

UCH-FC
DOC-F
B212
C. 2

Agujero Negro en Tres Dimensiones

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con Mención en Física

por
Máximo Bañados Lira

Directores de Tesis : Dr. Claudio Teitelboim y Dr. Jorge Zanelli.

Tutor : Dr. Jorge Zanelli



**INFORME DE APROBACION
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

Máximo Bañados

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias.

Directores de Tesis

Dr. Claudio Teitelboim

Claudio Teitelboim

Dr. Jorge Zanelli

JZ

Comisión Informante de Tesis

Dr. Sergio del Campo

Dr. Sergio Hojman (presidente)

Sergio Hojman

Dr. Romualdo Tabensky

Romualdo Tabensky

Dr. Nelson Zamorano

Nelson Zamorano



Agradecimientos

Este trabajo fue realizado completamente bajo la guía de los profesores Claudio Teitelboim y Jorge Zanelli. Sin la fuerte presencia y estímulo de ambos este proyecto no hubiera sido posible de llevar a cabo.

Muchas personas, en distintas etapas, me han ayudado a mantener el entusiasmo por la Física, mostrándome su profundidad y belleza. Quiero mencionar aquí a Roberto Hojman, Sergio Hojman, Herbert Massmann, Claudio Teitelboim y Jorge Zanelli a quienes debo el estar aún en el camino de convertirme en científico. Un agradecimiento especial quiero hacer a Marc Henneaux por su gran paciencia para explicarme, cuantas veces fue necesario, las poderosas técnicas de los diagramas de Penrose. El es, además, co-autor en parte importante de los resultados aquí mostrados.

Durante el desarrollo de todo este trabajo, me he desempeñado como ayudante de investigación en el Centro de Estudios Científicos de Santiago el cual ha sido para mí una ventana al mundo científico internacional. Agradezco al C.E.C.S. el gran apoyo que me ha dado permanentemente.

Mi permanencia en el programa de Doctorado ha sido posible gracias a una beca de Fundación Andes la cual me ha permitido una dedicación completa al programa. Agradezco también a Fundación Andes el apoyo que me ha brindado en los distintos proyectos que he realizado. Parte de este trabajo fue financiado también por el proyecto PG/082/92 del Departamento de Post-grado y Post-título de la Universidad de Chile y los proyectos 0862/91 y 0867/91 de FONDECYT.



*De una estrella luminosa con la misma densidad
de la Tierra y radio 150 veces el del Sol,
como consecuencia de su atracción gravitacional,
los rayos de luz emergentes de ella no llegan a nuestros ojos;
es posible entonces, que debido a esta causa, los cuerpos más
grandes del Universo, sean invisibles.*

Pierre Laplace (1798)*

*Citado en C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, cap. 33
(W.H. Freeman and Company 1973).



INDICE

I. INTRODUCCION

II. AGUJERO NEGRO EN TRES DIMENSIONES

1. Introducción

2. Principio de Acción, Ecuaciones de Movimiento y Soluciones

2.1 Principio de acción reducido

2.2 Ecuaciones de movimiento y soluciones

2.3 Integrales de superficie: energía y momento angular

2.4 Agujero negro

2.5 Agujero negro con carga eléctrica

2.6 Termodinámica del agujero negro en 2+1 dimensiones

3. Construcción Geométrica del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones

3.1 Soluciones cónicas

3.2 Espacio de anti-de Sitter en 2+1

3.3 Identificaciones y agujero negro

4. Estructura Causal del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones

4.1 Coordenadas de Kruskal

4.2 Diagramas de Penrose en el caso $|J/l| \neq M \neq 0$

4.3 Diagramas de Penrose en los casos $|J/l| = M$ y $M = 0$

5. Formulación Chern-Simons del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones

5.1 Gravitación en 2+1 dimensiones en la formulación Chern-Simons

5.2 Ecuaciones de movimiento canónicas y soluciones estáticas

5.3 Formulación covariante y holonomías

5.4 Términos de borde: energía, momento angular y entropía

III. AGUJEROS NEGROS EN DIMENSIONES MAYORES QUE CUATRO

1. Introducción
2. La Acción Gravitacional en Dimensiones Mayores
 - 2.1 Acción de Lovelock
 - 2.2 La acción en dimensiones impares
 - 2.3 La acción en dimensiones pares
 - 2.4 Ecuaciones de movimiento
3. Soluciones Estáticas de Simetría Esférica
 - 3.1 Acción y ecuaciones de movimiento reducidas
 - 3.2 Agujero negro en dimensiones mayores
 - 3.3 Agujero negro cargado en dimensiones mayores
 - 3.4 Términos de superficie: energía y carga eléctrica
4. Termodinámica de Agujeros Negros en Dimensiones Mayores
 - 4.1 Temperatura
 - 4.2 Acción Euclideana y entropía

Conclusiones

Apéndices

- A El Grupo de Lorentz como un subgrupo del grupo de anti-de Sitter
- B Estructura hamiltoniana de la acción de Lovelock
- C Estructura hamiltoniana del campo electromagnético en un fondo curvo
- D Acción Euclídea
- E Unidades geometrizadas

Referencias

CAPITULO I.

INTRODUCCION

En el año 1798, Pierre Simon Laplace indicó la posible existencia de un objeto celeste que sería invisible a nuestros ojos. Laplace ocupó la mecánica de Newton y demostró que para un planeta cuyo radio (R) estuviera relacionado con su masa (M) por la expresión

$$R = \frac{2MG}{c^2}, \quad (1)$$

su velocidad de escape sería igual a la velocidad de la luz. Por lo tanto, de un cuerpo con un radio menor, la luz no podría escapar, siendo así completamente invisible.

Es sorprendente que, aunque hoy día sabemos que la teoría de Newton no es correcta en la escala necesaria para que este objeto pudiera existir, el resultado de Laplace es rigurosamente cierto en la teoría de la gravitación de Einstein. En efecto, resolviendo las ecuaciones de Einstein para una distribución estática y de simetría esférica de materia, se encuentra que si la relación entre masa y radio está dada por la ecuación (1), ningún cuerpo, incluida la luz, puede escapar de él. John A. Wheeler bautizó a este cuerpo con el nombre de *Agujero Negro*.

El presente trabajo trata de agujeros negros en dimensiones distintas de cuatro. En el capítulo II estudiaremos el agujero negro en tres dimensiones y en el capítulo III el agujero negro en dimensión arbitraria. Hemos separado el caso tridimensional porque, en esa dimensión, el agujero negro tiene una estructura matemática muy rica e interesante, ausente en todos los otros casos.

En ambos capítulos estudiaremos el agujero negro como solución de las ecuaciones de Einstein, sus propiedades geométricas (horizontes, singularidades, etc.), la estructura global (diagramas de Penrose) y la termodinámica (temperatura de Hawking y entropía). En el caso especial de dimensión tres, es posible construir el agujero negro por un método puramente geométrico (no dinámico), lo cual se verá en la sección 3 del cap. II. Además,

en esta dimensión existe una formulación alternativa para la gravitación: la formulación Chern-Simons, de gran interés en la actualidad. La construcción del agujero negro en este formalismo se realiza en la sección 5 del cap. II.

El resultado más importante de este trabajo es la identificación de un agujero negro en tres dimensiones. Esta solución se encuentra en la ecuación (2.20) del capítulo II. Una pregunta natural es la posibilidad de que existan soluciones con las características de un agujero negro en todas las otras dimensiones. A este problema se dedica el capítulo III. Las ecuaciones (3.8) y (3.9) del capítulo III describen, respectivamente, el agujero negro en todas las dimensiones pares e impares existente en la acción de Lovelock. Se observa que existen dos ramas de soluciones: en todas las dimensiones pares se observan las características de la solución de Schwarzschild, mientras que en las dimensiones impares las características del agujero negro en tres dimensiones. En ambos casos puede acoplarse el campo electromagnético. La solución con carga eléctrica se encuentra en las ecuaciones, (2.33) del cap. II para el caso tridimensional y (3.23) del cap. III para dimensiones mayores que tres.

Ambos capítulos (II y III) son autocontenidos y se ha escrito una introducción para cada uno. La numeración de ecuaciones y figuras en cada capítulo es independiente.

En el resto de esta introducción revisaremos algunos aspectos generales de la Teoría de la Gravitación en dimensiones distintas de cuatro, el problema de la constante cosmológica, termodinámica de agujeros negros y agujeros negros en dimensiones distintas de cuatro.

(i) Acción gravitacional en dimensiones distintas de cuatro

La acción de Hilbert (incluido el término cosmológico) representa la acción más general que da lugar a ecuaciones de segundo orden para la métrica en cuatro dimensiones. Si el espacio-tiempo considerado es una variedad de una dimensionalidad mayor, existen

otros escalares que pueden ser sumados a la acción anterior. La acción completa, para una dimensión \mathcal{D} dada, fue construida por primera vez por Lovelock[1] y consiste en una suma de las continuaciones dimensionales de todas las características de Euler de las dimensiones inferiores a \mathcal{D} .

La forma hamiltoniana de la acción de Lovelock[2] es similar al caso $\mathcal{D}=4$ en su estructura, pero, debido a la presencia de potencias altas de las velocidades en el lagrangiano, no es posible escribir un hamiltoniano en forma cerrada. Los sistemas de este tipo dan origen a evoluciones dinámicas patológicas. En efecto, existen extremos para la acción que no son funciones continuas del tiempo[3]. Aquí no atacaremos ese problema considerando sólo soluciones estáticas de las ecuaciones de movimiento.

La acción de Lovelock es apropiada para describir la gravitación en todas las dimensiones mayores o igual que 3. El caso especial de dimensión tres, debido a su gran simplicidad, ha recibido especial atención en los últimos años. S. Giddings, J. Abbott y K. Kuchar[4] han estudiado la estructura, en general, de las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones sin constante cosmológica. La ausencia de gravitones y el rompimiento del límite Newtoniano en esta dimensión son tratados en esa referencia. Las llamadas "soluciones cónicas" fueron introducidas por Deser, Jackiw y t' Hooft[5]. En ese trabajo se obtiene la solución general para el problema de n partículas sobre un plano. Otra teoría muy estudiada en el último tiempo es la Gravitación Masiva Topológica introducida por Deser, Jackiw y Templeton[6]. En ese trabajo se agrega a la acción de Hilbert un término de origen topológico: el término de Chern-Simons. Deser, Jackiw y Templeton probaron que este nuevo término genera una masa "topológica" para el gravitón. Por último, la estructura asintótica de la gravitación en tres dimensiones se estudia en las referencias [7,8]. Una revisión completa de trabajos sobre gravitación en dos y tres dimensiones se encuentra en [7].

En otro contexto, quizás la referencia más importante es el trabajo de Witten[9] quien probó que la gravitación cuántica en tres dimensiones es finita y exactamente soluble.

El caso de dimensión 2 debe tratarse por separado. Esto se debe a que la acción de Hilbert continuada a dimensión 2 no entrega ecuaciones de movimiento para la métrica. Existen esencialmente dos proposiciones distintas para la acción en dos dimensiones. En la primera, debida a R. Jackiw y C. Teitelboim[10], se escribe la ecuación

$$R = \Lambda \quad (2)$$

donde R es el escalar de Ricci y Λ una constante. Se argumenta además que ésta es la única ecuación tensorial de segundo orden construida a partir de la métrica y sus derivadas. Una particularidad de esta ecuación es que, para ser obtenida de un principio variacional covariante general, es necesario incluir otros campos además de la métrica.

La segunda alternativa viene de la teoría de cuerdas. En la aproximación de más baja energía para una cuerda moviéndose en un fondo curvo, se obtiene la acción efectiva para el "fondo"[11]

$$I = \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\phi} [R + 4(\nabla\phi)^2 - (1/12)H^2 + \alpha] \quad (3)$$

donde ϕ es un campo escalar (dilatón), H la curvatura asociada a una 2-forma campo de gauge y α una constante. Esta acción ha sido ampliamente investigada en los últimos años. Nótese que esta acción puede ser escrita en cualquier dimensión, en particular para $D=2$.

(ii) La Constante cosmológica

El valor de la constante cosmológica (Λ) es uno de los grandes problemas de la física teórica actual. Los experimentos indican un valor cero para ella no habiendo aún un argumento teórico que permita entender por qué. La constante cosmológica fue introducida, por primera vez, por Einstein en un intento por encontrar un modelo cosmológico estático. Sin embargo, las posteriores observaciones de Hubble pusieron en evidencia la

expansión del Universo haciendo innecesaria su introducción. Einstein pudo haber predicho esta expansión si hubiera creído en sus ecuaciones originales, pero no lo hizo, y el haber incluido la constante cosmológica lo llamó más tarde “el error más grande de mi vida”.

Desde el punto de vista del principio variacional que lleva a las ecuaciones de Einstein, la constante cosmológica cumple un rol similar a la constante de Newton (ver capítulo III, sec. 2). Es razonable pensar, entonces, que si su valor es cero tiene que haber una razón fundamental para ello.

En todo este trabajo vamos a considerar una constante cosmológica distinta de cero. Las razones son de distinto origen. Por ejemplo, en dimensiones impares, la constante cosmológica será fundamental para poder construir un agujero negro. En esas dimensiones, la constante de Newton y la energía no tienen unidades (ver apéndice E), y por lo tanto, en ausencia de la constante cosmológica (de unidades *longitud*⁻²), no hay una escala de distancias que permita definir un horizonte. En otro ámbito, es claro que el valor observado $\Lambda = 0$ está asociado a un espacio-tiempo cuadridimensional. La forma en que las teorías de dimensiones distintas de cuatro se incorporen al mundo observacional aún no es clara y no es el objeto de este trabajo. Un ejemplo interesante en este contexto -recientemente propuesto por G. Horowitz y D.L. Welch[12]- consiste en la relación entre el agujero negro en 2+1 dimensiones y la “cuerda negra”[13]. Horowitz y Welch han probado que el agujero negro en 2+1 dimensiones (que es asintóticamente anti-de Sitter) es mapeado, bajo dualidad, en una solución asintóticamente plana de las ecuaciones de la cuerda. Por último, es una práctica usual en la literatura actual el incluir la constante cosmológica. La razón para esto es simple: si se quiere demostrar que $\Lambda = 0$, hay que incluirla en las ecuaciones desde el principio.

Un último comentario debemos hacer acerca del signo de Λ . La constante cosmológica afecta a la gravitación en la gran escala. Cuando Λ es positiva, se obtiene un universo de sección espacial cerrada y, conversamente, cuando Λ es negativa el espacio es abierto. En

teorías de gauge -como la gravitación- la presencia de bordes en la variedad donde están definidos los campos es de gran importancia. Las cargas conservadas asociadas al grupo de gauge resultan ser integrales de superficie; en un espacio cerrado -sin bordes- el valor de todas las "cargas" es cero. Nosotros consideraremos aquí, durante todo el trabajo, una constante cosmológica negativa. En general, la razón fundamental para ello es preservar la rica estructura[14] en los bordes y poder definir cantidades como masa, carga eléctrica y momento angular. En las dimensiones impares aparece una razón extra: para valores positivos de Λ no se encuentran horizontes de eventos tipo Schwarzschild.

(iii) Termodinámica de agujeros negros

El descubrimiento de la radiación de Hawking[15] es mencionado como uno de los avances más importantes de la gravitación en las últimas décadas. El agujero negro de Schwarzschild tiene una temperatura inversamente proporcional a su masa y una entropía proporcional al cuadrado de la masa. Previamente a Hawking, Bekenstein[16], usando análisis dimensional y teoría de información, predijo el valor de la entropía para el agujero negro salvo una constante de proporcionalidad sin dimensiones. Hawking, cuantizando un campo escalar sobre el fondo de la métrica de Schwarzschild, calculó el valor exacto de la entropía y temperatura. Desde ese momento, un gran número de investigadores se han dedicado a intentar comprender el origen de la radiación de Hawking. Uno de los problemas más graves, y aún no resuelto, que ha propuesto este descubrimiento es la evolución no unitaria que el proceso de radiación parece implicar. En una estrella que colapsa formando un agujero negro, gran cantidad de información se pierde puesto que sólo podemos conocer la masa, carga eléctrica y momento angular del agujero; toda la configuración interna de la estrella se pierde dentro del horizonte de eventos. Por otra parte, debido al proceso de radiación de Hawking, es posible que el agujero negro se evapore devolviendo la energía inicial en forma de radiación. Esto sugiere que la

mecánica cuántica debe generalizarse para incluir una evolución no unitaria que de cuenta de la pérdida de información sugerida en el proceso recién mencionado. Gran cantidad de ideas se han propuesto para resolver este problema; un resumen crítico de algunas proposiciones se encuentra en la Ref. [17].

Otro problema que salta a la vista en el proceso de evaporación es el hecho que la temperatura es inversamente proporcional a la masa. Esto produce un calor específico negativo, es decir, el sistema se calienta a medida que se evapora y luego el proceso termina en una explosión. En este contexto, un especial interés tiene el llamado “agujero negro extremo”. Este caso se obtiene cuando la masa (M) y carga (Q) tienen el mismo valor (en unidades geometrizadas); en ese caso la temperatura es cero, lo que sugiere que se trata de un estado estable. Es interesante, entonces, estudiar la evolución de un agujero negro que esté ligeramente desplazado del caso extremo; se espera que el sistema irradie masa hasta el estado $M = Q$ y luego se detenga. Lo interesante de este “experimento” es que todo el proceso ocurre para valores no necesariamente pequeños de la masa y carga, por lo tanto, la evaporación explosiva que se produce cuando no hay carga eléctrica aquí no aparece. Además, las aproximaciones semiclásicas son justificables. Sin embargo, el problema no es simple y se encuentran singularidades al expandir las ecuaciones en torno a la configuración extrema. En otro contexto, se ha probado que el agujero negro extremo que resuelve las ecuaciones de la acción efectiva de la cuerda, se comporta como una partícula elemental[18].

Existen distintos escenarios donde estudiar la termodinámica de un agujero negro. Nosotros emplearemos aquí el método de la acción Euclídea. Este formalismo consiste en evaluar la acción clásica del sistema continuada analíticamente al plano Euclídeo. (Llamaremos a esta acción I_E .) El valor de I_E es, en primera aproximación, igual a la energía libre del sistema[19]. Una vez obtenida la energía libre, todas las propiedades termodinámicas pueden calcularse. Existen distintos métodos para calcular I_E . En el método original, debido a G. Gibbons y S.W. Hawking, se calcula el valor de la acción

lagrangiana Euclídea. Este procedimiento involucra la substracción de un término infinito. La acción hamiltoniana, por otra parte, difiere de la acción lagrangiana por un término de borde. Este término de borde es divergente al ser evaluado en la solución de Schwarzschild y esa divergencia es justamente el término que Gibbons y Hawking tuvieron que restar. El formalismo hamiltoniano provee una manera muy conveniente de calcular I_E sin necesidad de realizar ningún tipo de regularización.

Conceptualmente, el principio de acción lagrangiano difiere del hamiltoniano por la existencia, en este último, de una estructura simpléctica, es decir, una noción de variables conjugadas. Es interesante mencionar que en la interpretación de la acción Euclídea como la energía libre, la estructura simpléctica se mantiene, es decir, variables que son conjugadas en el sentido mecánico, pasan a ser conjugadas en el sentido termodinámico[20]. Este hecho apoya el uso de las técnicas hamiltonianas en el estudio de la termodinámica de agujeros negros.

(iv) Agujeros negros en dimensiones distintas de cuatro

El estudio de agujeros negros en dimensiones mayores no es nuevo. Un estudio sistemático de la solución tipo agujero negro para la acción de Hilbert continuada dimensionalmente se encuentra en la Ref. [21]. En ese trabajo se estudia la solución más general con masa, momento angular y carga eléctrica en cualquier dimensión de las ecuaciones de movimiento.

Es de especial interés para nosotros la solución obtenida en [21] sin carga eléctrica ni momento angular. La métrica toma la forma[22]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mG}{r^{D-3}c^2} - \Lambda r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2mG}{r^{D-3}c^2} - \Lambda r^2} + r^2 d\Omega^2 \quad (4)$$

donde D es la dimensión del espacio tiempo, $d\Omega^2$ el elemento de ángulo sólido de la $D-2$

esfera y m la masa del agujero negro y Λ la constante cosmológica. Esta solución es válida para cualquier dimensión $\mathcal{D} \geq 3$. En el caso especial $\mathcal{D}=3$ sin constante cosmológica, la dependencia en r de g_{00} desaparece y, por lo tanto, se pierde el horizonte. Para recuperar el agujero negro es necesaria la presencia de una constante cosmológica negativa.

En dimensiones mayor que cuatro, como se mencionó en (i), la acción gravitacional no es única. Además de la constante cosmológica y constante de Newton es posible agregar n ($\mathcal{D} = 2n, 2n - 1$) parámetros con dimensiones los cuales son las constantes de acoplamiento para las características de Euler de todas las dimensiones menores a \mathcal{D} . Estos parámetros estarán presentes en la solución así como G y Λ están presentes en (4). Sin embargo, para una elección arbitraria de esos coeficientes la solución no se puede encontrar explícitamente siendo las componentes de la métrica las raíces de una ecuación algebraica de grado $n - 1$. En el capítulo III estudiaremos una elección particular de esos parámetros que permite encontrar una solución explícita de las ecuaciones.

En dos dimensiones, existen dos proposiciones para la acción gravitacional. En ambas teorías existen soluciones tipo agujero negro. En la teoría Jackiw-Teitelboim, el agujero negro es construido en la la Ref. [23]. Para la acción efectiva de la cuerda, el agujero negro fue encontrado por E. Witten[24]. Este último trabajo ha generado una larga lista de investigaciones sobre las propiedades termodinámicas del agujero negro en dos dimensiones. Algunas de estos trabajos se mencionan en Ref. [25].

