

VCH-FC  
DOC-M  
C873  
C.1

ACERCA DEL FENOMENO DE RESONANCIA EN PROBLEMAS CON  
BARRERAS DE POTENCIAL

Tesis  
Entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas

Facultad de Ciencias

por  
Pablo Javier Covian Zor

Enero 2000

Director de Tesis: Dr. Claudio Fernández Jaña

**FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE**

**INFORME DE APROBACION  
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

**PABLO COVIAN ZOR**

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 28 de Diciembre de 1999.

Director de Tesis

Dr. Claudio Fernández J.



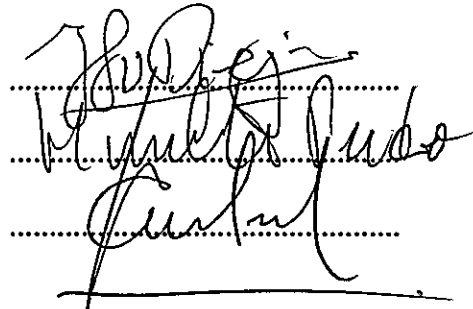
.....

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Jan Felipe van Diejen

Dr. Humberto Prado

Dr. Víctor Cortés



.....

## CONTENIDOS

RESUMEN .....	1
CAPITULO 1	
INTRODUCCION .....	2
CAPITULO 2	
PRELIMINARES .....	8
2.1 Definiciones básicas .....	8
2.2 Evolución en el tiempo .....	11
2.3 Decaimiento exponencial .....	12
2.4 Frecuencias dispersivas .....	13
2.5 Barreras de potencial .....	19
CAPITULO 3	
LA RESOLVENTE SALIENTE EN LA SEMIRECTA .....	21
3.1 Convergencia de la resolvente saliente .....	21
3.2 Decaimiento casi-exponencial .....	33
CAPITULO 4	
LA RESOLVENTE SALIENTE EN $\mathbb{R}^3$ .....	38
4.1 Convergencia de la resolvente saliente en $\mathbb{R}^3$ .....	38
4.2 Decaimiento casi-exponencial .....	47
CAPITULO 5	
CONVERGENCIA DE LA MEDIDA ESPECTRAL .....	52
5.1 Resolvente para $H_n$ .....	55
5.2 Medida espectral para $H_n$ .....	62
5.3 Barreras de potencial de altura infinita .....	69
BIBLIOGRAFIA .....	78

## Agradecimientos

Quiero manifestar mis agradecimientos a todos los que de una u otra forma contribuyeron a la realización de este trabajo. Principalmente, a mi profesor guía, Dr. Claudio Fernández J., quien no solo planteó los problemas de esta tesis, sino que además contribuyó de manera fundamental al desarrollo de los mismos.

A la Comisión, por todos sus valiosos comentarios y sugerencias.

Quisiera también agradecer a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile por haberme dado la oportunidad de seguir mis estudios de doctorado. Muy especialmente al Sr. Rolando Pomareda, director del programa de postgrado de Matemáticas, por su constante y comprometida actitud.

Agradezco también a la Sra. Virginia Cárdenas, secretaria de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, a la Sra. Amalia Becerra del Departamento de Matemáticas de la Universidad Federico Santa María y a la Sra. Virginia Farías del Departamento de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, por la escritura de esta tesis.

Finalmente, a todos aquellos que están muy cerca mío, a mamá y Marisol, de quienes siempre he recibido apoyo incondicional.

## NOTACIONES

$\Delta = \sum_{i=2}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  : operador de Laplace.

$E_\lambda$  : medida espectral de un operador autoadjunto  $H$ , o sea,  $E_\lambda = \chi_{(-\infty, \lambda]}(H)$ .

$E_I = \chi_I(H)$ .

$\chi_I$  : indicatriz de un conjunto  $I$

$\mathcal{H}^k(\Omega)$  : espacio de Sobolev de todas las  $\varphi \in L^2(\Omega)$  tal que  $\varphi$  tiene derivadas hasta el orden  $k$  en  $L^2(\Omega)$ .

$\mathcal{H}_0^k(\Omega)$  espacio de Sobolev que se obtiene completando  $C_0^\infty(\Omega)$  con la norma de  $\mathcal{H}^k(\Omega)$ .

$\mathbb{C}$  : cuerpo de números complejos

$B(a, r)$  : bola abierta de centro  $a$  y radio  $r$  en  $\mathbb{R}^n$ .

$\sigma(H)$  : espectro del operador  $H$ .

$\mathbb{E}_p$  : esperanza según el estado  $p$ .

$\langle \varphi, (H - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle : \lim_{\delta \rightarrow 0} \langle \varphi, (H - \delta - i \cdot \delta)^{-1} \varphi \rangle$

$W$  : Wronskiano.

# RESUMEN

En este trabajo usaremos una caracterización de R. Lavine acerca del fenómeno de resonancia en Mecánica Cuántica. Según éste, un vector unitario  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  es un estado resonante cuanto está localizado en posición y tiene tiempo de vida grande.

El objetivo principal es el estudio de estados resonantes para barreras de potencial en dimensiones  $n = 1$  y  $n = 3$ . Más explícitamente, consideramos una sucesión de barreras de potencial de altura fija y de ancho creciendo a infinito. El operador límite tiene entonces vectores propios y nosotros demostramos que estos vectores propios son resonancias para los operadores  $H_n$ .

Para la semirecta, redemostramos además este resultado. Haciendo un cambio en la escala de tiempo. Explícitamente, obtenemos que la medida espectral asociada a la barrera de ancho  $n$ , converge a la medida lorentziana, lo cual también muestra el comportamiento casi exponencial deseado.

## SUMMARY

In this thesis we use R. Lavine's characterization of resonance phenomena in quantum mechanics. According to Lavine, a unitary vector  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  is a resonant state when it has a long sojourn time and is localized in position.

Our main aim is the study of resonant states for potential barriers in dimensions  $n = 1$  and  $n = 3$ . More specifically, we will consider a sequence of potential barriers with the same height but whose width  $m$  grows to infinity. The limit operator has eigenvectors which we prove to be resonant states for the operators  $H_m$ .

Regarding the half-line, we will reprove this result making a change in the time scale. Explicitly, we obtain that the spectral measure which is associated to the barrier with width  $m$  converges to the Lorentz measure, and we establish an almost exponential behavior.

# Capítulo 1

## Introducción

Una clara concepción matemática del fenómeno de resonancia en Mecánica Cuántica, la cual esté basada en principios físicos relevantes, aún no ha sido posible de manera definitiva. Existen distintas aproximaciones y una extensa literatura al respecto. Podemos mencionar por ejemplo, la caracterización que usa una extensión analítica de la resolvente del hamiltoniano, la posibilidad de encontrar resonancias vía concentración espectral o bien, el establecimiento de la relación entre resonancias y decaimiento temporal, haciendo un cambio en la escala del tiempo.

Un artículo resumen de distintas aproximaciones a resonancias puede ser encontrado en [20]. Mencionamos además, el texto [15] donde también es tratado este tema en forma general.

En general, el hamiltoniano de un sistema cuántico es matemáticamente un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert adecuado. El fenómeno de resonancias ocurre cuando este operador es absolutamente continuo pero, en algún sentido, posee "casi" vectores propios. La existencia de un vector propio se traduce en un estado estacionario, con un tiempo de vida infinito, mientras que la presencia de resonancias se traduce en estados que viven una cantidad de tiempo muy grande.

En este trabajo, consideramos el tipo usual de hamiltonianos, vale decir, perturbaciones del Laplaciano de la forma  $H = -\Delta + V(x)$ , donde el potencial  $V(x)$ , que actúa como operador de multiplicación, es una función real, definida para  $x \in \mathbb{R}^n$ . Para  $V(x)$  adecuado (ver [Reed & Simon]), el operador  $H$ , actuando en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  es autoadjunto y, por ende, su espectro es real y su resolvente  $(H - z)^{-1}$ , mirada como función de  $z$ , con valores en el álgebra de los operadores acotados en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , es



analítica en los semiplanos superior e inferior.

Bajo la hipótesis de decaimiento exponencial del potencial  $V$ , existe una extensión analítica de la resolvente del Hamiltoniano, desde el semiplano superior hasta el semiplano inferior del plano complejo a través del espectro de  $H$ , con posibles polos en este último. Si existe un tal polo, digamos  $z = \lambda_0 - i\epsilon$ , entonces existirá una solución saliente de la ecuación diferencial

$$H\psi = (-\Delta + V)\psi = (\lambda_0 - i\epsilon)^2\psi,$$

es decir, una solución que tenga el comportamiento asintótico,  $\psi(x) \sim c e^{i(\lambda_0 - i\epsilon)|x|}$ , cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , en el caso en que la dimensión espacial es  $n = 1$ .

Es claro que tal  $\psi$  no es de cuadrado integrable y, de hecho, pertenece al espacio de las funciones con crecimiento exponencial en infinito. Sin embargo, se espera que la presencia de un tal polo conlleve a la existencia de un estado resonante, es decir, un vector propio  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  para el cual la probabilidad de que el sistema, después de un tiempo  $t$ , esté en su estado inicial, o sea,

$$|\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle|^2 = \left| \int e^{-i\lambda t} \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, E_\lambda \varphi \rangle \right|^2,$$

tenga un comportamiento exponencial del tipo  $e^{-2\epsilon t}$ , para un intervalo grande de tiempo y algún  $\epsilon$  pequeño. Más aún,  $\varphi$  debe estar "cercano" al vector  $\psi$ , en algún sentido. Cuando  $\varphi$  es un vector propio del operador  $H$ , dicha probabilidad es uno para todo tiempo  $t$ , lo que indica que  $\varphi$  es una solución estacionaria.

Estos argumentos, como así también otros similares que involucran deformación espectral, son uno de tantos métodos para exponer el fenómeno de concentración espectral para el operador autoadjunto  $H$  (ver [18]).

El punto de vista que adoptamos aquí, consiste en el hecho que la aparición de una resonancia en un modelo dinámico en Mecánica Cuántica, no es sólo una revelación del fenómeno de concentración espectral para el Hamiltoniano  $H$ , sino que, igualmente importante, es el establecer la "localización espacio-tiempo" del objeto resonante (ver [21]).

También, ha habido intentos en comprender el fenómeno tipo concentración espectral en términos directos de la dinámica. Típicamente, la situación es tal que el Hamiltoniano no perturbado  $H_0$  tiene un valor propio simple  $E_0$  con vector propio  $\varphi$  y, como consecuencia de una perturbación  $V_\lambda$  ( $\lambda$  parámetro real), éste desaparece en el espectro continuo de  $H_\lambda = H + V_\lambda$ . Además,  $H_\lambda \rightarrow H_0$  cuando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  ( $\lambda_0$

podría ser infinito) en un sentido adecuado. Luego, se estima la conducta asintótica de la probabilidad de encontrar el vector propio evolucionado en el mismo estado después de un largo tiempo, es decir, la conducta de  $\langle \varphi, e^{-iH_\lambda t} \varphi \rangle$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ .

Asociado a esta situación, es posible, en algunos casos, construir una función de energía  $E_\lambda$  y una función de reordenamiento del tiempo  $\Gamma(\lambda)$ , con  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \Gamma(\lambda) = 0$ , tal que,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} |\langle \varphi, e^{-i(H_\lambda - E_\lambda) \frac{T}{\Gamma(\lambda)}} \varphi \rangle|^2 = e^{-T} \quad (1.1)$$

donde el límite es tomado cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\lambda \rightarrow \lambda_0$  de tal manera que  $T = \Gamma(\lambda)t$  es mantenido constante.

Otros resultados relevantes en resonancias, concentración espectral y decaimiento exponencial aparecen en [16], [17], [29], [32]. Métodos numéricos para estudiar resonancias se encuentran en [13].

Estas ideas han sido desarrolladas en detalle por Emch y Sinha [8], en problemas con barreras de potenciales. La situación por ellos abordada es diferente a la que consideramos en este trabajo y consiste de una barrera de ancho fijo y de altura creciendo a infinito. Específicamente, estos autores consideran  $V_n(x) = n\chi_{[\pi, \pi+a]}(x)$  y  $H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$ , actuando en  $L^2([0, \infty))$ , con condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ . Cuando  $n$  converge a infinito, el operador  $H_n$  converge, en el sentido fuerte de la resolvente, al operador  $H_\infty \equiv H_I \oplus H_E$ , donde  $H_I$  es el laplaciano  $-\frac{d^2}{dx^2}$  en el interior de la barrera  $[0, \pi]$ , con condiciones de Dirichlet  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$  y  $H_E$  es también  $-\frac{d^2}{dx^2}$ , pero actuando en el exterior  $[\pi + a, \infty)$  con condición  $\varphi(\pi + a) = 0$ . El operador  $H_\infty$  tiene valores propios, por ejemplo, cualquier función de la forma  $\varphi(x) = \sin kx$  es un vector propio, pero, para cada entero positivo  $n$ , el operador  $H_n$  es absolutamente continuo. Esta es precisamente la situación recién descrita y, de hecho, en [8], se establece la relación (1.1).

Aquí también estudiaremos hamiltonianos que involucran barreras de potencial, pero nos interesa el caso en que la altura de la barrera se mantiene fija mientras su ancho crece a infinito. Tal barrera puede ser descrita por una función real  $V_n(x)$  que sea no negativa, acotada, de soporte compacto y que verifique  $V_n(x) = 0$ , para  $0 \leq x \leq a$  y  $V_n(x) \geq h$ ,  $h > 0$  para  $x$  en un intervalo de largo  $n$ . Supondremos que, cuando  $n$  converge a infinito, el potencial  $V_n(x)$  tiende a una función  $V_\infty(x)$ , donde  $V_\infty(x) \geq h$ , para  $x$  en un intervalo de la forma  $[b, \infty)$ . Por ejemplo, podemos

tomar  $V_n(x) = h \chi_{[a, a+n]}(x)$  y  $V_\infty(x) = h\chi_{[a, \infty)}(x)$ , donde  $\chi_I$  denota la función característica de un conjunto  $I$ .

Es fácil verificar que los operadores  $H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$  y  $H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\infty(x)$ , actuando en  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , son autoadjuntos, donde estamos considerando la condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ . Específicamente, estamos considerando como dominio de  $H_n$  y  $H_\infty$  el espacio  $H^2(\mathbb{R}^+) \cap H_0^1(\mathbb{R}^+)$ .

Aún cuando podemos demostrar que cuando  $n$  tiende a infinito,  $H_n$  converge a  $H_\infty$  en el sentido fuerte de la resolvente, cada operador  $H_n$  es absolutamente continuo, mientras  $H_\infty$  tiene valores propios. Estamos entonces en la situación donde se espera que se manifieste el fenómeno de resonancia, en el sentido de establecer la existencia de estados para los cuales haya un decaimiento exponencial aproximado.

Por otra parte, la existencia de resonancias y su relación con el decaimiento exponencial para el caso de hamiltonianos de la forma  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , en la semirecta y con la condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ , ha sido estudiada por varios autores. Por ejemplo, usando la idea de extender analíticamente la resolvente del operador  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , R. Lavine [22] demuestra que ciertas soluciones resonantes presentan un decaimiento casi exponencial en el tiempo. Explícitamente, cuando  $V(x)$  es una función acotada, positiva y con soporte compacto, entonces una solución truncada y normalizada en  $L^2([0, R])$  de la ecuación diferencial  $H\varphi = z\varphi$ , donde  $z = \lambda_0 - i\epsilon$  es un polo de la continuación analítica de la resolvente, verifica,

$$|\langle \psi, e^{-iHz}\psi \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t}| \leq c\epsilon \cdot |\ell n \epsilon|,$$

donde  $\psi(x) = \chi_{[0, R]}\varphi(x)$  y  $\varphi(0) = 0$ . En este resultado se asume que  $R > 0$  es suficientemente grande de modo que el soporte de  $V(x)$  está contenido en el intervalo  $[0, R]$ .

A continuación, describimos brevemente el contenido de cada capítulo.

El capítulo 2 está dedicado a presentar un resumen de resultados preliminares. En este capítulo demostramos la proposición 2.4.1, la cual es una versión de un Teorema demostrado en [23], pero en dimensión uno.

Nuestros resultados principales aparecen en los capítulos 3, 4 y 5.

En el capítulo 3, consideramos el problema de encontrar estados que sean casi

vectores propios para operadores de la forma

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x),$$

donde  $V_n(x)$  es una barrera de potencial de altura fija  $h$  y de ancho  $n$ , por ejemplo,  $V_n(x) = h\chi_{[a, a+n]}(x)$ . Consideremos además, un vector propio del operador

$$H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\infty(x),$$

donde  $V_\infty(x)$  es la barrera de ancho infinito, por ejemplo,  $V_\infty(x) = h\chi_{[a, \infty)}$ . En dicho capítulo, demostramos que ese vector propio actúa "casi como un vector propio" para los operadores  $H_n$ . Lo esencial de la demostración consistió en verificar previamente que la resolvente saliente (es decir, la continuación meromorfa de la resolvente del operador  $H_n$ ) converge fuertemente a la resolvente usual del operador  $H_\infty$  en  $L^2([0, R])$ . Esto permite demostrar que existe cierta estabilidad entre valores propios del operador  $H_\infty$  y las frecuencias dispersivas de los operadores  $H_n$ , en el sentido de que éstas se encuentran cerca de los valores propios del operador  $H_\infty$ . También es posible demostrar que las soluciones resonantes asociadas a las frecuencias dispersivas se aproximan, a medida que  $n \rightarrow \infty$ , a los vectores propios de  $H_\infty$ .

Las estimaciones que aparecen en este capítulo, sin embargo, son independientes del tiempo. Este resultado se apoya en el artículo [22].

En el capítulo 4 se extienden estas conclusiones para barreras de potencial en  $\mathbb{R}^3$ , es decir, operadores de la forma

$$H_n = -\Delta + V_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

donde  $V_n$  es simétrica respecto del origen, es decir, es radial. En este caso, podemos descomponer las ecuaciones en esféricas armónicas y esto permite reducir el problema a un problema en  $\mathbb{R}$  análogo al estudiado en el Capítulo 3.

Finalmente, en el capítulo 5 también consideramos la sucesión de barreras de potencial que crece a infinito  $V_n(x) = h\chi_{[a, a+n]}(x)$ , haciendo un cambio en la escala de tiempo, demostramos que para  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^+)$  con

$$H_\infty(\varphi) = \lambda_0\varphi$$

se tiene que existe una sucesión  $T_n \searrow 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, E_{[\lambda_0 - T_n\lambda, \lambda_0 + T_n\lambda]} \varphi \rangle = \frac{1}{(\lambda - b)^2 + 1}$$

donde  $E^n$  es la medida espectral para  $H_n$ . Esto permite demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, e^{-i(H_n - \lambda_0) \frac{t}{T_n}} \varphi \rangle = e^{-t} e^{-itb}$$

y esto muestra que en algún sentido  $|\langle \varphi, e^{-iH_n t} \varphi \rangle|^2$  se comporta como  $e^{-T_n t}$  para  $n$  grande y  $t$  en compactos.

Esta idea fue usada en [8] para demostrar un resultado análogo, pero para barreras de potencial de ancho fijo y cuya altura crece a infinito.

# Capítulo 2

## Preliminares

Comenzaremos este capítulo presentando un resumen del formalismo matemático usual para la Mecánica Cuántica. Hay una extensa literatura en esta área, que comienza con el trabajo pionero de J.Von Neuman [24]. Aquí pondremos énfasis sólo en algunos aspectos, que nos permitirán estudiar la relación entre resonancias, decaimiento exponencial, y el fenómeno de concentración espectral. En la descripción de la teoría que presentamos en las secciones 2.1 y 2.2, seguimos esencialmente el texto [25].

### 2.1 Definiciones básicas

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert complejo. En este espacio es posible definir una estructura que llamaremos un espacio de Probabilidad Cuántica  $(\mathcal{H}, P(\mathcal{H}), \rho)$ , donde,

- i)  $P(\mathcal{H})$  es el conjunto de las proyecciones ortogonales en  $\mathcal{H}$ , es decir,  $E^2 = E$ ,  $E^* = E$ .
- ii)  $\rho$  es un operador autoadjunto positivo en  $\mathcal{H}$  y de traza igual a uno.

Cada proyección ortogonal  $E \in P(\mathcal{H})$  juega un papel análogo al de los sucesos o eventos en un espacio de probabilidad clásico. Asimismo, el operador  $\rho$  juega el papel de una medida de probabilidad.

Por ejemplo, cuando  $\mathcal{H}$  es un espacio de dimensión finita y  $\rho$  es una matriz diagonal entonces en alguna base adecuada, tenemos,

$$\rho = \begin{pmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix}$$

donde los elementos diagonales  $p_i \geq 0$  y la traza  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

**Definición 2.1.1** Dado un suceso  $E \in P(\mathcal{H})$ , definimos su probabilidad según  $\rho$  como

$$\rho(E) := \text{traza}(\rho E)$$

Por ejemplo, en el caso de dimensión  $n$ , si tomamos un suceso  $E$  que diagonalice simultáneamente a  $\rho$ , entonces

$$E = \begin{pmatrix} c_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$$

donde cada  $c_i$  es 0 o 1.

