

Licenciatura

Física

V473A

1978

UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FISICA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO  
DE LICENCIADO EN CIENCIAS  
CON MENCIÓN EN FÍSICA

SOBRE EL ORIGEN DEL CAMPO  
MAGNETICO TERRESTRE

PROFESOR GUIA : DR. HERBERT MASSMANN

EMILIO E. VERA SOMMER

JULIO 1978

15399

UNIVERSIDAD DE CHILE  
SEDE SANTIAGO ORIENTE  
BIBLIOTECA CENTRAL

*A mis Padres y a Nany.-*

## AGRADECIMIENTOS

---

Deseo en primer lugar destacar la valiosa colaboración brindada por mi Profesor Guía, el Dr. Herbert Massmann, quien a pesar de no tener este tema como especialidad no vaciló en ayudarme, dedicando todo el tiempo que le fue posible, para la realización de este trabajo.

Quiero también expresar mis agradecimientos al Dr. Edgar Kausel, quien a través de su continuo apoyo a influido decididamente a encausarme en un campo de real interés para mí, "La Geofísica".

Por su siempre buena disposición y valiosa sugerencia, agradezco a nuestro infatigable Profesor y amigo Jaime Roessler.

Agradezco a la señorita Jazmine López su buena voluntad y paciencia para llevar a cabo el tipiado de los originales, superando todos los problemas que fueron surgiendo.

A la familia Soloduchim y a todos mis amigos, gracias por haber estado cerca de mí durante estos últimos 6 años.

Gracias a ti Nany, que has sabido siempre brindarme todo tu amor, ayuda y comprensión.