La identificación del agujero negro en tres dimensiones es reciente[26] y es tratado en detalle en el capítulo II del presente trabajo. Es interesante comentar aquí que G. Horowitz y D.L. Welch[12] han probado que el agujero negro en tres dimensiones es una solución de la acción efectiva de la cuerda en tres dimensiones. Además, aplicando una transformación de dualidad apropiada el agujero negro es mapeado en la "cuerda negra"[13].

CAPITULO II.

AGUJERO NEGRO EN 2+1 DIMENSIONES

1 Introducción

Las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones (con constante cosmológica negativa) aceptan una solución que tiene las características de un agujero negro. Este hecho es, a primera vista, sorprendente puesto que el tensor de curvatura es constante para una métrica que satisfaga las ecuaciones. Sin embargo, el análisis detallado muestra que es posible construir una solución caracterizada por dos parámetros que verifica gran cantidad de las interesantes propiedades del agujero negro usual en 3+1 dimensiones.

El estudio de esta solución es el objeto del presente capítulo.

En la sección 2 se estudian las ecuaciones de campo para la gravitación en 2+1 dimensiones y, en particular, la solución con dos vectores de Killing, uno tipo tiempo ($\partial/\partial t$) y otro tipo espacio ($\partial/\partial \phi$). Esta configuración queda caracterizada por la masa (M) asociada a desplazamientos temporales en infinito y el momento angular (J) asociado a rotaciones en infinito. Ambas "cargas" están definidas por integrales de flujo en infinito. Un tercer parámetro, la carga eléctrica, puede ser incluido acoplado a la gravitación el campo electromagnético. La carga eléctrica es la cantidad conservada asociada a las transformaciones de gauge propias del campo electromagnético.

El gran interés que ha generado el estudio de los agujeros negros en los últimos años se debe principalmente a sus propiedades mecánico-cuánticas. El agujero negro en 2+1 presenta propiedades termodinámicas similares al de 3+1 aunque también algunas diferencias. La temperatura y entropía pueden ser calculadas de manera completamente similar al caso 3+1, sin embargo, algunas consecuencias físicas son distintas, por ejemplo, en 2+1 el calor específico es positivo, lo que significa que el sistema se enfría a medida

que se evapora.

Debido a que en $2+1$ el tensor de curvatura es constante en todo el espacio para una métrica que satisfaga las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, todas las soluciones independientes difieren del espacio de anti-de Sitter sólo en sus propiedades globales. En efecto, el agujero negro en $2+1$ es obtenido a partir del espacio de anti-de Sitter por medio de una identificación de puntos sobre la órbita de un vector de Killing particular. Este proceso puede dar origen a singularidades cónicas [5] dependiendo del vector que se ocupe para realizar la identificación. El agujero negro en $2+1$ no presenta singularidades en la curvatura de ningún tipo. Sin embargo, otro tipo de singularidad se hace presente. Esta singularidad la llamaremos singularidad en la estructura causal y su origen es el siguiente: debido a las identificaciones que son necesarias para obtener el agujero negro, aparecen líneas tipo tiempo cerradas a menos que la variedad (el espacio cociente) sea restringida. En efecto, el vector de Killing ξ usado para realizar las identificaciones es tipo tiempo, tipo espacio o nulo en las distintas regiones de la variedad original. La región en la cual ξ es tipo tiempo, debe ser excluida del espacio físico para evitar las líneas temporales cerradas. La región en que ξ es tipo espacio, representa el espacio físico sobre el cual se mueven las partículas de prueba y la región en que ξ es nulo, representa la singularidad, es decir, la región en la cual las geodésicas terminan. Esta noción de singularidad fluye directamente de los diagramas de Penrose asociados al agujero negro en $2+1$. En la sección 3 se estudia la construcción del agujero negro en $2+1$ dimensiones por este método. Los diagramas de Penrose y la estructura causal de la variedad se estudian en la sección 4.

La gravitación en $2+1$ dimensiones ha sido foco de gran atención en los últimos años debido al descubrimiento de Witten[9] de que ésta es exactamente soluble. La equivalencia entre gravitación en $2+1$ y la teoría Chern-Simons es -en este contexto- de gran importancia. En la sección 5 se estudia la construcción del agujero negro en el formalismo Chern-Simons.

2 Principio de Acción, Ecuaciones de Movimiento y Soluciones

2.1 Principio de acción reducido

El punto de partida es la acción de Hilbert con constante cosmológica negativa en 2+1 dimensiones

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{-g} (\tilde{R} + 2l^{-2}) d^2 x dt + \tilde{B}, \quad (2.1)$$

donde \tilde{B} es un término de borde, l está relacionado con la constante cosmológica por $\Lambda^{-1} = -l^2$ y \tilde{R} es el escalar de Ricci espacio-temporal.

Las ecuaciones de Einstein que siguen de la variación de esta acción pueden resumirse en la forma

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -l^{-2}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}), \quad (2.2)$$

de donde es evidente que las soluciones serán espacios de curvatura constante negativa.

Por razones de conveniencia posterior, usaremos la versión hamiltoniana del principio de acción. En este formalismo la acción toma la forma

$$I = \int [\pi^{ij}\dot{g}_{ij} - N^\perp \mathcal{H}_\perp - N^i \mathcal{H}_i] d^2 x dt + B \quad (2.3)$$

donde el término de borde B (que difiere de \tilde{B} puesto que I e \tilde{I} difieren en un término de borde) será evaluado más adelante. Los generadores $\mathcal{H}_\perp, \mathcal{H}_i$ están expresados en términos de las variables canónicas por

$$\mathcal{H}_\perp = 2\pi g^{-1/2} [\pi^{ij}\pi_{ij} - (\pi_i^i)^2] - (2\pi)^{-1} g^{1/2} [R + 2l^{-2}] \quad (2.4)$$

$$\mathcal{H}_i = -2\pi_{i/j}^j \quad (2.5)$$

donde R es el escalar de Ricci de la superficie espacial.

Extremando la acción con respecto de π^{ij} y g_{ij} se obtienen las componentes de las ecuaciones de Einstein (i, j) reescritas como un sistema de ecuaciones de primer orden, si el término de superficie B es escogido apropiadamente. Extremando con respecto de N^\perp y N^i se obtienen las ecuaciones $(0, \mu)$ que son vínculos que restringen el espacio de condiciones iniciales.

Para el estudio que se realizará aquí es suficiente considerar un minisuperespacio. Restringiremos la clase de métricas sobre las cuales se varía, a aquellas métricas que tengan los 2 vectores de Killing

$$\frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.6)$$

La forma general (salvo difeomorfismos) de una métrica con esta simetría es

$$ds^2 = -[N^\perp(r)]^2 dt^2 + f^{-2}(r) dr^2 + r^2 (N^\phi(r) dt + d\phi)^2 \quad (2.7)$$

$$0 \leq \phi < 2\pi, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

La forma reducida del momento π^{ij} puede obtenerse a partir de la métrica usando las relaciones

$$\pi^{ij} = -(1/2\pi) g^{-1/2} (K^{ij} - K g^{ij}) \quad (2.8)$$

$$K_{ij} = (1/2N^\perp) (-g_{ij} + N_{i,j} + N_{j,i}) \quad (2.9)$$

de donde se ve que la única componente no nula de π^{ij} es

$$\pi^\tau_\phi \equiv \frac{l}{2\pi} p(r). \quad (2.10)$$

Reemplazando las expresiones (2.7) y (2.10) en la acción (2.3) se encuentra la forma reducida

$$I = -(t_2 - t_1) \int dr [N(r)\mathcal{H}(r) + N^\phi\mathcal{H}_\phi] + B \quad (2.11)$$

donde

$$\mathcal{H} = \frac{2l^2 p^2}{r^3} + (f^2)' - \frac{2r}{l^2} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{H}_\phi = -2lp'. \quad (2.13)$$

y se ha definido la función "lapse" reescalada $N(r) = f^{-1}N^\perp$. En general, las ecuaciones de movimiento que siguen de un proceso de reducción de este tipo no son equivalentes a las ecuaciones originales. Sin embargo, en este caso, debido a que la reducción se ha hecho por medio de vectores de Killing, las ecuaciones son consistentes con las obtenidas variando la acción original. (Esto puede probarse explícitamente debido a lo simple del sistema.)

2.2 Ecuaciones de movimiento y soluciones

Variando la acción con respecto de los cuatro campos $N(r)$, $N^\phi(r)$, $f^2(r)$ y $p(r)$ se obtiene el conjunto de ecuaciones de movimiento siguientes,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= 0 & (a) \\ \mathcal{H}_\phi &= 0 & (b) \\ N' &= 0 & (c) \\ (N^\phi)' &= -\frac{2lp(r)}{r^3}N. & (d) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.14a,b) vienen de la variación con respecto de $N(r)$ y $N^\phi(r)$, mientras que (2.14c,d) vienen de la variación con respecto de $f^2(r)$ y $p(r)$ respectivamente. Estas ecuaciones pueden ser resueltas fácilmente para los cuatro campos y se encuentra

$$\begin{aligned}
 f^2(r) &= -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} & (a) \\
 p(r) &= -\frac{J}{2l} & (b) \\
 N(r) &= N_\infty & (c) \\
 N^\phi(r) &= -\frac{J}{2r^2}N_\infty + N^\phi_\infty. & (d)
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

donde M, J, N_∞ y N^ϕ_∞ son las 4 constantes de integración del problema. M y J han sido ajustados de manera que representen a la masa y momento angular conjugados a los desplazamientos temporal (N_∞) y angular (N^ϕ_∞) en infinito respectivamente.

2.3 Integrales de superficie: energía y momento angular

Las ecuaciones de movimiento (2.14) no aseguran que la acción tenga un extremo sobre sus órbitas a menos que se asegure que los términos de borde que aparecen en la variación de la acción se cancelan. Esto se logra ajustando adecuadamente el término B que aparece en (2.11). La condición natural para los campos en el borde es que ellos tiendan a la solución clásica (2.15). Los campos $N(r)$ y $N^\phi(r)$ forman parte de la especificación del sistema de coordenadas. Ellos son variados libremente en el interior de la variedad pero están fijos en el borde, es decir, no se permiten reparametrizaciones de la variedad en el borde, luego

$$\delta N_\infty = 0, \quad \delta N^\phi_\infty = 0. \tag{2.16}$$

Esto es usual en teorías de gauge. Las transformaciones que satisfacen (2.16) son llamadas transformaciones propias y tienen cargas conservadas asociadas[27].

Por otro lado, es natural que el principio de acción tenga un extremo para todos los valores posibles de M y J luego,

$$\delta M \neq 0, \quad \delta J \neq 0. \tag{2.17}$$

Usando (2.16) y (2.17) es directo verificar que la variación de la acción es

$$\begin{aligned}\delta I &= (t_2 - t_1)[N_\infty \delta M - N_\infty^\phi \delta J] + \delta B \\ &= (t_2 - t_1)\delta[N_\infty M - N_\infty^\phi J] + \delta B,\end{aligned}\tag{2.18}$$

más términos que se anulan cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen. Entonces, el término de borde B debe ser

$$B = (t_2 - t_1)[-N_\infty M + N_\infty^\phi J].\tag{2.19}$$

De aquí se deduce que efectivamente M y J representan la masa y momento angular conjugados a los desplazamientos asintóticos de los vectores de Killing $\partial/\partial t$, $\partial/\partial\phi$.

Notemos que la cantidad $T_{12} \equiv (t_2 - t_1)N_\infty$ no representa el tiempo propio en infinito puesto que N_∞ difiere de N^\perp . T_{12} es el tiempo medido a lo largo del vector de Killing $\partial/\partial t$ que a su vez difiere de la normal \hat{n} . Esto es una consecuencia de que el espacio no es asintóticamente plano. La energía aquí definida es el conjugado al tiempo de Killing y no al tiempo propio.

La métrica dada por las expresiones (2.15) es asintóticamente anti-de Sitter y por lo tanto, el grupo de simetría asintótico debe ser -al menos- el grupo de anti-de Sitter. Analizando el grupo de transformaciones más general que deja la forma asintótica (2.15) invariante se descubre que el grupo asintótico es el grupo conforme que contiene al grupo de anti-de Sitter como un subgrupo. El álgebra de Lie del grupo conforme consiste en 2 copias del álgebra de Virasoro. Puesto que el álgebra de Virasoro es anómala, esto da origen a una carga central no trivial a nivel clásico[8].

2.4 Agujero negro

La métrica encontrada en las secciones anteriores tiene la forma

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + (N^\perp)^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (2.20)$$

donde los rangos de las coordenadas son

$$0 \leq \phi < 2\pi, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

y las funciones $(N^\perp)^2$ y N^ϕ están dados por

$$[N^\perp(r)]^2 = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} \quad (2.21)$$

$$N^\phi = -\frac{J}{2r^2} N_\infty + N^\phi_\infty. \quad (2.22)$$

La función $[N^\perp(r)]^2$ se anula para dos valores de r dados por

$$r_\pm = l \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.23)$$

mientras que $g_{00}(r)$ se anula en

$$r_{erg} = lM^{1/2} \quad (2.24)$$

Estos tres valores especiales de r satisfacen

$$r_- \leq r_+ \leq r_{erg}, \quad (2.25)$$

al igual como ocurre en la solución de Kerr en 3+1 dimensiones. r_\pm son los horizontes exterior e interior mientras que r_{erg} representa el radio de la ergoesfera.

Una expresión útil para la función N^2 en términos de r_\pm es

$$N^2(r) = \frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{r^2 l^2} \quad (2.26)$$

donde la masa y momento angular en términos de los horizontes está dada por

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2}, \quad J = \frac{2r_+r_-}{l}. \quad (2.27)$$

Para que los horizontes existan para valores reales de r y (2.20) represente un agujero negro se debe cumplir que

$$M > 0, \quad |J| \leq Ml. \quad (2.28)$$

En el caso extremo $|J| = Ml$, las dos raíces de $(N^\perp)^2 = 0$ coinciden.

Es importante notar que el parámetro $l = (-\Lambda)^{-1/2}$ proporciona una escala con dimensiones de distancia. Esto es fundamental para obtener un agujero negro puesto que en tres dimensiones la energía no tiene dimensiones (ver apéndice E).

Es natural definir el estado vacío como el estado en que el horizonte desaparece. Esto se logra poniendo $M \rightarrow 0$, lo cual requiere $J \rightarrow 0$. Cuando la masa se hace negativa se encuentran las soluciones estudiadas previamente por Deser, Jackiw y 't Hooft[5]. Estas soluciones tienen una singularidad cónica desnuda en el origen, y por lo tanto, en el presente contexto deben ser excluidas. Una importante excepción se encuentra para el valor especial de la masa $M = -1$, ($J = 0$) en que se obtiene el espacio de anti-de Sitter,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\phi^2 \quad (2.29)$$

que no tiene horizontes, pero tampoco tiene singularidades. El espacio de anti-de Sitter aparece entonces como un "bound state" separado del espectro continuo de masas. Este hecho también está presente en soluciones en dimensiones impares con $\mathcal{D} > 3$. El espacio de anti-de Sitter, en ese caso, está separado del continuo por un "gap" de singularidades no cónicas del tensor de curvatura (ver capítulo III).

2.5 Agujero negro con carga eléctrica

En las secciones anteriores se encontró una solución de las ecuaciones de Einstein caracterizada por masa y momento angular. Acoplado el campo electromagnético es posible introducir otro parámetro, la carga eléctrica. La carga eléctrica rompe la fuerte simetría que posee el agujero negro sin ella, en efecto, el tensor de curvatura ya no es constante. Esto significa que la solución con carga no puede ser obtenida por medio de identificaciones sobre el espacio de anti-de Sitter.

La acción electromagnética reducida a un campo de Coulomb en 3 dimensiones es (ver apéndice C)

$$I_{EM} = -(t_2 - t_1) \int dr \left[\frac{1}{2} N r P^2 - \varphi (rP)' \right] \quad (2.30)$$

donde P es el momento asociado a la componente radial del potencial electromagnético (no confundir con p que es la componente π_ϕ^r del momento conjugado de la métrica) y φ es la componente A_0 del campo de gauge.

Sumando la acción gravitacional se obtiene entonces

$$\begin{aligned} I &= I_{GRAV.} + I_{EM} \\ &= -(t_2 - t_1) \int \left[N\mathcal{H} + N^\phi \mathcal{H}_\phi + \frac{1}{2} N r P^2 - \varphi (rP)' \right] + B_{Q \neq 0} \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde \mathcal{H} y \mathcal{H}_ϕ están definidos en (2.13). Variando la acción (2.31) con respecto de N, N^ϕ, p, f^2, P y φ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{1}{2}rP^2 \\
\mathcal{H}_\phi &= 0 \\
N' &= 0 \\
(N^\phi)' &= -\frac{2lp(r)}{r^3}N \\
(rP)' &= 0 \\
\varphi' &= -NP
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Este sistema es resuelto fácilmente y se encuentra

$$\begin{aligned}
f^2(r) &= -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r^2} - \frac{1}{2}Q^2 \ln(r) \\
p(r) &= -\frac{J}{2l} \\
P(r) &= \frac{Q}{r} \\
N(r) &= N_\infty \\
N^\phi(r) &= -\frac{N_\infty J}{2r^2} + N^\phi_\infty \\
\varphi(r) &= -N_\infty Q \ln(r) - \varphi_0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Los seis parámetros $M, J, Q, N_\infty, N^\phi_\infty$ y φ_0 son las constantes de integración del problema y han sido ajustados de manera que los pares (M, N_∞) , (J, N^ϕ_∞) y (Q, φ_0) son canónicos conjugados. En efecto, los términos de borde que aparecen al variar la acción son

$$\delta I = (t_1 - t_2)(N_\infty \delta M - N^\phi_\infty \delta J - \varphi_0 \delta Q) + \delta B_{Q \neq 0} \tag{2.34}$$

Entonces, variando con N_∞, N^ϕ_∞ y φ_0 fijos se obtiene para el término de borde

$$B_{Q \neq 0} = (t_2 - t_1)(-N_\infty M + N^\phi_\infty J + \varphi_0 Q). \tag{2.35}$$

La constante φ_0 no representa el valor del potencial eléctrico en infinito sino en el punto $r = 1$. Esto es una particularidad de 2+1 dimensiones donde el cero de potencial

no se puede escoger en infinito. Una práctica corriente es redefinir φ_0 en la forma $\varphi_0 = -N_\infty Q \ln(r_0)$ y así el potencial queda $\varphi(r) = N_\infty Q \ln(r/r_0)$. Pero esto no es conveniente puesto que la presencia de Q en la definición de r_0 complica la estructura canónica. Es importante notar que la masa (M) y el potencial (φ_0) definidos en (2.33) no son invariantes ante cambios de unidades. En efecto, si realizamos un reescalamiento de todas las distancias en (2.33), $f^2(r)$ y $\varphi(r)$ serán invariantes sólo si M y φ_0 transforman según

$$M \rightarrow M + \frac{1}{2}Q^2 \ln(\lambda) \quad (2.36)$$

$$\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 + N_\infty Q \ln(\lambda) \quad (2.37)$$

donde λ es el factor de reescalamiento. La variación de M será a su vez

$$\delta M \rightarrow \delta M + Q\delta Q \ln(\lambda) \quad (2.38)$$

Reemplazando (2.37) y (2.38) en la variación de la acción (2.34) se ve que ella es invariante ante cambio de unidades.

La ceros de la función f^2 representan los horizontes de la solución. Esta función tiende a $+\infty$ en el origen ($r = 0$) y en la región asintótica ($r \rightarrow \infty$). Además es directo probar que existe un único valor real de r para el cual f^2 tiene un mínimo dado por

$$r_{min.}^2 = \frac{l^2}{4} \left[Q^2 + \sqrt{Q^4 + \frac{4J^2}{l^2}} \right] \quad (2.39)$$

Notemos que $r_{min.}$ no depende de M . Si f^2 evaluada en r_{min} es menor que cero entonces hay dos horizontes, si es igual a cero, ambos horizontes coinciden (caso extremo) y si es mayor que cero se tiene una singularidad desnuda. Estos tres casos se pueden dar dependiendo de los valores de M . Evaluando f^2 en r_{min} se tiene

$$f^2(r) = -M + \frac{r_{min}^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r_{min}^2} - \frac{1}{2}Q^2 \ln(r_{min}) \quad (2.40)$$

y puesto que r_{min} no depende de M y tiene un valor finito, para masas suficientemente grandes habrá dos horizontes, para un valor crítico $M = M_{ext}$ se tendrá sólo un horizonte y para $M < M_{ext}$ no hay horizontes.

La solución dada en (2.33) representa el agujero negro más general caracterizado por masa, carga eléctrica y momento angular. Otras cargas, por ejemplo asociadas a un campo escalar no pueden ser incluidas; las soluciones para un campo de este tipo necesariamente divergen en el horizonte o en infinito, no existiendo soluciones regulares en toda la variedad.

La presencia de carga eléctrica confirma que $r = 0$ es un punto singular. En la vacío, el tensor de curvatura es constante en toda la variedad, sin embargo, cuando el campo electromagnético es incluido ambos, el escalar de curvatura y $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ divergen en $r = 0$.

2.6 Termodinámica del agujero negro en 2+1 dimensiones

Las propiedades termodinámicas del agujero negro en 2+1 dimensiones pueden estudiarse en la misma forma que en 3+1 dimensiones. Usaremos aquí la aproximación de punto silla de la acción Euclídea[19] cuyo valor es igual a la energía libre del sistema dividida por la temperatura

$$I_E = \beta U - S - \sum_i \mu_i Q^i \quad (2.41)$$

donde β es el inverso de la temperatura, U es la energía interna, μ_i son los potenciales químicos conjugados a las cargas Q^i y S la entropía.