La probabilidad de  $E$  resulta ser precisamente

$$\rho(E) = \sum_{c_i \neq 0} p_i$$

Los operadores autoadjuntos de  $\mathcal{H}$  son análogos a las variables aleatorias en la teoría de probabilidad y se denominan en este contexto, observables del sistema.

**Definición 2.1.2** Si  $A$  es un operador autoadjunto, entonces su esperanza según la probabilidad  $\rho$  se define por

$$\mathbb{E}_\rho(A) := \text{traza}(\rho A).$$

Nuevamente, en el caso de dimensión finita, si  $A$  es una matriz diagonal real,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

entonces la esperanza de  $A$  según  $\rho$  es

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \text{traza}(\rho A) = \text{traza} \begin{pmatrix} a_1 & p_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & a_n & p_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i p_i$$

**Nota:** A la probabilidad  $\rho$  también se le llama *estado*. Además, un estado  $\rho$  es *puro* cuando es la proyección ortogonal sobre un espacio de dimensión uno, es decir, cuando  $\rho$  actúa como  $\rho(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi$ , para algún  $\varphi \in \mathcal{H}$  unitario. En este caso no haremos distinción entre  $\rho$  y  $\varphi$ .

Claramente, cuando  $\varphi$  es un estado puro y  $E$  es una proyección ortogonal, entonces su probabilidad según  $\varphi$  es

$$\rho(E) = \langle \varphi, E\varphi \rangle = \|E\varphi\|^2.$$

También, para un observable  $A$ , su esperanza según el estado  $\varphi$  es,

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

Como un ejemplo concreto tomemos el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ . En este caso, un estado puro es simplemente un vector  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  con  $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = 1$ .

Sea  $E$  el operador "multiplicación por  $\chi_U$ ", donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto de Borel. Entonces,  $E$  es una proyección ortogonal y la probabilidad de  $E$  según  $\varphi$  es:

$$\langle \varphi, E\varphi \rangle = \int \varphi(x) E(\varphi)(x) dx = \int_U |\varphi(x)|^2 dx.$$

Además, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es función medible entonces la esperanza de  $f$  según  $\rho$  es

$$\langle \varphi, E(\varphi) \rangle = \int f(x) |\varphi(x)|^2 dx.$$

Vemos por ejemplo que en el caso particular de dimensión  $n = 1$ ,  $f(x) = x$  da precisamente la esperanza de la variable aleatoria  $x$  con función de densidad de probabilidad  $|\varphi(x)|^2$ .



## 2.2 Evolución en el Tiempo

En Mecánica Cuántica, la evolución en el tiempo está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = H\varphi,$$

donde  $H$  es un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Este operador es conocido como el Hamiltoniano ó energía observable del sistema. Dada una condición inicial  $\varphi(0) = \varphi_0$ , la única solución está dada por  $\varphi(x, t) = e^{-iHt}\varphi_0(x)$ , donde la exponencial puede ser definida, por ejemplo, a través de la teoría espectral de  $H$ , ver [18].

**Ejemplo** En el caso de una partícula cuántica en  $\mathbb{R}^3$  que está sujeta a la acción de un potencial  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , el Hamiltoniano es  $H = -\Delta + V(x)$ . Para un estudio detallado de este tipo de hamiltonianos, mencionamos, por ejemplo [27], donde aparecen condiciones sobre  $V(x)$  que garantizan que el operador  $H$  es autoadjunto.

Así, la evolución en el tiempo queda descrita por el grupo unitario:

$$\mathcal{U} = \{e^{-iHt}/t \in \mathbb{R}\}.$$

Es decir, si  $\varphi$  es el estado en  $t = 0$ , entonces  $\varphi(t, x) = e^{-iHt}\varphi(x)$  es el estado en el instante de tiempo  $t$ .

Este grupo permite también describir la evolución de observables y eventos. En efecto, consideremos un estado puro  $\varphi \in \mathcal{H}$  y sea  $X$  una variable aleatoria (es decir, un operador autoadjunto en  $\mathcal{H}$ ). La esperanza de  $X$  en el estado  $\rho$  es  $E_\rho(X) = \langle \varphi, X\varphi \rangle$  y luego la esperanza de  $X$  en el instante  $t$  dado el estado inicial  $\varphi$  es:

$$\mathbb{E}(X_t) = \langle e^{-iHt}\varphi, X e^{-iHt}\varphi \rangle.$$

También, si  $E \in P(\mathcal{H})$  es un suceso, su probabilidad en el instante  $t$  es

$$\langle e^{-iHt}\varphi, E e^{-iHt}\varphi \rangle = \|E e^{-iHt}\varphi\|^2$$

Algunos autores llaman a esta última, la probabilidad de que la partícula esté en el subespacio  $\text{Rango}(E)$  en el instante de tiempo  $t$ , cuando el estado inicial es  $\varphi$ .

En el ejemplo concreto del espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ , si  $E$  es el operador multiplicación por  $\chi_U$ , entonces

$$\int_U |e^{-iHt}\varphi(x)|^2 dx$$

representa la probabilidad de que la partícula con estado inicial  $\varphi$  esté en  $U$  en el instante de tiempo  $t$ .

En particular, podemos tomar el evento que corresponde al estado inicial mismo, o sea,  $E(f) = \langle \varphi, f \rangle \varphi$ , en cuyo caso, la expresión anterior se transforma en

$$P_\varphi(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle|^2$$

la que se interpreta como la probabilidad de que el sistema esté, en el instante  $t$ , en su mismo estado inicial  $\varphi$ .

## 2.3 Decaimiento Exponencial

En general, el decaimiento exponencial es un comportamiento observado en la naturaleza, por ejemplo en el decaimiento radioactivo. Por otra parte, este comportamiento está relacionado con el fenómeno de resonancia, en el sentido que los estados resonantes decaen lentamente de manera exponencial y tienen tiempo de vida grande.

En general, es imposible encontrar un estado que decaiga exponencialmente, es decir, un vector unitario  $\varphi \in \mathcal{H}$  para el cual se tenga que  $\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle = e^{-zt}$ , para algún número complejo  $z$  con  $\text{Im}(z) < 0$ . En efecto, cuando  $H$  es un operador positivo y absolutamente continuo como los hamiltonianos que se consideran más adelante, su espectro está contenido en el intervalo  $[0, \infty)$ , de modo que si  $E_\lambda$  es la medida espectral asociada y  $\varphi \in \mathcal{H}$  es un vector unitario, entonces, la derivada de Radon Nikodym

$$P_\varphi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, E_\lambda \varphi \rangle$$

se anula en  $(-\infty, 0]$ . Puesto que  $\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle$  es precisamente la transformada de Fourier de  $P_\varphi(\lambda)$ , el teorema de Paley-Weiner descarta la posibilidad de dicho comportamiento exponencial.

Como Lavine hace notar en [22], una solución ingenua para este inconveniente sería la siguiente: si  $z$  fuera un número complejo  $z$ , con  $\text{Im}(z) < 0$ , para el cual

la ecuación  $H\varphi = z\varphi$  tuviera una solución no trivial  $\varphi$ , entonces inmediatamente tendríamos que  $\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle = e^{-izt}$ . Como  $H$  es autoadjunto, todos los valores propios son reales, de modo que la única posibilidad será buscar al vector propio  $\varphi$  en un espacio mayor que  $\mathcal{H}$ . Sin embargo, en este último caso, la expresión  $\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle$  no tendría sentido.

Se quiere entonces encontrar estados que decaigan casi-exponencialmente, en el sentido que  $|\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle - e^{-izt}| < \epsilon$  donde  $\epsilon$  es pequeño y  $t$  en  $\mathbb{R}^+$ .

## 2.4 Frecuencias Dispersivas

Consideremos ahora un operador autoadjunto  $H$  en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , o sea, un hamiltoniano para una partícula en la semirecta.

Como ya mencionamos, una forma de hallar estados que decaigan casi-exponencialmente es encontrando soluciones de la ecuación:

$$Hu = (\lambda_0 - i\epsilon)u, \quad (2.1)$$

para lo cual será necesario extender  $H$  a un espacio que contenga al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

En lo que sigue, trabajaremos el caso concreto de una partícula en la semirecta bajo la acción de un potencial  $V(x)$ . El Hamiltoniano correspondiente es entonces

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

con dominio  $\mathcal{D}(H) = H^2(0, \infty) \cap H_0^1(0, \infty)$ . Este dominio corresponde a la condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ .

En todo lo que sigue suponemos que  $V(x)$  es una función positiva, acotada y con soporte contenido en un intervalo de la forma  $[0, R]$ . Con esta hipótesis  $H$  resulta ser operador autoadjunto.

Así, buscamos soluciones de la ecuación,

$$-u'' + V(x)u = (\lambda_0 - i\epsilon)u, \quad x \geq 0 \quad (2.2)$$

que satisfacen  $u(0) = 0$ , con  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  y  $\epsilon > 0$  adecuados.

El espacio solución de este problema tiene dimensión uno y por lo tanto tiene muchas soluciones. Fuera del soporte de  $V$ , (2.2) es una ecuación diferencial ordinaria con dos soluciones linealmente independiente a saber,  $e^{-i\sqrt{\lambda-i\epsilon}x}$ , y  $e^{i\sqrt{\lambda-i\epsilon}x}$ . Aquí, hemos elegido la raíz cuadrada de modo que  $Im(\sqrt{\lambda-i\epsilon}) > 0$ .

Por convención ponemos la condición que la solución en (2.2) sea exponencialmente creciente, vale decir, elegimos la solución que se comporta como  $e^{i\sqrt{\lambda-i\epsilon}x}$ , si ésta existe. Por otra parte, es posible expresar las soluciones de (2.2) mediante una ecuación integral, la que, además, permite encontrar una continuación analítica de la resolvente  $(H - z)^{-1}$ , a través del eje real. Esta continuación analítica usa la función de Green para el operador  $\frac{-d^2}{dx^2} + V(x)$  y sus polos, en el semiplano inferior, son las llamadas "frecuencias dispersivas".

**Definición 2.4.1** Una "frecuencia dispersiva" para el potencial  $V(x)$  es un número complejo  $z_0$ , con  $Im z_0 < 0$ , de modo que el problema,

$$\begin{aligned} -\varphi'' + V\varphi &= z_0^2\varphi, \text{ para } x > 0, \\ \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(x) &= ce^{iz_0x} \text{ para } x \text{ grande,} \end{aligned}$$

tiene una solución no trivial. Dicha función será llamada una solución resonante. Esta es única salvo constante.

Nosotros adaptamos aquí el punto de vista de R. Lavine, quien caracteriza una resonancia o estado resonante de la siguiente forma,

**Definición 2.4.2** Un estado resonante para un operador  $H$ , es un vector unitario  $\varphi$  para el cual se tiene que

- i)  $\|\varphi\|_B$  es grande, para  $B$  acotado.
- ii)  $\int |\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle|^2 dt$  es grande.

A continuación presentaremos una demostración del hecho que las frecuencias dispersivas son los polos de una continuación analítica de la resolvente, usando la técnica desarrollada por Loe [23], quien analizó este problema en dimensión tres.

Dados  $x, y \geq 0$  y  $z \in \mathbf{C}$  consideremos la función

$$K(x, y, z) = -\{e^{iz|x-y|} - e^{iz|x+y|}\}.$$

Se tiene que  $K(x, y, z)$  es la función de Green para el operador  $\frac{-d^2}{dx^2}$  en la semirecta, con condición de Dirichlet en cero. Esto significa que dada una función  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{C}$  de soporte compacto, se tiene que

$$u(x) = \int_0^\infty K(x, y, z) f(y) dy \quad (2.3)$$

es una solución de

$$\begin{aligned} -u'' - z^2 u &= f, & x \geq 0, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

La función  $u(x)$  dada por (2.3) tiene el comportamiento asintótico  $u(x) \sim ce^{izx}$  para  $x$  grande, es decir, la función de Green considerada, entrega precisamente las soluciones que satisfacen la condición de ser exponencialmente crecientes que aparece en la definición anterior. Esta condición es conocida en la literatura como la condición de radiación de Sommerfeld o la condición de ser "saliente". Por otra parte, para  $\text{Im}z > 0$ , el problema

$$\begin{aligned} -u'' + V(x)u &= z^2 u + f(x), & x \geq 0, \\ u(0) &= 0, \\ u(x) &= e^{izx}, & \text{para } x \text{ grande} \end{aligned} \quad (2.4)$$

tiene solución única que coincide con la resolvente usual  $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V - z^2\right)^{-1} f$ .

Más aún, para cualquier  $z$  la solución de (2.4) satisface la ecuación integral

$$u(x) = \int_0^\infty K(x, y, z)(f(y) - V(y)u(y)) dy. \quad (2.5)$$

Así,  $z$  es una frecuencia dispersiva si y sólo si la ecuación integral

$$u(x) = \int_0^\infty K(x, y, z)V(y)u(y) dy \quad (2.6)$$

tiene alguna solución no trivial.

Para estudiar estas ecuaciones integrales, consideremos el peso  $\mu(x) = e^{-sx}$ , con  $s > 0$  fijo y el espacio:

$$X = \{\varphi \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^+) / \int_0^\infty |\varphi(x)|^2 \mu(x) dx < \infty\}.$$

Definamos los operadores integrales  $L_V(z) : X \rightarrow X$  dados por

$$L_V(z)(\varphi)(x) = \int_0^\infty K(x, y, z) V(y) \varphi(y) dy.$$

Es claro que  $z$  es una frecuencia dispersiva si y sólo si  $\varphi = L_V(z)\varphi$ , es decir, si y sólo si  $\varphi$  es un vector propio de  $L_V(z)$  con valor propio uno.

**Proposición 2.4.1** *Sea  $M = \{z \in \mathbf{C} / \text{Im } z > -s/2\}$ . Entonces para cada  $z \in M$ ,  $L_V(z)$  es un operador compacto en  $X$ .*

*Demostración.* Sabemos que si existe  $\mathcal{G} \in L^2(X^2, dx \otimes dx)$  tal que

$$L_V(z)\varphi(x) = \int_0^\infty \mathcal{G}(x, y, z) \varphi(y) \mu(y) dy$$

entonces  $L_V(z)$  es compacto en  $X$ .

Ahora bien, puesto que el soporte de  $V$  está contenido en  $[0, R]$ ,

$$\begin{aligned} L_V(z)\varphi(x) &= \int_0^\infty K(x, y, z) V(y) \varphi(y) dy \\ &= \int_0^R K(x, y, z) e^{sy} V(y) \varphi(y) e^{-sy} dy \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{G}(x, y) = K(x, y, z) e^{sy} V(y)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty |\mathcal{G}(x, y)|^2 e^{-sx} e^{-sy} dx dy &= \int_0^\infty \int_0^R |K(x, y, z)|^2 |V(y)|^2 e^{sy} e^{-sx} dx dy \\ &\leq c \int_0^\infty \left\{ \int_0^R |e^{iz|x-y|} - e^{iz|x+y|}|^2 e^{sy} dy \right\} e^{-sx} dx, \end{aligned}$$

donde  $c = \sup |V|^2$ .

Supongamos que  $z = \alpha - i\beta$ , entonces,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |e^{izx}|^2 \left\{ \int_0^x |e^{-izy} - e^{izy}| e^{sy} dy + |e^{-izx} - e^{izx}|^2 \int_x^R |e^{izy}|^2 e^{sy} \right\} e^{-sx} dx \\ &= \int_0^\infty e^{2\beta x} \left\{ \int_0^x |e^{-izy} - e^{izy}| e^{sy} dy + |e^{-izx} - e^{izx}|^2 \int_x^R |e^{izy}|^2 e^{sy} \right\} e^{-sx} dx. \end{aligned}$$

Pero para  $z \in M$  se tiene que  $\text{Im}z = \beta < s/2$ . Luego esta integral converge y, por lo tanto,  $L_V(z)$  es un operador compacto.

El resultado que sigue es una generalización de la alternativa de Fredholm, pero válida para una familia de operadores compactos en un espacio de Banach, que depende analíticamente de un parámetro. Su demostración aparece, por ejemplo, en [27].  $\square$

**Teorema 2.4.1 (Steinberg)** Sea  $\{L(z)\}$  una familia de operadores compactos que depende analíticamente de  $z$ .

Existen entonces  $z_1, \dots, z_n$ , en el semiplano complejo inferior, tales que se cumple solo una de las siguientes posibilidades:

- i) Si  $z \in \{z_i\}_i$  entonces  $L(z)\varphi = \varphi$  tiene solución no trivial.
- ii) Si  $z \notin \{z_i\}$ , entonces dado  $f$  de soporte compacto, existe una única solución  $\varphi$  de  $L(z)\varphi - \varphi = f$ .

Además la solución  $\varphi$  en (ii) es meromorfa con polos en  $\{z_j\}$ .

Como una aplicación de este teorema a los operadores  $L_V(z)$ , obtenemos,

**Teorema 2.4.2** Dados el operador  $H = \frac{-d^2}{dx^2} + V(x)$  se tiene que existen  $z_1, \dots, z_k$ ,  $\text{Im} z_i < 0$  tales que se cumple solo una de las posibilidades:

- i) Para cada  $i$ , existe solución no trivial de  $H(\varphi) = z_i\varphi$ ,  $y$
- ii) Dado  $f$  de soporte compacto, existe una única solución para  $H(\varphi) - z\varphi = f$  para cada  $z \neq z_i$ .

*Demostración.* Por la proposición anterior, sabemos que los operadores  $L_V(z)$  son compactos y por lo tanto verifican el teorema de Steinberg. Así, existen frecuencias dispersivas  $z$ , con  $\text{Im}(z) < 0$  y existe  $\varphi \in X$  no trivial que verifica la ecuación,

$$\varphi(x) = \int_0^\infty K(x, y, z)V(y)\varphi(y)dy.$$

Por lo tanto,  $\varphi$  es solución de,

$$\begin{aligned} -\varphi'' - z^2\varphi &= -V\varphi, \\ \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(x) &= e^{izzx}, \quad \text{para } x > R. \end{aligned}$$

Es decir,  $-\varphi'' + V\varphi = z^2\varphi$  y, por lo tanto,  $H_n(\varphi) = z^2\varphi$ .

Supongamos ahora que  $z$  no es frecuencia dispersiva y sea  $f$  función de soporte compacto. Consideremos la función,

$$F(x) = \int_0^\infty K(x, y, z)f(y)dy.$$

Tenemos entonces que  $F \in X$ . Luego por el teorema y la proposición anterior, y debido a que  $z$  no es frecuencia dispersiva, existe una única solución  $\varphi \in X$  para,

$$L_{V_n}(z)\varphi - \varphi = -F,$$

Así,  $\varphi$  satisface,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= F(x) + L_{V_n}(z)\varphi(x) \\ &= \int_0^\infty K(x, y, z)f(y)dy + L_{V_n}(z)\varphi \\ &= \int_0^\infty K(x, y, z)(f(y) - V_n(y)\varphi(y))dy \end{aligned}$$

En otras palabras,  $\varphi$  es solución de

$$-\varphi'' + V_n\varphi - z\varphi = f$$



Por lo tanto  $H_n\varphi - z\varphi = f$  y  $\varphi$  es saliente.  $\square$

Otra forma de mirar el teorema anterior es la siguiente. Consideremos la solución  $\varphi$  dada en (ii) como función de  $z$ . Entonces, el resultado anterior dice que para  $\text{Im}z > -s/2$ , el operador  $\varphi(z)$  es analítico, salvo por polos  $\{z_i\}_i$ , los cuales son precisamente las frecuencias dispersivas.

**Definición 2.4.3** *La resolvente  $\varphi(z)$  construida anteriormente la llamaremos "resolvente saliente" y la denotaremos por  $(H - z)_{\text{sal}}^{-1}$ .*

*Notamos que la resolvente saliente coincide con la resolvente usual cuando  $\text{Im}z > 0$ . De este modo hemos conseguido extender analíticamente la resolvente usual a través del eje real, pero esta extensión no coincide con la resolvente usual en el semiplano inferior  $\text{Im}(z) < 0$ .*

## 2.5 Barreras de Potencial

Consideremos ahora una partícula cuántica que se mueve en la semirecta y que está encerrada por una barrera de potencial de altura  $h > 0$  y largo finito. Explícitamente y por simplicidad, consideramos el hamiltoniano  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , donde  $V(x) = h\chi_I(x)$  con  $I = [a, b]$ ,  $0 < a < b$  y con la condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ .

Clásicamente, una partícula que parte en el intervalo  $[0, a]$  y que tiene una energía pequeña, se queda para siempre en dicha región.

Cuánticamente, existe el "efecto túnel": una partícula siempre atraviesa la barrera y se va a infinito. Sin embargo, si el ancho  $b - a$  de la barrera es grande esperamos que la partícula se quede atrapada en  $[0, a]$  por una gran cantidad de tiempo. Matemáticamente, el hecho que la partícula atraviese la barrera significa que el operador

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

tiene espectro absolutamente continuo. De hecho, existe una buena teoría de Scattering para el par  $(H_0, H)$  con  $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ , y por lo tanto  $H_0$  y  $H$  son unitariamente

equivalentes y así  $H$  resulta ser absolutamente continuo.

