

UCH-FC
DOC-M
E 643
C. 1



CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE MODELOS DE GEL'FAND PARA CIERTOS GRUPOS FINITOS CLÁSICOS

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctora en Ciencias con mención en Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Natalia González Guzmán

Diciembre, 2013

Director de Tesis: **Dr. Jorge Soto-Andrade.**

Co-Director de Tesis: **Dr. Rolando Pomareda.**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO



Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por la candidata

Natalia González Guzmán

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctora en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 25 de Noviembre de 2013.

Director de Tesis

Dr. Jorge Soto-Andrade.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Jorge Soto-Andrade", written over a horizontal line.

Co-Director de Tesis

Dr. Rolando Pomareda.

A large, stylized handwritten signature in blue ink, appearing to read "Rolando Pomareda", written over a horizontal line.

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Nicolás Libedinsky.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Nicolás Libedinsky", written over a horizontal line.

Dr. Jorge Vargas.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Jorge Vargas", written over a horizontal line.

Dr. José Pantoja.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "José Pantoja", written over a horizontal line.



*A Benjamín, por ayudarme a iniciar este camino,
a Javier, por acompañarme,
a Gabriel por motivarme a terminarlo
y a mí, por realizarlo.*

BIOGRAFÍA

Nací el 19 de marzo de 1983. Desde 6^{to} básico, y producto de un altercado con un profesor, decidí que me iban a gustar las matemáticas, y así ha sido hasta ahora. Al ingresar a la Universidad de Chile opté (casi por descarte) por la carrera de Ing. Comercial, ya que no tuve el coraje suficiente como para ingresar a una carrera no "tradicional" como Lic. en Matemáticas, pero el enfrentar un embarazo a los 19 años, me dio la valentía para cambiarme a esta carrera (aunque realmente no sabía a lo que iba). Afortunadamente, fue la segunda decisión más gratificante que he tomado en mi vida. Mis años de Licenciatura y posteriormente de Doctorado, gracias a mis compañeros y profesores, estuvieron llenos de alegrías y cariño, obviamente también de penas y angustias, pero el balance final es totalmente positivo. Concluyo esta etapa sintiendo orgullo y agradecimiento de haber estudiado en un Departamento con una calidad humana tan grande.



AGRADECIMIENTOS

Al concluir una etapa muy importante de mi vida, agradezco:

A mis profesores tutores, Jorge Soto-Andrade y Rolando Pomareda, por guiarme y apoyarme en este trabajo.

Al profesor Jorge Vargas, por su amabilidad y buena disposición en Córdoba.

A los profesores del Depto de Matemáticas, por la excelente disposición para ayudar, conversar y aconsejar que siempre tienen, en particular a Rodrigo Bamón, Alicia Labra, Anita Rojas y Sergio Muñoz.

Al profesor Camilo Quezada, por los constantes ánimos, confianza y cariño.

A Santiago y Cecilia por ser tan buenos conmigo siempre.

A mis padres, Arturo y Rossy, mis hermanos David, Leonardo y Estefanía, a mi cuñada Andrea y mi pequeño Alonso por quererme y apoyarme siempre. A mi tía Sandra, por todo lo que me ha ayudado. A mis suegros y cuñados por recibirme con tanto amor.

A mis amigas y amigos matemáticos Eugenio, Juan Carlos, Leslie y Sandy por su cariño y apoyo en momentos difíciles. A Andrea por compartir gustos matemáticos, por su compañía en congresos y por su linda amistad. A Luchin por darme tanto cariño y ser un amigo excepcional.

A Patricio, por ser un apoyo fundamental todos estos años, gracias por las noches de estudio, las conversaciones, los consejos, las peleas, las alegrías y penas que pasamos juntos, gracias por ayudarme y darme confianza en mí misma siempre, gracias por ser junto al Luchin mis mejores amigos.

A mis amigas Isabel, Loreto y Gianina por tanto amor y apoyo durante tantos tantos años.

A todos los que alguna vez me cuidaron un rato al Benja.

Finalmente, lo más importante, agradezco a mi familia, a Javier por amarme todo este tiempo a pesar de mi tesis, apoyarme siempre y confiar en que lo podía lograr, a mi pequeño Gabriel por motivarme a terminar mi tesis, y en especial a mi amado Benjamín: mi pequeñito, si estoy aquí es gracias a ti, tu me diste la fuerza y valor para salir adelante y enfrentarme al mundo, te amo infinitamente.

Y por supuesto:

Mi permanencia en el plan de doctorado fue posible gracias a la Beca de Doctorado MECESUP PUC 0711 del Programa MECE 2 Educación Superior y el Proyecto Fondecyt Regular 1120571 del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT).

Índice

1. Introducción	1
2. Representaciones lineales complejas de grupos.	4
3. Modelos de Gel'fand geométricos.	8
4. Modelo de Gel'fand para grupos de simetrías de polígonos regulares.	15
4.1. Pentágono (D_5).	16
4.2. Hexágono (D_6).	18
4.3. Generalización para D_n .	20
5. Modelo de Gel'fand para los grupos de simetrías de los poliedros regulares.	22
5.1. Tetraedro.	23
5.1.1. Grupo T .	24
5.1.2. Grupo T_d .	25
5.2. Cubo y octaedro.	27
5.2.1. Grupo O .	28
5.2.2. Grupo O_h .	30
5.3. Dodecaedro e icosaedro.	31
5.3.1. Grupo I .	32
5.3.2. Grupo I_h .	33

6. Modelo de Gel'fand para el grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito.	35
6.1. Grupo de isometrías del plano pseudo-métrico finito \mathbb{F}_p^2 .	35
6.1.1. Modelo de Gel'fand para el grupo I_2 .	36
6.2. Grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_p^n .	44
6.2.1. Modelo de Gel'fand para el grupo I_n .	45
7. Descomposición en funciones esféricas.	57
7.1. Grupo de simetrías de polígonos regulares.	58
7.2. Grupo de simetrías de los poliedros regulares.	61
7.3. Grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_p^2 .	65
A. Apéndice	68

RESUMEN

Un *modelo de Gel'fand* para un grupo G (finito), es una representación lineal compleja π de G cuya descomposición contiene todas las representaciones irreducibles del grupo exáctamente una sola vez. En esta tesis se describe un método geométrico para obtener modelos de Gel'fand mediante espacios de recubrimiento.

Para los grupos de simetrías de los polígonos regulares de n lados (D_n) se muestra la construcción de dicho modelo, se ve como ejemplo el caso para los grupos D_5 y D_6 y luego se generaliza para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se procede de manera análoga para los grupos de simetrías directo y completo de los poliedros regulares, y el grupo de isometrías del plano pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^2} .

Además se presenta una generalización del método obteniendo un modelo para el grupo de isometrías correspondiente al espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^n} .

Finalmente se descompone las representaciones encontradas en sus componentes irreducibles, generadas por sus correspondientes funciones esféricas.

ABSTRACT

A Gel'fand model for a (finite) group G is a complex linear representation π of G whose decomposition contains all the irreducible representations of the group exactly once. In this thesis a geometric method to construct Gel'fand models, with the help of covering spaces, is described.

For the symmetry groups of the regular n -gons (D_n), the construction of such a model is presented. The cases of D_5 and D_6 are considered first as examples and then the model is generalized for all $n \in \mathbb{N}$.

We proceed in an analogous way for the direct and complete symmetry groups of regular polyhedra and for the isometry group of the finite pseudometric plane \mathbb{F}_{p^2} .

Moreover a generalization of the method is presented that provides a model for the isometry group of the finite pseudometric n -dimensional space \mathbb{F}_{p^n} .

Finally, the representations found are decomposed into their irreducible components generated by the corresponding spherical functions.

Capítulo 1

Introducción

Un problema importante en la Teoría de Representaciones de grupos finitos es clasificar y construir todas las representaciones lineales complejas irreducibles de un grupo dado. Cabe notar que para construir explícitamente tales representaciones (describiendo los correspondientes espacios vectoriales y operadores lineales) no basta con conocer sus caracteres. Por ejemplo, históricamente, la tabla de caracteres del grupo $SL(2, \mathbb{F}_q)$ fue construida por Frobenius alrededor del 1900 pero todas sus representaciones irreducibles sólo fueron determinadas en 1967 por Tanaka [17], transponiendo una construcción proveniente de la mecánica cuántica, a saber la construcción de la representación llamada de Weil hoy en día [18].

Un *modelo de Gel'fand* de un grupo (finito) G , es una representación compleja cuya descomposición es la suma directa de todas las representaciones irreducibles de G exactamente una vez [9, 16]. Construir dicho modelo permite eventualmente construir todas las representaciones del grupo G por descomposición. En todo caso, podremos descomponer completamente el modelo si conocemos los caracteres irreducibles del grupo G , pues éstos permiten construir los proyectores isotípicos del modelo, cuyas imágenes serán las representaciones irreducibles del grupo.

La terminología fue introducida por Bernstein, Gel'fand y Gel'fand en [7] donde se construyen modelos para grupos compactos conexos de Lie, lo cual se hace a través de las representaciones inducidas, un ejemplo clásico es aquel del grupo ortogonal $SO(3, \mathbb{R})$ cuyo modelo de Gelfand es $L^2(S^2)$ (notar que descomponer el modelo en

este caso significa encontrar los Polinomios de Legendre, que suministran los núcleos de los proyectores sobre las componentes irreducibles).

Siguiendo esta línea, Klyachko [11] construye modelos para el grupo general lineal sobre cuerpos finitos usando sumas de representaciones inducidas.

Diferentes tipos de modelos de Gel'fand han emergido en la literatura. Un primer tipo es un "modelo de involución", inspirado por el trabajo de Klyachko y estudiado en [6], [10] y [14], por nombrar algunos. Por ejemplo, para el grupo simétrico y para el grupo simétrico generalizado, se han construido modelos de este tipo, también se han determinado resultados generales sobre la existencia de modelos de involución para grupos finitos de Coxeter entre otros.

Otro tipo de modelo, el modelo polinomial, es introducido en [2] y usado para construir un modelo de Gel'fand para el grupo simétrico. Este tipo de modelo se muestra para los grupos de Weyl de tipo A_n , B_n y D_n , entre otros grupos, en [3], [4] y [5]. También se pueden mencionar los modelos combinatorios, como por ejemplo el presentado en [1].

En [12] Kodiyalam y Verma, motivados por el hecho conocido de que la suma de todas las dimensiones de las representaciones irreducibles del grupo simétrico $S(n)$ coincide con el número de involuciones de $S(n)$, construyen un modelo de Gel'fand para este grupo a partir del conjunto X de todas sus involuciones. Aquí la construcción del modelo puede ser interpretada como una torsión de la representación natural de $S(n)$, en el espacio de funciones sobre X , torsión dada por una "signatura relativa" de $S(n)$ en X . Notamos que no se tiene sin embargo una buena descripción de la "geometría" del conjunto X . Siguiendo esta idea, en esta tesis se desarrolla un modelo de Gel'fand geométrico "super-simétrico", con ayuda de espacios de recubrimiento adecuados. Se describe un método para construir dichos modelos para el grupo diedral, los grupos de simetrías directas y grupos de simetrías completas de los poliedros regulares. Tal método consiste en determinar G -conjuntos X_0 y X_1 convenientes y construir un recubrimiento natural X de $X_0 \cup X_1$ con dos hojas, y dentro de cuyo espacio de funciones $L^2(X)$ (dotado con la acción natural del grupo)

se construye el modelo, consistente de componentes "simétricas" y "antisimétricas", de manera reminiscente de las construcciones super-simétricas en física teórica. Luego al abordar el caso de el grupo de isometrías del plano pseudo-métrico finito \mathbb{F}_p^2 , para p primo impar es necesario aumentar la cantidad de G -conjuntos considerados, y para el grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico \mathbb{F}_p^n , para $n > 2$, se plantea una generalización del método.

Finalmente se calcula explícitamente las funciones esféricas asociadas a la descomposición de los modelos de Gelfand construidos.

Capítulo 2

Representaciones lineales complejas de grupos.

Se presentan a continuación definiciones y resultados básicos de la Teoría de Representaciones de grupos, que serán de importancia en este trabajo. Para demostraciones y más detalles consultar [15] u [8] por ejemplo.

Definición. Sea G un grupo. Una *representación (lineal) compleja* de G es un par (V, σ) , donde V es un \mathbb{C} -espacio vectorial y σ es un homomorfismo de G en el grupo de automorfismos lineales $Aut_{\mathbb{C}}(V)$, donde se denotará $\sigma(g) = \sigma_g$. Si la dimensión de V es finita, entonces se define el *grado de la representación* d_V (o d_σ) como la dimensión de V . En caso contrario diremos que (V, σ) es de dimensión infinita (en lo que respecta a este trabajo, se consideran sólo grupos finitos).

Para denotar una representación usaremos indistintamente (V, σ) , V o σ .

Definición. Sea (V, σ) una representación de un grupo G . Una *subrepresentación* de V es un subespacio vectorial estable $W \leq V$, ésto es: $\sigma_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$. En este caso si se define $\rho_g = \sigma_g|_W$, entonces (W, ρ) es también una representación de G .

Ejemplo. Sea G un grupo finito. Supongamos que X es un G -conjunto finito, es

decir el grupo G actúa en X mediante:

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longrightarrow g \cdot x \end{aligned}$$

Sea $L^2(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}\}$, es claro que $L^2(X)$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial.

Para $x \in X$, consideremos la función delta de Dirac $\delta_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x, \\ 0 & y \neq x. \end{cases}$$

El conjunto de las funciones delta de Dirac $\{\delta_x \mid x \in X\}$ es una base para $L^2(X)$. Se define la *representación natural* (o *representación por permutación*) de G asociada al G -conjunto X como:

$$\begin{aligned} \lambda : G &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(L^2(X)) \\ \lambda_g(\delta_x) &= \delta_{g \cdot x} \end{aligned}$$

donde $g \cdot x$ denota la g -imagen de x bajo la acción de G en X .

Definición. Una representación (V, σ) de G se dice *irreducible* si posee solamente subrepresentaciones triviales, es decir $\{0\}$ y $\{V\}$. En caso contrario decimos que la representación es *reducible*.

Definición. Sean (V^1, ρ^1) y (V^2, ρ^2) dos representaciones de G . Un *operador de entrelazamiento* entre estas representaciones es una función lineal $T : V^1 \longrightarrow V^2$ tal que

$$T \circ \rho_g^1 = \rho_g^2 \circ T,$$

para todo $g \in G$.

El espacio vectorial de todos los operadores de entrelazamientos entre (V^1, ρ^1) y (V^2, ρ^2) se denota por $\text{Hom}_G(\rho^1, \rho^2)$ o $\text{Hom}_G(V^1, V^2)$ si no hay riesgo de confusiones. Cuando $V^1 = V^2 = V$ (y tomamos $\rho^1 = \rho^2 = \rho$), $\text{Hom}_G(V, V)$ se denota por $\text{End}_G(V)$ el cual es llamado el *conmutante* de V (o de ρ), el cual tiene estructura de

álgebra sobre \mathbb{C} , con la suma y producto usual de operadores y la multiplicación por escalar.

Definición. Decimos que (V^1, ρ^1) y (V^2, ρ^2) son representaciones *isomorfas* o *equivalentes* si existe un operador de entrelazamiento biyectivo entre ellas.

Notación: Se denota por \widehat{G} al conjunto de todas las representaciones irreducibles de G (salvo isomorfismos).

Corolario 2.0.1. Sea (V, σ) una representación de dimensión finita de un grupo finito G . Entonces ésta puede ser descompuesta en una suma directa de sus componentes irreducibles,

$$V = \bigoplus_{j=1}^m W_j,$$

donde los espacios W_j son representaciones irreducibles.

Lema 2.0.1. : (Lema de Schur) Sean (V, σ) y (W, ρ) representaciones irreducibles de G .

(1) Si $T \in \text{Hom}_G(\sigma, \rho)$ entonces $T \equiv 0$ o T es un isomorfismo.

(2) $\text{End}_G(\sigma) = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}_V$, con $\mathbf{1}_V$ función identidad en V .

Notación: Para $m \in \mathbb{N}$ y V espacio vectorial, denotamos por mV a la suma directa $V \oplus V \oplus \dots \oplus V$ (m veces).

Sea (V, σ) una representación de G y supongamos que

$$V = \bigoplus_{\rho \in J} m_\rho W_\rho$$

es una descomposición ortogonal de V en sus sub-representaciones irreducibles. Esto significa que J es un conjunto de representaciones irreducibles no isomorfas entre si, y que, para $\rho \in J$, $m_\rho W_\rho$ es la suma directa ortogonal de m_ρ copias de W_ρ .

Definición. (con la notación anterior) Al entero positivo m_ρ se le denomina la *multiplicidad* de W_ρ en V (o de ρ en σ). Además, el subespacio invariante $m_\rho W_\rho$ es la componente ρ -isotípica de ρ en σ .

Si $m_\rho = 1$ para todo $\rho \in J$ se dice que σ es una representación *sin multiplicidad*.