Debemos calcular la acción Euclídea evaluada sobre la continuación Euclídea de la solución (2.33). Para una solución estática (lo cual es requerido para que haya equilibrio termodinámico), el valor de la acción es igual a sus términos de borde. Debemos entonces establecer el principio de acción Euclídeo y así determinar los términos de borde necesarios.

Partamos de la acción en la signatura de Minkowski en el minisuperespacio estático de simetría esférica

Las ecuaciones (2.44) y (2.45) definen las condiciones de borde en el horizonte. Ahora podemos calcular la contribución a B_E proveniente del horizonte. Usando (2.45) se tiene que el único término no cero al variar la acción (2.43) es

$$\delta_{r_+} I_E = -N(r_+) (\delta f^2)_{r_+} + \delta_+ B_E \quad (2.46)$$

De la definición del horizonte $f^2(r_+) = 0$ se obtiene,

$$\delta_+ f^2 = - \left(\frac{df^2}{dr} \right)_{r=r_+} \delta r_+ \quad (2.47)$$

y por lo tanto podemos reescribir (2.46) en la forma

$$\begin{aligned} \delta_+ I_E &= N(r_+) \left(\frac{df^2}{dr} \right)_{r=r_+} \delta r_+ + \delta_+ B_E \\ &= 4\pi \delta r_+ + \delta_+ B_E \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde hemos usado la condición de regularidad (2.44).

En la región asintótica, por otra parte, imponemos que los campos se aproximen a las soluciones de las ecuaciones de movimiento. Entonces, la contribución a los términos de borde de la acción Euclídea provenientes de infinito son los mismos que en (2.17) pero con el signo opuesto y sin el factor $(t_2 - t_1)$,

$$\delta_\infty I_E = -\beta \delta M + N^\phi_\infty \delta J + \varphi_0 \delta Q + \delta_\infty B_E \quad (2.49)$$

Aquí hemos reemplazado N_∞ por β debido a que en el sector Euclídeo N_∞ representa el inverso de la temperatura.

Juntando los términos provenientes de infinito y el horizonte se obtiene para la energía libre $B_E = I_E$,

$$I_E = \beta M - 4\pi r_+ (M, J, Q) - N^\phi_\infty J - \varphi_0 Q \quad (2.50)$$

y entonces, β es el inverso de la temperatura, M la energía interna y $4\pi r_+$ la entropía. La dependencia de r_+ en M, J y Q se encuentra resolviendo la ecuación $f^2(r_+) = 0$ donde f^2 está dado en (2.33). En el caso $Q = 0$ esta relación puede encontrarse en forma cerrada, pero cuando hay carga eléctrica $f^2 = 0$ no se puede resolver explícitamente. $\beta^{-1}N^\phi_\infty$ y $\beta^{-1}\varphi_0$ son los potenciales químicos asociados a las cargas J y Q respectivamente. Sus valores pueden ser calculados extremando (2.50) con β, N^ϕ_∞ y φ_0 fijos obteniendo

$$\begin{aligned} N^\phi_\infty &= -4\pi \left(\frac{\partial r_+}{\partial J} \right)_{M,Q} \\ &= \frac{\beta J}{2r_+^2} \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -4\pi \left(\frac{\partial r_+}{\partial Q} \right)_{M,J} \\ &= -\beta Q \ln(r_+) \end{aligned} \tag{2.52}$$

o bien directamente de (2.33) y (2.45).

La temperatura se encuentra también extremando (2.49) con los potenciales químicos fijos lo que entrega la relación

$$\begin{aligned} T &= \left[4\pi \left(\frac{\partial r_+}{\partial M} \right)_{J,Q} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi r_+} \left[\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} - \frac{Q^2}{4} \right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

o bien directamente de la condición de regularidad (2.44). Estos dos valores, por supuesto, coinciden. En el caso extremo, cuando las dos raíces de $f^2 = 0$ coinciden, la temperatura es cero.

Cuando la carga eléctrica no está presente, la temperatura tiene la expresión simple

$$T_{Q=0} = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi l^2 r_+} \tag{2.54}$$

El agujero negro en 2+1 tiene calor específico positivo. Esto significa que, a diferencia del caso en 3+1, el sistema se enfría a medida que se evapora.

Una forma simple y rápida de obtener las expresiones (2.51), (2.52) y (2.53) es variar la ecuación $f^2(r_+)$ con respecto de todos sus parámetros,

$$f^2(r_+) = -M + \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{J^2}{4r_+^2} - \frac{Q^2}{2} \ln(r_+) = 0 \quad (2.55)$$

y por lo tanto

$$dM + \frac{2}{r_+} \left(\frac{r_+^2}{l^2} - \frac{J^2}{4r_+^2} - \frac{Q^2}{4} \right) dr_+ + \frac{JdJ}{2r_+^2} - QdQ \ln(r_+) = 0 \quad (2.56)$$

Esta ecuación representa la primera ley de la termodinámica al hacer las identificaciones (2.51), (2.52) y (2.53).

3 Construcción Geométrica del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones

3.1 Soluciones cónicas

Una de las propiedades fundamentales de la gravitación en 2+1 dimensiones, que la diferencia del caso 3+1, es que el tensor de curvatura es constante en toda la variedad como una consecuencia directa de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica. Esto no significa que no se puedan encontrar soluciones interesantes. Como notaron Deser, Jackiw y 't Hooft[5], realizando identificaciones sobre el plano (en el caso sin constante cosmológica) se pueden obtener distintas variedades, todas ellas sin curvatura, las cuales representan soluciones independientes del mismo conjunto de ecuaciones. Esto es posible porque las ecuaciones de Einstein no fijan la topología de la variedad, sino sólo sus propiedades locales. En general, dada una solución V de las ecuaciones de Einstein que tenga asociado un grupo discreto de isometrías G , tomando el cociente V/G se obtienen nuevas soluciones que difieren de la original sólo en sus propiedades globales. Evidentemente no todas las identificaciones posibles generan espacios distintos. Por ejemplo, en el plano, el grupo de traslaciones tiene 2 elementos ($\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$), pero claramente con ambas isometrías se obtiene el mismo espacio cociente, un cilindro.

Usando este procedimiento, Deser, Jackiw y 't Hooft partieron del plano, y usando la simetría ante rotaciones, identificaron puntos que difieren en un ángulo $2\pi\alpha$ obteniendo así un cono. El tensor de curvatura de un cono es cero en todas partes excepto en el vértice donde diverge. Esta solución fue interpretada como una partícula que se encuentra en el vértice, cuyos efectos gravitacionales no se propagan por la variedad debido a la ausencia de gravitones en 2+1 dimensiones.

Los resultados de Deser, Jackiw y 't Hooft fueron también generalizados al caso de una constante cosmológica positiva[28]. En este caso, la variedad tiene curvatura constante

positiva y el grupo de isometrías es el grupo de de Sitter. Sin embargo, en la Ref. [28] se insiste en buscar soluciones que presenten singularidades cónicas. Como veremos más adelante esto está asociado con el elemento del grupo que se escoja para realizar la identificación. Un hecho perturbador en este tipo de solución es la presencia de una singularidad desnuda en la variedad. En efecto, en el origen (vértice), el tensor de curvatura diverge no habiendo un horizonte que impida la propagación de información hacia infinito.

El objetivo de la presente sección es demostrar que la métrica (2.20) puede ser obtenida a partir del espacio de anti de-Sitter por el mismo procedimiento seguido por Deser, Jackiw y 't Hooft, en el caso de constante cosmológica negativa, usando un elemento del grupo adecuado para realizar la identificación. La construcción de la métrica por este método permite una mayor comprensión de la estructura global de la variedad. Como veremos, (2.20) no presenta singularidades cónicas, pero si una singularidad de otro tipo que llamaremos "singularidad en la estructura causal". Lo que ocurre es que el "punto" $r = 0$ (en la métrica (2.20)) no es un punto sino una superficie de topología $\mathbf{R} \times S_1$, y es el borde más allá del cual hay líneas tipo tiempo cerradas. Al cruzar $r = 0$ la cronología de la variedad es patológica y luego esa región debe ser excluida del espacio físico. En este sentido $r = 0$ es una singularidad puesto que las geodésicas terminan ahí.

3.2 Espacio de anti-de Sitter en 2+1

El espacio de anti-de Sitter en 2+1 dimensiones puede ser sumergido en un espacio de 4 dimensiones de signatura $(- - ++)$ con métrica

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2, \quad (3.1)$$

por medio de la ecuación,

$$-v^2 - u^2 + x^2 + y^2 = -l^2. \quad (3.2)$$

La variedad descrita por (3.2) es parametrizada completamente por las coordenadas μ, λ y ϕ con los rangos $0 \leq \mu < \infty$, $0 \leq \lambda < 2\pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$ mediante

$$\begin{aligned} u &= l \cosh \mu \sin \lambda \\ v &= l \cosh \mu \cos \lambda \\ x &= l \sinh \mu \sin \phi \\ y &= l \sinh \mu \cos \phi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

La métrica inducida por estas coordenadas es

$$ds^2 = l^2 \left[-\cosh^2 \mu d\lambda^2 + d\mu^2 + \sinh^2 \mu d\phi^2 \right]. \tag{3.4}$$

Debido a que λ es un ángulo, existen líneas cerradas tipo tiempo en este espacio. Por esta razón es necesario considerar el cubrimiento universal de la superficie (3.2). Esto se hace desenrollando la coordenada λ y dejando que ella tome valores entre $-\infty$ y ∞ . Denotando la nueva coordenada por $t \equiv l\lambda$ y redefiniendo la coordenada μ por $r = l \sinh \mu$ se obtiene la métrica

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\phi^2 \tag{3.5}$$

donde las coordenadas tienen los rangos

$$-\infty \leq t < \infty, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \tag{3.6}$$

La métrica (3.5) con los rangos (3.6) es conocida como espacio de anti-de Sitter y representa el cubrimiento universal de (3.2).

Por construcción, el grupo de isometrías de (3.2) es $SO(2,2)$ y coincide con el grupo de isometrías de (3.5). Sus generadores son

$$\begin{aligned}
 J_{01} &= v\partial_u - u\partial_v & J_{02} &= x\partial_v + v\partial_x \\
 J_{03} &= y\partial_v + v\partial_y & J_{12} &= x\partial_u + u\partial_x \\
 J_{13} &= y\partial_u + u\partial_y & J_{23} &= y\partial_x - x\partial_y.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

La isometría más general está dada por una transformación de la forma

$$\xi = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab}, \quad \omega^{ab} = -\omega^{ba}.
 \tag{3.8}$$

donde $x^a = (v, u, x, y)$. Una elección adecuada del tensor ω^{ab} generará la métrica del agujero negro. Otras elecciones, por ejemplo $w^{23} \neq 0$ y $w^{ab} = 0$ para $(a, b) \neq (2, 3)$, da origen a soluciones cónicas. La clasificación completa de las posibles isometrías se da en la Ref. [29]. El grupo $SO(2,2)$ tiene dos operadores de Casimir definidos por

$$I_1 \equiv w_{ab}w^{ab}, \quad I_2 \equiv \epsilon_{abcd}w^{ab}w^{cd}
 \tag{3.9}$$

los cuales rotulan las distintas isometrías que no difieren por un elemento del grupo.

3.3 Identificaciones y agujero negro

En esta sección construiremos explícitamente la métrica del agujero negro mediante identificaciones sobre el espacio de anti-de Sitter.

Consideraremos primero el caso no extremo y además de masa distinta de cero ($r_- \neq r_+ \neq 0$). En lo que sigue probaremos que el vector de Killing que transforma (3.5) en (2.20) es

$$\xi = \frac{r_+}{l}J_{12} - \frac{r_-}{l}J_{03}
 \tag{3.10}$$

donde los generadores J_{ab} están definidos en (3.7).

Una curva cuyos extremos son identificados, en el espacio cuociente, es cerrada. Entonces, una condición necesaria para que el espacio cuociente tenga una estructura causal no patológica, es que el vector de Killing, o isometría, usada sea tipo espacio, es decir,

$$\xi \cdot \xi > 0. \quad (3.11)$$

(Esta condición no es en general suficiente, pero en nuestro caso lo será como se puede ver analizando la estructura causal de la métrica obtenida.)

La norma del vector ξ se calcula usando (3.1) y (3.2) y se encuentra

$$\xi \cdot \xi = \frac{r_+^2 - r_-^2}{l^2} (u^2 - x^2) + r_-^2 \quad (3.12)$$

La región en que $\xi \cdot \xi > 0$ es

$$\frac{-r_-^2 l^2}{r_+^2 - r_-^2} < u^2 - x^2 < \infty. \quad (3.13)$$

El sub-espacio sobre el cual el vector de Killing es tipo espacio se divide en tres regiones:

I: Región en la cual $u^2 - x^2 > l^2$ y u, y tienen signo definido. Esta región es llamada zona exterior y como veremos luego corresponde a $r > r_+$. El módulo del vector de Killing satisface $r_+^2 < \xi \cdot \xi < \infty$.

II: Región en la cual $0 < u^2 - x^2 < l^2$ y u, v tienen signo definido. Esta región es la zona intermedia y corresponde a $r_- < r < r_+$. La norma del vector de Killing satisface $r_-^2 < \xi \cdot \xi < r_+^2$.

III: Región en la cual $-\frac{r_-^2 l^2}{r_+^2 - r_-^2} < u^2 - x^2 < 0$ y x, v tienen signo definido. Esta región es la zona interna $r < r_-$. La norma del vector de Killing satisface $0 < \xi \cdot \xi < r_-^2$.

Notemos que el hecho de que en cada región dos coordenadas tengan signo definido refleja que ellas no cubren todo el espacio. La región excluida es precisamente aquella donde el vector de Killing es tipo tiempo.

Cada una de las regiones aquí descrita debe repetirse infinitas veces para completar el espacio de anti-de Sitter. Esta estructura de infinitos parches se debe a que el espacio sobre el cual se hace la identificación es el cubrimiento universal de (3.2). La estructura causal de la variedad y como se conectan estos parches es fácilmente analizada mediante los diagramas de Penrose y por lo tanto pospondremos la discusión de ese punto hasta el estudio de las propiedades globales del agujero negro en la sección 4. Por ahora, consideraremos sólo una región de cada tipo.

Introducimos ahora coordenadas (t, r, ϕ) para cada una de las regiones de la siguiente forma

$$\text{Región I } (r > r_+) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{A(r)} \cosh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ x = \sqrt{A(r)} \sinh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ y = \sqrt{B(r)} \cosh \tilde{t}(t, \phi) \\ v = \sqrt{B(r)} \sinh \tilde{t}(t, \phi) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$\text{Región II } (r_- < r < r_+) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{A(r)} \cosh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ x = \sqrt{A(r)} \sinh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ y = -\sqrt{-B(r)} \sinh \tilde{t}(t, \phi) \\ v = -\sqrt{-B(r)} \cosh \tilde{t}(t, \phi) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\text{Región III } (r < r_-) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{-A(r)} \sinh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ x = \sqrt{-A(r)} \cosh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ y = -\sqrt{-B(r)} \sinh \tilde{t}(t, \phi) \\ v = -\sqrt{-B(r)} \cosh \tilde{t}(t, \phi) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Las funciones $A(r)$, $B(r)$, $\tilde{\phi}(t, \phi)$ y $\tilde{t}(t, \phi)$ están definidas por

$$\begin{aligned} A(r) &= l^2 \left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \right), & \tilde{t} &= l^{-2} (r_+ t - r_- l \phi), \\ B(r) &= l^2 \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r_+^2 - r_-^2} \right), & \tilde{\phi} &= l^{-2} (-r_- t + r_+ l \phi). \end{aligned} \quad (3.17)$$

En las coordenadas (t, r, ϕ) , la métrica tiene la misma expresión en las tres regiones,

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + (N^\perp)^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (3.18)$$

con

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty < \phi < \infty$$

y las funciones N^\perp y N^ϕ son el “lapse” y el “shift” de la métrica del agujero negro (2.20). Lo único que diferencia (3.18) de (2.20) es que la coordenada ϕ aquí no es periódica. Ahora debemos hacer la identificación. El vector de Killing ξ en las coordenadas (t, r, ϕ) toma la forma simple

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.19)$$

y su módulo es

$$\xi \cdot \xi = g_{\phi\phi} = r^2 > 0 \quad (3.20)$$

Identificar puntos sobre la órbita de ξ corresponde a identificar

$$\phi \rightarrow \phi + 2k\pi, \quad (3.21)$$

obteniéndose exactamente la métrica del agujero negro (2.20), como se esperaba.

Es claro, por construcción, que las coordenadas (t, r, ϕ) no cubren toda la región en la cual ξ es tipo espacio sino sólo una réplica de cada región. Cada una de las regiones debe repetirse un número infinito de veces para obtener una variedad geodésicamente completa. Como se dijo antes, este procedimiento es más simple de analizar usando las técnicas de los diagramas de Penrose.

El caso extremo ($r_+ = r_-$) y el caso de masa cero ($r_+ = r_- = 0$) no pueden ser obtenidos mediante una identificación a lo largo del vector de Killing (3.10). Cuando la

masa es cero esto es evidente puesto que $\xi = 0$. En el caso extremo, es fácil verificar que $\xi_{ext.} \neq \partial/\partial\phi$ puesto que $\xi_{ext.}$ tiene norma constante mientras que $\partial/\partial\phi$ tiene norma igual a r^2 y luego, estos dos vectores no pueden ser conectados por una transformación de $SO(2,2)$. El vector de Killing usado para identificar es -en todos los casos- $\partial/\partial\phi$, el cual es independiente de r_+ y r_- . En el caso genérico ($r_- \neq r_+ \neq 0$) la relación entre $\partial/\partial\phi$ y los generadores J_{ab} está dada en (3.10). En los casos extremo y masa cero, no exhibiremos aquí la relación de $\partial/\partial\phi$ con los generadores J_{ab} . De todas formas sabemos que esta existe porque $\partial/\partial\phi$ es un vector de Killing de la métrica para cualquier valor de los parámetros.

4 Estructura Causal del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones

4.1 Coordenadas de Kruskal

El estudio de las propiedades globales del agujero negro en 2+1 revela una gran coincidencia con el caso en 3+1 con constante cosmológica. Los diagramas de Penrose y las extensiones maximales son exactamente las mismas que en el agujero negro en 3+1. Seguiremos aquí las convenciones del libro de S.W. Hawking y G.F.R. Ellis[30].

Para estudiar las propiedades globales de la solución así como su estructura causal primero introduciremos las coordenadas de Kruskal asociadas al agujero negro en 2+1.

Las coordenadas de Kruskal eliminan la singularidad aparente que tiene la métrica en el horizonte. En el caso con momento angular, existen 2 horizontes y por lo tanto la variedad quedará parametrizada por dos parches de coordenadas de Kruskal.

Las coordenadas de Kruskal transforman el elemento de arco

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + (N^\perp)^{-2} dr^2 + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (4.1)$$

en

$$ds^2 = \Omega^2(du^2 - dv^2) + r^2(N^\phi dt + d\phi)^2, \quad (4.2)$$

donde la función Ω es regular en el horizonte. Consideremos primero el caso no extremo con masa distinta de cero. Definimos las regiones K_+ y K_- por los intervalos abiertos

$$K_+ : r_- < r < \infty$$

$$K_- : 0 < r < r_+.$$

En ambas regiones K_+ y K_- el "shift" N^ϕ debe ser escogido de modo que satisfaga

$$N^\phi(r_\pm) = 0 \tag{4.3}$$

para que el nuevo sistema coordenado no sea singular. La condición (4.3) es siempre accesible puesto que si N_i es solución de las ecuaciones entonces $N_i + \xi_i$, donde ξ_i es un vector de Killing, también lo es. En particular podemos sumar una constante a N_i de modo de asegurar (4.3).

Utilizando las técnicas usuales para encontrar las coordenadas de Kruskal definimos las nuevas coordenadas u, v sobre el parche K_+ por,

$$r_- < r \leq r_+ \begin{cases} u = \left[\left(\frac{-r+r_+}{r+r_+} \right) \left(\frac{r+r_-}{r-r_-} \right)^{r_-/r_+} \right]^{1/2} \sinh(a_+ t) \\ v = \left[\left(\frac{-r+r_+}{r+r_+} \right) \left(\frac{r+r_-}{r-r_-} \right)^{r_-/r_+} \right]^{1/2} \cosh(a_+ t) \end{cases} \tag{4.4}$$

$$r_+ \leq r < \infty \begin{cases} u = \left[\left(\frac{r-r_+}{r+r_+} \right) \left(\frac{r+r_-}{r-r_-} \right)^{r_-/r_+} \right]^{1/2} \cosh(a_+ t) \\ v = \left[\left(\frac{r-r_+}{r+r_+} \right) \left(\frac{r+r_-}{r-r_-} \right)^{r_-/r_+} \right]^{1/2} \sinh(a_+ t) \end{cases}$$

donde el parámetro a_+ está definido por

$$a_+ = \frac{r_+^2 - r_-^2}{l^2 r_+} \tag{4.5}$$

y la métrica toma la forma (4.2), con el factor conforme

$$\Omega^2(r) = \frac{(r^2 - r_-^2)(r + r_+)^2}{a_+^2 r^2 l^2} \left(\frac{r - r_-}{r + r_-} \right)^{r_-/r_+} \quad r_- < r < \infty. \tag{4.6}$$

Análogamente, en el parche K_- se define

$$0 < r \leq r_- \quad \begin{cases} u = \left[\left(\frac{-r+r_-}{r+r_-} \right) \left(\frac{r+r_+}{-r+r_+} \right)^{r_+/r_-} \right]^{1/2} \cosh a_- t \\ v = \left[\left(\frac{-r+r_-}{r+r_-} \right) \left(\frac{r+r_+}{-r+r_+} \right)^{r_+/r_-} \right]^{1/2} \sinh a_- t \end{cases} \quad (a) \quad (4.7)$$

$$r_- \leq r \leq r_+ \quad \begin{cases} u = \left[\left(\frac{r-r_-}{r+r_-} \right) \left(\frac{r+r_+}{-r+r_+} \right)^{r_+/r_-} \right]^{1/2} \sinh a_- t \\ v = \left[\left(\frac{r-r_-}{r+r_-} \right) \left(\frac{r+r_+}{-r+r_+} \right)^{r_+/r_-} \right]^{1/2} \cosh a_- t \end{cases} \quad (b)$$

donde

$$a_- = \frac{r_-^2 - r_+^2}{l^2 r_-} \quad (4.8)$$

y la métrica toma la forma (4.2) con el factor conforme

$$\Omega^2(r) = \frac{(r_+^2 - r^2)(r + r_-)^2}{a_-^2 r^2 l^2} \left(\frac{r_+ - r}{r_+ + r} \right)^{r_+/r_-} \quad 0 < r < r_+. \quad (4.9)$$

La intersección entre los parches K_+ and K_- ($r_- < r < r_+$) será llamada K . Al igual que en el caso 3+1, es necesario juntar infinitas copias de cada parche para tener una variedad completa. Este proceso es más claro en coordenadas compactificadas mirando los diagramas de Penrose.

