraciones de desorden los resultados no se alteran). Tal como se puede apreciar en la Fig. 29 a), se obtiene el conocido caso de propagación sub-balística obtenido por *Giri et al.* para el trímero simétrico, donde el exponente de difusión es $\langle u(z) \rangle \sim z^{1.81}$, ahora bien al considerar los dos casos del pentámero (con $\epsilon_c \neq 0$) obtenemos una propagación similar al caso del trímero simétrico (con $\epsilon_c = 0$), tal como se ve en la Fig. 29 b), c) donde se obtiene un exponente de propagación $\langle u(z) \rangle \sim z^\alpha = z^{1.885}$ y $\langle u(z) \rangle \sim z^\alpha = z^{1.8}$ respectivamente. Estos exponentes fueron verificados hasta un $z_{max} = 10^4$, donde no se observa diferencia apreciable. Situación similar encontramos para el caso del tetrámero y hexámero, donde ambos casos también presentan exponente de difusión $\alpha \sim 1.81$ cuando la condición de sintonización de resonancias se logra (ver Fig. 19 derecha).

Para tratar de entender los resultados en los exponentes de difusión que se dan para

los n -meros simétricos estudiados, será de gran ayuda analizar lo que ocurre con el ancho efectivo de las resonancias (ver Fig. 20) en los casos cuando la condición de sintonización se cumple y en los casos cuando no se cumple. Notemos que los exponentes obtenidos anteriormente, son superiores al conocido caso del "random dimer model" (RDM). En este caso, Dunlap *et al* propone una formula para determinar el exponente del desplazamiento cuadrático medio, donde plantea que dado un sistema que presenta N^α estados extendidos, el exponente de difusión del MSD vendrá dado por $u(z) \sim z^{1+\alpha}$, esto tiene un gran acuerdo con lo observado numérica y experimentalmente [38] para el caso del random dimer, donde se propone que existe un número de estados extendidos proporcional a \sqrt{N} y donde el exponente calculado corresponde a $u(z) \sim z^{1+0.5} = z^{1.5}$ (conocido como propagación super-difusiva).

Ahora, para determinar el número de estados extendidos en torno al vector de onda resonante k_r para el caso del trímero simétrico y de un n -mero simétrico cuando se cumple la condición de resonancia, debemos expandir en serie de Taylor el coeficiente de transmisión (o reflexión) y determinar el orden que predomina. Conocer el número de estados extendidos es importante ya que éstos contribuyen al transporte de una excitación inicialmente localizada, tal como fue analizado por Dunlap *et al* y nos entregarán información relevante de los exponentes de difusión que se esperan numéricamente. Para deducir el número de estados extendidos, consideremos un segmento de largo N donde se han incluido de forma aleatoria un número de m impurezas de n -meros. Expresando el coeficiente de transmisión para una onda que incide con energía $E = 2 \cos(k)$ a lo largo de este segmento como $|T_N(E)|^2$, en una vecindad en torno de la energía resonante E_r (o vector de onda resonante k_r) [27], el coeficiente de transmisión queda expresado en forma aproximada

$$|T_n(E)|^2 \simeq |T_s(E)|^{2m}, \quad (4.22)$$

donde $T_s(E)$ corresponde al coeficiente de transmisión de una impureza individual de n -meros y en este caso correspondería a una de las 4 ecuaciones de transmisión para el trímero, tetrámero, pentámero y hexámero simétrico (ecuaciones (4.1), (4.7), (4.11) y (4.16) respectivamente). En la ecuación (4.22) se han despreciado los efectos de reflexión que pueden darse para $E \sim E_r$. Ahora bien, Sabemos que el coeficiente de reflexión con el coeficiente de transmisión se relacionan de la forma $|T_s(E)|^2 + |R_s(E)|^2 = 1$, luego la ecuación (4.22) queda de la forma

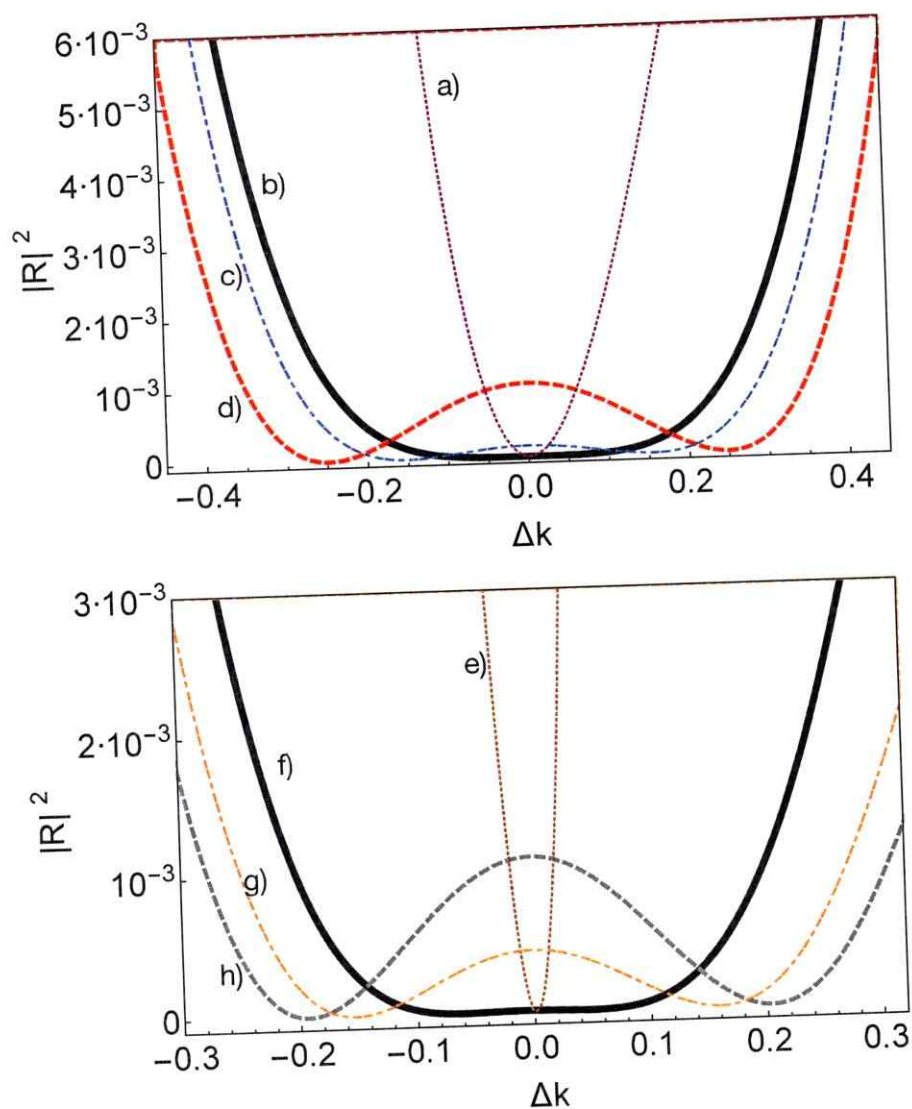


Fig. 30. Coeficiente de reflexión en función de $\Delta k = k_r - k$ que representa el ancho efectivo de la resonancia alrededor del vector de onda resonante k_r . La figura de arriba corresponde a varios casos de un trímero general con energías de sitio $\epsilon_c = 0, \epsilon_a = 0.27$ y a) $\epsilon_b = 0.27$ b) $\epsilon_b = 0.545$ (caso estudiado a lo largo de esta sección), c) $\epsilon_b = 0.52$ y d) $\epsilon_b = 0.48$. La figura de abajo corresponde al caso de un pentámero general de energías de sitio $\epsilon_c = 0.23, \epsilon_b = 0.45$ y e) $\epsilon_a = 0.3$ f) $\epsilon_a = 0.511$ (caso estudiado en esta sección), g) $\epsilon_a = 0.48$ y h) $\epsilon_a = 0.4$.

$$\begin{aligned}
|T_n(E)|^2 &\simeq \exp [\ln(1 - |R_s(E)|^2)^{2m}] \\
&\simeq \exp \left[-2Nm/N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|R_s(E)|^{2n}}{n} \right], \quad (4.23)
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la expansión de $\ln(1-x)$, que es válida para $x = |R_s(E)|^2 \ll 1$ ya que como $E \sim E_r$ entonces $|R_s(E)|^2 \sim 0$. La forma en que está escrito el coeficiente de transmisión en la ecuación (4.23) es bastante conveniente, ya que podemos relacionarla con la longitud de localización, que en relación a la ecuación (3.29) viene dada por

$$|T(E)|^2 = e^{-2N/\xi}. \quad (4.24)$$

Para relacionar la ecuación (4.23) con (4.24), primero veremos cuál es el orden dominante en la expansión en serie de Taylor del coeficiente de reflexión $R_s(E)$. Cuando se tienen resonancias aisladas (como en el caso del *random dimer* o n -meros homogéneos, ver por ejemplo caso a) en Fig. 30 que corresponde al trímero homogéneo con energía de sitio $\epsilon = 0.27$), el orden dominante en el coeficiente de reflexión viene dado por $|R_s(E)|^2 \sim a_2(E - E_r)^2$, con $a_2 = \frac{\partial^2 |R_s(E)|^2}{\partial E^2} > 0$ y usando la ecuación (4.23) se tiene que el coeficiente de transmisión viene dado por $|T_N(E)|^2 = e^{-ha_2(E - E_r)^2 N}$, con $h = Nm$. Relacionado esta última expresión con la ecuación (4.24) se desprende que la longitud de localización para estados cerca de la energía resonante E_r será en forma aproximada $\xi = 1/(ha_2(E - E_r)^2)$, lo que se traduce en que el ancho efectivo de energía de los estados en el que la longitud de localización será del orden del tamaño del segmento es $(E - E_r) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. Como $E = 2 \cos(k)$, entonces

$$(E - E_r)^2 \sim \sin^2(k_r) \Delta k^2, \quad (4.25)$$

donde $\Delta k = k - k_r$. Finalmente como para un sistema puramente lineal se sabe que $k = 2\pi l/N$ con $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, entonces podemos escribir que todos los vectores de onda cercanos a k_r y que serán perfectamente transmitidos serán $\Delta k = \frac{\Delta N}{2\pi N}$, de lo anterior y usando la ecuación (4.25) con $(E - E_r) \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$, se tiene que el número de estados extendidos en torno a E_r es aproximadamente $\Delta N = \sqrt{N}$.

