UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

FORMULACION COVARIANTE DEL GAUGE DE RADIACION

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN CIENCIAS CON MENCION EN FISICA

Aliro Guillermo Valdes Hurtado

SANTIAGO - CHILE

1976

A Olga y Aliro,

mis queridos padres.

UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS

PROFESOR GUIA: DR.JUAN WOLFES.

PROFESOR PATROCINADOR: DR.JORGE KRAUSE.

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO
EN CIENCIAS CON MENCION EN FISICA.

ALIRO VALDES HURTADO.

- 1976 -

Í N D I C E.-

****

INTRODUCCION.-

La presente tesis tiene por objeto analizar algunos aspectos de las transformaciones de gauge que tienen relación con los gauges de Lorentz y de Coulomb. Como resultado se encuentra una formulación covariante del gauge de Coulomb bajo un grupo de transformaciones isomorfo al grupo de Lorentz el cual es dado explícitamente.

Reducimos nuestro análisis a una región del espacio-tiempo libre de cargas y corrientes; las ecuaciones de Maxwell son, en este caso,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \tag{4}$$

La forma de las ecuaciones (3) y (4) nos permite introducir los potenciales $\vec{A}$ y ϕ de tal modo que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{5a}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad . \tag{5b}$$

En términos de estos potenciales, las ecuaciones (3) y (4) se satisfacen idénticamente. La ecuación (1) deviene en

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\phi - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \tag{6}$$

y la ecuación (2) en

$$- \nabla^2\phi - \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad (7)$$

Por otra parte, la transformación

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \qquad (8\text{-a})$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{C}\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (8\text{-b})$$

deja invariante las expresiones (5). La invariancia de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ bajo las transformaciones (8) se conoce como "invariancia de gauge" y a las transformaciones (8), como "transformaciones de gauge".

Se tiene además, que la relación $\vec{B} = \nabla x \vec{A}$ específica la parte de $\vec{A}$ que tiene un rotor igual a $\vec{B}$, quedando indeterminada la divergencia de $\vec{A}$. De esta manera es posible ajustar la divergencia del potencial vector a un valor conveniente. Uno de los valores posibles para la divergencia de $\vec{A}$ está dado por

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{C}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad , \qquad (9)$$

que es la llamada condición de Lorentz sobre los potenciales. Esta condición nos permite desacoplar las ecuaciones (6) y (7) las cuales devienen en

$$(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\phi = 0 \qquad (10a)$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{A} = 0 \quad . \qquad (10b)$$

Sin embargo aún con la restricción dada por la ecuación (9), los potenciales no quedan completamente determinados ya que la transformación de gauge restringida

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda$$

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

con (11)

$$\nabla^2\Lambda - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$$

preserva la condición de Lorentz si $\vec{A}$ y ϕ la satisfacían inicialmente. De esta manera una familia de potenciales que satisfacen 10 dan los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Todos los potenciales que pertenecen a esta familia se dice que pertenecen al gauge de Lorentz.

En lugar de tomar las divergencia de $\vec{A}$ como en (9) podemos alternativamente imponer

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad (12)$$

lo cual permite también desacoplar las ecuaciones (6) y (7). La ecuación (6) deviene en

$$(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{A} = 0 \qquad (13)$$

y la ecuación (7) queda

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (14)$$

lo que da, para el campo de radiación,

$$\phi = 0 \quad .$$

Si examinamos la posibilidad de realizar la transformación $\vec{A}\to\vec{A}' = \vec{A}+\nabla\Lambda$ vemos que la condición (12) nos impone Λ = cte. De esta manera el potencial vector es único. Un potencial que satisface (12) se dice que pertenece al gauge de Coulomb.

Se observa que, al trabajar con el campo de radiación, las relaciones matemáticas que lo describen son más sencillas al utilizar al gauge de Coulomb que el de Lorentz. Pero al formular la electrodinámica en término de cuadrivectores se pone de manifiesto una deficiencia del gauge de Coulomb; a saber, que no es covariante como el gauge de Lorentz.