Finalmente mis más profundos agradecimientos para la persona que más a contribuido en la realización de mis aspiraciones, ¡mi Madre! -

~~~~~

## INDICE

---

### CAPITULO I.- (Descripción del campo magnético de la Tierra)

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 1.- Aspectos Generales.....                           | 1  |
| 2.- El Interior de la Tierra.....                     | 9  |
| a) Aspectos Generales.....                            | 9  |
| b) Elementos de Sismología.....                       | 14 |
| c) Corrientes de Convección térmica en el núcleo..... | 20 |

### CAPITULO II.-

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| Algunas teorías del origen del campo magnético..... | 22 |
|-----------------------------------------------------|----|

### CAPITULO III.- (Teoría del Dinamo)

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 1.- Introducción.....                      | 26 |
| 2.- Elementos de magnetohidrodinámica..... | 27 |
| 3.- Desarrollo y conclusiones.....         | 31 |

### APENDICES.-

|                     |    |
|---------------------|----|
| 1.- Apéndice A..... | 45 |
| 2.- Apéndice B..... | 46 |
| 3.- Apéndice C..... | 51 |
| 4.- Apéndice D..... | 55 |
| 5.- Apéndice E..... | 60 |

|                  |    |
|------------------|----|
| REFERENCIAS..... | 65 |
|------------------|----|

I.- DESCRIPCION DEL CAMPO MAGNETICO DE LA TIERRA.-

1.- Aspectos Generales. [1-3]

El campo magnético observado en la superficie terrestre, podría ser producido por fuentes en el interior de la Tierra, por fuentes externas a ella, o por corrientes eléctricas en la superficie. A partir del análisis del campo geomagnético en la superficie en término de armónicos esféricos, se sabe que la parte de origen interno es sin duda, la mayor y más importante. El mismo análisis muestra, que el campo es principalmente dipolar. La parte dipolar, se puede pensar como proveniente de un "dipolo geomagnético" que es por definición, un dipolo ubicado en el centro de la Tierra. Actualmente, presenta una inclinación de unos  $11^\circ$  respecto del eje de rotación terrestre; el eje del dipolo corta la superficie de la Tierra en puntos ubicados en  $79^\circ$  N,  $70^\circ$  O y  $79^\circ$  S,  $110^\circ$  E que definen los "polos geomagnéticos" Norte y Sur respectivamente (ver figura 1).

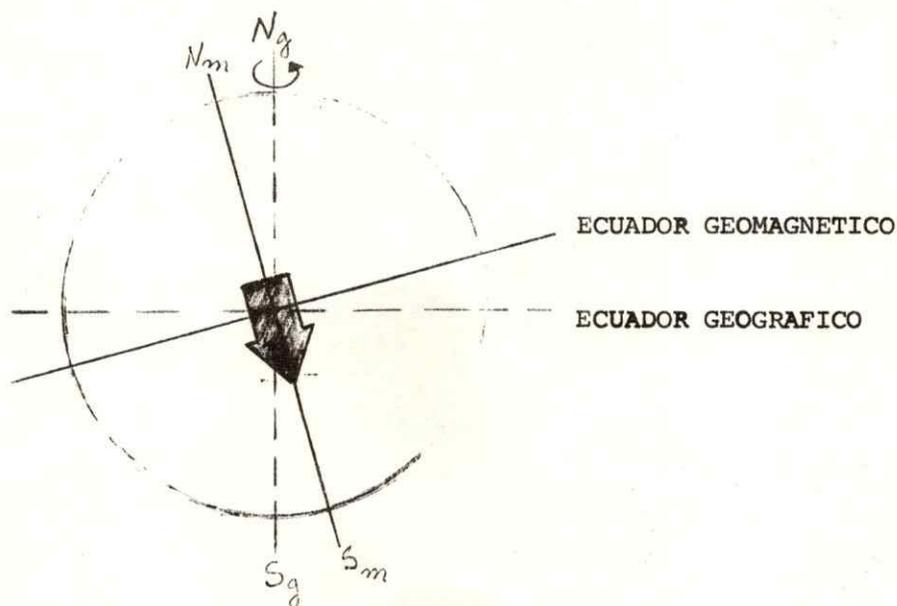


FIGURA 1

A partir de la intensidad del campo magnético en cada polo (0.62 gauss) y asumiendo que el dipolo magnético es la única componente del campo, se deduce que el momento dipolar magnético de la Tierra  $M$  es

$$M \approx 8.1 \times 10^{25} \text{ gauss} \cdot \text{cm}^3 *$$

Aún cuando, mediciones directas del campo terrestre se han venido realizando desde principios del siglo pasado, es incluso de antes conocido que las diferentes componentes del campo magnético cambian en el tiempo. Esto se manifiesta a nivel global y en particular en cada punto de la superficie terrestre. Estos cambios son denominados "Variaciones Seculares".

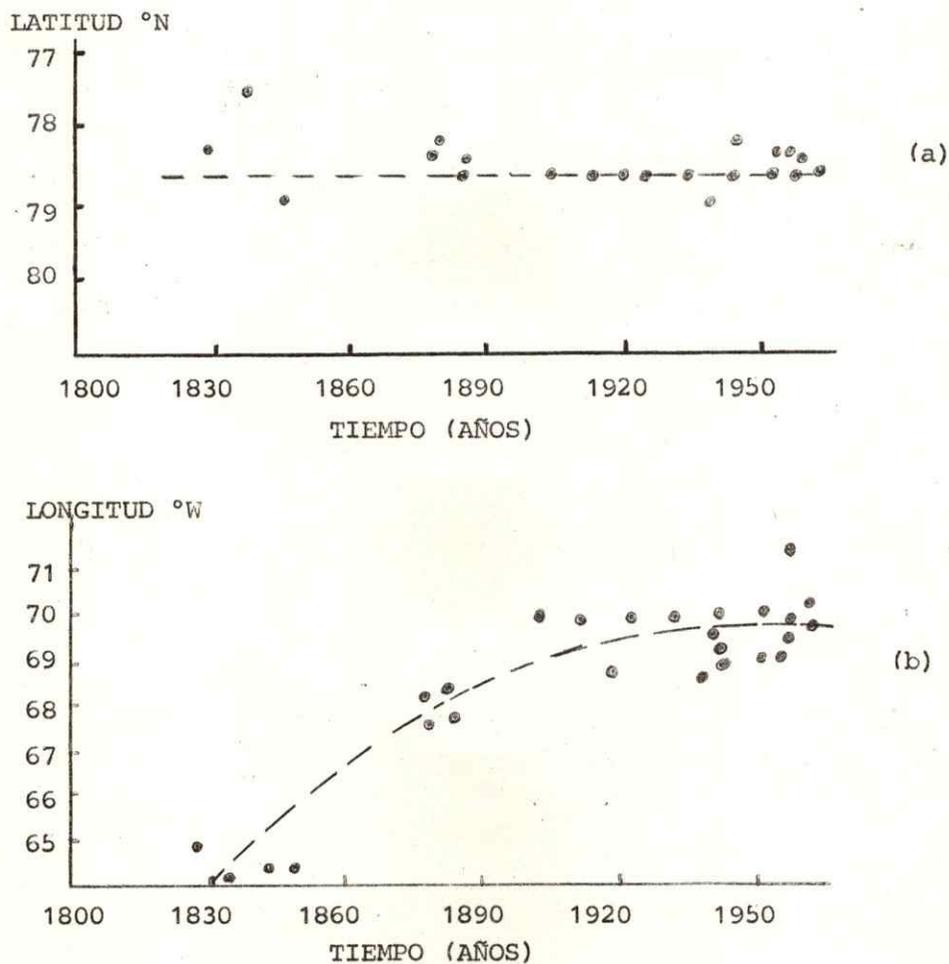


FIGURA 2

Cambio de posición del polo norte geomagnético: (a) latitud, (b) longitud.

\* En esta tesis se usará el sistema M.K.S. de unidades. Sin embargo, cuando se trate de dar valores numéricos, se hará en general en diversas unidades.

Las figuras 2(a) y (b), muestran como ha variado la latitud y longitud del polo geomagnético norte dentro del periodo de observación directa. Durante este periodo, la latitud ha permanecido prácticamente constante, y por lo tanto, el ángulo entre los ejes geográficos y del dipolo ha permanecido estable en unos  $11^\circ$ . Por otra parte la longitud ha cambiado unos  $6^\circ$  en los últimos 130 años, dando un cambio promedio de  $0.042^\circ$  por año. No obstante, se observa que la velocidad del desplazamiento, ha disminuido durante el presente siglo.

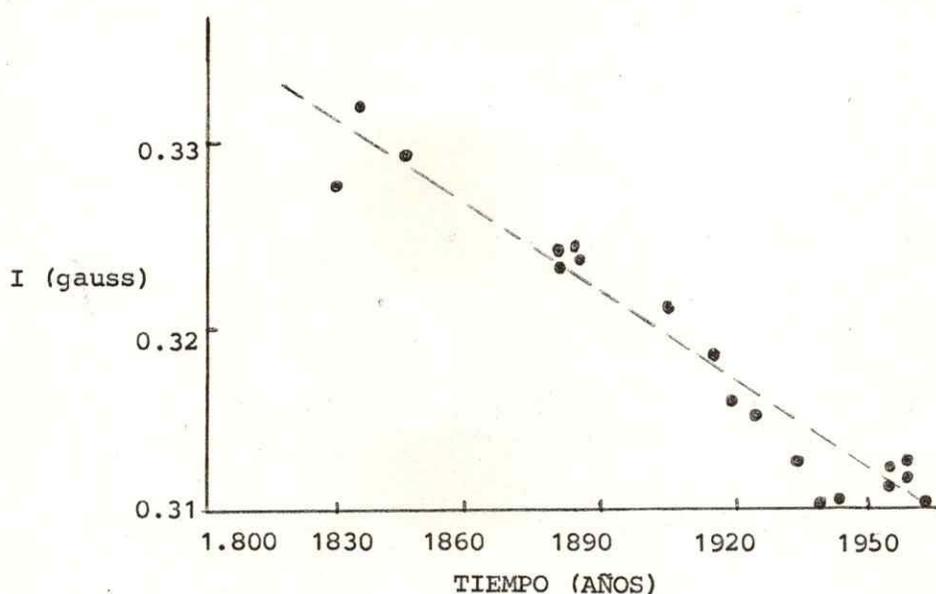


FIGURA 3

Variación de la intensidad dipolar  $I$ , del campo geomagnético en el ecuador geomagnético en los últimos 130 años.

La figura 3 muestra el cambio de la intensidad del campo magnético dipolar, en el periodo de observación directa. Se observa una disminución aproximadamente lineal a una razón cercana al 5% por siglo.

Si bien, medidas directas del campo magnético se han podido realizar desde principios del siglo pasado, en los últimos años se han usado con éxito técnicas de "paleomagnetismo". Casi todas las rocas de origen ígneo, contienen una pequeña cantidad de com-

puestos de hierro. Cuando se forma la roca, los minerales de Hierro se magnetizan en la dirección del campo magnético existente en ese momento siendo además la intensidad de tal magnetización, proporcional al campo. Sobre la superficie terrestre hay rocas de todas las edades con campos antiguos "fossilizados" en ellas, lo cual permite explorar el campo magnético existente en el momento de la solidificación de tales rocas. Las rocas más antiguas en que se encontrado magnetización, datan de hace 2.600 millones de años; lo cual implica que la Tierra posee campos magnéticos desde hace por lo menos 2.600 millones de años.

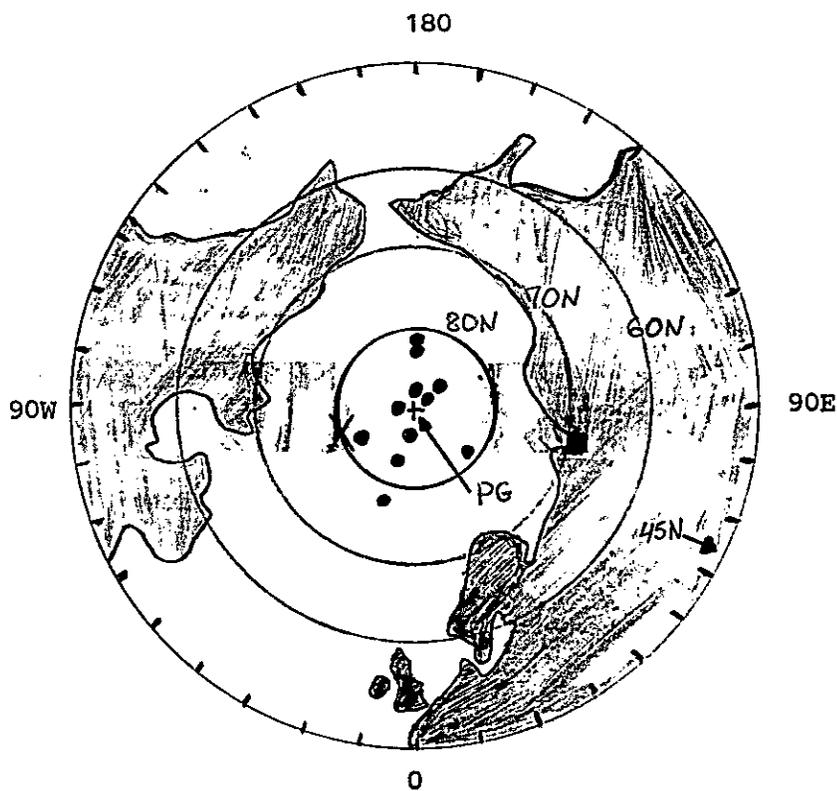


FIGURA 4

Algunas posiciones del polo geomagnético norte (●), en los últimos 7.000 años. La cruz (X), es la posición actual del polo geomagnético norte.

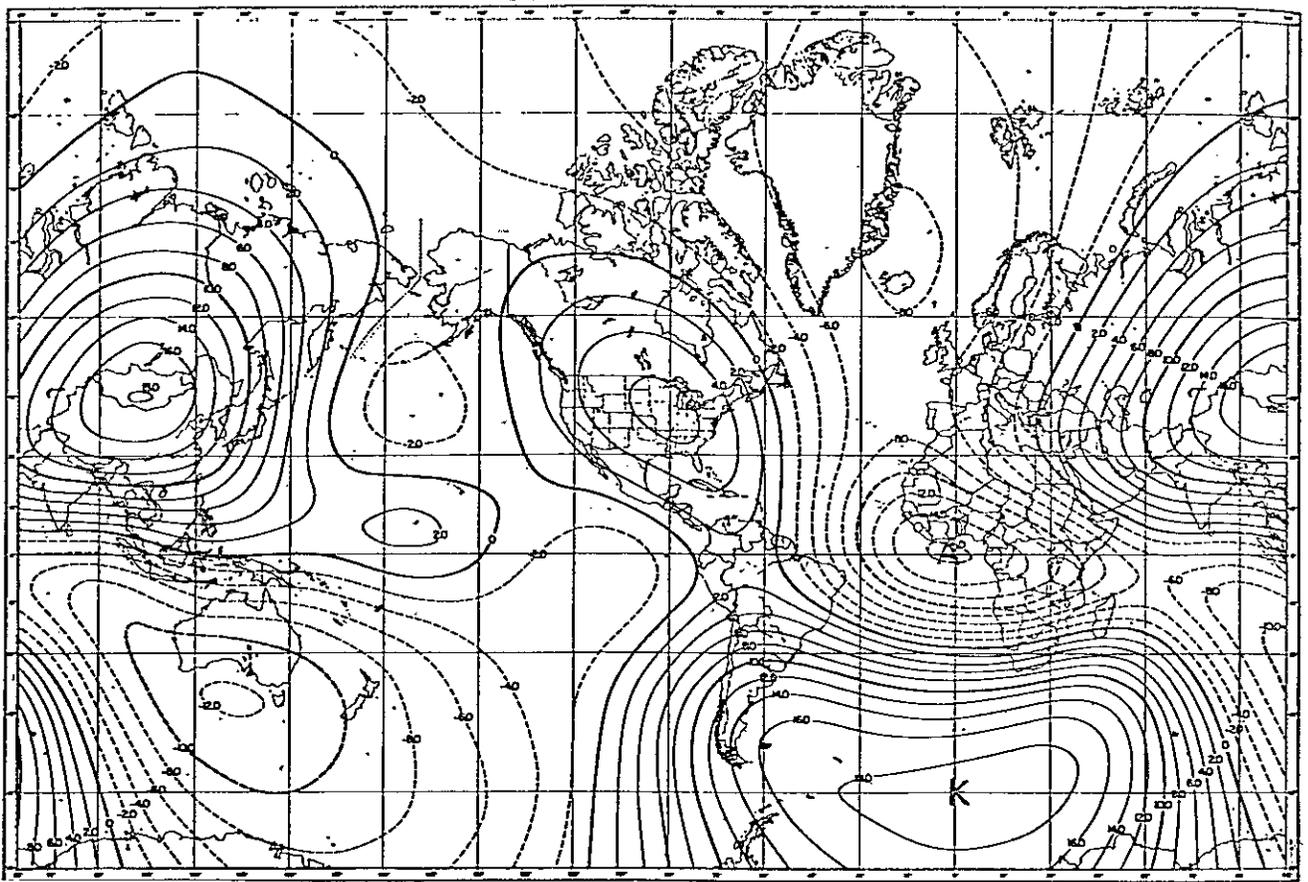
La figura 4 muestra (un resultado del paleomagnetismo) algunas posiciones del polo geomagnético norte durante los últimos 7.000 años; se tiene que los polos geográficos y geomagnéticos coinciden en gran medida. Se puede hablar entonces de un periodo de "cabeceo del dipolo" alrededor del polo geográfico del orden de  $10^4$  años, cifra que por lo demás está de acuerdo con el promedio de  $0.042^\circ$  por año de corrimiento en longitud del polo geomagnético, observado directamente en los últimos 150 años.

Si al campo geomagnético total, se resta, la parte dipolar, se obtiene la parte no dipolar del campo. En las figuras 5(a) y (b) se muestran las componentes radiales (Z), del campo no dipolar para los años 1965 y 1835 respectivamente.

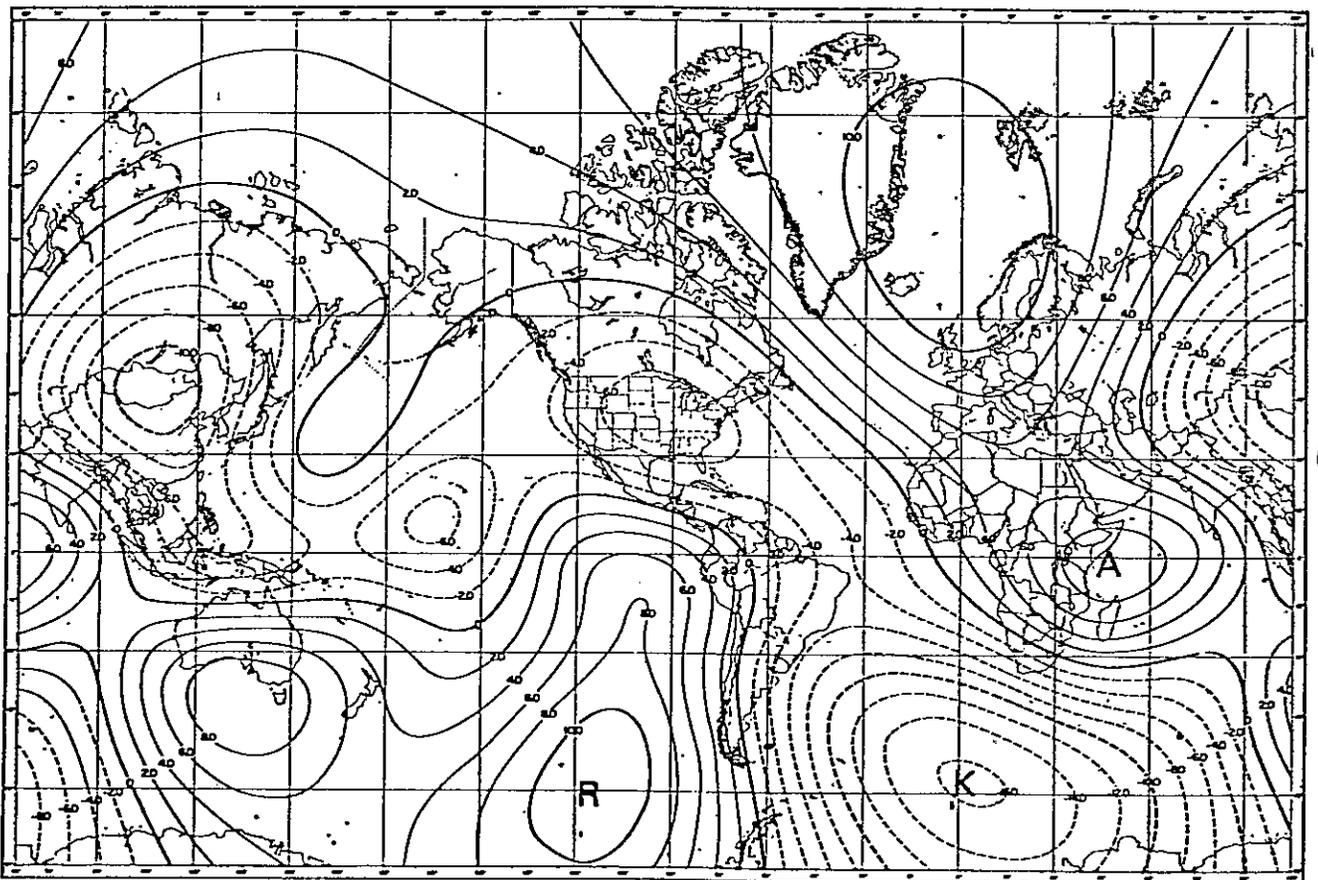
Los rasgos generales de los campos no dipolares para 1835 y 1965 son similares, pero hay algunas diferencias importantes. En primer lugar la posición del centro marcado con A, sobre cada carta: En 1835 su magnitud fue de 0.082 gauss y está al este de Africa; en 1965; su valor aumentó sobrepasando los 0.16 gauss y se movió hacia el oeste de Africa. En cuanto al centro marcado con K, entre 1835 y 1965 aumentó en 0.02 gauss y se movió solo muy poco. En la carta de 1835, se observa un centro marcado por R; en 1965 este desapareció completamente.

El campo no dipolar cambia continuamente. El promedio se desplaza hacia el "oeste" en unos  $0.2^\circ$  de longitud por año. Si este movimiento persistiese, una vuelta a la Tierra se completaría en unos 1.800 años. En realidad esto no persiste durante tanto tiempo, los centros estan cambiando continuamente, aumentan y disminuyen en intensidad, se expanden, se contraen, desaparecen y reaparecen, realizandose todo lo anterior en periodos del orden de 10 a  $10^3$  años. Pareciera ser entonces, que la periodicidad del movimiento dipolar ( $\sim 10^4$  años) es al menos un orden de magnitud

FIGURA 5\*



(a) La componente Z del campo no dipolar de 1965. Unidades:  $10^2$  gauss.



(b) La componente Z del campo no dipolar de 1835. Unidades:  $10^{-2}$  gauss.

\* En la figura 5(b), el signo de Z está invertido respecto de la convención usada en 5(a). En la figura 5(a), Z hacia abajo es positivo y hacia arriba negativo; hacia arriba o hacia abajo es, alejándose o acercándose respectivamente, del centro de la Tierra en la dirección radial.

mayor que la del campo no dipolar.

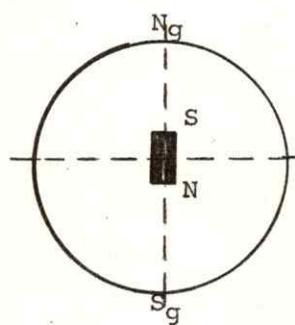
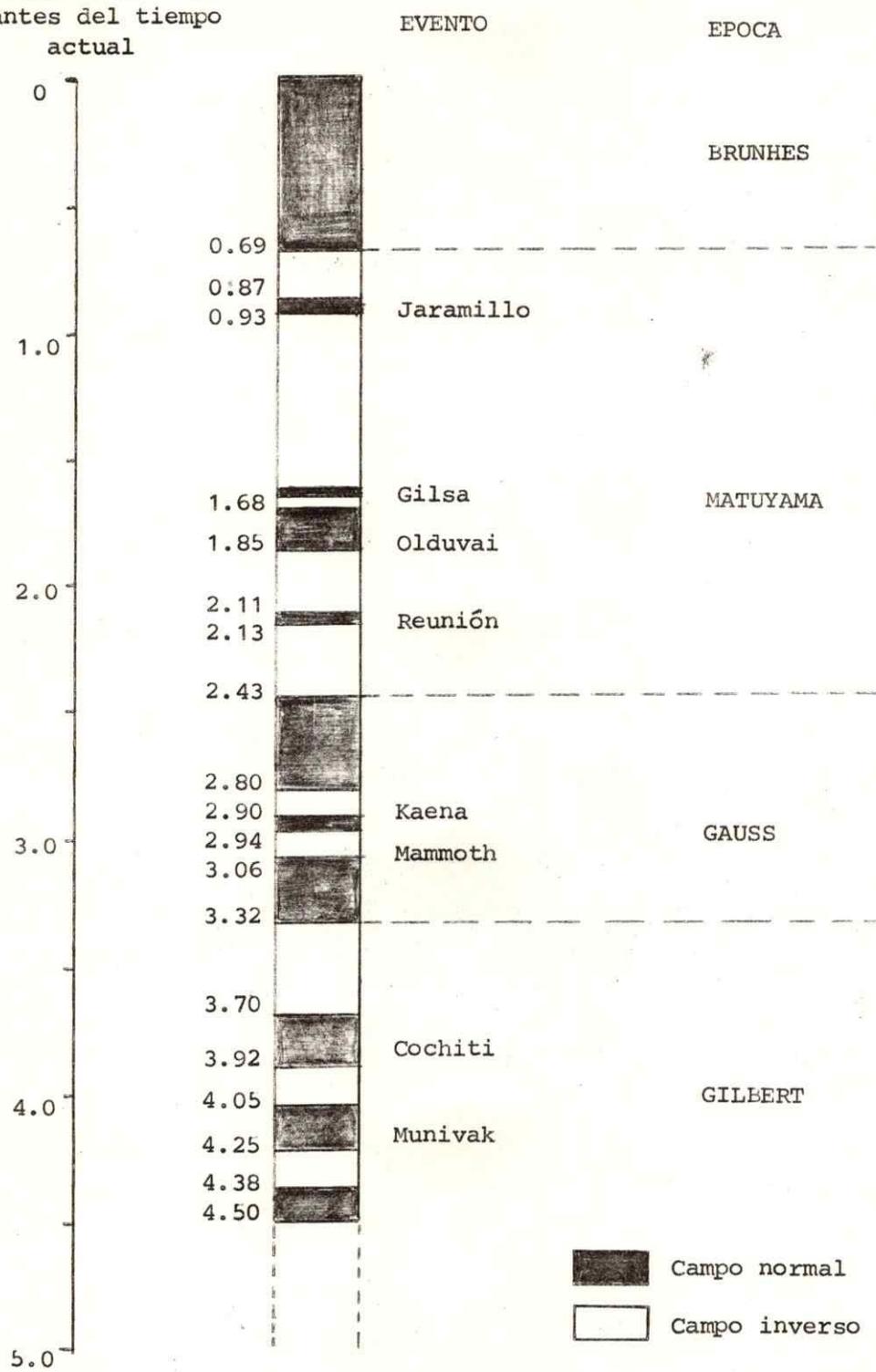
Finalmente, se pueden observar centros en que la intensidad de la parte no dipolar bordea los 0.2 gauss, lo cual representa un buen porcentaje del campo dipolar, cuyo promedio es alrededor de los 0.5 gauss. Sin embargo, en promedio, el campo no dipolar representa solo un 5% del total.

#### Inversiones del Campo Magnético Terrestre. <sup>[4-5]</sup>

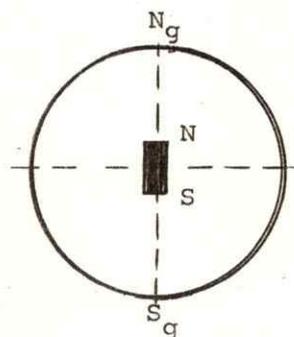
Uno de los resultados más interesantes de los estudios de paleomagnetismo, es que muchas rocas ígneas muestran una magnetización permanente aproximadamente opuesta en dirección a la que presentarían según el campo magnético actual. Tal descubrimiento sugiere entonces la posibilidad, de que en el momento en el cual se formaron las rocas en cuestión, el campo de la Tierra estaba invertido respecto al actual. No hay en principio razón para pensar que el campo magnético terrestre, tenga una dirección particular. Sin embargo, es posible la existencia de algunos procesos físico-químicos por los cuales un material presente magnetización opuesta en dirección al campo ambiental. La gran mayoría de las rocas ígneas no exhiben estas propiedades en laboratorio, a pesar de mostrar magnetización inversa.

Se han observado inversiones anteriores a 600 millones de años y en todos los periodos subsiguientes. Durante los últimos millones de años, han ocurrido inversiones a intervalos de 200 a 300 mil años. Cuatro secuencias principales, normales e inversas, han sido encontradas durante los últimos 3.6 millones de años. Esos grupos principales han sido llamados épocas de polaridad geomagnéticas y han sido bautizados con nombres de personas que han hecho importantes contribuciones al geomagnetismo. Superpuestas a estas épocas de polaridad, hay breves periodos (con una duración de un orden de magnitud menor) en que la polaridad del magnetismo

Millones de años  
antes del tiempo  
actual



CAMPO NORMAL



CAMPO INVERSO

FIGURA 6

La escala de polaridad/tiempo para los últimos 4.5 millones de años.

era contraria (ver figura 6). La escala de tiempo de las inversiones durante los últimos 3.6 millones de años, fue originalmente determinada usando datos radiométricos y paleomagnéticos medidos en rocas volcánicas. Esta escala de tiempo ha sido extendida hasta unos 100 millones de años, aunque no siempre con tanto detalle.

Si bien se ha podido estimar el tiempo en que ocurre una inversión en unos 1000 a 10.000 años, no ha sido aún posible decidir, si el cambio se debe a un cambio en la magnitud del momento dipolar manteniéndose fija su dirección, o a un cambio de dirección de unos  $180^\circ$  manteniéndose constante la magnitud. En algunos casos pareciera que durante la inversión, la intensidad del campo primero se reduce en un factor 3 ó 4 por algunos miles de años mientras mantienen su dirección. El dipolo luego usualmente ejecuta varios giros de unos  $30^\circ$ , para después siguiendo una trayectoria irregular, conseguir la dirección opuesta; aunque todavía con una magnitud reducida que luego crece.

En adición a los cambios de polaridad, se han observado que en el campo magnético de la Tierra, por breves periodos, se ha apartado de su configuración usual (cercanamente axial) y sin establecerse ni alcanzar la completa inversión, ha vuelto luego a su posición original; tales fenómenos son denominados, "excursiones geomagnéticas".

## 2.- El interior de la Tierra. <sup>[5-7]</sup>

### a) Descripción del interior de la Tierra.

Como se ha mencionado, los análisis indican que el origen del campo magnético observado en la superficie terrestre, radica principalmente en su interior. Luego, si se desea investigar sobre el mecanismo que da origen a tal campo, se hace indispensable conocer ciertos aspectos del interior de la Tierra.

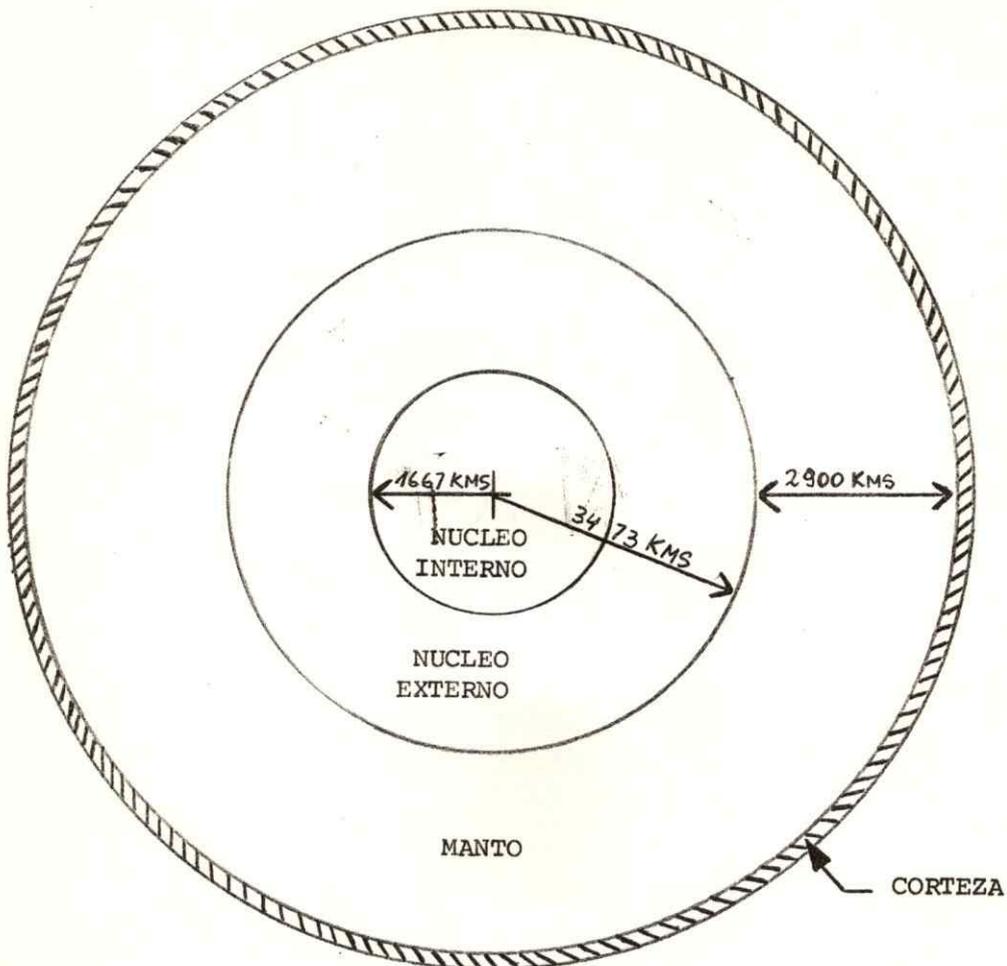


FIGURA 7

Estructura interna de la Tierra

De acuerdo a los conocimientos actuales, la Tierra está formada por tres capas fundamentales denominadas, CORTEZA, MANTO y NUCLEO (figura 7). Al pasar de una capa a otra, se observan fuertes discontinuidades en las propiedades físicas y químicas de los materiales constituyentes. Son justamente éstas discontinuidades las que dan origen a la estratificación arriba planteada.

La corteza, tiene un espesor medio de unos 30 Kms, aunque puede variar entre los 5 y 70 Kms siendo su densidad promedio, de unos  $2.7 \text{ gr/cm}^3$ . El manto, que constituye el 80% del volumen terrestre, es una capa probablemente compuesta por silicatos de fierro y mag-

nesio y que presenta características de sólido. Su densidad varía entre 3 y 5.6 gr/cm<sup>3</sup>. El núcleo, la capa más profunda de la Tierra, muestra una formación singular. Su parte externa (núcleo externo), probablemente constituida de aleaciones de hierro y níquel, presenta características de líquido. Su parte central (núcleo interno) aunque químicamente de igual constitución que el núcleo externo, muestra características de sólido. Es decir, el límite entre el núcleo interno y externo, está determinado por un cambio de fase. Para la densidad del núcleo, se tiene que ésta varía entre 10 y 12.5 gr/cm<sup>3</sup>. El carácter metálico del núcleo, hace que éste tenga una conductividad eléctrica alta. Si bien las condiciones de presión y temperatura existentes allí son irreproducibles en el laboratorio, estimaciones a partir de extrapolaciones tanto teóricas como experimentales hechas sobre materiales similares a los del núcleo, arrojan una conductividad que oscila entre  $10^5$  y  $10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ . (La conductividad del hierro en condiciones normales es de  $10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ).