En particular,  $H$  no tiene valores propios, pero cuando la barrera es muy larga, es decir, cuando  $b-a$  es grande, esperamos que la partícula permanezca en su estado inicial por una gran cantidad de tiempo. Así, queremos encontrar un estado  $\varphi$  que sea casi un vector propio de  $H$ , en el sentido que la probabilidad de permanecer en ese estado inicial después de un tiempo  $t$  sea cercano a uno. Además, tal estado  $\varphi$  debe estar localizado en la región  $[0, a]$ .

Para esto consideramos los Hamiltonianos para una barrera que crece hacia infinito, o sea,

$$H_n = \frac{-d^2}{dx^2} + V_n(x), \quad V_n(x) = h\chi_{[a, a+n]}$$

y la barrera infinita,

$$H_\infty = \frac{-d^2}{dx^2} + V_\infty(x), \quad V_\infty(x) = h\chi_{[a, \infty)}$$

Es fácil demostrar que  $(H_n - z)^{-1} \rightarrow (H_\infty - z)^{-1}$  fuertemente en  $L^2(\mathbb{R}^+)$  ([18]), cuando  $\text{Im}z \neq 0$ . Pero esta convergencia no es estable respecto del espectro ya que

$$\sigma(H_n) = [0, \infty) \quad \text{y} \quad \sigma(H_\infty) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n \cup [h, \infty)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son valores propios de  $H_\infty$ .

Aún para cada operador  $H_n$  esperamos que, eligiendo  $\varphi$  como un vector propio de  $H_\infty$ , podamos construir un estado resonante para  $H_n$ , si  $n$  es suficientemente grande.

## Capítulo 3

# La resolvente saliente en la semirecta

En este capítulo se desarrollan básicamente dos problemas. El primero consiste en demostrar que, para todo intervalo compacto  $[0, R]$ , la resolvente saliente del operador  $H_n$ , converge fuertemente a la resolvente usual del operador  $H_\infty$  en  $L^2([0, R])$ . Esta convergencia permite demostrar, que en un cierto sentido, existe estabilidad entre las frecuencias dispersivas de los operadores  $H_n$  y los valores propios de  $H_\infty$ , y también entre los estados resonantes de  $H_n$  y los vectores propios de  $H_\infty$ .

El segundo problema consiste en demostrar que los vectores propios de  $H_\infty$  son estados que decaen casi exponencialmente para los operadores  $H_n$ . La técnica aplicada para demostrar esto último fue usar precisamente la estabilidad mencionada en el primer problema.

Recordemos que en este capítulo,  $V_n$  es una sucesión de barreras de potencial de altura constante  $h$  y de ancho  $n$ .

### 3.1 Convergencia de la resolvente saliente

Para demostrar el primer resultado mencionado, necesitamos de varios lemas previos. El primero es una versión de la desigualdad de Poincaré en dimensión  $n = 1$ .

**Lema 3.1.1** Sea  $\varphi \in \mathcal{H}^1([0, R])$  tal que  $\varphi(0) = 0$ . Entonces,

$$\int_0^R |\varphi(x)|^2 dx \leq 4R^2 \int_0^R |\varphi'(x)|^2 dx.$$

*Demostración.* Una simple aplicación de la desigualdad de Schwartz demuestra que,

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 - |\varphi(0)|^2 &= 2\operatorname{Re} \int_0^x \bar{\varphi}(x)\varphi'(x) dx \\ &\leq 2\left(\int_0^x |\varphi|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^x |\varphi'|^2\right)^{1/2} \\ &\leq 2\left(\int_0^R |\varphi|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^R |\varphi'|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando en  $[0, R]$ ,

$$\int_0^R |\varphi(x)|^2 dx \leq 2R \left(\int_0^R |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^R |\varphi'(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

de donde sigue inmediatamente el resultado.  $\square$

El resultado siguiente nos da una estimación a-priori de la solución de la ecuación diferencial ordinaria para los valores propios de  $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ .

**Lema 3.1.2** Supongamos que  $V(x)$  es una función real acotada, con soporte compacto. Sea  $\varphi(x)$  una solución de,

$$\begin{aligned} -\varphi'' + V(x)\varphi &= z\varphi, \quad x > 0 \\ \varphi(0) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $z$  es un número complejo. Entonces,  $\varphi(x)$  satisface,

$$\int_0^R |\varphi'(x)|^2 dx \leq \frac{|\varphi'(0)|}{4R(\|V\|_\infty + |z|)} e^{4R(h+|z|)R},$$

para todo  $R > 0$ .

*Demostración.* Sea  $F(x) = |\varphi'(x)|^2$ . Entonces  $F'(x) = 2\operatorname{Re}\bar{\varphi}'(V - z)\varphi$  y luego, para  $0 \leq x \leq R$ ,

$$\begin{aligned} F(x) - |\varphi'(0)|^2 &= \int_0^x F'(s)ds \\ &= 2\operatorname{Re} \int_0^x \bar{\varphi}'(V - z)\varphi \\ &\leq 2(\|V\|_\infty + |z|)(\int_0^x |\varphi'|^2)^{1/2}(\int_0^x |\varphi|^2)^{1/2} \\ &\leq 2(\|V\|_\infty + |z|)2x \int_0^x |\varphi'|^2, \end{aligned}$$

por el Lema 3.1.1.

Consideremos ahora la función  $G(x) = \int_0^x |\varphi'|^2 ds$ . Entonces, para  $0 \leq x \leq R$ , se tiene que  $G(0) = 0$  y  $G'(x) \leq |\varphi'(0)|^2 + 4R(h + |z|)G(x)$  y, por la desigualdad de Gronwall, concluimos que,

$$G(x) \leq \frac{|\varphi'(0)|^2}{4R(h + |z|)} e^{4R(h+|z|x)}$$

□

El resultado que sigue puede deducirse de la teoría general de estabilidad estructural de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Los potenciales  $V_n(x)$  y  $V_\infty(x)$  corresponden a barreras de potencial de largo  $n$  e infinito respectivamente, pero, para obtener la referida estabilidad, basta suponer que  $V_n$  converge a  $V_\infty$  puntualmente.

**Lema 3.1.3** *Sea  $\{\varphi_n\}$  una sucesión acotada en  $L^2([0, R])$  y supongamos que cada  $\varphi_n$  es solución fuerte de la ecuación,*

$$\begin{aligned} -\varphi_n'' + V_n\varphi_n - z\varphi_n &= f_n, & 0 < x \leq R \\ \varphi_n(0) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\{f_n\}$  es una sucesión de funciones en  $L^1([0, R])$  tal que  $f_n$  converge casi en todas partes a  $f$  en  $[0, R]$ . Supongamos también que  $\varphi_n$  converge casi en todas partes a una función  $\varphi_\infty$ . Entonces  $\varphi_\infty$  es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} -\varphi_\infty'' + V_\infty\varphi_\infty - z\varphi_\infty &= f, & 0 < x \leq R \\ \varphi_\infty(0) &= 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ , entonces,

$$-\int_0^R g\varphi_n'' + \int_0^R g(V_n - z)\varphi_n = \int_0^R gf_n.$$

Integrando por partes dos veces, obtenemos,

$$\int_0^R g''\varphi_n + \int_0^R g(V_n - z)\varphi_n = \int_0^R gf_n.$$

Ahora, usamos el Teorema de la convergencia dominada, para concluir que:

$$\int_0^R g''\varphi_\infty + \int_0^R g(V_\infty - z)\varphi_\infty = \int_0^R gf.$$

En otras palabras,  $\varphi_\infty$  es solución débil de la ecuación

$$-\varphi_\infty'' + (V_\infty - z)\varphi_\infty = f.$$

Sea  $F = f - (V_\infty - z)\varphi_\infty + \varphi_\infty$ . Entonces  $\varphi_\infty$  es solución débil de,

$$\begin{aligned} -\varphi_\infty'' + \varphi_\infty &= F \\ \varphi_\infty(0) &= 0 \end{aligned}$$

y por regularidad (ver, por ejemplo, H. Brezis [6]),  $\varphi_\infty$  es solución fuerte.  $\square$

Consideremos ahora dos soluciones linealmente independientes  $\psi_{1,n}$  y  $\psi_{2,n}$  de la ecuación homogénea  $-\varphi_n'' + V_n(x)\varphi_n - z\varphi_n = 0$ ,  $0 < x \leq R$ , tales que  $\psi_{1,n}(0) = 0$ ,  $\psi_{2,n}(0) = 1$  y  $\psi_{2,n}'(0) = 1$ . Usaremos posteriormente estas soluciones para construir explícitamente una función de Green asociada a esta ecuación.

**Lema 3.1.4** *Sea  $f$  una función de soporte compacto contenido en el intervalo  $[0, M]$  y sea  $\{c_n\}$  una sucesión de números reales tales que  $c_n \rightarrow 0$ . Consideremos las funciones  $\varphi_n$  definidas por*

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{W} \left\{ \psi_{1,n}(x) \int_x^\infty \psi_{2,n}(s) c_n f(s) ds + \psi_{2,n}(x) \int_0^x \psi_{1,n}(s) c_n f(s) ds \right\} \quad (3.1)$$

*Si  $\varphi_n$  converge a alguna función  $\varphi_\infty$  casi en todo punto de  $[0, \infty)$ , entonces  $\varphi_\infty = 0$ .*

*Demostración.* Notemos primero que  $\varphi_n$  es solución de la ecuación,

$$\begin{aligned} -\varphi_n'' + V_n(x)\varphi_n - z\varphi_n &= c_n f, & x > 0 \\ \varphi_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Por el Lema 3.1.3, la función  $\varphi_\infty$  es solución del problema homogéneo,

$$\begin{aligned} -\varphi_\infty'' + V_\infty(x)\varphi_\infty - z\varphi_\infty &= 0, & x > 0 \\ \varphi_\infty(0) &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que,

$$\varphi_n'(0) = \frac{c_n}{W} \int_0^M \psi_{2,n}(s)f(s) ds.$$

Puesto que  $\psi_{2,n}'(0) = 1$ , usando los Lemas 3.1.1 y 3.1.2 podemos ver que  $\int_0^M \psi_{2,n}(s)f(s)ds$  depende solamente de  $M$ . Por lo tanto  $\varphi_n'(0) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y entonces  $\varphi_\infty'(0) = 0$ . Sigue entonces que  $\varphi_\infty$  es la solución de una ecuación homogénea, con condiciones iniciales también homogéneas, de donde  $\varphi_\infty \equiv 0$ . □

En lo que sigue, asumiremos que  $\sigma = \sqrt{z}$  no es frecuencia dispersiva para  $H$ . Así, es posible elegir  $\psi_{1,n}$  y  $\psi_{2,n}$  como antes, pero con  $\psi_{2,n}$  saliente, esto es,  $\psi_{2,n}(x) = d_n e^{i\sqrt{z}x}$ , para  $x$  grande. También,  $f$  denotará una función en  $L^\infty$  de soporte compacto.

**Lema 3.1.5** *Sea  $\{\varphi_n\}$  una sucesión tal que cada  $\varphi_n$  verifica la ecuación,*

$$\left. \begin{aligned} -\varphi_n'' + V_n\varphi_n - z\varphi_n &= f, \\ \varphi_n(0) &= 0, \\ \varphi_n &\text{ saliente} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

*Entonces, dado  $R > 0$ , la sucesión  $\{\varphi_n\}$  es acotada en  $L^2([0, R])$ .*

*Demostración.* Sea  $R > 0$ .

Supongamos que la sucesión  $\{\varphi_n\}$  no es acotada en  $L^2([0, R])$ . Entonces existe una subsucesión, que denotaremos de nuevo por  $\{\varphi_n\}$ , tal que  $\|\varphi_n\| \geq n$ , donde aquí  $\|\cdot\|$  denota la norma en  $L^2([0, R])$ .

Sea  $c_n = \frac{1}{1 + \|\varphi_n\|}$  y sea  $\theta_n = c_n \varphi_n$ .

Tenemos entonces que la sucesión  $\{\theta_n\}$  es acotada en  $L^2([0, R])$ , de hecho,  $\|\theta_n\| \leq 1$ .

Miremos ahora la sucesión  $\{\theta_n\}$  en  $H^2([0, R])$ . Tenemos que  $\{\theta_n\}$  es acotada en  $L^2([0, R])$ , y como  $-\theta_n'' + V_n \theta_n - z \theta_n = c_n f$ , entonces  $\{\theta_n''\}$ ,  $\{\theta_n'\}$  son acotadas en  $L^2([0, R])$ . O sea,  $\{\theta_n\}$  es acotada en  $H^2[0, R]$ .

Como la inclusión  $H^2([0, R]) \hookrightarrow H^1([0, R])$  es compacta, tenemos que existe una subsucesión convergente en  $H^1([0, R])$ . Por comodidad anotaremos esta subsucesión de nuevo como  $\{\theta_n\}$ . Podemos suponer entonces que  $\{\theta_n\}$  converge a una función  $\theta_\infty \in H^1([0, R])$ . Entonces por Lema (3.1.4) tenemos que  $\theta_\infty(0) = 0$ ,  $\theta_\infty'(0) = 0$ , y por lo tanto la solución  $\theta_\infty$  es la función nula.

Pero no es posible que  $\theta_\infty = 0$ , ya que, en  $L^2[0, R]$ ,

$$\|\theta_\infty\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n \varphi_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \|\varphi_n\|} \|\varphi_n\| = 1.$$

Por lo tanto,  $\{\varphi_n\}$  es acotada en  $L^2([0, R])$ , para todo  $R$ . □

Notemos que cuando  $\sigma = \sqrt{z}$  no es una frecuencia dispersiva para  $H$ , el problema

$$\begin{aligned} -\varphi'' + V_n(x)\varphi &= z\varphi + f(x), & x > 0 \\ \varphi(0) &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

tiene una única solución saliente y ésta se puede representar por (3.1).

**Lema 3.1.6** *Sea  $\varphi$  la única solución de (3.3). Entonces  $\varphi$  es suma de funciones que decaen exponencialmente en  $[a, a+n]$ , con respecto a la variable  $x$  o funciones que tienden a cero, cuando  $n$  converge a infinito.*

*Demostración.* Sea  $r = \sqrt{h - z}$ , y sean  $\psi_{1,n}$  y  $\psi_{2,n}$  elegidas como antes. Explícitamente,

$$\psi_{1,n}(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\sqrt{z}x)}{\sqrt{z}}, & x \in [0, a] \\ c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx}, & x \in [a, a+n] \end{cases}$$



donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes complejas dadas por,

$$c_1 = \frac{r \operatorname{sen}(za) + z \operatorname{cos}(za)}{2r\sqrt{z}} e^{-ra},$$

$$c_2 = \frac{r \operatorname{sen}(za) - z \operatorname{cos}(za)}{2r\sqrt{z}} e^{ra}.$$

Por otra parte,

$$\psi_{2,n}(x) = \begin{cases} d_1 e^{rx} + d_2 e^{-rx}, & x \in [a, a+n] \\ d_3 e^{i\sqrt{z}x}, & x \geq a+n \end{cases}$$

donde,

$$d_1 = \frac{r + i\sqrt{z}}{2r} e^{i\sqrt{z}(a+n)} e^{-r(a+n)},$$

$$d_2 = \frac{r - i\sqrt{z}}{2r} e^{i\sqrt{z}(a+n)} e^{r(a+n)}.$$

Notemos que para el Wronskiano de  $\psi_{1,n}$ ,  $\psi_{2,n}$  se tiene que

$$W(\psi_{1,n}, \psi_{2,n}) = \psi_{1,n} \psi'_{2,n} - \psi'_{1,n} \psi_{2,n} = 2r(c_1 d_2 - c_2 d_1) \neq 0,$$

debido al hecho que  $z$  no es frecuencia dispersiva.

Supongamos ahora que el soporte de  $f$  está contenido en el intervalo  $[0, M]$ , y sea  $n$  un entero positivo que verifica  $M < a + n$ . Entonces, para  $x > M$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{W} \{ \psi_{1,n}(x) \int_x^\infty \psi_{2,n}(s) f(s) ds + \psi_{2,n}(x) \int_0^x \psi_{1,n}(s) f(s) ds \} \\ &= \frac{\psi_{2,n}(x)}{W} \int_0^M \psi_{1,n}(s) f(s) ds \\ &= \frac{c(z)}{W} \psi_{2,n}(x) \\ &= \frac{c(z)}{2r} \left\{ \frac{d_1}{c_1 d_2 - c_2 d_1} e^{rx} + \frac{d_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1} e^{-rx} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $c(z) = \int_0^M \psi_{1,n}(s) f(s) ds$ .

Un cálculo directo muestra que  $c(z)$  no depende de  $n$ . Así, poniendo  $\tilde{c}(z) = \frac{c(z)}{2r}$ , obtenemos,

$$|\varphi(x)| \leq |\tilde{c}(z)| \left\{ \frac{|e^{rx}|}{\left\| c_1 \frac{d_2}{d_1} - c_2 \right\|} + \frac{|e^{-rx}|}{\left\| c_1 - c_2 \frac{d_1}{d_2} \right\|} \right\}$$

Por otra parte, es fácil ver que  $\frac{d_1}{d_2} = d(z)e^{-2rn}$ , donde  $d(z)$  no depende de  $n$ .

Sea ahora  $\beta = \operatorname{Re} r$ . Entonces, para todo  $x > M$ , tenemos que

$$|\varphi(x)| \leq \tilde{c}(z) \left\{ \frac{1}{\left| \frac{c_1}{d(z)} |e^{2\beta n} - c_2| \right|} \cdot e^{\beta x} + \frac{1}{\left| |c_1| - |c_2 d(z)| e^{-\beta n} \right|} \cdot e^{-\beta x} \right\}.$$

Caso i)  $\beta < 0$ . En este caso, escribimos,

$$|\varphi(x)| \leq |\tilde{c}(z)| \left\{ \frac{e^{\beta x}}{\left\| c_1 \cdot \frac{1}{\tilde{c}(z)} |e^{2\beta n} - c_2| \right\|} + \frac{e^{-\beta x}}{\left\| |c_1| - |c_2| e^{-2\beta n} \right\|} \right\}.$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  el primer sumando tiende a  $\frac{e^{\beta x}}{|c_2|}$  y el segundo sumando tiende a cero.

Caso ii)  $\beta > 0$ . Aquí,

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |c_1(z)| \cdot \frac{e^{rx}}{c_1 - c_2 \frac{d_1}{d_2}} \cdot \left| \frac{d_1}{d_2} \right| + |c_2(z)| \cdot \frac{e^{-rx}}{\left| c_1 - c_2 \cdot \frac{d_1}{d_2} \right|} \\ &= \left| \frac{\tilde{c}_1(z)}{c_1 - c_2 \frac{d_1}{d_2}} \right| e^{-2rn} e^{rx} + \left| \frac{c_2(z)}{c_1 - c_2 \frac{d_1}{d_2}} \right| e^{-rx} \end{aligned}$$

para  $n$  bastante grande  $|d_1/d_2| < \epsilon$ , entonces

$$|\varphi(x)| \leq c_1 e^{-2\beta n + \beta x} + c_2 e^{-\beta x}.$$

□

Podemos ahora formular el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.1.1** *Dada una función  $g$  de soporte compacto se tiene*

$$(H_n - z)_{\text{sal}}^{-1} g \rightarrow (H_\infty - z)^{-1} g \text{ en } L^2([0, R]).$$

para cualquier  $R$  positivo. Donde  $z$  es tal que  $\sqrt{z}$  no es frecuencia dispersiva de  $H_n$ , para  $n$  suficientemente grande y no pertenece al espectro de  $H_\infty$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi_n = (H_n - z)_{\text{sal}}^{-1} g$ . Entonces  $\varphi_n$  satisface,

$$\begin{aligned} -\varphi_n'' + V_n \varphi_n - z \varphi_n &= g, \\ \varphi_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

y  $\varphi_n$  es saliente.

Sea  $R > 0$  y sea  $\{\varphi_{n_k}\}$  una sub-sucesión de  $\{\varphi_n\}$ . Entonces, por el Lema 3.1.5,  $\{\varphi_{n_k}\}$  es acotada en  $L^2[0, R]$  y, por lo tanto, en  $\mathcal{H}^2[0, R]$ . Como la inclusión  $\mathcal{H}^2([0, R]) \hookrightarrow \mathcal{H}^1([0, R])$  es compacta, existe una sub-sucesión convergente  $\{\varphi_{n_{k_j}}\}$ . Supongamos entonces que  $\varphi_{n_{k_j}} \rightarrow \varphi_\infty$  en  $H^1([0, R])$ . Sea  $\{\varphi_{n_{k_i}}\}$  otra sub-sucesión de  $\{\varphi_{n_k}\}$  y supongamos que  $\varphi_{n_{k_i}} \rightarrow h$  en  $H^1([0, R])$ , con  $h \neq \varphi_\infty$ . Por el Lema (3.1.3), tenemos que

$$\begin{aligned} -\varphi_\infty'' + V_\infty \varphi_\infty - z \varphi_\infty &= g, \\ \varphi_\infty(0) &= 0, \end{aligned}$$

y que,

$$\begin{aligned} -h'' + V_\infty h - zh &= g, \\ h(0) &= 0, \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} -(\varphi_\infty - h)'' + V_\infty(\varphi_\infty - h) - z(\varphi_\infty - h) &= 0 \\ (\varphi_\infty - h)(0) &= 0, \end{aligned}$$

Pero, el Lema 3.1.6 demuestra que  $\varphi_\infty$  y  $h$  están en  $L^2([0, \infty))$ . Por lo tanto,  $z \in \sigma(H_\infty)$ . Pero esto es una contradicción, luego sigue que  $\varphi_\infty - h \in L^2[0, \infty)$  es nulo y  $\varphi_\infty - h = 0$ .