En efecto, si definimos

$$A^\mu = (\phi,\vec{A}), \qquad A = \eta_{\mu\nu}A^\nu = (\phi,-\vec{A}) \quad y$$

$$\partial_\mu \equiv (\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t},\nabla) \text{ , donde } \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+,-,-,-) \text{ ,}$$

entonces las ecuaciones (10) se escriben como sigue:

$$\Box\, A^\mu = \partial_\rho\partial^\rho A^\mu = 0 \quad . \tag{15}$$

La condición de Lorentz sobre los potenciales toma la forma

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{16}$$

relación que tiene la misma forma en todos los sistemas inerciales; es decir, esta condición es covariante. La transformación de gauge restringida (11) toma la forma

$$\begin{aligned} A^\mu \to A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu\Lambda \\ \Box\,\Lambda &= 0 \ . \end{aligned} \tag{17}$$

Por otra parte la condición para el gauge de Coulomb no es covariante, ya que en otro sistema inercial la relación $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ se transforma en $\nabla' A'(x') \neq 0$.

Sin embargo si nos situamos en un referencial determinado, vemos que los potenciales que satisfacen el gauge de Coulomb satisfacen también la condición de Lorentz para el campo de radiación ya que si $\phi=0$ y $\vec{A}$ satisface $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

se satisface también con estos potenciales. Esto quiere decir que el potencial que satisface el gauge de Coulomb, pertenece a la familia de potenciales del gauge de Lorentz. Por otra parte, todos los potenciales que pertenecen al gauge de Lorentz están relacionados entre sí por una transformación restringida de gauge.

En el capítulo I se analizan en detalle los aspectos más interesantes en relación a las transformaciones de gauge señaladas, y puesto que para el campo electromagnético libre tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ son solenoidales, es decir, con divergencia nula, las amplitudes de Fourier de los campos son ortogonales a la dirección de propagación:

$$\vec{E}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0 \quad .$$

Por este motivo es de esperar que los aspectos fundamentales en relación a los campos libres se pongan de manifiesto al desarrollar el análisis en el espacio de los momentos.

En efecto se demostrará que en cada sistema de referencia es posible descomponer el cuadripotencial del campo en dos componentes, siendo una de ellas colineal a k^μ y la otra perpendicular a este mismo cuadrivector. Esta descomposición es sugerida por el hecho de que una transformación de gauge (en el gauge de Lorentz) contribuye con un cuadrivector que es colineal a k^μ. Por ello todo el contenido físico está dado por la parte perpendicular a k^μ. La elección adecuada de la función de gauge en la transformación restringida de Lorentz permite tener siempre inicialmente, $A^\mu = (0,\vec{A})$; esto es por supuesto, en un cierto referencial ya que es una propiedad relativa a las componentes. Esta es la parte perpendicular del potencial. De esta manera, el potencial que pertenece al gauge de Coulomb es la parte que genera realmente el tensor de campo en cada sistema de referencia.

Dadas las buenas propiedades de la parte perpendicular del cuadripotencial, se procede en el capítulo II a la determinación de una transformación $\tilde{L}$ (isomorfa a la transformación de Lorentz) que preserva el cuadripotencial del campo como un cuadrivector transversal. Bajo este grupo de transformaciones el gauge de Coulomb es covariante, es decir si $A^\mu=(0,\vec{A})$ es el cuadripotencial del campo en un sistema de coordenadas O, y tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, entonces en un sistema O', $\nabla' \cdot \vec{A}'(x') = 0$ donde

$$A'^\mu(x') = \tilde{L}^\mu{}_\nu A^\nu(x) \;,$$

siendo $\tilde{L}$ la transformación encontrada.

En el apéndice se demuestra explícitamente que las transformaciones $\tilde{L}$ forman un grupo.

I.- REPRESENTACION DEL CAMPO DE RADIACION EN EL ESPACIO-TIEMPO DE LOS MOMENTOS.

A fin de analizar con mayor claridad las ecuaciones de Maxwell y las transformaciones de gauge, vamos a escribir ahora las ecuaciones del campo de radiación en el espacio-tiempo de los momentos, ya que en esta representación las ecuaciones diferenciales se transforman en relaciones algebraicas, siendo posible estudiar sus significados en forma más simple que en el espacio de coordenadas.

Como vimos en la parte introductoria, en el gauge de Lorentz, o sea cuando el cuadripotencial se torna libre de divergencia,

$$A^{\mu}{}_{,\mu}(x) = 0 \qquad (1)$$

las ecuaciones de Maxwell (en ausencia de fuentes) corresponden a las ecuaciones de onda homogéneas:

$$\Box A^{\mu}(x) = 0 \quad . \qquad (2)$$

Sin embargo, para un campo electromagnético dado, el cuadripotencial no está unívocamente determinado, ya que, en efecto, el campo calculado a partir del nuevo potencial,

$$A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) - \psi{}^{,\mu}(x) \qquad (3)$$

es idéntico al campo calculado a partir de $A^{\mu}(x)$. Las ecuaciones (3) determinan las transformaciones de gauge del formalismo covariante. Además, si la función de gauge satisface a su vez la ecuación de ondas homogénea,

$$\Box\psi(x) = 0 \qquad (4)$$

entonces A'_μ satisface también la condición de Lorentz(1).