Enfocándonos en los casos donde las resonancias se pueden sintonizar (n -meros simétricos), el término dominante en el coeficiente de reflexión al expandir el serie

de Taylor corresponde al de orden cuarto $(E - E_r)^4$, es decir,

$$\begin{aligned} |R_s(E)|^2 &\sim a_4(E - E_r)^4 \\ &\sim \frac{\partial^4 |R_s(E)|^2}{\partial E^4} (E - E_r)^4. \end{aligned} \quad (4.26)$$

El orden dominante de cuarto orden, puede entenderse viendo lo que sucede con el coeficiente de reflexión en torno al vector de onda resonante $\Delta k = k - k_r$, para dos casos particulares del pentámero que se han estudiado. En Fig. 30 se muestran dos casos, uno para el trímero simétrico (figura de arriba) y para un caso del pentámero (figura de abajo), donde para observar el comportamiento del coeficiente de reflexión cuando nos aproximamos a la región de sintonización, se han fijado los valores de ϵ_c y ϵ_a y se ha variado el valor de la energía de sitio del centro ϵ_b . En los casos a) y e) se observa que para la relación en las energías de sitio del trímero y pentámero que se encuentran lejos de la región de sintonización el coeficiente de reflexión en ese caso es aproximadamente $|R| \sim \Delta k^2$. Ahora bien, cuando la relación entre las energías de sitio del centro ϵ_b en el caso del trímero y del pentámero se aproximan a la región de sintonización de resonancias (Fig. 30 c), d) y g), h) para cada caso respectivamente) aparecen dos mínimos y un máximo local aproximándose entre sí. Finalmente cuando la relación entre las energías de sitio cumple la condición de sintonización (Fig. 30 b) para el trímero simétrico con energías de sitio $\epsilon_a = 0.27$ y $\epsilon_b = 0.45$ y Fig. 30 e) para el pentámero con energía de sitio $\epsilon_c = 0.23\epsilon_a = 0.45$ f) $\epsilon_a = 0.511$), la fusión de las 2 raíces dobles da origen a una raíz cuártica, es decir, $|R|^2 \sim \Delta k^4$. Además como el coeficiente de reflexión es idénticamente cero en el vector de onda resonante k_r , entonces queda que el primer orden dominante es el término $(E - E_r)^4$ para el caso de los n -meros simétricos que cumplen la relación de sintonización de resonancia. Esto fue confirmado también numéricamente, ajustando con una función polinómica el coeficiente de reflexión en torno a k_r para los casos del tetrámero, pentámero y hexámero, donde en todos los casos el orden dominante correspondía al orden cuarto. Luego, se tiene que al relacionar la ecuación (4.26) con la (4.24) se desprende de forma similar a lo explicado en el párrafo anterior que el ancho de energías de los estados que presentan transmisión perfecta corresponde a $(E - E_r) \sim 1/N^{(1/4)}$ y ya que $(E - E_r) \sim \sin(k_0)\Delta k$ como también que $\Delta k = \frac{\Delta N}{2\pi N}$, obtenemos finalmente, que el número de estados extendidos cuando la condición de sintonización de las resonancias se cumple es $\Delta N = N/N^{1/4} = N^{3/4}$. Y usando la expresión dada por Dunlap *et al.*, tenemos que para todos los casos donde la sintonización de resonancias se cumple el

exponente de difusión del MSD viene dado aproximadamente por $\langle u(z) \rangle \sim t^{1+\alpha} = t^{1+3/4} = t^{7/4}$ [27]. Esto explica la razón de un aumento en el exponente del MSD para el caso donde las energías de sitio cumplen la condición de sintonización de las resonancias.

Ahora bien, ¿qué ocurre con el exponente de difusión cuando las energías de sitios $\{\epsilon_n\}$ de los n -meros no cumplen la condición de sintonización de resonancias que se observan en la Fig. 19 y son dados de forma arbitraria? A través de la explicación que se dió en el párrafo anterior podemos comprender qué sucederá. En este caso, tal como se observa las curvas aranjadas en Fig. 31 inferior izquierda, donde tan pronto como las energías de sitio $\{\epsilon_n\}$ no cumplen la condición de sintonización de resonancias pero mantienen valores relativamente pequeños, el exponente de difusión viene dado por $\alpha = 1.5$ (propagación super-difusiva) ya que cada una de sus resonancias que se encuentran aisladas tienen ancho efectivo $|T|^2 \sim \Delta k^2$ lo que es característico para el caso del dímero aleatorio y para sistemas más grandes que presentan resonancias aisladas, tales como los n -meros homogéneos que dentro de un umbral permitido en las energías de sitio, tienen a lo más $n - 1$ resonancias aisladas. Ahora bien, para valores más grandes en las energías de sitio la transición a la localización de Anderson se observa, que también entra en acuerdo con lo observado en el caso del dímero aleatorio [21] y se aprecia en la curva azul de la Fig. 31 inferior derecha. Estos resultados se comparan con algunos casos donde la relación entre la sintonización de las resonancias si se cumple (ver los puntos anaranjados y negros en Fig. 31 superior).

4.2.5. Régimen no-lineal

Notemos que en cada eje vertical en Fig. 29 es diferente donde se ha graficado $\langle u(z) \rangle / z^\alpha$ en función de z . Notemos que en Fig. 29 a), b) y c) $\alpha \sim 1.8$ y en este caso el incremento en la no-linealidad no cambia el exponente del MSD, sino que más bien decrece la "velocidad transversal" de propagación, que en este caso corresponde al coeficiente de proporcionalidad $\sqrt{\langle u(z) \rangle}$ con $z^{1.8/2}$. Esto se verifica también para un $z_{\max} = 10^4$. El comportamiento asintótico del MSD ante la no-linealidad se puede explicar de la siguiente manera: a medida que la onda se propaga al interior del segmento no lineal, su amplitud decrece debido a que la norma (o potencia) debe conservarse. Por lo anterior, el término $|a_n|^2$ en la ecuación DNLS debe decrecer y en consecuencia también lo hará $\gamma|a_n|^2$, y como resultado para grandes distancias de propagación z , el efecto no lineal puede desprejarse por ser cada vez mas chico.

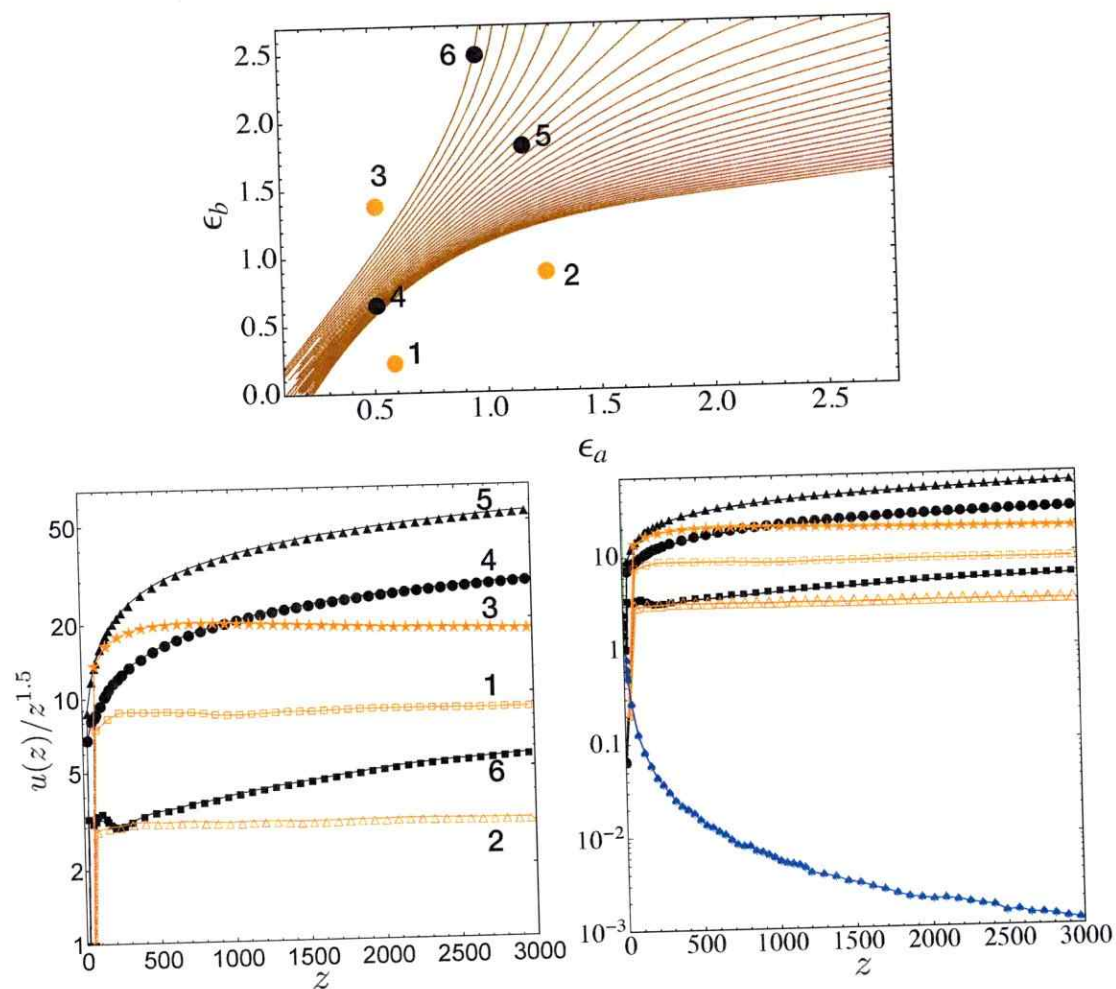


Fig. 31. Figura de arriba: Plano $\epsilon_a - \epsilon_b$ de sintonización de resonancias del pentámero. Los puntos 1, 2 y 3 corresponde a tres casos particulares donde la condición de sintonización no se cumple, mientras que los puntos 4, 5 y 6 corresponde a tres casos donde si se cumple la condición. Figura inferior izquierda: MSD $u(z)/z^{1.5}$ en función de z de cada punto 1, 2, 3, 4, 5 y 6. También se observa la localización de Anderson (curva azul en figura inferior derecha) cuando la relación de energía de sitio supera un valor de crítico. Las curvas 1, 2 y 3 tienen exponente de difusión del MSD $\langle u(z) \rangle \sim z^{1.5}$ mientras que las curvas 4, 5 y 6 tienen exponente de difusión $\langle u(z) \rangle \sim z^{1.81}$.

Finalmente, el decrecimiento en la "velocidad" del MSD con un incremento de la no linealidad γ puede atribuirse a la tendencia de la no-linealidad a autoatrapar la onda y por tanto sólo se propagará la porción pequeña de la onda que no es atrapada pudiendo renormalizar el valor de $\langle u(z) \rangle$ a pequeños valores sin afectar en este caso el exponente de difusión.

Capítulo 5

Modos localizados y desorden en bandas planas

Tal como se vió en los capítulos anteriores, el problema de localización en sistemas periódicos ha sido un tema de gran interés a lo largo de los años. Y en general, los mecanismos para lograr algún grado de localización dependían de la inclusión de efectos no lineales, a través del auto-atrapamiento o también en el quiebre de la simetría de traslación de la red, es decir, vía la inclusión de impurezas, defectos extendidos a lo largo de la red o con la inclusión de desorden. Sin embargo, los estudios realizados en sistemas de bandas planas [83] proporcionan una forma de lograr estados localizados compactos considerando como único ingrediente, geometrías no convencionales que posean bandas no difractantes. Ahora bien, no es posible obtener sistemas con bandas planas en redes unidimensionales por lo que sólo es posible en redes bi-dimensionales, por lo que es de gran importancia estudiar el interplano quasi-unidimensional en sistemas de redes como la red de Kagome [84,85], la red de Lieb [62] y la red de Stub [86].

Motivados por lo anterior, en este capítulo estudiaremos numéricamente las propiedades de estabilidad de tres sistemas quasi-unidimensionales (conocidos como ribbons) dados por la figura 32, que son sistemas donde en el caso bidimensional presentan bandas planas. Se analizará las propiedades de los modos localizados que pertenecen a la banda plana ante la inclusión de anisotropía y desorden en la energía de sitio.