4.2 Diagramas de Penrose en el caso $|J/l| \neq M \neq 0$

Los diagramas de Penrose se obtienen con la compactificación usual de las coordenadas

$$u + v = \tan \left(\frac{p + q}{2} \right), \quad u - v = \tan \left(\frac{p - q}{2} \right). \quad (4.10)$$

donde la transformación inversa se define sobre el rango $[-\pi/2, \pi/2]$.

Consideremos primero el caso $J = 0$. De las ecuaciones (4.10) y (4.4) (con $r_- = 0$) es directo probar que, (i) $r = \infty$ es mapeado en las líneas $p = \pm \frac{1}{2}\pi$, (ii) la singularidad

$r = 0$ es mapeada en las líneas $q = \pm \frac{1}{2}\pi$ y (iii) el horizonte es mapeado en $p = \pm q$. El diagrama de Penrose asociado a esta geometría es mostrado en la Fig. 1.

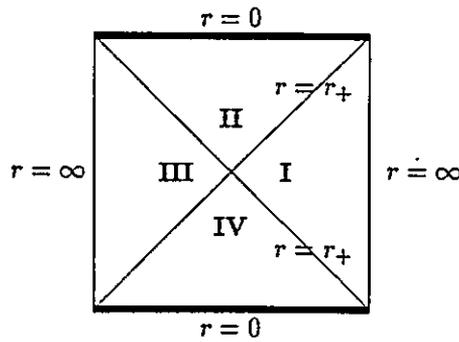


Fig. 1

Diagrama de Penrose

$$M \neq 0, J = 0.$$

En esta figura, las líneas horizontales (tipo espacio) representan la singularidad donde las geodésicas terminan y las líneas verticales (tipo tiempo) la región asintótica. El diagrama es cerrado y por lo tanto la variedad es maximal. La estructura causal es la misma que en el caso 3+1. La región II está causalmente desconectada del resto de la variedad; un observador en II sólo puede caer hacia la singularidad $r = 0$.

Consideremos ahora el caso con momento angular distinto de cero. Realizando el cambio de coordenadas (4.10) en los dos parches definidos en la sección Sec.(4.1) se encuentran dos diagramas, uno para cada parche que son mostrados en las figuras 2a,b.

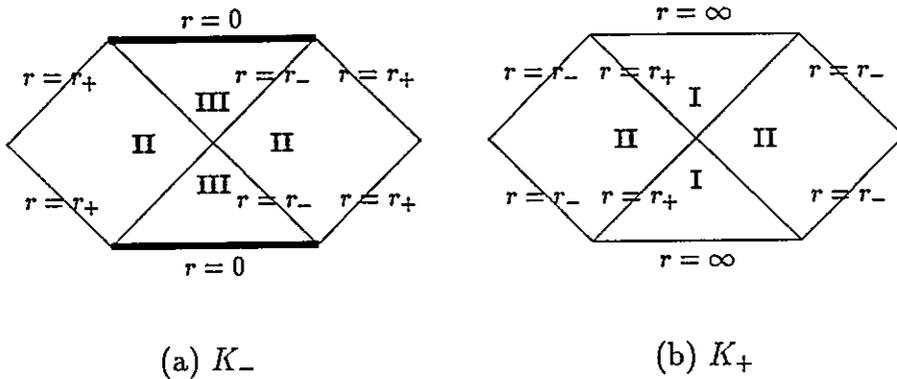


Fig. 2

En esta figura, las líneas horizontales son tipo tiempo mientras que la dirección vertical es tipo espacio. Las regiones II de (a) y (b) de esta figura deben ser identificadas puesto que representan la intersección de los parches K_+ y K_- . Las coordenadas originales del agujero negro cubren sólo las regiones K_- y K_+ . La extensión maximal de esta geometría se obtiene juntando infinitos parches K_+ y K_+ como se muestra en la figura 3.

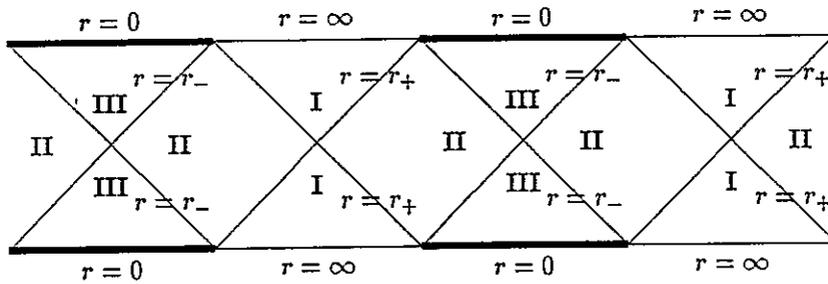


Fig. 3

Diagrama de Penrose

$$|J/l| \neq M \neq 0.$$

El objetivo de realizar esta extensión es obtener una variedad completa en la cual las geodésicas terminen sólo en las singularidades o en la región asintótica (con valores

infinitos de sus parámetros afines). El esquema infinito que presenta la figura 3 ilustra también el hecho de que el espacio original es el cubrimiento universal de anti-de Sitter.

4.3 Diagramas de Penrose en los casos $M = 0$ y $M = |J/l|$

En esta sección seguiremos la referencia [31]. Consideremos primero el caso en que $M = 0$.

La métrica de este espacio es

$$ds^2 = -(r/l)^2 dt^2 + (r/l)^{-2} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (4.11)$$

Definiendo las coordenadas nulas adimensionales

$$u = \frac{t}{l} - \frac{l}{r}, \quad v = -\frac{t}{l} - \frac{l}{r} \quad (4.12)$$

se encuentra

$$ds^2 = r^2 dudv + r^2 d\phi^2. \quad (4.13)$$

En este caso, debido a que el cero de la función $[N^\perp(r)]^2$ es de orden 2, no existen las coordenadas de Kruskal. Definamos directamente a las coordenadas compactificadas

$$u = \tan \frac{1}{2}(p + q), \quad v = \tan \frac{1}{2}(p - q). \quad (4.14)$$

La métrica en estas coordenadas toma la forma

$$ds^2 = l^2 \frac{dp^2 - dq^2}{\sin^2 p} + r^2 d\phi^2. \quad (4.15)$$

La relación entre la coordenada radial r y p, q es

$$-r = l \frac{\cos p + \cos q}{\sin p}. \quad (4.16)$$

A partir de (4.16) es directo probar que el origen es mapeado en el segmento de las líneas $p = \pi \pm q$ donde $p \in [0, \pi]$, mientras que el infinito tipo espacio es mapeado en el segmento de la línea $p = \pi$ que cierra el triángulo de la figura 4(a).

Considremos ahora el caso extremo en que $M = |J|/l$. La métrica es

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_+^2)^2}{r^2 l^2} dt^2 + \frac{r^2 l^2}{(r^2 - r_+^2)^2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (4.17)$$

donde $r = r_+ = l(M/2)^{1/2}$ es el horizonte. Introduciendo nuevamente las coordenadas nulas $v = t + r^*$ y $v = -t + r^*$ donde r^* es la coordenada "tortuga"

$$\begin{aligned} r^* &= \int \frac{dr}{(N^\perp)^2} \\ &= \frac{-r l^2}{2(r^2 - r_+^2)} + \frac{l^2}{4r_+} \ln \left| \frac{r - r_+}{r + r_+} \right| \end{aligned} \quad (4.18)$$

y definiendo las coordenadas compactificadas p, q como en (4.14) se obtiene el elemento de arco

$$ds^2 = \frac{4(N^\perp)^2 l^2 (dp^2 - dq^2)}{(\cos p + \cos q)^2} + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2. \quad (4.19)$$

De la relación

$$\frac{\sin p}{\cos q + \cos p} = \frac{-r l}{2(r^2 - r_+^2)} + \frac{l}{4r_+} \ln \left| \frac{r - r_+}{r + r_+} \right|, \quad (4.20)$$

se deduce que $r = r_+$ es mapeado en líneas a $\pm 45^\circ$, mientras que $r = 0$ es mapeado en $p = (k\pi)^+$ y $r = \infty$ en $p = (k\pi)^-$. [$p = (k\pi)^+$, se define de modo que si $r \rightarrow 0$ entonces $p \rightarrow k\pi$ tomando valores superiores a $k\pi$, análogamente, $r \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow k\pi$ tomando valores menores que $k\pi$]. La extensión maximal de este espacio se encuentra juntando infinitos triángulos que representan las regiones interior y exterior del agujero negro. En las coordenadas originales, sólo se cubren dos triángulos adyacentes. El diagrama resultante se muestra en la figura 4(b).

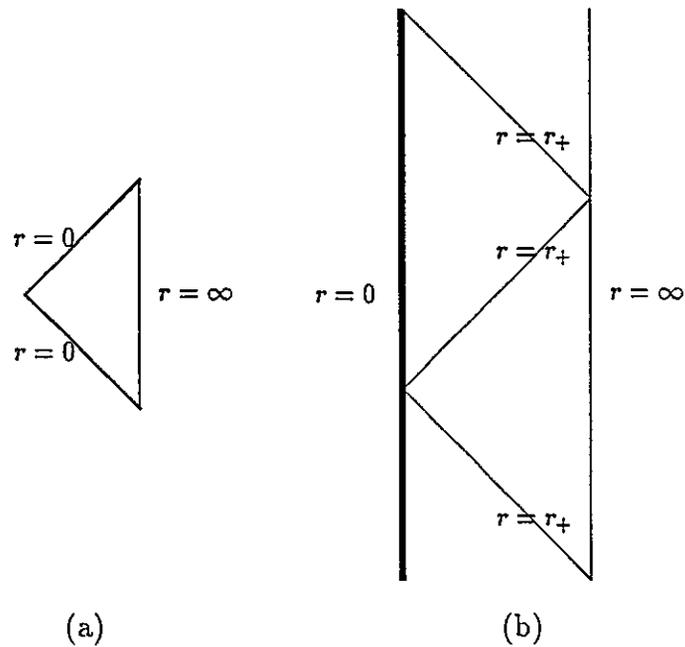


Fig. 4

(a) Estado vacío: $M = 0 = J$

(b) Caso extremo: $M = |J/l|$

Las líneas $r = 0$ de la figura 4(a) son singulares puesto que ahí el vector de Killing usado para realizar las identificaciones es de norma nula. Esta es una característica del agujero negro en dimensiones impares: el estado vacío es topológicamente distinto al estado con masa no nula, pero aún subsiste una singularidad.

5 Formulación Chern-Simons del Agujero Negro en 2+1 Dimensiones

5.1 Gravitación en 2+1 en la formulación Chern-Simons

Uno de los resultados más importantes de los últimos años en la teoría de la gravitación cuántica es el resultado de Witten quien demostró que la gravitación en 2+1 dimensiones puede ser escrita como una teoría Chern-Simons, y por lo tanto, es finita y exactamente soluble[9]. En esta sección estudiaremos el agujero negro en la formulación Chern-Simons.

Ya desde el punto de vista clásico, la formulación Chern-Simons tiene varias ventajas, por ejemplo, la estructura canónica se lee directamente de la acción lagrangiana no siendo necesario introducir variables extras (los momenta). Por otra parte, las ecuaciones de movimiento tienen una forma simple en términos de las variables canónicas.

El punto de partida es la acción de Hilbert con constante cosmológica escrita en términos de formas diferenciales

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi} \int \epsilon_{abc} \left(R^{ab} \wedge e^c + \frac{1}{3l^2} e^a \wedge e^b \wedge e^c \right) + \tilde{B} \quad (5.1)$$

donde $R^{ab} = dw^{ab} + w_c^a \wedge w^{cb}$ es la 2-forma curvatura, w^{ab} la conexión de spin y e^a la tétrada de la variedad. Hemos fijado aquí la constante cosmológica como negativa, aunque la mayoría de los resultados que se obtendrán en esta sección, son válidos también en el caso de constante cosmológica positiva.

Las ecuaciones de movimiento que siguen de esta acción variando independientemente la tétrada y la conexión son

$$T^a \equiv D \wedge e^a = 0 \quad (5.2)$$

$$\tilde{R}^{ab} \equiv R^{ab} + l^{-2} e^a \wedge e^b = 0 \quad (5.3)$$

En tres dimensiones, la conexión w^{ab} define la nueva conexión w^a dada por

$$w^a_b \equiv -\epsilon^a_{bc} w^c, \quad (5.4)$$

a su vez, el tensor de curvatura puede escribirse

$$R^a_b \equiv -\epsilon^a_{bc} R^c, \quad (5.5)$$

donde $R^a \equiv dw^a + \frac{1}{2}\epsilon^a_{bc} w^b \wedge w^c$. La acción escrita en términos de este nuevo campo es

$$\tilde{I} = \frac{1}{2\pi} \int (-2R^a \wedge e_a + \frac{1}{3l^2} \epsilon_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c) + \tilde{B}. \quad (5.6)$$

Las componentes espaciales de la tétrada (e_i^a) y la conexión (w_j^b) son canónicos conjugados en el corchete de Poisson

$$[e_i^a, w_j^b] = \pi \eta^{ab} \epsilon_{ij} \quad (5.7)$$

y las componentes temporales e_0^a y w_0^a son los multiplicadores de Lagrange asociados a los generadores del grupo local de simetría que resulta ser el grupo de anti-de Sitter.

En otras palabras, la acción (5.6) es una acción hamiltoniana así como está sin necesidad de introducir momentos[32]. Esto puede ya notarse al hacer una descomposición en 2+1 de las ecuaciones de movimiento (5.2) y (5.3) (ver más adelante).

Para probar las propiedades recién mencionadas realizemos la descomposición 2+1 de la acción (5.6). Esto significa descomponer los campos en la forma $e_\mu^a dx^\mu = e_0^a dt + e_i^a dx^i$ y $w_\mu^a dx^\mu = w_0^a dt + w_i^a dx^i$.

Luego de un cálculo directo se encuentra

$$I = \frac{1}{\pi} \int dt \int \epsilon^{ij} \eta_{ab} (e_i^a \dot{w}_j^b - \frac{1}{2} w_0^a T_{ij}^b - \frac{1}{2} e_0^a \tilde{R}_{ij}^b) + B. \quad (5.8)$$

donde T_{ij}^a son las componentes espaciales de la torsión y $\tilde{R}_{ij}^a = R_{ij}^a - l^{-2} \epsilon^a_{bc} e_i^b e_j^c$.

El término de borde B en (5.8) no es igual a \tilde{B} en (5.6) puesto que I e \tilde{I} difieren a su vez en un término de borde. Aunque ambas acciones dan origen a las mismas ecuaciones

de movimiento clásicas, (5.8) parece ser más satisfactoria en el tratamiento cuántico (y termodinámico) donde en la aproximación semiclásica, es necesario evaluar la acción. En efecto, el valor "on-shell" para una solución estática de I es igual a B , el cual se verá, es finito. Por el contrario, el valor del pedazo de volumen de \tilde{I} es infinito, siendo necesario introducir un término de borde \tilde{B} infinito para darle a la acción un valor finito. Este proceso de regularización es evitado si se usa la acción I al estudiar las propiedades termodinámicas de los agujeros negros.

Sean η y ξ dos vectores del espacio tangente. Definimos los generadores²

$$T_\eta \equiv \frac{1}{2\pi} \int_M d^2x \epsilon^{ij} T_{ij}^a \eta_a - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} dx^i e_i^a \eta_a \quad (5.9)$$

$$\tilde{R}_\xi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_M d^2x \epsilon^{ij} \tilde{R}_{ij}^a \xi_a - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} dx^i w_i^a \xi_a \quad (5.10)$$

los cuales tienen derivadas funcionales bien definidas y cierran en el álgebra de anti-de Sitter anómala

$$[\tilde{R}_\eta, \tilde{R}_\xi] = l^{-2} T_{[\eta, \xi]} \quad (5.11)$$

$$[T_\eta, \tilde{R}_\xi] = \tilde{R}_{[\eta, \xi]} + \int_{\partial M} d\eta^a \xi_a \quad (5.12)$$

$$[T_\eta, T_\xi] = T_{[\eta, \xi]} \quad (5.13)$$

donde $([\eta, \xi])^a \equiv \epsilon^a_{bc} \eta^b \xi^c$. El término central que aparece en (5.12) tiene su origen en las integrales de superficie incluidas en (5.9) y (5.10). Estas integrales son necesarias para que los generadores tengan derivadas funcionales bien definidas. Sin embargo, la integral de superficie agregada en (5.9) no es un escalar bajo las transformaciones generadas por (5.10), y, conversamente, la integral de superficie que aparece en (5.10) no es un escalar bajo transformaciones generadas por (5.9). Esta anomalía en las leyes de transformación

²Aquí M denota las las secciones espaciales de 2 dimensiones. Estas secciones son abiertas y su región asintótica se denota por ∂M .

de los generadores induce el término central. [Las integrales agregadas a cada generador son escalares bajo transformaciones del mismo generador, por ese motivo no aparecen términos centrales en (5.11) y (5.13)]. Una carga central a nivel clásico aparece también en el álgebra del grupo de isometría asintótico (grupo conforme) de la gravitación en 2+1 con constante cosmológica negativa[8]. La relación entre ambas cargas es para nosotros aún desconocida.

5.2 Ecuaciones de movimiento canónicas y soluciones estáticas

Las ecuaciones de movimiento que se derivan del principio de acción (5.8) son

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^a &= 0 & (a) \\
 \tilde{R}_{ij}^a &= 0 & (b) \\
 \dot{w}_i^a &= D_i w_0^a + l^{-2} \epsilon_{bc}^a e_i^b e_0^c & (c) \\
 \dot{e}_i^a &= D_i e_0^a + \epsilon_{bc}^a e_i^b w_0^c. & (d)
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Las ecuaciones (5.14a,b) evidentemente corresponden a las componentes espaciales de (5.2) y (5.3) respectivamente. Las ecuaciones (5.14c,d) corresponden al resto de las componentes reescritas en la separación 2+1. La derivada covariante se define por $D_i A^a = \partial_i A^a + \epsilon_{bc}^a w_i^b A^c$.

La conveniencia de usar el formalismo Chern-Simons aquí es evidente; las ecuaciones de movimiento son expresadas algebraicamente en términos de las variables canónicas no apareciendo funciones extras como los símbolos de Christoffel (que son derivadas de la métrica), necesarios en el formalismo canónico usual (ADM).

Los términos de borde que aparecen al hacer la variación de la acción son

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\partial M} \eta_{ab} (e_0^a \delta w^b + w_0^a \delta e^b) + \delta B.
 \tag{5.15}$$

Una vez definidas las condiciones de borde, B debe escogerse de modo que el término de borde sea cero. En el presente caso, esto no se puede hacer aún puesto que las condiciones

de borde que impondremos, e_0^a y w_0^a dependen de las coordenadas canónicas por medio de las constantes de integración. El cálculo explícito de B se hace en la sección siguiente.

Por razones de conveniencia posterior estudiaremos aquí las soluciones del problema Euclídeo. Es directo verificar que las 1-formas

$$\begin{aligned} e^0 &= \sinh(\rho/l)(f_\tau d\tau + f_\phi d\phi) & w^0 &= (1/l) \sinh(\rho/l)(g_\tau d\tau + g_\phi d\phi) \\ e^2 &= \cosh(\rho/l)(g_\tau d\tau + g_\phi d\phi) & w^2 &= -(1/l) \cosh(\rho/l)(f_\tau d\tau + f_\phi d\phi) \\ e^1 &= d\rho & w^1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

con f_τ, f_ϕ, g_τ y g_ϕ constantes resuelven las ecuaciones (5.14) en la signatura Euclídea. Las expresiones (5.16) para e^a y w^a representan el agujero negro en la formulación de primer orden. Para hacer contacto con la solución métrica usamos la relación

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (5.17)$$

obteniendo para el elemento de arco

$$ds^2 = (e_\mu^0 dx^\mu)^2 + (e_\mu^2 dx^\mu)^2 + d\rho^2 \quad (5.18)$$

La relación entre el conjunto de constantes de integración $\{f_\tau, g_\tau, f_\phi, g_\phi\}$ y el conjunto $\{M, J, N_\infty, N_\infty^\phi\}$ que aparece en la solución (2.20) es

$$\begin{aligned} g_\phi &= r_+ \\ f_\phi &= -ir_- \\ f_\tau &= \frac{r_+}{l} N_\infty - r_- N_\infty^\phi \\ g_\tau &= i \left(\frac{r_-}{l} N_\infty - r_+ N_\infty^\phi \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde recordemos que la relación entre la masa y momento angular con los horizontes es

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2}, \quad J = \frac{2r_+ r_-}{l}. \quad (5.20)$$

Reemplazando (5.16) y (5.19) en (5.18), y efectuando el cambio en la variable radial

$$r^2 = r_+^2 \cosh^2(\rho) - r_-^2 \sinh^2(\rho) \quad (5.21)$$

se obtiene exactamente la continuación Euclídea de la solución (2.20), es decir, la métrica (2.20) en el tiempo complejo $\tau = it$, pero evaluada en los valores físicos de las constantes de integración. La relación entre las constantes de integración del problema Euclídeo y Minkowskiano involucra la unidad imaginaria i en el caso con momento angular distinto de cero porque J es un momento (ver apéndice D). (Recordemos además que en la solución Euclídea N_∞ es, a veces, llamado β puesto que es igual a la temperatura inversa.)