Es decir, toda subsucesión de  $\{\varphi_n\}$  tiene una subsucesión la cual converge a  $\varphi_\infty$ , por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_\infty$  en  $L^2([0, R])$ .  $\square$

**Nota:** El teorema anterior implica que la "resolvente saliente" es estable respecto del espectro, como se verá en el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.1** Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$  tal que

$$H_\infty f = \lambda_0 f, \quad f(0) = 0.$$

Entonces, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im}(z_0) < 0$  tal que  $H_n \varphi = z_0 \varphi$  tiene una solución saliente que satisface  $\varphi(0) = 0$ , para  $n$  grande y  $|\lambda_0 - z_0| \leq \epsilon$ .

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño de modo que la bola  $B(\lambda_0, \epsilon)$  no contenga otros valores propios de  $H_\infty$ . Vamos a demostrar que para  $n$  suficientemente grande,  $H_n$  tiene una frecuencia dispersiva en el interior de  $B(\lambda_0, \epsilon)$ .

$$\text{Sea } \Gamma = \overline{B(\lambda_0, \epsilon)} \setminus B(\lambda_0, \epsilon)$$

Podemos suponer que en  $\Gamma$  no tenemos ninguna frecuencia dispersiva (de lo contrario estaría resuelto el problema).

Como no existe solución no trivial para el problema

$$\begin{aligned} -\varphi'' + V_n \varphi &= z\varphi, & z \in \Gamma \\ \varphi(0) &= 0, & \varphi \text{ saliente,} \end{aligned}$$

entonces por el teorema de Steinberg, dada una función  $g$  ( $g$  de soporte compacto), existe una única solución  $\varphi_n(\cdot, z)$  de

$$\begin{aligned} -\varphi_n'' + V_n \varphi_n - z\varphi_n &= g, \\ \varphi_n(0) &= 0, \\ \varphi_n &\text{ saliente} \end{aligned}$$

Como función de  $z$ , la solución  $\varphi_n$  es analítica salvo por polos, que son precisamente las frecuencias dispersivas.

Ahora,

$$\begin{aligned} |\langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle - \langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle| &= |\langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle - \langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle| \\ &\leq \|f\| \|(H_n - z)^{-1}g - (H_\infty - z)^{-1}g\| \end{aligned}$$

y por teorema 3.1.1,  $\|(H_n - z)^{-1}g - (H_\infty - z)^{-1}g\| \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  luego  $\langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle$  converge uniformemente en  $z \in \Gamma$  a

$$\langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle,$$

Luego,

$$\oint_{\Gamma} \langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle dz \rightarrow \oint_{\Gamma} \langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle dz.$$

Pero

$$\langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle = \langle (H_\infty - \bar{z})^{-1}f, g \rangle = \frac{1}{\lambda_0 - z} \langle f, g \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\oint_{\Gamma} \langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle dz = \langle f, g \rangle \oint_{\Gamma} \frac{1}{\lambda_0 - z} dz.$$

Esta última expresión es distinta de cero. Por lo tanto, para  $n$  suficientemente grande,

$$\oint_{\Gamma} \langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle dz.$$

también es distinta de cero.

Esto significa que la función  $\langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle$  tiene un polo en el disco  $B(\lambda_0, \epsilon)$  y por lo tanto  $\varphi_n \equiv (H_n - z)^{-1}g$  tiene un polo en  $B(\lambda_0, \epsilon)$ . En otras palabras, existe  $z_0 \in B(\lambda_0, \epsilon)$ , con  $\text{Im}(z_0) < 0$  y existe  $\varphi_n$  tal que  $H_n(\varphi) = z_0\varphi$  con  $\varphi(0) = 0$ , y  $\varphi$  saliente.  $\square$

El próximo resultado muestra que los estados resonantes de  $H_n$  también convergen a los vectores propios de  $H_\infty$ .

**Teorema 3.1.2** *Supongamos que  $H_\infty f = \lambda_0 f$ , tiene una solución no trivial  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$  que satisface la condición de Dirichlet  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = 1$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$ , existe una solución saliente no trivial  $\varphi_n$  del problema*

$$H_n \varphi_n = z_n \varphi_n$$

$$\varphi_n(0) = 0$$

tal que,

$$\|\varphi_n - f\|_{L^2([0, R])} < \epsilon.$$

*Demostración.* Por el Corolario 3.1.1, existe una sucesión de frecuencias dispersivas  $\{z_n\}$  en el semiplano complejo inferior tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lambda_0$ .

Así, para cada  $z_n$ , existe  $\varphi_n$  solución no trivial del problema

$$-\varphi_n'' + V_n \varphi_n = z_n \varphi_n, \quad x > 0,$$

$$\varphi_n(0) = 0$$

tal que  $\varphi_n$  es saliente.

Usando los Lemas 3.1.5 y 3.1.6, se tiene que la sucesión  $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{H}^1([0, R])$ . Como  $-\varphi_n'' = (z_n - V_n)\varphi_n$ , entonces  $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{H}^2([0, R])$  y  $\{\varphi_n\}$  es acotado en ese espacio. Así,  $\{\varphi_n\}$  tiene una subsucesión  $\{\varphi_{n_r}\}$ , convergente en  $\mathcal{H}^1([0, R])$ .

Podemos suponer entonces que  $\varphi_{n_r} \rightarrow \varphi_\infty$  en  $\mathcal{H}^1([0, R])$ . Además,  $\varphi_\infty$  es solución de la ecuación,

$$-\varphi_\infty'' + V_\infty \varphi_\infty = \lambda_0 \varphi_\infty,$$

para  $x > 0$ .

Como  $\varphi_n(0) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se puede escoger un múltiplo adecuado de modo que, para  $x \in [0, a]$ , se tenga  $\varphi_{n_r}(x) = \frac{\text{sen}(\sqrt{z_n}x)}{\sqrt{z_n}}$ . Por lo tanto,  $\varphi_{n_r}'(0) = 1$ , para todo  $n_r$  y así  $\varphi = f$  en  $[0, R]$ . □

### 3.2 Decaimiento casi-exponencial

Ahora usaremos el siguiente resultado de R. Lavine [22], quien demostró que cuando  $\varphi$  es un estado resonante, truncado, y normalizado para un operador  $H$  de la forma  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , donde  $V(x) \geq 0$ ,  $V$  de soporte compacto, entonces para todo tiempo  $t$ ,

$$|\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t}| \leq c\epsilon |\ln(\epsilon)|.$$

En otras palabras, asociado a una frecuencia dispersiva cercana al eje real, existen estados que decaen casi exponencialmente.

Explícitamente, hemos elegido  $\varphi(x) = \chi_{[0,R]}(x)\psi(x)$ , donde  $\psi(x)$  es una solución saliente de

$$\begin{aligned} -\psi'' + V_n\psi &= (\lambda_0^2 - i\epsilon)\psi, & x > 0 \\ \varphi(0) &= 0, \end{aligned}$$

con  $\int_0^R |\psi(x)|^2 dx = 1$ .

Sea ahora  $\lambda_0^2$  un valor propio del operador  $H_\infty$ , y sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$  el correspondiente vector propio. Explícitamente, podemos tomar

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(\lambda_0 x) & , 0 \leq x \leq a \\ \text{sen}(\lambda_0 a) e^{-\sqrt{h-\lambda_0^2}(x-a)} & , x \geq a, \end{cases}$$

Por los resultados anteriores, existe una sucesión de frecuencias dispersivas  $\{z_n^2\}$  tales que  $z_n^2 \rightarrow \lambda_0^2$ . Claramente, podemos asumir que  $z_n^2 = \lambda_n^2 - i\epsilon_n$  donde  $\lambda_n^2 \rightarrow \lambda_0^2$  y  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .

Además, asociado a cada  $z_n$  existe una solución resonante  $\varphi_n$ , la cual verifica,

$$\begin{aligned} -\varphi_n'' + V_n\varphi_n &= z_n^2\varphi_n, & x > 0, \\ \varphi_n(0) &= 0 \\ \varphi_n &\text{ saliente.} \end{aligned}$$

Podemos entonces elegir

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \text{sen}(z_n x), & 0 \leq x \leq a \\ c_{1,n} e^{-\sqrt{h-z_n^2}x} + c_{2,n} e^{\sqrt{h-z_n^2}x}, & a \leq x \leq a+n \end{cases}$$

donde las constantes  $c_{1,n}$  y  $c_{2,n}$  están dadas por,

$$c_{1,n} = \frac{[\sqrt{h - z_n^2} \operatorname{sen}(z_n a) - z_n \cos(z_n a)] e^{\sqrt{h - z_n^2} a}}{2\sqrt{h - z_n^2}},$$

y,

$$c_{2,n} = \frac{[\sqrt{h - z_n^2} \operatorname{sen}(z_n a) + z_n \cos(z_n a)] e^{-\sqrt{h - z_n^2} a}}{2\sqrt{h - z_n^2}}.$$

**Proposición 3.2.1** *Con las notaciones anteriores, se tiene que*

$$\|\psi_n - f\|_{L^2([0,R])} \leq \left( \sqrt{\lambda_n^4 - \epsilon_n^2} - \lambda_0^2 \right) cR,$$

donde  $c$  es una constante positiva que no depende de  $n$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , considere la bola abierta en  $\mathbb{C}$ ,  $B(\lambda_0^2, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} / |\lambda_0^2 - z| < \epsilon\}$ .

Para  $z \in B(\lambda_0^2, \epsilon)$  calculemos la norma anterior de  $L^2$  en  $[0, a]$  y  $[a, R]$  separadamente.

i) Para  $0 \leq x \leq a$  tenemos que  $\psi_n(x) = \operatorname{sen}(z_n x)$  y  $f(x) = \operatorname{sen}(\lambda_0 x)$ .

Entonces por teorema del valor medio

$$|\psi_n(x) - f(x)| \leq R |\cos(\omega)| \left| \sqrt{\lambda_n^2 - i\epsilon_n} - \lambda_0 \right|$$

para algún  $\omega \in B(\lambda_0^2, \epsilon)$ .

ii) Para  $a \leq x \leq a + n$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - f(x)| &\leq \left| \frac{\sqrt{h - z_n^2} \operatorname{sen}(z_n a) - z_n \cos(z_n a)}{2\sqrt{h - z_n^2}} e^{-\sqrt{h - z_n^2}(x-a)} - f(x) \right| + \\ &+ \left| \sqrt{h - z_n^2} \operatorname{sen}(z_n a) + z_n \cos(z_n a) \right| \left| \frac{e^{\sqrt{h - z_n^2}(x-a)}}{2\sqrt{h - z_n^2}} \right| \end{aligned}$$

Notemos que como  $\lambda_0^2$  es un valor propio de  $H_\infty$ , tenemos que,

$$\lambda_0 \cos(\lambda_0 a) + \sqrt{h - \lambda_0^2} \operatorname{sen}(\lambda_0 a) = 0.$$



Para  $z \in B(\lambda_0^2, \epsilon)$  y  $a \leq x \leq a + n$  definamos

$$g(x) = \frac{\sqrt{h - z^2} \operatorname{sen}(za) - z \cos(za)}{2\sqrt{h - z^2}} e^{-\sqrt{h - z^2}(x-a)} - f(x),$$

y

$$h(z) = \sqrt{h - z^2} \operatorname{sen}(za) + z \cos(za)$$

Entonces  $g(\lambda_0) = h(\lambda_0) = 0$ , y nuevamente por teorema del valor medio, tenemos que

$$|g(z)| \leq c|\sqrt{\lambda_n^2 - i\epsilon} - \lambda_0|,$$

y

$$|h(z)| \leq c|\sqrt{\lambda_n^2 - i\epsilon_n} - \lambda_0|,$$

para alguna constante positiva  $c$ . Por lo tanto,

$$|\psi_n(x) - f(x)| \leq c|\sqrt{\lambda_n^2 - i\epsilon_n} - \lambda_0|.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^R |\psi_n(x) - f(x)|^2 dx &= \int_0^a |\psi_n(x) - f(x)|^2 dx + \int_a^R |\psi_n(x) - f(x)|^2 dx \\ &\leq aR|\sqrt{\lambda_n^2 - i\epsilon_n} - \lambda_0| + c(R - a)|\sqrt{\lambda_n^2 - i\epsilon_n} - \lambda_0| \end{aligned}$$

Así, finalmente obtenemos que

$$\|\psi_n - f\|_{L^2([0,R])} \leq \left(\sqrt{\lambda_n^4 + \epsilon_n^2} - \lambda_0^2\right) cR.$$

□

**Teorema 3.2.1** *Sea  $f$  una función en el espacio  $L^2(\mathbb{R}^+)$  de modo que  $f$  es solución del problema*

$$\begin{aligned} H_\infty f &= \lambda_0 f \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= \lambda_0. \end{aligned}$$

*Sea  $\{z_n^2\}$  una sucesión de frecuencias dispersivas tales que  $z_n^2 \rightarrow \lambda_0^2$  y sea  $\varphi_n$  una solución no trivial de,*

$$\begin{aligned} H_n \varphi_n &= z_n^2 \varphi_n, & x > 0, \\ \varphi_n(0) &= 0, \\ \varphi_n'(0) &= z_n. \end{aligned}$$

Supongamos además que  $z_n^2 = \lambda_n^2 - i\epsilon_n$  (y por tanto  $\lambda_n^2 \rightarrow \lambda_0^2$  y  $\epsilon_n \rightarrow 0$ ). Entonces

$$|\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle - e^{-i(\lambda_n^2 - i\epsilon_n)t}| \leq \left( \sqrt{\lambda_n^4 + \epsilon_n^2} - \lambda_n^2 \right) cR + \epsilon_n$$

*Demostración.* Un cálculo directo muestra que,

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_n, e^{iH_n t} \varphi_n \rangle - \langle f, e^{-iH_n t} f \rangle| &= |\langle \varphi_n - f, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle + \langle f, e^{-iH_n t} (\varphi_n - f) \rangle| \\ &\leq \|\varphi_n - f\| (\|\varphi_n\| + \|f\|) \\ &\leq \left( \sqrt{\lambda_n^4 + \epsilon_n^2} - \lambda_0^2 \right) cR \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle - e^{-i(\lambda_n^2 - i\epsilon_n)t}| &\leq |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle - \langle \varphi_n, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle| + \\ &\quad + |\langle \varphi_n, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon_n)t}| \\ &\leq cR \left( \sqrt{\lambda_n^4 + \epsilon_n^2} - \lambda_0^2 \right) + c\epsilon_n \end{aligned}$$

□

Finalmente, presentamos el resultado siguiente, que establece que, en un sentido físico, un vector propio  $f$  del operador  $H_\infty$  es un estado resonante para  $H_n$ , cuando  $n$  es grande.

**Corolario 3.2.1** *El estado  $f$  del teorema anterior verifica lo siguiente:*

i)  $f$  está localizado en posición, más precisamente,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq ce^{-bR}, \quad c, b > 0$$

ii) El estado  $f$  tiene tiempo de vida grande respecto del operador  $H_n$ . Explícitamente,

$$\int_0^\infty |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle|^2 dt \sim \frac{1}{\epsilon_n^2}$$

*Demostración.* Para  $x \geq a$ , tenemos que

$$f(x) = ce^{-\sqrt{h-\lambda_0}x},$$

de donde se concluye la afirmación i) de inmediato.

Para demostrar ii), notemos que  $z_n^2 = \lambda_n^2 - i\epsilon_n$ , con  $\epsilon_n \rightarrow 0$  y  $\lambda_n^2 \rightarrow \lambda_0^2$ . Luego,

$$|\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle| = |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle - e^{-iz_n t} + e^{iz_n t}|,$$

y, por la desigualdad  $\|a\| + \|b\| \geq \|b\| - \|a\|$ , concluimos que,

$$\begin{aligned} |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle| &\geq |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle - e^{-z_n t}| - |e^{-iz_n t}| \\ &\geq \left( \sqrt{\lambda_n^4 + \epsilon_n^2} - \lambda_0^2 \right) cR + c\epsilon_n - e^{-\epsilon_n t} \end{aligned}$$

tomemos ahora  $S_n = \left( \sqrt{\lambda_n^4 + \epsilon_n^2} - \lambda_0^2 \right) cR + c\epsilon_n$ . Claramente,  $S_n \rightarrow 0$ .

Además,

$$\int_0^T |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle|^2 dt \geq S_n^2 T + \frac{2S_n}{\epsilon_n} (e^{-\epsilon_n T} - 1) - \frac{1}{2\epsilon_n} (e^{-2\epsilon_n T} - 1).$$

Por lo tanto, tomando  $T = \frac{1}{S_n^3}$  obtenemos que,

$$\int_0^{\frac{1}{S_n^3}} |\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle|^2 dt,$$

diverge con orden mayor o igual a  $\frac{1}{\epsilon_n}$ .

□

# Capítulo 4

## La resolvente saliente en $\mathbb{R}^3$

### 4.1 Convergencia de la resolvente saliente en $\mathbb{R}^3$

El objetivo del capítulo 4 es extender radialmente los resultados del capítulo 3 al espacio, es decir, a  $\mathbb{R}^3$ . Para esto consideraremos los operadores

$$H_n = -\Delta + V_n(|x|), \quad H_\infty = -\Delta + V_\infty(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

donde  $V_n(|x|) = h\chi_{(a, a+n)}(|x|)$  y  $V_\infty(|x|) = \chi_{[a, a+\infty)}(|x|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Por simplicidad sólo consideraremos el caso de barreras de potencial que, como función de  $R = |x|$ , son constantes a trozos.

Mencionamos por ejemplo [27], donde se estudian operadores de la forma  $-\Delta + V(x)$  en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Estos resultados se aplican en nuestro caso, donde se obtiene que cada  $H_n$  es un operador autoadjunto absolutamente continuo con espectro  $[0, \infty)$ , mientras que  $H_\infty$  también es autoadjunto pero tiene un número finito de valores propios positivos, cuando  $h$  es suficientemente grande.

En general, cuando  $V(x) \geq 0$  y tiene soporte compacto, el operador  $-\Delta + V(x)$  tiene, a lo más, una cantidad numerable de frecuencias dispersivas.

Así, por ejemplo, en [23] se demuestra que para cada  $H_n$ , existen  $z_{1,n}, \dots, z_{k,n} \in \mathbb{C}$ , en el simiplano inferior  $Imz < 0$ , para los cuales se verifica sólo una de las siguientes posibilidades:

- i) Para cada  $i, n$ , existe  $\varphi_n \in \mathcal{H}^2$ , solución saliente no trivial de  $H_n \varphi_n = z_{i,n} \varphi_n$ .
- ii) Si  $z$  no es ninguno de los  $z_{i,n}$ , entonces dada  $g$  de soporte compacto, existe una única solución  $\varphi_n$  saliente de

$$-\Delta(\varphi_n) + V_n \varphi_n - z \varphi_n = g.$$

Además esta  $\varphi_n$  es analítica, como función de  $z$ , salvo por los polos  $z_{1,n}, \dots, z_{k,n}$ .

Usaremos el hecho que los potenciales  $V_n$  y  $V_\infty$  son radiales para transformar el estudio de la resolvente saliente de  $H_n$  a un problema en la semirecta  $[0, \infty)$  y luego usaremos los resultados del Capítulo 3.

El operador laplaciano  $-\Delta$  representado en coordenadas esféricas corresponde al operador

$$-\Delta = - \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L_\omega$$

donde  $L_\omega = \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}$  corresponde a la parte angular, y

$$- \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

es la parte radial del operador.

Usaremos a continuación descomposición en esferas armónicas, que permite escribir al espacio  $L^2(\mathbb{R}^3)$  como una suma directa de subespacios en cada uno de los cuales  $-\Delta + V(r)$  se representa como un operador en la semirecta  $\mathbb{R}^+$ . Mencionamos por ejemplo el texto [27] para resultados de esta teoría.

Las funciones esféricas armónicas  $\{Y_{\ell,m}\}$  forman una base ortonormal de vectores propios para el operador  $L_\omega$  en  $L^2(S^2)$  y

$$L_\omega(Y_{\ell,m}) = \ell(\ell + 1)Y_{\ell,m}$$

con  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  y  $-\ell \leq m \leq \ell, m \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos ahora una solución  $\psi$  del problema unidimensional,

$$-\psi'' + V(y) = z^2 \psi, \quad y > 0$$

y definamos para  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\varphi(x) = \frac{\psi(|x|)}{|x|}.$$

Entonces,  $\Delta\varphi = \frac{1}{|x|}\psi''(|x|)$  y por lo tanto  $\varphi$  es solución, en  $\mathbb{R}^3$ , de

$$-\Delta\varphi + V(r)\varphi = z^2\varphi, \quad r = |x|.$$

Esto muestra entonces, que toda solución del problema,

$$-\psi'' + V(y)\psi = z^2\psi,$$

puede ser inyectada como solución para el problema,

$$-\Delta\varphi + V(r)\varphi = z^2\varphi, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Haremos uso de este hecho en el siguiente lema.