Otro parámetro de interés, es la temperatura. Es difícil precisar valores para la temperatura en el interior de la Tierra, no obstante que se pueden dar valores los cuales deben tomarse como ordenes de magnitud. Para el límite inferior de la corteza terrestre, la temperatura varía entre 400 y 900°C. La temperatura en la interfase manto-núcleo es de 3.000 a 3.500°C y de unos 4.500°C para el límite entre el núcleo interno y externo siendo tal vez la temperatura en el centro de la Tierra, de unos 6.000°C.

La clave para estudiar el interior de la Tierra, está en la sismología. Usando éstos métodos es posible determinar datos tales como, velocidad de ondas sísmicas, presión, densidad, gravedad y propiedades elásticas del interior de la Tierra. En la Tabla I, se dan valores de algunos de los parámetros arriba mencionados.

## T A B L A I

Velocidad, Densidad, Aceleración y Presión como funciones del Radio.  
 $R_M = 6338$  Kms,  $R_N = 3473$  Kms son los Radios del manto y núcleo respectivamente. Los datos han sido esencialmente sacados de un trabajo de F. Birch<sup>7</sup> salvo los encerrados en paréntesis, que pertenecen a las Tablas de H. Jeffreys (Report on Progress in Physics 10, 52 (1945)).

## EL MANTO

| $r/R_M$ | $V_P$<br>Kms/seg | $V_S$<br>kms/seg | $\rho$<br>Grs/cm <sup>3</sup> | $g$<br>cm/seg <sup>2</sup> | $P$<br>Megabares |
|---------|------------------|------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------|
| 1.00    | 8.10             | (4.35)           | 3.425                         | 984                        | 0.009            |
| 0.98    | 8.13             | (4.54)           | 3.435                         | 988                        | 0.052            |
| 0.96    | 8.38             | (4.74)           | 3.517                         | 992                        | 0.095            |
| 0.94    | 8.97             | (4.96)           | 3.710                         | 995                        | 0.141            |
| 0.92    | 9.91             | (5.46)           | 4.018                         | 997                        | 0.190            |
| 0.90    | 10.55            | (5.85)           | 4.228                         | 997                        | 0.242            |
| 0.88    | 10.99            | (6.12)           | 4.372                         | 996                        | 0.296            |
| 0.86    | 11.29            | (6.29)           | 4.471                         | 995                        | 0.352            |
| 0.84    | 11.50            | 6.40             | 4.540                         | 994                        | 0.409            |
| 0.82    | 11.67            | 6.48             | 4.613                         | 993                        | 0.466            |
| 0.80    | 11.83            | 6.56             | 4.684                         | 993                        | 0.525            |
| 0.78    | 12.03            | 6.64             | 4.755                         | 993                        | 0.584            |
| 0.76    | 12.20            | 6.71             | 4.824                         | 994                        | 0.645            |
| 0.74    | 12.38            | 6.77             | 4.892                         | 995                        | 0.705            |
| 0.72    | 12.54            | 6.83             | 4.958                         | 997                        | 0.768            |
| 0.70    | 12.71            | 6.89             | 5.023                         | 1001                       | 0.831            |
| 0.68    | 12.89            | 6.95             | 5.088                         | 1005                       | 0.896            |
| 0.66    | 13.01            | 7.01             | 5.152                         | 1011                       | 0.961            |
| 0.64    | 13.16            | 7.07             | 5.216                         | 1018                       | 1.028            |

Continuación Tabla I.-

|       |       |      |       |      |       |
|-------|-------|------|-------|------|-------|
| 0.62  | 13.32 | 7.14 | 5.278 | 1027 | 1.096 |
| 0.60  | 13.46 | 7.20 | 5.341 | 1039 | 1.165 |
| 0.58  | 13.60 | 7.26 | 5.405 | 1053 | 1.236 |
| 0.56  | 13.64 | 7.31 | 5.468 | 1069 | 1.310 |
| 0.548 | 13.64 | 7.30 | 5.508 | 1081 | 1.354 |

## EL NUCLEO

| $r/P_N$ | $V_p$<br>Kms/Seg | $V_s$<br>Kms/seg | $\rho$<br>Grs/cm | $g$<br>Cm/seg <sup>2</sup> | $P$<br>Megabares |
|---------|------------------|------------------|------------------|----------------------------|------------------|
| 1.0     | 8.10             | 0                | 10.05            | 1081                       | 1.35             |
| 0.9     | 8.53             |                  | 10.59            | 999                        | 1.73             |
| 0.8     | 9.03             |                  | 11.05            | 909                        | 2.08             |
| 0.7     | 9.44             |                  | 11.45            | 811                        | 2.42             |
| 0.6     | 9.78             |                  | 11.78            | 706                        | 2.73             |
| 0.5     | 10.10            |                  | 12.05            | 596                        | 3.00             |
| 0.4     | 10.44            |                  | 12.27            | 482                        | 3.22             |
| 0.3     | 11.20            |                  | 12.43            | 364                        | 3.40             |
| 0.2     | 11.24            |                  | 12.53            | 244                        | 3.54             |
| 0.1     | 11.28            |                  | 12.60            | 122                        | 3.62             |
| 0       | 11.31            |                  | 12.62            | 0                          | 3.64             |

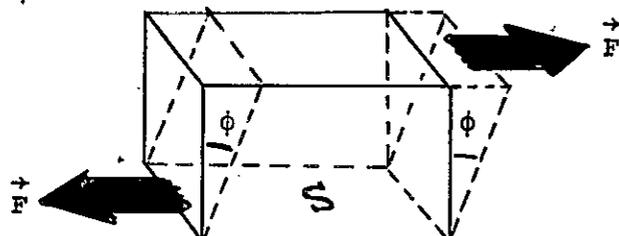
## b) Elementos de Sismología.-

Siendo, la sismología el principal medio para el estudio del interior de la Tierra, es conveniente resumir algunos aspectos de ella.

La ecuación que rige los desplazamientos provocados en cada punto de un medio elástico isótropo y homogéneo, por esfuerzos aplicados en él es [6]:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \left( K + \frac{4}{3} \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (1-1)$$

donde  $\vec{u}$  es el desplazamiento de cada punto del medio de una posición de equilibrio previamente definida;  $\rho$  es la densidad del medio;  $K$  y  $\mu$  son las constantes elásticas de incompresibilidad\* y rigidez del medio, respectivamente (ver figura 3).



$$\begin{aligned} F/S &= 2\mu \tan \phi \\ &\approx \mu 2 \phi \end{aligned}$$

FIGURA 8

Módulo de Rigidez  $\mu$

En un medio infinito, la ecuación (1-1) predice, ondas elásticas de dos tipos que se propagan independientemente con distintas velocidades en el medio y cuya suma, da el desplazamiento finalmente observado. Los dos tipos de onda son denominados, P (primaria) y S (secundaria). La onda P es una onda longitudinal,

\*  $K = \rho \frac{dp}{dp}$  ;  $p = \text{presión}$

por cuanto a su paso las partículas del medio se mueven en la dirección de propagación; es una onda de compresión y en término de  $K$  y  $\mu$  su velocidad  $V_p$  viene dada por  $V_p = \left[ \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho} \right]^{1/2}$  \*.

La onda S, es una onda transversal, por cuanto a su paso las partículas del medio se mueven perpendicularmente a la dirección de propagación, es una onda de cizalle y su velocidad  $V_s$  viene dada por  $V_s = \left[ \frac{\mu}{\rho} \right]^{1/2}$ . En los medios líquidos  $\mu = 0$  y por cuanto, en ellos no se propagan ondas S.

En la Tierra una perturbación, por ejemplo un sismo, da origen a partir de su foco\*\*, ondas P y S que se propagan por el interior de ella. Teniendo en cuenta, que  $K, \mu, \rho$ , y por tanto  $V_p$  y  $V_s$  varían con la profundidad, las ondas originadas en el foco, al penetrar en la Tierra, irán refractándose continuamente, dando lugar a trayectorias en general curvas. Dependiendo del ángulo con que abandona el foco, una porción de la onda en cuestión podrá reflejarse en la superficie de la Tierra, reflejarse o refractarse en la superficie del núcleo, cabiendo incluso la posibilidad de que una onda P cambie a S o vice-versa.

Existe una nomenclatura especial para denominar cada una de las posibilidades de ondas y combinaciones de ellas que se propagan por la Tierra a partir de un foco (ver figura 9).

Las ondas originadas en un sismo de mediana intensidad (magnitud 5 a 6 en la escala Richter) son actualmente detectadas en estaciones de todo el mundo, pudiéndose identificar en los sismogramas, cada fase distinta del sismo. Teniendo el tiempo y el lugar en que se originó el sismo, y el tiempo de llegada de las diferentes ondas a las estaciones; se pueden construir curvas de tiempo de travesía para cada una de las ondas (ver figura 10).

---

\* Las deformaciones del material debidas al paso de una onda, pueden considerarse adiabáticas; los coeficientes  $K$  y  $\mu$  por lo tanto son los adiabáticos.

\*\* La máxima profundidad para la cual se observan focos de sismos, es de unos 700 Kms.



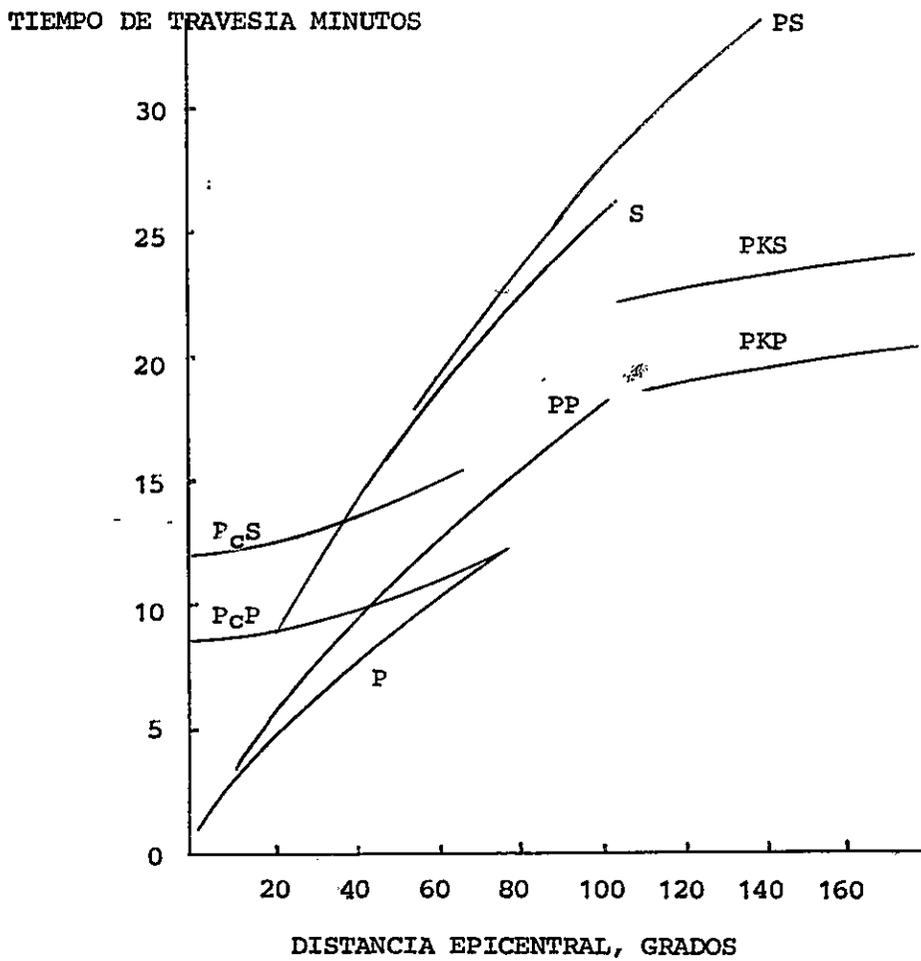


FIGURA 10

Tiempo de travesía de las ondas sísmicas versus ángulo epicentral (ángulo con vértice en el centro de la Tierra, cuyos lados quedan determinados por el foco del sismo y por la estación registradora).

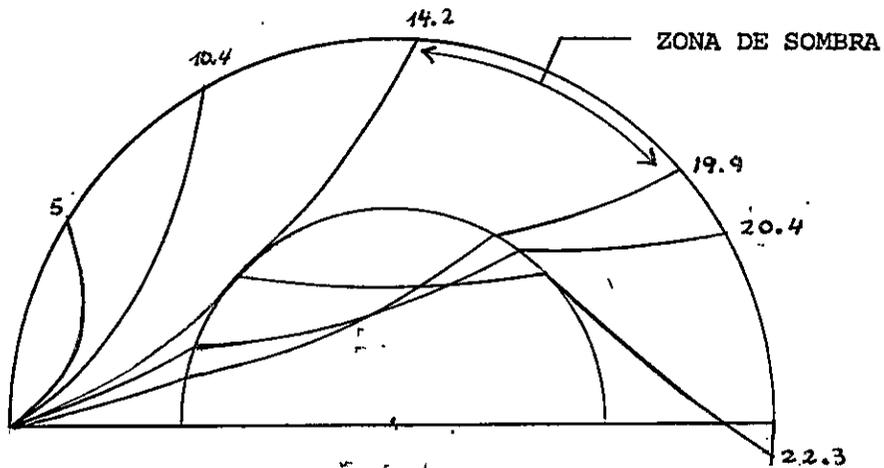


FIGURA 11

Traectorias típicas para la onda P y tiempos de travesía (minutos).

como tal, fueron los hechos que primero indicaron la existencia de un núcleo en la Tierra con características de líquido, por lo menos en su parte más externa.

A partir de las curvas de travesía para las ondas P y S es posible, por métodos que no se detallarán aquí\* deducir las velocidades  $V_p$  y  $V_s$  como función de la distancia al centro de la Tierra (ver Tabla I).

Conocidas las velocidades  $V_p$  y  $V_s$  como función de la distancia  $r$  al centro de la Tierra, interesa ahora obtener de ellas otros parámetros tales como la densidad  $\rho$ , presión  $p$  y gravedad  $g$  como función de  $r$ \*\* . Fácilmente se puede deducir que:

$$\frac{dp}{dr} = -g(r)\rho(r), \quad (1-2)$$

con

$$g = G \frac{m(r)}{r^2}, \quad (1-3)$$

donde  $m(r)$  es la porción de masa de la Tierra contenida hasta el radio  $r$  y  $G$  es la constante de gravitación universal.

En general  $\rho$ , es función de la presión y de la temperatura  $T$ , teniendo estas últimas dependencias radiales; es decir  $\rho = \rho(P(r), T(r))$ . El cambio de densidad al variar  $r$  viene dado principalmente por el cambio de presión, siendo el cambio debido a la variación de  $T$ , de segundo orden\*\*\*. Escribimos entonces

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dr} \quad \text{que junto con la ecuación (1-2) y la defi-}$$

nición de incompresibilidad, toma la forma

\* Detalles se pueden encontrar en la referencia [5] apéndice A.

\*\* Implícitamente se asume para la Tierra simetría radial.

\*\*\* El coeficiente de expansión térmica  $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ , vale aproximadamente  $3 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$  para silicatos  $\rho$  (generalmente crece con  $T$ , pero decrece al aumentar  $P$ ), de modo tal que un cambio de  $T$  de unos  $1000^\circ\text{C}$  produce una variación de  $\rho$  de solo un 3%.

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{g\rho^2}{K_S}, \quad (1-4)$$

donde  $K_S$  es el coeficiente de incompresibilidad adiabática. La ecuación (1-4) se conoce con el nombre de Adams y Williamson.

Usando (1-3), (1-4) e introduciendo la definición

$$\phi(r) = \frac{K_S}{\rho} = \frac{V^2}{P} - \frac{4}{3} V_S^2 \quad (1-5)$$

se tiene que:

$$\frac{d\rho}{dr} = -G \frac{m(r)\rho}{\phi(r)r^2} \quad (1-6)$$

Conociendo los valores iniciales para un cierto  $r = R_0$  ( $R_0$  = radio del manto por ejemplo)  $m_0 = m(R_0)$ ,  $\rho_0 = \rho(R_0)$  y teniendo presente que  $\phi$  es una función conocida, se puede integrar numericamente la ecuación (1-6) y obtenerse  $\rho$  como función de  $r$ .

Obtenida  $\rho = \rho(r)$ ,  $g$  y  $p$  son fácilmente computables a partir de ella, así como también las constantes elásticas  $K_S$  y  $\mu$ .