Corolario 2.0.2. *Siguiendo con la notación anterior, se tiene que:*

a) $m_\rho = \dim(\text{Hom}_G(W_\rho, V))$.

b) $\dim(\text{End}_G(V)) = \sum_{\rho \in J} m_\rho^2$.

c) *La representación (V, σ) no tiene multiplicidades si y sólo si $\text{End}_G(V)$ es conmutativo.*

Lema 2.0.2. *La suma de los cuadrados de las dimensiones de las representaciones irreducibles de un grupo es igual al orden del grupo, es decir:*

$$\sum_{\rho \in \hat{G}} d_\rho^2 = |G|.$$

Definición. Sea G un grupo finito. Se llama modelo de Gel'fand de G a una representación π de G tal que π no tiene multiplicidades, y contiene todas las representaciones irreducibles de G , es decir,

$$\pi = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \rho.$$

Definición. Un *carácter lineal* χ del grupo G es una representación lineal de G de grado 1. En otras palabras, χ es un homomorfismo de grupos $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$.

Decimos que χ es el *carácter trivial* si $\chi(g) = 1$ para todo $g \in G$.

El *carácter de una representación* σ de G es la función $\chi_\sigma : G \rightarrow \mathbb{C}$ que envía $g \in G$ a la traza (suma de los elementos diagonales) de la matriz asociada a σ_g .

Capítulo 3

Modelos de Gel'fand geométricos.

Se construyen a continuación modelos de Gel'fand para el grupo diedral D_n de $2n$ elementos ($n \in \mathbb{N}$) y los grupos de simetrías (grupos de simetrías directos y grupo de simetrías completos) de los poliedros regulares.

Sea G cualquiera de estos grupos, entonces se considera un G -espacio X formado por $(X_0 \cup X_1) \times C_2$, con X_0 y X_1 G -conjuntos izquierdos convenientes, donde para $g \in G$ y $x \in X_0 \cup X_1$ se denotará por $g.x$ la acción de g en x , y $C_2 = \{1, -1\}$ denota el grupo cíclico multiplicativo de 2 elementos. Es decir, consideramos una doble capa $(X_0 \cup X_1) \times C_2$ sobre $X_0 \cup X_1$, o lo que es equivalente, sobre cada elemento $x \in X_0 \cup X_1$ consideramos una 2-fibra dada por $(x, 1)$ y $(x, -1)$.

Además cada uno de nuestros grupos G admite una signatura, es decir existe un homomorfismo no trivial de G sobre C_2 , que denotaremos por ϑ .

Luego, definimos Π acción lineal de G en $L^2(X)$ dada por:

$$\Pi_g(f)(x, \varepsilon) = f(g^{-1}.x, \vartheta(g)\varepsilon) \quad (g \in G, f \in L^2(X), (x, \varepsilon) \in X)$$

Entonces considerando en el espacio $L^2(X)$ el subespacio denotado por L^0 , que consta de las funciones pares sobre las fibras de los elementos de X_0 (y $f(x, \varepsilon) = 0$ para todo $(x, \varepsilon) \in X_1 \times C_2$), vale decir $f \in L^2(X)$ tal que:

$$f(x, \varepsilon) = f(x, -\varepsilon) \quad (x \in X_0, \varepsilon \in C_2),$$

y L^1 subespacio de $L^2(X)$ formado por las funciones impares sobre las fibras de los

elementos de X_1 (y $f(x, \varepsilon) = 0$ para todo $(x, \varepsilon) \in X_0 \times C_2$), es decir $f \in L^2(X)$ tal que:

$$-f(x, \varepsilon) = f(x, -\varepsilon) \quad (x \in X_1, \varepsilon \in C_2).$$

Sea B una base del espacio $L^2(X)$ formada por las funciones δ_w^+ y δ_w^- , con $w \in X_0 \cup X_1$, dadas por:

$$\delta_w^+ = \delta_{(w,1)} + \delta_{(w,-1)}$$

y

$$\delta_w^- = \delta_{(w,1)} - \delta_{(w,-1)}$$

Entonces,

$$B_0 = \{\delta_y^+\}_{y \in X_0}$$

es base de L^0 , donde es fácil ver que $\delta_y^+ \in L^0$ es función par para cada $y \in X_0$ y además que

$$g.\delta_y^+(x, \varepsilon) = \delta_{g.y}^+(x, \varepsilon)$$

con $g \in G$, $(x, \varepsilon) \in X$, $\varepsilon \in C_2$. Notar que L^0 es estable bajo la acción de G , ya que $g.y \in X_0$.

Y para L^1 se tiene

$$B_1 = \{\delta_z^-\}_{z \in X_1}$$

donde es fácil ver que $\delta_z^- \in L^1$ es función impar para cada $z \in X_1$, y también que

$$g.\delta_z^-(x, \varepsilon) = \vartheta(g)\varepsilon \delta_{g.z}^-(x, 1)$$

con $g \in G$, $(x, \varepsilon) \in X$ y $\varepsilon \in C_2$. Además se tiene que el espacio L^1 es estable bajo la acción de G .

Teniendo en cuenta lo anterior se define la siguiente representación $(\pi, L^0 \oplus L^1)$ para G , dada por:

$$\pi_g : L^0 \oplus L^1 \longrightarrow L^0 \oplus L^1$$

$$f(x, \varepsilon) \longmapsto f(g^{-1}.x, \vartheta(g)\varepsilon).$$

Ahora, considerando la subrepresentación $\pi^0 = \pi|_{L^0}$, y $T \in \text{End}_G(\pi^0)$, se tiene que:

$$T \circ \pi^0 = \pi^0 \circ T$$

es decir,

$$T \circ \pi_g^0(f) = \pi_g^0 \circ T(f) \quad (3.1)$$

con $f \in L^0$ y $g \in G$.

Entonces teniendo en cuenta lo siguiente:

Lema 3.0.3. *Dado un grupo G , X un G -espacio y $(L^2(X), \tau)$ representación natural de G asociada a X , existe un isomorfismo del \mathbb{C} -espacio vectorial $\mathcal{K}(X) = \mathbb{C}^{X \times X}$ de todas las funciones complejas K sobre $X \times X$ (llamadas núcleos), sobre el \mathbb{C} -espacio vectorial $\text{End}_{\mathbb{C}}(L^2(X))$ asociando a cada K en $\mathcal{K}(X)$ el operador lineal ϕ_K de $L^2(X)$ definido por:*

$$(\phi_K f)(x) = \sum_{y \in X} K(x, y) f(y)$$

para toda $f \in L^2(X)$ y $x \in X$. Por este mismo isomorfismo, la composición de operadores en $\text{End}_{\mathbb{C}}(L^2(X))$ corresponde al producto de Volterra (o producto matricial) de núcleos definido por

$$(K * J)(x, z) = \sum_{y \in X} K(x, y) J(y, z)$$

con $x, z \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que dado un operador $\phi \in \text{End}_{\mathbb{C}}(L^2(X))$, el correspondiente núcleo K tal que $\phi = \phi_K$ no es otro que la matriz de ϕ respecto a la base canónica de las funciones delta de Dirac δ_x ($x \in X$) de $L^2(X)$. □

Además, teniendo en cuenta que un núcleo K es G -invariante si

$$K(g.x, g.y) = K(x, y),$$

para todo $g \in G$ y $(x, y) \in X$, se tiene que:

Corolario 3.0.3. *La \mathbb{C} -álgebra $End_G(\tau)$ es isomorfa a la sub-álgebra $\mathcal{K}^G(X)$ formada de los núcleos G -invariantes.*

DEMOSTRACIÓN. Es directo al restringir el isomorfismo del lema 3.0.3.

□

Entonces si T es un operador de entrelazamiento de $End_G(\pi^0)$ luego, adecuando el Lema 3.0.3 a la subrepresentación (π^0, L^0) , se obtiene que le corresponde un núcleo K tal que $T = T_K$, con K dado por:

$$K((y, \varepsilon), (y', \varepsilon')) = \begin{cases} T_y^{y'} & \text{si } \varepsilon = \varepsilon' \\ 0 & \text{si } \varepsilon \neq \varepsilon'. \end{cases}$$

con (y, ε) e (y', ε') en $X_0 \times C_2$ y $T_y^{y'} \in \mathbb{C}$ los coeficientes matriciales de T con respecto a la base B_0 . Luego por el corolario 3.0.3 K cumple con

$$K((g \cdot y, \vartheta(g)\varepsilon), (g \cdot y', \vartheta(g)\varepsilon')) = K((y, \varepsilon), (y', \varepsilon')),$$

entonces imponiendo la siguiente condición (con el fin de obtener un espacio de entrelazamiento conmutativo):

$$C1 : \forall (y, y') \in X_0 \times X_0 \text{ existe } g_1 \in G \text{ tal que } g_1 \cdot y = y' \text{ y } g_1 \cdot y' = y,$$

se tiene que,

$$K((y, \varepsilon), (y', \varepsilon')) = K((y', \varepsilon'), (y, \varepsilon)),$$

es decir:

$$T_y^{y'} = T_{y'}^y$$

para todo $(y, y') \in X_0 \times X_0$.

Por lo tanto los núcleos de entrelazamiento son simétricos y por ende los operadores también lo son. Luego, como todos los operadores son simétricos, entonces necesariamente conmutan, ya que, siendo T y $R \in End_G(\pi^0)$ dos de estos operadores, se tiene:

$$T = T^t$$

$$R = R^t$$

con T^t y R^t las matrices traspuestas correspondientes, luego como $End_G(\pi^0)$ es una \mathbb{C} -álgebra entonces $TR \in End_G(\pi^0)$ (es decir, TR es también simétrica), por lo que $TR = (TR)^t$, entonces:

$$TR = (TR)^t = R^t T^t = RT$$

Y por lo tanto el espacio $End_G(\pi^0)$ es conmutativo.

Si se considera la subrepresentación $\pi^1 = \pi|_{L^1}$, procediendo de forma análoga a lo anterior se concluye que el espacio $End_G(\pi^1)$ también es conmutativo.

Entonces por lo anterior se tiene que las subrepresentaciones π^0 y π^1 no tienen multiplicidades. Se verá a continuación que ocurre con el espacio de entrelazamiento de las representaciones π^0 y π^1 . Sea $S \in Hom_G(\pi^0, \pi^1)$, es decir

$$S \circ \pi_g^0(f) = \pi_g^1 \circ S(f) \quad (3.2)$$

con $f \in L^0$ y $g \in G$. Entonces utilizando las bases B_0 y B_1 según corresponda, y teniendo en cuenta que se puede escribir f como:

$$f = \sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \delta_y^+ \quad (3.3)$$

con $f \in L^0$, $\alpha_y \in \mathbb{C}$, $\delta_y^+ \in B_0$ y

$$S(f) = S\left(\sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \delta_y^+\right) = \sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \left(\sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^y \delta_z^-\right)$$

con $S \in Hom_G(\pi^0, \pi^1)$, $S_z^y \in \mathbb{C}$ y $\delta_z^- \in B_1$, entonces (3.2) equivale a

$$\begin{aligned} S \circ \pi_g^0\left(\sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \delta_y^+\right) &= \pi_g^1 \circ S\left(\sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \delta_y^+\right) \\ S\left(\sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y (\delta_{g,y}^+)\right) &= \pi_g^1\left(\sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \left(\sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^y \delta_z^-\right)\right) \\ \sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y S(\delta_{g,y}^+) &= \sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \left(\sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^y \pi_g^1(\delta_z^-)\right) \\ \Leftrightarrow \sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \left(\sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^{g,y} \delta_z^-\right) &= \sum_{\delta_y^+ \in B_0} \alpha_y \left(\sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^y g \cdot \delta_z^-\right) \end{aligned}$$



de donde obtenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^{g \cdot y} \delta_z^-(x, \varepsilon) = \sum_{\delta_z^- \in B_1} S_z^y g \cdot \delta_z^-(x, \varepsilon)$$

es decir,

$$S_z^{g \cdot y} = \vartheta(g) S_{g^{-1} \cdot z}^y \quad (3.4)$$

para todo $y \in X_0$, $z \in X_1$ y $g \in G$.

Entonces imponiendo la siguiente condición (con el fin de obtener un espacio de entrelazamiento nulo):

C2: Para todo $(y, z) \in X_0 \times X_1$ existe $g_2 \in G$ tal que $g_2 \cdot y = y$, $g_2 \cdot z = z$ y $1 \neq \vartheta(g_2)$,

entonces de (3.4) se obtendría que:

$$S_z^y = -S_z^y$$

es decir, $S_z^y = 0$ para todo $(y, z) \in X_0 \times X_1$.

Por tanto, bajo las condiciones **C1** y **C2** se obtiene que la representación $(\pi, L^0 \oplus L^1)$ no tiene multiplicidades.

Considerando además el siguiente lema:

Lema 3.0.4. Sea G grupo finito, e elemento identidad de G , \widehat{G} conjunto de representaciones irreducibles de G y (π, V) representación de G sin multiplicidades.

Entonces si:

$$\chi_\pi(e) = \sum_{\rho \in \widehat{G}} \chi_\rho(e)$$

la representación es un modelo de Gel'fand para G .

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea J conjunto de sub-representaciones irreducibles presentes en π , entonces

$$\chi_\pi(e) = \sum_{\omega \in J} \chi_\omega(e),$$

además se sabe que

$$\sum_{\omega \in J} \chi_{\omega}(e) \leq \sum_{\rho \in \hat{G}} \chi_{\rho}(e),$$

pero por hipótesis se tiene que

$$\chi_{\pi}(e) = \sum_{\rho \in \hat{G}} \chi_{\rho}(e),$$

entonces

$$\sum_{\omega \in J} \chi_{\omega}(e) = \sum_{\rho \in \hat{G}} \chi_{\rho}(e),$$

por lo que se puede concluir que π contiene una copia de cada representación irreducible de G . Por lo tanto, (π, V) es un modelo de Gel'fand para G .

□

Se puede afirmar entonces, que si un grupo de los nombrados cumple con las condiciones antes mencionadas, y además con el Lema 3.0.4, se tendrá que la representación propuesta es un modelo de Gel'fand para el grupo en cuestión.

A continuación se prueba con este método que las representaciones encontradas para el grupo diedral son modelos de Gel'fand, para los grupos de simetrías de los poliedros regulares la comprobación es directa fijándose en el caracter de cada representación.

Para el grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^2} , para p primo impar, se amplía este método para una mayor cantidad de G -conjuntos, manteniendo el concepto de la doble capa. Finalmente, para el grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^n} , para $n > 2$, se plantea una generalización del método recién expuesto.

Capítulo 4

Modelo de Gel'fand para grupos de simetrías de polígonos regulares.

Se construye a continuación un modelo de Gel'fand para el grupo de simetrías del polígono regular de n lados, es decir para el grupo dihedral D_n .

Se muestra, a modo de ejemplo, un modelo para los grupos D_5 y D_6 , para luego generalizarlo a cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Dichos grupos se describen de la siguiente manera:

$$D_5 = \langle s, r : s^2 = e = r^5, rs = sr^{-1} \rangle = \{e, s, r, r^2, r^3, r^4, rs, r^2s, r^3s, r^4s\},$$

$$D_6 = \langle s, r : s^2 = e = r^6, rs = sr^{-1} \rangle = \{e, s, r, r^2, r^3, r^4, r^5, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\},$$

donde e denota al elemento identidad, r a la rotación en $2\pi/5$ rad ó $\pi/3$ rad respectivamente, y s a la reflexión o *flip*.

A cada grupo se le asigna un espacio G -espacio X , para lo cual emplearemos algunas de las estructuras simétricas de cada polígono. Se puede notar que en el caso del hexágono, éste se puede proyectar equivariantemente sobre el G -conjunto formado por sus dos triángulos inscritos en él, a diferencia del pentágono, el cual sólo se puede proyectar de manera equivariante sobre su baricentro, el cual permanece fijo bajo los movimientos del polígono (4.1).

Además tenemos que la signatura del grupo viene dada en los generadores por:

$$\vartheta(s) = -1, \quad \vartheta(r) = 1.$$

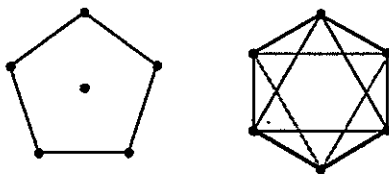


Figura 4.1. Pentágono y Hexágono.

4.1. Pentágono (D_5).

Sea X_0 el espacio dado por el baricentro v_0 , es decir $X_0 = \{v_0\}$, y el espacio $X_1 = \{v_i : i = 1, \dots, 5\}$ correspondiente a los vértices del pentágono (fig. 4.2).

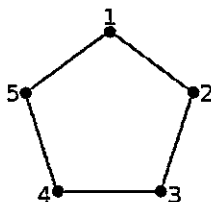


Figura 4.2. Espacio X_1

Afirmación. La representación π para D_5 es un modelo de Gel'fand.

Para demostrar esto se verificarán las condiciones **C1** y **C2**:

En efecto, para **C1** se tiene que:

X_0 : Como $X_0 = \{v_0\}$, para $(v_0, v_0) \in X_0^2$ basta tomar $s \in D_5$, ya que $s.v_0 = v_0$ y $s^2.v_0 = v_0$.