**Lema 4.1.1** *Sea  $z^2$  una frecuencia dispersiva del operador  $-\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$  donde  $x \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $z^2$  es frecuencia dispersiva del operador*

$$H_n = -\Delta + V_n(|y|), \quad y \in \mathbb{R}^3$$

*Demostración.* Como  $z^2$  es frecuencia dispersiva de  $-\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$ , entonces existe una solución  $\psi$  no trivial del problema

$$\begin{aligned} -\psi'' + V_n(x)\psi &= z^2\psi, & x > 0, \\ \psi(0) &= 0, \end{aligned}$$

tal que  $\psi(x) = ce^{izR}$ , para  $R$  grande.

Para  $y \in \mathbb{R}^3$  definamos ahora,

$$\varphi(y) = \frac{1}{|y|}\psi(|y|).$$

Por el comentario anterior ya sabemos que  $\varphi$  es solución de la ecuación,

$$-\Delta\varphi + V_n(|y|)\varphi = z^2\varphi.$$

Pero además  $\varphi(y) = \frac{ce^{iz|y|}}{|y|}$  cuando  $|y| \rightarrow \infty$ , la cual es precisamente la condición de ser saliente en dimensión  $n = 3$ .

Por lo tanto  $z^2$  es frecuencia dispersiva de  $H_n$ . □

Sea ahora  $f$  un vector propio del operador  $H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\infty(x)$  con valor propio  $\lambda_0$ , entonces  $g(y) = \frac{f(|y|)}{|y|}$  es vector propio de  $H_\infty$  con valor propio  $\lambda_0$ . Si además,  $\{z_n\}$  es una sucesión de frecuencias dispersivas con  $z_n = \lambda_n - i\epsilon_n$  y  $\{\psi_n\}$  es la sucesión de soluciones resonantes asociadas a  $\{z_n\}$  de modo que  $z_n \rightarrow \lambda_0$  y  $\psi_n \rightarrow f$ , entonces, si definimos  $\varphi_n(y) = \frac{\psi_n(|y|)}{|y|}$  se tiene que la ecuación  $\|\varphi_n - g\|_{L^2(B_R)} = c\|\psi_n - f\|_{L^2([0,R])}$ , donde  $B_R$  es la bola de radio  $R > 0$ , centrada en el origen, en  $\mathbb{R}^3$ .

Así,  $\varphi_n \rightarrow g$  en  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ . Además,

$$\langle g, e^{-iH_n t} g \rangle = \langle f, e^{-i(-\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x))t} f \rangle$$

luego, por los resultados del Capítulo 3,

$$|\langle g, e^{-iH_n t} g \rangle - e^{-i(\lambda_n - i\epsilon_n)t}| \leq c\epsilon_n.$$

En otras palabras, para los valores propios de  $H_\infty$  que provienen de valores propios del problema unidimensional, existen frecuencias dispersivas de  $H_n$  que las aproximan.

En lo que sigue de este capítulo, se generaliza este resultado para cualquier vector propio del operador  $H_\infty = -\Delta + V_\infty(|x|)$ .

**Lema 4.1.2** Para  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  sea  $\varphi_\ell$  solución del problema

$$-\varphi_\ell'' + V\varphi_\ell + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\varphi_\ell - z\varphi_\ell = f,$$

$$\varphi_\ell(0) = 0, \quad \varphi_\ell(x) \rightarrow e^{izx} \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

donde  $f$  es una función de soporte compacto.

Supongamos que  $z$  no es frecuencia dispersiva de  $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ . Entonces  $\varphi_\ell$  es exponencialmente decreciente en el soporte de  $V(x)$ , en el sentido del Lema 3.1.6

*Demostración.* Sea  $g = f - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\varphi_\ell$  y  $g_n = g \cdot \chi_{[0,n]}$ , entonces  $g_n$  es de soporte compacto y como  $z$  no es frecuencia dispersiva de  $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , entonces existe una única solución  $u_n$  de

$$\begin{aligned} -u_n'' + Vu_n - zu_n &= g_n \\ u_n(0) &= 0, \\ u_n(x) &= c_n e^{izzx} \text{ para } x \geq n. \end{aligned}$$

Veamos que la sucesión  $\{u_n\}$  es acotada en  $L^2([0, R])$ .

Si suponemos que no es acotada entonces  $\|u_n\| \geq n$ .

Sea  $\gamma_n = \frac{1}{1 + \|u_n\|}$  y  $\theta_n = \gamma_n u_n$ , entonces  $\{\theta_n\}$  es acotada en  $L^2([0, R])$ , luego existe una subsucesión convergente  $\{\theta_{n_k}\}$ . Supongamos que  $\theta_{n_k} \rightarrow \theta_\infty \in H^1([0, R])$ , pero

$$-\theta_{n_k}'' + V\theta_{n_k} - z\theta_{n_k} = \gamma_{n_k} g_{n_k}, \quad \text{para todo } n_k.$$

Luego  $-\theta_\infty'' + V\theta_\infty = z\theta_\infty$  por Lema 3.1.1 y por lo tanto  $z$  es frecuencia dispersiva del operador  $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $\{u_n\}$  es acotado en  $L^2([0, R])$ .

Luego existe una sub-sucesión  $\{u_{n_k}\}$  convergente. Supongamos que  $u_{n_k} \rightarrow u$ ,  $u \in H^1([0, R])$ .

Por Lema 3.1.6,  $u_n$  es exponencialmente decreciente en el soporte de  $V(x)$ . Además  $u_n \rightarrow u$  en  $H^2([0, R])$ , donde  $u$  es solución de

$$\begin{aligned} -u'' + Vu + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}u - zu &= f \\ u(0) &= 0, \\ u(x) &\rightarrow e^{izzx} \text{ cuando } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

y entonces por la unicidad se tiene que  $u = \varphi_\ell$ , por lo tanto  $\varphi_\ell$  es exponencialmente decreciente en el soporte de  $V$ .  $\square$

**Lema 4.1.3** *Supongamos que  $z$  no es frecuencia dispersiva del operador  $H_n = -\Delta + V_n(|y|)$  y sea  $\varphi_n$  solución saliente no trivial de  $\varphi_n = (H_n - z)^{-1}f$ , donde  $f$  es una función de soporte compacto en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\varphi_n$  es exponencialmente decreciente en el soporte de  $V_n(x)$ .*



*Demostración.* Se tiene que

$$-\Delta\varphi_n + V_n\varphi - z\varphi_n = f,$$

y  $\varphi_n$  es saliente. Usando la descomposición en esféricas armónicas, tenemos que,

$$\begin{aligned} -\varphi_{n,\ell}'' + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\varphi_{n,\ell} + V_n\varphi_{n,\ell} - z\varphi_{n,\ell} &= f_\ell \\ \varphi_{n,\ell}(0) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\{\varphi_{n,\ell}\}$  y  $\{f_\ell\}$  representan a  $\varphi_n$  y  $f$  respectivamente.

Debido al Lema 4.1.1 se tiene que  $z$  no es frecuencia dispersiva de  $-\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$ . Luego por lema (4.1.2), cada  $\varphi_\ell$  es exponencialmente decreciente en el soporte de  $V_n(x)$  y entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \sum_\ell \varphi_{n,\ell}(|y|)Y_\ell(w), \quad a \leq |y| \leq a+n \\ &= e^{-c\tau} \sum_\ell Y_{n,\ell}(w) \end{aligned}$$

es decir,  $\varphi_n$  es exponencialmente decreciente en el soporte  $V_n(x)$ . □

**Lema 4.1.4** *Supongamos que  $z$  no es frecuencia dispersiva de ninguno de los operadores*

$$H_n = -\Delta + V_n(|y|), \quad y \in \mathbb{R}^3$$

*Sea  $\psi_n = (H_n - z)^{-1}(f)$ , entonces  $\{\psi_n\}$  es una sucesión acotada en  $L^2(B(0, R))$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\{\psi_n\}$  no es acotada en dicho espacio, entonces existe una sub-sucesión que denotaremos de nuevo por  $\{\psi_n\}$  tal que,

$$\|\psi_n\| \geq n.$$

Como en el capítulo anterior, tomamos  $c_n = \frac{1}{1 + \|\psi_n\|_{\rho_n}}$ , donde  $\|\cdot\|_\rho$  denota la norma en  $L^2$  de la bola de radio  $\rho$  en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, como antes, la sucesión  $\theta_n := c_n\psi_n$  es acotada en  $H^2(B(0, R))$  y tiene una sub-sucesión  $\{\theta_n\}$  convergente

en  $H^1(B(0, R))$ . Supongamos entonces que, cuando  $n$  tiende a infinito,  $\theta_n \xrightarrow{n} \theta_\infty$ , donde  $\theta_\infty \in H^1(B(0, R))$ .

Tenemos que,

$$-\Delta\theta_n + V_n\theta_n - z\theta_n = c_n f$$

y  $\theta_n$  es exponencialmente decreciente en el soporte de  $V_n$ , por el Lema 4.1.3. Como  $f$  tiene soporte compacto y  $c_n$  converge a cero y además  $\theta_\infty \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Tenemos que  $\theta_\infty$  verifica que

$$-\Delta\theta_\infty + V_\infty\theta_\infty = z\theta_\infty.$$

Pero entonces  $z \in \sigma(H_\infty) = [0, \infty)$  lo cual es una contradicción. Tampoco es posible que  $\theta_\infty = 0$  ya que  $\|\theta_\infty\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| \|\psi_n\| = 1$ . Por lo tanto  $\{\psi_n\}$  es acotada en  $L^2$  de  $B(0, R)$ .  $\square$

**Teorema 4.1.1** *Supongamos que  $z$  no es frecuencia dispersiva de los operadores  $H_n = -\Delta + V_n(|y|)$ ,  $y \in \mathbb{R}^3$ .*

*Entonces, para cualquier  $g$  de soporte compacto se tiene que*

$$(H_n - z)_{\text{sal}}^{-1}g \rightarrow (H_\infty - z)^{-1}g,$$

*cuando  $n$  tiende a infinito. Es decir, la resolvente saliente del operador  $H_n$  converge a la resolvente usual de  $H_\infty$ .*

*Demostración.* Sea  $\psi_n = (H_n - z)^{-1}g$  y miremos a  $\{\psi_n\}$  en  $L^2(B(0, R))$ . Entonces por Lema 4.1.4,  $\{\psi_n\}$  es una sucesión acotada.

Sean  $\{\psi_{n_k}\}$ ,  $\{\psi_{n_j}\}$  dos sub-sucesiones de  $\{\psi_n\}$ . Como la inclusión  $H^2(B(0, R)) \hookrightarrow H^1(B(0, R))$  es compacta, existen sub-sucesiones convergentes que denotamos también  $\{\psi_{n_k}\}$ ,  $\{\psi_{n_j}\}$ . Supongamos que  $\psi_{n_k} \rightarrow \psi_\infty$  y  $\psi_{n_j} \rightarrow \varphi_\infty$ . Entonces por Lema 4.1.3 se tiene que  $\psi_\infty, \varphi_\infty \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , y además

$$-\Delta\psi_\infty + V_\infty\psi_\infty + z\psi_\infty = g,$$

$$-\Delta\varphi_\infty + V_\infty\varphi_\infty + z\varphi_\infty = g.$$

Por lo tanto, la diferencia  $\varphi_\infty - \psi_\infty$  satisface,

$$-\Delta(\varphi_\infty - \psi_\infty) + V_\infty(\varphi_\infty - \psi_\infty) = z(\varphi_\infty - \psi_\infty),$$

con  $(\varphi_\infty - \psi_\infty) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Si  $\varphi_\infty \neq \psi_\infty$ , tendríamos que  $z \in \sigma(H_\infty) = [0, \infty)$ , pero esto es absurdo.

Así,  $\varphi_\infty = \psi_\infty$

Como toda sub-sucesión de alguna sub-sucesión de  $\{\psi_n\}$  converge al mismo límite, entonces  $\{\psi_n\}$  converge. Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi_\infty$  existe en  $B(0, R)$  y además

$$-\Delta\psi_\infty + V_\infty\psi_\infty - z\psi_\infty = g.$$

Claramente,  $\psi_\infty = (H_\infty - z)^{-1}g$ , por el Lema 4.1.3 □

Una consecuencia de este teorema, es que permite demostrar que existe estabilidad entre las frecuencias dispersivas de  $H_n$  y los valores propios de  $H_\infty$  en el sentido de que a medida que  $n$  crece, estas se concentran cerca de los valores propios de  $H_\infty$ . Esto es lo que muestra el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.1** *Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $H_\infty f = \lambda_0 f$ . Entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe  $z_0$  en el semiplano complejo inferior, tal que para  $n$  suficientemente grande, la ecuación  $H_n \varphi = z_0 \varphi$  tiene una solución no trivial, cada vez que  $|\lambda_0 - z_0| \leq \epsilon$ .*

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  una curva en el plano complejo, alrededor de  $\lambda_0$ . Explícitamente,

$$\Gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Gamma(t) = \lambda_0 + \epsilon e^{it}.$$

Supongamos que ningún  $H_n$  tiene frecuencias dispersivas sobre  $\Gamma$ , de lo contrario estaría solucionado el problema. Luego, dada  $g$  de soporte compacto, existe una única solución  $\psi_n$ , con  $\psi_n = (H_n - z)_{\text{sal}}^{-1}g$ ,  $\psi_n$  saliente y  $\psi_n$  analítica salvo por una cantidad finita de polos.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} & | \langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle - \langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle | \\ & \leq \|f\| \|[(H_n - z)^{-1} - (H_\infty - z)^{-1}]\|_{L^2(B(0,R))}, \end{aligned}$$

y, como esta última expresión converge a cero, cuando  $n$  tiende a infinito, tenemos que,

$$\langle f, (H_n - z)^{-1}g \rangle \rightarrow \langle f, (H_\infty - z)^{-1}g \rangle,$$

cuando  $n$  tiende a infinito. Esta convergencia es uniforme en  $z \in \Gamma$ , de modo que,

$$\oint_{\Gamma} \langle f, (H_n - z)^{-1} g \rangle dz \rightarrow \oint_{\Gamma} \langle f, (H_{\infty} - z)^{-1} g \rangle dz.$$

Además,

$$\begin{aligned} \langle f, (H_{\infty} - z)^{-1} g \rangle &= \langle (H_{\infty} - z)^{-1} f, g \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - z} \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Pero  $\oint_{\Gamma} \frac{1}{\lambda_0 - z} dz \neq 0$ , luego para  $n$  suficientemente grande y, por lo tanto,

$$\oint_{\Gamma} \langle f, (H_n - z)^{-1} g \rangle dz \neq 0$$

cuando  $n$  converge a infinito. Esto implica que  $\langle f, (H_n - z)^{-1} g \rangle$  tiene un polo en la bola  $B(\lambda_0, \epsilon)$ , es decir, existe  $z_0 \in B(\lambda_0, \epsilon)$ , con  $\text{Im}(z_0) < 0$  y existe  $\varphi$  no trivial tal que  $H_n(\varphi) = z_0 \varphi$  y  $\varphi$  saliente.  $\square$

El siguiente resultado muestra que también hay una especie de estabilidad entre los vectores propios del operador límite  $H_{\infty}$  y las frecuencias dispersivas de  $\mathcal{H}_n$ .

**Teorema 4.1.2** *Sea  $\lambda_0$  un valor propio de  $H_{\infty}$ . Si fijamos  $R > 0$ , entonces existe un vector propio  $f$  de  $H_{\infty}$  con  $H_{\infty} f = \lambda_0 f$ , y existe una sucesión  $\varphi_n$  de soluciones resonantes de  $H_n$  tales que  $\|\varphi_n - f\|_{L^2(B(0, R))} \rightarrow 0$ .*

*Demostración.* Por corolario 4.1.1, sabemos que existe una sucesión de frecuencias dispersivas  $\{z_n\}$  tales que  $z_n \rightarrow \lambda_0$  y asociada a cada  $z_n$  existe una solución resonante  $\varphi_n$  tal que

$$-\Delta \varphi_n + V_n(|x|) \varphi_n = z_n \varphi_n.$$

Podemos elegir  $\varphi_n$  de tal forma que  $\int_{B(0, R)} |\varphi_n|^2 = 1$ , y por lo tanto la sucesión  $\{\varphi_n\}$  es acotada en  $L^2(B(0, R))$ , entonces la sucesión  $\{\Delta \varphi_n\}$  es acotada en  $L^2(B(0, R))$ . Por lo tanto,  $\{\varphi_n\}$  es una sucesión acotada en  $H^2(B(0, R))$ , y tiene una subsucesión convergente  $\{\varphi_{n_k}\}$  tal que  $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$  para  $\varphi \in H^1(B(0, R))$ . Además,

$$-\Delta \varphi + V_{\infty}(|x|) \varphi = \lambda_0 \varphi$$

en  $B(0, R)$ .

Usando las técnicas anteriores, se demuestra fácilmente que  $\varphi$  puede extenderse a una función  $f$  en todo  $\mathbb{R}^3$  que están en el dominio de  $H_\infty$ .  $\square$

## 4.2 Decaimiento casi-exponencial

Con el objetivo de encontrar estados que decaigan casi exponencialmente, generalizamos el siguiente resultado que fue demostrado por Lavine en [22].

En este resultado usaremos la notación siguiente:

Dado  $V_1(r)$ , definido para  $r \geq 0$ , sea  $\psi_2(r; z)$  una solución de la ecuación,

$$-\psi'' + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi + V_1(r)\psi = z^2\psi,$$

donde  $\ell$  es un entero no negativo y  $z^2 = \lambda + i\delta$  con  $\lambda$  real y  $\delta \geq 0$ .

Sea  $\beta_2(r, \lambda) = \frac{\partial \psi_2}{\partial r}(r, \sqrt{\lambda}) / \psi_2(r, \sqrt{\lambda})$ , para  $\lambda \geq 0$  y  $r \geq 0$ .

**Teorema 4.2.1** *Supongamos que  $V_1(r) \geq 0$  y tiene soporte compacto. Entonces,*

- i) Podemos elegir  $\psi_2(r; z)$  no trivial de modo que sea asintótico a  $e^{izr}$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ .*
- ii) Si  $\varphi$  es un vector unitario en  $L^2(0, \infty)$  que resuelve la ecuación,*

$$-\varphi'' + V_1(r)\varphi + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\varphi = (\lambda_0 - i\epsilon)\varphi,$$

*para  $0 < r < R$ , con  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi'(R) - \varphi(R)\beta_2(R, \lambda_0) = 0$ , para algún  $R$  grande, entonces*

$$|\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t}| \leq c\epsilon,$$

*para todo  $t$ , donde  $H$  es el operador autoadjunto  $-\frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ .*

El operador

$$H_1 = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + V_1(r),$$

actuando en  $L^2(0, \infty)$  es autoadjunto (ver [26]).

El hamiltoniano libre  $H_0$  es el operador autoadjunto

$$H_0 = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2},$$

con condición de frontera  $\varphi(0) = 0$ , para  $\ell = 0$ .

El potencial  $V_1(r)$  es no negativo y tiene soporte compacto, pero el potencial total  $V(r)$  no es acotado en  $r = 0$ , por lo que la demostración de este Teorema que da Lavine en [22] y que requiere que el potencial sea acotado, debe ser generalizada.

El punto esencial es la existencia de dos soluciones linealmente independientes específicas de la ecuación homogénea,

$$-\psi'' + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi + V_1(r)\psi = z_2\psi, \quad r > 0, \quad (4.1)$$

en el caso en que  $\text{Im}z \leq 0$ .

Esta ecuación tiene en  $r = 0$  un punto singular regular y sus soluciones son de la forma  $\psi(r) = r^\ell g(r)$ , con  $g(r)$  analítica en el origen. De esta manera, para  $\ell > 0$ , existe una solución no trivial  $\psi_1$  definida en  $[0, a)$  que verifica  $\psi_1(0) = 0$  y que puede ser extendida a todo  $\mathbb{R}$ .

Por otra parte, el término  $\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$  es integrable en una vecindad de infinito. Entonces por [7] la ecuación (4.1) tiene una solución que se comporta como una solución de la ecuación

$$-\psi'' = z^2\psi.$$

Así, existe una solución no trivial de (4.1) que es asintótica a  $e^{izr}$ , lo que demuestra i).

El resto de la demostración es exactamente como en [22], o sea, primero se encuentra una fórmula explícita para la resolvente en  $\varphi$ ,  $(H_1 - \lambda - i\delta)^{-1}\varphi$ , en términos de  $\psi_1$  y  $\psi_2$  y luego se calcula el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

Por último, se usa,

$$\langle \varphi, e^{-iH_1 t} \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-i\lambda t} \text{Im} \langle \varphi, (H_1 - \lambda - i0)^{-1} \varphi \rangle d\lambda$$

Consideremos ahora una solución  $\varphi$  del problema en  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , vale decir,  $\varphi$  satiface

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi + V\varphi &= (\lambda_0 - i\epsilon)\varphi, \\ \varphi &\text{ saliente.} \end{aligned}$$

donde  $V(x) = h\chi_{(a, a+n)}(|x|)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$

Descompongamos  $\varphi$  en esféricas armónicas, explícitamente,

$$\varphi(x) = \sum_{\ell, m} c_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\omega) \varphi_{\ell}(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

donde  $c_{\ell, m} = \frac{1}{\|\varphi_{\ell, m}\|}$  y cada  $\varphi_{\ell}$  satisface la ecuación diferencial en la semirecta,

$$-\varphi_{\ell}'' + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + h\chi_{[a, a+n]}(r)\varphi_{\ell} = (\lambda_0 - i\epsilon)\varphi_{\ell}, \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

con la condición inicial  $\varphi_{\ell}(0) = 0$ .