El método arriba expuesto es el que ha sido usado para la construcción de tablas tal como la tabla I. Sin embargo se deben tener presentes algunas restricciones. La ecuación (1-6) es sólo válida para una Tierra químicamente homogénea. La Tierra, es homogénea por capas y en cada una de ellas es aplicable (1-6) haciéndose necesario conocer nuevos valores iniciales en las interfases para continuar la integración. Debe considerarse también que cualquier determinación de densidades en el interior de la Tierra tiene que cumplir con dos condiciones de borde fundamentales. La distribución debe ser tal que integrada, dé la masa correcta total de la Tierra  $597.7 \times 10^{25}$  gr y el momento de inercia correcto respecto a su eje rotación ( $81.04 \times 10^{43}$  gr  $\text{cm}^2$ ) ambas cantidades conocidas de antemano por otros métodos.

## c) Corrientes de convección térmica en el núcleo.-

Teniendo el núcleo externo características de líquido, puede pensarse entonces que dentro de él ocurrirán movimientos apreciables del fluido, debidos entre otras cosas a convección térmica. Para que ocurra convección, se requiere que el fluido del núcleo sea inestable en la dirección radial. Un elemento de fluido desplazado radialmente desde el centro de la Tierra, debe encontrarse rodeado por fluido de mayor densidad para que continúe subiendo. Si éste no es el caso, el elemento permanecerá en su nueva posición o sufrirá una fuerza restauradora hacia la posición original.

Suponiendo en primera instancia que la temperatura  $T$  como función de  $r$  tiene en el núcleo un comportamiento dado por condiciones adiabáticas, un elemento del fluido desplazado radialmente permanecerá en su nueva posición no habiendo convección térmica; el elemento de fluido al ser desplazado a sitios en que hay distintas condiciones de  $P$  y  $T$ , sufrirá cambios esencialmente adiabáticos y en éste caso la densidad del elemento y del nuevo fluido circundante a él serían iguales.

En condiciones adiabáticas y para un núcleo químicamente homogéneo, el gradiente térmico es el adiabático y vendría dado por

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \frac{dp}{dr} = - \frac{Tg\alpha}{C_p} \quad (1-7)$$

donde  $\alpha = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$  es el coeficiente de expansión térmica y  $C_p$  es el calor específico a presión constante.

Para que exista convección térmica es necesario que la variación real de la temperatura sea tal que el módulo de su gradiente  $|dT/dr|$  sea mayor que el módulo del gradiente adiabático  $g\alpha T/C_p$ . De este modo, sobre un elemento de fluido desplazado, se ejercerá una fuerza tendiente a que el movimiento continúe. Si al contrario  $|dT/dr| < g\alpha T/C_p$ , se tendrá una fuerza restauradora hacia la posición inicial no habiendo en éste

último caso, convección térmica.

Para analizar la estabilidad del núcleo, es necesario considerar la densidad en su dependencia general, esto es  $\rho = \rho(P(r), T(r))$ , usando métodos de la termodinámica elemental se concluye que:

$$\frac{d\rho}{dr} = - \frac{g\rho^2}{K_S} + \alpha\rho z \quad (1-8)$$

donde

$$z = \left( - \frac{T\alpha g}{C_p} - \frac{dT}{dr} \right) \text{ es la diferencia entre los gradientes de temperatura adiabático y real.}$$

Una condición necesaria para que sea posible convección es que  $z > 0$  ( $\alpha\rho z > 0$ ). Si se escribe  $\alpha\rho z = (g\rho^2/K_S) \cdot \beta(r)$ , de manera que  $\beta(r) = 1 + (K_S/g\rho z)(\frac{d\rho}{dr})$ , entonces  $z > 0$  es equivalente a  $\beta > 0$ .

Una estimación de  $\beta(r)$  en el núcleo puede en principio ser obtenida desde evaluaciones independientes del gradiente de densidad actual y el dado por la ecuación de Adams y Williamson [6]. La variación de  $\beta$  con  $r$ , sin embargo, no ha sido unívocamente determinada. Algunos modelos de la distribución de densidad en el núcleo, dan para  $\beta$  zonas en que  $\beta > 0$  y otras en que  $\beta < 0$  (núcleo estable). Los métodos para obtener  $\beta$ , son ya bastante sofisticados. A esto se debe agregar la complicación adicional que presenta un núcleo no homogéneo, lo cual por lo menos en bajo porcentaje es verdadero. Ciertamente, no se puede cuantificar debidamente la situación; pero en general los análisis favorecen la existencia de convección térmica en el núcleo.

II.- ALGUNAS TEORIAS DEL ORIGEN DEL CAMPO MAGNETICO.-

Un problema clásico de electromagnetismo es encontrar el campo magnético producido por una esfera material, con una magnetización uniforme y permanente  $\vec{M} = M_0 \hat{z}$  [16] (ver figura 12).

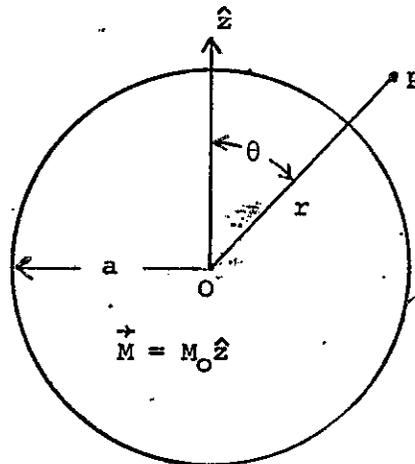


FIGURA 12

Teniendo la solución al problema, se concluye que fuera de la esfera es decir, para  $r \geq a$ , el campo es idéntico al de un dipolo magnético  $\vec{m}$  ubicado en el origen, teniéndose que:

$$\vec{m} = m \hat{z} = \frac{\mu_0 M_0 a^3}{3} \hat{z}^* \quad (2-1)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío. En el interior de la esfera el campo magnético vale

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 M_0}{3} \hat{z}. \quad (2-2)$$

Luego, una posible teoría simple del magnetismo terrestre, sería suponer que la Tierra está uniformemente magnetizada, siendo el momento dipolar observado  $m$  de  $8.1 \times 10^{25}$  gauss  $\times$  cm<sup>3</sup>, la magnetización  $M_0$  para la Tierra debería ser:

$$M_0 = \frac{3m}{\mu_0 a^3} \approx 0.075 \text{ gauss (a = 6370 Kms; el radio terrestre).}$$

\* Para  $r > a$ , el campo magnético  $\vec{B}$  es  $\vec{B} = -\nabla\phi$  donde  $\phi(r, \theta) = \frac{m \cos\theta}{r^2}$

Las capas superficiales de la Tierra en general no están magnetizadas. Hacia el interior de la Tierra la temperatura aumenta, sobrepasando ya a unos 30 Kms, la temperatura de Curie del hierro ( $\sim 750^{\circ}\text{C}$ ).

Entonces, a menos que el punto de Curie se incremente al aumentar la presión, todas las sustancias ferromagnéticas perderían sus propiedades magnéticas en profundidad.

Experimentalmente no hay evidencias de grandes cambios del punto de Curie al aumentar la presión. Para obtener el valor observado del momento magnético terrestre, se requeriría una magnetización de la corteza de unos 6 gauss; lo cual no se observa. De hecho la magnetización de una roca depende de la cantidad y naturaleza de los óxidos de hierro contenidos en ella y para la mayoría de las rocas la intensidad es menor de  $10^{-2}$  gauss.

Otra desventaja de la teoría de la magnetización permanente es que no permite explicar los rápidos cambios que sufre la parte no dipolar del campo.

Los argumentos arriba expuestos, entre otros, hacen que la suposición de una Tierra uniformemente magnetizada sea insostenible.

Siguiendo con la línea de ideas simples y a modo de ir acercándose al problema de interés, la estructura y parámetros físicos del núcleo terrestre sin duda ofrecen mecanismos tendientes a la generación de un campo magnético.

Para un observador fijo en la superficie de la Tierra, la combinación de la convección y de la rotación terrestre (fuerza de Coriolis) harán que éste vea una diferencia entre las velocidades de rotación de las partes internas y externas del núcleo. Por otro lado, considerando que existe un gradiente de temperatura, se puede pensar que éste producirá una separación de carga por el efecto termoeléctrico entre las capas internas y externas del núcleo, lo que finalmente se manifestará en una diferencia de potencial. Lo más simple que se pue-

de pensar bajo estas circunstancias es que el observador en la superficie verá carga neta en movimiento que a su vez producirá un campo magnético. Para estudiar la plausibilidad de las ideas anteriores, se considerará el siguiente modelo sencillo.

Imaginemos dos cáscaras esféricas concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$ , ambas con densidad de carga superficial uniforme  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente, de modo que las cáscaras posean una carga total  $Q$  y  $-Q$  respectivamente. La cáscara interior rota respecto de un eje ( $\hat{z}$ ) con velocidad angular  $\omega$  constante (ver figura 13).

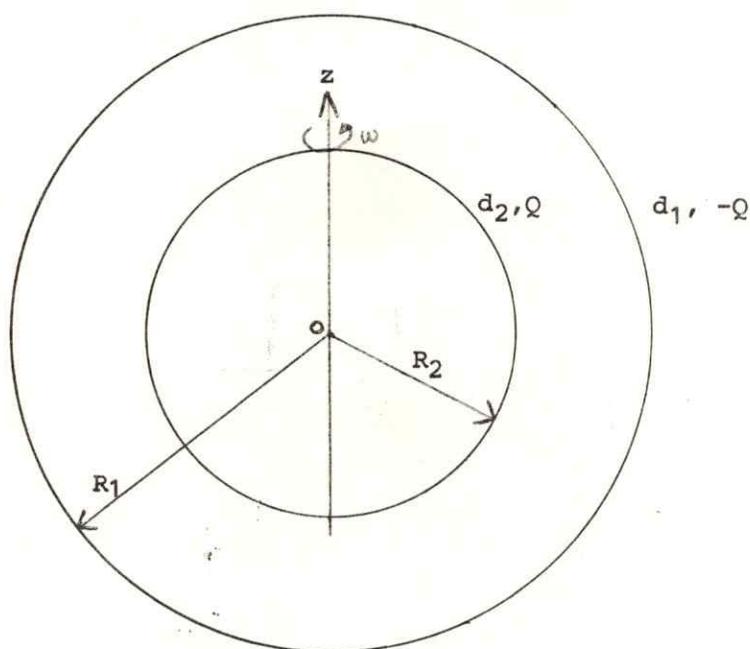


FIGURA 13

En estas condiciones, la diferencia de potencial  $\Delta V$  entre las superficies esféricas es:

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (2-3)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío.'

Teniendo en cuenta que  $Q = 4\pi d_2 R_2^2 = 4\pi d_1 R_1^2$ , se puede escribir

$$\Delta V = \frac{d_2 R_2^2}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (2-4)$$

La rotación de la cáscara interior produce un campo magnético  $\vec{B}$ , el cual, en el origen 0 es en la dirección  $\hat{z}$  y tiene módulo

$$B = \frac{2\mu_0 d_2 \omega R_2^2}{3}, \quad (2-5)$$

El orden de magnitud de B es representativo del problema. Combinando (2-4) y (2-5) se obtiene que:

$$B = \frac{2}{3} \mu_0 \epsilon_0 \omega \frac{R_1}{R_1 - R_2} \Delta V \quad (2-6)$$

Suponiendo que  $R_1 \approx 2R_2$  y reemplazando en (2-6) con  $\omega = 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$  ( $\omega$  de rotación de la Tierra es  $7.29 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$ ) se obtiene que  $B = 1.5 \times 10^{-21} \Delta V$ . Aun cuando se usó para  $\omega$  un valor exageradamente grande (para cálculos mas realistas debiera usarse  $\omega \approx 10^{-9} \text{ seg}^{-1}$ , que es la velocidad angular de la deriva hacia el oeste), el valor resultante para B es extremadamente chico a menos que se use para  $\Delta V$  valores realmente imposibles\*. Luego el presente mecanismo tampoco explica el origen del campo magnético terrestre.

\* En pares termoelectricos de laboratorio, diferencia de temperatura de unos 1000°C, raramente producen diferencias de voltaje mayores de 1 volt.

### III.- TEORIA DEL DINAMO.-

#### 1.- Introducción.

Teniendo en mente la constitución interna de la Tierra así como los parámetros físicos dentro de ella, resulta que es el núcleo el lugar del interior terrestre que reúne más condiciones como para explicar el origen del campo geomagnético. Es el núcleo, dada su alta conductividad eléctrica, el lugar del interior terrestre que presentará menor dificultad a la circulación de carga eléctrica y es también, dada su condición de fluido, el lugar con mayor posibilidad de presentar variaciones relativamente rápidas tales como las observadas en el campo geomagnético. Dentro del núcleo es posible que circule corriente eléctrica y al mismo tiempo de que el fluido que lo compone, presente movimiento. Las variaciones seculares serían de esta forma interpretadas como una modificación del sistema de corrientes causadas por la interacción inductiva entre el movimiento mecánico del fluido y el campo magnético producido por las corrientes.

El campo de la Tierra ha existido desde unos 2.600 millones de años y su intensidad máxima nunca a diferido significativamente del presente valor. Se debe por tanto encontrar un mecanismo que genere y mantenga las corrientes eléctricas que sostienen el campo, evitándose de esta forma su decaimiento. La fuente más probable de la fuerza electromotriz necesaria para mantener esas corrientes, es el movimiento del material del núcleo a través de las líneas del campo magnético. El estudio de este proceso en el cual las corrientes generadas refuerzan el campo magnético el cual a su vez, en combinación con el movimiento, produce fuerzas electromotriz, es conocido como el problema del dinamo homogéneo, lo que se requiere en este modelo es una interacción entre el movimiento del fluido y las corrientes, que pueda generar y automantener el campo. Trabajos pioneros de la teoría del dinamo han sido llevados a cabo por Elsasser<sup>[9-1]</sup> y Bullard<sup>[2-13]</sup>.

Para desarrollar la teoría del dinamo homogéneo, se debe hacer por medio de ecuaciones que incluyan el aspecto electromagnético del problema así como también su faceta hidrodinámica. Las ecuaciones que incluyen ambos caracteres del problema, electromagnético e hidrodinámico, son las ecuaciones de la llamada magnetohidrodinámica.

## 2.- Elementos de la Magnetohidrodinámica y las Ecuaciones del Dinamo.-

En esta sección se considera el comportamiento de un fluido conductor eléctricamente neutro en presencia de campos electromagnéticos. La parte hidrodinámica del problema viene descrita por las ecuaciones de continuidad.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3-1)$$

y de fuerzas

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{F}_v + \rho \vec{g}, \quad (3-2)$$

en las cuales  $\vec{r}$  es el vector de posición,  $\rho(\vec{r}, t)$  es la densidad de la materia,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  es la velocidad,  $p(\vec{r}, t)$  es la presión,  $\vec{g}$  es la aceleración de gravedad,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  la corriente,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  el campo magnético y  $\vec{F}_v$  son las fuerzas viscosas. Si  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del fluido se tiene que [14]

$$\vec{F}_v = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3-3)$$