X_1 : Para $(v_i, v_j) \in X_1^2$ se considera la reflexión que envía el vértice v_i al vértice v_j , digamos $r^m s$, entonces $r^m s.v_i = v_j$ y $(r^m s)^2.v_i = v_i$.

Y para **C2**, se tiene que dados $(v_0, v_i) \in X_0 \times X_1$ y $\varepsilon \in C_2$, se considera la reflexión que fija el vértice v_i , digamos $r^k s$, entonces $r^k s.\varepsilon = -\varepsilon$, $r^k s.v_0 = v_0$ y $r^k s.v_i = v_i$.

Por lo tanto, al cumplirse las condiciones 1 y 2, la representación no tiene multiplicidades.

Luego se tiene que a cada función π_g se le asocia una matriz $[\pi_g]$ en la base $B_0 \cup B_1^\dagger$. Por ejemplo para π_s , con $s \in D_5$, se tiene que:

$$\pi_s(\delta_{v_0}^+)(v, \varepsilon) = \delta_{v_0}^+(v, \varepsilon)$$

para la función asociada al baricentro v_0 y

$$\pi_s(\delta_{v_i}^-)(v, \varepsilon) = -\delta_{s, v_i}^-(v, \varepsilon),$$

para la función asociada a un vértice v_i cualquiera, entonces formamos la matriz asociada a π_s en la base $B_0 \cup B_1$ y obtenemos:

$$[\pi_s] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el caracter $\chi_\pi(s) = 0$.

Con esto se calcula el caracter de la representación:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c} [e] & [s] & [r] & [r^2] & \\ \hline 6 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

de donde:

$$\chi_\pi(e) = 6 = \sum_{\rho \in \widehat{D_5}} \chi_\rho(e).$$

Por lo tanto la representación es un modelo de Gel'fand para D_5 .

[†]En este caso, como en todos los demás a tratar en este trabajo, el orden escogido para los elementos de las bases es irrelevante, ya que la traza no depende del orden escogido para éstos.

4.2. Hexágono (D_6).

Para el hexágono se considera el espacio $X_0 = \{t_1, t_2\}$, donde t_1 y t_2 denotan los 2 triángulos inscritos en él (fig. 4.3).

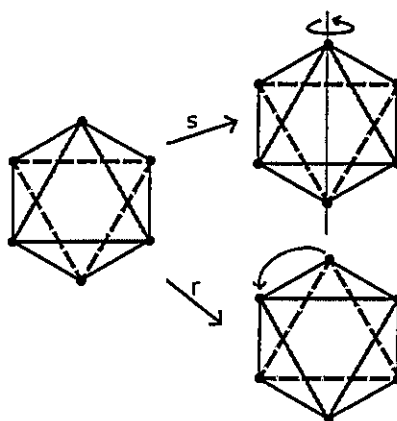


Figura 4.3. Simetrías en triángulos internos.

También consideramos el espacio $X_1 = \{v_j : j = 1, \dots, 6\}$ correspondiente a los vértices del polígono (fig. 4.4).

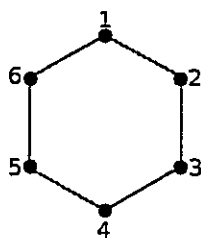


Figura 4.4. Espacio X_1

Afirmación. La representación π para D_6 es un modelo de Gel'fand.

Para demostrar esta afirmación se comprueban las condiciones C1 y C2, y el lema 3.0.4.

En efecto, para C1:

$\underline{X_0}$: Como $X_0 = \{t_1, t_2\}$, basta tomar $r \in D_6$, ya que $r.t_1 = t_2$ y $r.t_2 = t_1$.

$\underline{X_1}$: Para $(v_j, v_{j'})$ con j y j' en $\{1, \dots, 6\}$, se considera la reflexión que envía el vértice v_j al vértice $v_{j'}$, digamos $r^m s \in D_6$, entonces $r^m s.v_j = v_{j'}$ y $r^m s.v_{j'} = v_j$.

Para C2 se tiene que:

$\underline{X_0 \times X_1}$: Dados $(t_i, v_j) \in X_0 \times X_1$ para $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{1, \dots, 6\}$, se considera la reflexión que fije el vértice v_j , digamos $r^n s \in D_6$, entonces $r^n s.t_i = t_i$, $r^n s.v_j = v_j$ y $\vartheta(r^n s) \neq 1$.

Por lo tanto, al cumplirse las condiciones 1 y 2, se obtiene que la representación no tiene multiplicidades.

Luego procediendo de la misma forma que en el pentaógon, se tiene, por ejemplo, para $s \in D_6$, π_s se comporta de la siguiente manera:

$$\pi_s(\delta_{t_1}^+)(v, \varepsilon) = \delta_{t_1}^+(v, \varepsilon)$$

$$\pi_s(\delta_{t_2}^+)(v, \varepsilon) = \delta_{t_2}^+(v, \varepsilon)$$

$$\pi_s(\delta_{v_j}^-)(v, \varepsilon) = -\delta_{s.v_i}^-(v, \varepsilon)$$

A lo cual le corresponde:

$$[\pi_s] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el caracter $\chi_\pi(s) = 0$.

Entonces el caracter de la representación es igual a:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} [e] & [s] & [rs] & [r] & [r^2] & [r^3] \\ \hline 8 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

de donde se tiene que:

$$\chi_{\pi}(e) = 8 = \sum_{\rho \in \widehat{D}_6} \chi_{\rho}(e)$$

Por lo tanto, la representación es un modelo de Gel'fand.

4.3. Generalización para D_n .

Sea el grupo D_n dado por:

$$D_n = \langle s, r : s^2 = e = r^n, rs = sr^{-1} \rangle = \{e, s, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\},$$

el cual es generado por la rotación en $2\pi/n$ rad que se denota r y la reflexión s . Se considera el espacio X_0 correspondiente al baricentro del polígono v_0 (en caso de n impar) o t_1 y t_2 correspondientes a los 2 $(n/2)$ -ángulos inscritos en él (en el caso de n par), y el espacio $X_1 = \{v_j : j = 1, \dots, n\}$ correspondiente a los vértices del polígono.

Afirmación. La representación π para D_n es un modelo de Gel'fand.

Para probar que la representación es un modelo de Gel'fand se deben cumplir las condiciones 1 y 2, y el lema 3.0.4.

Entonces para C1 se tiene que:

X_0 : (n impar) Se tiene que $X_0 = \{v_0\}$, entonces para $(v_0, v_0) \in X_0^2$ basta tomar $s \in D_n$, ya que $s.v_0 = v_0$ y $s^2.v_0 = v_0$.

(n par) Como $X_0 = \{t_1, t_2\}$, basta tomar $r \in D_n$, ya que $r.t_1 = t_2$ y $r.t_2 = t_1$.

X_1 : Para $(v_j, v_{j'}) \in X_1^2$ se considera la reflexión que envía el vértice v_j al vértice $v_{j'}$, digamos $r^m s \in D_n$, entonces $r^m s.v_j = v_{j'}$ y $(r^m s)^2.v_{j'} = v_j$.

Y para C2 se tiene que:

$X_0 \times X_1$: (n impar) Dados $(v_0, v_j) \in X_0 \times X_1$, considerar la reflexión que fije el vértice v_i , digamos $r^k s \in D_n$, entonces $r^k s.v_0 = v_0$, $r^k s.v_j = v_j$ y $\vartheta(r^k s) \neq 1$.

(n es par) Dados $(t_i, v_j) \in X_0 \times X_1$, considerar la reflexión que fije el vértice v_j , digamos $r^{k'} s \in D_n$, entonces $r^{k'} s.t_i = t_i$, $r^{k'} s.v_j = v_j$ y $\vartheta(r^{k'} s) \neq 1$.

Por lo tanto, la representación no tiene multiplicidades.

Luego como se tiene que

$$\sum_{\rho \in \widehat{D}_n} \rho(e) = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ impar,} \\ n+2 & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$$

entonces basta mirar el caracter de la representación para n impar:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} [e] & [s] & [r] & [r^2] & \dots & [r^{(n-1)/2}] \\ \hline n+1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array}$$

y para n par:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} [e] & [s] & [rs] & [r] & [r^2] & [r^3] & [r^4] & \dots \\ \hline n+2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots \end{array}$$

de donde se obtiene que:

$$\chi_{\pi}(e) = \sum_{\rho \in \widehat{D}_n} \rho(e)$$

Por lo tanto, se confirma que $(\pi, L_0 \oplus L_1)$ es un modelo de Gel'fand para D_n .

Capítulo 5

Modelo de Gel'fand para los grupos de simetrías de los poliedros regulares.

Los poliedros regulares o sólidos platónicos son cuerpos regulares convexos que tienen caras, aristas y ángulos congruentes. Para cada uno de estos sólidos, su *poliedro dual o conjugado* es el que se construye al trazar un cuerpo empleando como vértices los centros de las caras de éste, el nuevo sólido platónico tiene tantos vértices como caras tenía el inicial, y el mismo número de aristas. El poliedro dual de un dodecaedro es un icosaedro, y viceversa; el de un cubo es un octaedro; y el poliedro conjugado de un tetraedro es otro tetraedro. Cada poliedro posee ejes y planos de simetría, con los cuales es posible rotar o reflejar el cuerpo de manera que el sólido resultante parezca idéntico al original. Estos movimientos y reflexiones dan origen al *grupo de simetrías* del poliedro, los cuales son el **Grupo de Simetrías Directo**, formado por las rotaciones y el **Grupo de Simetrías Completo** que contempla las rotaciones y las reflexiones.

Para cada poliedro se tienen los siguientes grupos:

- **T** : grupo de rotaciones del tetraedro, de orden 12.
- **T_d** : grupo de simetrías completo del tetraedro, de orden 24.

- O : grupo de rotaciones del cubo/octaedro, de orden 24.
- O_h : grupo de simetrías completo del cubo/octaedro, de orden 48.
- I : grupo de rotaciones del dodecaedro/icosaedro, de orden 60.
- I_h : grupo de simetrías completo del dodecaedro/icosaedro, de orden 120.

Se construyen a continuación modelos de Gel'fand para los grupos nombrados, para esto se determina el espacio de Gel'fand para el grupo de movimientos rígidos, y luego el correspondiente para el grupo completo de simetrías. En estos casos, gracias a la tabla de caracteres de cada grupo, es fácil probar que los modelos obtenidos son de Gel'fand.

5.1. Tetraedro.

El grupo de simetrías directo del tetraedro está formado por dos rotaciones: r_3 (rotación en $2\pi/3$ con respecto al eje E_3 que pasa por un vértice y el centro de la cara opuesta a él) y r_2 (rotación en π con respecto al eje E_2 que pasa por el punto medio de una arista y el punto medio de la arista opuesta); y el grupo simétrico completo está generado por las rotaciones mencionadas, agregando la reflexión σ (con respecto al plano de simetría P que pasa por una arista y el punto medio de la arista opuesta (fig. 5.1)).

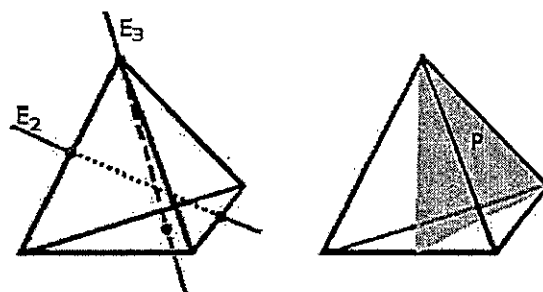


Figura 5.1. Ejes y plano de simetría del tetraedro.

5.1.1. Grupo T.

Para el grupo de movimientos rígidos del tetraedro se tiene un caso especial de modelo geométrico, ya que el espacio de Gel'fand X para este grupo es directamente el conjunto de aristas del cuerpo, no siendo necesario definir los conjuntos X_0 y X_1 . En efecto, se considera como espacio de Gel'fand al conjunto de aristas de éste, como se ve en la figura 5.2.

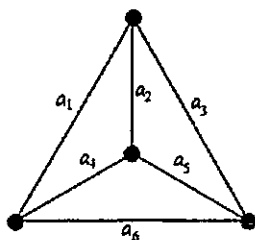


Figura 5.2. Aristas del tetraedro.

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

Entonces, la representación π viene dada por la acción natural del grupo en las aristas, $\pi_g(f)(x) = f(g^{-1}.x)$, con $g \in T$, $f \in L^2(X)$ y $x \in X$.

Afirmación. La representación π para T es un modelo de Gel'fand.

Para demostrar la afirmación notamos que a cada π_g se le asocia una matriz en la base dada por las deltas de Dirac δ_{a_i} , con $i \in \{1, \dots, 6\}$, en $L^2(X)$. Por ejemplo para π_{r_3} tenemos:

$$[\pi_{r_3}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde $\chi_\pi(r_3) = 0$.

Entonces el caracter de la representación está dado por:

χ	$[e]$	$[r_3]$	$[r_3^2]$	$[r_2]$
π	6	0	0	2

Luego considerando la tabla de caracteres irreducibles para el grupo T , que está dada por:

χ	$[e]$	$[r_3]$	$[r_3^2]$	$[r_2]$
ρ_0	1	1	1	1
ρ_1	1	ϵ	$\bar{\epsilon}$	1
ρ_2	1	$\bar{\epsilon}$	ϵ	1
ρ_3	3	0	0	-1

con $\epsilon = \exp(2\pi i/3)$, se obtiene que:

$$\frac{1}{|T|} \langle \chi_\pi, \chi_{\rho_i} \rangle = 1$$

para todo ρ_i , con $i \in \{0, \dots, 3\}$, representación irreducible de T , es decir, cada representación irreducible del grupo está presente solo una vez en π . Por lo tanto, la representación es un modelo de Gel'fand para T .

5.1.2. Grupo T_d .

Para el grupo T_d se procede de forma usual y se considera como espacio de Gel'fand al conjunto de aristas (X_0), y el baricentro de cada cara del poliedro (X_1), es decir:

$$X_0 \cup X_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4\},$$

además la signatura viene dada en los generadores por:

$$\vartheta(r_3) = 1,$$

$$\vartheta(r_2) = 1,$$

$$\vartheta(\sigma) = -1.$$

Afirmación. La representación π para T_d es un modelo de Gel'fand.

En efecto, a cada π_g , con $g \in T_d$, le podemos asociar una matriz en la base $B_0 \cup B_1$, por ejemplo para π_σ :

$$[\pi_\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de donde $\chi_\pi(\sigma) = 0$.

Entonces tenemos que el caracter de la representación está dado por:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} [e] & [r_3] & [r_2] & [\sigma] & [\sigma r_3] \\ \hline 10 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Luego considerando la tabla de caracteres irreducibles para el grupo T_d , que está dada por:

χ	$[e]$	$[r_3]$	$[r_2]$	$[\sigma]$	$[\sigma r_3]$
ρ_0	1	1	1	1	1
ρ_1	1	1	1	-1	-1
ρ_2	2	-1	2	0	0
ρ_3	3	0	-1	1	-1
ρ_4	3	0	-1	-1	1

Se obtiene que:

$$\frac{1}{|T_d|} \langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = 1$$

para todo ρ_i , con $i \in \{0, \dots, 4\}$, representación irreducible de T_d , es decir, cada representación irreducible del grupo está presente solo una vez en π . Por lo tanto, la representación es un modelo de Gel'fand para T_d .

A continuación se procede de manera análoga para el resto de los grupos de este capítulo. Por lo que, para cada uno, se muestran los conjuntos X_0 y X_1 respectivos, además de la signatura correspondiente. En el Apéndice A se adjuntan las tablas de los caracteres irreducibles de cada grupo ocupadas en las demostraciones respectivas.

5.2. Cubo y octaedro.

El grupo de simetrías directo del cubo esta formado por las rotaciones dadas por r_4 (rotación en $\pi/2$ con respecto al eje E_4 que pasa por el centro de una cara y el centro de la opuesta), r_3 (rotación en $2\pi/3$ con respecto al eje E_3 que pasa por un vértice del cuerpo y el vértice opuesto) y r_2 (rotación en π por el eje E_2 que pasa por el punto de medio de una arista y el punto medio de la arista opuesta); para el grupo completo de simetrías tenemos estas rotaciones, agregando la inversión i (inversión con respecto al centro de simetría I (fig. 5.3)).

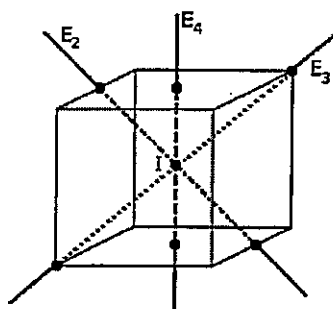


Figura 5.3. Ejes y centro de simetría cubo.

Análogamente, para el grupo de simetrías directo del octaedro se consideran estas mismas tres rotaciones, salvo que en este caso el eje E_4 pasa por un vértice y su opuesto, el eje E_3 pasa por los centros de dos caras opuestas y el eje E_2 (al igual que en el cubo) pasa por el centro de dos aristas opuestas; para el grupo de simetrías completo se agrega la inversión i para completar el grupo.