En el sector Euclídeo, y con la condición de borde $N^\phi(r_+) = 0$, la métrica se puede escribir de una forma notablemente simple en términos de la coordenada ρ

$$ds^2 = l^2 \sinh^2(\rho/l) \left(d\tau - \frac{ir_-}{l} d\phi \right)^2 + r_+^2 \cosh^2(\rho/l) d\phi^2 + d\rho^2 \quad (5.22)$$

con los rangos

$$0 \leq \tau < 2\pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho < \infty.$$

El punto $\rho = 0$ corresponde al horizonte r_+ que en el sector Euclídeo es el origen de un sistema de coordenadas polares en el plano ρ/τ .

Esta métrica representa el agujero negro en tiempo Euclídeo con momento angular. La solución hiperbólica se puede escribir simplemente reemplazando $\tau = it$, pero en ese caso, (5.22) representa sólo la solución exterior y hay que extender la coordenada radial para incluir el resto de la variedad. El parámetro r_- es una constante de integración y puede ser continuada a valores imaginarios para que (5.22) sea real. La simplicidad de (5.22) es evidente en comparación con la solución de Kerr en 3+1 dimensiones.

5.3 Formulación covariante y holonomías

Hasta ahora hemos estudiado la formulación Chern-Simons en forma hamiltoniana, no covariante. La gravitación en 2+1 puede escribirse como una teoría de gauge para el grupo de anti-de Sitter con el lagrangiano Chern-Simons. En el sector Euclídeo, el grupo de anti-de Sitter es isomorfo al grupo $SO(3,1)$ con generadores J_{AB} ($A,B=1,2,3,4$). Descomponiendo J_{AB} en tres rotaciones $J_{ab} \equiv -\epsilon_{abc}J^c$ ($a,b=1,2,3$) y tres "boosts" $J_{a4} \equiv P_a$ se obtiene el álgebra $so(3,1)$

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= -l^{-2}\epsilon_{abc}J^c \\ [J_a, P_b] &= \epsilon_{abc}P^c \\ [J_a, J_b] &= \epsilon_{abc}J^c \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde $\eta_{AB} = (\eta_{ab}, -l^{-2})$ y $\eta_{ab} = (1, 1, 1)$.

La gravitación en 2+1 se obtiene incorporando la tétrada (e^a) como el campo de gauge para los "boosts" generados por P_a , y la conexión de spin (w^a) para las rotaciones generadas por J_a . Definimos la 1-forma A por

$$A = e^a P_a + w^a J_a \quad (5.24)$$

y la curvatura asociada (F) por

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ &\equiv \tilde{R}^a P_a + T^a J_a. \end{aligned} \quad (5.25)$$

de donde se obtiene para \tilde{R}^a y T^a

$$\tilde{R}^a = R^a - \frac{1}{2}l^{-2}\epsilon_{bc}^a e^b \wedge e^c \quad (5.26)$$

$$T^a = de^a + \epsilon_{bc}^a w^b \wedge e^c. \quad (5.27)$$

Las ecuaciones que siguen de la variación de la acción de Chern-Simons son

$$F = 0 \tag{5.28}$$

lo que implica que la conexión A es puro gauge, es decir

$$A = U^{-1}dU, \tag{5.29}$$

donde U es un elemento del grupo. El cálculo del elemento U para el agujero negro en el caso de signatura hiperbólica fue realizado en la Ref. [33]. Siguiendo las líneas de ese trabajo podemos calcular U para la solución Euclídea (5.16). La solución es

$$U(\rho, \tau, \phi) = e^{(g\phi P_2 - (1/l)f_\phi J_2)\phi} e^{(g\tau P_2 - (1/l)f_\tau J_2)\tau} e^{\rho P_1}. \tag{5.30}$$

Recordemos que los generadores P_a corresponden a “boosts” mientras que J_a a rotaciones. El operador U está relacionado con las holonomías (“Wilson loops”) mediante

$$H \equiv P e^{\oint A_\mu dx^\mu} = U^{-1}U_t \tag{5.31}$$

donde U_t se refiere al operador trasladado a lo largo del camino. Dos casos particulares son de especial interés, (i) un círculo con τ y ρ constantes y $0 < \phi < 2\pi$. Debido a que P_2 es un “boost”, $H \neq 1$ lo que muestra que ese círculo no puede ser contraído hasta un punto. La presencia de esta holonomía no trivial establece la diferencia entre el espacio de anti-de Sitter y el agujero negro, (ii) un círculo con ρ y ϕ constantes. Puesto que J_2 es una rotación se debe exigir $f_\tau(\tau_2 - \tau_1) = 2\pi l$ de modo que no se produzca una singularidad cónica. Escogiendo la coordenada τ de modo que $\tau_2 - \tau_1 = 1$ se obtiene la condición

$$f_\tau = 2\pi l. \tag{5.32}$$

Esta condición será usada en la sección siguiente para evaluar la entropía del agujero negro en la formulación Chern-Simons. Notemos que de (5.30) se observa que f_ϕ también

debiera ser restringido a los valores $f_\phi = nl$ con n entero. Pero al hacer contacto con la formulación métrica se obtiene que f_ϕ es imaginario luego J_2 ya no actúa como una rotación.

5.4 Términos de borde: energía, momento angular y entropía

Los términos de superficie son particularmente simples en el formalismo Chern-Simons. En efecto, para la acción (5.8) la variación del término de superficie se encuentra de (5.15)³

$$\delta B = -\frac{1}{\pi} \int_{borde} dx^i \eta_{ab} (e_0^a \delta w_i^b + w_0^a \delta e_i^b) \quad (5.33)$$

Puesto que la solución no depende de los ángulos podemos integrar en ϕ obteniendo

$$\begin{aligned} \delta B &= -2 \left[(e_0^a \delta w_2^b + w_0^a \delta e_2^b) \eta_{ab} \right]_{\rho=0}^{\rho \rightarrow \infty} \\ &\equiv \delta B_\infty - \delta B_0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Insertando la solución (5.16) se obtiene directamente el término en infinito

$$\delta B_\infty = \frac{2}{l} g_\tau \delta f_\phi + \frac{2}{l} f_\tau \delta g_\phi \quad (5.35)$$

Ahora expresando esto en términos de los parámetros físicos dados en (5.19) se obtiene

$$\delta B_\infty = \beta \delta M - N^\phi_\infty \delta J \quad (5.36)$$

En $\rho = 0$ imponemos las siguientes condiciones, (i) la constante g_τ se anula lo cual es el análogo de la condición $N^\phi(r_+) = 0$, ec. (2.45); (ii) la condición de regularidad (5.32) $f_\tau = 2\pi l$. Esta última condición representa el análogo de evitar singularidades cónicas en

³Aquí es necesario insertar un signo menos extra en la acción puesto que estamos en el sector Euclídeo. La acción escrita en (5.1) es apropiada en la signatura de Minkowski.

el formalismo métrico. El término de borde proveniente de $\rho = 0$ se calcula directamente de (5.34) obteniéndose

$$\delta B_0 = 4\pi\delta r_+ \quad (5.37)$$

Para variaciones con β y N^ϕ_∞ fijos, se encuentra

$$B = \beta M - N^\phi_\infty J - 4\pi r_+ \quad (5.38)$$

que coincide con el resultado obtenido en la sección 2.6. Notemos que al poner $g_\tau = 0$ y $f_\tau = 2\pi l$ en (5.19) se obtienen las expresiones (2.54) y (2.51) para la temperatura (T) y N^ϕ_∞ respectivamente.

CAPITULO III.

AGUJEROS NEGROS EN DIMENSIONES MAYORES QUE CUATRO

1 Introducción

En el capítulo anterior se estudió una solución de las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones que tiene muchas de las características de un agujero negro. Una pregunta natural que surge es la existencia de soluciones análogas para todas las otras dimensiones. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y el estudio de esas soluciones es el objetivo del presente capítulo.

Una importante característica de la gravitación en dimensiones mayores ($\mathcal{D} > 4$) es que la acción no es única. Una posible extensión consiste en continuar dimensionalmente la acción de Hilbert. Soluciones tipo agujero negro para las ecuaciones de movimiento de esa acción son bien conocidas[21] y presentan muchas de las propiedades del agujero negro usual.

Pero esa no es la acción más general. Para una dimensión \mathcal{D} dada, existe una familia de n parámetros⁴ independientes de acciones que dan origen a ecuaciones tensoriales de segundo orden para la métrica, además de un tensor de energía momento conservado. Esta familia de acciones fue descubierta por Lovelock[1].

Soluciones con simetría esférica para la acción de Lovelock han sido estudiadas por diversos autores[34,35,36,37,38]. La filosofía seguida hasta el momento ha sido mantener los n parámetros de la acción independientes. Esto da lugar a una familia de $n-1$ métricas cuya componente $g_{rr}(r) = g^{00}(r)$ son las raíces de una ecuación algebraica de grado $n-1$. Aparte de los casos en bajas dimensiones ($n < 6$), esta ecuación no puede ser resuelta

⁴En todo este capítulo definimos el parámetro n por: $\mathcal{D} = 2n$ para dimensiones pares y $\mathcal{D} = 2n - 1$ para dimensiones impares.

explícitamente, lo cual introduce una serie de complicaciones matemáticas en el estudio de las propiedades físicas de la solución.

Consideraremos aquí un caso particular de la acción de Lovelock que sólo tiene 2 parámetros independientes. Uno de ellos (λ_0), es una constante multiplicativa que tiene el mismo rol de la constante de Newton. El otro parámetro (l^{-2}) juega el rol de una constante cosmológica. Una consecuencia de considerar este caso particular es que la ecuación algebraica antes mencionada se resuelve trivialmente. Todas sus raíces están degeneradas en una sólo y es posible escribir explícitamente la forma de la métrica. Como veremos en la sección 3.2, se obtienen dos “ramas” de soluciones: una rama para dimensiones pares, cuyas soluciones presentan grandes similitudes con la solución de Schwarzschild usual, y la otra rama, en dimensiones impares, cuyas soluciones presentan grandes similitudes con el agujero negro en 2+1 estudiado en el capítulo II.

La simplicidad matemática no es argumento suficiente para justificar la reducción de la acción que se ha propuesto. Las razones físicas que motivan la reducción son las siguientes: (i) la acción de Hilbert en cuatro dimensiones no puede ser escrita como una teoría de gauge para un grupo particular, pero esto sí puede hacerse en todas las dimensiones impares. La acción que se propondrá aquí, en dimensiones impares, es una densidad tipo Chern-Simons para el grupo de anti-de Sitter. En dimensiones pares, usaremos el invariante topológico que da lugar a la densidad de Chern-Simons en $\mathcal{D}-1$ pero, para obtener ecuaciones de movimiento no triviales, es necesario romper la simetría. Esto se hará en la misma forma que lo propuesto por Mac Dowell y Mansouri[39] en el caso $\mathcal{D}=4$ (ii), la presencia de n parámetros independientes en la acción hace que la métrica pueda tener $\mathcal{D}-1$ horizontes los cuales son las raíces de un polinomio de grado $\mathcal{D}-1$ y no se puede establecer una relación entre el signo de la energía y la existencia de ellos. Por otra parte, la entropía, en el caso general, es un polinomio en r_+ (el horizonte exterior) no necesariamente creciente, contradiciendo la segunda ley de la termodinámica. Estas características de la acción de Lovelock sugieren que alguna elección para los coeficientes

debe hacerse. La acción que aquí consideraremos da origen a horizontes cuando la energía es positiva y la entropía es una función estrictamente creciente de r_+ . Debemos recalcar, de todas formas, que esta no es la única acción que cumple con estas propiedades; lo que fija la acción en este trabajo es la existencia de la densidad de Chern-Simons.

Una propiedad interesante de la teoría en dimensiones impares, y que ya está presente en $\mathcal{D}=3$, es la existencia de un estado permitido de masa negativa. En efecto, el espacio de anti-de Sitter tiene masa $M = -1$. Es importante mencionar que en el intervalo $-1 < M < 0$ el espacio tiene singularidades desnudas.

Las propiedades termodinámicas de los agujeros negros en dimensiones mayores son estudiadas en la sección 4. Mediante la evaluación de la acción Euclídea se puede calcular, en la aproximación de punto silla, la entropía en cualquier dimensión. Para calcular el valor de la acción Euclídea en la solución agujero negro es conveniente usar el formalismo hamiltoniano. En este formalismo, la acción es finita sin necesidad de efectuar regularizaciones.

2 La Acción Gravitacional en Dimensiones Mayores

2.1 Acción de Lovelock

La acción más general para la gravitación en un espacio-tiempo de dimensión (\mathcal{D}) mayor que cuatro es una suma sobre todas las continuaciones dimensionales de las características de Euler en las dimensiones pares menores que \mathcal{D} [1,2]⁵. Esta acción la llamaremos acción de Lovelock y tiene la forma

$$I = \lambda_0 \sum_{p=0}^n \alpha_p I_p \quad (2.1)$$

donde

$$I_p = \int \epsilon_{a_1 \dots a_{\mathcal{D}}} R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge e^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_{\mathcal{D}}}. \quad (2.2)$$

Aquí e^a es la 1-forma "vielbein", $R_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c$ es la 2-forma curvatura y ω_b^a la conexión de spin, $a_i = 1, \dots, \mathcal{D}$. Los coeficientes α_p son constantes arbitrarias con dimensiones [distancia]^{-($\mathcal{D}-2p$)} y λ_0 tiene unidades de acción.

Para dimensiones pares, el último término de la suma es el invariante topológico de Euler que no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Sin embargo este término asigna pesos diferentes a las topologías no equivalentes en la integral funcional.

Variando (2.1) con respecto de e^a se encuentran las ecuaciones de movimiento del problema que son mucho más complicadas que las ecuaciones de Einstein usuales involucrando potencias altas en el tensor de curvatura y por lo tanto en las aceleraciones. Sin embargo, estas ecuaciones aún son de segundo orden para la métrica y existe una formulación hamiltoniana bien definida[2]. Además ellas pueden ser resueltas al menos en algunos casos simples como por ejemplo Universos de Friedmann[41] y soluciones con

⁵Asumiremos, como es usual, que la acción no contiene el tensor de torsión explícitamente. La construcción de la acción en ese caso se encuentra en la Ref. [40].

simetría esférica[35,36]. La variación con respecto a ω^{ab} es cero idénticamente en el formalismo de segundo orden donde se supone que la torsión es nula.

La acción (2.1) se construye usando los mismos requerimientos que en $\mathcal{D} = 4$ [1]: covarianza general; ecuaciones de segundo orden para el campo gravitacional y un tensor de energía momento conservado. En el lenguaje de formas diferenciales, la acción (2.1) puede ser obtenida bajo el requerimiento de que el lagrangiano sea una \mathcal{D} -forma invariante de Lorentz construida solamente usando e^a y w^{ab} y sus derivadas exteriores, sin usar el operador de Hodge ($*$)[40,42] (que sirve para construir la acción de Yang-Mills).

Estos requerimientos no restringen los coeficientes α_p y son necesarias nuevas condiciones. Para seleccionar los coeficientes α_p vamos a intentar agrandar el grupo de simetría local. Para esto debemos sumergir el grupo de Lorentz en un grupo más grande G . Las posibilidades para G son tres[43]:

- (i) $G = SO(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, $\mathcal{D}_1 \geq \mathcal{D} - 1$, $\mathcal{D}_2 \geq 1$
- (ii) $G = SL(\mathcal{D}')$, $\mathcal{D}' \geq \mathcal{D}$
- (iii) $G = SO(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \otimes T$, o $G = SL(\mathcal{D}') \otimes T$, donde T conmuta con $SO(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ o con $SL(\mathcal{D}')$.

Entonces, la posibilidad minimal semisimple para G es el grupo de anti-de Sitter ($G = SO(\mathcal{D} - 1, 2)$) o de Sitter ($G = SO(\mathcal{D}, 1)$). Vamos a considerar aquí el caso del grupo anti-de Sitter. La razón para esta elección es que las soluciones clásicas en este caso son espacios abiertos asintóticamente anti-de Sitter y que tienen una rica estructura en infinito[14].

En lo que sigue vamos a considerar la elección particular de los coeficientes α_p en (2.1) dada por

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{n}{\mathcal{D} - 2p} \binom{n-1}{p} l^{-\mathcal{D}+2p} & \mathcal{D} = 2n - 1 \quad (a) \\ \binom{n}{p} l^{-\mathcal{D}+2p} & \mathcal{D} = 2n \quad (b) \end{cases} \quad (2.3)$$

donde el parámetro l tiene dimensiones de distancia.

En las dos secciones siguientes se justificará esta elección por argumentos de teoría de grupos.

2.2 La acción en dimensiones impares

Consideremos la densidad de Euler en $2n$ dimensiones. Esta densidad es, por supuesto, una forma exacta y puede ser escrita en la forma

$$\mathcal{E}_{2n} \equiv \lambda_0 \epsilon_{A_1 \dots A_{2n}} \tilde{R}^{A_1 A_2} \wedge \dots \wedge \tilde{R}^{A_{2n-1} A_{2n}} = d \wedge \mathcal{L}_{2n-1} \quad (2.4)$$

Aquí, el tensor de curvatura \tilde{R}^{AB} es construido con la conexión W^{AB} del grupo $SO(2n - 2, 2)$ donde los índices latinos en mayúscula corren en el rango 1 a $2n$ (ver Apéndice A). \mathcal{E}_{2n} no puede ser usado como un lagrangiano en $2n$ dimensiones puesto que es una derivada total, pero \mathcal{L}_{2n-1} puede ser usado como lagrangiano en $2n - 1$ dimensiones.

Usando la descomposición de la conexión W^{AB} en rotaciones de Lorentz (con conexión w^{ab}) y "traslaciones" (con conexión e^a) descrita en el apéndice A, se encuentra la siguiente expresión para \mathcal{L}_{2n-1} como una función de estos campos

$$\mathcal{L}_{2n-1} = \lambda_0 \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \epsilon_{a_1 \dots a_{\mathcal{D}}} R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2p-1} a_{2p}} \wedge e^{a_{2p+1}} \wedge \dots \wedge e^{a_{\mathcal{D}}} \quad (2.5)$$

donde los coeficientes α_p están dados en (2.3a). Esta expresión es un caso particular del lagrangiano en (2.1) con la elección de coeficientes (2.3a). Debido a que la densidad de Euler es invariante ante el grupo de anti-de Sitter ($SO(\mathcal{D} - 1, 2)$), también lo es \mathcal{L}_{2n-1} para

transformaciones que dejen el borde invariante. Por conveniencia posterior las unidades las escogeremos de modo que el coeficiente λ_0 tome el valor

$$\lambda_0 = \frac{2l}{(\mathcal{D} + 1)(\mathcal{D} - 2)! \Omega_{\mathcal{D}-2}} \quad (2.6)$$

donde $\Omega_{\mathcal{D}-2}$ es el área de la $\mathcal{D} - 2$ esfera.

Notar que en el límite $l \rightarrow \infty$ (que corresponde a una constante cosmológica cero), sólo el último término ($p = n - 1$), y no el término de Hilbert, contribuye a la acción. La forma en que hemos construido esta acción es similar al caso Chern-Simons en $\mathcal{D}=3$ y uno puede preguntarse si algunas de las interesantes propiedades de la teoría Chern-Simons se cumplen en este caso. Una importante propiedad de la teoría Chern-Simons es que las ecuaciones de movimiento fuerzan al tensor de curvatura del grupo a ser cero. Esto implica que la conexión es puro gauge y los únicos grados de libertad del problema son grados de libertad globales asociados a posibles holonomías no triviales de la variedad. Otra consecuencia importante de que el tensor de curvatura sea cero es la equivalencia "on-shell" entre difeomorfismos y transformaciones locales de gauge. Ninguna de las dos propiedades anteriores se cumple para $\mathcal{D} > 3$ puesto que el tensor de curvatura no es cancelado por las ecuaciones de movimiento (ver sección 2.4).