ecuación que para un fluido incompresible ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ) se convierte en

$$\vec{F}_v = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (3-4)$$

Debe entenderse el símbolo  $\frac{d}{dt}$  que aparece en el miembro izquierdo de (3-2) como la "derivada convectiva" :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (3-5)$$

la cual da la razón de cambio total de una magnitud que se mueve instantáneamente con velocidad  $\vec{v}$ .

Los campos electromagnéticos en el fluido vienen descritos por las ecuaciones:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (3-6a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3-6b)$$

y

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3-6c)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad del fluido.

La corriente  $\vec{j}$  viene dada por

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \sigma (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3-7)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del fluido.

En rigor en (3-7) además de las corrientes de conducción e inducción  $\sigma \vec{E}$  y  $\sigma (\vec{v} \times \vec{B})$  respectivamente, se debería tener en cuenta la corriente de desplazamiento  $\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , donde  $\epsilon$  es la permitividad del fluido. Sin embargo, un análisis dimensional muestra que en problemas concernientes a la geofísica y a la astrofísica, la corriente de desplazamiento es despreciable [15].

Es de interés comparar las corrientes total y de inducción en el caso particular del núcleo terrestre. Para ello se debe calcular el orden de magnitud de la razón entre  $\mu \sigma \vec{v} \times \vec{B}$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ . Siendo  $V$  una velocidad representativa del fluido del núcleo y  $\lambda$  una longitud típica, el orden de magnitud de dicha razón viene dada por

$$\frac{\mu \sigma V B}{\lambda^{-1} B} = \mu \sigma \lambda V \equiv R_m \quad (3-8)$$

donde  $R_m$  es una cantidad adimensional llamada "número magnético de Reynolds". Para el núcleo terrestre se tiene que  $\sigma \approx 10^6 \Omega^{-1} m^{-1}$ ,  $\lambda = 10^6$  mts.  $v = 10^{-3}$  m/seg (valor obtenido a partir de la deriva hacia el oeste del campo magnético). Para la permeabilidad magnética  $\mu$  se puede tomar el valor en el vacío, o sea,  $\mu = 10^{-6} mKgC^{-2}$ . Sustituyendo estos valores en (3-8) resulta  $R_m = 10^3$ . Cabe mencionar aquí que en problemas típicos de laboratorio  $R_m$  siempre es pequeño (para una muestra de Hg a temperatura ambiente tomando  $\lambda = 1$  cm y  $v = 1$  cm/seg resulta  $R_m \sim 10^{-4}$ ); por otra parte en problemas de astrofísica  $R_m$  es por regla general grande.

Volviendo a (3-7) y en vista del valor de  $R_m$  en el núcleo terrestre, se puede concluir que allí se tiene aproximadamente

$$\vec{E} \approx -\vec{v} \times \vec{B} \quad (3-9)$$

Hacemos notar sin embargo, que para algunos efectos geomagnéticos el término  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  en la ecuación (3-7) es importante y por lo tanto no siempre se puede despreciar.

Otra magnitud de interés es la razón entre las densidades de energía eléctrica y magnética. Su orden de magnitud vendrá dado por el parámetro  $\epsilon E^2 / \mu^{-1} B^2$ . Recordando que  $\mu \epsilon = c^2$  ( $c$  velocidad de la luz) y teniendo presente (3-9) se obtiene que:

$$0 \left[ \frac{\epsilon E^2}{\mu^{-1} B^2} \right] = 0 \left[ \frac{E^2}{c^2 B^2} \right] = 0 \left[ \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right]$$

A partir de las ecuaciones (3-6) y (3-7), tomando el rotor de (3-6c) y usando la identidad vectorial

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \vec{\nabla}^2 \vec{C} \quad (3-10)$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + v_m \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (3-11)$$

donde

30.

$$\nu_m = (\mu\sigma)^{-1} \quad (3-12)$$

es la "viscosidad magnética".

Dada una cierta velocidad  $\vec{v}$ , la ecuación (3-11) podría en principio ser integrada de modo de obtener  $\vec{B}$ ; pero dicha integración es en general prohibitivamente dificultosa. Observese que la razón de magnitud entre el primer y segundo término del miembro derecho de (3-11) es  $\lambda V/\nu_m$ , vale decir  $R_m$ . Para el núcleo terrestre  $R_m \sim 10^3$ , luego en primera aproximación (3-11) se podrá escribir como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3-13)$$

que es también la versión de (3-11) para el caso de un fluido con conductividad eléctrica  $\sigma \rightarrow \infty$

Para aplicar la ecuación (3-2) al caso del núcleo terrestre, la velocidad  $\vec{v}$  del fluido debe ser referida a un sistema fijo a la Tierra, es decir, a un sistema en rotación. Se debe entonces agregar, los términos correspondientes a las fuerzas de Coriolis y centrífuga, con lo cual la ecuación (3-2) se transforma en:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} + 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v} - \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) - \vec{F}_v = \rho \vec{\nabla} W - \vec{\nabla} p, \quad (3-14)$$

donde  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra,  $W$  es el potencial gravitacional en el cual se ha absorbido la fuerza centrífuga\* y  $\vec{J}$  se ha reemplazado por  $1/\mu \nabla \times \vec{B}$ .

Las ecuaciones (3-11) y (3-14) son las ecuaciones fundamentales del geodínamo. En el apéndice A se hace un análisis dimensional mostrando la magnitud relativa de las diferentes fuerzas que aparecen en la ecuación (3-14).

---

\*  $\vec{\nabla} W = g + A_c$ . centrífuga. La parte centrífuga del potencial viene dada (en coordenadas polares) por  $W_c = 1/2 \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta$ .

### 3.- Desarrollo de la Teoría y Conclusiones.-

Resulta de interés conocer qué sucede cuando la ecuación (3-11) se aplica al núcleo terrestre asumiendo  $v = 0$ , es decir, no hay movimiento del fluido del núcleo con respecto a un observador fijo en la superficie de la Tierra. En el apéndice B se muestra que la solución a este problema consiste en una serie de modos, tanto para el campo eléctrico como para el magnético que exhiben como dependencia temporal un decaimiento de tipo exponencial. Si en un cierto instante se tiene un determinado campo eléctrico y magnético, los diferentes modos que lo componen comenzarán a decaer lo que ocasionará un decaimiento global del campo. Siendo el decaimiento de estos diferentes modos de tipo exponencial, se puede hablar de vida media de cada uno de ellos. Si  $R$  es el radio del núcleo terrestre,  $\mu$  y  $\sigma$  su permeabilidad y conductividad respectivamente, para la vida media mayor, los cálculos arrojan la expresión  $R^2 \mu \sigma / \pi^2$ , que evaluada con los parámetros para el núcleo terrestre da un valor de aproximadamente 50.000 años. Al promediar sobre todas las vidas medias para obtener una vida media representativa de la totalidad del campo electromagnético, esta será aun menor que 50.000 años. Esta vida media es insignificante comparada con el tiempo en el cual la Tierra ha poseído campo magnético. Pensar en que hubo inicialmente un campo muy intenso que ha ido y está decayendo y atribuir a ésto la existencia del campo magnético terrestre, resulta por lo tanto poco probable. Luego se tiene que la autoinducción en el núcleo, deberá cumplir un papel importante en la generación y regeneración del campo geomagnético.

Cuando se desea incluir el movimiento del fluido del núcleo terrestre, se puede en primera aproximación hacerlo usando la ecuación (3-13). En el apéndice C se muestra a partir de (3-13) que las líneas de fuerza del campo magnético se pueden pensar como si estuvieran "fijadas" al fluido y son arrastradas por éste en su movimiento.

El flujo del campo magnético a través de un circuito solidario a las partículas del fluido, es constante en el tiempo, es decir, debido al movimiento del fluido el circuito cambia de posición y de forma pero el flujo de  $\vec{B}$  a través de él permanece constante. A partir de lo arriba afirmado se concluye inmediatamente, que existe la posibilidad de una amplificación del campo magnético, es decir, hay una transferencia de energía desde el fluido en movimiento hacia el campo electromagnético.

Mientras el primer término del miembro derecho de (3-11) implica amplificación del campo magnético, el segundo implica un decaimiento como consecuencia de la resistencia no nula que exhibe el fluido.

Con el objeto de analizar con más detalle los efectos que se producen cuando se tiene un fluido conductor en movimiento y en presencia de un campo magnético, usamos el siguiente modelo. Consideremos un fluido de conductividad  $\sigma$  que llena todo el espacio, que tiene movimiento en la dirección  $\hat{y}$ ; el movimiento está limitado a  $0 \leq y \leq L$  y es dado de antemano. Existe también un campo magnético exterior fijo y uniforme en la dirección  $\hat{y}$  (ver figura 14). La interacción entre el campo magnético y el fluido en movimiento, producirá una corriente  $\vec{J}$  en dirección  $\hat{z}$  cuya intensidad dependerá de  $y$ , es decir, para un plano  $y = \text{cte}$ ,  $0 \leq y \leq L$ ,  $\vec{J}$  es la misma. La corriente  $\vec{J}$  producirá a su vez, un campo magnético  $B_x(y)$  en la dirección  $\hat{x}$  y dependiente de  $y$ , que no interactuará con el movimiento del fluido, pero significará una conversión de energía del movimiento a energía del campo magnético.

Interesa encontrar  $B_x(y)$ , para lo cual se comenzará evaluando  $d B_x(y)$ , la contribución de campo magnético debida a la corriente que está entre dos planos perpendiculares al eje  $\hat{y}$ , situados entre  $y$  e  $y + dy$ . Con la ayuda de la ley Ampere aplicada al circuito C de la figura 15 se obtiene que  $B = 1/2 \mu J dy$ , siendo por tanto la contribución de la "tajada" en cuestión, independiente de la distancia a ella.

Para  $\delta B_x$  se tiene entonces que:

$$\delta B_x = \pm \frac{\mu J \delta y}{2} = \pm \frac{\mu \sigma v B_0}{2} dy, \quad (3-15)$$

donde el signo depende si  $y$  está bajo o sobre la "tajada".

Para  $B_x(y)$  se obtiene

$$B_x(y) = \begin{cases} \frac{\mu \sigma B_0}{2} \left[ \int_y^L v(h) dh - \int_0^y v(h) dh \right] & 0 \leq y \leq L & (3-16a) \\ -\frac{\mu \sigma L \bar{v} B_0}{2} = -\frac{R_m}{2} B_0 & y \geq L, & (3-16b) \\ \frac{\mu \sigma L \bar{v} B_0}{2} = \frac{R_m}{2} B_0 & y \leq 0, & (3-16c) \end{cases}$$

$$\text{donde } \bar{v} = \frac{1}{L} \int_0^L v \, dh \quad (3-16d)$$

y  $R_m = \mu \sigma L v$  es el "número magnético de Reynolds" del problema. El orden de magnitud de  $B_x/B_0$  es aproximadamente  $R_m/2$  ( $\sim 500$ ), luego queda claro el importantísimo papel que juega la autoinducción en los procesos que ocurren en el núcleo.

Para concretar ideas se analizaba ahora un movimiento particular. El movimiento a considerar, será uno que presente una dependencia parabólica para  $v(y)$  y que sea nulo en  $y = 0$  e  $y = L$ , esto es:

$$v(y) = \frac{4 v_M}{L^2} y (L - y) \quad 0 \leq y \leq L \quad (3-17)$$

donde  $v_M$  es la velocidad máxima que ocurre para  $y = L/2$  (ver figura 16).

Usando (3-16a) se obtiene que:

$$B_x(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} B_0 R_m & y \leq 0 & (3-18a) \\ B_0 R_m \left( 2 \left(\frac{y}{L}\right)^3 - 3 \left(\frac{y}{L}\right)^2 + \frac{1}{2} \right) & 0 \leq y \leq L & (3-18b) \\ -\frac{1}{2} B_0 R_m & y \geq L & (3-18c) \end{cases}$$

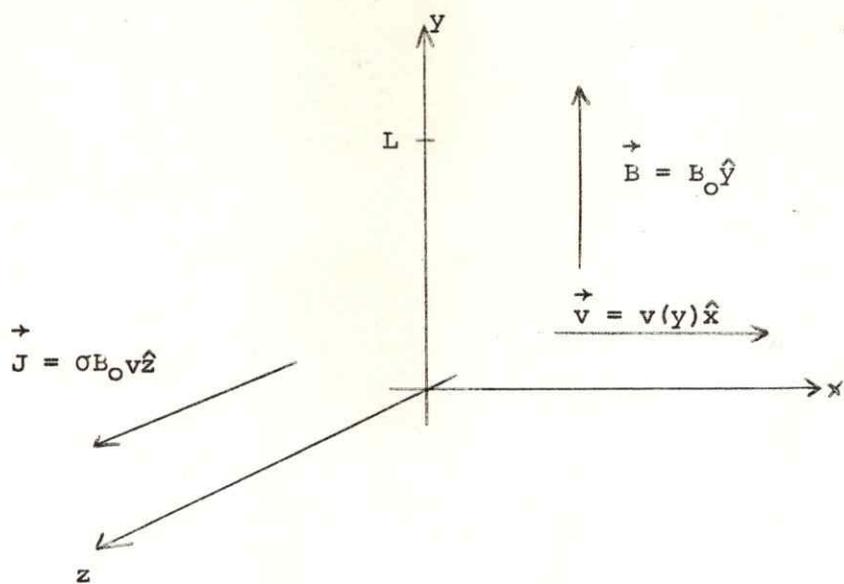


FIGURA 14

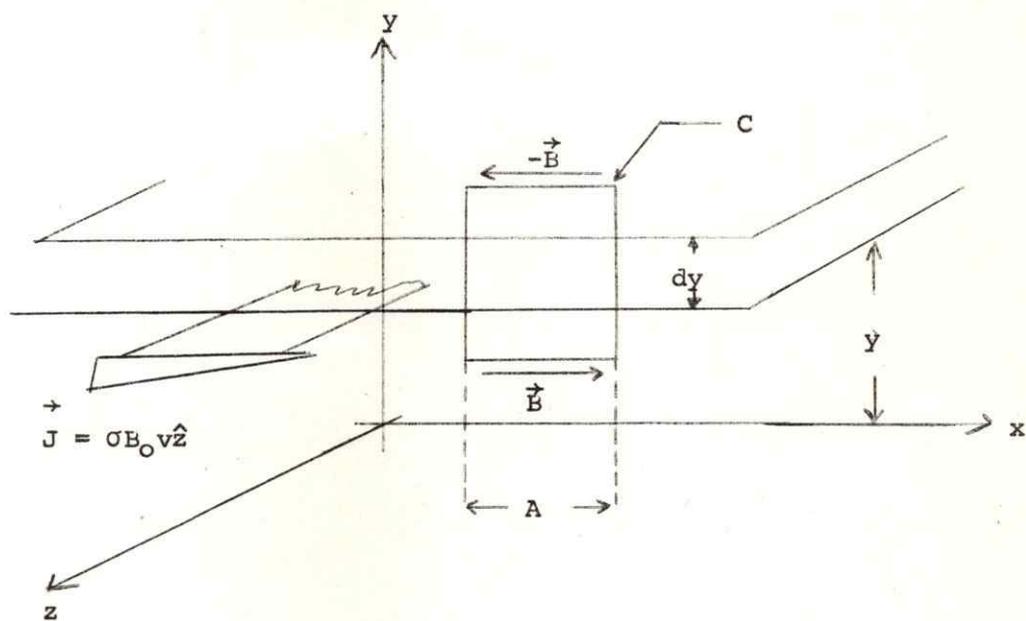


FIGURA 15

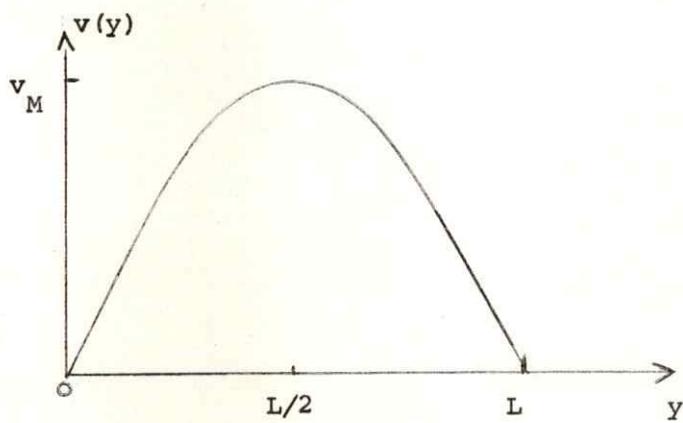


FIGURA 16

La figura 17 muestra un gráfico del campo magnético  $B_x(y)$  para éste caso.

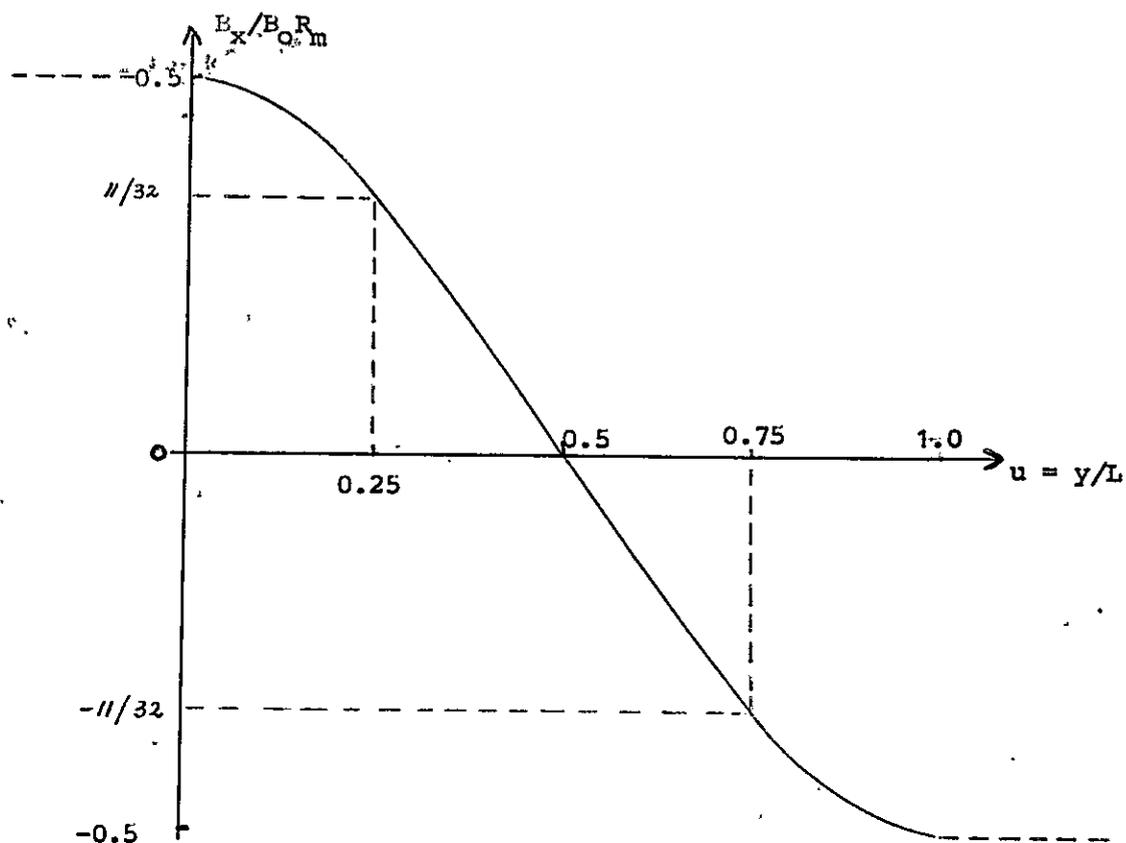


FIGURA 17

Si se piensa que inicialmente hay un campo  $B_0 \hat{y}$ , se tendrá que las líneas de fuerza de este son "arrastradas" y deformadas por el fluido en movimiento hasta conseguirse una situación de equilibrio. En la figura 18 se muestra la situación final para una línea de fuerza que pasa por el origen. Cuanto mayor sea el valor de  $R_m$  mayor será también el efecto de arrastre sobre las líneas del campo magnético. En el apéndice C, son mostradas algunas consecuencias del caso límite  $R_m \rightarrow \infty$ .

La extrapolación de los anteriores resultados al núcleo terrestre donde el valor de  $R_m$  es grande, muestra que allí las líneas de campo estarán prácticamente "atadas" a las partículas del fluido en

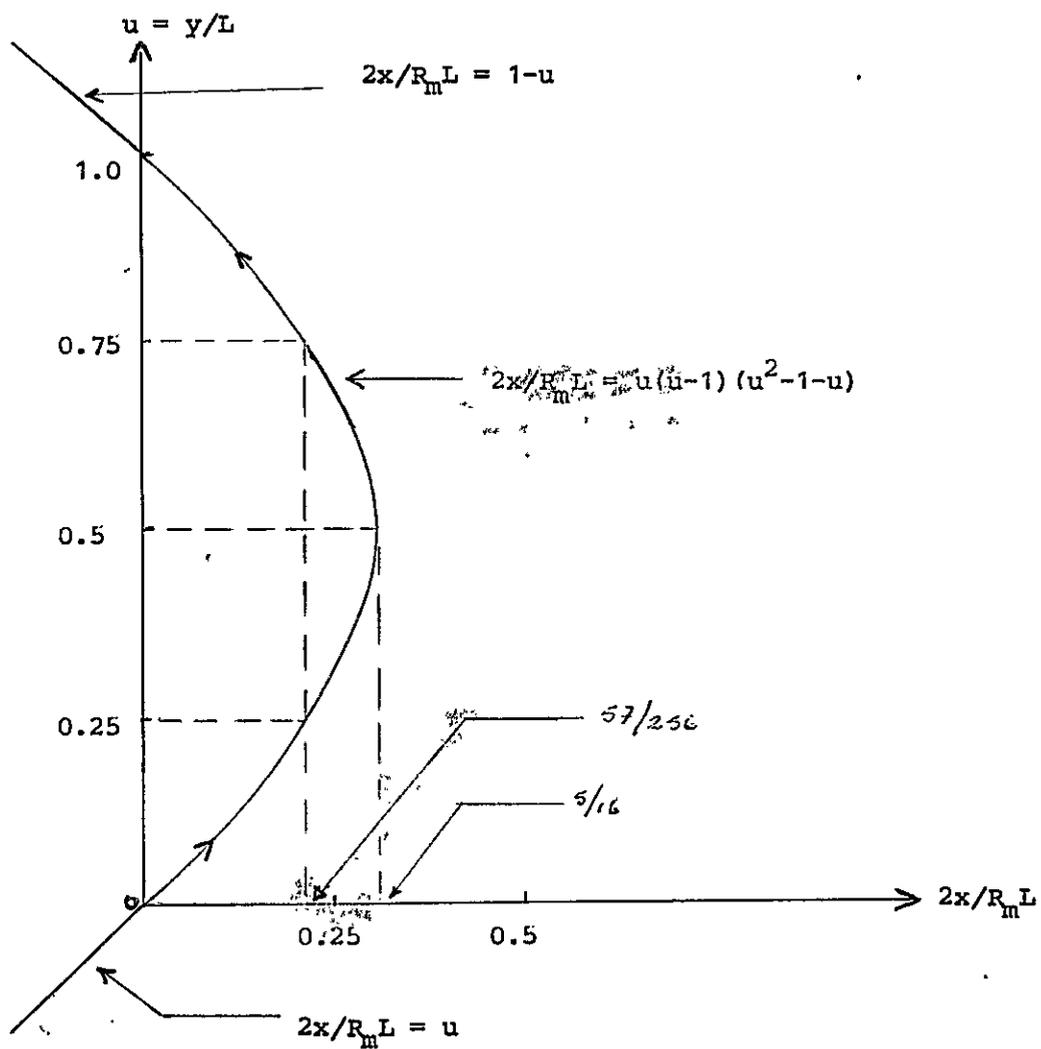


FIGURA 18

Grafico correspondiente a la línea de campo que pasa por el origen.

movimiento y por lo tanto la deformación que sufrirán tales líneas estará íntimamente relacionada con el movimiento del fluido. El alto grado de solidaridad del campo magnético con el movimiento del fluido del núcleo terrestre, es en principio lo que hace posible estimar una velocidad para el fluido del núcleo respecto a un observador en la superficie terrestre, a través de la deriva observada en el campo geomagnético.