Tomemos el potencial

$$V_{\ell}(r) = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + h\chi_{[a, a+n]}(r), \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

Tenemos entonces que, para cada  $\ell$ ,  $\varphi_{\ell}$  es una solución resonante. Es decir, :

$$\begin{aligned} -\varphi_{\ell}'' + V_{\ell}\varphi_{\ell} &= (\lambda_0 - i\epsilon)\varphi_{\ell}, \\ \varphi_{\ell} &\text{ saliente,} \\ \varphi_{\ell}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Poniendo la restricción de que cada  $\varphi_{\ell}$  cumple las hipótesis del teorema de Lavine, podemos concluir que para cada  $\ell$ ,  $\varphi_{\ell}$  tiene un comportamiento casi exponencial como función de  $t$ , o sea

$$|\langle \varphi_{\ell}, e^{-iH_{\ell}t} \varphi_{\ell} \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t}| < c\epsilon,$$

donde

$$H_{\ell} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\ell}(x).$$

Por otra parte tenemos que,

$$e^{-iHt}\varphi = \sum_{\ell, m} c_{\ell, m} Y_{\ell, m}(\omega) e^{-iH_{\ell}t} \varphi_{\ell}.$$

Luego,

$$\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle = \sum_{\ell, m} |c_{\ell, m}|^2 \langle \varphi_{\ell}, e^{-iH_{\ell} t} \varphi_{\ell} \rangle.$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t} &= e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t} \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t} \sum_{\ell, m} |c_{\ell, m}|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon)t}| \leq \epsilon \sum_{\ell, m} |c_{\ell, m}|^2.$$

Así, las soluciones de,

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi + V_n \varphi &= (\lambda_0 - i\epsilon) \varphi, \\ \varphi &\text{ saliente,} \end{aligned}$$

donde  $V_n = h\chi_{(a, a+n)}(|x|)$  decaen casi exponencialmente.  $\square$

Sea  $R > 0$  y sea  $\lambda_0$  un valor propio de  $H_{\infty}$ , entonces por teorema 4.1.2 sabemos que existe una sucesión de soluciones resonantes  $\{\varphi_n\}$  y una sucesión de frecuencias dispersivas  $\{z_n\}$  tales que  $H_n \varphi_n = z_n \varphi_n$  con  $z_n \rightarrow \lambda_0$  y  $\varphi_n \rightarrow f$ , donde  $H_{\infty} f = \lambda_0 f$ . Supongamos que  $z_n = \lambda_n - i\epsilon_n$ , de modo que  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  y  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . Anteriormente ya habíamos establecido que para cada  $\varphi_n$ ,

$$|\langle \varphi_n, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle - e^{i(\lambda_n - i\epsilon_n)t}| < c\epsilon_n.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_n, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle - \langle f, e^{iH_n t} f \rangle| &= |\langle \varphi_n - f, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle + \langle f, e^{-iH_n t} (\varphi_n - f) \rangle| \\ &\leq \|\varphi_n - f\| \|\varphi_n\| + \|f\| \|\varphi_n - f\| \end{aligned}$$

El lado derecho de esta expresión converge a cero, cuando  $n$  tiende a infinito, de modo que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n$  tal que,

$$|\langle \varphi_n, e^{-iH_n t} \varphi_n \rangle - \langle f, e^{-iH_n t} f \rangle| < \epsilon.$$

Finalmente obtenemos que,

$$|\langle f, e^{-iH_n t} f \rangle - e^{-i(\lambda_0 - i\epsilon_n)t}| \leq (\epsilon + \epsilon_n) c.$$

Los resultados principales del Capítulo 3 son un caso particular de la descomposición en esféricas armónicas para el caso en que  $\ell = 0$ . Sin embargo, nosotros



lo hemos tratado en el capítulo previo debido, en primer lugar, a que el Capítulo 4 se apoya en ciertos aspectos del Capítulo 3, específicamente, en el hecho de que las soluciones de la ecuación  $-\varphi'' + h\xi_{[a, a+n]}(x)\varphi - z^2\varphi = g$ ,  $x \in \mathbb{R}$  son, en cierto sentido, exponencialmente decrecientes en el intervalo  $[a, a+n]$ .

Otro punto importante es el de que los potenciales que aparecen como producto de la descomposición en esféricos armónicos son no acotados en el origen y no tienen soporte compacto.

Por otra parte, las estimaciones para el decaimiento casi-exponencial del Capítulo 3 son mejores que las del Capítulo 4.

Queremos concluir este Capítulo haciendo notar que una generalización del problema resuelto a dimensiones distintas de tres no es trivial mediante las técnicas acá usadas, esto se debe básicamente a que en la descomposición en esféricos armónicos del Laplaciano en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

el factor  $\frac{n-1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$  no se puede eliminar mediante cambio de variables, lo cual dificulta trabajar con el operador de Schrödinger.

Sin embargo, aplicaciones físicas para dimensiones mayores a tres son poco probables.

## Capítulo 5

# Convergencia de la medida espectral

En este capítulo consideramos nuevamente una sucesión de barreras de potencial en la semirecta. Cada barrera de largo  $n$  deja escapar a cualquier estado pero, en el límite, cuando el potencial se extiende a infinito, aparecen estados ligados que quedan atrapados para siempre y que corresponden a vectores propios del hamiltoniano para la barrera infinita.

Nuestra intención nuevamente es demostrar que el vector propio del operador límite es un estado que decae casi exponencialmente. Sin embargo, en este capítulo resolvemos este problema de forma esencialmente diferente. Haciendo un cambio en la escala de tiempo, podemos demostrar que la medida espectral asociada a la barrera de largo  $n$ ,  $\frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, E_\lambda^n \varphi \rangle$ , converge a la medida de probabilidad  $\frac{1}{(x-b)^2+1} dx$  (el lorentziano). Este resultado implica a su vez el decaimiento casi exponencial mencionado.

Sea  $a > 0$  y  $h > 0$ .

Por simplicidad consideramos operadores para barreras de altura constante, es decir, para cada entero positivo  $n$ , sea

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x), \quad (5.1)$$

donde  $V_n(x) = h\chi_{[a, a+n]}(x)$ . Cada  $H_n$ , con la condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ , es un operador autoadjunto absolutamente continuo en  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , con espectro  $[0, \infty)$ .

Consideremos además, el operador límite

$$H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\infty(x), \quad (5.2)$$

sobre  $L^2(\mathbb{R}^+)$ , donde  $V_\infty(x) = h\chi_{[a,\infty)}(x)$ , también con la condición de Dirichlet en el origen.

Es fácil verificar que si suponemos que la altura  $h$  de la barrera  $V_\infty$  satisface  $h > a^2\pi^2$ , entonces el espectro de  $H_\infty$  consiste de un número finito de valores propios  $\{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$  con  $\lambda_i < h$ ,  $i = 1, \dots, k$  y una parte absolutamente continua  $[h, \infty)$ .

Usando la fórmula de la resolvente, es posible demostrar que cuando  $n$  tiende a infinito, el operador  $H_n$  converge, en el sentido fuerte de la resolvente, al operador  $H_\infty$ .

Un cálculo directo muestra que los valores propios del operador  $H_\infty$  están caracterizados por la ecuación trascendental

$$\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}a) = -\sqrt{\frac{\lambda}{h-\lambda}}. \quad (5.3)$$

Sea  $\lambda_1$  el menor de los valores propios de  $H_\infty$ , y sea  $\varphi$  el vector propio correspondiente. Entonces, tenemos que  $\frac{a^2\pi}{2} \leq \lambda_1 \leq a^2\pi^2$ . La elección del más pequeño de estos valores propios simplifica los cálculos posteriores, pero no es esencial en los resultados que obtendremos.

Excepto por una constante de normalización, podemos suponer que para  $x \in [0, a]$ ,

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1}x)}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

Además, de la ecuación trascendental (5.3) sigue que,

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1}a) = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{h}} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos}(\sqrt{\lambda}a) = -\sqrt{\frac{h-\lambda}{h}}.$$

Por otra parte, puesto que cada operador  $H_n$  es absolutamente continuo, tenemos que, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\langle \varphi, e^{-i(H_n - \lambda_1)t} \varphi \rangle \rightarrow 0$$

para cada  $n$ .

Pero para cada tiempo  $t$ ,

$$\langle \varphi, e^{-i(H_n - \lambda_1)t} \varphi \rangle \rightarrow \langle \varphi, e^{-i(H_\infty - \lambda_1)t} \varphi \rangle = \|\varphi\|^2,$$

cuando  $n$  tiende a infinito, debido a la convergencia fuerte de la resolvente.

Este hecho aparentemente peculiar, es frecuente al considerar límites iterados de funciones de varias variables. Para entender mejor este hecho, nos gustaría considerar  $t$  y  $n$  convergiendo a infinito simultáneamente. Con este objetivo nos preguntamos si existe una sucesión  $\{t_n\}$ , con  $t_n$  tendiendo a infinito, tal que

$$\langle \varphi, e^{-i(H_n - \lambda_1)t_n} \varphi \rangle \rightarrow r.$$

Claramente, se debe tener que  $0 \leq r \leq 1$ . Si lo anterior fuese cierto, tomamos  $\tau > 0$  fijo y consideramos  $r = e^{-\tau}$ .

Con  $\Gamma_n = \frac{\tau}{t_n}$  obtendríamos entonces que,

$$\langle \varphi, e^{-i(\frac{H_n - \lambda_1}{\Gamma_n})\tau} \varphi \rangle \rightarrow e^{-\tau}.$$

En lo que sigue vamos a demostrar la existencia de tal sucesión  $\{\Gamma_n\}$  y la vamos a estimar explícitamente en términos de los parámetros  $n$ ,  $h$  y  $a$ .

La idea principal de esta demostración es el hecho que el grupo unitario asociado a  $H_n$  es esencialmente, la transformada de Fourier de valores límites de su resolvente. Explícitamente,

$$\langle \varphi, e^{-i(\frac{H_n - \lambda_1}{\Gamma_n})\tau} \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-i\frac{(\lambda - \lambda_1)}{\Gamma_n}t} P_n(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty e^{-i\mu t} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n \mu) d\mu \quad (5.4)$$

donde  $P_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \varphi, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle = \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, E_\lambda^n \varphi \rangle$  y  $\{E_\lambda^n\}$  es la medida espectral asociada de  $H_n$ .

También,

$$e^{-t} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\mu t} \cdot \frac{1}{1 + \mu^2} d\mu \quad (5.5)$$

Así, basta demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n \lambda) = \frac{1}{(\lambda - b)^2 + 1},$$

para  $\{\Gamma_n\}$  adecuado.

## 5.1 Resolvente para $H_n$

Comencemos por estudiar explícitamente la resolvente del operador  $H_n$ .

Dado  $k \in \mathbf{C}$  con  $\text{Im } k \geq 0$ , sean  $\psi_1(x, k)$  y  $\psi_2(x, k)$  las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria,

$$-\psi'' + V_n \psi = k^2 \psi, \quad x > 0$$

que satisfacen las condiciones:

a)  $\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1'(0) = 1.$

b)  $\psi_2(0) = 1, \quad \psi_2(x) = c_2(k)e^{ikx}, \quad \text{para } x \geq a + n.$

Observemos que los operadores  $H_n$  no tiene frecuencias dispersivas que satisfacen  $\text{Im } k \geq 0$ . En otras palabras,  $\{\psi_1, \psi_2\}$  es linealmente independiente. Claramente, el Wronskiano  $W(\psi_1, \psi_2) \equiv \psi_1 \psi_2' - \psi_1' \psi_2$ , es constante, luego basta con evaluarlo en  $x = 0$ , y así,  $W(\psi_1, \psi_2) = -1$ .

Este hecho permite establecer una condición para  $\psi_1(x, k)$ , para  $x$  grande. Explícitamente, si  $x \geq a + n$ , entonces,

$$W(\psi_1, \psi_2) = c_2(k)(ik\psi_1(x, k) - \psi_1'(x, k))e^{ikx} = -1$$

Por otra parte, el conjugado  $\bar{\psi}_2(x, k)$  es solución de la ecuación,

$$-\bar{\psi}_2'' + V_n \bar{\psi}_2 = \bar{k}^2 \bar{\psi}_2, \text{ para } x > 0.$$

Además, satisface las condiciones

$$\bar{\psi}_2(0) = 1, \quad \bar{\psi}_2(x) = \overline{c_2(k)} e^{-i\bar{k}x}, \quad \text{para } x \geq a + n,$$

con  $\text{Im } k \geq 0$ .

**Lema 5.1.1** Sea  $k \in \mathbb{C}$  tal que  $\lambda = k^2$  es un número real. Entonces  $\psi_2$  y  $\bar{\psi}_2$  son dos soluciones de  $-\psi'' + V_n \psi = \lambda \psi$  que satisfacen

$$W(\psi_2, \bar{\psi}_2) = -2ik |c_2 k|^2$$

*Demostración.* Basta calcular  $W(\psi_2, \bar{\psi}_2)$  para  $x \geq a + n$ . □

**Lema 5.1.2** Suponga que  $k \in \mathbb{C}$  es tal que  $k^2 = \lambda$  es real y  $\text{Im } k \geq 0$ . Entonces  $\psi_1 = c \cdot \text{Im}(\psi_2)$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\{\psi_2, \bar{\psi}_2\}$  son linealmente independientes, luego existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tales que  $\psi_1 = \alpha \psi_2 + \beta \bar{\psi}_2$ .

Usando la condición inicial  $\psi_1(0) = 0$  obtenemos que  $\alpha = -\beta$  y, por lo tanto,  $\psi_1 = \alpha \psi_2 - \alpha \bar{\psi}_2 = \alpha \cdot 2i \text{Im}(\psi_2)$ . □

**Nota:** Observemos que,

i) para  $k$  real y  $\lambda = k^2$ , tenemos que  $\psi_1(x, \lambda)$  es real, donde, por comodidad, escribimos  $\psi_1(x, \lambda)$  en lugar de  $\psi_1(x, k)$ .

ii) Para  $x \geq a + n$ , tenemos que  $\frac{\psi_2'}{\psi_2}(x, \lambda) = i\sqrt{\lambda}$ , y,

$$\text{iii) } \frac{\psi_1'}{\psi_1}(a+n, \lambda) = \sqrt{\lambda} \frac{\operatorname{Re}\psi_2}{\operatorname{Im}\psi_2}(a+n, \lambda).$$

**Lema 5.1.3** *Suponga que  $\lambda = k^2$ . Entonces*

$$\int_a^b (V_\infty(x) - V_n(x) + \lambda - \lambda_1)\varphi(x)\psi_i(x)dx = W(\psi_i, \varphi)|_a^b,$$

donde  $\varphi$  es un vector propio de  $H_\infty$  asociado al menor valor propio  $\lambda_1$ .

*Demostración.* Tenemos que,

$$\begin{aligned} (W(\varphi, \psi_i))' &= (\varphi\psi_i' - \varphi'\psi_i)' \\ &= \varphi\psi_i'' - \varphi''\psi_i \\ &= (V_n - V_\infty - \lambda + \lambda_1)\varphi\psi_i \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. □

Vamos a usar este resultado para calcular  $\int_a^b \psi_i\varphi$  en distintos intervalos  $(a, b)$ .

**Lema 5.1.4** *Para  $0 \leq x \leq a+n$  tenemos que,*

$$\begin{aligned} \text{i) } \int_x^\infty \psi_i\varphi &= -\frac{1}{\lambda - \lambda_1 + h} W(\psi_i, \varphi)(x), \quad y, \\ \text{ii) } \int_0^x \psi_i\varphi &= \frac{1}{\lambda - \lambda_1} W(\psi_i, \varphi)|_0^{a+n} + \frac{1}{\lambda - \lambda_1 + h} W(\psi_i, \varphi)|_{a+n}^x. \end{aligned}$$

**Lema 5.1.5** *Para  $a+n \leq x$  tenemos que,*

$$\begin{aligned} \text{i) } \int_x^\infty \psi_i\varphi &= -\frac{1}{\lambda - \lambda_1 + h} W(\psi_i, \varphi)(x), \quad y, \\ \text{ii) } \int_0^x \psi_i\varphi &= \frac{1}{\lambda - \lambda_1} W(\psi_i, \varphi)|_0^{a+n} + \frac{1}{\lambda - \lambda_1 + h} W(\psi_i, \varphi)|_{a+n}^x. \end{aligned}$$

La demostración de los lemas (5.1.4) y (5.1.5) son consecuencias directas del lema (5.1.3).

**Lema 5.1.6** Dado  $k \in \mathbb{C}$  con  $\text{Im}k \geq 0$ , sea

$$\begin{aligned}\psi(x, k^2) &= -W(\psi_1, \psi_2)^{-1} \{ \psi_1(x) \int_x^\infty \psi_2 \varphi + \psi_2(x) \int_0^x \psi_1 \varphi \} \\ &= \psi_1(x) \int_x^\infty \psi_2 \varphi + \psi_2(x) \int_0^x \psi_1 \varphi.\end{aligned}$$

Entonces,  $\psi$  es una solución de

$$\begin{aligned}-\psi'' + V_n \psi &= k^2 \psi + \varphi, \quad \text{para } x > 0, \\ \psi(0) &= 0.\end{aligned}$$

**Corolario 5.1.1** *i) Para  $\text{Im} k > 0$ , tenemos que  $\psi \in L^2$ . De hecho  $\psi$  es una función exponencialmente decreciente. Además,  $\psi = (H_n - k^2)^{-1} \varphi$ .*

*ii) Para  $k \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\psi \in L^\infty$  y,*

*iii)  $\lim_{\text{Im}k \rightarrow 0} \psi(x, k^2) = \psi(x, \lambda)$ , donde  $k = \lambda + i\epsilon$ .*

Ahora bien, por el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos que,

$$\langle \varphi, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle = \int_0^\infty \bar{\varphi}(x) \psi(x, \lambda) dx,$$

donde,

$$\psi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) \int_x^\infty \psi_2 \varphi + \psi_2(x, \lambda) \int_0^x \psi_1 \varphi. \quad (5.6)$$

Notemos que a pesar de que la función  $\psi(\cdot, \lambda)$  definida anteriormente no pertenece a  $L^2$ , sigue teniendo sentido calcular el producto interior  $\langle \varphi, \psi \rangle$ , ya que para  $x \geq a$ , la función  $\varphi$  es una función exponencialmente decreciente y  $\psi$  es esencialmente acotada. Debido a este hecho, podemos encontrar una fórmula explícita para  $\langle \varphi, (H_n - \lambda - i0)^{-1} \varphi \rangle$  y es esto lo que calculamos en la siguiente proposición.

Con el objeto de simplificar la escritura, hacemos el cambio de variables:  $s = \lambda - \lambda_1$ .



**Proposición 5.1.1**

$$\begin{aligned} \langle \varphi, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle &= \frac{-1}{s} \int_0^{a+n} |\varphi|^2 - \frac{1}{s+h} \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 \\ &+ \frac{h^2}{s^2(s+h)^2} \left( \frac{(\varphi' - \beta(\lambda)\varphi)^2}{\beta(\lambda) - i\sqrt{\lambda}} + (\varphi' - \beta(\lambda)\varphi) \right) (a+n) \end{aligned}$$

donde  $\beta(\lambda) = \beta_n(\lambda) = \frac{\psi_1'}{\psi_1}(a+n)$ .

*Demostración.* Vamos a calcular

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)\psi(x)dx,$$

donde  $\psi = (H - \lambda - i0)^{-1}\varphi$ , separando la integral en los intervalos  $[0, a+n]$ ,  $[a+n, \infty)$ .