2.3 La acción en dimensiones pares

En dimensiones impares no existen invariantes topológicos que se puedan construir a partir de una conexión para un cierto grupo. Luego, no podemos repetir el procedimiento de la sección anterior para construir la acción en una dimensión par. Como fue notado por Mac Dowell y Mansouri[39] es necesario romper la simetría ante el grupo de anti-de Sitter para obtener una acción no trivial. La forma que debería tener un lagrangiano invariante ante el grupo de anti-de Sitter es

$$\mathcal{L}_{2n} = \lambda_0 \tilde{R}^{A_1 A_2} \wedge \tilde{R}^{A_3 A_4} \wedge \dots \wedge \tilde{R}^{A_{\mathcal{D}-1} A_{\mathcal{D}}} Q_{A_1 A_2 \dots A_{\mathcal{D}}}, \quad (2.7)$$

donde Q_{A_1, A_2, \dots, A_D} es un tensor de rango \mathcal{D} en el grupo. Pero, si escogemos Q como un tensor invariante, el lagrangiano resulta ser una derivada total. Debemos entonces romper la simetría. Escogeremos Q_{A_1, A_2, \dots, A_D} como un tensor invariante ante el grupo en la dimensión menor, $SO(2n - 1, 1)$, el grupo de Lorentz,

$$Q_{A_1 A_2 \dots A_D} = \begin{cases} \epsilon_{a_1 \dots a_D} & \text{para } A_i = a_i, (i = 1, \dots, D) \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (2.8)$$

Con esta elección el lagrangiano (2.7) queda

$$\mathcal{L}_{2n} = \lambda_0 (R^{a_1 a_2} + l^{-2} e^{a_1} \wedge e^{a_2}) \wedge \dots \wedge (R^{a_{D-1} a_D} + l^{-2} e^{a_{D-1}} \wedge e^{a_D}) \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_D}. \quad (2.9)$$

siendo un caso particular del lagrangiano en (2.1) con la elección particular de los coeficientes α_p dada en (2.3b). En dimensiones pares escogeremos las unidades de modo que λ_0 tome el valor

$$\lambda_0 = \frac{l^2}{2(\mathcal{D} - 2)! \mathcal{D} \Omega_{\mathcal{D}-1}}. \quad (2.10)$$

lo cual reproduce la normalización usual en $\mathcal{D}=4$ y es una elección natural en dimensiones mayores.

En el caso límite $l \rightarrow \infty$, sólo el término con la potencia más alta (no trivial) en el tensor de curvatura (R^{n-1}) contribuye al lagrangiano. En este límite, la densidad de Euler (R^n) adquiere una constante de acoplamiento infinita, pero este término, de todas formas, no contribuye a las ecuaciones de movimiento.

2.4 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de los lagrangianos (2.5) y (2.9) son

$$(R^{a_1 a_2} + l^{-2} e^{a_1} \wedge e^{a_2}) \wedge \dots \wedge (R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + l^{-2} e^{a_{2n-3}} \wedge e^{a_{2n-2}}) \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_{2n-1}} = 0 \quad (2.11)$$

en dimensiones impares ($\mathcal{D}=2n-1$), y

$$(R^{a_1 a_2} + l^{-2} e^{a_1} \wedge e^{a_2}) \wedge \dots \wedge (R^{a_{2n-3} a_{2n-2}} + l^{-2} e^{a_{2n-3}} \wedge e^{a_{2n-2}}) \wedge e^{a_{2n-1}} \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_{2n}} = 0. \quad (2.12)$$

en dimensiones pares ($\mathcal{D}=2n$).

Como veremos más adelante, la forma factorizada que tienen estas ecuaciones permitirá una gran simplificación en el análisis de las propiedades físicas de sus soluciones.

3 Soluciones Estáticas de Simetría Esférica

3.1 Acción y ecuaciones de movimiento reducidas

En esta sección estudiaremos soluciones para las ecuaciones (2.11) y (2.12). Este estudio ha sido realizado por numerosos autores anteriormente[34,35,36,37,38]. Nuestro objetivo es revisar el caso en que la acción es escogida con la elección particular de coeficientes(2.3).

Para nuestros propósitos aquí es suficiente considerar un minisuperespacio donde las métricas que se varían son estáticas y esféricamente simétricas. En un sistema de coordenadas apropiado la métrica se puede escribir en la forma

$$ds^2 = -N^2(r)g^2(r)dt^2 + g^{-2}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.1)$$

donde $d\Omega^2$ es el ángulo sólido de la $\mathcal{D}-2$ esfera y $N(r)$ y $g(r)$ son funciones que se varían en la acción. (En general un procedimiento de reducción de este tipo no lleva necesariamente al mismo conjunto de ecuaciones originales. Sin embargo, debido a que la reducción se hizo aquí mediante vectores de Killing, las ecuaciones nuevas son consistentes con las originales. Esto puede probarse explícitamente reemplazando (3.1) en (2.11) y (2.12). Además, al hacer el reemplazo se descubre que las constantes de integración del problema reducido son constantes de movimiento del problema general.)

Trabajando en la formulación hamiltoniana de la acción de Lovelock es fácil encontrar la forma reducida de la acción para la métrica (3.1). Por aplicación directa de los resultados de la Ref.[2] se encuentra (ver apéndice B)

$$\begin{aligned} I &= (t_2 - t_1) \int dr N \left(\frac{\partial F}{\partial g} g' + \frac{\partial F}{\partial r} \right) + B. \\ &= (t_2 - t_1) \int dr N F' + B \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aquí B es un término de superficie que se ajustará más tarde, la prima ' representa derivadas con respecto de la coordenada radial r , y la función $F[r, g(r)]$ está definida por

$$F[r, g(r)] = \begin{cases} \frac{1}{2}r [1 + (r/l)^2 - g^2(r)]^{n-1} & \mathcal{D} = 2n & (a) \\ [1 + (r/l)^2 - g^2(r)]^{n-1} & \mathcal{D} = 2n - 1 & (b) \end{cases} \quad (3.3)$$

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de (3.2) son

$$\frac{dN}{dr} = 0, \quad \frac{dF}{dr} = 0 \quad (3.4)$$

que son resueltas por

$$N(r) = N_\infty = \text{const.}, \quad F[r, g(r)] = C = \text{const.} \quad (3.5)$$

Los dos parámetros C y N_∞ son las constantes de integración del problema. Ajustando la escala de tiempos, N_∞ puede ser escogido igual a uno, pero nosotros lo mantendremos como un parámetro independiente para futura conveniencia en el cálculo de la energía y la entropía de la solución. El parámetro C es, salvo por una constante aditiva, la masa asociada a la solución (ver Sec. 3.4),

$$C = M + C_0. \quad (3.6)$$

La constante C_0 será escogida en la sección siguiente.

3.2 Agujero negro en dimensiones mayores

Usando (3.3) y (3.5) podemos expresar el coeficiente métrico $g^2(r)$ como función de la masa M y la coordenada radial r en la forma

$$g^2(r) = \begin{cases} 1 - (2M/r)^{\frac{1}{n-1}} + (r/l)^2 & \mathcal{D} = 2n & (a) \\ 1 - (M+1)^{\frac{1}{n-1}} + (r/l)^2 & \mathcal{D} = 2n - 1 & (b) \end{cases} \quad (3.7)$$

Escogiendo $N_\infty = 1$ se encuentra la expresión

$$ds^2 = - \left[1 - \left(\frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{r^2}{l^2} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{2M}{r} \right)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.8)$$

en dimensiones pares, y

$$ds^2 = - \left[1 - (M+1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{r^2}{l^2} \right] dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (M+1)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.9)$$

en dimensiones impares. El criterio que hemos adoptado aquí para escoger la constante C_0 es que cuando la masa sea cero, el horizonte, y por lo tanto el agujero negro, desaparezca. Entonces, en dimensiones pares $C_0 = 0$ y en dimensiones impares $C_0 = 1$. Los casos usuales de dimensión cuatro y tres son obtenidos poniendo $n = 2$ en (3.8) y (3.9) respectivamente.

Las métricas (3.8) y (3.9) describen un agujero negro sólo si la función $g^2(r)$ tiene al menos un cero para un valor real y positivo de r ,

$$g^2(r_+) = 0, \quad r_+ > 0. \quad (3.10)$$

De (3.7) se obtiene que para las dimensiones con n impar ($\mathcal{D} = 4k+1, 4k+2$) la masa M debe ser positiva si uno espera una solución real, y además, un signo \pm aparece en frente de la raíz ($n-1$). La rama de soluciones con el signo positivo tiene un horizonte, pero la rama con el signo negativo tiene una singularidad desnuda. Además de existir una degeneración en las soluciones, un hecho perturbador en estas dimensiones es la ausencia de una relación entre la existencia del horizonte y el signo de la energía.

Para las otras dimensiones ($\mathcal{D} = 4k-1, 4k; k=1, 2, 3, \dots$), los signos están fijos y es fácil ver que un horizonte existe si y sólo si la energía es positiva. La relación entre la positividad de la energía y la existencia de horizontes es de gran importancia, y por esta razón nosotros excluirémos de nuestro análisis aquellas dimensiones donde esta relación no existe. En la sección 3.4, se verá que al introducir carga eléctrica, se encuentra otra fuerte razón

para excluir estas dimensiones.

Estructura causal en dimensiones pares

La expresión (3.8) representa una extensión natural de la solución de Schwarzschild para dimensiones mayores. La métrica diverge en el origen como $r^{\frac{1}{n-1}}$ ($\mathcal{D} = 2n$) y es directo comprobar que el tensor de curvatura también diverge en $r = 0$. La región asintótica, se aproxima al espacio de anti-de Sitter. El diagrama de Penrose de la solución se calcula por los métodos usuales y no depende de la dimensión. El caso $M \neq 0$ es mostrado en la Fig. 1a y el caso $M = 0$, que corresponde al espacio de anti-de Sitter, es mostrado en la figura 1b.

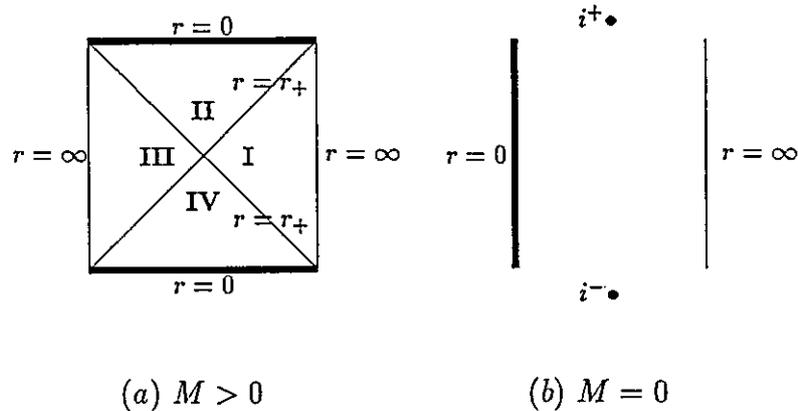


Fig. 1

Diagrama de Penrose en $\mathcal{D}=2n$

En la figura 1a las líneas horizontales (tipo espacio) representan la singularidad donde las geodésicas terminan y las líneas verticales (tipo tiempo), la región asintótica. El diagrama es cerrado y por lo tanto la variedad es maximal. La estructura causal es la misma que en el caso 3+1. La región II está causalmente desconectada del resto de la variedad; un observador en II sólo puede caer hacia la singularidad $r = 0$. El estado vacío, mostrado en la figura 1b, es el espacio de anti-de Sitter. Los puntos i^+ , i^- represen-

tan el infinito futuro y pasado respectivamente y son regiones desconectadas del diagrama.

Estructura causal en dimensiones impares

El agujero negro en dimensiones impares tiene a su vez fuertes similitudes con el caso 2+1[26]. Sin embargo, debido a que para $\mathcal{D} > 3$ el tensor de curvatura no es constante, como en $\mathcal{D} = 3$, las soluciones no pueden ser obtenidas por un proceso de identificación a partir del espacio de anti-de Sitter[29].

Las componentes no nulas del tensor de curvatura en dimensiones impares son

$$\begin{aligned}
 R_{0r}^{0r} &= -l^{-2} \\
 R_{0\phi}^{0\theta} &= -l^{-2}\delta_{\phi}^{\theta} \\
 R_{r\phi}^{r\theta} &= -l^{-2}\delta_{\phi}^{\theta} \\
 R_{\phi_1\phi_2}^{\theta_1\theta_2} &= \left[-l^{-2} + \frac{(M+1)^{\frac{1}{n-1}}}{r^2} \right] \delta_{[\phi_1\phi_2]}^{[\theta_1\theta_2]}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

y el escalar de curvatura es

$$R = -\frac{\mathcal{D}(\mathcal{D}-1)}{l^2} + \frac{(M+1)^{\frac{1}{n-1}}(\mathcal{D}-2)(\mathcal{D}-3)}{r^2} \quad \mathcal{D} = 2n - 1 \tag{3.12}$$

Como se mencionó antes, los valores de M negativos no tienen horizontes y por lo tanto son estados prohibidos. Pero, cuando se llega al valor $M = -1$ (en unidades Geometrizadas) la singularidad de curvatura desaparece, y por lo tanto, esa solución es permisible. El espacio obtenido para $M = -1$ corresponde exactamente al espacio de anti-de Sitter el cual aparece como un “bound state” en el espectro de masas. Esto es muy similar a lo que ocurre en 2+1 dimensiones. En ese caso, $M = -1$ corresponde al espacio de anti-de Sitter en tres dimensiones y en el intervalo $-1 < M < 0$ existe un continuo de soluciones con singularidades cónicas desnudas[26].

A distancias grandes, $R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \approx -l^{-2}\delta_{[\mu\nu]}^{[\alpha\beta]}$ y la variedad se aproxima a un espacio de curvatura constante negativa, el espacio de anti-de Sitter.

El diagrama de Penrose de la solución genérica ($M \neq 0$) en dimensiones impares es el mismo que en dimensiones pares. Pero ahora hay una diferencia en el estado vacío. El diagrama del estado $M = 0$ se muestra en la figura 2b. Además, en dimensiones impares existe el estado de masa negativa $M = -1$ correspondiente al espacio de anti-de Sitter. Los diagramas de estos tres estados se muestran en la figura 2.

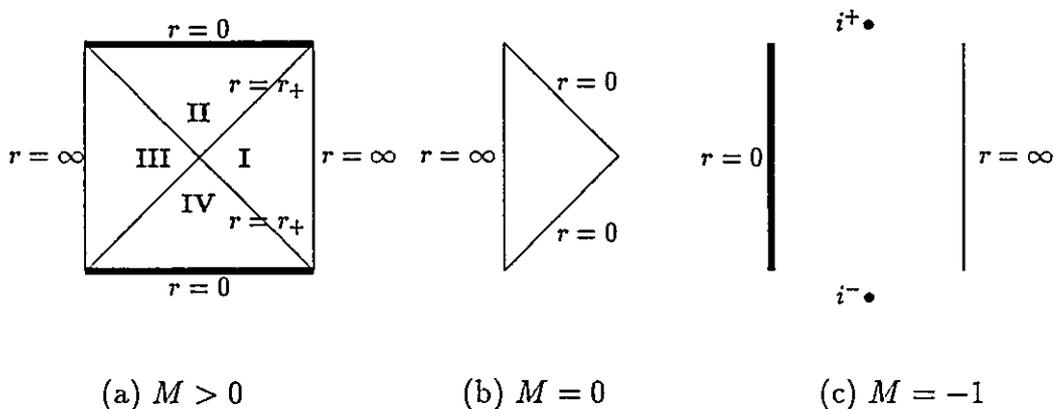


Fig. 2

Diagrama de Penrose en $D=2n-1$

3.3 Agujero negro cargado en dimensiones mayores

El agujero negro en 4 dimensiones está caracterizado por 3 parámetros: masa, momento angular y carga eléctrica. Estas tres cantidades están asociadas a traslaciones temporales, rotaciones y transformaciones de gauge asintóticamente constantes del campo de gauge, respectivamente. Las soluciones descritas en la sección anterior tienen sólo una de estas "cargas", la masa. Es natural intentar extender estas soluciones incluyendo carga eléctrica y momento angular. En la presente sección describiremos como agregar carga eléctrica para el agujero negro en dimensiones mayores.

La acción hamiltoniana reducida para el campo electromagnético Coulombiano sobre un fondo curvo descrito por una métrica $g_{\mu\nu}$ es (ver apéndice C)

$$I_Q = (t_2 - t_1) \int dr \left[-\frac{1}{2} N r^{D-2} p^2 + \varphi (r^{D-2} p)' \right] + B_Q. \quad (3.13)$$

donde $N = N^\perp g_{rr}^{1/2}$ y B_Q es un término que depende de las condiciones de borde.

Sumando a (3.13) la parte gravitacional (ecuación (3.2)) se obtiene la acción total

$$I_{GQ} = (t_2 - t_1) \int dr \left[N (F' - \frac{1}{2} r^{D-2} p^2) + \varphi (r^{D-2} p)' \right] + B_{GQ}. \quad (3.14)$$

donde B_{GQ} es un término de borde que será fijado más adelante.

Variando la acción con respecto de los cuatro campos N, φ, p y g se obtienen respectivamente el conjunto de ecuaciones

$$F' = \frac{1}{2} r^{D-2} p^2 \quad (3.15)$$

$$(r^{D-2} p)' = 0 \quad (3.16)$$

$$\varphi' = -Np \quad (3.17)$$

$$N' = 0 \quad (3.18)$$

que son resueltas fácilmente encontrándose

$$p = \frac{Q}{r^{D-2}} \quad (3.19)$$

$$\varphi = \frac{N_\infty Q}{(D-3)r^{D-3}} + \varphi_\infty \quad (3.20)$$

$$F = -\frac{\frac{1}{2} Q^2}{(D-3)r^{D-3}} + C \quad (3.21)$$

$$N = N_\infty. \quad (3.22)$$

Los cuatro parámetros Q, C, φ_∞ y N_∞ son las constantes de integración del problema. Las constantes φ_∞ y N_∞ representan el valor de φ y N en infinito y son los conjugados de Q y M respectivamente (ver sección siguiente).

Las componentes de la métrica se encuentran de (3.21). Escogiendo $N_\infty = 1$, la métrica toma la forma

$$ds^2 = -g^2(r)dt^2 + g^{-2}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.23)$$

con

$$g^2(r) = \begin{cases} 1 + \frac{r^2}{l^2} - \left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{(\mathcal{D}-3)r^{\mathcal{D}-2}} \right)^{\frac{1}{n-1}} & \mathcal{D} = 2n \quad (a) \\ 1 + \frac{r^2}{l^2} - \left(M + 1 - \frac{\frac{1}{2}Q^2}{(\mathcal{D}-3)r^{\mathcal{D}-3}} \right)^{\frac{1}{n-1}} & \mathcal{D} = 2n - 1 \quad (b) \end{cases} \quad (3.24)$$

Este resultado entrega otra razón para excluir las dimensiones con $n - 1$ par. En efecto en ese caso, aparte de los problemas mencionados en la sección 3.2, se encuentra un valor mínimo de r para que la solución sea real. Este valor particular de r no representa una singularidad de ningún tipo en la geometría, ni tampoco del campo electromagnético. Para $n = 2$ en dimensiones pares (3.23) se reduce a la solución de Reissner-Nordstrom usual. El caso $n = 2$ en dimensiones impares ($\mathcal{D}=3$) debe ser tratado por separado, ver sección 2.5 del capítulo II.

En dimensiones pares existe una solución asintóticamente plana que se obtiene en el límite cuando no hay constante cosmológica ($l \rightarrow \infty$). En dimensiones impares, por otro lado, no es posible tomar este límite sin perder el agujero negro. Esto se ve directamente de (3.24). (En dimensiones impares la energía no tiene unidades (ver apéndice E), y, por lo tanto, para poder tener un horizonte se necesita una escala con dimensiones de distancias: la constante cosmológica.)

De las expresiones (3.24) es directo probar que existen dos, uno o ningún horizonte para la métrica dependiendo de los valores de M y Q . Pero es importante recalcar que para que exista al menos un horizonte la masa debe ser positiva. En el caso genérico de que existan 2 horizontes (r_\pm), la variedad se separa en tres regiones: I, llamada región exterior corresponde a $r > r_+$, II, llamada región intermedia corresponde a $r_- < r < r_+$

y III, llamada región interior corresponde a $r < r_-$. La forma como estas regiones se conectan se muestra en el diagrama de Penrose de la figura 3.

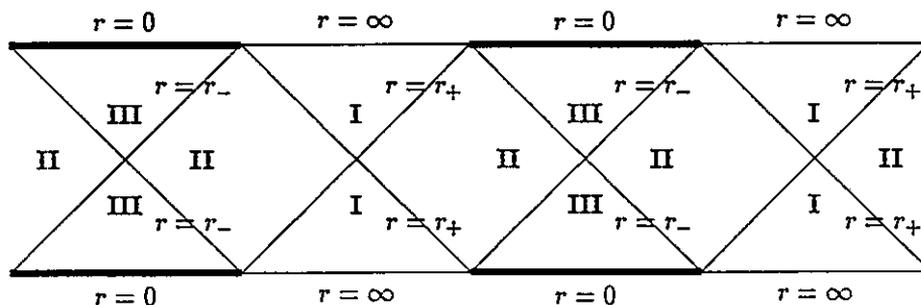


Fig. 3

Diagrama de Penrose, $Q \neq 0$, (2 horizontes).

En el caso extremo ($r_+ = r_-$) existen dos regiones: la región exterior I ($r > r_+$) y la región interior II ($r < r_+$). La conexión causal entre estas regiones es mostrada en la figura 4.