La distribución de este trabajo es el siguiente: En la sección (5.1) se indica el

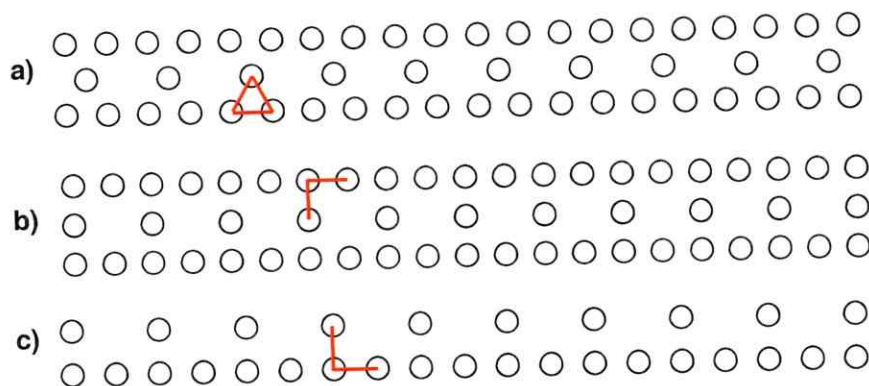


Fig. 32. Arreglos quasi-uni-dimensionales. a) Ribbon de Kagome, b) Ribbon de Lieb y c) Ribbon de Stub. La línea entre los puntos conectan los vecinos más cercanos de la celda unitaria.

modelo teórico donde se estudian los ribbons de Kagome, Lieb y Stub considerando perturbaciones en condiciones iniciales, anisotropía en los acoplamiento y desorden en los acoplamientos finalmente en la sección (5.2) se estudian las propiedades no lineales en estos sistemas.

En este caso, la evolución del campo eléctrico en la guía \mathbf{n} viene dada por la ecuación (2.28). Buscamos soluciones estacionarias de la forma $a_{\mathbf{n}} = C_{\mathbf{n}} \exp(i\Omega z)$, luego la ecuación estacionaria de Schrödinger queda en forma general

$$-\Omega C_{\mathbf{n}} + V \sum_{\mathbf{m}} C_{\mathbf{m}} + \gamma |C_{\mathbf{n}}| C_{\mathbf{n}} = 0, \quad (5.1)$$

donde se ha considerado que todos los acoplamientos son iguales a V , $v_{\mathbf{n}} = 0$ para todas las guías y Ω es la constante de propagación del modo. La ecuación (5.1) es la generalización de la ecuación estacionaria que se obtuvo en la ecuación (2.34). Tal como se comentó en el capítulo (2.3), el sistema de ecuaciones (5.1) lo resolveremos usando el método multidimensional de Newton-Raphson (ver (A.2)) cuando consideremos los casos en que $\gamma \neq 0$.

Analicemos ahora lo que sucede con las bandas lineales de estos tres ribbons que se tratarán.

5.1. Régimen lineal

Los ribbons más finos son los que se muestran en Fig. 32. El espectro de bandas o la relación de dispersión lineal ($\gamma = 0$) para estos tres casos se encuentra considerando que C_n son ondas planas de la forma $C_n = A_n \exp(ik \cdot n)$, en el que una vez reemplazándolo en la ecuación (5.1) se obtiene una matriz cuadrada de tantas filas como sitios en la celda unitaria posea la red (para el ribbon de Kagome, Lieb y Stub corresponde a 5, 5 y 3 sitios en la celda unitaria respectivamente). Luego, el espectro lineal Ω viene dado por los valores propios de dicha matriz, obteniendo finalmente las siguientes bandas para cada ribbon:

$$\begin{aligned}\Omega &= -2V, \\ \Omega &= \pm \sqrt{2(1 + \cos(2k))} V, \\ \Omega &= (1 \pm \sqrt{3 + 2 \cos(2k)}) V.\end{aligned}\tag{5.2}$$

para el caso del ribbon de Kagome que presenta 5 bandas,

$$\begin{aligned}\Omega &= 0, \\ \Omega &= \pm \sqrt{2(1 + \cos(2k))} V, \\ \Omega &= \pm \sqrt{4 + 2 \cos(2k)} V.\end{aligned}\tag{5.3}$$

para el caso del ribbon de Lieb que también posee 5 bandas y

$$\begin{aligned}\Omega &= 0, \\ \Omega &= \pm \sqrt{3 + 2 \cos(2k)} V.\end{aligned}\tag{5.4}$$

para el caso del ribbon de Stub que posee 3 bandas lineales. La forma de las bandas para cada ribbon se encuentra en Fig. 33, donde en los tres casos se observa la existencia de una banda plana en $\Omega = -2V$ para el ribbon de Kagome y en $\Omega = 0$ tanto para el ribbon de Lieb como el de Stub.

Ahora bien, para $\gamma = 0$ buscamos los modos estacionarios lineales de este sistema, para ello resolvemos la ecuación lineal (5.1) para obtener todos los autovectores de

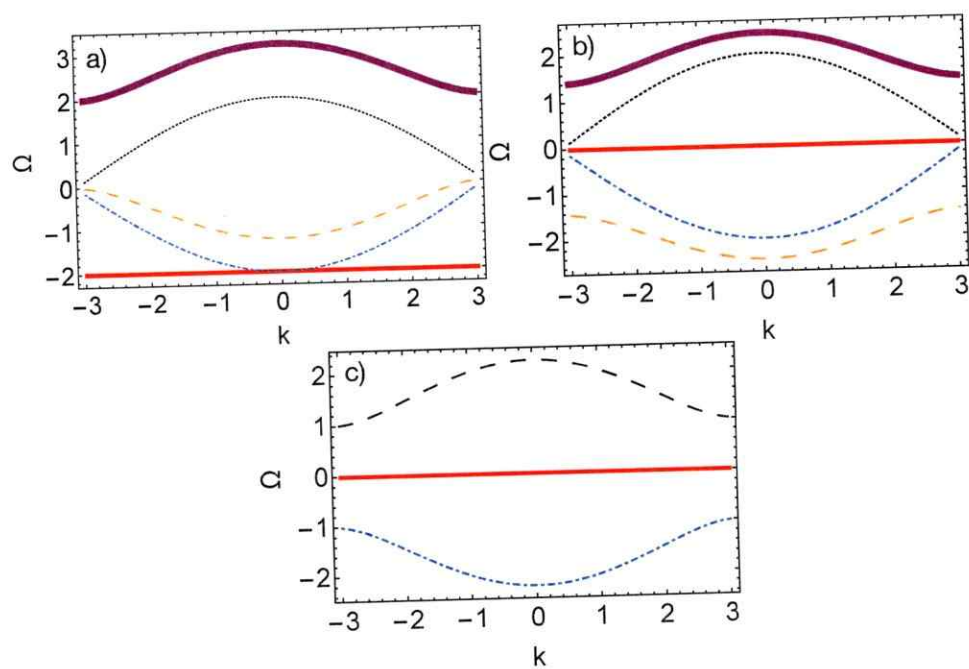


Fig. 33. Bandas lineales para los ribbons de a) Kagome, b) Lieb y c) Stub dados por las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4) respectivamente.

cada uno de los ribbons. En Fig. 34 izquierda se grafican los autovalores (espectro lineal) de todo el sistema en orden creciente, evidenciando que para $\Omega = -2V$ existe una banda plana el ribbon de Kagome y para una banda plana ubicada en $\Omega = 0$ para el ribbon de Lieb y Stub. A la derecha de cada espectro lineal se grafican "colgando" los autovectores de cada ribbon en función del número de sitio en orden creciente con su respectivo autovalor, donde la complejidad es solo aparente y la división aparecen es debido al número particular de sitios usados. Para un número total de $N = 150$ sitios tenemos que para el ribbon de Kagome los 22 autovectores más bajos, corresponden al autovalor degenerado $\Omega = -2V$ y la forma del modo es bastante localizada y en el que cada modo se diferencia de otro debido al desplazamiento en un sitio de la red. Situación similar se observa para el ribbon de Lieb y de Stub con la diferencia de que los autovectores son bastante localizados para el autovalor degenerado $\Omega = 0$. Cabe mencionar que el ancho de banda en las figuras de la derecha son artificiales, ya que dichos modos localizados corresponden a un sólo autovalor.

Ya que los modos que pertenecen a la banda plana son bastante localizados, éstos pueden combinarse para dar lugar a modos bastante compactos, como los que se observan en la parte superior de Fig. 35. Estos modos son modos estacionarios que pertenecen a la banda plana. En el anillo existe una diferencia de fase de π entre los sitios, que deja a la cancelación de fase entre los sitios cercanos, produciendo de esta forma la ausencia de difracción transversal. La extensión espacial de estos modos se puede monitorear determinando la razón de participación R (ecuación (2.40)). En Fig. 35 se muestra la razón de participación en función de z de los modos compactos de cada ribbon. Tal como se puede observar, el modo se mantiene perfectamente para grandes distancias. La existencia de una banda plana y los modos compactos que no difractan implica que también existe auto-atrapamiento lineal. Si consideramos una excitación inicial en un sólo sitio se dará la situación de que la mayoría de la amplitud inicial se propagará lejos del sitio inicial y una fracción de esta amplitud se mantendrá atrapada asintóticamente en el sitio inicial. La razón de lo anterior es debido a que una excitación inicialmente localizada es en realidad una superposición de todos los modos de las bandas posibles del sistema, y en estos casos particulares, también serán combinación lineal de los modos de la banda plana, donde los modos de las bandas difractantes serán los que contribuyen a la difracción de la onda lejos del sitio de la excitación inicial y los modos de la banda plana serán los responsables de mantener atrapada la porción de amplitud en el sitio inicial. Esta forma particular