Para ilustrar los movimientos en el cubo y octaedro y analizar el espacio de Gel'fand a definir se considerarán los grafos representativos de ambos cuerpos (fig.5.4), en estos

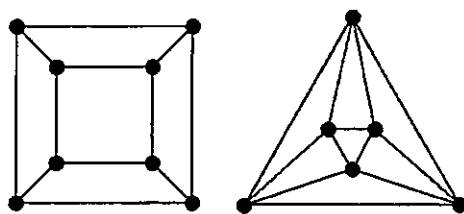


Figura 5.4.

se numera en el cubo los puntos medios de cada arista de 1 a 6 y las aristas opuestas correspondientes de $\bar{1}$ a $\bar{6}$, los vértices de 1 a 4 y los vértices opuestos correspondientes de $\bar{1}$ a $\bar{4}$ (fig. 5.5) y las diagonales de cada cara $d_{(i,j)}$ que unen el vértice i con el j .

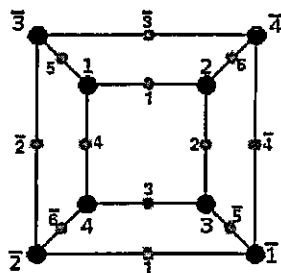


Figura 5.5.

Para el octaedro numeramos los puntos medios de cada arista de 1 a 6 y de $\bar{1}$ a $\bar{6}$ los opuestos correspondientes, de 1 a 4 los centros de cada cara y de $\bar{1}$ a $\bar{4}$ los centros de las opuestas según corresponda (fig. 5.6) y las alturas $h_{(i,j)}$ de cada cara que va del punto medio de la arista i al vértice j .

5.2.1. Grupo O.

Para el grupo O se considera como conjunto X_0 , en el caso del cubo, al conjunto de vértices identificados con sus opuestos $v_{(i,\bar{i})}$ o, en el caso del octaedro, el conjunto de baricentros de cada cara identificados con el baricentro correspondiente a la cara opuesta $b_{(i,\bar{i})}$, es decir $X_0 = \{\beta_{(i,\bar{i})}\}_{i \in I}$ donde β representa a v o b según corresponda a

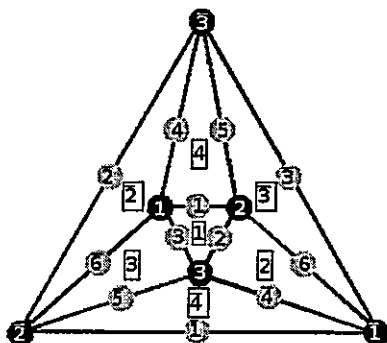


Figura 5.6.

cada poliedro e I es el conjunto de subíndices adecuado a cada uno, y como conjunto X_1 al conjunto de diagonales que unen los puntos medios de cada arista del poliedro, es decir $X_1 = \{a_j\}_{j \in J}$, donde J es el conjunto de subíndices adecuado a cada poliedro. Además la signatura viene dada en los generadores por:

$$\vartheta(r_4) = 1,$$

$$\vartheta(r_3) = 1,$$

$$\vartheta(r_2) = -1.$$

A modo de ejemplo en el caso del cubo, para π_{r_2} se tiene (considerando el eje E_2 pasando por el punto medio de la arista 6 y correspondientemente al punto medio de la arista $\bar{6}$) que al asociarle la matriz correspondiente (en la base $B_0 \cup B_1$), se forma la matriz $[\pi_{r_2}]$ y se obtiene $\chi_\pi(r_2) = 0$.

Calculamos así el caracter de la representación:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} [e] & [r_3] & [r_2] & [r_4] & [r_4^2] \\ \hline 10 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

Luego, considerando la tabla de caracteres irreducibles para el grupo O , mostrada en el Apéndice A, se tiene que:

$$\frac{1}{|O|} \langle \chi_\pi, \chi_{\rho_i} \rangle = 1$$

para todo ρ_i , con $i \in \{0, \dots, 4\}$, representación irreducible de O , es decir, cada representación irreducible del grupo está presente solo una vez en π . Por lo tanto, la representación es un modelo de Gel'fand para O .

5.2.2. Grupo O_h .

Para el grupo O_h se considera como espacio de Gel'fand al conjunto de diagonales que van de un vértice a su opuesto contenidos en cada cara del cubo o el conjunto de alturas de cada cara del octaedro que tienen un vértice común (denotadas por $\bar{h}_{((i,k),j)}$ que corresponde a las alturas $h_{(i,j)}$ y $h_{(k,j)}$) que denotaremos X_0 (fig. 5.7), y al conjunto de vértices (en el caso del cubo) o el conjunto de baricentros de cada cara (en el caso del octaedro) que designaremos como X_1 , es decir, para el cubo tenemos:

$$X_0 = \{d_{(i,j)}\}_{(i,j) \in J} \quad X_1 = \{v_i\}_{i=1}^8$$

y para el octaedro:

$$X_0 = \{\bar{h}_{((i,k),j)}\}_{((i,k),j) \in K} \quad X_1 = \{b_i\}_{i=1}^8$$

donde J y K son conjuntos de subíndices adecuados a cada poliedro. Además la

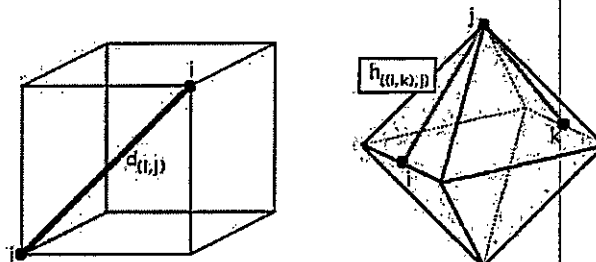


Figura 5.7.

signatura viene dada en los generadores por:

$$\begin{aligned} \vartheta(r_4) &= 1, \\ \vartheta(r_3) &= 1, \\ \vartheta(r_2) &= 1, \\ \vartheta(i) &= -1. \end{aligned}$$

Entonces el caracter de la representación está dado por:

χ	$[e]$	$[r_3]$	$[r_2]$	$[r_4]$	$[r_4^2]$	$[i]$	$[ir_3]$	$[ir_2]$	$[ir_4]$	$[ir_4^2]$
π	20	2	0	0	4	0	0	0	0	0

Luego considerando la tabla de caracteres irreducibles para el grupo O_h , mostrada en el Apéndice A, se tiene que:

$$\frac{1}{|O_h|} \langle \chi_\pi, \chi_{\rho_i} \rangle = 1$$

para todo ρ_i , con $i \in \{0, \dots, 9\}$, representación irreducible de O_h , es decir, cada representación irreducible del grupo está presente solo una vez en π . Por lo tanto, la representación es un modelo de Gelfand para O_h .

5.3. Dodecaedro e icosaedro.

El grupo de simetrías directo del dodecaedro esta formado por r_5 (rotación en $2\pi/5$ con respecto al eje E_5 que pasa por el centro de una cara y el centro de la opuesta), r_3 (rotación en $2\pi/3$ con respecto al eje E_3 que pasa por un vértice del cuerpo y el vértice opuesto) y r_2 (rotación en π por el eje E_2 que pasa por el punto de medio de una arista y el punto medio de la arista opuesta). El grupo completo de simetrías está generado por estas rotaciones, agregando la inversión i (inversión con respecto al centro de simetría I (fig. 5.8)).

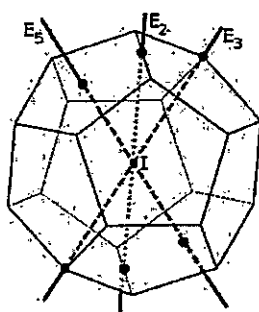


Figura 5.8. Ejes y centro de simetría dodecaedro.

Análogamente, para el grupo de simetrías directo del icosaedro tenemos estas mismas tres rotaciones, salvo que en este caso el eje E_5 pasa por un vértice y su

opuesto, el eje E_3 pasa por los centros de dos caras opuestas y el eje E_2 (al igual que en el dodecaedro) pasa por el centro de dos aristas opuestas; para el grupo de simetrías completo se agrega la inversión i .

Para ilustrar los movimientos en el dodecaedro e icosaedro y analizar el espacio de Gel'fand a definir se consideran los grafos representativos de ambos cuerpos, donde se numeran en el dodecaedro las caras de 1 a 6 y las caras opuestas correspondientes de $\bar{1}$ a $\bar{6}$, los vértices de 1 a 10 y los vértices opuestos correspondientes de $\bar{1}$ a $\bar{10}$ (fig. 5.9).

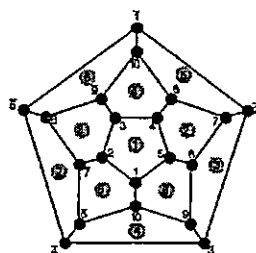


Figura 5.9.

Se procede de forma análoga con el icosaedro.

5.3.1. Grupo I.

Para el grupo I se considera el conjunto X_0 formado por las diagonales que unen el vértice v_i identificado con su opuesto \bar{v}_i , es decir $X_0 = \{v_{(i,\bar{i})}\}$, y el conjunto X_1 formado por los baricentros de cada cara b_i identificados con el baricentro de la cara opuesta \bar{b}_i . Además la signatura viene dada en los generadores por:

$$\vartheta(r_5) = 1,$$

$$\vartheta(r_3) = 1,$$

$$\vartheta(r_2) = -1.$$

Entonces, a modo de ejemplo para el dodecaedro, para π_{r_2} se tiene (considerando el eje E_2 pasando por el punto medio de la arista entre los vértices 4 y 5, y corres-

pondientemente al punto medio entre los vértices $\bar{4}$ y $\bar{5}$) que la matriz asociada $[\pi_{r_2}]$ (en la base $B_0 \cup B_1$), nos da que $\chi_\pi(r_2) = 0$.

Entonces el caracter de la representación esta dado por:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} [e] & [r_5] & [r_5^2] & [r_3] & [r_2] \\ \hline 16 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Luego considerando la tabla de caracteres irreducibles para el grupo I , mostrada en el Apéndice A, se tiene que:

$$\frac{1}{|I|} \langle \chi_\pi, \chi_{\rho_i} \rangle = 1$$

para todo ρ_i , con $i \in \{0, \dots, 4\}$, representación irreducible de I , es decir, cada representación irreducible del grupo está presente solo una vez en π . Por lo tanto, la representación es un modelo de Gel'fand para I .

5.3.2. Grupo I_h .

Para el grupo I_h se considera el conjunto X_0 formado por los vértices y X_1 formado por los baricentros.

Además la signatura viene dada en los generadores por:

$$\begin{aligned} \vartheta(r_5) &= 1, \\ \vartheta(r_3) &= 1, \\ \vartheta(r_2) &= 1, \\ \vartheta(i) &= -1. \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga a las anteriores se tiene que el caracter de la representación es:

$$\frac{\chi}{\pi} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} [e] & [r_5] & [r_5^2] & [r_3] & [r_2] & [i] & [ir_5] & [ir_5^2] & [ir_3] & [ir_2] \\ \hline 32 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Luego considerando la tabla de caracteres irreducibles para el grupo I_h , mostrada en el Apéndice A, se tiene que:

$$\frac{1}{|I_h|} \langle \chi_\pi, \chi_{\rho_i} \rangle = 1$$

para todo ρ_i , con $i \in \{0, \dots, 9\}$, representación irreducible de I_h , es decir, cada representación irreducible del grupo está presente solo una vez en π . Por lo tanto, la representación es un modelo de Gel'fand para I_h .

Capítulo 6

Modelo de Gel'fand para el grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito.

6.1. Grupo de isometrías del plano pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^2} .

Sea \mathbb{F}_p el cuerpo de p elementos, con p primo impar, y \mathbb{F}_{p^2} extensión cuadrática de él, la cual es isomorfa a $\mathbb{F}_p(D)$, donde D es tal que $D^2 \in \mathbb{F}_p$ pero $D \notin \mathbb{F}_p$. Entonces los elementos de \mathbb{F}_{p^2} se pueden escribir de la forma $z = u + Dv$, con u y $v \in \mathbb{F}_p$.

En este espacio se define la pseudo-distancia d_2 , con $d_2(z, w) = N_2(z - w)$, inducida de la norma dada por:

$$N_2(z) = z\bar{z}$$

con $z \in \mathbb{F}_{p^2}$, u y $v \in \mathbb{F}_p$, donde el conjugado \bar{z} de un elemento z del cuerpo está dado por:

$$\bar{z} = \overline{u + Dv} = u - Dv,$$

o bien,

$$\bar{z} = z^p.$$

Denominamos I_2 al grupo de isometrías de \mathbb{F}_{p^2} dado por la norma N_2 , el cual está generado por las traslaciones t , las rotaciones r y la conjugación c , definidas por:

$$t_a(z) = a + z$$

$$r_\alpha(z) = \alpha z$$

$$c(z) = \bar{z}$$

con a y $z \in \mathbb{F}_{p^2}$ y $\alpha \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{F}_{p^2}$, donde \mathbb{U} denota el círculo unitario en \mathbb{F}_{p^2} (los elementos de norma 1). Se denominará α_0 al generador del grupo \mathbb{U} . Entonces el grupo de rotaciones está generado por r_{α_0} (donde $\text{gen}(\{r_{\alpha_0}\}) \simeq C_{p+1}$, grupo multiplicativo de $p+1$ elementos), el grupo de traslaciones está generado por t_1 y t_D (con $\text{gen}(\{t_1, t_D\}) \simeq C_p \times C_p$, con C_p grupo cíclico multiplicativo con p elementos) y el grupo de Galois está dado por $\{e, c\}$, con e elemento identidad del grupo (el cual es isomorfo a C_2).

Como se tiene que $\text{gen}(\{t_1, t_D\}) \triangleleft I_2$, a diferencia de $\text{gen}(\{r_{\alpha_0}\})$ y $\text{gen}(\{c\})$, y también que $\text{gen}(\{r_{\alpha_0}\}) \triangleleft \text{gen}(\{r_{\alpha_0}, c\})$ a diferencia de $\text{gen}(\{c\})$, entonces

$$I_2 \simeq \text{gen}(\{t_1, t_D\}) \rtimes (\text{gen}(\{r_{\alpha_0}\}) \rtimes \text{gen}(\{c\})) \simeq (C_p \times C_p) \rtimes (C_{p+1} \rtimes C_2).$$

6.1.1. Modelo de Gel'fand para el grupo I_2 .

Ahora para construir un modelo de Gelfand geométrico para I_2 se define en primer lugar los conjuntos X_0 y X_1 los cuales están dados por:

$$X_0 = X_1 = \mathbb{F}_{p^2},$$

y, para este caso, es necesario considerar también los conjuntos formados por:

$$Y_i = \{\alpha_0^i, \alpha_0^{-i}\} \tag{6.1}$$

es decir α_0^i y su conjugado, con $i \in I = \{1, 2, \dots, (p+1)/2\}$ y recordando que α_0 es el generador de \mathbb{U} , con la salvedad que en el caso que $i = (p+1)/2$ se tiene $\alpha_0^{(p+1)/2} = -1 = \alpha_0^{-(p+1)/2}$ entonces $Y_{-1} = \{-1\}$.

Entonces en $X_0 \times C_2$ se define L_0 espacio de funciones pares, en $X_1 \times C_2$ se define L_1 espacio de funciones impares y en $Y_i \times C_2$, se define L'_i , para $i \in I$, espacio de funciones pares dado por la base

$$B'_i = \{\delta_{\alpha_0^i}^{(+)}, \delta_{\alpha_0^{-i}}^{(+)}\}$$

donde

$$\delta_{\alpha_0^i}^{(+)} = \sum_{j=1}^{p+1} \xi^{ij} \delta_{\alpha_0^j}^+, \quad (6.2)$$

con $\xi = e^{(2\pi i)/(p+1)}$. Análogamente se tiene que

$$\delta_{\alpha_0^{-i}}^{(+)} = \sum_{j=1}^{p+1} \xi^{-ij} \delta_{\alpha_0^j}^+,$$

(teniendo en cuenta que $B'_{-1} = \{\delta_{-1}^{(+)}\}$) y L''_{-1} espacio de funciones impares dado por la base

$$B''_{-1} = \{\delta_{-1}^{(-)} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \delta_{\alpha_0^j}^-\}. \quad (6.3)$$

Luego la acción de I_2 en L_0 y L_1 está definida de la forma usual y en L'_i y L''_{-1} esta dada por:

$$r_{\alpha_0^m} c \cdot \delta_{\alpha_0^i}^{(+)}(x, \varepsilon) = \xi^{im} \delta_{\alpha_0^{-i}}^{(+)}(x, \varepsilon),$$

con $m \in \{1, \dots, p+1\}$ y para L''_{-1} es análogo.