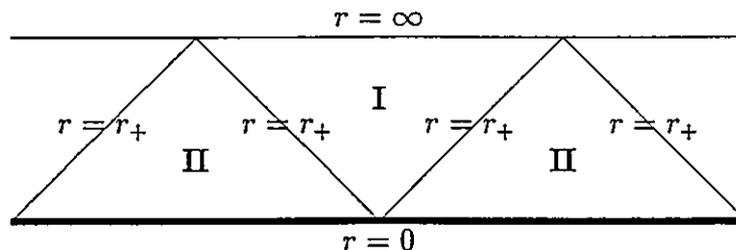


Fig. 4

Diagrama de Penrose, $Q \neq 0$ (caso extremo)

3.4 Términos de superficie: energía y carga eléctrica

La energía y carga eléctrica asociada a las soluciones de la sección anterior pueden ser fácilmente calculadas usando las técnicas hamiltonianas[44]. El término de superficie

B_{GQ} presente en (3.14) debe ser fijado de modo que la acción tenga un extremo para variaciones que respeten las condiciones asintóticas. Se impone como condición asintótica que los campos se aproximen a las soluciones clásicas de las ecuaciones de movimiento (ecuaciones (3.19)-(3.22)). Variando la acción con esas condiciones de borde se encuentra para δB_{GQ}

$$\delta B_{GQ} = (t_2 - t_1)(-N_\infty \delta M - \varphi_\infty \delta Q). \quad (3.25)$$

Este término representa la carga conservada asociada a las “transformaciones de gauge impropias”[27] generadas por la evolución temporal. Estas transformaciones son, desplazamientos temporales en infinito y transformaciones de gauge asintóticamente constantes del campo electromagnético. De la ecuación (3.25) se deduce que los pares (M, N_∞) y (Q, φ_∞) son conjugados, luego si la masa (M) y la carga (Q) son variados, N_∞ y φ_∞ están fijos. Luego

$$B_{GQ} = (t_2 - t_1)(-N_\infty M - \varphi_\infty Q) + B_0 \quad (3.26)$$

donde B_0 es una constante sin variación. La libertad para fijar esta constante fue usada en la sección 3.2 para fijar el cero de la energía cuando el horizonte desaparece.

En espacios asintóticamente anti-de Sitter, la función “lapse” reescalada N , mide los desplazamientos temporales en vez del “lapse” usual N^\perp . Esto se debe a que el vector $n = N^\perp \partial / \partial t$ no se aproxima al vector de Killing $\partial / \partial t$ en infinito puesto que N^\perp diverge ahí. El vector reescalado $\tilde{n} = g^{-1}(r) N^\perp \partial / \partial t = N \partial / \partial t$ sí se aproxima al vector de Killing salvo por un reescalamiento constante.

4 Termodinámica de Agujeros Negros en Dimensiones Mayores

4.1 Temperatura

La temperatura asociada a los agujeros negros descritos en la sección anterior puede ser calculada usando las técnicas Euclídeas usuales[19]. En tiempo imaginario $t = i\tau$, la métrica (3.1) toma la forma

$$ds_{Euc}^2 = N^2(r)g^2(r)d\tau^2 + g^{-2}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (4.1)$$

donde $g^2(r)$ está dado por (3.7) y $N(r) = \beta^6$. Debido a que la función g^2 se anula en un punto, la topología del agujero negro Euclídeano es $\mathbf{R}^2 \times S_{\mathcal{D}-2}$. La coordenada τ es periódica y podemos fijar su rango en el intervalo $[0,1]$. En estas coordenadas, N representa el período Euclídeano cuyo inverso es la temperatura: $N=\beta=T^{-1}$. La fórmula

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dg^2(r)}{dr} \right)_{r=r_+} \quad (4.2)$$

relaciona la temperatura (período inverso) con la masa de la solución de modo que no haya singularidades cónicas en el horizonte. En el caso $Q = 0$ se obtiene para T ,

$$T = \begin{cases} \frac{1 + (r_+/l)^2(2n-1)}{4\pi(n-1)r_+} & \mathcal{D} = 2n \\ \frac{r_+}{2\pi l^2} & \mathcal{D} = 2n-1 \end{cases} \quad (4.3)$$

La evaporación de agujeros negros es muy diferente en dimensiones pares e impares. Cuando $M \rightarrow 0$, $r_+ \rightarrow 0$ en ambos casos, pero $T \rightarrow \infty$ para \mathcal{D} par mientras que $T \rightarrow 0$ para \mathcal{D} impar. En el límite $l \rightarrow \infty$, se reproduce el resultado standard en $\mathcal{D}=4$, $T = (8\pi m)^{-1}$.

⁶En esta sección llamaremos β a N_∞ puesto que en el formalismo Euclídeo N_∞ representa el inverso de la temperatura.

4.2 Acción Euclideana y entropía

La entropía del agujero negro en dimensiones mayores puede también calcularse siguiendo los métodos Euclídeos[19]. En la aproximación de punto silla, el valor de la acción Euclideana es igual a la energía libre dividida por la temperatura

$$I_{Euc}|_{B.H.} = \frac{\text{Energía Libre}}{\text{Temperatura}} \quad (4.4)$$

$$= \frac{M}{T} - S + \sum \frac{\mu_i}{T} Q^i \quad (4.5)$$

donde los μ_i son los potenciales químicos asociados a las cargas Q^i .

Consideremos la versión Euclídea del minisuperspacio de la sección 2, ecuación (3.14). En el sector Euclídeo la variedad se extiende desde r_+ hasta ∞ . La acción Euclídea reducida es (ver apéndice D)

$$I_E = -(\tau_2 - \tau_1) \int_{r_+}^{\infty} dr \left[N(F' - \frac{1}{2}r^{D-2}p^2) + \varphi(r^{D-2}p)' \right] + B_E. \quad (4.6)$$

donde podemos fijar el rango de τ según $\tau_2 - \tau_1 = 1$. El punto $r = r_+$, definido como la raíz exterior de la ecuación $g^2(r) = 0$, es el origen de un sistema de coordenadas polares en el plano r/τ . Si el período propio de la coordenada temporal (N_∞) no es ajustado apropiadamente se obtiene una singularidad cónica en ese punto.

Debido a que la acción es una combinación de los vínculos su valor sobre la solución clásica es igual al término de borde B_E . Este término depende de las condiciones de borde del problema. En la región asintótica $r \rightarrow \infty$ imponemos que los campos se aproximen a la solución clásica de las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} N &\rightarrow N_\infty \equiv \beta \\ \varphi &\rightarrow \varphi_\infty \\ \delta F &\rightarrow \delta M \\ \delta p &\rightarrow r^{-D+2} \delta Q. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En el horizonte imponemos la fórmula para la temperatura (4.2)

$$N(r_+) \left(\frac{\partial g(r)^2}{\partial r} \right)_{r=r_+} = 4\pi \quad (4.8)$$

para asegurar que no haya singularidades cónicas y, además, la condición sobre el potencial

$$\varphi(r_+) = 0. \quad (4.9)$$

Esta última condición es sólo una elección. Se podría haber fijado que el potencial se anule en infinito y tenga un valor no cero en el horizonte. La ventaja de la condición (4.9) es que el potencial químico asociado a la carga eléctrica queda definido por el valor de φ en infinito.

Una vez que las condiciones de borde han sido fijadas debemos variar la acción (4.6) y ajustar B_E de modo que ella tenga un extremo sobre las soluciones clásicas de las ecuaciones. La variación es

$$\delta I_E = - \left[N \delta F + \varphi r^{-D+2} \delta p \right]_{r_+}^{\infty} + \delta B_E(\infty) - \delta B_E(r_+). \quad (4.10)$$

Aquí no hemos escrito el término de volumen puesto que se anula cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen.

Calculemos primero el término que proviene del horizonte $\delta B_E(r_+)$. La variación de F en el horizonte está dada por

$$(\delta F)_{r=r_+} = \left(\frac{\partial F}{\partial g^2} \right)_{r=r_+} \left[\delta g^2(r) \right]_{r=r_+} \quad (4.11)$$

y, de la definición de r_+ , $g^2(r_+) = 0$, se obtiene

$$\delta g^2|_{r=r_+} + \left(\frac{dg^2}{dr} \right)_{r=r_+} \delta r_+ = 0. \quad (4.12)$$

luego

$$\begin{aligned}\delta B_E(r_+) &= -N(r_+) \left(\frac{dg^2}{dr} \right)_{r=r_+} \left(\frac{\partial F}{\partial g^2} \right)_{r=r_+} \delta r_+ \\ &= -4\pi \left(\frac{\partial F}{\partial g^2} \right)_{r=r_+} \delta r_+\end{aligned}\quad (4.13)$$

donde se ha usado la condición de regularidad (4.8). Notemos que debido a (4.9) no hay otras contribuciones al término de borde provenientes del horizonte. Usando las condiciones asintóticas (4.7) el término proveniente de infinito se calcula fácilmente obteniéndose

$$\delta B_E(\infty) = \beta \delta M + \varphi_\infty \delta Q \quad (4.14)$$

Puesto que el valor de B_E es igual al energía libre del sistema obtenemos

$$\text{Energía libre} = \beta M + \varphi_\infty Q + 4\pi \int dr_+ \left(\frac{\partial F}{\partial g^2} \right)_{r=r_+} - S_0. \quad (4.15)$$

donde S_0 es una constante sin variación. De esta expresión se deduce que M es la energía interna, β el inverso de la temperatura y $\beta^{-1}\varphi_\infty$ el potencial químico asociado a la carga eléctrica. La entropía es

$$S(r_+) = -4\pi \int dr_+ \left(\frac{\partial F}{\partial g^2} \right)_{r=r_+} + S_0. \quad (4.16)$$

donde recordemos que la dependencia de r_+ en M, Q se obtiene de la ecuación $g^2(r) = 0$.

En dimensiones pares, la integral (4.16) se puede calcular en forma cerrada encontrándose

$$S(r_+) = \pi l^2 \left[\left(1 + \frac{r_+^2}{l^2} \right)^{n-1} - 1 \right] \quad \mathcal{D} = 2n \quad (4.17)$$

Aquí hemos fijado $S_0 = -\pi l^2$ lo cual reproduce el resultado usual en cuatro dimensiones, además entrega un valor finito para la entropía en el límite $l \rightarrow \infty$, $S(r_+) \rightarrow \pi(n-1)r_+^2$ y se cumple que $S(0) = 0$.

En dimensiones impares la integral (4.16) no se puede calcular en forma cerrada para cualquier dimensión,

$$S(r_+) = 4\pi(n-1) \int_0^{r_+} dr_+ \left(1 + \frac{r_+^2}{l^2}\right)^{n-2} + S_0. \quad (4.18)$$

Aquí hemos escogido $S_0 = 0$ puesto que se obtiene el valor $S = 4\pi r_+$ para el caso especial $\mathcal{D}=3$ [26] y también $S(0) = 0$. Debido a que la energía es adimensional en $\mathcal{D} = 2n - 1$, el parámetro l juega un rol fundamental en las propiedades del agujero negro. El límite $l \rightarrow \infty$ no está bien definido en este caso puesto que r_+ depende de l . Cuando $l \rightarrow \infty$, r_+ también va a infinito. En dimensiones pares, por otra parte, $r_+ \rightarrow 2M$ para $l \rightarrow \infty$.

La entropía de los agujeros negros aquí descritos no es proporcional al área, excepto en los casos $\mathcal{D} = 3, 4$, pero sí es una función creciente de r_+ y, por lo tanto, la segunda ley de la termodinámica es válida. Es importante notar además que la relación entre la masa y r_+ no es invertible explícitamente pero sí monótona creciente. Debe enfatizarse que para una elección arbitraria de los coeficientes de Lovelock la entropía resulta ser un polinomio en r_+ no necesariamente creciente. En la referencia [36] se calcula la entropía para el caso general y el resultado coincide con el nuestro. Sin embargo, el método ocupado en esa referencia, basado en la acción lagrangiana, requiere de una regularización lo cual oscurece el hecho de que la entropía, a diferencia de las cargas (M y Q), es un término en la acción proveniente del horizonte.

Conclusiones

Hemos estudiado las características principales del agujero negro en tres dimensiones y su extensión a dimensiones mayores. Los puntos para recalcar son (i) la *existencia* de un agujero negro en tres dimensiones con una rica estructura matemática y (ii) la existencia de dos “ramas” de soluciones, una en dimensiones impares, que tiene similares características al caso tridimensional y otra, en dimensiones pares, con un fuerte análogo a la solución de Schwarzschild usual.

Los problemas abiertos son varios. En el caso de agujeros negros en dimensiones mayores el problema inmediato más importante es la incorporación de momento angular. Esto seguramente es posible de realizar puesto que la solución de Kerr para la métrica de Schwarzschild continuada dimensionalmente existe, y el problema geométrico que permite encontrar esa solución es esencialmente el mismo que el problema de agregar momento angular a nuestra solución; sólo las acciones son distintas. La existencia de horizontes cuando la masa es positiva, y sólo en ese caso, sugiere que el teorema de la positividad de la energía[46] pueda ser válido en la acción de Lovelock. Para intentar demostrar este teorema puede resultar de mucha utilidad la extensión supersimétrica de la acción de Lovelock[47]. Aparte de su aplicación al teorema de la positividad de la energía, la supergravedad para la acción de Lovelock tiene un interés intrínseco; aunque hemos encontrado algunos resultados en esa dirección, son aún muy preliminares como para ser mencionados aquí.

En relación al caso tridimensional hay varios problemas abiertos. La pregunta más natural que surge es de qué modo, si lo hay, el agujero negro en tres dimensiones puede entrar al mundo observacional. La respuesta más segura a esta interrogante es que el agujero negro en $2+1$ es un “laboratorio” teórico con el cual, esperamos, se puedan estudiar fenómenos nuevos que permitan la mayor comprensión de la gravitación en cuatro dimensiones, especialmente a nivel cuántico. Sin perjuicio de lo anterior, uno puede intentar buscar un rol directo de la solución aquí encontrada en cuatro dimensiones. Unã

observación interesante al respecto es la siguiente: la métrica

$$ds^2 = - \left(-a^2 + \frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{-a^2 + \frac{r^2}{l^2}} + r^2 \cosh^2(az) d\phi^2 + r^2 dz^2 \quad (1)$$

resuelve las ecuaciones de Einstein en 3+1 dimensiones con constante cosmológica negativa. Claramente, la solución (1) representa un agujero negro en 2+1 de masa $a^2 \cosh^2(z)$ para cada valor de z . Esta métrica puede ser construida por el mismo procedimiento usado en la sección 3 del capítulo II, es decir, como una porción del cubrimiento universal de la superficie

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -l^2 \quad (2)$$

con identificaciones. Si la coordenada ϕ recorre el rango $-\infty < \phi < \infty$ entonces (1) representa el espacio de anti de Sitter en coordenadas de un observador acelerado. Pero, si identificamos ϕ con $\phi + 2k\pi$ se tiene una variedad distinta donde el horizonte $r = la$ esconde líneas tipo tiempo cerradas que ocurren en la región "detrás" de $r = 0$. La solución (1) es menos "fundamental" que la solución en 2+1 dimensiones porque, en ese caso, *todas* las soluciones de las ecuaciones de Einstein son obtenidas por identificaciones sobre el espacio de anti-de Sitter. El análisis detallado de las propiedades físicas de (1) podría revelar alguna conexión del agujero negro en 2+1 con el mundo cuatridimensional.

En otro contexto, la Gravitación Cuántica en tres dimensiones es un problema notablemente más simple que en cuatro dimensiones. Por otro lado, es sorprendente que el agujero negro en 2+1 tenga una estructura tan rica como la solución de Schwarzschild, tanto en sus propiedades geométricas como dinámicas. Esto sugiere que esta nueva solución podría dar respuesta a algunos de los problemas que aparecen en 3+1, como por ejemplo, en el proceso de radiación de Hawking.

Apéndice

A El grupo de Lorentz como un subgrupo del grupo de anti-de Sitter

El grupo de anti-de Sitter en \mathcal{D} dimensiones es isomorfo al grupo ortogonal en $\mathcal{D} + 1$ dimensiones $SO(\mathcal{D} - 1, 2)$.

Sea $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -l^{-2})$ ($A, B = 0, 1, \dots, \mathcal{D}$) la forma bilineal que define el grupo ortogonal en $\mathcal{D} + 1$ dimensiones y J_{AB} los generadores de ese grupo. El álgebra de Lie de los generadores J_{AB} es

$$[J_{AB}, J_{CD}] = -J_{AC}\eta_{BD} + J_{AD}\eta_{BC} + J_{BC}\eta_{AD} - J_{BD}\eta_{AC}. \quad (\text{A.1})$$

Los generadores J_{AB} pueden descomponerse en transformaciones de Lorentz en \mathcal{D} dimensiones (generadas por J_{ab} $a, b = 0, 1, \dots, \mathcal{D} - 1$) y “traslaciones” (generadas por $J_a \equiv J_{a\mathcal{D}}$). Las relaciones de conmutación del álgebra descompuesta define el álgebra de anti-de Sitter

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= l^{-2} J_{ab} \\ [J_{ab}, J_c] &= J_a \eta_{bc} - J_b \eta_{ac} \\ [J_{ab}, J_{cd}] &= J_{ac} \eta_{bd} - J_{ad} \eta_{bc} - J_{bc} \eta_{ad} + J_{bd} \eta_{ac}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde $\eta_{AB} = \text{diag}(\eta_{ab}, l^{-2})$.

Sea W^{AB} una 1-forma conexión para el grupo de anti-de Sitter y $D = d + J_{AB} W^{AB}$ la derivada covariante. La 2-forma curvatura se define como es usual

$$\tilde{R}^{AB} = dW^{AB} + W_C^A \wedge W^{CB}. \quad (\text{A.3})$$

La conexión W^{AB} se descompone en dos partes: rotaciones en \mathcal{D} dimensiones (w^{ab}) y “traslaciones” e^a en la forma

$$W^{AB} = \left(\begin{array}{c|c} w^{ab} & -e^a \\ \hline e^b & 0 \end{array} \right). \quad (\text{A.4})$$

En esta descomposición el tensor de curvatura es

$$\tilde{R}^{AB} = \left(\begin{array}{c|c} R^{ab} + l^{-2} e^a \wedge e^b & -T^a \\ \hline T^b & 0 \end{array} \right) \quad (\text{A.5})$$

donde $T^a \equiv de^a + w_b^a \wedge e^b$ es la 2-forma torsión. Notemos que e^a transforma como un vector bajo rotaciones generadas por J_{ab} , pero como conexión bajo las transformaciones generadas por J_a . En el texto hemos interpretado a w^{ab} como la conexión de spin, que se relaciona con los símbolos de Christoffel por un cambio de coordenadas,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda w_{\nu b}^a e_\mu^b + e_a^\lambda e_{\mu,\nu}^a \quad (\text{A.6})$$

en que e_μ^a es la matriz de cambio de base entre la base de coordenadas ∂_μ ($\partial_\mu \cdot \partial_\nu = g_{\mu\nu}$) y la base ortogonal e_a ($e_a \cdot e_b = \eta_{ab}$). La relación entre ambas métricas es por supuesto

$$e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

B Estructura hamiltoniana de la acción de Lovelock

La forma hamiltoniana de la acción (2.1) es analizada en [2]. Al igual que en el caso $\mathcal{D}=4$, las coordenadas canónicas son las componentes espaciales de la métrica g_{ij} , y sus momentos conjugados π^{ij} . Las componentes temporales $g_{0\mu}$ actúan como multiplicadores de Lagrange asociados a los generadores de difeomorfismos, $\mathcal{H}_\mu = (\mathcal{H}, \mathcal{H}_i)$. La acción (2.1) en forma hamiltoniana es

$$I = \int (\pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i) d^{p-1}x dt + B. \quad (\text{B.1})$$

Los momentos pueden ser relacionados con las velocidades por la fórmula,

$$\pi_j^i = -\frac{1}{4} \sqrt{g} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\alpha_p}{2p!} \frac{(\mathcal{D} - 2p)!}{2^p} \sum_{s=0}^{p-1} C_{s(p)} \delta_{[j_1 \dots j_{2p-1} j]}^{[i_1 \dots i_{2p-1} i]} \tilde{R}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \dots \tilde{R}_{i_{2s-1} i_{2s}}^{j_{2s-1} j_{2s}} K_{i_{2s+1}}^{j_{2s+1}} \dots K_{i_{2p-1}}^{j_{2p-1}} \quad (\text{B.2})$$

donde $C_{s(p)} = \frac{(-4)^{p-s}}{s! [2(p-s)-1]!!}$, y

$$\delta_{[j_1 \dots j_i]}^{[i_1 \dots i_i]} = \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \dots & \delta_{j_i}^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_i} & \dots & \delta_{j_i}^{i_i} \end{vmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

De esta relación no es posible encontrar las velocidades en función de los momenta puesto que es necesario invertir un polinomio. Debido a esto tampoco será posible expresar el hamiltoniano en términos de los momenta sino sólo como función de las velocidades.

El generador de reparametrizaciones tangenciales no depende de la forma de la acción

$$\mathcal{H}_i = -2\pi^l_{i/j}. \quad (\text{B.4})$$

Aquí / denota la derivada covariante en la métrica espacial g_{ij} , y $\pi^i_{j/i} = \pi^i_{j,i} - \Gamma^k_{ji} \pi^i_k$.

El generador de reparametrizaciones normales es

$$\mathcal{H} = -\sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D} - 2p)!}{2^p} \alpha_p \delta_{[j_1 \dots j_{2p}]^{[i_1 \dots i_{2p}]} \tilde{R}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \tilde{R}_{i_3 i_4}^{j_3 j_4} \dots \tilde{R}_{i_{2p-1} i_{2p}}^{j_{2p-1} j_{2p}}, \quad (\text{B.5})$$

donde \tilde{R}_{kl}^{ij} son las componentes espaciales del tensor de curvatura espacio-temporal. \tilde{R}_{kl}^{ij} depende de las velocidades a través de la ecuación de Gauss-Codazzi

$$\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk}. \quad (\text{B.6})$$

donde K_{ij} son las componentes de la curvatura extrínseca

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (-\dot{g}_{ij} + N_{i/j} + N_{j/i}) \quad (\text{B.7})$$

Para una métrica estática y esféricamente simétrica la curvatura extrínseca es cero, y por lo tanto, $\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl}$. Las componentes no nulas del tensor de curvatura para una métrica con esta simetría son

$$\begin{aligned} R_{\phi_1 \phi_2}^{\theta_1 \theta_2} &= \frac{f(r)}{r^2} \delta_{[\phi_1 \phi_2]}^{[\theta_1 \theta_2]} \\ R_{r\phi}^{r\theta} &= \frac{f'(r)}{2r} \delta_{\phi}^{\theta} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde los índices θ, ϕ se refieren a las proyecciones angulares y $f(r) \equiv 1 - g^2(r)$.