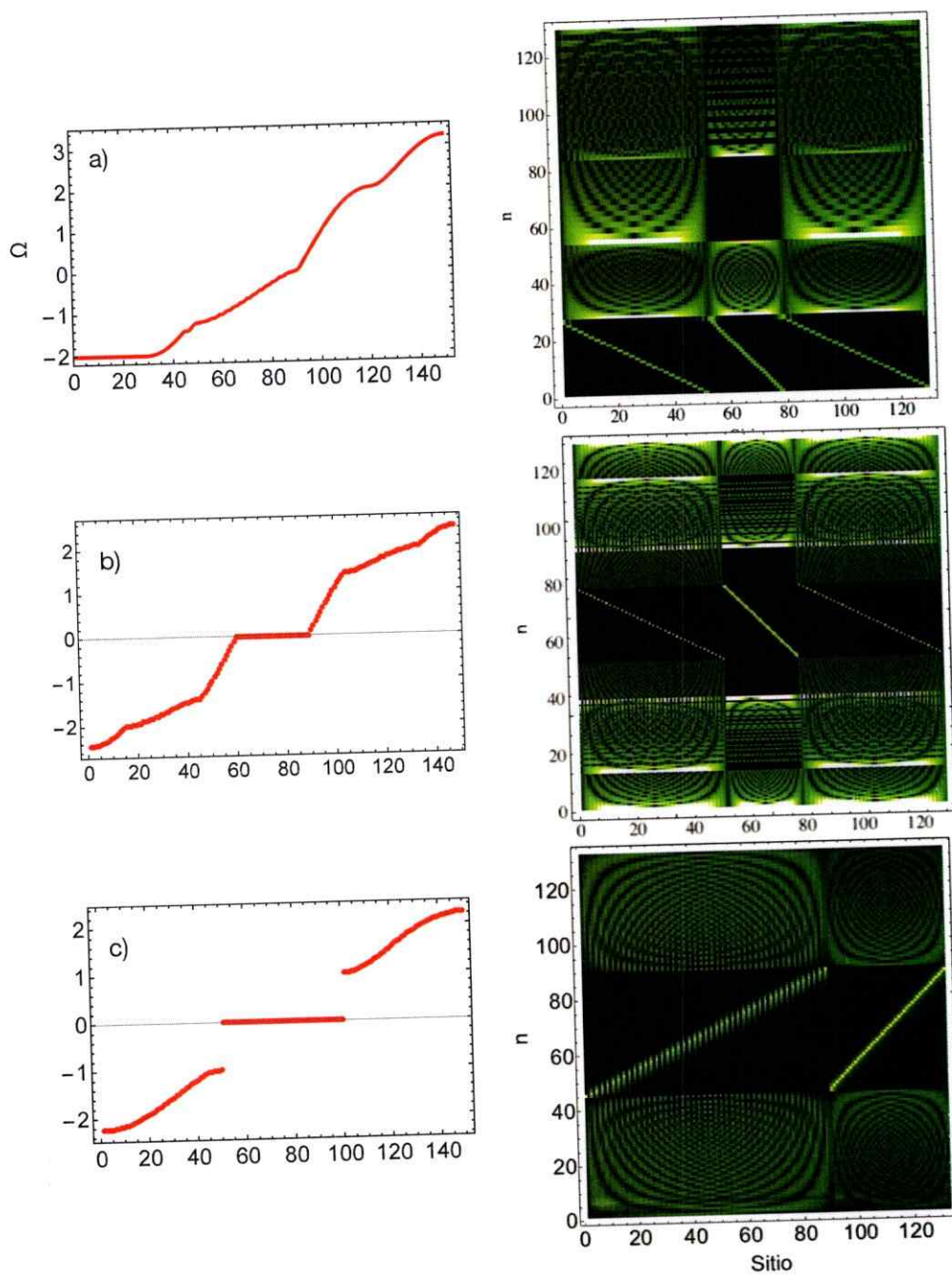


Fig. 34. Las figuras de la izquierda representan los autovalores ordenados de forma creciente para cada red a) Kagome, b) Lieb y c) Stub, la banda plana es evidente. Las figuras de la derecha corresponde a la gráfica de los autovectores correspondiente a cada autovalor ordenados de forma creciente para un largo $N = 150$.

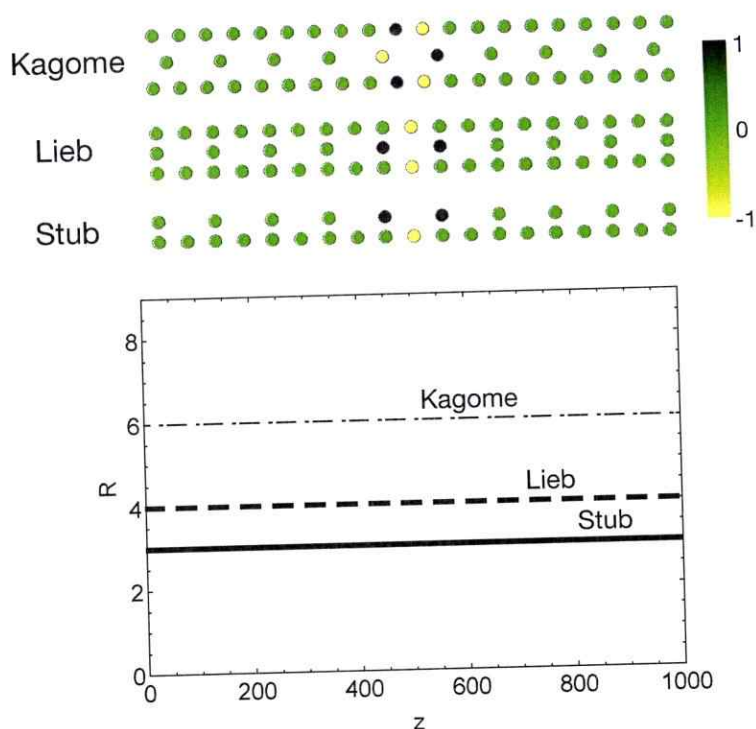


Fig. 35. Arriba: Modos compactos que pertenecen a la banda plana del ribbón de Kagome, Lieb y Stub respectivamente. Cada sitio del anillo tienen la misma amplitud pero tienen diferencia de fase de π entre ellos. Abajo: Razón de participación R de cada modo compacto en función de la distancia de propagación z .

de auto-atrapamiento ya ha sido observada antes [87].

5.1.1. Estabilidad dinámica

Comencemos ahora el estudio de la estabilidad examinando si los modos compactos (ver Fig. 35) que pertenecen a la banda plana de Kagome, Lieb y Stub son robustos ante perturbaciones en la condición inicial o en los parámetros del sistema (estabilidad estructural). Para ello, definimos un estado inicial de la forma $C_j = A_j + \delta A_j$, donde $\delta A_j \in [-w, w]$, con w el ancho del ruido y a amplitud de cada

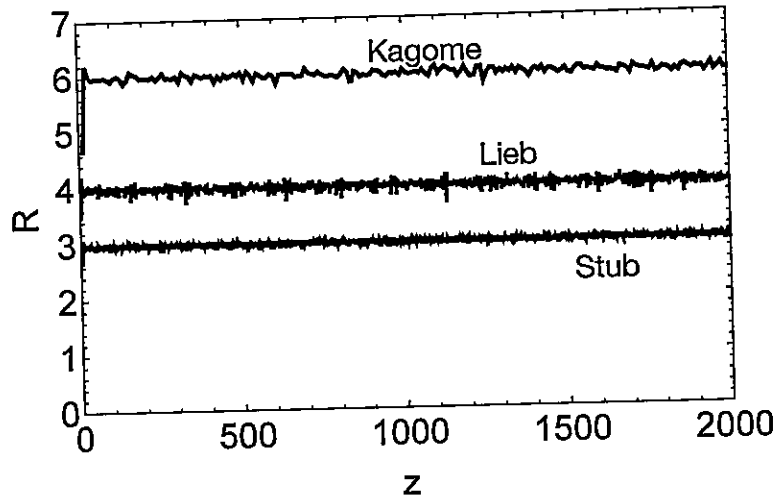


Fig. 36. Razón de participación en función de z de los modos compactos de Kagome, Lieb y Stub cuando se considera ruido en la condición inicial con un ancho $w = 0.5$

modo localizado A_j tiene el mismo valor con signos alternados entre ellos. Fuera del anillo tenemos que $C_j = 0$. En un contexto óptico esto es equivalente a alterar el índice de refracción, que puede ser controlado con la velocidad de escritura usando la técnica de escritura de laser [14,15]. En la Fig. 36 se muestra la evolución de la razón de participación de cada uno de los anillos de los ribbons en función de la distancias de propagación para un ancho de ruido $w = 0.5$. Tal como se puede ver, el anillo es robusto ante este tipo de perturbaciones. Para diferentes valores de w se observa una fenomenología similar.

Consideremos ahora el efecto de incluir anisotropía en los acoplamientos. Para ello, definimos el parámetro de anisotropía $\delta_k = V_h/V_d$ para el ribbon de kagome y $\delta = V_h/V_v$ para los ribbons de Lieb y Stub, donde V_h, V_d y V_v corresponde al acoplamiento entre vecinos cercanos a lo largo de la dirección horizontal, diagonal y vertical respectivamente (ver Fig. 32). Centrándonos primero en el caso del ribbon de Kagome, una rápida inspección de los autovalores en torno a la zona donde se produce la banda plana para $\delta_k = 1$, se observa que tan pronto como el parámetro δ_k es diferente de uno, la banda plana se destruye (Fig. 37). El valor de la razón de

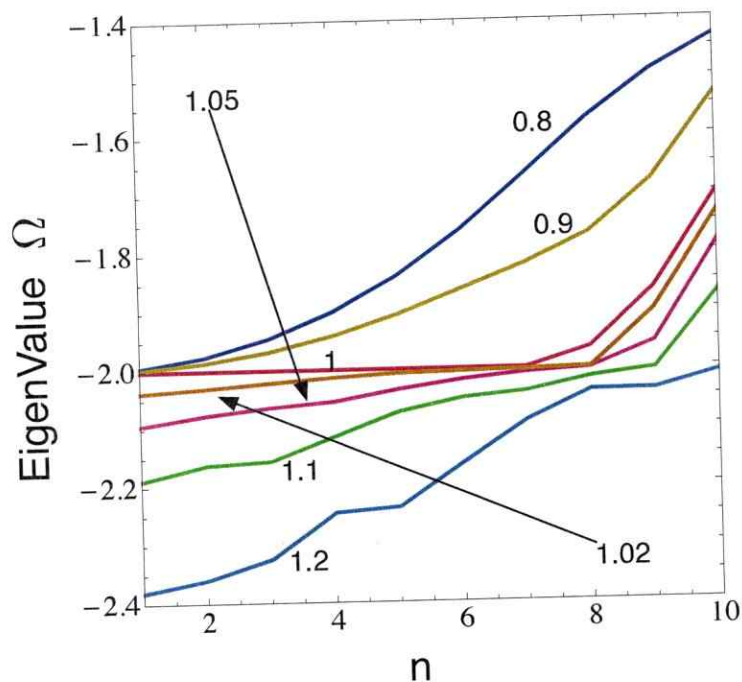


Fig. 37. Autovalores Ω para un largo $N = 120$ del ribbon de Kagome para diferentes valores del parámetro anisotrópico δ_k . Los autovalores están graficados en orden creciente y la banda plana para $\delta_k = 1$ se puede apreciar claramente.

participación R de la evolución del modo compacto en función de z se muestra en la Fig. 38 y confirma que la banda plana se destruye tan pronto como el parámetro δ_k es diferente de 1. Incluso para pequeños valores de δ_k el modo compacto se destruye completamente y se aleja rápidamente del valor $R = 6$. La situación anterior, significa que es altamente complicado observar los modos compactos y la banda plana en el ribbon de Kagome en un contexto óptico, ya que la actual tecnología para producir guías de ondas está basada en la escritura de laser [14, 15], que tiende a producir guías altamente elípticas y por lo tanto crea una red con anisotropía en los acoplamientos.

Situación distinta se tiene para los ribbons de Lieb y de Stub, donde tal como se

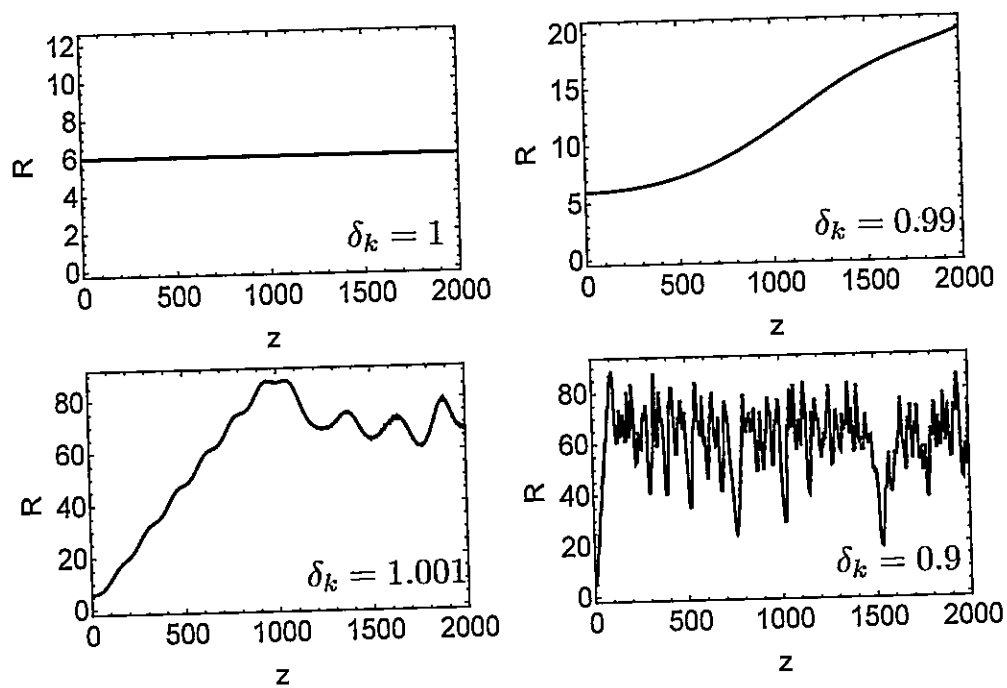


Fig. 38. Evolución de la razón de participación R del modo compacto del ribbon de Kagome para diferentes valores de anisotropía.