Este formalismo covariante del campo electromagnético podemos traducirlo al espacio de los cuadrimomentos. Para ello consideramos la representación en modos normales del campo de radiación, es decir, consideremos el paquete de ondas planas

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\ \bar{A}^\mu(k)e^{ikx}. \qquad (5)$$

Si $A^\mu(x)$ satisface la condición (1), entonces su transformada Fourier $\bar{A}^\mu(k)$ debe satisfacer la relación geométrica,

$$k_\mu\bar{A}^\mu(k) = 0\ . \qquad (6)$$

Del mismo modo, la ecuación de onda en el espacio de los momentos deviene en

$$k^2\bar{A}^\mu(k) = 0 \quad . \qquad (7)$$

Puesto que $u\delta(u) = 0$ para todo valor de u, la solución general de la ecuación (7) viene dada por la expresión

$$\bar{A}^\mu(k) = \delta(k^2)f^\mu(k) \quad , \qquad (8)$$

donde el cuadrivector $f^\mu(k)$ no es del todo arbitrario, ya que la condición de Lorentz (6) le impone la relación

$$\delta(k^2)k_\mu f^\mu(k) = 0 \quad , \qquad (9)$$

ecuación que debe satisfacerse para todo cuadrivector de onda k^μ. Para que esto se cumpla debemos escoger $f^\mu(k)$ de tal manera que cuando

$$k^2 = 0 \quad , \qquad k_\mu f^\mu(k) = 0 \quad , \tag{10}$$

puesto que si $k^2 = 0$ entonces $\delta(k^2) = 0$.

De la ecuación (8) vemos que el soporte de $\bar{A}^\mu(k)$ es el cono de luz, es decir, la superficie determinada por $k^2 = 0$. Por otra parte, de la ecuación (10) podemos escribir $|k_0| = |\vec{k}|$, y $k^0 f^0 - \vec{k}\cdot\vec{f} = 0$, de donde se deduce que $(f^0)^2/\vec{f}^2 = \cos^2\theta < 1$ o sea, $(f^0)^2 < \vec{f}^2$. Esto quiere decir que el cuadrivector $f^\mu(k)$ es tipo espacio o tipo luz. Se tiene entonces que

$$f^\mu f_\mu \leqslant 0 \quad . \tag{11}$$

Puesto que $f^\mu(k)$ es tipo luz o tipo espacio, podemos escribir en general

$$f^\mu(k) = \alpha(k) k^\mu + C^\mu(k) \tag{12}$$

donde $k^\mu k_\mu = 0$, $C^\mu C_\mu < 0$ y $k^\mu C_\mu = 0$.

En la figura 1 se ilustra la geometría de estas relaciones; la condición $k^2 = 0$ determina los conos de luz futuro y pasado; la condición $k_\mu f^\mu = 0$ es satisfecha por todos los vectores tipo espacio que están sobre el plano tipo luz tangente a los conos. Si el cuadrivector $f^\mu(k)$ está dado por la expresión (12) entonces se observa que $\alpha(k)$ y $C^\mu(k)$ no están unívocamente determinados aunque sí lo están $\alpha_\parallel(k)$ y $C^\mu_\perp(k)$, que satisfacen