La combinación de la convección térmica que probablemente ocurre en el núcleo y de la fuerza de Coriolis debida a la rotación diurna, tiene por efecto que la rotación de las partes internas y externas del núcleo sea diferente (ver figura 19). La existencia de la deriva hacia el oeste del campo magnético, reforzaría tal suposición.

Para analizar el efecto de esta rotación diferenciada, usamos el siguiente simple modelo.

Consideraremos una esfera conductora de radio  $b$  rotando con velocidad angular  $\omega$ , rodeada por una cascará conductora estacionaria de radio  $a$ . Para  $r > a$  existe material con conductividad nula. La permeabilidad magnética  $\mu$  se considerará igual en todas partes. En el centro se coloca un dipolo magnético de magnitud  $M$  con dirección paralela al eje de rotación (ver figura 20). Para asimilar este modelo al núcleo terrestre, se podría por ejemplo pensar que la esfera rotatoria de radio  $b$  es el núcleo interno y la cascará estacionaria el núcleo externo. La velocidad angular  $\omega$  sería entonces, la diferencia entre las rotaciones de las partes internas y externas del núcleo, pudiéndose calcular su magnitud y sentido adecuado, a partir de la deriva hacia el oeste del campo geomagnético ( $\omega \sim 10^{-9} \text{ seg}^{-1}$ )

La solución a este problema está dada en el apéndice D. Tomando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  con su origen en el centro de la esfera que rota, para el campo magnético se tiene que además del campo dipolar

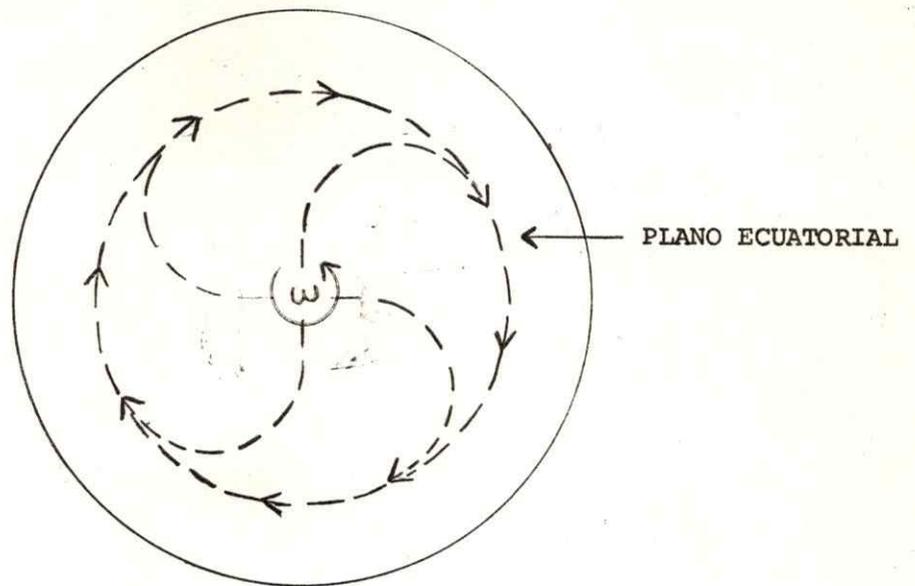


FIGURA 19

Las partículas del fluido del núcleo por convección, salen radialmente hacia afuera y son luego deflectadas por efectos de la fuerza de Coriolis, produciendo para un observador en la superficie terrestre, una rotación diferenciada entre las partes internas y externas del núcleo.

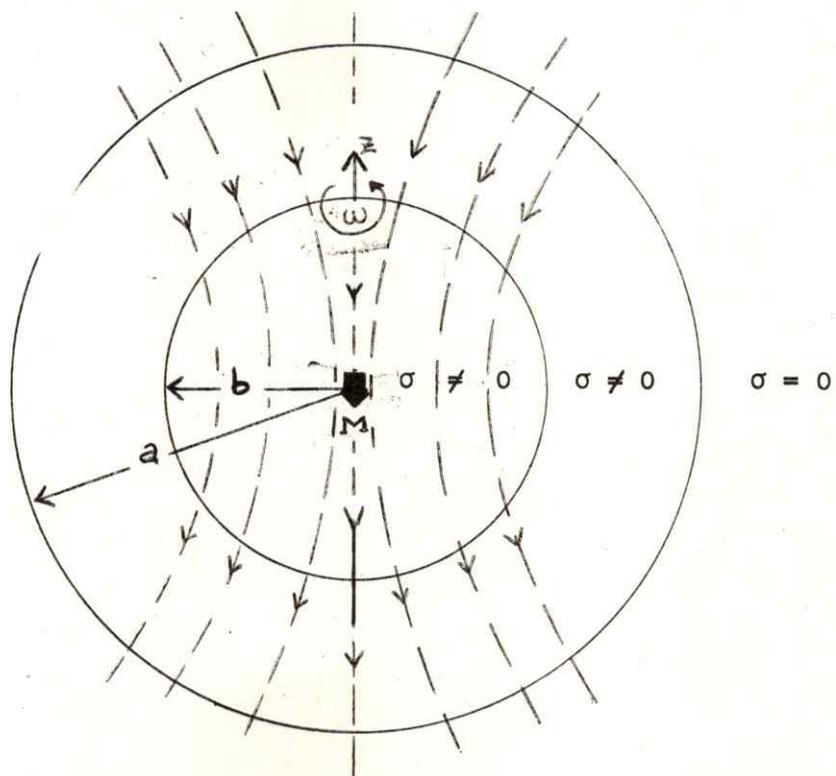


FIGURA 20

central se inducen campos para  $r \leq b$  y  $b \leq r \leq a$ . El campo inducido sólo tiene componentes en la dirección  $\hat{\phi}$  y viene dado por:

$$B_{\phi} = \begin{cases} \frac{\mu_0 M \omega}{5 b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right) r^2 \sin 2\theta & r \leq b & (3-21a) \\ \frac{\mu_0 M \omega b^2}{5} \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{a^5}\right) r^2 \sin 2\theta & b \leq r \leq a & (3-21b) \\ 0 & r \geq a & (3-21c) \end{cases}$$

Para  $r \geq a$  no hay campo inducido y solo existe allí el campo original. El campo inducido o Toroidal\* dado por las ecuaciones (3-21a) y (3-21b), es el continuo en  $r = b$  y para un ángulo  $\theta$  cualquiera, su magnitud es máxima para  $r = b$ . El máximo absoluto del campo inducido ocurre cuando  $r = b$  y  $\sin 2\theta = \pm 1$  y vale

$$B_{\phi}(\text{MAX}) = \frac{\mu_0 M \omega}{5 b} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right) \quad (3-22)$$

La figura 21 muestra la variación radial de  $B_{\phi}$ . Otra característica fundamental del campo inducido, es el cambio de sentido que presenta entre los dos hemisferios.

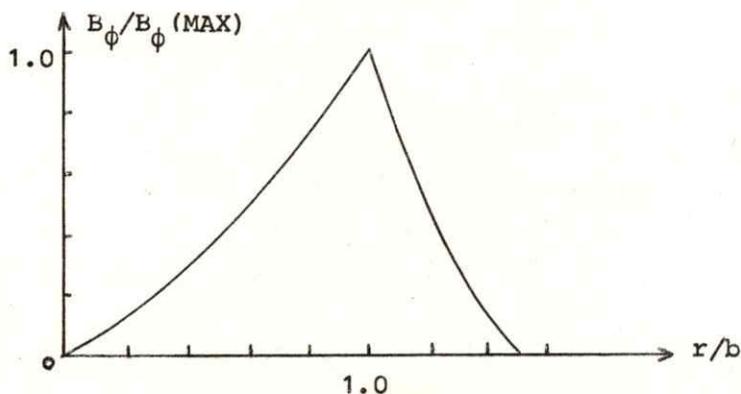


FIGURA 21

Variación radial del campo Toroidal. Se ha asumido aquí que  $a = 1.5b$

\* Al campo inducido de esta forma se le denomina comunmente campo Toroidal, por ser justamente de este tipo. Ver apéndice B.

Las líneas de fuerza del campo magnético inducido son círculos centrados en el eje de rotación y perpendiculares a éste. Dichas líneas de fuerza tendrán sentido positivo o negativo según se esté en el hemisferio norte o sur respectivamente (ver figura 22).

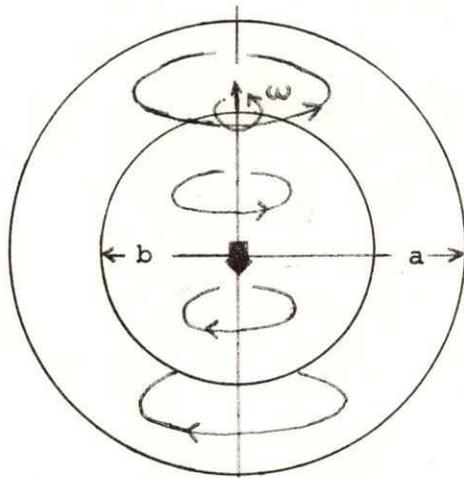


FIGURA 22

Lineas de fuerza del campo inducido por un dipolo central en un núcleo que no rota uniformemente.

La ecuación (3-22) para  $B_{\phi}(\text{MAX})$  también puede ser escrita como:

$$B_{\phi}(\text{MAX}) = \frac{\mu\sigma v(\text{MAX})b}{5} \frac{M}{b^3} \left[ 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5 \right], \quad (3-23)$$

donde  $v(\text{MAX})$  es la rapidez de una partícula colocada sobre el ecuador de la esfera móvil.

Note que  $\mu\sigma v(\text{MAX})b$  es el "número magnético de Reynolds"  $R_m$  del problema y que  $M/b^3$  es el orden de magnitud del campo dipolar para  $r = b$ . Suponiendo  $b/a = 1/2$  (la razón entre los radios del núcleo interno y externo es poco menos que 1/2) se obtiene que

$$B_{\phi}(\text{MAX}) \approx \frac{R_m}{5} \frac{M}{b^3}, \quad (3-24)$$

ecuación que relaciona los órdenes de magnitud entre campo magnético dipolar e inducido. Para el núcleo terrestre, extrapolando a partir del campo magnético observado en la superficie terrestre, el campo dipolar debe tener una magnitud de aproximadamente 10 gauss.

Teniendo presente el valor de  $R_m$  para el núcleo terrestre, vemos que el campo inducido según el modelo anteriormente discutido; será superior al campo dipolar por 1 o 2 ordenes de magnitud.

Resumiendo: el efecto global de la combinación de corrientes de convección y de la fuerza de Coriolis en el núcleo terrestre, hacen que este no rote como un rígido. Al considerar la interacción entre el núcleo que no rota rígidamente y un campo dipolar central, su efecto sería el de inducir un campo magnético Toroidal del tipo dado por las ecuaciones (3-21), que es distinto de 0 únicamente en el núcleo conductor y por lo tanto no sería observable en la superficie terrestre a pesar de ser su magnitud relativamente grande.

Estudiemos ahora con más detalle, el efecto combinado de la fuerza de Coriolis y de la convección en el núcleo terrestre. Si bien el detalle es poco conocido, en general la convección consiste en una serie de corrientes de fluido que harán que éste, partiendo desde el interior del núcleo se dirija hacia las partes externas para luego retornar y converger al interior. Consideremos en particular, una de tales corrientes en la dirección del eje de rotación. En la parte ecuatorial el fluido convergerá lateralmente y en la polar divergirá. El fluido convergente será deflectado debido a la fuerza de Coriolis y al mismo tiempo por efecto de la convección, radialmente levantado. El resultado neto será entonces un movimiento en espiral (ver figura 23). En los polos el fluido diverge y la fuerza de Coriolis actuará en sentido contrario. Si el flujo convectivo no es a lo largo del eje de rotación la geometría del movimiento será por supuesto más complicada.

Consideremos ahora la deformación del campo toroidal por el movimiento en espiral del fluido. En el núcleo terrestre, dado el alto valor que  $R_m$  presenta allí, se tiene que en buena aproximación las líneas del campo magnético son arrastradas y deformadas por el fluido en movimiento como si estuvieran sujetas a éste. Las líneas

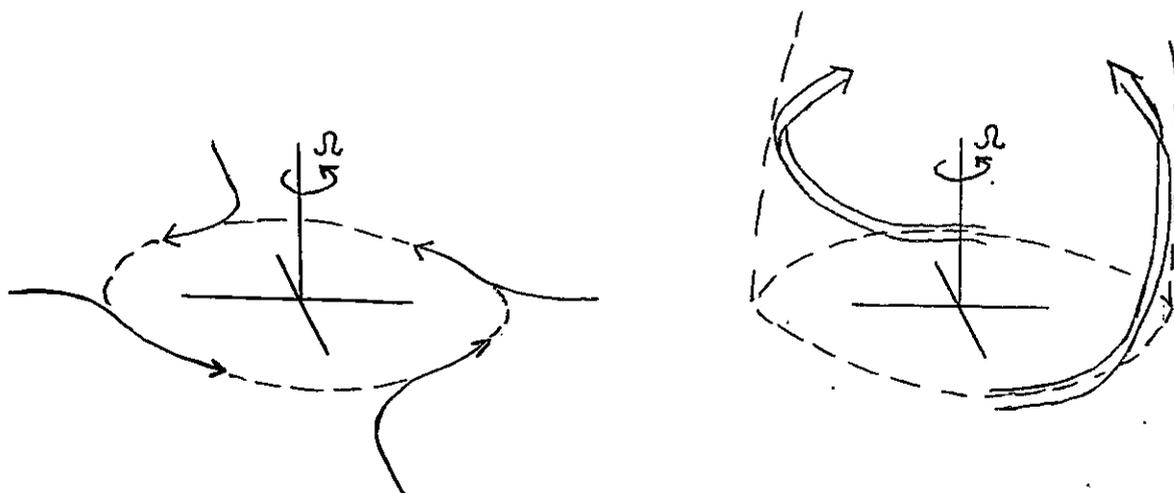


FIGURA 23

Efecto combinado de la fuerza de Coriolis y de la convección sobre un flujo convergente.

de fuerza del campo toroidal serán entonces levantadas y al mismo tiempo giradas creándose círculos de líneas magnéticas de fuerza, aproximadamente cerrados y en general contenidos en planos perpendiculares al plano que contiene las líneas de fuerza del campo toroidal original. Si el giro de las líneas de fuerza del campo toroidal es de unos  $90^\circ$ , los círculos de fuerza magnética generados de la manera arriba descrita, podrán unirse dando lugar a un campo de tipo dipolar axial [18] (ver figura 24).

Resumiendo: la rotación diferenciada de las partes internas y externas del núcleo, que se traduce en un movimiento efectivo del material, induce al interactuar con un campo dipolar axial un campo de tipo toroidal. El campo toroidal también interactúa con el fluido en movimiento y genera un campo que refuerza el campo dipolar axial. Se estaría entonces vislumbrando, un dinamo homogéneo en el núcleo terrestre. El modelo desarrollado es muy simplificado sin embargo, muestra hacia donde apunta y los ingredientes que debe tener una teoría completa del dinamo geomagnético.

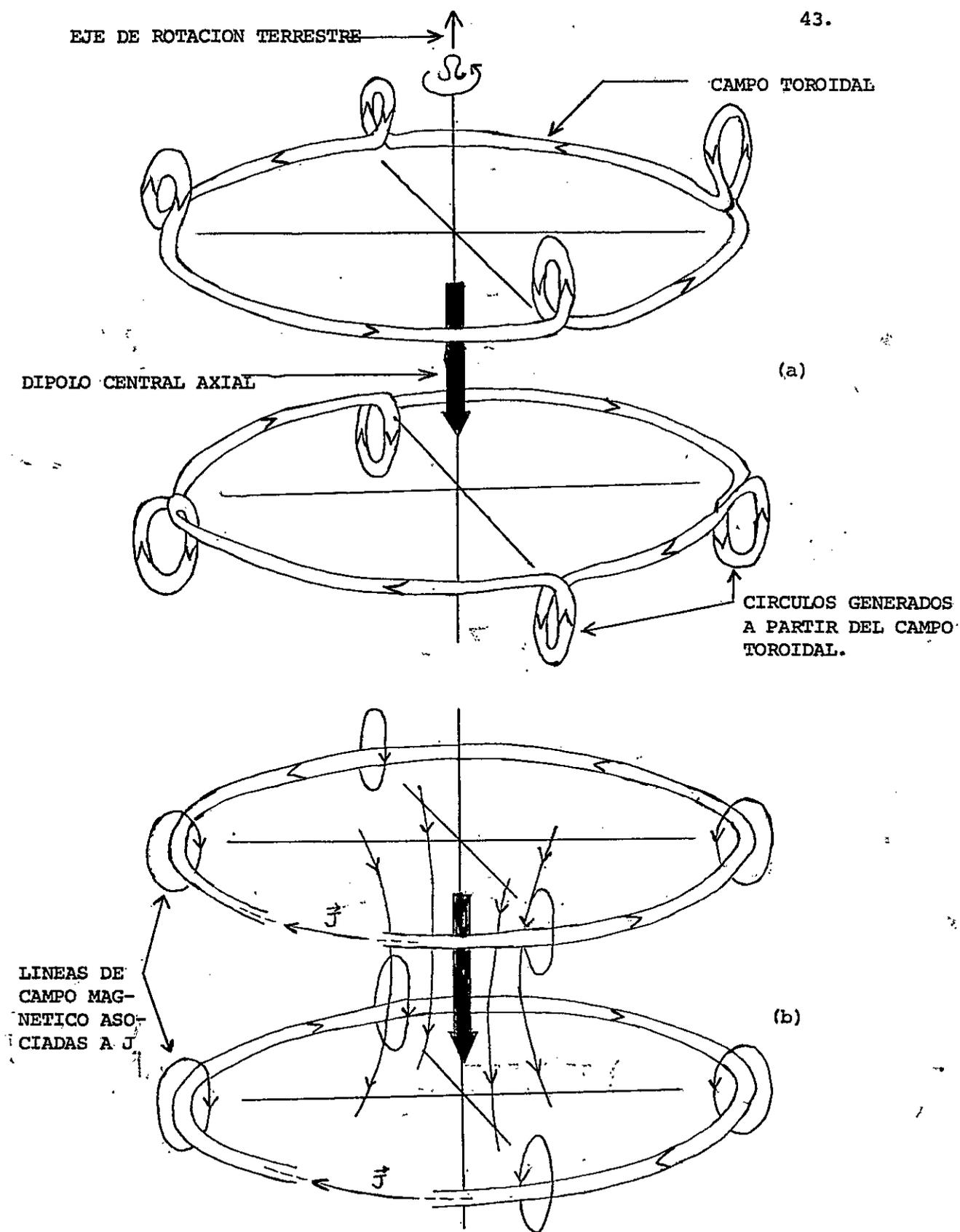


FIGURA 24

- (a) Generación a partir del campo Toroidal, de círculos de fuerza magnética contenidos en planos perpendiculares al plano que contiene al campo Toroidal.
- (b) A los círculos de fuerza magnética generados a partir del campo Toroidal, es posible asimilarlos a aquellos producidos por corrientes circulares ( $J$ ) cuyo sentido es tal que refuerzan el campo dipolar.

En una teoría completa también deben considerarse las energías involucradas en los procesos, cosa sobre la cual nada se ha expuesto aquí. Es decir debería en definitiva resolverse simultáneamente las ecuaciones (3-11) y (3-14). Soluciones completas y autoconsistentes no han sido aún desarrolladas, llegandose en algunos casos incluso a pensar en la no factibilidad del geodinamo. Sin embargo, la teoría del dinamo homogéneo es hasta el momento la más plausible.

Algo que no debe olvidarse es que cualquier teoría acerca del origen del campo magnético terrestre debería explicar sus inversiones. A este respecto se han hecho varios intentos, dentro de los cuales incluso están algunos que no corresponden a dinamos homogéneos propiamente tales, sino más bien dinamos comunes pero que presentan características singulares (ver apéndice E). Un muy buen resumen acerca de los intentos tendientes a explicar las inversiones del campo geomagnético es dado por J.A. Jacobs<sup>[4]</sup>. En estos intentos se trata de dar explicación a las inversiones mezclando elementos del dinamo homogéneo con una u otra idea, pero la explicación última casi siempre está sujeta al formalismo que encierra el geodinamo y las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

A P E N D I C E    A

---

Analisis Dimensional de la Ecuación Hidrodinámica de Fuerzas para el Fluido Terrestre en Movimiento.-

Consideremos la ecuación (3-14)

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} + 2\rho\Omega \times \vec{v} - \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \vec{F}_v = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}w, \quad (A-1)$$

La dificultad matemática que ella encierra, hace que un análisis dimensional que arroje el orden de magnitud relativa de sus términos, sea importante para poder entenderla y vislumbrar implicaciones que contiene. Con el objeto de estimar el orden de las magnitudes de los diferentes términos del miembro derecho de (A-1), se reemplazará  $\vec{v}$  por  $L^{-1}$  y  $\partial/\partial t$  por  $V/L$  donde  $V$  y  $L$  son valores típicos en el fluido, de una velocidad y distancia respectivamente. El análisis dimensional de (A-1) se resume en la Tabla A-1. De ésta tabla parece seguro que la fuerza de viscosidad y de inercia son ignorables frente a la fuerza de Coriolis.

T A B L A    A-1

|                        | Fuerza de Inercia                                                         | Fuerza de Coriolis           | Fuerza de Viscosidad           | Fuerza electromagnética                                |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Término en la ecuación | $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ | $2\rho\Omega \times \vec{v}$ | $\eta \nabla^2 \vec{v}$        | $\frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$ |
| Orden de Magnitud      | $\frac{v^2}{L}$                                                           | $2\rho\Omega v$              | $\frac{\eta}{L^2}$             | $\frac{B^2}{L\mu}$                                     |
| Valor Numérico         | $10^{-8}$                                                                 | $1,4 \times 10^{-3}$         | $10^{-6} \rightarrow 10^{-18}$ | $2,5 \times 10^{-5}$                                   |

$L \approx 10^6$  m, que es el orden de magnitud del radio del núcleo.

$v = 10^{-3}$  m/seg. (valor promedio de la deriva hacia el oeste extrapolado al núcleo).

$$\rho = 10^4 \text{ Kg/m}^3$$

$\Omega = 7 \times 10^{-5}$  Radianes/seg (velocidad angular de rotación de la Tierra).

$B = 5 \times 10^{-3}$  M.K.S. (50 gauss).

$\mu = 10^{-6}$  M.K.S. (aproximadamente su valor en el vacío).

El valor de  $\eta$  es difícil de estimar. Los valores propuestos se hayan en el rango  $10^{-3} < \eta < 10^9$  Kg/seg x m. El último es ciertamente un extremo superior y parece probable que  $\eta < 10^4$  Kg/seg x m.

\*\*\*\*\*

#### A P E N D I C E B

Modos de Decaimiento libre del Campo Electromagnético en el Núcleo Terrestre.<sup>[9]</sup>

Se considera aquí un núcleo terrestre dentro del cual  $\vec{v} = 0$ . En estas condiciones debido a la resistencia eléctrica no nula del fluido del núcleo se tendrá que, un sistema de corrientes y de campos eléctricos y magnéticos inicialmente existente en él, decaerá en el tiempo. Interesa conocer la forma de tal decaimiento así como también estimar el orden de magnitud del tiempo de decaimiento.