Además la signatura de I_2 definida en los generadores viene dada por:

$$\begin{aligned} \vartheta(t_a) &= 1, \\ \vartheta(r_\alpha) &= 1, \\ \vartheta(c) &= -1. \end{aligned}$$

Luego sea $L = L_0 \oplus L_1 \oplus L'_1 \oplus \dots \oplus L'_{-1} \oplus L''_{-1}$, entonces se comprobará que la representación $\pi_g : L \rightarrow L$ es un modelo de Gel'fand para I_2 .

Para probar esta afirmación, en este caso debemos ampliar las condiciones C1 y C2 a los conjuntos agregados. En el caso de la condición C1, se tiene que, realizando

un procedimiento análogo a lo hecho desde (3.1) en adelante, obtenemos que la condición requerida es la misma, por lo que se tiene:

X_0 : Para $(w_1, w_2) \in X_0^2$ basta tomar $t_{ar_\alpha} \in I_2$ con:

$$\alpha = -1,$$

$$a = w_1 + w_2.$$

$$\text{Así } t_{w_1+w_2 r_{-1}}(w_1) = w_2 \text{ y } t_{w_1+w_2 r_{-1}}(w_2) = w_1.$$

X_1 : Análogo al caso de X_0 .

Y_i : Para $(\alpha_0^i, \alpha_0^{-i}) \in Y_i^2$ basta tomar $c \in I_2$, así $c(\alpha_0^i) = \alpha_0^{-i}$ y $c(\alpha_0^{-i}) = \alpha_0^i$.

La condición C2 asegura que el espacio de entrelazamiento entre subrepresentaciones sea nulo (lo que garantiza que la representación no tenga multiplicidades), entonces en este caso, para la condición C2 se tiene que, si se procede en forma análoga a lo hecho para obtener la igualdad (3.4), se obtienen las siguientes igualdades para cada caso visto a continuación (el caso de $X_0 \times X_1$ mantiene la condición C2 usada hasta ahora):

$X_0 \times X_1$: Para $(w_0, w_1) \in X_0 \times X_1$, con $w_0 \neq w_1$, basta tomar $t_{ar_\alpha c} \in I_2$ con:

$$\alpha = (w_0 - w_1)(w_0^p - w_1^p)^{-1},$$

$$a = w_0 - (w_0^p(w_0 - w_1))(w_0^p - w_1^p)^{-1}.$$

$$\text{así } t_{ar_\alpha c}(w_0) = w_0, t_{ar_\alpha c}(w_1) = w_1 \text{ y } \vartheta(t_{ar_\alpha c}) \neq 1.$$

$X_0 \times Y_i$: (con $i \in I$) Para $S \in Hom_{I_2}(\pi^0, \pi^i)$ (con $\pi^0 = \pi|_{L_0}$ y $\pi^i = \pi|_{L_i}$) y con $S_*^* \in \mathbb{C}$ denotando los coeficientes de S con respecto a las bases B_0 y B_i' respectivamente y $t_{ar_\alpha} \in I_2$ con:

$$\alpha = \alpha_0,$$

$$a = w_0 - \alpha_0 w_0,$$

se tiene que:

$$\xi^i S_{\alpha_0^i}^{w_0} = S_{\alpha_0^i}^{w_0}$$

para todo $i \in I$ y $w_0 \in X_0$.

Luego como $\xi^i \neq 1$, se concluye que $S_{\alpha_0^i}^{w_0} = 0$ para todo $i \in I$ y $w_0 \in X_0$.

$X_1 \times Y_i$: (con $i \in I$) Análogo al caso anterior.

$Y_i \times Y_j$: (con i y $j \in I$) En este caso, teniéndose en cuenta $i \neq j$, basta tomar $r_{\alpha_0} \in I_2$ para obtener $r_{\alpha_0} \cdot \alpha_0^i = \alpha_0^i$ (o $r_{\alpha_0} \cdot \alpha_0^{-i} = \alpha_0^{-i}$), $r_{\alpha_0} \cdot \alpha_0^j = \alpha_0^j$ (o $r_{\alpha_0} \cdot \alpha_0^{-j} = \alpha_0^{-j}$) y $\xi^i \neq \xi^j$.

$X_0 \times Y_{-1}$: (funciones impares) Se considera $t_a r_\alpha \in I_2$ con:

$$\alpha = \alpha_0,$$

$$a = w_0 - \alpha_0 w_0.$$

para obtener $t_a r_\alpha(w_0) = w_0$, $t_a r_\alpha(-1) = -1$ y $1 \neq -1$.

$X_1 \times Y_{-1}$: (funciones impares) Análogo al anterior.

$Y_i \times Y_{-1}$: (funciones impares) Para Y_i con $i \in I \setminus \{(p+1)/2\}$, basta tomar $r_{\alpha_0} \in I_2$ para que obtener que $r_{\alpha_0} \cdot \alpha_0^i = \alpha_0^i$ (o $r_{\alpha_0} \cdot \alpha_0^{-i} = \alpha_0^{-i}$), $r_{\alpha_0} \cdot (-1) = -1$ y $\xi^i \neq -1$.

Y para $Y_{-1} \times Y_{-1}$ (funciones pares y funciones impares respectivamente) se considera $r_{\alpha_0} c \in I_2$ para obtener que $r_{\alpha_0} c \cdot (-1) = -1$ y $-1 \neq 1$.

Por lo tanto, al cumplirse las condiciones C1 y C2 se tiene que la representación no tiene multiplicidades.

A continuación, como se sabe que

$$\chi_\pi(e) = \dim(L)$$

y $\dim(L_0) = p^2$, $\dim(L_1) = p^2$, $\dim(L'_i) = 2$, con $i \in I \setminus \{(p+1)/2\}$, $\dim(L'_{-1}) = 1$ y $\dim(L''_{-1}) = 1$ entonces,

$$\chi_\pi(e) = 2p^2 + p + 1. \quad (6.4)$$

Por otro lado, se debe calcular $\sum_{\rho \in \hat{\Gamma}_2} \chi_\rho(e)$, para esto se utilizará el método llamado máquina de Mackey o método de pequeños grupos, el cual es una técnica, utilizada por primera vez por Wigner [19] y generalizada por Mackey [13] para construir representaciones de un grupo a través de las de un subgrupo normal. Entonces, siguiendo la construcción de [15], si tenemos un grupo G con A y H subgrupos tal que A es normal en G , y cumpliéndose las siguientes hipótesis:

- i) A es abeliano.
- ii) G es el producto semidirecto de H y A .

Se pueden construir las representaciones irreducibles de G a partir de ciertos subgrupos de H . Como A es abeliano, sus caracteres irreducibles son de grado 1 y forman un grupo $X = Hom(A, \mathbb{C}^*)$. El grupo G actúa en X por:

$$(s.\chi)(a) = \chi(s^{-1}as)$$

para todo $s \in G$, $\chi \in X$ y $a \in A$. Sea $(\chi_i)_{i \in X/H}$ un sistema de representantes de las órbitas de H en X . Para cada $i \in X/H$, sea H_i el subgrupo de H consistente de aquellos elementos h tal que $h.\chi_i = \chi_i$, y sea $t_i = A \rtimes H_i$ el correspondiente subgrupo de G . Se extiende la función χ_i a t_i definiendo

$$\chi_i(ah) = \chi_i(a)$$

para $a \in A$ y $h \in H_i$. Teniendo en cuenta el hecho de que $h.\chi_i = \chi_i$ para todo $h \in H_i$, se ve que χ_i es un caracter de grado 1 de t_i . Ahora sea ρ una representación irreducible de H_i ; componiendo ρ con la proyección canónica $\Pi : t_i \rightarrow H_i$ se obtiene una representación irreducible $\rho \circ \Pi = \tilde{\rho}$ de t_i . Finalmente, tomando el producto tensorial de χ_i y $\tilde{\rho}$, se obtiene una representación irreducible $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ de t_i ; denotando $\theta_{(i,\rho)}$ a la representación inducida de G correspondiente, se tiene que:

- i) $\theta_{(i,\rho)}$ es irreducible:
- ii) Si $\theta_{(i,\rho)}$ y $\theta_{(i',\rho')}$ son isomorfas, entonces $i = i'$ y ρ es isomorfa a ρ' .

iii) Toda representación irreducible de G es isomorfa a una $\theta_{(i,\rho)}$.

Por lo tanto, se obtienen todas las representaciones irreducibles de G . Luego para calcular el caracter asociado a cada $\theta_{(i,\rho)}$, se tiene que:

$$\chi_{\theta_{(i,\rho)}}(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G: \\ t^{-1}st \in H}} (\chi_i \otimes \bar{\rho})(t^{-1}st)$$

Entonces, para el grupo I_2 que está dado por $(C_p \times C_p) \rtimes (C_{p+1} \times C_2)$ denotando por M_2 a $C_{p+1} \times C_2$, tenemos:

Para M_2 : Como $C_{p+1} \triangleleft M_2$, y C_{p+1} es abeliano, se considera $X_{p+1} = \{\chi_i\}_{i=0}^p$ caracteres de C_{p+1} , el cual bajo la acción de C_2 nos proporciona las órbitas $\{\chi_0\}$, $\{\chi_1, \bar{\chi}_1\}$, $\{\chi_2, \bar{\chi}_2\}$, $\{\chi_3, \bar{\chi}_3\}$, \dots , $\{\chi_{\frac{p+1}{2}}\}$, entonces $\{\chi_j\}_{j \in J}$ es un sistema de representantes de la órbitas de C_2 en X_{p+1} . Luego se define $M_{2_i} = C_{p+1} \times C_{2_i}$, donde

$$C_{2_i} = \{g \in C_2 : g \cdot \chi_i = \chi_i\} = \begin{cases} \{e, c\} & \text{si } \chi_i = \bar{\chi}_i \\ \{e\} & \text{si } \chi_i \neq \bar{\chi}_i \end{cases}$$

entonces

$$C_{2_0} = \{e, c\} \simeq C_2$$

$$C_{2_j} = \{e\} \simeq C_1$$

$$C_{2_{(p+1)/2}} = \{e, c\} \simeq C_2$$

para $j = 1, \dots, \frac{p-1}{2}$ y con C_1 el grupo trivial. Por lo que se obtiene

$$M_{2_0} = C_{p+1} \times C_2$$

$$M_{2_j} = C_{p+1} \times \{e\}$$

$$M_{2_{(p+1)/2}} = C_{p+1} \times C_2$$

Denotando por $\{\rho_0, \rho_1\}$ las representaciones irreducibles de C_2 (con ρ_0 la re-

presentacion trivial), se tiene que las representaciones irreducibles de M_2 son:

$$\begin{aligned}
 \theta_{(0,\rho_0)} &= \text{Ind}_{M_{2_0}}^{M_2} (\chi_0 \otimes \tilde{\rho}_0) \\
 \theta_{(0,\rho_1)} &= \text{Ind}_{M_{2_0}}^{M_2} (\chi_0 \otimes \tilde{\rho}_1) \\
 \theta_{(j,\rho_0)} &= \text{Ind}_{M_{2_j}}^{M_2} (\chi_j \otimes \tilde{\rho}_0) \\
 \theta_{((p+1)/2,\rho_0)} &= \text{Ind}_{M_{2_{(p+1)/2}}}^{M_2} (\chi_{(p+1)/2} \otimes \tilde{\rho}_0) \\
 \theta_{((p+1)/2,\rho_1)} &= \text{Ind}_{M_{2_{(p+1)/2}}}^{M_2} (\chi_{(p+1)/2} \otimes \tilde{\rho}_1)
 \end{aligned}$$

donde sus caracteres están dados por

$$\chi_{\theta_{(j,\rho_k)}}(s) = \frac{1}{|M_{2_j}|} \sum_{\substack{t \in M_2 : \\ t^{-1}st \in M_{2_j}}} \chi_j(t^{-1}st) \tilde{\rho}_k(t^{-1}st). \quad (6.5)$$

Como en este caso lo que interesa es el caracter de e , entonces de (6.5) obtiene:

$$\begin{aligned}
 \chi_{(\theta_{0,\rho_0})}(e) &= 1 \\
 \chi_{(\theta_{0,\rho_1})}(e) &= 1 \\
 \chi_{(\theta_{j,\rho_0})}(e) &= 2 \\
 \chi_{(\theta_{(p+1)/2,\rho_0})}(e) &= 1 \\
 \chi_{(\theta_{(p+1)/2,\rho_1})}(e) &= 1
 \end{aligned}$$

Para I_2 : Como $(C_p \times C_p) \triangleleft I_2$, y $(C_p \times C_p)$ es abeliano, se considera $X = \{\chi_{(u,v)}\}_{(u,v) \in (C_p \times C_p)}$ caracteres de $(C_p \times C_p)$, los cuales bajo la acción de M_2 proporciona $p-1$ órbitas distintas con $p+1$ elementos cada una (a excepción de la órbita de $\chi_{(0,0)}$). Es decir, $\{\chi_{(a_i,b_i)}\}_{i=0}^{p-1}$ es un sistema de representantes de las órbitas de M_2 en X . Luego se define:

$$I_{2(i,j)} = (C_p \times C_p) \rtimes M_{2(i,j)}$$

donde $M_{2(i,j)} = \{g \in M_2 : g \cdot \chi_{(i,j)} = \chi_{(i,j)}\}$, entonces como

$$\begin{aligned}
 r_\alpha \cdot \chi_{(0,0)}(t_a) &= \chi_{(0,0)}(t_a) \\
 c \cdot \chi_{(0,0)}(t_a) &= \chi_{(0,0)}(t_a) \\
 r_\alpha c \cdot \chi_{(0,0)}(t_a) &= \chi_{(0,0)}(t_a)
 \end{aligned}$$

se tiene que $M_{2(0,0)} = M_2$, y para

$$r_\alpha c \cdot \chi_{(i,j)}(t_\alpha) = \chi_{(i,j)}(t_{\alpha\bar{a}})$$

se necesita que

$$\alpha\bar{a} = a$$

entonces basta tomar $\alpha = a^{p^2-p}$, y luego se obtiene que

$$M_{2(i,j)} = \{e, r_\alpha c\},$$

el cual es isomorfo a C_2 , por lo que

$$I_{2(0,0)} = (C_p \times C_p) \rtimes M_{2(0,0)} \simeq (C_p \times C_p) \rtimes M_2,$$

$$I_{2(a,b)} = (C_p \times C_p) \rtimes M_{2(a,b)} \simeq (C_p \times C_p) \rtimes C_2.$$

Denotando por $\{\theta_{(j,\rho_k)}\}$ las representaciones irreducibles de M_2 y $\{\rho_0, \rho_1\}$ las representaciones irreducibles de C_2 , se tiene entonces que las representaciones irreducibles de I_2 son

$$\Theta_{((0,0),\theta_0,\rho_0)} = \text{Ind}_{I_{2(0,0)}}^{I_2} (\chi_{(0,0)} \otimes \bar{\theta}_{0,\rho_0})$$

$$\Theta_{((0,0),\theta_0,\rho_1)} = \text{Ind}_{I_{2(0,0)}}^{I_2} (\chi_{(0,0)} \otimes \bar{\theta}_{0,\rho_1})$$

$$\Theta_{((0,0),\theta_1,\rho_0)} = \text{Ind}_{I_{2(0,0)}}^{I_2} (\chi_{(0,0)} \otimes \bar{\theta}_{1,\rho_0})$$

$$\Theta_{((0,0),\theta_1,\rho_1)} = \text{Ind}_{I_{2(0,0)}}^{I_2} (\chi_{(0,0)} \otimes \bar{\theta}_{1,\rho_1})$$

$$\Theta_{((0,0),\theta_j,\rho_0)} = \text{Ind}_{I_{2(0,0)}}^{I_2} (\chi_{(0,0)} \otimes \bar{\theta}_{j,\rho_0})$$

$$\Theta_{((a,b),\rho_0)} = \text{Ind}_{I_{2(a,b)}}^{I_2} (\chi_{(a,b)} \otimes \bar{\rho}_0)$$

$$\Theta_{((a,b),\rho_1)} = \text{Ind}_{I_{2(a,b)}}^{I_2} (\chi_{(a,b)} \otimes \bar{\rho}_1)$$

donde sus caracteres están dados por

$$\chi_{\Theta_{((a,b),\lambda)}}(s) = \frac{1}{|I_{2(a,b)}|} \sum_{\substack{\{t \in I_2 : \\ t^{-1}st \in I_{2(a,b)}\}}} \chi_{(a,b)}(t^{-1}st) \bar{\lambda}(t^{-1}st) \quad (6.6)$$

Luego para e de (6.6) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \chi_{\Theta_{((0,0),\theta_{(0,\rho_0)})}}(e) &= 1 \\ \chi_{\Theta_{((0,0),\theta_{(0,\rho_1)})}}(e) &= 1 \\ \chi_{\Theta_{((0,0),\theta_{(1,\rho_0)})}}(e) &= 1 \\ \chi_{\Theta_{((0,0),\theta_{(1,\rho_1)})}}(e) &= 1 \\ \chi_{\Theta_{((0,0),\theta_{(j,\rho_0)})}}(e) &= 2 \\ \chi_{\Theta_{((a,b),\rho_0)}}(e) &= p + 1 \\ \chi_{\Theta_{((a,b),\rho_1)}}(e) &= p + 1 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que:

$$\sum_{\varsigma \in \hat{I}_2} \chi_{\varsigma}(e) = 1 + 1 + 1 + 1 + \left[\frac{p-1}{2} \right] 2 + [p-1](p+1) + [p-1](p+1)$$

es decir,

$$\sum_{\varsigma \in \hat{I}_2} \chi_{\varsigma}(e) = 2p^2 + p + 1.$$

Finalmente comparando con (6.4) se obtiene que

$$\sum_{\varsigma \in \hat{I}_2} \chi_{\varsigma}(e) = \chi_{\pi}(e).$$

Por lo tanto (π, L) es un modelo de Gel'fand para I_2 .