$$f^\mu(k) = \alpha_\parallel(k) k^\mu + C^\mu_\perp(k) \quad , \tag{13}$$

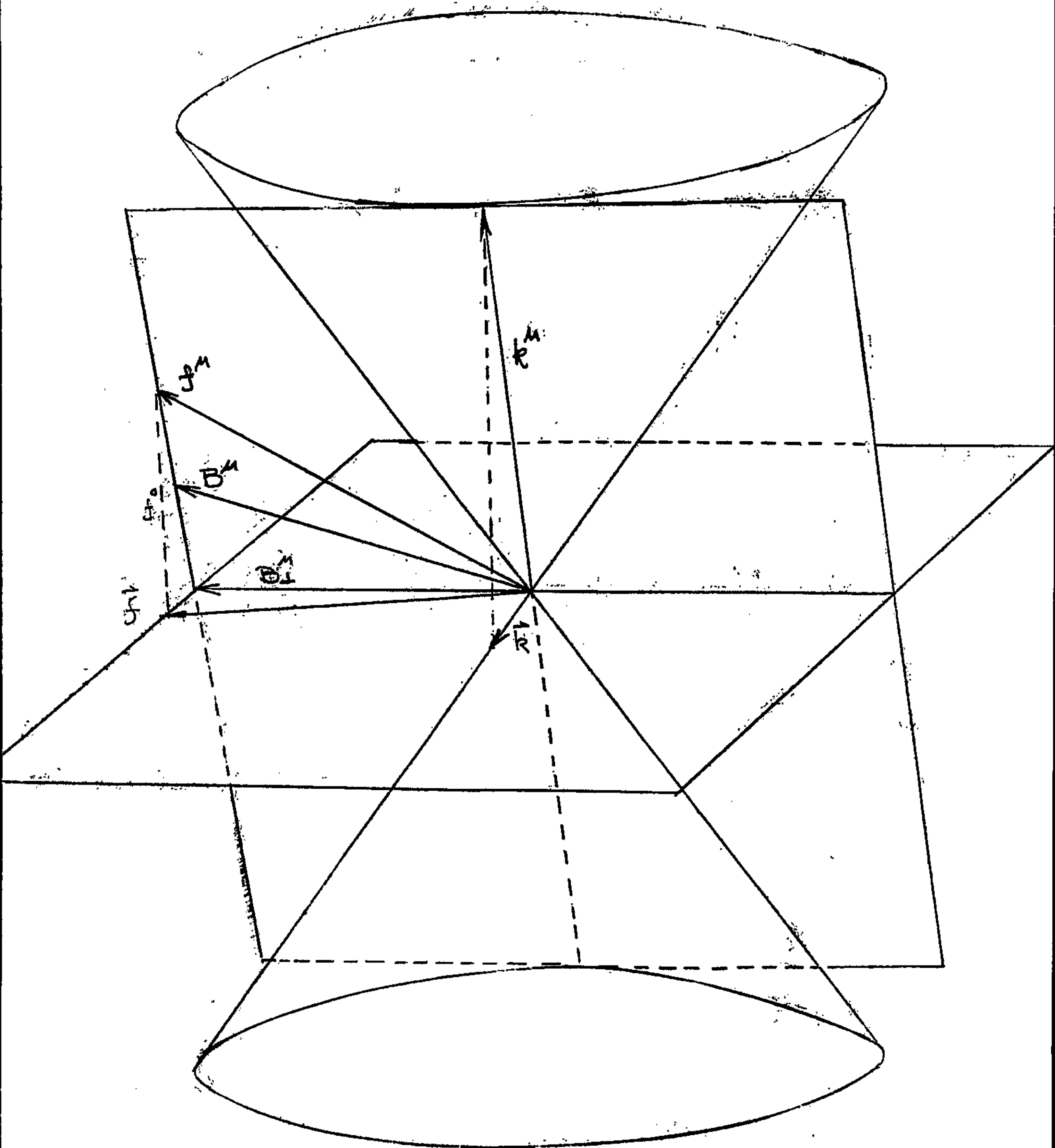


figura 1.-

con $C_\perp^\mu(k) = (0,\vec{C}_\perp(k))$, (14)

donde $\vec{k}\cdot\vec{C}_\perp(k) = 0$. (15)

Podemos ahora estudiar las transformaciones de gauge en el espacio-tiempo de los momentos. La representación en modos normales para el campo escalarr $\psi(x)$ es

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\overline{\Psi}(k)e^{ikx} \ . \qquad (16)$$

La condición que preserva el gauge de Lorentz, ecuación (4), indica que $\overline{\Psi}(k)$ debe satisfacer

$$k^2\overline{\Psi}(k) = 0. \qquad (17)$$

Basta tomar entonces a $\overline{\Psi}(k)$ como

$$\overline{\Psi}(k) = \delta(k^2)\chi(k) \ , \qquad (18)$$

donde $\chi(k)$ es un escalar arbitrario. Para la ecuación (3) podemos escribir

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \psi_{,\mu}(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\delta(k^2)f'_\mu(k)e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\delta(k^2)\{\alpha_{\parallel}(k)_\mu + C^{\perp}_\mu(k) - ik_\mu\chi(k)\}e^{ikx}$$

o sea

$$f'^\mu(k) = (\alpha_\parallel(k) - i\chi(k))k^\mu + C_\perp^\mu(k) \ . \qquad (19)$$