Con tal objeto, se considerará una esfera de conductividad uniforme  $\sigma$ , cuyo radio R es el del núcleo terrestre. La esfera conductora estará rodeada por una cáscara de conductividad nula y se asumirá que su permeabilidad  $\mu$  es igual a la de la esfera conductora interior siendo su valor igual al del vacío ( $\mu = 1,26 \times 10^{-6}$  M.K.S.).

Las ecuaciones (3-6a) y (3-6b) para el presente caso toman la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{O}E \quad (B-1a)$$

Y

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{B-1b})$$

Introduciendo el vector potencial  $\vec{A}$  tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{B-2})$$

y haciendo uso de (3-10) se obtiene para  $\vec{A}$  la ecuación

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \quad (\text{B-3})$$

que fuera de la esfera conductora se reduce a

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0 \quad (\text{B-4})$$

Planteando una solución del tipo

$$\vec{A} = \vec{A}_0(\vec{r}) e^{-\Lambda t}, \quad \Lambda \mu \sigma = k^2 \quad (\text{B-5})$$

se obtiene para  $\vec{A}_0(\vec{r})$  la ecuación

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_0 + k^2 \vec{A}_0 = 0 \quad (\text{B-6})$$

Sea  $\psi$  una función escalar, solución de la ecuación

$$\vec{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (\text{B-7})$$

Se pueden entonces construir tres soluciones de (B-6) correspondientes a una solución de (B-7).

La primera solución denotada por  $\vec{U}$  es:

$$\vec{U} = R \vec{\nabla} \psi \quad (\text{B-8})$$

y representa un campo vectorial irrotacional, por lo tanto no da origen a un campo magnético.

Las otras dos soluciones denotadas por  $\vec{T}$  y  $\vec{S}$  son

$$\vec{T} = \vec{\nabla} \times \vec{r} \psi = \vec{\nabla} \psi \times \vec{r} \quad (\text{B-9})$$

y

$$\vec{S} = R\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{r}\psi, \quad (\text{B-10})$$

donde  $\vec{r}$  es el radio vector desde el origen. Las dos últimas soluciones están relacionadas por las identidades

$$\vec{S} = R\vec{\nabla} \times \vec{T}, \quad \vec{T} = (Rk^2)^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{S}, \quad (\text{B-11})$$

Los campos vectoriales arriba introducidos (ecuaciones (B-8) a (B-10)) son conocidos en la literatura por Escaloidal ( $\vec{U}$ ), Toroidal ( $\vec{T}$ ), Poloidal ( $\vec{S}$ ). Para un vector potencial de tipo poloidal, el campo eléctrico es también poloidal, mientras que el magnético resulta toroidal. Para un campo vectorial de tipo toroidal el campo eléctrico también es toroidal y el magnético resulta poloidal. Para determinar finalmente los vectores  $\vec{U}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{S}$  se necesitan soluciones de (B-7) no singulares en el origen y que tiendan a 0 en el infinito. Tomando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  con origen en el centro de la esfera conductora, la soluciones buscadas son [16]

$$\psi_{sn}^m = \text{const} \times r^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{sn} r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad r \leq R \quad (\text{B-12a})$$

y

$$\psi_{sn}^m = \text{const} \times r^{-n-1} Y_n^m(\theta, \phi), \quad r > R \quad (\text{B-12b})$$

donde  $J_{n+\frac{1}{2}}$  es una función de Bessel regular con índice semientero e  $Y_n^m(\theta, \phi)$  es un armónico esférico que dará la dependencia angular. Para las diferentes componentes de los campos vectoriales  $\vec{T}$  y  $\vec{S}$  se encuentra que

$$T_r = 0, \quad T_\theta = (\text{sen}\theta)^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad T_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (\text{B-13})$$

y

$$S_r = -(R/r \text{sen}\theta) \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen}\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \quad (\text{B-14})$$

=  $n(n+1)R\psi/r$  (Para el armónico de orden  $n$ ),

$$S_\theta = (R/r) \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r \partial \theta}, \quad S_\phi = (R/r \text{sen}\theta) \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r \partial \phi}.$$

Supongamos ahora el vector potencial  $\vec{A}$  es toroidal, esto es

$$\vec{A}_{sn}^m = c_{sn}^m \vec{T}_{sn}^m e^{-\Lambda_{sn} t}, \quad r \leq R \quad (\text{B-15a})$$

$$\vec{A}_{sn}^m = C_{sn}^m \vec{T}_{sn}^m e^{-\Lambda_{sn} t}, \quad r > R \quad (\text{B-15b})$$

con

$$\Lambda_{sn} = \frac{k^2 sn}{\mu\sigma}$$

Luego se tiene

$$\vec{B}_{sn}^m = \frac{c_{sn}^m}{R} \vec{S}_{sn}^m e^{-\Lambda_{sn} t}, \quad (\text{B-16a})$$

$$\vec{E}_{sn}^m = c_{sn}^m \Lambda_{sn} \vec{T}_{sn}^m e^{-\Lambda_{sn} t} \quad (\text{B-16b})$$

para  $r \leq R$  y

$$\vec{B}_{sn}^m = \frac{C_{sn}^m}{R} \vec{S}_{sn}^m e^{-\Lambda_{sn} t}, \quad (\text{B-17a})$$

$$\vec{E}_{sn}^m = C_{sn}^m \Lambda_{sn} \vec{T}_{sn}^m e^{-\Lambda_{sn} t} \quad (\text{B-17b})$$

para  $r > R$ .  $c_{sn}^m$  y  $C_{sn}^m$  son constantes a determinar a partir de las condiciones de borde. En las ecuaciones (B-15) a (B-17) se debe tener presente, que los vectores  $\vec{S}$  y  $\vec{T}$  se derivarán a partir de (B-12a) o (B-12b) según  $r$  sea menor o mayor que  $R$  respectivamente.

Habiendo asumido que no hay discontinuidad de  $\mu$  en  $r = R$  las condiciones de borde implican continuidad de  $B_r, B_\theta, B_\phi, E_\theta, E_\phi$  para  $r = R$ . Dado que  $E_r = 0$ , no se requiere condición de borde para esta componente. Para satisfacer las condiciones de borde se deberá hacer que ésta se cumplan entre los campos eléctricos o magnéticos que muestren igual conjunto de índices. Usando (B-13) y (B-14) la continuidad de  $B_r, E_\theta, E_\phi$  implican que

$$C_{sn}^m = C_{sn}^m R^{(n+\frac{1}{2})} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{sn}R), \quad (\text{B-18})$$

y la continuidad de  $B_\theta$  y  $B_\phi$  que

$$C_{sn}^m \frac{d}{dr} (r^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{sn}r)) \Big|_{r=R} = C_{sn}^m n R^{-n-1}. \quad (\text{B-19})$$

Combinando (B-17) y (B-18) se deduce que

$$\frac{d}{dr} (r^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{sn}r)) \Big|_{r=R} + n R^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{sn}R) = 0, \quad (\text{B-20})$$

ecuación que junto con

$$\frac{v}{x} J'_v(x) + J'_v(x) = J_{v-1}(x)$$

da para los  $k_{sn}$  la condición

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_{sn}R) = 0. \quad (\text{B-21})$$

Siendo  $x_{sn}$  la  $s$ -ésima raíz de  $J_{n-\frac{1}{2}}$ , se tendrá entonces que la vida media del modo de índices  $s, n$  será

$$\Lambda_{sn}^{-1} = \frac{R^2 \mu \sigma}{x_{sn}^2}. \quad (\text{B-22})$$

La vida media más larga corresponderá al menor  $x_{sn}$  y será entonces la menor raíz de  $J_{\frac{1}{2}}$  ( $n=1$ ).  $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{2/\pi} \sin x / \sqrt{x}$  y por lo tanto tiene raíces en  $x = s\pi$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$ . La vida media más larga es

$$\Lambda_{11}^{-1} = \frac{R^2 \mu \sigma}{\pi^2}. \quad (\text{B-23})$$

Asumiendo ahora  $\vec{A}$  y  $\vec{E}$  poloidales y por lo tanto  $\vec{B}$  toroidal, se puede encontrar un segundo sistema de soluciones, sin embargo, al

tratar de satisfacer las condiciones de borde, estas no pueden ser simultaneamente cumplidas. Otra solución se consigue asumiendo que dentro de la esfera conductora  $\vec{A}$  es de tipo poloidal y fuera de ella es de tipo escaloidal, con lo cual  $\vec{B}$  es nulo en el exterior. En este caso la continuidad de  $\vec{B}$  da como condición para los  $k_{sn}$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(k_{sn} R) = 0, \quad (B-24)$$

siendo entonces las vidas medias correspondientes a los diferentes modos, del mismo orden que los ya encontrados. El valor correspondiente a (B-23) sigue siendo el mayor. Al querer satisfacer las condiciones de borde para  $\vec{E}$ , se ve que hay inconsistencias que sin embargo, son de segundo orden en el despreciado término de corrientes de desplazamiento (ver referencia 11 paginas 821-822).

\*\*\*\*\*

#### A P E N D I C E C

Consideraciones acerca de un Fluido Conductor en el cual  $R_m$  es Grande\*.-

Cuando  $R_m$ , el "número magnético de Reynolds", es grande la interacción entre los campos electromagnéticos y un fluido conductor en movimiento, puede en primera aproximación ser analizada mediante las ecuaciones:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{V} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (C-1)$$

y

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (C-2)$$

---

\* Ver referencia 11, paginas 827-828 y referencia 1, paginas 30-31.

Estas ecuaciones son exactas en el caso límite  $R_m \rightarrow \infty$  que corresponde también al caso de un fluido sin resistividad eléctrica. Se demostrarán dos útiles teoremas al respecto. El primer teorema es obtenido integrando la ecuación (C-1) en una superficie  $S$  de forma arbitraria que tiene por borde una curva  $C$  enteramente localizada dentro del fluido. Procediendo a tal integración y empleando el teorema de Stokes, se obtiene que:

$$\left(\partial/\partial t\right) \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{c} = -\int_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{c}),$$

de donde se concluye que

$$\left(\partial/\partial t\right) \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{c}) = (d/dt) \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (C-3)$$

El operador  $(d/dt)$  representa la "derivada convectiva" que nos da la razón de cambio cuando la superficie y el contorno se mueven con el fluido. El flujo del campo magnético a través de un circuito que se mueve junto con las partículas del fluido; es constante en el tiempo.

El segundo teorema se obtiene al integrar (C-1) sobre un volumen arbitrario  $V$ , dentro del fluido cuyo borde es una superficie cerrada  $S$ . Se tiene que:

$$\left(\partial/\partial t\right) \int_V \vec{B} \, dV = \int_V \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \, dV = \int_S d\vec{S} \times (\vec{v} \times \vec{B}),$$

ecuación que con ayuda de la identidad vectorial

$$\vec{A} \times (\vec{D} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{D} - (\vec{A} \cdot \vec{D})\vec{C},$$

toma la forma

$$\left(\partial/\partial t\right) \int_V \vec{B} \, dV + \int_S \vec{B} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_S \vec{v} (\vec{B} \cdot d\vec{S}).$$

esta última ecuación puede ser escrita como:

$$(d/dt) \int_V \vec{B} dV = \int_S \vec{v} (\vec{B} \cdot d\vec{s}). \quad (C-4)$$

Un cierto volúmen dentro del fluido y solidario a las partículas de éste, variará de posición y de forma al transcurrir el tiempo. Por medio de la ecuación (C-4), es en principio posible seguir la evolución del campo magnético dentro de tal volúmen.

Teniendo en mente estos resultados, se considerará un fluido conductor que llena todo el espacio y que entre los planos  $y = 0$  e  $y = L$ , presenta un movimiento en la dirección  $\hat{x}$  que muestra un gradiente lineal de velocidad en la dirección  $\hat{y}$ . En  $t = 0$  hay un campo magnético uniforme en la dirección  $\hat{y}$ ,  $B_0 \hat{y}$ .

Imaginemos un volúmen solidario a las partículas del fluido que en  $t = 0$  coincide con un paralelepípedo rectangular que tiene un vértice en el origen y sus lados de dimensiones  $A, L, C$ , coincidentes con los ejes  $x, y, z$  respectivamente (ver figura 1-C). Al transcurrir el tiempo el volúmen se irá deformando llegando a ser para  $t = \Delta t$ , el representado en la figura 1-C con líneas punteadas. En  $t = 0$ , por el circuito OLPB el flujo del campo magnético es cero.

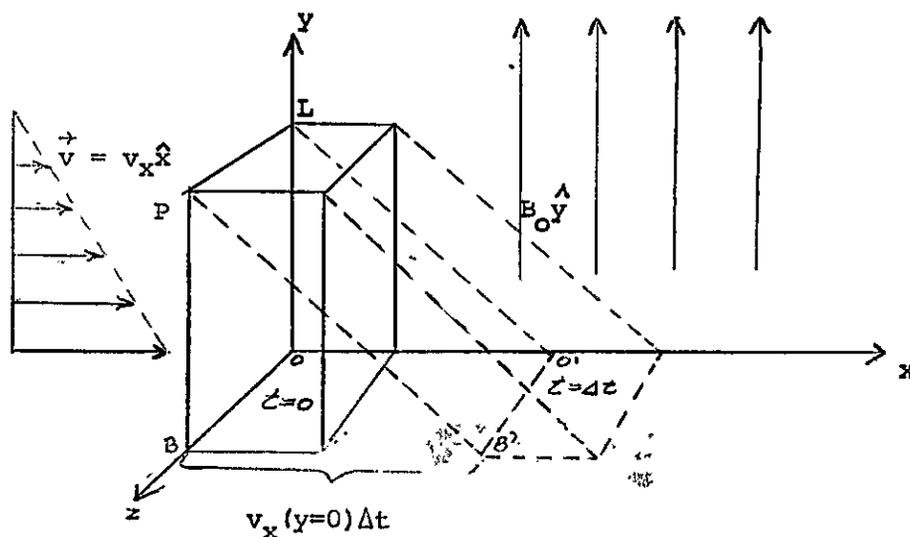


FIGURA 1-C

En  $t = \Delta t$ , éste circuito pasará a ser el circuito  $O'LPB'$  y en virtud de (C-3) el flujo del campo magnético a través de éste último seguirá siendo nulo. Entonces, la dirección del campo entre  $y = 0$  e  $y = L$  seguirá a la de la línea  $\overline{O'L}$  o  $\overline{B'P}$ . En adición al campo  $B_0 \hat{y}$ , es necesario entonces otro de dirección  $\hat{x}$ ,  $B_x \hat{x}$ , tal que

$$B_x = \frac{-v_x(y=0)\Delta t B_0}{L} \quad (C-5)$$

A esta misma conclusión se llega aplicando (C-4) al volumen que inicialmente es un paralelepípedo rectangular, considerando que por la cara  $O'PLB'$  y por la paralela a ésta así como también por las caras perpendiculares a  $\hat{z}$ , el flujo del campo magnético  $\vec{B} = B_0 \hat{y} + B_x \hat{x}$  es 0. Aplicando (C-4), entonces se tiene que:

$$ALB \frac{dB_x}{dt} = -v_x(y=0) B_0 AB, \quad (C-6)$$

que integrandola con la condición que para  $t = 0$   $B_x = 0$ , da nuevamente el resultado (C-5). Para las regiones donde  $\vec{v} = 0$ , el campo magnético no se altera y coincide con el campo inicial  $B_0 \hat{y}$ .

Las líneas de campo inicialmente rectas, comenzarán a ser arrastradas como si estuvieran sujetas al fluido y es generado un campo magnético adicional en la dirección  $\hat{x}$ , cuya magnitud crece indefinidamente en el tiempo. Es decir, se tiene entonces que energía es continuamente transferida desde el fluido en movimiento hacia el campo magnético. La ecuación (3-13) así como el primer término del miembro derecho de (3-11), implican amplificación del campo a partir del fluido en movimiento.