6.2. Grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^n} .

Sea \mathbb{F}_p el cuerpo de p elementos, con p primo impar, y su extensión \mathbb{F}_{p^n} . En este espacio se define la pseudo-distancia d_n , con $d_n(z, w) = N_n(z - w)$ para z y w en

\mathbb{F}_{p^n} , inducida de la norma N_n dada por:

$$N_n(z) = z z^p z^{p^2} \dots z^{p^{n-1}} = z^\varrho,$$

con $\varrho = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$, donde podemos notar que si \mathbb{U} denota al conjunto de elementos de \mathbb{F}_{p^n} de norma 1, con α_0 elemento generador, se tiene que \mathbb{U} tiene orden $\varrho = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$.

Y además el conjugado \bar{z} de un elemento z del espacio está dado por:

$$\bar{z} = z^p,$$

entonces se describe el grupo de isometrías correspondiente y luego un modelo de Gel'fand para él.

Denominando I_n al grupo de isometrías dado por la norma N_n y procediendo de forma análoga a lo anterior se obtiene que

$$I_n \simeq C_p^n \rtimes (C_\varrho \rtimes C_n) \quad (6.7)$$

6.2.1. Modelo de Gel'fand para el grupo I_n .

Para construir un modelo de Gelfand geométrico para I_n se generalizará el método usado hasta ahora. En vez de considerar un conjunto $X = X_\phi \times C_2$ (con $\phi \in \Phi$ conjunto de subíndices adecuados), donde C_2 nos denotaba en el caso anterior al grupo de Galois del plano, se utilizará el conjunto dado por $X = X_\phi \times C_n$, con C_n grupo multiplicativo de n elementos, el cual corresponde naturalmente al grupo de Galois de la extensión que estamos tratando, luego la generalización de lo que correspondería a la signatura antes mencionada, se traduce simplemente en el homomorfismo natural de G sobre el grupo de Galois.

Entonces la generalización de las funciones pares e impares se define por:

$$\delta_u^\phi = \sum_{j=1}^n \zeta^{\phi_j} \delta_{(u,j)}, \quad (6.8)$$

con $\zeta = e^{2\pi i/n}$ raíz n -ésima de la unidad y $(u, j) \in X_\phi \times C_n$. La base correspondiente B_ϕ viene dada por:

$$B_\phi = \{\delta_u^\phi\}_{u \in X_\phi}. \quad (6.9)$$

Cabe notar, que para el caso de \mathbb{F}_{p^2} , con $X_0 = \mathbb{F}_{p^2} = X_1$ y $C_n = C_2$ se tiene que las funciones vienen dadas por:

$$\delta_u^0 = (-1)^{0 \cdot 0} \delta_{(u,0)} + (-1)^{0 \cdot 1} \delta_{(u,1)} \equiv \delta_{(u,1)} + \delta_{(u,-1)} = \delta_u^+,$$

la cual coincide con las funciones pares y

$$\delta_u^1 = (-1)^{1 \cdot 0} \delta_{(u,0)} + (-1)^{1 \cdot 1} \delta_{(u,1)} \equiv \delta_{(u,1)} - \delta_{(u,-1)} = \delta_u^-,$$

la que coincide con las funciones impares.

Entonces sean X_0, X_1, \dots, X_{n-1} conjuntos dados por:

$$X_0 = X_1 = \dots = X_{n-1} = \mathbb{F}_{p^n},$$

además, como se tiene que α_0 es el generador de \mathbb{U} (es decir $\mathbb{U} = \{\alpha_0, \alpha_0^2, \dots, \alpha_0^{\varrho}\}$), definimos los conjuntos Y_i (análogos a los definidos para el caso cuadrático en (6.1)), osea

$$Y_i = \{\alpha_0^i, \alpha_0^{ip}, \alpha_0^{ip^2}, \dots, \alpha_0^{ip^{n-1}}\}$$

es decir, α_0^i y sus conjugados, con $i \in I$ conjunto de subíndices tal que $\alpha_0^{ip^k} \notin Y_j$ para $i \neq j, k \in \{0, \dots, n-1\}$ (donde $\text{card}(I) = \frac{\varrho-1}{n}$ en caso de ϱ impar o $\text{card}(I) = \frac{\varrho-2}{n} + 1$ en el caso par), con $\alpha_0^{ip^k} \neq 1$ para todo $i \in I$ y $k \in \{0, \dots, n-1\}$ y con la salvedad que en el caso de ϱ par se tiene que si $i = \varrho/2$, entonces $\alpha_0^{\varrho/2} = -1$ y se considera también el conjunto:

$$Y_{-1} = \{-1\},$$

Entonces en $X_i \times C_n$ se define L_i espacio de funciones con base B_i ya descrito en (6.9), para $i = 0, \dots, n-1$; en $Y_i \times C_n$, se define L'_i , con $i \in I$, espacio de funciones dado por la base

$$B'_i = \{\delta_{\alpha_0^{ip^k}}^{(0)}\}_{k=0}^{n-1}$$

con el análogo a (6.2) dado por:

$$\delta_{\alpha_0^{ip^k}}^{(0)} = \sum_{j=1}^{\varrho} \xi^{ip^k j} \delta_{\alpha_0^j}^0$$

con $\xi = e^{2\pi i/\varrho}$ y $\delta_{\alpha_0^j}^0$ definido en (6.8), y finalmente en Y_{-1} (en caso de ϱ par) se define el espacio L''_{-1} , dado por la base análoga a (6.3):

$$B''_{-1} = \{\delta_{-1}^{(l)} = \sum_{j=1}^{\varrho} (-1)^j \delta_{\alpha_0^j}^l\}.$$

con $l = 1, \dots, n-1$ y $\delta_{\alpha_0^j}^l$ definido en (6.8).

Luego la acción de I_n en $L^2(X)$, se define de forma análoga al caso anterior y la acción de I_n en el grupo de Galois C_n viene dada naturalmente por:

$$\begin{aligned} \vartheta(t_a) &= 1, \\ \vartheta(\tau_\alpha) &= 1, \\ \vartheta(c^m) &= \zeta^m. \end{aligned}$$

Luego sea

$$L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i \bigoplus_{i=1}^{\frac{\varrho-1}{n}} L'_i$$

en caso de ϱ impar o

$$L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i \bigoplus_{i=1}^{\frac{\varrho-2}{n}+1} L'_i \bigoplus_{i=1}^{n-1} L''_i$$

en caso par, entonces se comprobará que la representación dada por $\pi_g(f(x, \epsilon)) = f(g^{-1} \cdot x, \vartheta(g)\epsilon)$, es un modelo de Gel'fand para I_n .

En efecto, para las condiciones C1 y C2 se tiene que:

La condición C1 nos asegura que la representación definida en cada conjunto no tenga multiplicidades, entonces en esta generalización del método para los conjuntos X_i se tiene que la condición exigida es la misma, en cambio para Y_i se obtiene una diferencia explicada a continuación:

X_i : Para $(w_1, w_2) \in X_i^2$ (con $w_1 \neq w_2$), basta tomar $t_a r_\alpha c^m \in I_n$ con:

$$\begin{aligned} a &= w_1 - \alpha w_2, \\ \alpha &= (w_2 - w_1)(w_1^p - w_2^p), \\ m &= 1, \end{aligned}$$

tal que $t_a r_\alpha c(w_1) = w_2$ y $t_a r_\alpha c(w_2) = w_1$ para todo $(w_1, w_2) \in X_i^2$.

Y_i : Para Y_i considerando $T \in \text{End}_{I_n}(\pi^i)$ (con $\pi^i = \pi|_{L_i}$) y procediendo en forma análoga a (3.3) con $g = r_{\alpha_0}$ para este caso, se obtiene que:

$$\xi^{ip^k} T_{k'}^k = \xi^{ip^{k'}} T_{k'}^k$$

para todo k y $k' \in \{0, \dots, n-1\}$ y $T_{k'}^k \in \mathbb{C}$, entonces si $k \neq k'$, se tiene que $T_{k'}^k = 0$ y por lo tanto el conmutante de la representación restringida a este conjunto es conmutativo.

Para la condición C2 procedemos de la misma forma que en para I_2 , entonces en este caso más general para la condición C2 se tiene que, si se procede en forma análoga a lo hecho para obtener la igualdad (3.4), se obtienen las siguientes igualdades para cada caso visto a continuación:

$X_i \times X_j$: (Con $i \neq j$) Para $S \in \text{Hom}_{I_n}(\pi^i, \pi^j)$ (con $\pi^i = \pi|_{L_i}$ y $\pi^j = \pi|_{L_j}$) y con $S_*^* \in \mathbb{C}$ denotando los coeficientes de S con respecto a las bases B_i y B_j respectivamente, se tiene que:

$$\zeta^{im} S_v^{t_a r_\alpha c^m(u)} = \zeta^{jm} S_{(t_a r_\alpha c^m)^{-1}(v)}^u$$

para todo $t_a r_\alpha c^m \in I_n$, $u \in X_i$ y $v \in X_j$.

Entonces, para $u \neq v$, basta tomar $t_a r_\alpha c^m \in I_n$ con:

$$a = u - (u^p(u - v))(u^p - v^p)^{-1},$$

$$\alpha = (u - v)(u^p - v^p)^{-1},$$

$$m = 1,$$

con lo que se obtiene $t_a r_\alpha c(u) = u$, $t_a r_\alpha c(v) = v$ y $\zeta^i \neq \zeta^j$, y para $u = v$, considerando $t_{u-u^p} c \in I_n$ se tiene que

$$\zeta^i S_v^u = \zeta^j S_v^v$$

por tanto se concluye que $S_v^u = 0$ para todo $(u, v) \in X_i \times X_j$.

$X_i \times Y_j$: Para $S \in Hom_{I_n}(\pi^i, \pi^{j'})$ (con $\pi^i = \pi|_{L_i}$ y $\pi^{j'} = \pi|_{L'_j}$) y con $S_* \in \mathbb{C}$ denotando los coeficientes de S con respecto a las bases B_i y B'_j respectivamente, se tiene que:

$$\zeta^{im} S_k^{t_a r_{\alpha_0^s} c^m(u)} = \xi^{jp^k - ms} S_{(t_a r_{\alpha_0^s} c^m)^{-1} \cdot \alpha_0^{jp^k}}^u$$

para todo $t_a r_{\alpha_0^s} c^m \in I_n$, $u \in X_i$ y $\alpha_0^{jp^k} \in Y_j$.

Entonces, fijados $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in I$ y $k \in \{0, \dots, n-1\}$ si

$$\varrho_i = njp^k$$

basta tomar $t_a r_\alpha \in I_2$ con:

$$\alpha = \alpha_0^2,$$

$$a = u - \alpha_0^2 u.$$

para obtener $t_a r_\alpha(u) = u$, $t_a r_\alpha \cdot \alpha_0^{jp^k} = \alpha_0^{jp^k}$ y $\zeta^i \neq \xi^{2jp^k}$, y si fijados i, j y k ya mencionados, se tiene que

$$\varrho_i \neq njp^k$$

entonces basta tomar $t_a r_\alpha \in I_2$ con:

$$\alpha = \alpha_0,$$

$$a = u - \alpha_0 u.$$

para obtener lo buscado.

$Y_i \times Y_j$: (Con $i \neq j$) Para $S \in Hom_{I_n}(\pi^i, \pi^{j'})$ (con $\pi^i = \pi|_{L_i}$ y $\pi^{j'} = \pi|_{L_j}$) y con $S_* \in \mathbb{C}$ denotando los coeficientes de S con respecto a las bases B_i y B_j respectivamente, y $t_a r_{\alpha_0} \in I_n$, se tiene:

$$\xi^{ip^k} S_{\alpha_0^{jp^k}}^{\alpha_0^{jp^k}} = \xi^{jp^{k'}} S_{\alpha_0^{jp^{k'}}}^{\alpha_0^{jp^k}}$$

para todo $\alpha_0^{ip^k} \in Y_i$ y $\alpha_0^{jp^{k'}} \in Y_j$, y por construcción $\xi^{ip^k} \neq \xi^{jp^{k'}}$ para $i \neq j$, por lo tanto el espacio de entrelazamiento es nulo.

$X_i \times Y_{[-1]}^j$: Para $S \in Hom_{I_n}(\pi^i, \pi^{j''})$ (con $\pi^i = \pi|_{L_i}$ y $\pi^{j''} = \pi|_{L_j''}$) y con $S_*^{-1} \in \mathbb{C}$ denotando los coeficientes de S con respecto a las bases B_i y B_j'' respectivamente, luego se tiene:

$$\zeta^{im} S_{t_a r_{\alpha_0^s} c^m(u)}^{-1} = \zeta^{jm} (-1)^s S_u^{-1}$$

para todo $t_a r_{\alpha_0^s} c^m \in I_n$ y $u \in X_i$.

Entonces si $i = j$, basta tomar $t_a r_{\alpha} \in I_2$ con:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, \\ a &= u - \alpha_0 u. \end{aligned}$$

para obtener $t_a r_{\alpha}(u) = u$, $t_a r_{\alpha}(-1) = -1$ y $\zeta^i \neq -\zeta^i$, y si $i \neq j$ entonces basta tomar $t_a r_{\alpha} \in I_2$ con:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0^2, \\ a &= u - \alpha_0^2 u. \end{aligned}$$

para obtener lo buscado.

$Y_i \times Y_{[-1]}^j$: Para $S \in Hom_{I_n}(\pi^i, \pi^{j''})$ (con $\pi^i = \pi|_{L_i}$ y $\pi^{j''} = \pi|_{L_j''}$) y con $S_*^{-1} \in \mathbb{C}$ denotando los coeficientes de S con respecto a las bases B_i y B_j'' respectivamente, luego se tiene:

$$\xi^{ip^k} S_{(t_a r_{\alpha_0^s} c^m) \cdot \alpha_0^{ip^k}}^{-1} = \zeta^{jm} (-1)^s S_{\alpha_0^{ip^k}}^{-1}$$

para todo $t_a r_{\alpha_0} c^m \in I_n$ y $\alpha_0^{ip^k} \in Y_i$.

Entonces, fijados $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{0, \dots, n-1\}$ si

$$e_j = 2in p^k$$

basta tomar $t_a r_\alpha \in I_2$ con:

$$\alpha = \alpha_0,$$

$$a = u - \alpha_0 u.$$

para obtener $t_a r_\alpha \cdot \alpha_0^{ip^k} = \alpha_0^{ip^k}$, $t_a r_\alpha \cdot (-1) = -1$ y $\xi^{ip^k} \neq \zeta^j$, y si fijados i , j y k ya mencionados, se tiene que

$$e_j \neq 2in p^k$$

entonces basta tomar $t_a r_\alpha \in I_2$ con:

$$\alpha = \alpha_0^2,$$

$$a = u - \alpha_0^2 u.$$

para obtener lo buscado.

$Y_{[-1]}^i \times Y_{[-1]}^j$: Para $S \in \text{Hom}_{I_n}(\pi^{i''}, \pi^{j''})$ (con $\pi^{i''} = \pi|_{L_i''}$ y $\pi^{j''} = \pi|_{L_j''}$) y con $S_i \in \mathbb{C}$ denotando el coeficiente de S con respecto a las bases B_i'' y B_j'' respectivamente, luego se tiene:

$$\zeta^{im} S_i = \zeta^{jm} S_i$$

para todo $t_a r_{\alpha_0} c^m \in I_n$, pero como $i \neq j$, entonces $\zeta^i = \zeta^j$, por lo tanto $S_i = 0$. Luego las subrepresentaciones correspondientes a los conjuntos $Y_{[-1]}^i \times Y_{[-1]}^j$ no son equivalentes.

Por lo tanto, al cumplirse las condiciones C1 y C2 se tiene que la representación no tiene multiplicidades.

A continuación, como se sabe que

$$\chi_\pi(e) = \dim\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i \bigoplus_{i=1}^{\frac{n-1}{n}} L'_i\right)$$

con $\dim(L_i) = p^n$ y $\dim(L'_i) = n$ en el caso impar, entonces

$$\chi_\pi(e) = np^n + \varrho - 1, \quad (6.10)$$

y

$$\chi_\pi(e) = \dim\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} L_i \bigoplus_{i=1}^{\frac{\varrho-2}{n}+1} L'_i \bigoplus_{i=1}^{n-1} L''_i\right)$$

con $\dim(L_i) = p^n$, $\dim(L'_i) = n$, para $i \neq -1$, $\dim(L'_{-1}) = 1$ y $\dim(L''_i) = 1$ para el caso par, entonces

$$\chi_\pi(e) = np^n + \varrho - 2 + n. \quad (6.11)$$

Por otro lado, se debe calcular $\sum_{\rho \in \widehat{I_n}} \chi_\rho(e)$, para esto se utilizó el método descrito anteriormente.