De esta expresión vemos que el vector transversal $C_\perp^\mu$ es invariante gauge; sólo el escalar longitudinal $\alpha_\parallel$ cambia bajo las transformaciones de gauge dadas por las ecuaciones (3) y (4). Escribamos en consecuencia la transformación de gauge del escalar longitudinal,

$$\alpha'_\parallel(k) = \alpha_\parallel(k) - i\chi(k) \ , \qquad (20)$$

y la invarianza gauge del vector transversal,

$$C_{\perp}^{\prime\mu}(k) = C_{\perp}(k) \qquad (21)$$

Este resultado sugiere la siguiente descomposición del cuadripotencial

$$A^{\mu}(x) = A_{\parallel}^{\mu}(x) + A_{\perp}^{\mu}(x), \qquad (22)$$

con

$$A_{\parallel}^{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\delta(k^2)\alpha_{\parallel}(k)k^{\mu}e^{ikx} , \qquad (23)$$

y

$$A_{\perp}^{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\delta(k^2)C_{\perp}^{\mu}(k)e^{ikx} . \qquad (24)$$

Si ahora definimos el escalar

$$A_{\parallel}(x) := \frac{-i}{(2\pi)^2}\int d^4k\delta(k^2)\alpha_{\parallel}(k)e^{ikx} \qquad (25)$$

entonces la ecuación (28) puede escribirse como

$$A_{\parallel}^{\mu}(x) = A_{\parallel}^{,\mu}(x) \qquad (26)$$

además (30) satisface

$$\Box A_{\parallel}(x) = 0 , \qquad (27)$$

Vale decir, $A_{\parallel}$ es una función de gauge admisible en el gauge de Lorentz. De este modo se tiene que la parte longitudinal del potencial A^{μ} es sólo un artefacto de gauge, carente de todo contenido físico. En efecto, la parte longitudinal no contribuye a generar el tensor electromagnético. Se tiene que

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{(2\pi)^2}\int d^4k\ \delta(k^2)\{C_{\perp}^{\nu}k^{\mu} - C_{\perp}^{\mu}k^{\nu}\}e^{ikx} , \qquad (28)$$

o sea, sólo el potencial transversal invariante de gauge contribuye a generar el campo de radiación. Por ello diremos que $A_{\perp}^{\mu}$

es el verdadero potencial del campo, mientras que $A^{\mu}_{\parallel}$ es tan sólo el potencial del gauge.

De la relación (25) se desprende también que si se toma $\chi(k) = i\alpha_{\parallel}(k)$ entonces $\alpha'_{\parallel}(k) = 0$, o sea $A^{\mu}_{\parallel}(x) = 0$. En este caso $A^{\mu}_{\perp}(x)$ corresponde al cuadripotencial del campo. Es decir, en cualquier sistema de referencia siempre podemos escribir el cuadripotencial como $A^{\mu}_{\perp}(x)$. Notemos que el símbolo «$\perp$» se refiere a la propiedad de las componentes antes señalada; de esta manera la perpendicularidad no puede ser una propiedad covariante.

Sin embargo, si $A^{\mu}_{\perp}(x)$ es el potencial físico, es de esperar que exista una transformación $\tilde{L}^{\mu}_{\nu}$ relacionada a la transformación de Lorentz tal que se tenga

$$A'^{\mu}_{\perp}(x') = \tilde{L}^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}_{\perp}(x) \ .$$

En el próximo capítulo, se encuentra esta transformación en forma explícita; esto permite relacionar los potenciales físicos de manera inmediata y, como consecuencia, el gauge de Coulomb pasa a ser covariante bajo este grupo de transformaciones.