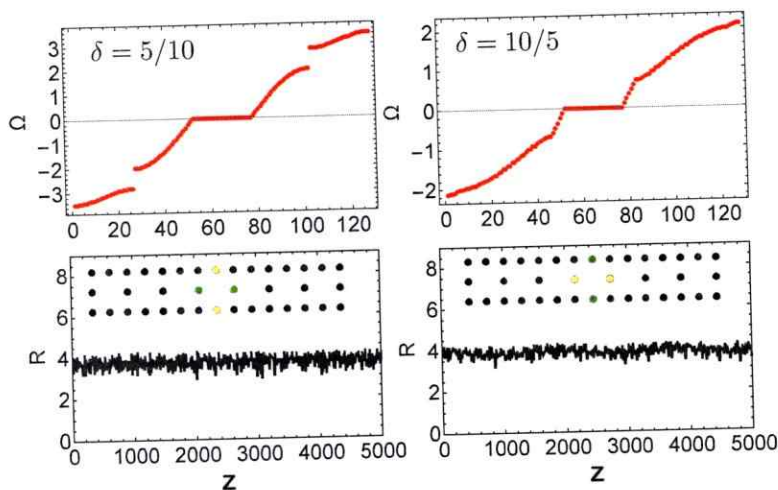


Fig. 39. Arriba: Banda lineal para el ribbon de Lieb para dos valores diferentes de anisotropía δ . Abajo: Razón de participación R en función de la distancia de propagación para los dos valores de δ dados en cada figura de arriba. En el interior se muestra la forma del modulo cuadrado del modo hasta un $z = 5000$.

ve en Fig. 39 y 40 la banda plana no se destruye cuando el parámetro δ es distinto de 1. Además se observa que la aparición de “gaps” en las bandas de dispersión para ciertos valores de δ . Las oscilaciones en el valor de la razón de participación R parece originarse en la transferencia de amplitud entre los sitios que componen el anillo.

Finalmente, para completar el análisis de estabilidad estructural, examinaremos el efecto de incluir perturbaciones aleatorias en los acoplamientos, es decir $V \rightarrow V + \delta V$, donde $\delta V \in [-w, w]$ y donde no se ha considerado anisotropía. Enfocándonos en el caso de Kagome, en Fig. 41 se observa que para valores de w diferente de 1, la banda plana se destruye (observar círculo azul en Fig. 41), además la razón de participación del modo cambia rápidamente desde su valor inicial ($R = 6$). Las oscilaciones en R son debidas a la localización de Anderson que produce perfiles localizados dando lugar a bordes que fluctúan.

Para los casos de los ribbons de Lieb y Stub, el efecto de las perturbaciones aleatorias en el acoplamiento no destruye la evolución del modo compacto y sólo

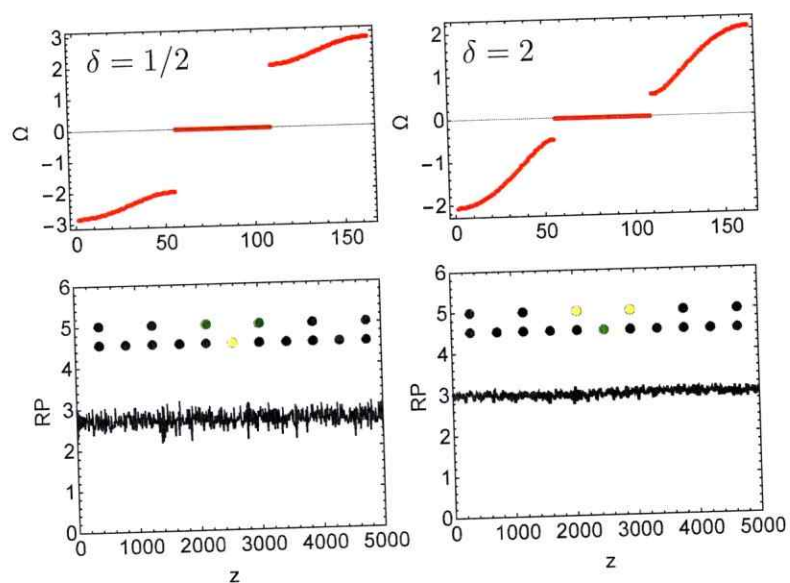


Fig. 40. Arriba: Banda lineal para el ribbon de Stub para dos valores diferentes de anisotropía δ . Abajo: Razón de participación R en función de la distancia de propagación para los dos valores de δ dados en cada figura de arriba. En el interior se observa la forma del modulo cuadrado del modo para un $z = 5000$.

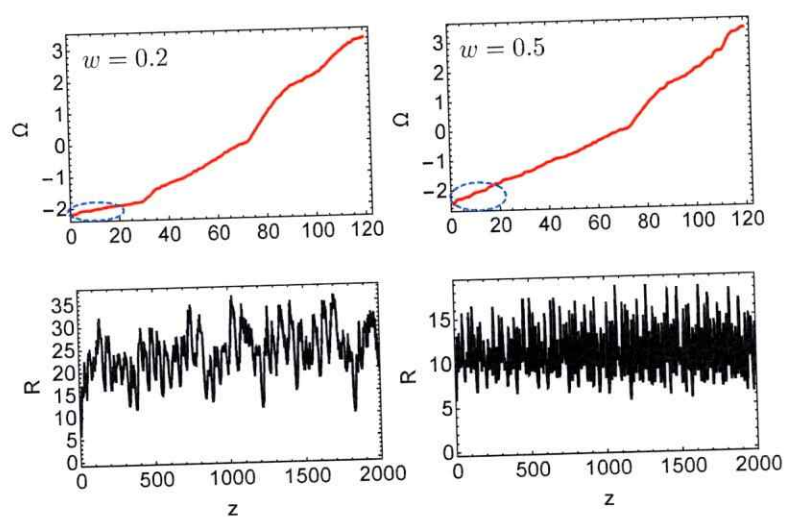


Fig. 41. Arriba: Banda lineal para el ribbon de Kagome para dos valores diferentes de w . Tal como se observa, se destruye la banda plana (ver círculo en azul) Abajo: Razón de participación R en función de la distancia de propagación para los dos valores de w dados en cada figura de arriba.

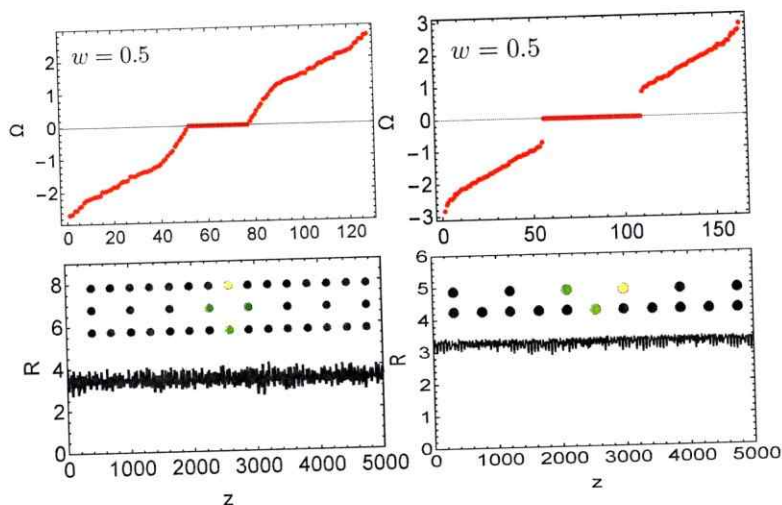


Fig. 42. Izquierda superior: Banda lineal para el ribbon de Lieb para $w = 0.5$. Abajo de esta figura se gráfica la Razón de participación R en función de la distancia de propagación para $w = 0.5$. Figura Derecha Superior: Banda lineal para el ribbon de Stub para $w = 0.5$. Abajo de esta figura se gráfica la Razón de participación R en función de la distancia de propagación para $w = 0.5$. En ambos casos se muestra la forma del modo compacto para $z = 5000$.

produce ligeras oscilaciones en la razón de participación. Esto se debe a la existencia de una banda plana para los ribbons de Lieb y Stub incluso cuando el sistema presenta perturbaciones en los acoplamientos, situación contraria que se da para el ribbon de Kagome, donde la banda plana se destruye totalmente. Lo anterior puede observarse en Fig. 42 izquierda para el caso del ribbon de Lieb y Fig. 42 derecha para el caso de Stub (para diferentes valores de w la dinámica es similar). Las oscilaciones en R vienen de las irregulares transferencias de amplitudes que se dan entre los sitios que conforman el modo compacto. Este efecto es similar cuando se consideran anisotropía en los acoplamientos.

5.2. Régimen no lineal

En esta sección analizaremos las propiedades de los modos no lineales para los tres ribbons estudiados en ausencia de desorden. Para ello consideraremos $\gamma \neq 0$ en la ecuación 5.1 y buscaremos los modos que existen fuera de la banda lineal y se sitúan alrededor de un sólo sitio. Para $\gamma < 0$ el mínimo de la banda lineal es $\Omega = -2V$. En el límite anticontinuo examinaremos dos modos posibles que se representan en la parte superior de Fig. 43. En esa misma figura se gráfica la potencia en función de la constante de propagación Ω para los dos modos no lineales. En el caso del modo centrado en un sitio que se ubica en el borde de la red (Fig. 43 izquierda) la curva se asemeja bastante a la situación de una red de dos dimensiones [88]. Se observa una potencia mínima para la existencia de dicho modo no lineal (también llamado solitón discreto). A la izquierda de este valor crítico el modo es linealmente inestable y se representa mediante una curva entre lineada (para más detalles del análisis de estabilidad (ver (A.2)).

En la Fig. 44 se muestra la razón de participación de cada modo en función de la potencia, donde se ve que cuando el modo se acerca al régimen inestable tiende a expandirse, mientras que para el caso contrario, tiende a decrecer indicando localización. Para el caso del modo ubicado en el sitio central dentro de la red, se observa la forma en la curva P en función de Ω que se da para el caso unidimensional.

Ahora bien, para el anillo compacto de Kagome, podemos encontrar la relación analítica entre la potencia y la constante de propagación Ω , que viene dada por

$$P = \frac{6}{\gamma}(\Omega + 2V), \quad (5.5)$$

donde tal como se puede ver no existe potencia mínima para el modo anillo no lineal de Kagome. El diagrama de estabilidad se muestra en Fig. 43 derecha, donde para una potencia aproximada de $P \approx 1.1$ el modo se vuelve inestable. En la Fig. 44 se muestra la razón de participación R en función de la potencia P , donde se observa que la forma del modo no es alterada.