Entonces, para el grupo I_n que está dado por $C_p^n \rtimes (C_\varrho \rtimes C_n)$ denotando por M_n a $C_\varrho \rtimes C_n$, tenemos:

Para M_n : Como $C_\varrho \triangleleft M_n$, y C_ϱ es abeliano, se considera $X_\varrho = \{\chi_i\}_{i=0}^{\varrho-1}$ caracteres de C_ϱ , el cual bajo la acción de C_n nos proporciona las órbitas $\{\chi_0\}$, $\{\chi_1, \chi_p, \dots, \chi_{p^{n-1}}\}$, $\{\chi_2, \chi_{2p}, \dots, \chi_{2p^{n-1}}\}$, \dots , $\{\chi_{\varrho/2}\}$ (donde $\{\chi_{\varrho/2}\}$ se incluye sólo si ϱ es par), entonces sea $\{\chi_j\}_{j \in J}$ un sistema de representantes de la órbitas de C_n en X_ϱ , con $\text{card}(J) = \frac{\varrho-1}{n}$ (en caso de ϱ impar) o $\text{card}(J) = \frac{\varrho-2}{n}$ en el caso par. Luego se define $M_{n_j} = C_\varrho \rtimes C_{n_j}$, donde

$$C_{n_j} = \{g \in C_n : g \cdot \chi_j = \chi_j\} = \begin{cases} \{e, c, \dots, c^{n-1}\} & \text{si } \chi_j = \chi_j^{p^k}, \\ & \text{(con } k = 1, \dots, n-1) \\ \{e\} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$C_{n_0} \cong C_n$$

$$C_{n_j} \cong C_1$$

$$C_{n_{\varrho/2}} \cong C_n$$

con $j \in J$ y C_1 el grupo trivial. Por lo que se obtiene

$$M_{n_0} = C_\varrho \rtimes C_n$$

$$M_{n_j} = C_\varrho \rtimes C_1$$

y en el caso de ϱ par se agrega:

$$M_{n_{\varrho/2}} = C_\varrho \rtimes C_n$$

Denotando por $\{\rho_i\}_{i=0}^{n-1}$ las representaciones irreducibles de C_n (con ρ_0 la representación trivial), se tiene que las representaciones irreducibles de M_n son:

$$\theta_{(0,\rho_i)} = \text{Ind}_{M_{n_0}}^{M_n} (\chi_0 \otimes \bar{\rho}_i)$$

$$\theta_{(j,\rho_0)} = \text{Ind}_{M_{n_j}}^{M_n} (\chi_j \otimes \bar{\rho}_0)$$

$$\theta_{(\varrho/2,\rho_i)} = \text{Ind}_{M_{n_{\varrho/2}}}^{M_n} (\chi_{\varrho/2} \otimes \bar{\rho}_i)$$

donde sus caracteres están dados por

$$\chi_{\theta_{(j,\rho_k)}}(s) = \frac{1}{|M_{n_j}|} \sum_{\substack{t \in M_n : \\ t^{-1}st \in M_{n_j}}} \chi_j(t^{-1}st) \bar{\rho}_k(t^{-1}st). \quad (6.12)$$

Como en este caso lo que interesa es el caracter de e , entonces de (6.12) obtiene:

$$\chi_{(\theta_{0,\rho_i})}(e) = 1$$

$$\chi_{(\theta_{j,\rho_0})}(e) = n$$

$$\chi_{(\theta_{\varrho/2,\rho_i})}(e) = 1$$

Para I_n : Como $C_p^n \triangleleft I_n$, y C_p^n es abeliano, se considera $X = \{\chi_u\}_{u \in C_p^n}$ caracteres de C_p^n , los cuales bajo la acción de M_n forman $p-1$ órbitas distintas con ϱ elementos cada una (a excepción de la órbita de χ_0). Entonces se considerará $\{\chi_{a_i}\}_{i=0}^{p-1}$ sistema de representantes de las órbitas de M_n en X . Luego se define:

$$I_{n_{a_i}} = C_p^n \rtimes M_{n_{a_i}}$$

donde $M_{n_{a_i}} = \{g \in M_n : g \cdot \chi_{a_i} = \chi_{a_i}\}$, entonces

$$M_{n_0} = M_n,$$

y para $a_i \neq 0$ se tiene que

$$r_{\alpha_k} c^k \cdot \chi_{a_i}(t_z) = \chi_{\alpha_k a_i^{p^k}}(t_z)$$

entonces si $\alpha_k = a_i^{-(p^k-1)}$ se tiene que

$$M_{n_{a_i}} = \{e, r_{\alpha_1} c_1, \dots, r_{\alpha_{n-1}} c^{n-1}\} \simeq C_n,$$

por lo que

$$I_{n_0} = C_p^m \rtimes M_{n_0} \simeq C_p^m \rtimes M_n,$$

y para $a_i \neq 0$

$$I_{n_{a_i}} = C_p^m \rtimes M_{n_{a_i}} \simeq C_p^m \rtimes C_n.$$

Denotando por $\{\theta_{(j, \rho_k)}\}$ las representaciones irreducibles de M_n y recordando que se denota por $\{\rho_i\}_{i=0}^{n-1}$ a las representaciones irreducibles de C_n , se tiene entonces que las representaciones irreducibles de I_n son

$$\Theta_{(0, \theta_{(0, \rho_i)})} = \text{Ind}_{I_{n_0}}^{I_n} (\chi_0 \otimes \tilde{\theta}_{(0, \rho_i)})$$

$$\Theta_{(0, \theta_{(j, \rho_0)})} = \text{Ind}_{I_{n_0}}^{I_n} (\chi_0 \otimes \tilde{\theta}_{(j, \rho_0)})$$

y para $a_i \neq 0$:

$$\Theta_{(a_i, \rho_i)} = \text{Ind}_{I_{n_{a_i}}}^{I_n} (\chi_{a_i} \otimes \tilde{\rho}_i)$$

y para ϱ par se agrega:

$$\Theta_{(0, \theta_{(\varrho/2, \rho_i)})} = \text{Ind}_{I_{n_0}}^{I_n} (\chi_0 \otimes \bar{\theta}_{(\varrho/2, \rho_i)})$$

donde sus caracteres están dados por:

$$\chi_{\Theta_{(\mathbf{a}_i, \lambda)}}(s) = \frac{1}{|I_{n_{\mathbf{a}_i}}|} \sum_{\substack{\{t \in I_n : \\ t^{-1}st \in I_{n_{\mathbf{a}_i}}\}}} \chi_{\mathbf{a}_i}(t^{-1}st) \bar{\lambda}(t^{-1}st) \quad (6.13)$$

Luego para e de (6.13) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \chi_{\Theta_{(0, \theta_{(0, \rho_i)})}}(e) &= 1 \\ \chi_{\Theta_{(0, \theta_{(j, \rho_0)})}}(e) &= n \end{aligned}$$

y para $\mathbf{a}_i \neq 0$:

$$\chi_{\Theta_{(\mathbf{a}_i, \rho_i)}}(e) = \varrho$$

y para ϱ par se agrega:

$$\chi_{\Theta_{(0, \theta_{(\varrho/2, \rho_i)})}}(e) = 1$$

Entonces se tiene que (para ϱ impar):

$$\sum_{\varsigma \in \widehat{I_n}} \chi_{\varsigma}(e) = [n]1 + \left[\frac{\varrho-1}{n} \right] n + [n(p-1)]\varrho$$

es decir,

$$\sum_{\varsigma \in \widehat{I_n}} \chi_{\varsigma}(e) = np^n + \varrho - 1 \quad (6.14)$$

y para ϱ par:

$$\sum_{\varsigma \in \widehat{I_n}} \chi_{\varsigma}(e) = [n]1 + \left[\frac{\varrho-2}{n} \right] n + [n]1 + [n(p-1)]\varrho$$

es decir,

$$\sum_{\varsigma \in \widehat{I}_n} \chi_{\varsigma}(e) = np^n + \varrho - 2 + n \quad (6.15)$$

Finalmente comparando (6.10) con (6.14) y (6.11) con (6.15) se obtiene que

$$\sum_{\varsigma \in \widehat{I}_n} \chi_{\varsigma}(e) = \chi_{\pi}(e).$$

Por lo tanto la representación π es un modelo de Gel'fand para I_n .

Capítulo 7

Descomposición en funciones esféricas.

A continuación se descompondrán las representaciones encontradas, a través del método geométrico descrito en el Capítulo 3, en sus componentes irreducibles, para lo cual se deben determinar las funciones esféricas asociadas al modelo de Gel'fand dado para cada grupo. Recordar que dada una representación sin multiplicidades (H, τ) de un grupo G (con $H = L^2(X)$), ésta se puede descomponer en irreducibles de la forma

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i \quad (\text{suma ortogonal})$$

donde H_i no es isomorfo a H_j , como representación de G para $i \neq j$.

Clásicamente, cuando X es transitivo, fijado un origen, es decir un elemento, dígame $x_0 \in X$, y denotando $K = \text{Stab}_G(x_0)$ se tiene que:

Definición. Se llama *función K -esférica* o simplemente *esférica* (de tipo i) asociada a (X, G) a toda función K -invariante no nula de H_i .

(Si X no es transitivo esta definición se extiende en forma inmediata, procediendo órbita por órbita.) Como H_i es el espacio de una representación irreducible de G , se tiene que cualquier función esférica ϕ_i de H_i engendra a H_i como G -módulo. Entonces para conocer los H_i basta conocer las funciones esféricas ϕ_i .

Además tenemos que la ausencia de multiplicidades en (H, τ) implica que en cada componente H_i las funciones K -esféricas forman un subespacio vectorial de dimensión 1.

Luego imponiendo la condición de normalización $\phi_i(x_0) = 1$, se tiene que en cada componente irreducible existe *una sola* función esférica.

Como se ha dicho más arriba, para adecuar esta descomposición a los modelos descritos en este trabajo, se tiene que, al ser el conjunto X no transitivo (tenemos las órbitas dadas por X_0 y X_1), se descomponen por separado las representaciones $\pi^0 = \pi|_{L^0}$ y $\pi^1 = \pi|_{L^1}$.

Fijando un origen en cada órbita, es decir un origen $(x_0, 1)$ para $X_0 \times C_2$ y un origen $(x_1, 1)$ para $X_1 \times C_2$, se calcula las funciones K -invariantes (con K relativo a cada origen) y luego extendemos las funciones encontradas a todo el espacio X igualándolas a 0 en los elementos faltantes.

La condición de normalización se traduce en que $\phi_i(x_0, \varepsilon) = \varepsilon$, de este modo la función esférica en la componente irreducible es única.

Entonces para cada modelo encontrado se muestran a continuación las funciones esféricas correspondientes a la descomposición en subrepresentaciones irreducibles.

7.1. Grupo de simetrías de polígonos regulares.

Se muestra, a modo de ejemplo, las funciones esféricas para el grupo de simetrías del cuadrado D_4 y del pentágono D_5 , y luego para cualquier D_n .

Cuadrado (D_4).

Para el caso de D_4 actuando en $X = (X_0 \cup X_1) \times C_2$, con $X_0 = \{t_1, t_2\}$ (donde t_1 y t_2 denotan las diagonales que unen los vértices opuestos) y $X_1 = \{v_1, \dots, v_4\}$ (vértices del cuadrado), escogiendo como origen a $(t_1, 1)$ y $(v_1, 1)$ respectivamente, se tienen las siguientes funciones esféricas:

$$\begin{array}{lll}
\phi_1 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_2 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_3 : X \rightarrow \mathbb{C} \\
(t_1, \varepsilon) \mapsto 1 & (t_1, \varepsilon) \mapsto 1 & (t_1, \varepsilon) \mapsto 0 \\
(t_2, \varepsilon) \mapsto 1 & (t_2, \varepsilon) \mapsto -1 & (t_2, \varepsilon) \mapsto 0 \\
(v_1, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_1, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_2, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_2, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_2, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_3, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_3, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_3, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_4, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_4, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_4, \varepsilon) \mapsto \varepsilon
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\phi_4 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_5 : X \rightarrow \mathbb{C} \\
(t_1, \varepsilon) \mapsto 0 & (t_1, \varepsilon) \mapsto 0 \\
(t_2, \varepsilon) \mapsto 0 & (t_2, \varepsilon) \mapsto 0 \\
(v_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon & (v_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_2, \varepsilon) \mapsto -\varepsilon & (v_2, \varepsilon) \mapsto 0 \\
(v_3, \varepsilon) \mapsto \varepsilon & (v_3, \varepsilon) \mapsto -\varepsilon \\
(v_4, \varepsilon) \mapsto -\varepsilon & (v_4, \varepsilon) \mapsto 0
\end{array}$$

con (y de aquí en adelante) $\varepsilon = \pm 1$, donde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 generan las representaciones irreducibles de grado 1 y ϕ_5 genera la representación irreducible de grado 2.

Pentágono (D_5).

Para el caso de D_5 actuando en $X = (X_0 \cup X_1) \times C_2$, con $X_0 = \{v_0\}$ (v_0 el baricentro y $X_1 = \{v_1, \dots, v_5\}$ (vértices del pentágono), escogiendo como origen a $(v_0, 1)$ y $(v_1, 1)$ respectivamente, se tienen las siguientes funciones esféricas:

$$\begin{array}{ll}
\phi_1 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_2 : X \rightarrow \mathbb{C} \\
(v_0, \varepsilon) \mapsto 1 & (v_0, \varepsilon) \mapsto 0 \\
(v_1, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_2, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_2, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_3, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_3, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_4, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_4, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
(v_5, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_5, \varepsilon) \mapsto \varepsilon
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \phi_3 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_4 : X \rightarrow \mathbb{C} \\
 (v_0, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_0, \varepsilon) \mapsto 0 \\
 (v_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon & (v_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \\
 (v_2, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(\pi/5) & (v_2, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(2\pi/5) \\
 (v_3, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(2\pi/5) & (v_3, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(\pi/5) \\
 (v_4, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(2\pi/5) & (v_4, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(\pi/5) \\
 (v_5, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(\pi/5) & (v_5, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \cos(2\pi/5)
 \end{array}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 generan las representaciones irreducibles de grado 1 y ϕ_3 y ϕ_4 generan las representaciones irreducibles de grado 2.

n-ágono (D_n).

Entonces en general para D_n , con n par, escogiendo como origen a $(t_1, 1)$ y $(v_1, 1)$ respectivamente, se tiene para las representaciones irreducibles de grado 1:

$$\begin{array}{l}
 \phi_1 : X \rightarrow \mathbb{C} \\
 (t_1, \varepsilon) \mapsto 1 \\
 (t_2, \varepsilon) \mapsto 1 \\
 (v_i, \varepsilon) \mapsto 0
 \end{array}$$

con $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{array}{lll}
 \phi_2 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_3 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_4 : X \rightarrow \mathbb{C} \\
 (t_1, \varepsilon) \mapsto 1 & (t_1, \varepsilon) \mapsto 0 & (t_1, \varepsilon) \mapsto 0 \\
 (t_2, \varepsilon) \mapsto -1 & (t_2, \varepsilon) \mapsto 0 & (t_2, \varepsilon) \mapsto 0 \\
 (v_i, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_i, \varepsilon) \mapsto \varepsilon & (v_i, \varepsilon) \mapsto (-1)^{i+1} \varepsilon
 \end{array}$$

con $i = 1, \dots, n$.

Y para las representaciones irreducibles de grado 2:

$$\begin{aligned}\phi_j : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t_1, \varepsilon) &\mapsto 0 \\ (t_2, \varepsilon) &\mapsto 0 \\ (v_i, \varepsilon) &\mapsto \varepsilon \cos \left((i-1) \frac{2\pi j}{n} \right)\end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, (n-2)/2$.

En seguida, para n impar, escogiendo como origen a $(v_0, 1)$ y $(v_1, 1)$ respectivamente, se obtiene:

$$\begin{array}{ll}\phi_1 : X \rightarrow \mathbb{C} & \phi_2 : X \rightarrow \mathbb{C} \\ (v_0, \varepsilon) \mapsto 1 & (v_0, \varepsilon) \mapsto 0 \\ (v_i, \varepsilon) \mapsto 0 & (v_i, \varepsilon) \mapsto \varepsilon\end{array}$$

con $i = 1, \dots, n$, representaciones irreducibles de grado 1, y para grado 2:

$$\begin{aligned}\phi_j : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v_0, \varepsilon) &\mapsto 0 \\ (v_i, \varepsilon) &\mapsto \varepsilon \cos \left((i-1) \frac{2\pi j}{n} \right)\end{aligned}$$

con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, (n-1)/2$.