II.- LEY DE TRANSFORMACION DEL POTENCIAL TRANSVERSAL.-

En la sección I demostramos que es posible escoger con toda generalidad $A^{\mu}(x) = A^{\mu}_{\perp}(x)$;este potencial es el que tiene todo el contenido físico ya que $F^{\mu\nu}$ está dado por la expresión (28-I). Sin embargo esta forma del potencial no es covariante-Lorentz. En efecto, al hacer una transformación de Lorentz sobre $A^{\mu}_{\perp}(x)$, el transformado no es un potencial transversal. A fin de restaurar la forma transversal en el nuevo referencial será necesario introducir una transformación adicional que, como vimos en la parte I ha de ser una transformación de gauge. Esto es así, recordemos, porque en todo referencial $A^{\mu}(x) = A^{\mu}_{\perp}(x) + A^{\mu}_{\parallel}(x)$ siendo $A^{\mu}_{\parallel}(x) = A_{\parallel}^{,\mu}(x)$ un artefacto de gauge el cual podemos anular con la transformación adecuada.

Según esto entonces. la transformación del potencial transversal ha de ser la composición de una transformación de gauge y una transformación de Lorentz según el siguiente diagrama:

$$A^{\mu}_{\perp}(x) \xrightarrow{T.\mathcal{L}} A'^{\mu}(x') \xrightarrow{T.G} A'^{\mu}_{\perp}(x')$$

donde $A'^{\mu}(x') = L^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}(x)$ y

$$A'^{\mu}(x') \to A'^{\mu}_{\perp}(x') = A'^{\mu}(x') - \partial'^{\mu}\psi(x),$$

luego

$$A'^{\mu}_{\perp}(x') = L^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) - \partial'^{\mu}\psi(x') \qquad (1)$$

La función de gauge $\psi(x')$ quedará determinada por la ec.(1) ya que esta ecuación impone que

$$A_{\perp}^{\prime 0}(x') = L^{0}_{\nu} A_{\perp}^{\nu}(x) - \partial'^{0}\psi(x') = 0. \qquad (2)$$

De I-18 y I-16 tenemos que $\psi(x')$ está dado por

$$\psi(x') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k'\delta(k'^2)\chi(k')e^{ik'x'}$$

por lo que

$$\partial'^{0}\psi(x') = \frac{i}{(2\pi)^2}\int d^4k'\delta(k'^2)\chi(k')k'^{0}e^{ik'x'}$$

expresión que introducida en (2) nos da

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k'\delta(k'^2)\{i\chi(k')k'_0 - L^0{}_\nu C_\perp^\nu(k)\} = 0$$

puesto que esta relación debe satisfacerse para todo k^μ, deberá tenerse que para

$$k'^2 = 0 \quad , \quad \{i\chi(k')k'_0 - L^0{}_\nu C_\perp^\nu(k)\} = 0$$

ya que si $k'^2 \neq 0$, $\quad \delta(k'^2) = 0$.

Si consideramos que $k'^0 = L^0{}_\lambda k^\lambda$ entonces

$$\chi(k') = -i\,\frac{L^0_\nu C_\perp^\nu(k)}{L^0{}_\lambda k^\lambda} \qquad (3)$$

Pero (3) está expresado en término de componentes de cuadrivectores y no de cuadrivectores mismos. Sin embargo podemos darle la forma de un producto de cuadrivectores al hacer las siguientes consideraciones. Si $n'^\mu = (1,\vec{0})$ en O', entonces se tiene que

$$L^0_\nu\, C^\nu(k) = n'_\mu\, L^\mu{}_\nu C_\perp^\nu(k) = n_\nu C_\perp^\nu(k)$$

y

$$L^0_\lambda k^\lambda = n'_\mu\, L^\mu{}_\lambda k^\lambda = n_\lambda k^\lambda$$

Ahora estas relaciones contienen el cuadrivector n_μ el cual tiene un significado físico simple. El cuadrivector n'_μ especifica la dirección de las líneas mundo de los puntos en reposo respecto de O! Respecto de O estos mismos puntos se mueven con una cuadrivelocidad dada por $v^\mu = Cn^\mu$; es decir, el cuadrivector n^μ da la dirección de la cuadrivelocidad de O' respecto de O. Por lo tanto la relación (3) puede escribirse como sigue

$$\chi(k) = -i\,\frac{v_\nu C_\perp^\nu(k)}{v_\lambda k^\lambda} \quad . \tag{4}$$

con esto $\psi(x)$ queda :

$$\psi(x) = \frac{-i}{(2\pi)^2}\int d^4k\,\delta(k^2)\,\frac{v_\nu C_\perp^\nu(k)}{v_\lambda k^\lambda}\,e^{ikx} \,, \tag{5}$$

y su gradiente:

$$\partial'^\mu\psi(x') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k'\,\delta(k'^2)\,k'^\mu\,\frac{v_\nu C_\perp^\nu(k)}{v_\lambda k^\lambda}\,e^{ik'x'}$$

$$= L^\mu{}_\theta\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4k\,\delta(k^2)\,k^\theta\,\frac{v_\nu C_\perp^\nu(k)}{v_\lambda k^\lambda}\,e^{ikx} \,.$$