A P E N D I C E    D

---

Un Problema de Inducción Electromagnética en una Esfera que Rota.-

Se darán aquí, algunos detalles del problema que se consideró en la figura 20. Siguiendo a E.C. Bullard<sup>[3]</sup>, consideremos en la ecuación (3-11) la velocidad  $\vec{v}$  como la debida a una rotación uniforme, esto es:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} = \omega \hat{z}, \quad (D-1)$$

con lo cual la ecuación (3-11) toma la forma (usando coordenadas polares  $(r, \theta, \phi)$ )

$$\nabla^2 \vec{B} = -\nabla \times \nabla \times \vec{B} = \mu\sigma \left( \omega \frac{\partial \vec{B}}{\partial \phi} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (D-2)$$

Para encontrar una solución usemos que

$$\vec{B} = B_1(r, \theta) e^{im\phi} e^{-\gamma t}, \quad (D-3)$$

donde  $m$  es un entero y  $\gamma$  una constante en general compleja. Sustituyendo (D-3) en (D-2) se obtiene

$$(-\nabla \times \nabla \times + k^2) \vec{B} = 0, \quad (D-4a)$$

$$k^2 = \mu\sigma (\gamma - iam). \quad (D-4b)$$

$k$  puede ser elegida como una constante ajustable de acuerdo a las condiciones de borde del problema. En un problema de inducción por un campo magnético fijo, como el que se considerará en este apéndice, las soluciones serán estacionarias y por lo tanto,  $\gamma$  debe ser elegida como 0.

Las soluciones de D-4a) que también satisfacen (3-6c) son bien conocidas<sup>[7]</sup> y son

$$\vec{B}_T = \nabla \psi \times \vec{r}, \quad (D-5a)$$

$$\vec{B}_S = k^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{B}_T, \quad (D-5b)$$

donde

$$\psi = (kr)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}} (kr) P_n^m(\theta) e^{im\phi} e^{-\gamma t} \quad (D-6a)$$

o

$$\psi = (kr)^{-\frac{1}{2}} Y_{n+\frac{1}{2}} (kr) P_n^m(\theta) e^{im\phi} e^{-\gamma t} \quad (D-6b)$$

cuando  $k \neq 0$ ,  $\gamma = -$

$$\psi = \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\theta) e^{im\phi} e^{-\gamma t} \quad (D-7a)$$

o

$$\psi = r^n P_n^m(\theta) e^{im\phi} e^{-\gamma t} \quad (D-7b)$$

para  $k = 0$ .

$P_n^m(\theta)$  son las funciones asociadas de Legendre,  $J_{n+\frac{1}{2}}$  y  $Y_{n+\frac{1}{2}}$  funciones de Bessel regulares e irregulares con índice semientero respectivamente\*. Los subíndices T y S en las ecuaciones (D-5a) y (D-5b), hacen alusión a los campos de tipo Toroidal (T) y poloidal (S) introducidos en el apéndice B.

El campo magnético dipolar central del problema que se trata aquí, es un caso particular de los campos dados por la ecuación (D-5b). La solución general del problema en cuestión además de incluir la correspondiente al campo dipolar central, contendrá algunas otras dadas por (D-5a) o (D-5b) de modo que se puedan hacer cumplir las condiciones de borde del problema. Las condiciones de borde son:

- 1) En las interfaces  $r = a$  y  $r = b$ , el campo  $\vec{B}$  es continuo.
- 2) En  $r = a$  y  $r = b$  las componentes tangenciales de  $\vec{E}$ , es decir,  $E_\theta$  y  $E_\phi$  deben ser continuas.

---

\*  $Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = J_{-(n+\frac{1}{2})}(x) (-1)^{n+1}$

3) La componente radial de la corriente es cero en  $r = a$ . Luego

ya que  $\vec{v} = 0$  allí se debe tener  $E_r(r = a) = 0$ .

Para el campo  $\vec{B}$  se plantea la siguiente solución general:

$$B_r = - \frac{2M}{r^3} \cos \theta, \quad (D-8a)$$

$$B_\theta = - \frac{M}{r^3} \sin \theta, \quad r \leq b \quad (D-8b)$$

$$B_\phi = 2A_1 \left(\frac{r}{b}\right)^2 \sin 2\theta, \quad (D-8c)$$

$$B_r = - \frac{2M}{r^3} \cos \theta, \quad (D-9a)$$

$$B_\theta = - \frac{M}{r^3} \sin \theta, \quad b < r \leq a \quad (D-9b)$$

$$B_\phi = \left[ 2A_2 \left(\frac{r}{b}\right)^2 - 3A_2' \left(\frac{b}{r}\right)^3 \right] \sin 2\theta, \quad (D-9c)$$

$$B_r = - \frac{2M}{r^3} \cos \theta, \quad (D-10a)$$

$$B_\theta = - \frac{M}{r^3} \sin \theta, \quad r \geq a \quad (D-10b)$$

$$B_\phi = 0 \quad (D-10c)$$

Las 2 primeras ecuaciones de cada grupo, se deben al dipolo axial central de magnitud  $M$ .  $A_1, A_2, A_2'$  son constantes a determinar a partir de las condiciones de borde. El campo eléctrico  $\vec{E}$  se obtiene de

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times \vec{B}^*, \quad (D-11)$$

\* Para  $r \geq a$   $\vec{v}$ ,  $\nabla \times \vec{B}$  y  $\sigma$  valen cero. Con el objeto de hacer cumplir las condiciones de borde para el campo eléctrico en  $r = a$ , es posible entonces elegir para  $r > a$  cualquier campo eléctrico asociado a los campos magnéticos dados por (D-5a) y (D-5b)

luego para el se tiene:

$$E_r = - \frac{\omega M}{r^2} \text{sen}^2 \theta + \frac{4A_1 r}{\mu \sigma b^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (\text{D-12a})$$

$$E = + \frac{\omega M}{r^2} \text{sen} 2\theta - \frac{6A_1 r}{\mu \sigma b^2} \text{sen} \theta, \quad r \leq b \quad (\text{D-12b})$$

$$E_\phi = 0, \quad (\text{D-12c})$$

$$E_r = \frac{4}{\mu \sigma} \left( \frac{A_2 r}{b^2} - A'_2 \frac{3 b^3}{2 r^4} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (\text{D-13a})$$

$$E = - \frac{6}{\mu \sigma} \left( \frac{A_2 r}{b^2} + \frac{A'_2 b^3}{r^4} \right) \text{sen} 2\theta, \quad b \leq r \leq a \quad (\text{D-13b})$$

$$E_\phi = 0, \quad (\text{D-13c})$$

$$E_r = - \frac{6Ab^3}{\mu \sigma r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (\text{D-14a})$$

$$E = - \frac{6Ab^3}{\mu \sigma r^4} \text{sen} 2\theta, \quad r \geq a \quad (\text{D-14b})$$

$$E_\phi = 0 \quad (\text{D-14c})$$

Imponiendo las condiciones de borde se obtiene para  $A, A_1, A_2, A'_2$  el sistema de ecuaciones

$$\frac{\mu \sigma \omega M}{6b} = A_1 - A_2 - A'_2, \quad A_2 = \frac{3}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^5 A'_2,$$

$$2A_1 = 2A_2 - 3A'_2, \quad A_2 = (A - A'_2) \left( \frac{b}{a} \right)^5$$

que al resolverlo da

$$A = -\frac{\mu M \omega}{6b}, \quad A_1 = \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right] \frac{\mu \sigma \omega}{10b},$$

$$A_2 = -\left(\frac{b}{a}\right)^5 \frac{M \omega \mu \sigma}{10b}, \quad A'_2 = \frac{-M \omega \mu \sigma}{15b}.$$

Para los campos eléctricos y magnéticos que satisfacen las condiciones de borde se obtiene finalmente

$$B_\phi = \frac{\mu M \omega}{5b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right) r^2 \sin 2\theta, \quad r \leq b \quad (D-15a)$$

$$B_\phi = \frac{\mu M \omega b^2}{5} \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{a^5}\right) r^2 \sin 2\theta, \quad b \leq r \leq a \quad (D-15b)$$

Para  $r \geq a$   $B_\phi = 0$ . Las componentes  $B_r$  y  $B_\theta$  son para todo valor de  $r$ , las correspondientes al dipolo central.

$$E_r = -\frac{\omega M}{r^2} \sin^2 \theta + \frac{2rM\omega}{5b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right) (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (D-16a)$$

$$E_\theta = \left(\frac{\omega M}{r^2} - \frac{3}{5} \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right] \frac{\omega M r}{b^3}\right) \sin 2\theta, \quad r \leq b \quad (D-16b)$$

$$E_\phi = 0 \quad (D-16c)$$

$$E_r = \frac{2Mb^2 r \omega}{5} \left(\frac{1}{r^5} - \frac{1}{a^5}\right) (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (D-17a)$$

$$E_\phi = \frac{Mrb^2 \omega}{5} \left(\frac{3}{a^5} + \frac{2}{r^5}\right) \sin 2\theta, \quad b \leq r \leq a \quad (D-17b)$$

$$E_\theta = 0, \quad (D-17c)$$

$$E_r = \frac{b^2 M \omega}{r^4} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (D-18a)$$

$$E_\theta = \frac{b^2 M \omega}{r^4} \sin 2\theta, \quad r \geq a \quad (D-18b)$$

$$E_\phi = 0 \quad (D-18c)$$

La corriente  $\vec{J}$  se obtiene a partir de (3-7). Para  $r > a$   $\vec{J} = 0$ ,  
 $\vec{J} = \sigma E$  para  $b \leq r \leq a$  y para  $r < b$  se tiene que

$$J_r = \frac{2\sigma\omega r M}{5b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5 (3 \cos^2 \theta - 1)\right) \quad (D-19a)$$

$$J_\theta = \frac{-3Mr\sigma\omega}{5b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^5\right) \sin 2\theta, \quad (D-19b)$$

$$J_\phi = 0. \quad (D-19c)$$

\*\*\*\*\*

#### A P E N D I C E E

---

Modelo de dos Dinamos Mecánicos acoplados que simula la inversión del Campo Geomagnético.-

Rikitake<sup>[19]</sup> discutió el caso de dos discos (dinamos) acoplados en los cuales la corriente de un disco da energía a la bobina del otro (ver figura E.1). El movimiento de tales dinamos es mantenido

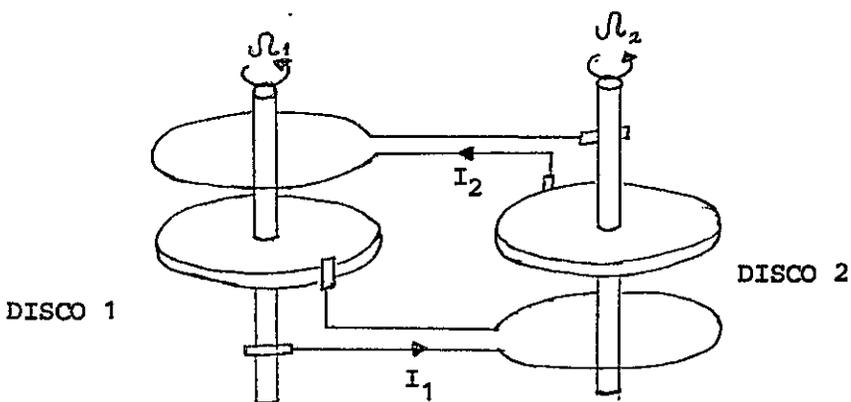


FIGURA E.1

a pesar de la pérdida de energía debida a la resistencia eléctrica de los discos y bobinas, por torques idénticos de magnitud  $G$ . Las ecuaciones que gobiernan las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  y las velocidades angulares  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  son

$$L\dot{I}_1 + RI_1 = M\Omega_1 I_2, \quad (\text{E-1})$$

$$L\dot{I}_2 + RI_2 = M\Omega_2 I_1, \quad (\text{E-2})$$

$$C\dot{\Omega}_1 = G - MI_1 I_2, \quad (\text{E-3})$$

$$C\dot{\Omega}_2 = G - MI_1 I_2, \quad (\text{E-4})$$

donde  $L$  y  $R$  son la autoinductancia y la resistencia asociada con cada dinamo,  $M$  es la inductancia mutua,  $C$  el momento de inercia de cada dinamo respecto de su eje de rotación y  $G$  es el torque constante que mantiene la rotación de cada disco en torno a su eje. Las ecuaciones (E-1) a (E-4) pueden ser puestas en forma adimensional midiendo el tiempo  $t$  en unidades de  $(CL/GM)^{1/2}$ , la corriente en unidades de  $(G/M)^{1/2}$  y la velocidad angular en unidades de  $(GL/CM)^{1/2}$ . Escribiendo

$$I_i = \left(\frac{G}{M}\right)^{1/2} X_i, \quad \Omega_i = \left(\frac{GL}{CM}\right)^{1/2} Y_i, \quad (i = 1, 2) \quad (\text{E-5})$$

las ecuaciones (E-1) a (E-4) adquieren la forma

$$\dot{X}_1 + \mu X_1 = Y_1 X_2, \quad (\text{E-6})$$

$$\dot{X}_2 + \mu X_2 = Y_2 X_1, \quad (\text{E-7})$$

$$\dot{Y}_1 = \dot{Y}_2 = 1 - X_1 X_2, \quad (\text{E-8})$$

donde

$$\mu = (CR^2/GLM)^{1/2}. \quad (\text{E-9})$$

A las ecuaciones (E-6) a (E-8) no se les conoce solución analítica. Muchas integraciones numéricas de éstas ecuaciones han sido llevadas a cabo por diferentes autores incluyendo por supuesto a Rikitake. De la ecuación (E-8) se concluye que  $Y_1 - Y_2 = A$  (constante), es decir, la diferencia de velocidades angulares es constante. La figura E.2 ilustra la conducta del sistema para  $\mu = 1$ ,  $A = 3.75$ <sup>[20]</sup>. En el modelo aquí mostrado es clara la presencia de inversiones, pero es muy difícil e incierto extrapolar al núcleo terrestre. La conducta de éste modelo depende mucho del parámetro  $\mu$ . Para extrapolar al núcleo terrestre se ha estimado que el valor de  $\mu$  debiera tomarse entre  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$ . Las dificultades de computación, hacen difícil obtener soluciones para valores de  $\mu$  menores que  $10^{-2}$ , pero todo indica que las soluciones darían inversiones con períodos de solo unos pocos años. El modelo de los dinamos acoplados estaría demostrando la posibilidad de inversiones, pero deben hacerse una serie de consideraciones irreales para que sus propiedades puedan ser trasladadas al dinamo geomagnético.

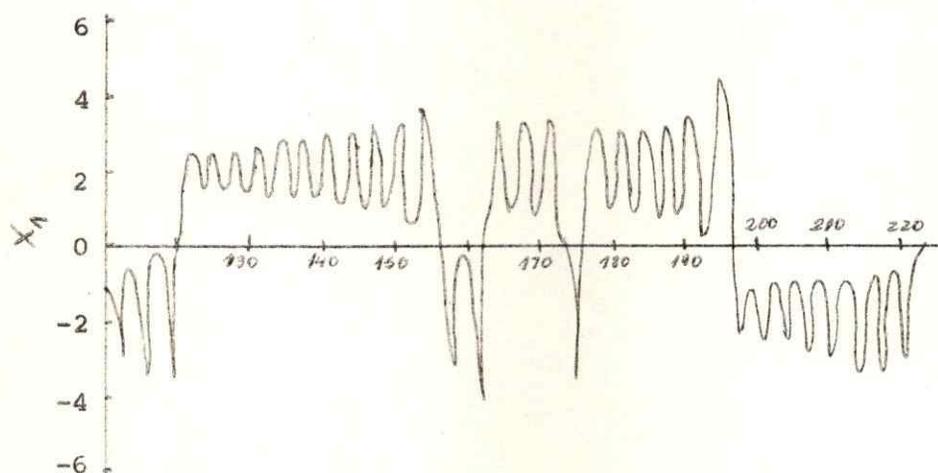
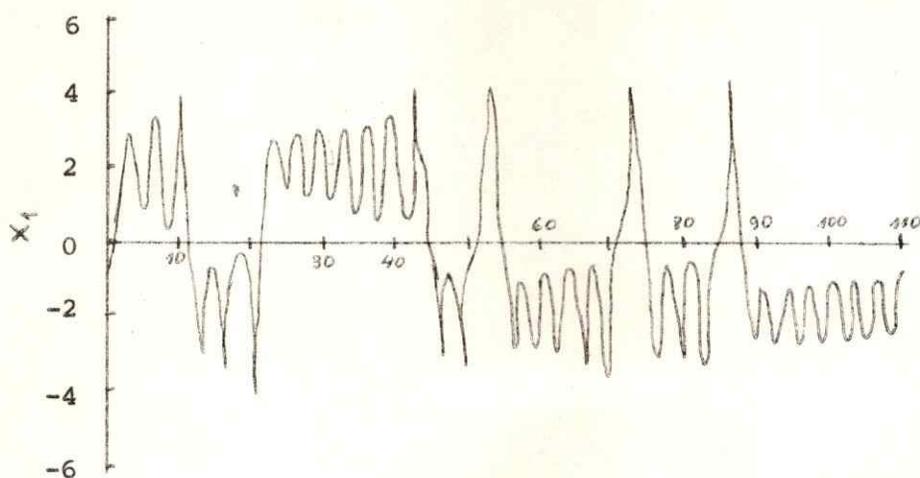


FIGURA E.2

Evolución típica de  $X_1$  como una función del tiempo para  $\mu = 1$ ,  $A = 3.75$ .  
Las inversiones tienen lugar en  $t = 11, 21, 44, 51, 53, 71, 74, 85$  etc.

UNIV. DE CHILE  
SEDE SANTIAGO ORIENTE  
BISBUCA CENTRAL

R E F E R E N C I A S

---

- 1).- Elsasser. W.M. (1950), The Earth's Interior and Geomagnetism  
Revs. Mod. Phys. 22, 1.
- 2).- Sir Edward Bullard, Understanding the Earth, Capítulo IV.  
The Earth's Magnetic Field and its Origin.
- 3).- J.A. Jacobs, The Earth's Core and Geomagnetism. (Pergamon,  
New York, 1963).
- 4).- J.A. Jacobs, Phys. Report 23 (1976) 184-225.
- 5).- J.A. Jacobs, R.D. Russell, J. Tuzo Wilson, Physics and Geology  
(McGraw-Hill, New York, 1959).
- 6).- Landau y Lifshitz, Teoría de la Elasticidad, E.D. Reverte S.A.  
1969, Cap. III.
- 7).- F. Birch, "Density and Composition of the mantle and Core",  
J. Geophys Res., Vol. 69, pág. 4377-4388, 1964.
- 8).- C.L. Pekeris y Y. Accad, Phil. Trans. Roy. Soc. A273 (1972), 237.
- 9).- Elsasser W.M. Phys. Rev. 69 (1946).
- 10).- Elsasser W.M. Phys. Rev. 70 (1946) 202.
- 11).- Elsasser W.M. Phys. Rev. 72 (1947) 821.
- 12).- E.C. Bullard, Proc. Roy. Soc. A197 (1949), 433.
- 13).- E.C. Bullard, Proc. Roy. Soc. A199 (1949), 413.
- 14).- Luis A. Santaló, Vectores y Tensores con sus aplicaciones, Ed.  
Universitaria de Buenos Aires, pág. 284.
- 15).- Elsasser W.M. Phys. Rev. 95 (1954), I.
- 16).- J.D. Jackson, Electrodinámica Clásica, Ed. Alhambra.
- 17).- Lamb. H. 1881, Proc. Lond. Math. Soc. 13, 51-66.
- 18).- Parker E.N. Astrophys. J. 122, 293-314 (1955).
- 19).- T. Ribitake, Proc. Camb. Phil. Soc. 54 (1958), 89.
- 20).- A.E. Cook and P.H. Robert Proc. Camb. Phil. Soc. 68 (1970), 547.