De manera similar a como se realizó para el caso de Kagome, la relación $P - \Omega$ del modo anillo compacto no lineal de Lieb y Stub también se puede encontrar analíticamente, y vienen dados por

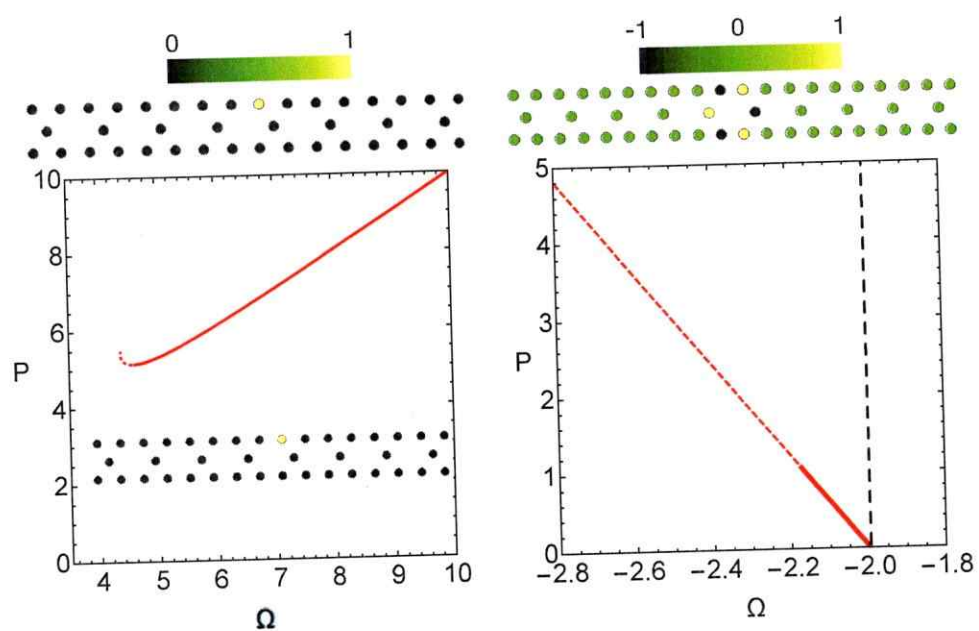


Fig. 43. Diagrama de potencia en función de la constante de propagación Ω para un modo ubicado en el borde del arreglo (izquierda) y para el modo compacto de Kagome (derecha). La línea continua (discontinua) representa el comportamiento estable (inestable) del modo.

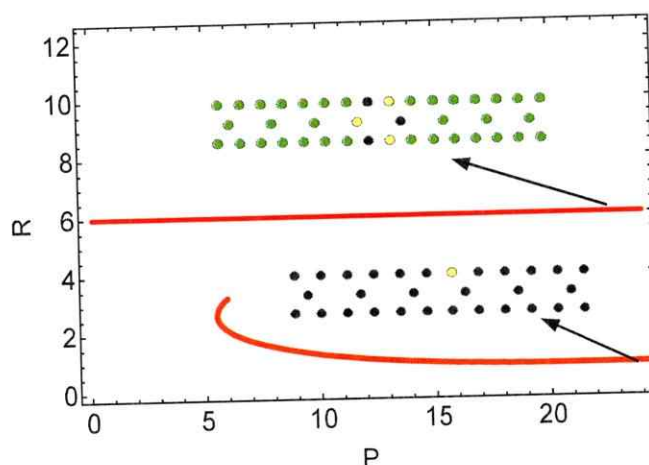


Fig. 44. Evolución de la razón de participación en función de la potencia de cada modo no lineal.

$$P = \frac{4\Omega}{\gamma V}, \quad (5.6)$$

para el modo anillo no lineal del ribbon de Lieb (ver Fig. 45) derecha, mientras que para el ribbon de Stub se tiene

$$P = \frac{3}{\gamma}\Omega, \quad (5.7)$$

donde la forma de este modo se encuentra en la Fig. 46 derecha. Tras realizar un análisis de estabilidad numérico, se observa que bajo un cierto umbral de potencia, ambos modos no lineales anillo son inestable, para el ribbon de Lieb se da para $P \approx 23.1$ mientras que para el ribbon de Stub para $P \approx 15.5$. En fig 47 derecha y 48 se observa a través de la evolución de R que no hay cambio en la forma del modo compacto no lineal, donde el valor se mantiene en $R = 4$ para el modo anillo compacto de Lieb y en $R = 3$ para el modo compacto de Stub.

Finalmente, consideraremos dos modos centrados en un sitio tanto para la red de Lieb como la de Stub. En este caso, para el ribbon de Lieb el modo se ha centrado en el medio de éste. Lo anterior se puede ver en Fig. 46 izquierda, donde en el gráfico de P vs Ω se observa una región de bi-estabilidad, es decir, donde existen 2 regímenes estables que son separados por un régimen inestable. En este caso, la curva estable

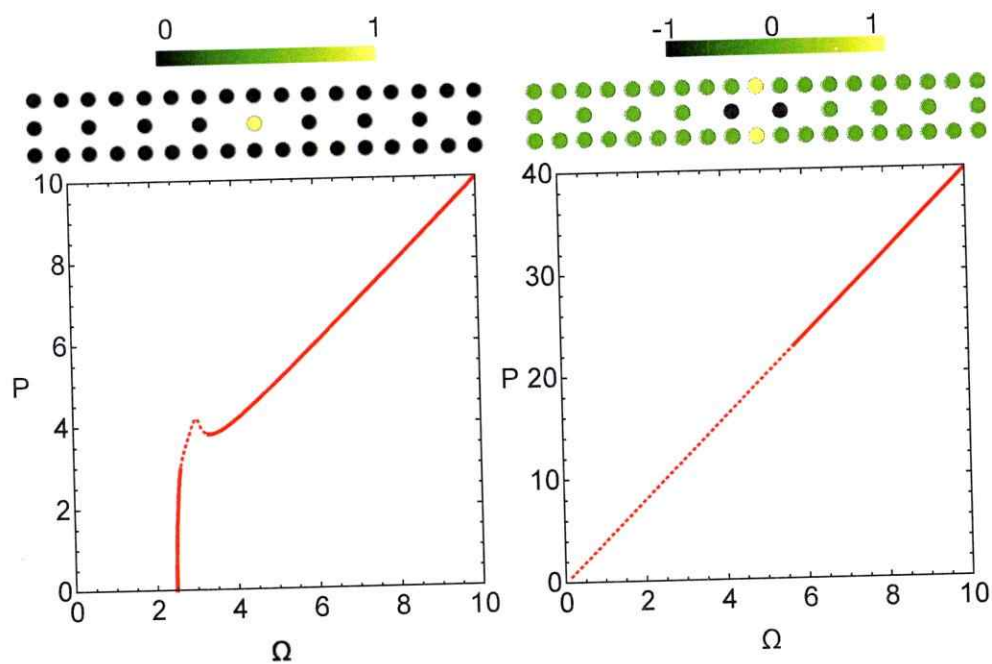


Fig. 45. Diagrama de potencia en función de la constante de propagación Ω para un modo ubicado en el centro del ribbon de Lieb (izquierda) y para el modo compacto de Lieb (derecha). La línea continua (discontinua) representa el comportamiento estable (inestable) del modo.

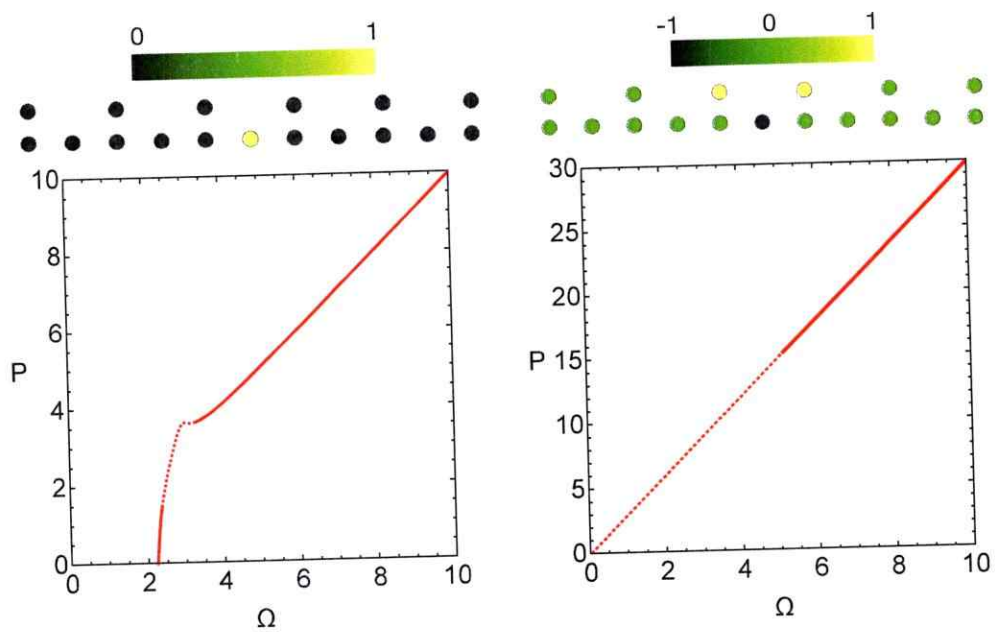


Fig. 46. Diagrama de potencia en función de la constante de propagación Ω para un modo ubicado en el borde del ribbon de Stub (izquierda) y para el modo compacto de Stub (derecha). La línea continua (discontinua) representa el comportamiento estable (inestable) del modo.

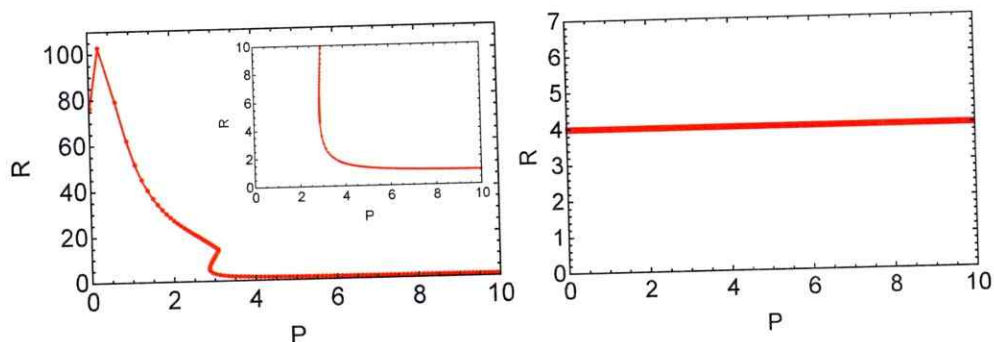


Fig. 47. Evolución de la razón de participación en función de la potencia de cada modo no lineal del ribbon de Lieb ubicado en la centro del ribbon (izquierda) y del anillo de Lieb (derecha). El recuadro pequeño de la figura de la izquierda es un acercamiento entre $0 < R < 10$.

alcanza el borde de la banda ($\Omega \approx 2.4$), en el que el modo no lineal deja de existir tan pronto como alcanza dicha banda, lo que entra en contraste con el caso del modo anillo de Lieb, donde este existe para toda potencia y cualquier valor de Ω . Para el ribbon de Stub se consideró un modo no lineal derivado de una condición que excita un solo sitio, tal como se observa en Fig. 46 izquierda, en este caso, se obtiene una curva P vs Ω bastante similar a la observada para el caso del ribbon de Lieb dado por Fig. 45 izquierda, donde también se observa bi-estabilidad. Ambos modos presentan un rápido crecimiento en R cuando se acercan a las bandas dispersivas (ver Fig. 47 izquierda y 48 línea continua).