La substitución de este resultado en (1) da, para las amplitudes, la relación siguiente:

$$C'^\mu(k') = L^\mu{}_\nu\left[\delta^\nu{}_\theta - \frac{k^\nu v_\theta}{v_\lambda k^\lambda}\right]C_\perp^\theta(k) \,, \tag{6}$$

por lo que puede escribirse en el espacio de coordenadas la relación

$$A_\perp'^\mu(x') = L^\mu{}_\nu\{A_\perp^\nu(x) - C^\nu_{,(x,v)}\} \tag{7}$$

donde

$$C(x,v) = -\frac{i}{(2\pi)^2}\int d^4k\;(k^2)\;\frac{v_\theta C_\perp^\theta(k)}{v_\lambda k^\lambda}\,e^{ikx} \,.$$

Pero $A_\perp^\nu(x)$ está dado en término de las amplitudes $C_\perp^\nu(x)$ al igual que $c'^{\nu}(x,v)$. Para poder encontrar la relación buscada, es necesario poner (7) en la forma de un operador sobre $A_{\perp}^{\nu}(x)$. Esto podemos hacerlo, ya que por (I-24) tenemos también que

$$\delta(k^2)C_{\perp}^{\lambda}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^4x A^{\lambda}(x)e^{-ikx}$$

por lo que puede ponerse a $C'^{\nu}(x,v)$ como

$$C'^{\nu}(x,v) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4y \frac{v_{\lambda}A^{\lambda}(y)}{v_{\rho}k^{\rho}} k^{\nu}e^{ik(x-y)} .$$

si definimos ahora el operador integral

$$K^{\nu}{}_{\lambda} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4y \frac{v_{\lambda}}{v_{\rho}k^{\rho}} k^{\nu}e^{ik(x-y)} \tag{8}$$

donde

$$K^{\nu}{}_{\lambda}A^{\lambda}(x) := \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4y \frac{v_{\lambda}A^{\lambda}(y)}{v_{\rho}k^{\rho}} k^{\nu}e^{ik(x-y)}$$

entonces

$$A_{\perp}'^{\mu}(x') = L^{\mu}{}_{\nu}[\delta^{\nu}{}_{\rho} - K^{\nu}{}_{\rho}]A_{\perp}^{\rho}(x)$$

$$= \tilde{L}^{\mu}{}_{\rho}A_{\perp}^{\rho}(x)$$

donde

$$\tilde{L}^{\mu}{}_{\rho} = L^{\mu}{}_{\nu}[\delta^{\nu}{}_{\rho} - K^{\nu}{}_{\rho}] \tag{9}$$

es la transformación buscada que permite pasar de O a O' conservando la transversalidad del potencial.

En el apéndice se demuestra explícitamente que estas transformaciones forman un grupo.

Así se verá que hemos encontrado un grupo de transformaciones $\tilde{L}$, las cuales se definen:

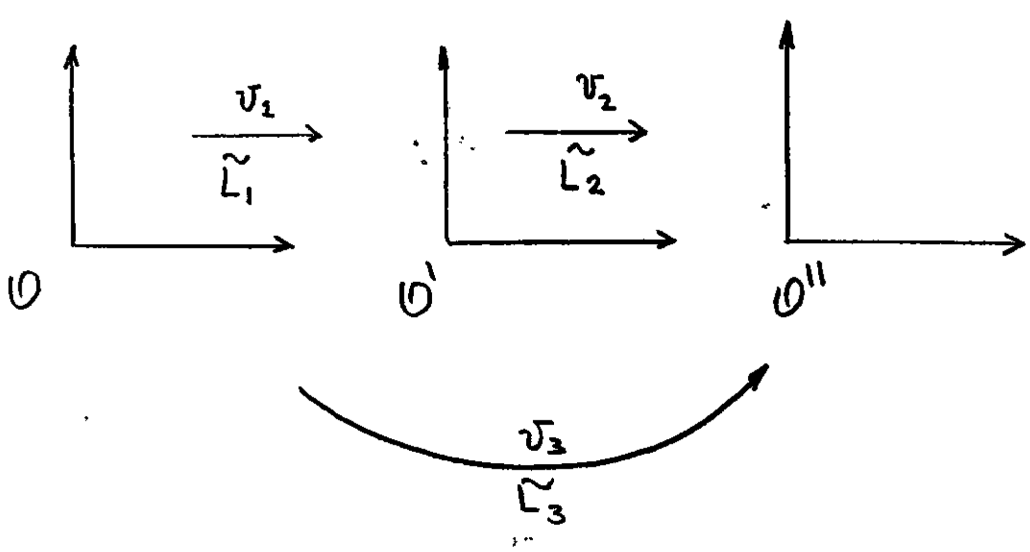
i) A partir de una transformación de Lorentz caracterizada, por ejemplo, por tres ángulos de Euler y las tres componentes de la velocidad relativa entre los sistemas O y O'.