El generador \mathcal{H} es calculado por sustitución directa de (B.8) en (B.5) y se obtiene

$$\mathcal{H} = -(\mathcal{D} - 2)! \sqrt{\gamma} g^{-1} \frac{d}{dr} \left[r^{\mathcal{D}-1} \sum \alpha_p (\mathcal{D} - 2p) \left(\frac{1 - g^2}{r^2} \right)^p \right], \quad (\text{B.9})$$

donde $\gamma =: \det g_{\theta\phi}$. Reemplazando aquí la elección (2.3) para los coeficientes α_p se obtiene la expresión (3.3) para la función $F[r, g(r)]$. El generador tangencial \mathcal{H}_i es idénticamente cero para una métrica con la simetría aquí considerada.

C Estructura hamiltoniana del campo electromagnético sobre un fondo curvo

En este apéndice describiremos brevemente el paso de la acción lagrangiana a la acción hamiltoniana del campo electromagnético en dimensión arbitraria en un fondo curvo descrito por una métrica dada. También se describe aquí la reducción de la acción para un campo Coulombiano.

C.1 Acción lagrangiana y hamiltoniana

El punto de partida es el lagrangiano para un campo de gauge abeliano $A = A_\mu dx^\mu$ sobre una variedad de dimensión \mathcal{D} con métrica $\tilde{g} = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{4\alpha} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\rho\lambda} F_{\mu\rho} F_{\nu\lambda} \quad (\text{C.1})$$

donde la constante α es usualmente escogida igual al área de la $\mathcal{D}-2$ esfera $\Omega_{\mathcal{D}-2} \equiv \int d\Omega^2$ y la curvatura $F_{\mu\nu}$ está definida por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{C.2})$$

Para simplificar el análisis, consideraremos una métrica de la forma

$$ds^2 = -(N^\perp)^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (\text{C.3})$$

(El caso general $\tilde{g}_{0\mu} \neq 0$, es fácilmente deducido del resultado final.) Realizando la descomposición *tiempo + espacio* de los campos (ecuación (C.3) y $A = \varphi dt + A_i dx^i$) se obtiene la siguiente expresión para el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{g^{1/2}}{2\alpha N^\perp} g^{ij} (\dot{A}_i \dot{A}_j - 2\dot{A}_i \varphi_{,j} + \varphi_{,i} \varphi_{,j}) - \frac{N^\perp g^{1/2}}{4\alpha} F^{ij} F_{ij} \quad (\text{C.4})$$

donde $g^{1/2} \equiv [\det(g_{ij})]^{1/2}$. Una propiedad importante de este sistema es que $\dot{\varphi}$ no aparece en el lagrangiano. Esto hace que la ecuación de movimiento asociada a φ no es

de segundo orden, produciendo una disminución en el número de grados de libertad del sistema. El método de Dirac[48,49,50] es la manera correcta y más general de definir una estructura canónica para un sistema de este tipo. Sin embargo, en el caso de la electrodinámica -y también en gravitación y Yang-Mills en general- es posible llegar al resultado correcto sin necesidad de introducir los vínculos primarios que surgen al definir un momento conjugado para φ que utiliza el método de Dirac.

Definimos el momento conjugado a A_i ,

$$\begin{aligned} P^i &= \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \dot{A}_i} \\ &= \frac{g^{1/2}}{\alpha N^\perp} (\dot{A}_i - \varphi_{,i}) g^{ij} \end{aligned} \quad (C.5)$$

De esta expresión se despeja la velocidad

$$\dot{A}_i = \alpha N^\perp g^{-1/2} P_i + \varphi_{,i}. \quad (C.6)$$

El hamiltoniano se define de la forma usual, después de un poco de álgebra se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EM} &\equiv P^i \dot{A}_i - \mathcal{L}_{EM} \\ &= \frac{1}{2} N^\perp \left(\alpha g^{-1/2} P^i P_i + \frac{g^{1/2}}{2\alpha} F^{ij} F_{ij} \right) - \varphi P^i_{,i} + (\varphi P^i)_{,i}. \end{aligned} \quad (C.7)$$

(En $\mathcal{D}=4$ se define el campo magnético por $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k$ donde B^k es una densidad vectorial y $F^{ij} F_{ij} = 2B^i B_i$. En dimensiones mayores no es posible definir una densidad vectorial a partir de F_{ij} .)

La acción hamiltoniana entonces se puede escribir en la forma

$$I_{EM} = \int dt \int d^{p-1}x \left[P^i \dot{A}_i - \frac{1}{2} N^\perp \left(\alpha g^{-1/2} P^i P_i + \frac{g^{1/2}}{2\alpha} F^{ij} F_{ij} \right) + \varphi P^i_{,i} \right] + B_{EM} \quad (C.8)$$

donde B_{EM} es un término de superficie que depende de las condiciones de borde. Notemos que hemos llegado a la acción hamiltoniana correcta sin haber encontrado ningún vínculo. Esto se debe a que no definimos un momento conjugado para φ y luego nunca apareció el vínculo primario $p_\varphi = 0$.

Variando con respecto de φ se obtiene la ley de Gauss

$$P^i{}_{;i} = 0 \quad (\text{C.9})$$

que es el generador de transformaciones de gauge para el campo A_i . La variación con respecto de P^i y A_i entrega las ecuaciones dinámicas de movimiento,

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \alpha N^\perp g^{-1/2} P_i + \varphi_{;i} \\ \dot{P}^i &= -\frac{N^\perp}{\alpha} g^{1/2} F^{ij}{}_{;j}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

C.2 Acción reducida para campos estáticos de simetría esférica

En esta sección encontraremos la forma de la acción para el caso particular de campos estáticos y esféricamente simétricos. Probaremos además que las ecuaciones de movimiento de la acción reducida son consistentes con las ecuaciones originales.

En un minisuperespacio de campos estáticos y de simetría esférica, la métrica toma la forma (3.1) y el campo electromagnético se reduce al campo de Coulomb

$$\begin{aligned} F_{ij} &= 0 && \text{(no hay campo magnético)} \\ P^i &= (0, P^r, 0, \dots, 0) && \text{(campo radial)} \\ \dot{A}_i &= 0 = \dot{P}^i && \text{(campo estático)} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

La condición $F_{ij} = 0$ significa que A_i es puro gauge $A_i = \partial_i \Lambda$. Por simplicidad, aquí escogeremos $\Lambda = 0$.

Estamos interesados en soluciones con simetría esférica, luego es conveniente integrar sobre las coordenadas angulares. El momentum P^r es una densidad, definimos el nuevo

momentum P por

$$P^r = r^{\mathcal{D}-2} \frac{\gamma^{1/2}}{\Omega_{\mathcal{D}-2}} P \quad (\text{C.12})$$

donde γ es la parte puramente angular del determinante de la métrica $g^{1/2} = g_{rr}^{1/2} r^{\mathcal{D}-2} \gamma^{1/2}$. Notemos que P aún transforma como densidad ante reparametrizaciones de la coordenada radial.

Reemplazando (C.12) en (C.8) y escogiendo $\alpha = \Omega_{\mathcal{D}-2}$ se obtiene la acción reducida

$$I_{EM}^{red.} = (t_2 - t_1) \int dr \left[-\frac{1}{2} N r^{\mathcal{D}-2} P^2 + \varphi (r^{\mathcal{D}-2} P)' \right]. \quad (\text{C.13})$$

donde $N = N^\perp g_{rr}^{1/2}$.

Las ecuaciones de movimiento que siguen de esta acción son

$$(r^{\mathcal{D}-2} P)' = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$NP + \varphi' = 0. \quad (\text{C.15})$$

Es directo verificar que si se reemplaza el ansatz estático y esféricamente simétrico (C.11) directamente en las ecuaciones (C.10) y se usa (C.12) se obtienen las ecuaciones (C.15) más la condición subsidiaria $\dot{P}^r = 0$. Esta última ecuación asegura que la carga eléctrica es una constante de movimiento. Esta cantidad conservada no puede obtenerse de la acción reducida puesto que hemos suprimido toda dependencia temporal desde el principio. La ventaja de considerar la acción reducida es la facilidad para resolver las ecuaciones y encontrar los términos de borde en la acción. Las soluciones del problema reducido escritas en términos de las constantes de integración deben reemplazarse en las ecuaciones originales. Uno espera -como efectivamente ocurre- que las ecuaciones no reducidas impliquen la conservación en el tiempo de las constantes de integración.

D Acción Euclídea

En este apéndice se estudia la transición de la acción de Minkowski a la acción Euclídea usada en el análisis termodinámico de los agujeros negros.

La acción Euclídea (I_E) se define por

$$e^{iI} = e^{-I_E}. \quad (\text{D.1})$$

Para ilustrar las ideas tomaremos como ejemplo la acción de una partícula no relativista

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right] \quad (\text{D.2})$$

donde se varía con respecto a q . La forma hamiltoniana de esta acción es

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[p\dot{q} - \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \right], \quad (\text{D.3})$$

donde se varía p y q .

La continuación Euclídea de (D.2) se hace definiendo un tiempo imaginario $\tau = it$. Reemplazando en (D.2) y usando (D.1) se obtiene para la acción Euclídea lagrangiana

$$\begin{aligned} I_E &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L_E \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V(q) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

De aquí podemos calcular la acción Euclídea hamiltoniana haciendo una transformación de Legendre, se obtiene

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[p_E \dot{q} - \left(\frac{p_E^2}{2m} - V(q) \right) \right], \quad (\text{D.5})$$

donde el momentum Euclídeo se define por

$$p_E = \frac{\partial L_E}{\partial \frac{dq}{d\tau}}. \quad (\text{D.6})$$

Comparando (D.3) con (D.5) se ve que la continuación Euclídea de la acción hamiltoniana se obtiene mediante las continuaciones del tiempo y los momentos

$$\tau = it, \quad p_E = -ip. \quad (\text{D.7})$$

En las aplicaciones termodinámicas de los métodos Euclídeos, lo que se requiere calcular es la acción Euclídea evaluada en los valores físicos (de signatura hiperbólica) de las coordenadas canónicas. La acción hamiltoniana Euclídea evaluada en estos valores es

$$I_E = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-ip\dot{q} + \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \right], \quad (\text{D.8})$$

y, en particular, sobre una configuración estática -lo cual es necesario para poder tener equilibrio termodinámico- se encuentra

$$\begin{aligned} I_E &= (\tau_2 - \tau_1) \left(\frac{p^2}{2m} + V(q) \right) \\ &= \beta U \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

donde $\beta = (\tau_2 - \tau_1)$ es el tiempo Euclídeo y $U = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ la energía. El valor de I_E puede interpretarse como la energía interna multiplicada por el inverso de la temperatura. En efecto, en la continuación compleja de la integral funcional[51] se prueba que, en primera aproximación, el valor de la acción Euclídea es igual a la energía libre dividida por la temperatura y la temperatura es igual al inverso del tiempo Euclídeo. Entonces, (D.9) representa un sistema termodinámico ordenado, de entropía cero. En las aplicaciones a teoría de campos, como por ejemplo el agujero negro, la acción Euclídea da origen a un término extra: la entropía.

E Unidades geometrizadas

En este trabajo se ha usado el sistema de unidades "geometrizado" en el cual, en cuatro dimensiones, todas las cantidades, masa, tiempo y distancia se miden en unidades de longitud. Esto se logra poniendo la constante de Newton ($G = 6.673 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{gr \cdot seg^2}$) y la velocidad de la luz ($c = 2.997 \cdot 10^{10} \frac{cm}{seg}$) iguales a 1, y, por lo tanto

$$1seg = 2.997 \cdot 10^{10} cm$$

$$1gr = 7.429 \cdot 10^{-29} cm$$

El objetivo de este apéndice es estudiar el sistema geometrizado en otras dimensiones.

En cuatro dimensiones la constante de Newton es única e inversamente proporcional a la constante de acoplamiento que multiplica a la acción de Hilbert. Pero en dimensiones mayores, como se menciona en el capítulo III, existen n constantes con dimensiones en la acción. Sin embargo, como nosotros hemos escogido los coeficientes de la acción de Lovelock de modo que sólo uno es independiente (salvo la constante cosmológica que también está presente en 4 dimensiones), podemos esperar que se pueda definir una constante de Newton en ese caso particular.

Estudiemos primero el caso de la extensión dimensional usual basada en la acción de Hilbert. La acción es

$$I = \frac{c^4}{\alpha G} \int \sqrt{-g} R d^D x \quad (E.1)$$

donde α es un parámetro sin dimensiones que usualmente se escoge igual a 16π . R es el escalar de Ricci que tiene dimensiones $distancia^{-2}$. Para que I tenga dimensiones de acción, la constante de Newton tiene dimensiones⁷

⁷En todo este apéndice [x] quiere decir las dimensiones de x.

$$[G] = \frac{cm^{D-1}}{grs \cdot seg^2}. \quad (E.2)$$

Esto está en concordancia con la solución de Schwarzschild en D dimensiones en que g_{00} está dado por

$$g_{00} = 1 - \frac{2mG}{r^{D-3}c^2} \quad (E.3)$$

donde m tiene dimensiones de masa y g_{00} es adimensional. En el sistema geometrizado entonces, la masa es medida en una potencia de unidades de longitud,

$$[masa] = [longitud]^{D-3}. \quad (E.4)$$

En tres dimensiones, en particular, la masa geometrizada no tiene unidades. (Esto genera la necesidad de introducir la constante cosmológica en $D=3$ para tener una escala de distancias.)

El sistema geometrizado aquí descrito es adecuado sólo para la continuación dimensional en base a la acción de Hilbert. En efecto, en nuestro caso, de la forma que se obtuvo para la métrica (ecuaciones (3.8) en dimensiones pares y (3.9) en dimensiones impares), uno espera que en el sistema geometrizado, la masa tenga unidades de longitud para *todas* las dimensiones pares y no tenga unidades en *todas* las dimensiones impares. Esto en efecto es así y se debe a que la acción ahora no es (E.1) y como consecuencia, la constante de Newton tiene otras dimensiones.

Consideremos, por simplicidad, el caso sin constante cosmológica ($l \rightarrow \infty$). La acción está dada en las ecuaciones (2.5) y (2.9). En dimensiones pares se tiene

$$I_{D=2n} \approx \frac{c^4}{\alpha G} \int \sqrt{-g} R^{D/2-1} d^D x \quad (E.5)$$

y por lo tanto, para que I tenga dimensiones de acción, la constante G debe tener dimensiones

$$[G] = \frac{cm^3}{gr \cdot seg^2}. \quad (E.6)$$

Es claro que en el sistema geometrizado ($G = 1$ y $c = 1$), la masa tiene unidades de longitud para todas las dimensiones pares.

En dimensiones impares la acción es

$$I_{D=2n-1} \approx \frac{c^4}{\alpha G} \int \sqrt{-g} R^{(D-1)/2} d^D x \quad (E.7)$$

y la constante G debe tener unidades

$$[G] = \frac{cm^2}{gr \cdot seg^2}. \quad (E.8)$$

Luego, en todas las dimensiones impares la masa no tiene unidades en el sistema geometrizado.

El análisis recién expuesto muestra que la teoría de Lovelock no puede tener un límite Newtoniano. En efecto, uno esperaría que para curvaturas bajas las ecuaciones de Einstein se reduzcan a las ecuaciones de Newton

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \rho, \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -\vec{\nabla} \Phi \end{aligned}$$

donde ρ es la densidad de masa y G la constante de Newton. Pero esta ecuación implica que las dimensiones de G deben ser las dadas por (E.2). La continuación dimensional de la gravitación basada en la acción de Hilbert tiene el límite Newtoniano correcto, pero no así la acción de Lovelock.

Referencias

- [1] D.Lovelock, *J. of Math. Phys.* **12**, 498 (1971).
- [2] C. Teitelboim and J. Zanelli, *Class. & Quant. Grav.* **4**, L125 (1987) y en *Constraint Theory and Relativistic Dynamics*, editado por G. Longhi and L. Lusana, (World Scientific, Singapore, 1987).
- [3] M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev. A* **36**, 4417 (1987).
- [4] S. Giddings, J. Abbott and K. Kuchar, *General Rel. and Grav.* **16**, 751 (1984).
- [5] S. Deser, R. Jackiw and G.'t Hooft, *Ann. Phys. (NY)* **152**, 220 (1984).
- [6] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys.* **140**, 372 (1982); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 975 (1982).
- [7] J.D. Brown, *Lower Dimensional Gravity*, PhD. Thesis (University of Texas at Austin, 1985.) Publicado como libro bajo el mismo título (World Scientific, Singapore, 1988).
- [8] J.D. Brown and M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **104**, 207 (1986).
- [9] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **311**, 46 (1988).
- [10] C. Teitelboim, *Phys. Lett. B*, **126**, 41 (1983); *Quantum Theory of Gravity*, edited by S. Christensen (Adam Hilger, Bristol, 1984); R. Jackiw, el mismo volumen anterior y *Nucl. Phys. B* **252**, 343 (1985).
- [11] C. Callan, D. Friedan, E. Martinec and M. Perry, *Nucl. Phys.* **B262**, 593 (1985).
- [12] G. Horowitz and D.L. Welch, NSF-ITP-93-21 preprint.
- [13] J. Horne and G. Horowitz, *Nucl. Phys.* **B368**, 444 (1992).
- [14] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Comm. Math. Phys.* **98**, 391 (1985).
- [15] S. W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [16] J. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).

- [17] S. B. Giddings, UCSBTH-92-09, preprint.
- [18] C.F.E. Holzhey and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B380**, 447 (1992).
- [19] G.W.Gibbons and S.W.Hawking, *Phys.Rev.* **D15**, 2752 (1977).
- [20] J.D. Brown, G.L. Comer, E.A. Martínez, J. Melmed, B.F. Whitting and J.W. York, *Class. Quant. Grav.* **7**, 1433 (1990).
- [21] R.C. Meyers and M.J. Perry, *Ann. Phys. (N.Y.)* **172**, 304 (1986).
- [22] F.R. Tangherline, *Nuov. Cimento*, **77**, 631 (1963).
- [23] J.D. Brown, M. Henneaux and C. Teitelboim, *Phys. Rev. D* **36**, 319 (1986).
- [24] E. Witten, *Phys. Rev. D* **44**, 314 (1991).
- [25] C.G. Callan, S.B. Giddings, J.A. Harvey and A. Strominger, *Phys. Rev. D* **45**, R1005 (1992). T. Banks, A. Dabholkar, M.R. Douglas and M. O'Loughlin, *Phys. Rev. D* **45**, 3607 (1992). B. Birnir, S.B. Giddings, J.A. Harvey and A. Strominger, *Phys. Rev. D* **46**, 638 (1992). S.W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 406 (1992).
- [26] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
- [27] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, *Nucl. Phys. B* **122**, 61 (1977).
- [28] S. Deser and R. Jackiw, *Ann. Phys. (NY)* **153**, 405 (1984)
- [29] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli (1993). IAS-CECS preprint, por aparecer en *Phys. Rev. D*.
- [30] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-time*, (Cambridge University Press 1973).
- [31] B. Carter, *Phys. Lett.*, **21**, 423 (1966).
- [32] S. Hojman and L.F. Urrutia, *J. Math. Phys.* **22**, 1896 (1981); L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988).

- [33] D. Cangemi, M. Leblanc and R.B. Mann, CTP# 2162-WATPHYS-TH92/09 preprint.
- [34] D.G. Boulware and S. Deser, *Phys. Rev. Lett* **55**, 2656 (1985).
- [35] J.T. Wheeler, *Nucl.Phys.* **B268**, 737 (1986); **B273**, 732 (1986).
- [36] B. Whitt, *Phys. Rev. D* **D38**, 3001 (1988).
- [37] R.C. Myers and J. Simon, *Phys. Rev. D* **38**, 2434 (1988).
- [38] D.L. Wiltshire, *Phys. Rev. D* **38**, 2445 (1988).
- [39] S.W. Mac Dowell and F.Mansouri, *Phys.Rev.Lett.* **38**, 739 (1977).
- [40] A. Mardones and J. Zanelli *Class. Quant. Grav.* **8**, 1545(1991).
- [41] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, in *J.J.Giambiagi Festschrift*, H. Falomir, R.E. Gamboa, P.Leal and F.A. Schaposnik, eds. (World Scientific, Singapore, 1991.)
- [42] T. Regge, *Phys.Rep.* **137**,31 (1986).
- [43] S. Weinberg, in *Physics in Higher Dimensions*, Jerusalem Winter School for Theoretical Physics 1984-1985, T.Piran and S.Weinberg, eds. (World Scientific, Singapore, 1986).
- [44] T. Regge and C. Teitelboim, *Ann.Phys. (N.Y.)* **88**, 286 (1974).
- [45] J.D. Brown, E.A. Martínez and J.W. York, *Phys. Rev. Lett* **66**, 2281 (1991).
- [46] E. Witten, *Commun. Math. Phys.*, **80**, 397 (1981).
- [47] C. Teitelboim, *Phys. Rev. D* **29**, 2763 (1984). S. Deser and C. Teitelboim, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 249 (1977).
- [48] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Ney York, Yeshiva University, 1964).
- [49] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976).

- [50] M. Henneaux and C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems (Princeton University Press, 1992)
- [51] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (New York, McGraw-Hill, 1965).