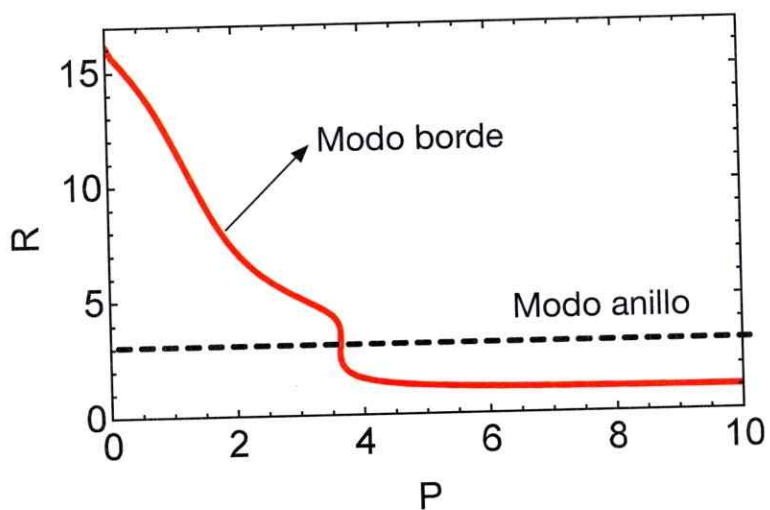


Fig. 48. Evolución de la razón de participación en función de la potencia de cada modo no lineal del ribbon de Stub ubicado en la superficie del ribbon (curva continua) y del anillo de Stub (curva discontinua).

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se estudió el transporte de excitaciones localizadas y extendidas en un red uni-dimensional con la presencia de desorden correlacionado tanto el régimen lineal y no lineal. Bajo esta misma línea, se estudiaron las propiedades de transporte dinámico de modos fuertemente localizados en sistemas que presentan bandas planas en su espectro de energía.

Enfocándonos en el primer caso, se han examinado las propiedades de transporte para excitaciones extendidas y localizadas a lo largo de una red unidimensional donde se incrustaron cadenas de n -meros de forma aleatoria a una concentración de un 50%. Se determinó el coeficiente de transmisión y reflexión para una impureza simple de estos n -meros obteniendo una expresión analítica de estos coeficientes. Se logró sintonizar dos resonancias en el coeficiente de transmisión de los n -meros obteniendo de manera numérica las relaciones entre las energías de sitio para que esto sucediera. La importancia fundamental de lo anterior, es que debido a la sintonización de dos resonancias, el número de estados extendidos aumenta en relación al caso ya estudiado en la literatura. Se logró generalizar dichos resultados, que sólo estaban estudiados para un caso particular de n -mero, el trímero simétrico. En relación a la transmisión de ondas planas, se observó que el promedio de las transmisiones en función del largo decrece como ley de potencias en el régimen lineal, mientras que para el régimen no lineal se observó un decaimiento de tipo exponencial para largos relativamente pequeños ($L < 200$). En cambio, para largos superiores a $L = 200$ se observó un decaimiento en forma de ley de potencias, similar a los casos observados en la literatura para sistemas desordenados con efectos no lineales. Finalmente, considerando el caso de la propagación de una condición inicialmente localizada, se

encontró un crecimiento asintótico en el exponente del MSD $z^\alpha \sim z^{1.8}$ cuando las resonancias de los n -meros se sintonizan, mientras que cuando no se cumple la relación entre las energías de sitio de los n -meros se recupera el caso super-difusivo $z^\alpha \sim z^{1.5}$. Lo anterior se debe al aumento del número de estados extendidos cuando las resonancias se sintonizan. Efectos no lineales no alteran los exponentes de difusión ya sea cuando se sintonizan o no las resonancias del sistema.

El tipo de configuración que se estudió en el capítulo 4, es decir, configuraciones simétricas de los n -meros y las consecuencias en el transporte de diferentes tipos de excitaciones, no sólo puede considerarse en relación a las energías de sitios, sino que también se puede ampliar considerando configuraciones simétricas tanto en los acoplamientos como en los parámetros no lineales de las guías de ondas. Luego, los métodos desarrollados y explicados en esta tesis proveen una manera eficiente para su futura investigación.

Por otro lado, se examinaron las propiedades en el espectro de energías para tres tipos diferentes de sistemas cuasi-uni-dimensionales: el "ribbon" de Kagome, de Lieb y de Stub. Todos estos casos presentan bandas planas con autoestados degenerados. Estos estados son totalmente compactos y carecen de difracción debido a que la velocidad de grupo es cero. Enfocándonos en estos modos compactos, examinamos la estabilidad dinámica lineal ante la presencia de ruido en la condición inicial de estos modos, anisotropía en los acoplamientos y variaciones aleatorias en la constante de propagación. Los resultados varían dependiendo del ribbon a considerar. En general para los tres ribbon observamos que la presencia de ruido en la condición inicial no afecta la estabilidad dinámica del modo compacto. Ahora bien, para el ribbon de Stub y de Lieb, se observó que son estables ante la presencia de anisotropía y variaciones aleatorias en los acoplamientos. Mientras que para el ribbon de Kagome, se observó el efecto contrario, es decir, es inestable ante la presencia de anisotropía y variaciones aleatorias en la constante de acoplamiento. Finalmente, cuando se incluyen efectos no lineales, se encuentra que los modos compactos lineales también son autovectores no lineales de la ecuación estacionaria de Schrödinger discreta. En estos casos, se obtuvo de forma analítica la relación entre la potencia de los modos en función de la constante de propagación, donde se observa que no existe potencia mínima para la existencia de estos modos, situación que difiere de los usuales casos de modos no lineales, quienes siempre viven fuera de la banda lineal. La robustez

de los ribbons de Lieb y Stub ante diferentes perturbaciones dan la posibilidad de utilizar estos sistemas que presentan bandas planas como posibles candidatos para la transmisión estable a grandes distancias de imágenes, estas imágenes pueden generarse mediante combinaciones lineales de estos modos compactos robustos de uno de estos ribbon.

Apéndice A

A.1. Identidad de Chebyshev

La definición para la matriz de transferencia para N impurezas viene dada por la ecuación (3.10)

$$M^{(N)} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1. \quad (\text{A.1})$$

Un caso especial se tiene cuando todas las guías de ondas poseen la misma energía de sitio ϵ_n , es decir,

$$M_N = M_{N-1} = \dots = M_1,$$

se puede expresar la matriz M^N en función de la matriz M_1 usando la identidad de Chebyshev [80]

Consideremos el caso general en que la matriz de transferencia M se puede expresar como

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Sea λ_1 y λ_2 los autovalores de la matriz M , podemos expresarlos de la forma

$$\lambda_1 = e^{iq}, \quad \lambda_2 = e^{-iq}, \quad (\text{A.3})$$

donde se tiene que $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos(q)$. Notemos además que como la matriz M_n es una matriz unimodular ($\det(M_n) = \pm 1$), se tiene que $\lambda_1^* = \lambda_2$. Finalmente, la n -ésima potencia de una matriz unimodular usando la identidad de Chebyshev queda de la forma

$$M^N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} a U_{N-1}(q) - U_{N-2}(q) & b U_{N-1}(q) \\ c U_{N-1}(q) & d U_{N-1}(q) - U_{N-1}(q) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

donde la función $U_N(q)$ se define como

$$U_N(q) = \frac{\sin[(N+1)q]}{\sin(q)}. \quad (\text{A.5})$$

A.2. Estabilidad modos no lineales

En esta sección se analiza la estabilidad de las soluciones no lineales. Se define un modo E_n débilmente perturbado como $E_n = (E_n + u_n(z) + iv_n(z)) \exp(i\Omega z)$, con u_n y v_n reales. La evolución de estos modos se puede expresar en forma compacta definiendo los vectores reales $\delta\mathbf{U} = \{u_n\}$ y $\delta\mathbf{V} = \{v_n\}$ y las matrices reales $\mathbf{A} = \{\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1} + (-\Omega + \gamma|E_n|^2)\delta_{n,m}\}$ y $\mathbf{B} = \{\delta_{n,m+1} + \delta_{n,m-1} + (-\Omega + 3\gamma|E_n|^2)\delta_{n,m}\}$. Luego, la evolución dinámica de la perturbación puede expresarse como $\delta\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{BA}\delta\mathbf{U} = 0$ y $\delta\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{AB}\delta\mathbf{V} = 0$, donde los dos puntos representa la doble derivada en la coordenada z . Por lo tanto, la estabilidad lineal de cada modo depende de los autovalores de \mathbf{AB} o \mathbf{BA} . Sea $\omega^2 \equiv l$ el espectro de autovalores de \mathbf{AB} o \mathbf{BA} (generalmente $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, pero los autovalores son iguales), calculamos el mayor valor $g = \max(\sqrt{(|l| - \Re(l))/2})$ que corresponde al modo perturbativo más inestable, luego, una solución no lineal será estable (inestable) cuando $g = 0$ ($g \neq 0$).

Referencias

- [1] Anderson, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492–1505 (1958).
- [2] Mott, N. & Twose, W. The theory of impurity conduction. *Advances in Physics* **10**, 107–163 (1961).
- [3] Bloch, F. über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern z. *Phys.* **52**, 555–600 (1928).
- [4] Thouless, D. Electrons in disordered systems and the theory of localization. *Physics Reports* **13**, 93 – 142 (1974).
- [5] Economou, E. N. & Cohen, M. H. Localization in disordered materials: Existence of mobility edges. *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1445–1448 (1970).
- [6] Abrahams, E., Anderson, P. W., Licciardello, D. C. & Ramakrishnan, T. V. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673–676 (1979).
- [7] Kramer, B. & MacKinnon, A. Localization: theory and experiment. *Reports on Progress in Physics* **56**, 1469.
- [8] Guidoni, L., Triché, C., Verkerk, P. & Grynberg, G. Quasiperiodic optical lattices. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3363–3366 (1997).
- [9] Billy, J. *et al.* Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature* 891–894.
- [10] Lye, J. E. *et al.* Effect of interactions on the localization of a bose-einstein condensate in a quasiperiodic lattice. *Phys. Rev. A* **75**, 061603 (2007).