Por la representación (5.6), tenemos que:

$$\int_0^{a+n} \varphi(x)\psi(x)dx = \int_0^{a+n} \varphi(x) \left\{ \psi_1(x) \int_x^{\infty} \psi_2 \varphi + \psi_2(x) \int_0^x \psi_1 \varphi \right\} dx$$

Para calcular las integrales de  $\psi_2 \varphi$  y  $\psi_1 \varphi$  hacemos uso de los lemas 5.1.4 y 5.1.5. Así,

$$\begin{aligned} \int_0^{a+n} \varphi(x)\psi(x)dx &= \int_0^{a+n} \varphi(x) \left\{ \psi_1(x) \left[ \frac{1}{s} W(\psi_2, \varphi) \Big|_x^{a+n} \right. \right. \\ &- \left. \frac{1}{s+h} W(\psi_2, \varphi)(a+n) \right] + \psi_2(x) \cdot \frac{1}{s} W(\psi_1, \varphi) \Big|_0^x \Big\} dx \\ &= \int_0^{a+n} \varphi(x) \left\{ \frac{1}{s} (-\psi_1(x)W(\psi_2, \varphi)(x) + \psi_2(x)W(\psi_1, \varphi)(x)) \right\} \\ &+ \varphi_1(x) \left( \frac{1}{s} W(\psi_2, \varphi)(a+n) - \frac{1}{s+h} W(\psi_2, \varphi)(a+n) \right) dx \\ &= \int_0^{a+n} \varphi(x) \left\{ \frac{1}{s} (-\psi_1(\psi_2\varphi' - \psi_2'\varphi) + \psi_2(\psi_1\varphi' - \psi_1'\varphi)) \right. \\ &+ \left. \psi_1(x) \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+h} \right) W(\psi_2', \varphi)(a+n) \right\} dx. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^{a+n} \varphi(x)\psi(x)dx = \int_0^{a+n} \varphi(x) \left\{ \frac{1}{s}\varphi W(\psi_1, \psi_2) + \psi_1 \frac{h}{(s)(s+h)} W(\psi_2, \varphi)(a+n) \right\} dx.$$

Usando nuevamente el Lema 5.1.5, obtenemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^{a+n} \varphi(x)\psi(x)dx &= -\frac{1}{s} \int_0^{a+n} |\varphi|^2 + \frac{h}{s(s+h)} W(\psi_2, \varphi)(a+n) \int_0^{a+n} \varphi\psi_1 \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^{a+n} |\varphi|^2 + \frac{h}{s(s+h)} W(\psi_2, \varphi)(a+n) \\ &\quad \cdot \frac{1}{s} W(\psi_1, \varphi) \Big|_0^{a+n} \\ &= -\frac{1}{s} \int_0^\infty |\varphi|^2 + \frac{h}{(s(s+h)(\lambda - \lambda_1 + h))} W(\psi_2, \varphi) W(\psi_2, \varphi)(a+n) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \int_{a+n}^\infty \varphi(x)\psi(x, \lambda)dx &= \int_{a+n}^\infty \varphi(x) \left\{ \psi_1(x) \int_x^\infty \psi_2\varphi + \psi_2(x) \int_0^x \psi_1\varphi \right\} dx \\ &= \int_{a+n}^\infty \varphi(x) \left\{ -\psi \cdot \frac{1}{s+h} W(\psi_2, \varphi)(x) + \psi_2(x) \left( \frac{1}{s} W(\psi_1, \varphi)(a+n) + \frac{1}{s+h} W(\psi_1, \varphi) \Big|_{a+n}^x \right) \right\} dx \\ &= \int_{a+n}^\infty \varphi(x) \left\{ \frac{1}{s+h} (-\psi_1(\psi_2\varphi' - \psi_2'\varphi) + \psi_2(\psi_1\varphi' - \psi_1'\varphi)) \right\} dx \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 & + \psi_2 \cdot \frac{1}{s} W(\psi_1, \varphi)(a+n) - \psi_2 \cdot \frac{1}{s+h} W(\psi_1, \varphi)(a+n) \} dx \\
 & = \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 \cdot \frac{1}{s+h} W(\psi_1, \psi_2) \\
 & + \frac{h}{s(s+h)} W(\psi_1, \varphi)(a+n) \int_{a+n}^{\infty} \varphi \psi_2 \\
 & = \frac{-1}{s+h} \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 + \frac{h}{s(s+h)} \cdot \\
 & \cdot W(\psi_1, \varphi)(a+n) \left( \frac{-1}{s+h} W(\psi_2, \varphi)(a+n) \right) \\
 & = \frac{-1}{s+h} \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 - \frac{h}{s(s+h)^2} W(\psi_1, \varphi) W(\psi_2, \varphi)(a+n)
 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \varphi(x) \psi(x, \lambda) dx & = -\frac{1}{s} \int_0^{a+n} |\varphi|^2 - \frac{1}{s+h} \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 \\
 & + W(\psi_1, \varphi) W(\psi_2, \varphi)(a+n) \cdot \frac{h}{s(s+h)} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+h} \right) \\
 & = -\frac{1}{s} \int_0^{a+n} |\varphi|^2 - \frac{1}{s+h} \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 \\
 & + \frac{h^2}{s^2(s+h)^2} W(\psi_1, \varphi) W(\psi_2, \varphi)(a+n).
 \end{aligned}$$

Pero, usando que  $W(\psi_1, \psi_2) = -1$ , podemos deducir,

$$\begin{aligned}
 W(\psi_1, \varphi) W(\psi_2, \varphi) & = (\psi_1 \varphi' - \psi_1' \varphi)(\psi_2 \varphi' - \psi_2' \varphi) \\
 & = -\left( \varphi' - \frac{\psi_1'}{\psi_1} \varphi \right) \left( \varphi' - \frac{\psi_2'}{\psi_2} \varphi \right) \left( \frac{\psi_2'}{\psi_2} - \frac{\psi_1'}{\psi_1} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que  $\psi_2(x) = c_2 e^{i\sqrt{\lambda}x}$ , para  $x$  grande. Entonces,

$$\frac{\psi_2'}{\psi_2}(a+n, \lambda) = i\sqrt{\lambda}.$$

Sea ahora

$$\beta(\lambda) \equiv \beta_n(\lambda) = \frac{\psi_1'(a+n, \lambda)}{\psi_1(a+n, \lambda)}. \quad (5.7)$$

Entonces

$$\begin{aligned} W(\psi_1, \varphi)W(\psi_2, \varphi)(a+n) &= \frac{-(\varphi' - \beta(\lambda)\varphi)(\varphi' - i\sqrt{\lambda}\varphi)}{i\sqrt{\lambda} - \beta(\lambda)} \\ &= \frac{(\varphi' - \beta(\lambda)\varphi)(\varphi' - \beta(\lambda)\varphi)}{\beta(\lambda) - i\sqrt{\lambda}} + (\varphi' - \beta(\lambda)\varphi). \end{aligned}$$

□

## 5.2 Medida Espectral para $H_n$

Estamos ya en condiciones de poder calcular explícitamente la forma cuadrática de la medida espectral del operador  $H_n$ , en el vector  $\varphi$ . En esta dirección apunta el siguiente lema:

**Lema 5.2.1** *Sea*

$$P_n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, E_\lambda^n \varphi \rangle, \quad \text{o equivalentemente}$$

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \varphi, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle$$

*Entonces*

$$\begin{aligned} \pi P_n(\lambda) &= \frac{h^2 \sqrt{\lambda}}{(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_1 + h)^2} \cdot \frac{(\varphi' - \beta(\lambda)\varphi)^2}{\beta^2(\lambda) + \lambda} (a+n) \\ &= \frac{2\sqrt{\lambda}\lambda_1 h}{(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_1 + h)^2} \cdot \frac{(h - \lambda_1)^{1/2}}{(a\sqrt{h} - \lambda_1 + 1)} \cdot e^{-2\sqrt{h-\lambda_1}n} \\ &\quad \cdot \frac{(\sqrt{h - \lambda_1} + \beta(\lambda))^2}{\beta^2(\lambda) + \lambda} \end{aligned}$$

donde  $\beta(\lambda)$  está dada por (5.7).

*Demostración.* Por proposición (5.1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle &= -\frac{1}{s} \int_0^{a+n} |\varphi|^2 - \frac{1}{s+h} \int_{a+n}^{\infty} |\varphi|^2 \\ &+ \frac{h^2}{s^2(s+h)^2} \left( \frac{(\varphi' - \beta_n(\lambda)\varphi)^2}{\beta(\lambda) - i\sqrt{\lambda}} + (\varphi' - \beta(\lambda)\varphi) \right) (a+n). \end{aligned}$$

Habíamos observado anteriormente que  $\beta(\lambda)$  es real. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \varphi, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi \rangle &= \frac{h^2}{s^2(s+h)^2} \text{Im} \left\{ \frac{(\varphi' - \beta(\lambda)\varphi)^2}{\beta(\lambda) - i\sqrt{\lambda}} (a+n) \right\} \\ &= \frac{h^2}{(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_1 + h)^2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda} (\varphi' - \beta_n(\lambda)\varphi)^2 (a+n)}{\beta^2(\lambda) + \lambda} \end{aligned}$$

Un cálculo directo permite escribir el vector propio  $\varphi(x)$ , para  $x \geq a+n$ , de manera explícita. En efecto,

$$\varphi(x) = c \text{sen}(\sqrt{\lambda_1} a) e^{-\sqrt{h-\lambda_1}(x-a)},$$

donde,

$$c = \frac{2\sqrt{h-\lambda_1}}{a\sqrt{h-\lambda_1}+1} \quad \text{y} \quad \text{sen}^2(\sqrt{\lambda_1} a) = \frac{\lambda_1}{h}$$

Luego,

$$(\varphi' - \beta_n(x)\varphi)^2 (a+n) = \frac{2\sqrt{h-\lambda_1}}{a\sqrt{h-\lambda_1}+1} \cdot \frac{\lambda_1}{h} e^{-2\sqrt{h-\lambda_1}n} (\beta_n(\lambda) + \sqrt{h-\lambda_1})^2.$$

Finalmente, obtenemos que,

$$P_n(\lambda) = \frac{2\sqrt{\lambda}\lambda_1 h}{(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_1 + h)^2} \cdot \frac{\sqrt{h-\lambda_1}}{a\sqrt{h-\lambda_1}+1} e^{-2\sqrt{h-\lambda_1}n} \cdot \frac{(\beta_n(\lambda) + \sqrt{h-\lambda_1})^2}{(\beta_n^2(\lambda) + \lambda)}$$

□

Cálculo de  $\beta_n(\lambda)$ .

Recordemos que  $\beta(\lambda)$  es la derivada logarítmica de  $\psi_1(x, \lambda)$  en el punto  $x = a + n$ , donde  $\psi_1(x, \lambda)$  es la solución de

$$-\psi'' + V_n\psi = \lambda\psi, \quad \text{para } x > 0,$$

con las condiciones iniciales  $\psi(0) = 0$ ,  $\psi'(0) = 1$ .

La función  $\psi_1(x, \lambda)$  puede ser calculada explícitamente. Además, sólo nos interesan sus valores en el caso en que  $\lambda$  esté cerca del valor propio  $\lambda_1$ . Este a su vez satisface  $\lambda_1 \in [0, h]$ , por lo que podemos suponer que  $\lambda < h$ . En este caso,

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}, & 0 \leq x \leq a \\ c_1 e^{\sqrt{h-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{h-\lambda}x}, & a \leq x \leq a + n. \end{cases}$$

Como  $\psi_1 \in C^1$ , debe cumplirse que

$$\text{i) } \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} = c_1 e^{\sqrt{h-\lambda}a} + c_2 e^{-\sqrt{h-\lambda}a},$$

y que,

$$\text{ii) } \cos(\sqrt{\lambda}a) = \sqrt{h-\lambda}(c_1 e^{\sqrt{h-\lambda}a} - c_2 e^{-\sqrt{h-\lambda}a}).$$

De aquí se deduce que

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}} \right) e^{-\sqrt{h-\lambda}a},$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}} \right) e^{\sqrt{h-\lambda}a}.$$

Podemos ahora calcular la derivada logarítmica  $\beta_n(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} \beta_n(\lambda) &= \frac{\psi_1'(a+n, \lambda)}{\psi_1(a+n, \lambda)} = \frac{\sqrt{h-\lambda}(c_1 e^{\sqrt{h-\lambda}(a+n)} - c_2 e^{-\sqrt{h-\lambda}(a+n)})}{c_1 e^{\sqrt{h-\lambda}(a+n)} + c_2 e^{-\sqrt{h-\lambda}(a+n)}} \\ &= \sqrt{h-\lambda} \cdot \frac{\left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{\sqrt{h-\lambda}n} - \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{-\sqrt{h-\lambda}n}}{\left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{\sqrt{h-\lambda}n} + \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{-\sqrt{h-\lambda}n}} \\ &= \sqrt{h-\lambda} \left[ -1 + \frac{2\left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{\sqrt{h-\lambda}n}}{\left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{\sqrt{h-\lambda}n} + \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\text{cos}(\sqrt{\lambda}a)}{\sqrt{h-\lambda}}\right) e^{-\sqrt{h-\lambda}n}} \right] \\ &= \sqrt{h-\lambda} \left[ -1 + \frac{2\left(\text{tg}(\sqrt{\lambda}a) + \sqrt{\frac{\lambda}{h-\lambda}}\right) e^{\sqrt{h-\lambda}n}}{\left(\text{tg}(\sqrt{\lambda}a) + \sqrt{\frac{\lambda}{h-\lambda}}\right) e^{\sqrt{h-\lambda}n} + \left(\text{tg}(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\frac{\lambda}{h-\lambda}}\right) e^{-\sqrt{h-\lambda}n}} \right] \end{aligned}$$

Así, obtenemos finalmente,

$$\beta_n(\lambda) = -\sqrt{h-\lambda} + 2 \frac{\sqrt{h-\lambda} \cdot t(\lambda)}{t(\lambda) + t_1(\lambda) e^{-2\sqrt{h-\lambda}n}}$$

donde,

$$t(\lambda) = \text{tg}(\sqrt{\lambda}a) + \sqrt{\frac{\lambda}{h-\lambda}},$$

y

$$t_1(\lambda) = \text{tg}(\sqrt{\lambda}a) - \sqrt{\frac{\lambda}{h-\lambda}}.$$

Ahora introducimos un cambio en la escala de tiempo. Como ya mencionamos, éste se traduce en un cambio de escala en la variable de energía  $\lambda$ . Consideremos entonces la transformación  $\lambda = \lambda_1 + \Gamma_n x$ , con  $\Gamma_n > 0$  adecuado.

**Teorema 5.2.1** Para

$$\Gamma_n = r e^{-2\sqrt{h-\lambda_1}n}, \quad r = \frac{2\sqrt{\lambda_1}\alpha\sqrt{h-\lambda_1}}{h}, \quad \alpha = -\frac{t_1(\lambda_1)}{t'(\lambda_1)},$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x-b)^2 + 1},$$

$$\text{donde } b = \frac{h - 2\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_1(h - \lambda_1)}}.$$

*Demostración.*

Reemplazando en la expresión para  $P_n(\lambda)$  que aparece en el Lema 5.2.1, el valor para  $\beta_n(\lambda)$  recién calculado, obtenemos,

$$\begin{aligned} \pi P_n(\lambda) &= \frac{2h\sqrt{\lambda}\lambda_1\sqrt{h-\lambda_1}}{(\lambda-\lambda_1+h)^2(a\sqrt{h-\lambda_1}+1)} \cdot \frac{1}{(\beta_n(\lambda)+\lambda)} \\ &\cdot \left[ 2\sqrt{h-\lambda} \cdot \frac{t(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{h-\lambda_1}n}}{t(\lambda)+t_1(\lambda)e^{-\sqrt{h-\lambda_1}n}} + \frac{e^{-\sqrt{h-\lambda_1}n}}{\sqrt{h-\lambda}+\sqrt{h-\lambda_1}} \right]^2 \end{aligned}$$

Después del cambio de variables  $\lambda = \lambda_1 + \Gamma_n x$ , la expresión anterior puede escribirse en términos de las funciones,

$$F_n(x) = \frac{2h\sqrt{\lambda_1 + \Gamma_n x}\lambda_1\sqrt{h-\lambda_1}}{(\Gamma_n x + h)^2(a\sqrt{h-\lambda_1}+1)},$$

$$G_n(x) = \frac{1}{\beta_n^2(\lambda_1 + \Gamma_n x) + \lambda_1 + \Gamma_n x},$$

y

$$\begin{aligned} H_n(x) &= 2\sqrt{h-\lambda_1-\Gamma_n x} \cdot \frac{t(\lambda_1 + \Gamma_n x)}{\Gamma_n x} \\ &\cdot \frac{\sqrt{\Gamma_n}e^{-\sqrt{h-\lambda_1}n}}{t(\lambda_1 + \Gamma_n x) + t_1(\lambda_1 + \Gamma_n x)e^{-2\sqrt{h-\lambda_1-\Gamma_n x}n}} \\ &+ \frac{\sqrt{\Gamma_n}e^{-\sqrt{h-\lambda_1}n}}{\sqrt{h-\lambda_1-\Gamma_n x} + \sqrt{h-\lambda_1}}. \end{aligned}$$

Explícitamente,



$$\Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) = F_n(x) G_n(x) H_n^2(x).$$

Sea ahora  $\alpha = -\frac{t_1(\lambda_1)}{t'(\lambda_1)}$  y tomemos  $\Gamma_n = r e^{-2\sqrt{h-\lambda_1}n}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) &= 2\sqrt{h-\lambda_1} \cdot \frac{t'(\lambda_1)}{t'(\lambda_1) + t_1(\lambda_1) \cdot \frac{1}{rx}} - \sqrt{h-\lambda_1} \\ &= \sqrt{h-\lambda_1} \left( \frac{rx t'(\lambda_1) - t_1(\lambda_1)}{rx t'(\lambda_1) + t_1(\lambda_1)} \right) \\ &= \sqrt{h-\lambda_1} \left[ \frac{rx + \alpha}{rx - \alpha} \right]. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) &= \frac{1}{(h-\lambda_1) \left( \frac{rx + \alpha}{rx - \alpha} \right)^2 + \lambda_1} \\ &= \frac{(rx - \alpha)^2}{(h-\lambda_1)(rx + \alpha)^2 + \lambda_1(rx - \alpha)^2} \\ &= \frac{(rx - \alpha)^2}{h(rx + \alpha)^2 - 4\lambda_1 r \alpha x}. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) &= 2\sqrt{h-\lambda_1} t'(\lambda_1) \cdot \frac{\frac{1}{rx}}{t'(\lambda_1) + t_1(\lambda_1) \cdot \frac{1}{rx}} \\ &= 2\sqrt{h-\lambda_1} \cdot \frac{1/\sqrt{rx}}{1 - \alpha \cdot \frac{1}{rx}} \\ &= \frac{2\sqrt{h-\lambda_1} \sqrt{r}}{rx - \alpha}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
 \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) &= \frac{2\lambda_1^{3/2}(h - \lambda_1)}{h(a\sqrt{h - \lambda_1} + 1)} \cdot \frac{(rx - \alpha)^2}{h(rx + \alpha)^2 - 4\lambda_1 r \alpha x} - \frac{4(h - \lambda_1)r}{(rx - \alpha)^2} \\
 &= \frac{8\lambda_1^{3/2}(h - \lambda_1)^{3/2}r}{h(a\sqrt{h - \lambda_1} + 1)} \cdot \frac{1}{h(rx + \alpha)^2 - 4\lambda_1 r \alpha x} \\
 &= \frac{8\lambda_1^{3/2}(h - \lambda_1)^{3/2} \cdot r}{h(a\sqrt{h - \lambda_1} + 1)} \cdot \frac{1}{hr^2 \left[ \left( x - \frac{\alpha(h - 2\lambda_1)}{hr} \right)^2 + \frac{4\lambda_1 \alpha^2 (h - \lambda_1)}{h^2 r^2} \right]}.
 \end{aligned}$$

Pero  $r = \frac{2\sqrt{\lambda_1} \alpha \sqrt{h - \lambda_1}}{h}$ , entonces,

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) = \frac{4\lambda_1(h - \lambda_1)}{h(a\sqrt{h - \lambda_1} + 1)\alpha \left[ \left( x - \frac{(h - 2\lambda_1)}{2\sqrt{\lambda_1}(h - \lambda_1)} \right)^2 + 1 \right]}.$$

Calculemos ahora el valor de  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{-t_1(\lambda_1)}{t'(\lambda_1)} = \frac{2\sqrt{\frac{\lambda_1}{h - \lambda_1}}}{\frac{h}{2\sqrt{\lambda_1}} \cdot \frac{[a(h - \lambda_1) + \sqrt{h - \lambda_1}]}{(h - \lambda_1)^2}} \\
 &= \frac{4\lambda_1(h - \lambda_1)^2}{h\sqrt{h - \lambda_1}[a(h - \lambda_1) + \sqrt{h - \lambda_1}]}.
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión anterior, obtenemos,

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) = \frac{4\lambda_1(h - \lambda_1)^2}{h(a\sqrt{h - \lambda_1} + 1) \cdot \frac{4\lambda_1(h - \lambda_1)^2}{h\sqrt{h - \lambda_1}[a(h - \lambda_1) + \sqrt{h - \lambda_1}]} \cdot [(x - b)^2 + 1]},$$

donde  $b = \frac{h - 2\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_1}(h - \lambda_1)}$ . Por lo tanto,

$$\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n P_n(\lambda_1 + \Gamma_n x) = \frac{\sqrt{h - \lambda_1}[a(h - \lambda_1) + \sqrt{h - \lambda_1}]}{(a\sqrt{h - \lambda_1} + 1)(h - \lambda_1)} \cdot \frac{1}{(x - b)^2 + 1} = \frac{1}{(x - b)^2 + 1}$$

□

Recordemos que, excepto por una constante, la expresión  $\langle \varphi, e^{-iH_n t} \varphi \rangle$  es la transformada de Fourier de la medida espectral  $P_n(\lambda)$ . Del mismo modo,  $e^{-t-ibt}$  es, excepto por una constante, la transformada de Fourier del lorentziano  $\frac{1}{(x-b)^2 + 1}$ . Usando este hecho, obtenemos,

**Corolario 5.2.1** *Con las notaciones anteriores, se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, e^{-i(H_n - \lambda_1) \frac{t}{\Gamma_n}} \varphi \rangle = e^{-t-ibt}$$

**Nota:** Este resultado muestra que en algún sentido,  $|\langle \varphi, e^{-iH_n t} \varphi \rangle|^2$  se comporta, para  $n$  grande, como la exponencial  $e^{-\Gamma_n t}$ , para  $t$  en compactos. Así, como  $\Gamma_n$  es pequeño, obtenemos que la probabilidad  $|\langle \varphi, e^{-iH_n t} \varphi \rangle|^2$  se parece a 1, por una gran cantidad de tiempo  $t$  y, cuando  $t$  tiende a infinito, decae finalmente a cero.