7.2. Grupo de simetrías de los poliedros regulares.

A continuación, en cada tabla se muestran las funciones esféricas asociadas a la descomposición de los modelos mostrados anteriormente para cada poliedro, y en la última fila de cada tabla se señala con **Dim** la dimensión correspondiente a cada representación irreducible asociada.

Para el caso de los grupos O y O_h se muestran las funciones para el caso del cubo,

siendo análogo el octaedro, lo mismo para el grupo I_h donde se muestran las funciones para el caso del dodecaedro, siendo totalmente análoga la situación del icosaedro.

Grupo T:

Para el grupo de simetrías directo del tetraedro, escogiendo como origen a $(a_1, 1)$, se tiene:

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
(a_1, ε)	1	1	1	1
(a_2, ε)	1	ξ	$\bar{\xi}$	0
(a_3, ε)	1	$\bar{\xi}$	ξ	0
(a_4, ε)	1	ξ	ξ	0
(a_5, ε)	1	1	1	-1
(a_6, ε)	1	ξ	ξ	0
Dim	1	1	1	3

con $\xi = e^{2\pi i/3}$.

Grupo T_d :

Para el grupo completo de simetrías, escogiendo como origen a $(a_1, 1)$ y $(b_1, 1)$ respectivamente, se tiene:

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
(a_1, ε)	1	0	1	1	0
(a_2, ε)	1	0	-1/2	0	0
(a_3, ε)	1	0	-1/2	0	0
(a_4, ε)	1	0	-1/2	0	0
(a_5, ε)	1	0	1	-1	0
(a_6, ε)	1	0	-1/2	0	0
(b_1, ε)	0	ε	0	0	ε
(b_2, ε)	0	ε	0	0	$-\varepsilon/3$
(b_3, ε)	0	ε	0	0	$-\varepsilon/3$
(b_4, ε)	0	ε	0	0	$-\varepsilon/3$
Dim	1	1	2	3	3

Grupo O:

Para el cubo, con origen $(v_{(1,\bar{1})}, 1)$ y $(a_1, 1)$ respectivamente, se tiene:

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
$(v_{(1,\bar{1})}, \varepsilon)$	1	0	0	0	1
$(v_{(2,\bar{2})}, \varepsilon)$	1	0	0	0	-1/3
$(v_{(3,\bar{3})}, \varepsilon)$	1	0	0	0	-1/3
$(v_{(4,\bar{4})}, \varepsilon)$	1	0	0	0	-1/3
(a_1, ε)	0	ε	ε	ε	0
(a_2, ε)	0	ε	$-\varepsilon/2$	0	0
(a_3, ε)	0	ε	ε	$-\varepsilon$	0
(a_4, ε)	0	ε	$-\varepsilon/2$	0	0
(a_5, ε)	0	ε	$-\varepsilon/2$	0	0
(a_6, ε)	0	ε	$-\varepsilon/2$	0	0
Dim	1	1	2	3	3

Grupo O_h:

Para el cubo, con origen $(d_{(1,3)}, 1)$ y $(v_1, 1)$ respectivamente, se tiene:

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}
$(d_{(1,3)}, \varepsilon)$	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
$(d_{(2,4)}, \varepsilon)$	1	0	-1	0	1	-1	-1	0	1	0
$(d_{(1,\bar{4})}, \varepsilon)$	1	0	1	0	-1/2	-1/2	0	0	0	0
$(d_{(2,\bar{3})}, \varepsilon)$	1	0	-1	0	-1/2	1/2	0	0	0	0
$(d_{(1,\bar{2})}, \varepsilon)$	1	0	1	0	-1/2	-1/2	0	0	0	0
$(d_{(3,4)}, \varepsilon)$	1	0	-1	0	-1/2	1/2	0	0	0	0
$(d_{(3,\bar{2})}, \varepsilon)$	1	0	1	0	-1/2	-1/2	0	0	0	0
$(d_{(2,\bar{4})}, \varepsilon)$	1	0	1	0	1	1	-1	0	-1	0
$(d_{(1,\bar{3})}, \varepsilon)$	1	0	-1	0	1	-1	1	0	-1	0
$(d_{(4,\bar{1})}, \varepsilon)$	1	0	-1	0	-1/2	1/2	0	0	0	0
$(d_{(3,\bar{4})}, \varepsilon)$	1	0	1	0	-1/2	-1/2	0	0	0	0
$(d_{(2,\bar{1})}, \varepsilon)$	1	0	-1	0	-1/2	1/2	0	0	0	0
(v_1, ε)	0	ε	0	ε	0	0	0	ε	0	ε
(v_2, ε)	0	$-\varepsilon$	0	ε	0	0	0	$-\varepsilon/3$	0	$\varepsilon/3$
(v_3, ε)	0	ε	0	ε	0	0	0	$-\varepsilon/3$	0	$-\varepsilon/3$
(v_4, ε)	0	$-\varepsilon$	0	ε	0	0	0	$-\varepsilon/3$	0	$\varepsilon/3$
$(v_{\bar{1}}, \varepsilon)$	0	$-\varepsilon$	0	ε	0	0	0	ε	0	$-\varepsilon$
$(v_{\bar{2}}, \varepsilon)$	0	ε	0	ε	0	0	0	$-\varepsilon/3$	0	$-\varepsilon/3$
$(v_{\bar{3}}, \varepsilon)$	0	$-\varepsilon$	0	ε	0	0	0	$-\varepsilon/3$	0	$\varepsilon/3$
$(v_{\bar{4}}, \varepsilon)$	0	ε	0	ε	0	0	0	$-\varepsilon/3$	0	$-\varepsilon/3$
Dim	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3

Grupo I_h :

Para el grupo completo de simetrías del dodecaedro, escogiendo como origen a $(v_1, 1)$ y $(b_1, 1)$ respectivamente, se tiene:

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}
(v_1, ε)	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
(v_2, ε)	1	0	$-\sqrt{5}/3$	$\sqrt{5}/3$	0	0	$-2/3$	0	0	$1/3$
(v_3, ε)	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/6$	$-1/2$	0	$-1/3$
(v_4, ε)	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/6$	$-1/2$	0	$-1/3$
(v_5, ε)	1	0	$-\sqrt{5}/3$	$\sqrt{5}/3$	0	0	$-2/3$	0	0	$1/3$
(v_6, ε)	1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	$1/6$	$1/2$	0	$-1/3$
(v_7, ε)	1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	$1/6$	$1/2$	0	$-1/3$
(v_8, ε)	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/6$	$-1/2$	0	$-1/3$
(v_9, ε)	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/6$	$-1/2$	0	$-1/3$
(v_{10}, ε)	1	0	$-\sqrt{5}/3$	$\sqrt{5}/3$	0	0	$-2/3$	0	0	$1/3$
$(v_{\bar{1}}, \varepsilon)$	1	0	-1	-1	0	0	1	-1	0	1
$(v_{\bar{2}}, \varepsilon)$	1	0	$\sqrt{5}/3$	$-\sqrt{5}/3$	0	0	$-2/3$	0	0	$1/3$
$(v_{\bar{3}}, \varepsilon)$	1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	$1/6$	$1/2$	0	$-1/3$
$(v_{\bar{4}}, \varepsilon)$	1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	$1/6$	$1/2$	0	$-1/3$
$(v_{\bar{5}}, \varepsilon)$	1	0	$\sqrt{5}/3$	$-\sqrt{5}/3$	0	0	$-2/3$	0	0	$1/3$
$(v_{\bar{6}}, \varepsilon)$	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/6$	$-1/2$	0	$-1/3$
$(v_{\bar{7}}, \varepsilon)$	1	0	$1/3$	$1/3$	0	0	$1/6$	$-1/2$	0	$-1/3$
$(v_{\bar{8}}, \varepsilon)$	1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	$1/6$	$1/2$	0	$-1/3$
$(v_{\bar{9}}, \varepsilon)$	1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	0	$1/6$	$1/2$	0	$-1/3$
$(v_{\bar{10}}, \varepsilon)$	1	0	$\sqrt{5}/3$	$-\sqrt{5}/3$	0	0	$-2/3$	0	0	$1/3$
(b_1, ε)	0	ε	0	0	1	1	0	0	ε	0
(b_2, ε)	0	ε	0	0	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
(b_3, ε)	0	ε	0	0	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
(b_4, ε)	0	ε	0	0	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
(b_5, ε)	0	ε	0	0	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
(b_6, ε)	0	ε	0	0	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
$(b_{\bar{1}}, \varepsilon)$	0	ε	0	0	-1	-1	0	0	ε	0
$(b_{\bar{2}}, \varepsilon)$	0	ε	0	0	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
$(b_{\bar{3}}, \varepsilon)$	0	ε	0	0	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
$(b_{\bar{4}}, \varepsilon)$	0	ε	0	0	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
$(b_{\bar{5}}, \varepsilon)$	0	ε	0	0	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
$(b_{\bar{6}}, \varepsilon)$	0	ε	0	0	$-\varepsilon\sqrt{5}/5$	$\varepsilon\sqrt{5}/5$	0	0	$-\varepsilon/5$	0
Dim	1	1	3	3	3	3	4	4	5	5

7.3. Grupo de isometrías del espacio pseudo-métrico finito \mathbb{F}_{p^2} .

Para el grupo I_2 se presentan a continuación las funciones esféricas correspondientes a su modelo de Gel'fand encontrado.

- Hay 4 representaciones de dimensión 1:

$$\phi_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto 1$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$\phi_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto 0$$

con $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$ y $i \in I$.

$$\phi_3 : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto 0$$

con $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $i \in I \setminus \{(p+1)/2\}$ y para $-1 \in Y_{-1}$:

$$(-1, \varepsilon) \mapsto 1$$

$$\phi_4 : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto 0$$

con $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $i \in I \setminus \{(p+1)/2\}$ y para $-1 \in Y_{-1}$:

$$(-1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon$$

- Hay $2(p-1)$ representaciones de dimensión $p+1$:

Para estas funciones se tiene que en elementos de igual norma en $X_0 \times C_2$ y $X_1 \times C_2$ toman el mismo valor, por lo que se consideran las órbitas:

$$\Omega_l = \{x \in \mathbb{F}_{p^2} : N_2(x) = l\}.$$

Entonces tenemos:

$$\phi_{(p+1)_m} : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto \sum_{y \in \Omega_m(x_0 \bar{\varepsilon}_0)} \frac{\zeta^{m(y+\bar{y})}}{p+1}$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto 0$$



$$\phi_{(p+1)_n} : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto \varepsilon \sum_{y \in \Omega_n(x_1 \bar{\varepsilon})} \frac{\zeta^{n(y+\bar{y})}}{p+1}$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto 0$$

con $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $i \in I$, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $m = 1, \dots, p-1$ y $n = 1, \dots, p-1$.

- Hay $(p-1)/2$ representaciones de dimensión 2:

$$\phi_{2_j} : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_0, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(x_1, \varepsilon) \mapsto 0$$

$$(\alpha_0^i, \varepsilon) \mapsto \xi^{ij} + \xi^{-ij}$$

$$(\alpha_0^{-i}, \varepsilon) \mapsto \xi^{ij} + \xi^{-ij}$$

con $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, $i \in I$, $\xi = e^{(2\pi i)/(p+1)}$ y $j = 1, 2, \dots, (p-1)/2$.

Apéndice A

Tabla de caracteres irreducibles del grupo O

χ	$[e]$	$[r_3]$	$[r_2]$	$[r_4]$	$[r_4^2]$
ρ_0	1	1	1	1	1
ρ_1	1	1	-1	-1	1
ρ_2	2	-1	0	0	2
ρ_3	3	0	-1	1	-1
ρ_4	3	0	1	-1	-1

Tabla de caracteres irreducibles del grupo O_h

χ	$[e]$	$[r_3]$	$[r_2]$	$[r_4]$	$[r_4^2]$	$[i]$	$[ir_3]$	$[ir_2]$	$[ir_4]$	$[ir_4^2]$
ρ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ρ_1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
ρ_2	2	-1	0	0	2	2	-1	0	0	2
ρ_3	3	0	-1	1	-1	3	0	-1	1	-1
ρ_4	3	0	1	-1	-1	3	0	1	-1	-1
ρ_5	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
ρ_6	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
ρ_7	2	-1	0	0	2	-2	1	0	0	-2
ρ_8	3	0	-1	1	-1	-3	0	1	-1	1
ρ_9	3	0	1	-1	-1	-3	0	-1	1	1

Tabla de caracteres irreducibles del grupo I

χ	$[e]$	$[r_5]$	$[r_5^2]$	$[r_3]$	$[r_2]$
ρ_0	1	1	1	1	1
ρ_1	3	η^+	η^-	0	-1
ρ_2	3	η^-	η^+	0	-1
ρ_3	4	-1	-1	1	0
ρ_4	5	0	0	-1	1

con $\eta^\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Tabla de caracteres irreducibles del grupo I_h

χ	$[e]$	$[r_5]$	$[r_5^2]$	$[r_3]$	$[r_2]$	$[i]$	$[ir_5]$	$[ir_5^2]$	$[ir_3]$	$[ir_2]$
ρ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ρ_1	3	η^+	η^-	0	-1	3	η^-	η^+	0	-1
ρ_2	3	η^-	η^+	0	-1	3	η^+	η^-	0	-1
ρ_3	4	-1	-1	1	0	4	-1	-1	1	0
ρ_4	5	0	0	-1	1	5	0	0	-1	1
ρ_5	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
ρ_6	3	η^+	η^-	0	-1	-3	$-\eta^-$	$-\eta^+$	0	1
ρ_7	3	η^-	η^+	0	-1	-3	$-\eta^+$	$-\eta^-$	0	1
ρ_8	4	-1	-1	1	0	-4	1	1	-1	0
ρ_9	5	0	0	-1	1	-5	0	0	1	-1

con $\eta^\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Referencias

- [1] Ron M. Adin, Alexander Postnikov, and Yuval Roichman, *Combinatorial Gelfand models*, J. Algebra **320** (2008), no. 3, 1311–1325. MR 2427645 (2009e:20019)
- [2] J. L. Aguado and J. O. Araujo, *A Gelfand model for the symmetric group*, Comm. Algebra **29** (2001), no. 4, 1841–1851. MR 1853129 (2003d:20019)
- [3] J. O. Araujo, *A Gelfand model for a Weyl group of type B_n* , Beiträge Algebra Geom. **44** (2003), no. 2, 359–373. MR 2017038 (2004k:20014)
- [4] J. O. Araujo and J. J. Bigeón, *A Gelfand model for a Weyl group of type D_n and the branching rules $D_n \hookrightarrow B_n$* , J. Algebra **294** (2005), no. 1, 97–116. MR 2179716 (2006g:20012)
- [5] ———, *A Gelfand model for the symmetric generalized group*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 5, 1808–1830. MR 2526341 (2010g:20020)
- [6] R. W. Baddeley, *Models and involution models for wreath products and certain Weyl groups*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), no. 1, 55–74. MR 1122970 (92i:20017)
- [7] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand, and S. I. Gel'fand, *Models of representations of compact Lie groups*, Funkcional. Anal. i Priložen. **9** (1975), no. 4, 61–62. MR 0414792 (54 #2884)
- [8] T. Ceccherini-Silberstein, Fabio Scarabotti, and Filippo Tolli, *Representation theory of the symmetric groups: The okounkov-vershik approach, character for-*

- mulas, and partition algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2010.
- [9] I. M. Gel'fand and A. V. Zelevinskiĭ, *Models of representations of classical groups and their hidden symmetries*, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **18** (1984), no. 3, 14–31. MR 757246 (86i:22024)
- [10] N. F. J. Inglis, R. W. Richardson, and J. Saxl, *An explicit model for the complex representations of S_n* , *Arch. Math. (Basel)* **54** (1990), no. 3, 258–259. MR 1037615 (91d:20017)
- [11] A. A. Klyachko, *Models for complex representations of groups $GL(n, q)$* , *Mat. Sb. (N.S.)* **120(162)** (1983), no. 3, 371–386. MR 691984 (84j:20014)
- [12] V. Kodiyalam and D. Verma, *A natural representation model for symmetric groups*, arXiv:math.RT/0402216 (2004).
- [13] George W. Mackey, *Unitary representations of group extensions. I*, *Acta Math.* **99** (1958), 265–311. MR 0098328 (20 #4789)
- [14] Eric Marberg, *Generalized involution models for wreath products*, *Israel J. Math.* **192** (2012), no. 1, 157–195. MR 3004079
- [15] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42. MR 0450380 (56 #8675)
- [16] Jorge Soto-Andrade, *Geometrical Gel'fand models, tensor quotients, and Weil representations*, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 305–316. MR 933420 (89h:20058)
- [17] Shun'ichi Tanaka, *On irreducible unitary representations of some special linear groups of the second order. I, II*, *Osaka J. Math.* **3** (1966), 217–227; 229–242. MR 0223493 (36 #6541)

- [18] André Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111 (1964), 143-211. MR 0165033 (29 #2324)
- [19] E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. of Math. (2) 40 (1939), no. 1, 149-204. MR 1503456