- [11] Pertsch, T. *et al.* Nonlinearity and disorder in fiber arrays. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 053901 (2004).
- [12] Lahini, Y. *et al.* Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013906 (2008).
- [13] Lahini, Y. *et al.* Observation of a localization transition in quasiperiodic photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 013901 (2009).
- [14] Szameit, A. & Nolte, S. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 163001.
- [15] Schaffer, C. B., Brodeur, A. & Mazur, E. Laser-induced breakdown and damage in bulk transparent materials induced by tightly focused femtosecond laser pulses. *Measurement Science and Technology* **12**, 1784.
- [16] Chan, J. W., Huser, T., Risbud, S. & Krol, D. M. Structural changes in fused silica after exposure to focused femtosecond laser pulses. *Optics Letters* **26**, 1726–1728 (2001).
- [17] Streltsov, A. M. & Borrelli, N. F. Study of femtosecond-laser-written waveguides in glasses. *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 2496–2504 (2002).
- [18] Chan, J., Huser, T., Risbud, S. & Krol, D. Modification of the fused silica glass network associated with waveguide fabrication using femtosecond laser pulses. *Applied Physics A: Materials Science and Processing* **76**, 367–372 (2003).
- [19] Flores, J. C. Transport in models with correlated diagonal and off-diagonal disorder. *Journal of Physics: Condensed Matter* **1**, 8471.
- [20] Dunlap, D. H., Kundu, K. & Phillips, P. W. Absence of localization in certain statically disordered lattices in any spatial dimension. *Phys. Rev. B* **40**, 10999–11006 (1989).
- [21] Dunlap, D. H., Wu, H.-L. & Phillips, P. W. Absence of localization in a random-dimer model. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88–91 (1990).
- [22] Wu, H. . & Phillips, P. W. Repulsive binary alloys and the absence of localization: Application to fibonacci lattices and molecularly based electronic filters. *The Journal of Chemical Physics* **93** (1990).

- [23] Wu, H.-L. & Phillips, P. W. Polyaniline is a random-dimer model: A new transport mechanism for conducting polymers. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1366–1369 (1991).
- [24] Phillips, P. W. & Wu, H.-L. Localization and its absence: A new metallic state for conducting polymers. *Science* **252**, 1805–1812 (1991).
- [25] Evangelou, S. & Katsanos, D. Super-diffusion in random chains with correlated disorder. *Physics Letters A* **164**, 456 – 464 (1992).
- [26] Dominguez-Adame, F., Macia, E. & Sanchez, A. Delocalized vibrations in classical random chains. *Phys. Rev. B* **48**, 6054–6057 (1993).
- [27] Giri, D., Datta, P. K. & Kundu, K. Tuning of resonances in the generalized random trimer model. *Phys. Rev. B* **48**, 14113–14120 (1993).
- [28] Okbani, Z., Ouasti, R. & Zekri, N. Nature of the extended states in one-dimensional random trimers. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **234**, 38 – 52 (1996).
- [29] Huang, X., Peng, R., Qiu, F., Jiang, S. & Hu, A. Delocalization in disordered chains with random symmetrical impurities. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* **23**, 275–281 (2001).
- [30] Evangelou, S. N. & Economou, E. N. Reflectionless modes in chains with large-size homogeneous impurities. *Journal of Physics A: Mathematical and General* **26**, 2803.
- [31] Liu, Y. M. *et al.* Resonant scattering in random-polymer chains with inversely symmetric impurities. *Phys. Rev. B* **67**, 205209 (2003).
- [32] Cao, L. S. *et al.* Delocalization of phonons and quantized thermal conductance in a random n -mer system. *Phys. Rev. B* **72**, 214301 (2005).
- [33] Zhao, Z. *et al.* Localization-delocalization transition of photons in one-dimensional random n -mer dielectric systems. *Phys. Rev. B* **75**, 165117 (2007).
- [34] Bellani, V. *et al.* Experimental evidence of delocalized states in random dimer superlattices. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2159–2162 (1999).

- [35] Parisini, A. *et al.* Electronic structure and vertical transport in random dimer GaAs – $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ superlattices. *Phys. Rev. B* **63**, 165321 (2001).
- [36] Spectroscopic ellipsometry of intentionally disordered superlattices. *Microelectronics Journal* **35**, 59 – 61 (2004). 3rd Ibero American workshop on Nanostructures for applications to Micro and Optoelectronics.
- [37] Kuhl, U., Izrailev, F. M., Krokhin, A. A. & Steckmann, H.-J. Experimental observation of the mobility edge in a waveguide with correlated disorder. *Applied Physics Letters* **77** (2000).
- [38] Naether, U. *et al.* Experimental observation of superdiffusive transport in random dimer lattices. *New Journal of Physics* **15**, 013045.
- [39] Szameit, A. *et al.* Quasi-incoherent propagation in waveguide arrays. *Applied Physics Letters* **90** (2007).
- [40] Holstein, T. Studies of polaron motion. *Annals of Physics* **8**, 325 – 342 (1959).
- [41] Kevrekidis, P. G., Rasmussen, K. A. & Bishop, A. R. The discrete nonlinear schrödinger equation: A survey of recent results. *International Journal of Modern Physics B* **15**, 2833–2900 (2001).
- [42] Hennig, D. & Tsironis, G. Wave transmission in nonlinear lattices. *Physics Reports* **307**, 333 – 432 (1999).
- [43] Delyon, F. m. c., Lévy, Y.-E. & Souillard, B. Nonperturbative bistability in periodic nonlinear media. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2010–2013 (1986).
- [44] Wan, Y. & Soukoulis, C. M. One-dimensional nonlinear schrödinger equation: A nonlinear dynamical approach. *Phys. Rev. A* **41**, 800–809 (1990).
- [45] Campbell, D. K., Flach, S. & Kivshar, Y. S. Localizing energy through nonlinearity and discreteness. *Physics Today* **57**, 43–49 (2004).
- [46] Trombettoni, A. & Smerzi, A. Discrete solitons and breathers with dilute bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353–2356 (2001).
- [47] Eisenberg, H. S., Silberberg, Y., Morandotti, R., Boyd, A. R. & Aitchison, J. S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3383–3386 (1998).

- [48] Sukhorukov, A. A. & Kivshar, Y. S. Discrete gap solitons in modulated waveguide arrays. *Opt. Lett.* **27**, 2112–2114 (2002).
- [49] Sukhorukov, A. A. & Kivshar, Y. S. Multigap discrete vector solitons. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 113902 (2003).
- [50] Trombettoni, A., Smerzi, A. & Bishop, A. R. Superfluidity versus disorder in the discrete nonlinear schrödinger equation. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 173902 (2002).
- [51] Rasmussen, K. ., Cai, D., Bishop, A. R. & Grnbech-Jensen, N. Localization in a nonlinear disordered system. *EPL (Europhysics Letters)* **47**, 421.
- [52] Doucot, B. & Rammal, R. On anderson localization in nonlinear random media. *EPL (Europhysics Letters)* **3**, 969.
- [53] Devillard, P. & Souillard, B. Polynomially decaying transmission for the nonlinear schrödinger equation in a random medium. *Journal of Statistical Physics* **43**, 423–439 (1986).
- [54] Molina, M. I. Transport of localized and extended excitations in a nonlinear anderson model. *Phys. Rev. B* **58**, 12547–12550 (1998).
- [55] Makris, K. G., El-Ganainy, R., Christodoulides, D. N. & Musslimani, Z. H. Beam dynamics in \mathcal{PT} symmetric optical lattices. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 103904 (2008).
- [56] Pikovsky, A. S. & Shepelyansky, D. L. Destruction of anderson localization by a weak nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 094101 (2008).
- [57] Kopidakis, G. & Aubry, S. Intraband discrete breathers in disordered nonlinear systems. i. delocalization. *Physica D: Nonlinear Phenomena* **130**, 155 – 186 (1999).
- [58] Naether, U. *et al.* Enhanced distribution of a wave-packet in lattices with disorder and nonlinearity. *Opt. Express* **21**, 927–934 (2013).
- [59] Heinrich, M. *et al.* Disorder-enhanced nonlinear delocalization in segmented waveguide arrays. *New Journal of Physics* **14**, 073026 (2012).

- [60] Naether, U. *et al.* Delocalization enhancement induced by weak disorder and nonlinearity. In *Quantum Electronics and Laser Science Conference*, QM1E-4 (Optical Society of America, 2012).
- [61] Guzmán-Silva, D. *et al.* Experimental observation of bulk and edge transport in photonic Lieb lattices. *New Journal of Physics* **16**, 063061 (2014).
- [62] Vicencio, R. A. & Mejía-Cortés, C. Diffraction-free image transmission in kagome photonic lattices. *Journal of Optics* **16**, 015706 (2014).
- [63] Kittel, C. *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986), 6th edn.
- [64] V. Apaja, M. H. & Manninen, M. Flat bands, dirac cones, and atom dynamics in an optical lattice. *Phys. Rev. A* **82**, 041402 (2010).
- [65] M. Hyrkäs, V. A. & Manninen, M. Many-particle dynamics of bosons and fermions in quasi-one-dimensional flat-band lattices. *Phys. Rev. A.* **87**, 023614 (2013).
- [66] Rechtsman, M. C., Zeuner, J. M., Tünnermann, A., S. Nolte, M. S. & Szameit, A. *Nat. Photon.* **7**, 153 (2013).
- [67] Vicencio, R. A. *et al.* Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245503 (2015).
- [68] Mukherjee, S. *et al.* Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245504 (2015).
- [69] Biondi, M., van Nieuwenburg, E. P. L., Blatter, G., Huber, S. D. & Schmidt, S. *Phys. Rev. Lett* **115**, 143601 (2015).
- [70] Simon, A. Superconductivity in layered structures of rare-earth carbide halides. *Angew. Chem* **109**, 1873 (1997).
- [71] Deng, S., Simon, A. & Köhler, J. *Angew. Chem* **110**, 664 (1998).
- [72] Jacqmin, T. *et al.* Direct observation of dirac cones and a flatband in a honeycomb lattice for polaritons. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 116402 (2014).

- [73] Baboux, F. *et al.* Bosonic condensation and disorder-induced localization in a flat band. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 066402 (2016).
- [74] Bergman, D. L., Wu, C. & Balents, L. Band touching from real-space topology in frustrated hopping models. *Physical Review B* **78**, 125104 (2008).
- [75] Flach, S. & Gorbach, A. V. Discrete breathers advances in theory and applications. *Physics Reports* **467**, 1 – 116 (2008).
- [76] Christodoulides, D. N. & Joseph, R. I. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides. *Opt. Lett.* **13**, 794–796 (1988).
- [77] Hyrkäs, M., Apaja, V. & Manninen, M. Many-particle dynamics of bosons and fermions in quasi-one-dimensional flat-band lattices. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* **87**, 1–12 (2013).
- [78] Bell, R. J. & Dean, P. Atomic vibrations in vitreous silica. *Discuss. Faraday Soc.* **50**, 55–61 (1970).
- [79] Weaver, R. L. Anderson localization of ultrasound. *Wave Motion* **12**, 129 – 142 (1990).
- [80] Tobergte, D. R. & Curtis, S. *Wave Propagation*, vol. 53 (2013).
- [81] Ishii, K. Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered system **53**, 77–138 (1973).
- [82] Lederer, F. *et al.* Discrete solitons in optics. *Physics Reports* **463**, 1–126 (2008).
- [83] Deng, S., Simon, A. & Köhler, J. The origin of a flat band. *Journal of Solid State Chemistry France* **176**, 412–416 (2003).
- [84] Beličev, P. P. *et al.* Localized modes in nonlinear binary kagome ribbons. *Phys. Rev. E* **92**, 052916 (2015).
- [85] Vicencio, R. A. & Johansson, M. Discrete flat-band solitons in the kagome lattice. *Phys. Rev. A* **87**, 061803 (2013).
- [86] Hyrkäs, M., Apaja, V. & Manninen, M. Many-particle dynamics of bosons and fermions in quasi-one-dimensional flat-band lattices. *Phys. Rev. A* **87**, 023614 (2013).

- [87] Molina, M. I. Localized modes in nonlinear photonic kagome nanoribbons. *Physics Letters A* **376**, 3458 – 3461 (2012).
- [88] Discrete surface solitons in two-dimensional anisotropic photonic lattices. *Physics Letters A* **364**, 274 – 276 (2007).