### 5.3 Barrera de potencial de altura infinita

Consideremos esta vez una partícula cuántica que se mueve en la semirrecta  $[0, \infty)$  afectada por una barrera de potencial de altura  $n$  y ancho fijo  $b$ . El hamiltoniano de este sistema es entonces el operador

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + n\chi_{[\pi, \pi+b]}(x),$$

con la condición de Dirichlet  $\varphi(0) = 0$ .

Nuevamente, el operador  $H_n$ , actuando en  $L^2[0, \infty)$  es autoadjunto y su espectro es absolutamente continuo.

Cuando calculamos el límite cuando  $n$  tiende a infinito, el espacio  $L^2([0, \infty))$  se descompone en la suma directa  $L^2([0, \pi]) \oplus L^2([\pi, \pi+b]) \oplus L^2([\pi+b, \infty))$ , y el hamiltoniano  $H_n$  se descompone en la suma directa  $H_\infty = H_I \oplus H_E$ , donde  $H_I$  es el laplaciano negativo con condición de Dirichlet  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$  y  $H_E$  también es el laplaciano pero con condición  $\varphi(\pi+b) = 0$ . Además,  $H_\infty$  se anula en la región  $L^2[\pi, \pi+b]$ , que corresponde a la barrera de altura infinita.

El operador  $H_I$  tiene espectro discreto, dado por  $\sigma(H_I) = \{j^2 / j \in \mathbb{N}\}$  y, para cada valor propio  $j^2$ , la función  $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} jx$  es el vector propio normalizado correspondiente.

Nuestro propósito es demostrar una suerte de decaimiento exponencial asintótico de los vectores propios del operador  $H_I$ , para los operadores  $H_n$ . Para esto, consideramos un vector propio de  $H_I$  fijo, explícitamente, tomamos

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} jx, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi, \end{cases}$$

con  $j$  un número natural fijo.

Este modelo fue considerado por Emch y Sinha en [8], donde se puede encontrar la demostración de las afirmaciones anteriores.

Como antes, para estudiar la dinámica  $\langle \varphi_0, e^{-iH_n t} \varphi_0 \rangle$ , basta estudiar la medida espectral,

$$p_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \langle \varphi_0, (H_n - \lambda - i0)^{-1} \varphi_0 \rangle \quad (5.8)$$

Nuevamente comenzamos por estudiar la resolvente de  $H_n$  en el semiplano complejo superior.

Sea, entonces,  $\varphi = (H_n - k^2)^{-1} \varphi_0$ , donde  $k^2 = \lambda + i\delta$ ,  $\delta > 0$  y  $\operatorname{Im} k > 0$ . Entonces,  $\varphi$  es la única solución del problema,

$$\left. \begin{aligned} -\varphi'' + V_n(x)\varphi &= k^2\varphi + \varphi_0, & \text{para } x > 0 \\ \varphi(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$\varphi \in L^2([0, \infty)).$$

Como en la sección anterior, usaremos el método de variación de parámetros, el cual permite escribir la solución  $\varphi$  en términos de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada.

Sean  $\psi_1(x) = \psi_1(x, k)$ ,  $\psi_2(x) = \psi_2(x, k)$  entonces las soluciones de la ecuación homogénea,

$$-\psi'' + V_n(x)\psi = k^2\psi,$$

que satisfacen las condiciones de frontera,

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) = 0, \psi_1'(0) = 1, & \quad y \\ \psi_2(x) = e^{ikx}, & \quad \text{para } x \geq \pi + b. \end{aligned} \right\}$$

Sabemos que el wronskiano  $W = W(\psi_1, \psi_2)$  es constante y distinto de cero, puesto que todo  $k \in \mathbb{C}$  con  $Im\ k \geq 0$  no es una frecuencia dispersiva.

**Lema 5.3.1** *Con las notaciones anteriores, tenemos que, para  $Im\ k > 0$ ,*

$$\varphi(x) = -\frac{1}{W}(\psi_1(x) \int_x^\pi \psi_2(y)\varphi_0(y)dy + \psi_2(x) \int_0^x \psi_1(y)\varphi_0(y)dy) \quad (5.10)$$

es la única solución del problema (5.9).

*Demostración.* Sólo hay que verificar que  $\varphi(x) \in L^2$ , lo cual sigue del hecho que, para  $Im\ k > 0$ , la función  $\psi_2(x)$  es exponencialmente decreciente.  $\square$

**Nota:** Tomando  $\delta \rightarrow 0$ , vale decir, tomando  $\psi_1(x), \psi_2(x)$  soluciones de

$$-\psi'' + V_n(x)\psi = \lambda\psi, \quad x > 0,$$

con  $\lambda$  real, que satisfacen,

$$\begin{aligned} \psi_1(0) = 0, \psi_1'(0) = 1, y \\ \psi_2(x) = e^{i\sqrt{\lambda}x}, x \geq \pi + b, \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\varphi = (H_n - \lambda - i0)^{-1}\varphi_0$$

y está dado por (5.10). En otras palabras, podemos calcular explícitamente los valores de la resolvente  $(H_n - z)^{-1}\varphi_0$ , cuando  $z$  se aproxima al eje real. Además, obtenemos que  $(H_n - \lambda - i0)^{-1}\varphi_0$  es una función acotada.

Fijemos un valor propio  $\lambda_0 = j^2$  de  $H_I$ .

Por el Lema 5.1.3 tenemos que para  $0 \leq c \leq d \leq \pi$ :

$$\int_c^d \psi_i \varphi = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} W(\psi_i, \varphi)|_c^d.$$

En particular,

$$i) \int_x^\pi \psi_2(y)\varphi_0(y)dy = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} W(\psi_2, \varphi_0) \Big|_x^\pi$$

y,

$$ii) \int_0^x \psi_1(y)\varphi_0(y)dy = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} W(\psi_1, \varphi_0) \Big|_0^x.$$

De aquí se obtiene  $\varphi = (H_n - \lambda - i0)^{-1}$  está dada por,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)W} (\psi_1(x)W(\psi_2, \varphi_0)(\pi) + W\varphi_0(x)) \\ &= -\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} \cdot \frac{W(\psi_2, \varphi_0)(\pi)}{W(\psi_1, \psi_2)(\pi)} \psi_2(x) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} \varphi_0(x). \end{aligned}$$

Sigue inmediatamente que,

**Lema 5.3.2** Para  $\varphi = (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1}\varphi_0$ , tenemos que,

i) Si  $0 \leq x \leq \pi$ , entonces,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \left( \frac{W(\psi_2, \varphi_0)}{W(\psi_1\psi_2)}(\pi)\psi_1(x) + \psi_0(x) \right).$$

ii) Si  $x > \pi$ , entonces,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} \frac{W(\psi_2, \varphi_0)}{W(\psi_1, \psi_2)} \psi_2(x).$$

**Lema 5.3.3**

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0(H_n - \lambda - i0)^{-1}\varphi_0 \rangle &= -\frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2} \frac{W(\psi_2, \varphi_0)W(\psi_2, \varphi_0)}{W(\psi_2, \psi_2)} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_0^\pi \varphi_0^2(x)dx \end{aligned}$$

Para  $0 \leq x \leq \pi$ , podemos calcular explícitamente, obtenemos  $\varphi_0(x) = \text{sen}(\lambda_0 x)$  y  $\psi_1(x)\psi_2(x) = \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}$ . Luego, tenemos que,  $\varphi_0(\pi) = 0$ ,  $\varphi_0'(\pi) = \pm\lambda_0$ ,  $\psi_1(\pi) = \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}}$  y  $\psi_1'(\pi) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi)$ . Así,

$$W(\psi_2, \varphi_0)W(\psi_2, \varphi_0)(\pi) = \frac{\text{sen } \sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} \lambda_0$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_0, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi_0 \rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \frac{\psi_2(\pi) \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \cdot \lambda_0}{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)\psi_2'(\pi) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)\psi_2(\pi)} \\ & \quad - \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_0^\pi \varphi_0^2(x) dx \end{aligned}$$

**Corolario 5.3.1**

$$\langle \varphi_0, (H_n - \lambda - i \cdot 0)^{-1} \varphi_0 \rangle = \frac{-\lambda_0 \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{(\lambda - \lambda_0)^2} \cdot \frac{1}{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) \frac{\psi_2'(\pi)}{\psi_2(\pi)} - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi)}$$

Supongamos ahora que  $\frac{\psi_2'(\pi)}{\psi_2(\pi)} = A + iB$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \varphi_0, (H_n - \lambda - i0)^{-1} \varphi_0 \rangle &= \frac{\lambda_0 \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{(\lambda - \lambda_0)^2} \cdot \text{Im} \frac{1}{A \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + iB \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)} \\ &= \lambda_0 \left( \frac{\text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)}{\lambda - \lambda_0} \right)^2 \frac{B}{(A \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\pi))^2 + B^2 \text{sen}^2(\sqrt{\lambda}\pi)}. \end{aligned}$$

Queremos ahora calcular las constantes  $A$  y  $B$ . Para ésto, estudiemos la solución  $\psi_2$  de la ecuación diferencial,

$$-\psi'' + V_n(x)\psi = \lambda\psi,$$

para  $\pi < x \leq \pi + b$ , que satisface

$$\psi(x) = e^{i\sqrt{\lambda}x}, \quad \text{para } x \geq \pi + b.$$

La solución general de la ecuación tiene la forma,

$$\psi_2(x) = c_1 e^{\sqrt{n-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{n-\lambda}x},$$

donde  $c_1, c_2$  están sujetos a la condición de que  $\psi_2$  es continuo con derivada continua. Se obtiene así que,

$$\frac{\psi_2'}{\psi_2}(\pi) = \sqrt{n-\lambda} \frac{[-\sqrt{n-\lambda}\eta_- + i\sqrt{\lambda}\eta_+]}{\sqrt{n-\lambda}\eta_+ - i\sqrt{\lambda}\eta_-}$$

donde  $\eta_-$  y  $\eta_+$  están dados por,

$$\eta_- = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{n-\lambda}b} - e^{-\sqrt{n-\lambda}b}),$$

$$\eta_+ = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{n-\lambda}b} + e^{-\sqrt{n-\lambda}b}).$$

Se tiene entonces que,

$$A = -\frac{n\sqrt{n-\lambda}\eta_+\eta_-}{n\eta_+^2 - \lambda}, \quad y$$

$$B = \frac{(n-\lambda)\sqrt{\lambda}}{n\eta_+^2 - \lambda},$$

y, por lo tanto, obtenemos desde el corolario anterior una fórmula explícita para la medida espectral  $p_n(\lambda)$ .

**Proposición 5.3.1** *La derivada de la medida espectral en  $\varphi_0$ ,  $P_n(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi_0, E_\lambda^n \varphi_0 \rangle$  está dado por*

$$p_n(\lambda) = \alpha(\lambda) \frac{\sqrt{\lambda}(n-\lambda)}{\lambda(n-\lambda) \operatorname{sen}^2(\sqrt{\lambda}\pi) - \lambda^2 \operatorname{cos}(\sqrt{\lambda}\pi) + n[\sqrt{n-\lambda}\eta_- \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + \sqrt{\lambda}\eta_+ \operatorname{cos}(\sqrt{\lambda}\pi)]^2}$$

$$\text{donde } \alpha(\lambda) = \frac{2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi)^2}{\pi(\lambda - \lambda_0) * 2}.$$

*Demostración.* Por reemplazo inmediato de los cálculos anteriores.

La fórmula explícita para  $P_n(\lambda)$  dada por la Proposición 5.3.1 fue demostrado inicialmente en [8] usando ideas totalmente distintas, que involucran una expansión



en funciones propias generalizadas. Nuestra demostración sólo usa técnicas de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Cuando  $\lambda$  está cerca de  $\lambda_0$  el factor  $\alpha(\lambda)$  se mantiene acotado. De hecho, este factor converge a  $\frac{2}{\pi^2}$  cuando  $\lambda$  tiende a  $\lambda_0$ . Al reemplazar  $\lambda$  por  $\lambda_0 + \Gamma_n x$  con  $\Gamma_n \rightarrow 0$ , cuando  $n$  tiende a infinito tendremos que dicho factor converge uniformemente para  $x$  en conjuntos compactos.

El factor restante en la fórmula para  $\rho_n(\lambda)$ , es calculado después de un cómputo extremadamente largo.

Sabemos a priori que cuando  $n$  tiende a infinito  $p_n(\lambda)$  converge en algún sentido, a la delta de Dirac  $\delta(\lambda - \lambda_0)$ .

En efecto, como  $H_n \rightarrow H_\infty$  en el sentido fuerte de la resolvente, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \varphi_0, (H_n - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi_0 \rangle &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \langle \varphi_0, (H_\infty - \lambda - i\epsilon)^{-1} \varphi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\epsilon}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

que converge a  $\delta(\lambda - \lambda_0)$ , cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Sin embargo, un cálculo directo muestra que,

$$P_n(\lambda_0) = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{j(n - j^2)}{-j^4 + nj^2\eta_+(\lambda)}$$

lo cual converge a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Este hecho no es una contradicción. La explicación es que cuando  $n$  crece,  $P_n(\lambda)$  se acerca a la delta  $\delta(\lambda - \lambda_0)$  pero su mayor masa la tiene en un punto  $\lambda_n$  distinto de  $\lambda_0$  y que converge a  $\lambda_0$ .

Como en [8], consideremos la función  $F_n(\lambda) = \sqrt{n - \lambda}\eta_- \text{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) + \sqrt{\lambda}\eta_+ \text{cos}(\sqrt{\lambda}\pi)$ .

La ecuación trascendental

$$F_n(\lambda) = 0$$

tiene soluciones  $\lambda_n$  tales que  $\lambda_n$  tiende a  $\lambda_0$  cuando  $n$  tiende a infinito. Este hecho está demostrado también en [8], donde además se verificó que, cuando  $n$  es grande,  $P_n(\lambda)$  está concentrado exactamente en  $\lambda_n$ . Más aún, estos autores también obtienen, después de un cambio de escala explícito, la convergencia al lorentziano.  $\square$

**Teorema 5.3.1** *Existe  $\Gamma_n > 0$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n \sqrt{n} = 0$  tal que*

$$\Gamma_n P_n(\lambda_n + \Gamma_n x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2},$$

*cuando  $n$  tiende a infinito. La convergencia es puntual y en norma  $L^1$  en compactos.*

*Demostración.* Ver [8]. □

Como ya mencionamos,  $P_n$  es la transformada de Fourier de  $\langle \varphi_0, e^{-iH_n t} \varphi_0 \rangle$ , de modo que se obtiene,

**Corolario 5.3.2**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_0, e^{-i(H_n - \lambda_n) \frac{\tau}{\Gamma_n}} \varphi_0 \rangle = e^{-\tau}$$

*y la convergencia es uniforme para  $\tau$  en compactos.*

Así, reintroduciendo el tiempo  $t = \frac{\tau}{\Gamma_n}$  se obtiene que la probabilidad

$$|\langle \varphi_0, e^{-iH_n t} \varphi_0 \rangle|^2$$

se comporta, para  $n$  grande, como la exponencial  $e^{-2\Gamma_n t}$ .

# Conclusiones

El problema resuelto en esta tesis muestra que los vectores propios del operador límite  $H_\infty$  son estados que decaen casi-exponencialmente para cada operador  $H_n$ .

Cabe preguntarse entonces si estos son los únicos estados los cuales tienen este comportamiento, es decir, si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  pertenece a la parte absolutamente continua entonces  $\langle \varphi, e^{-iH_n t} \varphi \rangle$  no debería mostrar un decaimiento casi exponencial.

Otro punto que resulta importante de destacar es el hecho que nosotros estudiamos solo potenciales constantes a trozos, lo que permitió resolver los problemas en forma explícita. Podría pensarse entonces en considerar una sucesión arbitraria de barreras de potencial  $\{V_n\}$ , con las hipótesis que  $V_n$  es acotado, no negativa y de soporte compacto y además que  $V_n$  converge puntualmente a un potencial de ancho infinito  $V_\infty$ .

Finalmente, también sería interesante considerar otras normas para las estimaciones del decaimiento de  $\langle \varphi, e^{-iH_n t} \varphi \rangle$ . Aquí sólo consideramos la norma  $L^\infty$  en el tiempo, pero sería interesante estudiar también la norma  $\| \cdot \|_2$ .

# Bibliografía

- [1] L. Accardi, C. Fernández, H. Prado y R. Rebolledo. Mean Quantum Sojourn Time. Por aparecer en *Open Systems and Information Dynamics*, Kluwer Academic Publishers.
- [2] W.O. Amrein, Josef M. Jauch, K.B. Sinha. Scattering Theory in Quantum Mechanics. *Lecture Notes and Supp. in Phys.* 1977.
- [3] A. S'á Barreto, M. Zworski. Existence of Resonances in Potential Scattering. *Comm. Pure Appl. Math.*, **49** (1996), N° 12, 1271–1280.
- [4] J.T. Beale. Scattering Frequencies of Resonators. *Communications Pure and Applied Mathematics*, **XXVI**, 549–563 (1973).
- [5] F.A. Berezin and M.A. Shubin. The Schrödinger Equation. *Math. and its Appl.* Kluwer Academic Publishers.
- [6] H. Brezis. Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones. Editorial Alianza, 1983.
- [7] J.E. Coddington, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations. Mc Graw-Hill, 1955.
- [8] Emch-Sinha. Quantization in a non perturbative model. *J. Math. Phys.*, **20**:7, July 1999.
- [9] Claudio A. Fernández. Resonances in Scattering by a Resonator. *Indiana University Mathematics Journal*, **34**:1, 1985.
- [10] C. Fernández. Spectral concentration for the Laplace operator in the exterior of a resonator. *J. Math. Phys.*, **26**:3, 1985.
- [11] C. Fernández, R. Lavine. Lower Bounds for Resonance widths in Potential and Obstacle Scattering. *Comm. Math. Phys.* **128**, 263–284 (1990).

- [12] C. Fernández, R. Rebolledo. On Quantum Resonance. *Quantum Probability and Related Topics*.
- [13] G.A. Hagedorn and B. Meller. Resonances in a Box. Preprint.
- [14] I.W. Herbst. Exponential Decay in the Stark Effect. *Comm. Math. Phys.* (1980) N° 3, 197–205.
- [15] P. Hislop, J.M. Sigal. Introduction to Spectral Theory with Applications to Schrödinger Operators. *Applied Mathematical Sciences*, 113, Springer, 1996.
- [16] L.P. Horwitz and J.P. Mardian. The Decay–Scattering System. 1:1, 225–254, (1971).
- [17] W. Hunziker. Resonances, metastable states and exponential decay laws in perturbation theory. *Comm. Math. Phys.* 132, 177–188, (1990).
- [18] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, Berlin. 1966.
- [19] King. Exponential decay near resonances. *Lett. Math. Phys.* 23 (1991), 215–222.
- [20] P. Lax, R. Phillips. *Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1976.
- [21] R. Lavine. Spectral density and sojourn times, Atomic Scattering Theory. *J. Nutall ed.*, University of Western Ontario, London, Ontario, 1978.
- [22] R. Lavine. Exponential Decay. Differential Equations and Mathematical Physics *Proceedings of the International Conference. Univ. of Alabama at Birmingham*, March 13–17, 1994.
- [23] B. Loe. A pole–free strip for potential scattering. *J. of Diff. Eq.*, 99, 112–138, (1992).
- [24] J. von Neumann. *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*. Publicaciones del Instituto de Matemáticas Jorge Juan, Madrid, 1949.
- [25] K.R. Parthasaraty. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*. Birkhäuser, 1992.
- [26] D.B. Pearson. *Quantum Scattering and Spectral Theory*. Academic Press, 1998.
- [27] M.Reed & B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, II, III, IV.
- [28] B. Simon. Resonances and complex scaling: a rigorous overview. *Int. J. Quant. Chem.*, 14, 529–542, (1978).

- [29] K.B. Sinha. Time Delay and Resonance in Simple Scattering. Preprint.
- [30] E. Skibsted. Truncated Gamow functions,  $\alpha$ -decay and the exponential law. *Comm. Math. Phys.*, 104 (1986), 591-604.
- [31] A. Soffer, M. Weinstein. Time Dependent. Resonance Theory. *Phys. Rev. D*(3)18 (1978), N° 8, 2914-2929.
- [32] E.C.G. Sudarshan, C.B. Chiu and V. Gorini. Decaying States as complex energy eigenvectors in generalized quantum mechanics. Preprint.