ii) A partir de un operador integral K. Pero de (8) se puede ver que K está totalmente definido por los tres parámetros de velocidad que definen a L. Esto quiere decir que K no agrega estructura al grupo y así el grupo de las transformaciones $\tilde{L}$ es isomorfo al grupo de las transformaciones de Lorentz. Se ha logrado de esta manera definir una nueva realización del grupo de Lorentz $\tilde{L}$ sobre los potenciales A^{μ} tal que si A^{μ} satisface las condiciones del gauge de Coulomb, entonces el potencial que se obtiene después de hacer una transformación $\tilde{L}$, también satisface esta condición.

APENDICE.- PROPIEDADES DE GRUPO.-

Demostraremos ahora que las transformaciones que llevan $A_\perp^\mu(x)$ a $A_\perp'^\mu(x')$, descritas por (9-II), forman un grupo.

Consideremos tres sistemas inerciales O, O', O'' y sea $v_1{}^\lambda$ la cuadrivelocidad relativa de O' con respecto a O; $v_2{}^\lambda$ la de O'' respecto de O' y $v_3{}^\lambda$ la de O'' respecto de O. El siguiente diagrama ilustra la situación.



Se debe satisfacer entonces que

$$\tilde{L}_3 = \tilde{L}_2 \tilde{L}_1 \quad . \tag{1}$$

El miembro de la derecha de (1) puede escribirse como

$$L^\mu_{2\nu}[\delta^\nu{}_\theta - K^\nu_{2\theta}]L^\theta_{1\lambda}[\delta^\lambda{}_\sigma - K^\lambda_{1\sigma}]A^\sigma_\perp(x) =$$

$$[L^\mu_{2\theta} - L^\mu_{2\nu}K^\nu_{2\theta}][L^\theta_{1\sigma} - L^\theta_{1\lambda}K^\lambda_{1\sigma}]A^\sigma_\perp(x) =$$

$$[L^{\mu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\sigma} - L^{\mu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\lambda}K^{\lambda}_{1\sigma} - L^{\mu}_{2\nu}K^{\nu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\sigma} +$$

$$L^{\mu}_{2\nu}K^{\nu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\lambda}K^{\lambda}_{1\sigma}]A^{\sigma}_{\perp}(x) \quad , \qquad (2)$$

por otra parte

$$K^{\nu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k'\, d^4y'\, \frac{e^{ik'(x'-y')}}{v_{2\rho}k'^{\rho}}\, k'^{\nu}v_{2\theta}L_{1\sigma}$$

y como

$$v_{3\lambda} = L^{\theta}_{1\lambda}v_{2\theta}; \quad k'^{\nu} = L^{\nu}_{1\beta}k^{\beta}; \quad v_{2\rho}k'^{\rho} = v_{3\rho}k^{\rho}$$

entonces

$$K^{\nu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\sigma} = L^{\nu}_{1\theta}K^{\theta}_{3\sigma} \quad . \qquad (3)$$

La substitución de (3) en (2) nos da

$$\tilde{L}^{\mu}_{1\theta}\tilde{L}^{\theta}_{2\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(x) =$$

$$L^{\mu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\alpha}(\delta^{\alpha}_{\sigma} - K^{\alpha}_{1\sigma} - K^{\alpha}_{3\sigma} + K^{\alpha}_{3\lambda}K^{\lambda}_{1\sigma})A^{\sigma}_{\perp}(x) \quad . \qquad (4)$$

Es posible simplificar el último término en el paréntesis,

$$K^{\alpha}_{3\lambda}K^{\lambda}_{1\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(x) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4k d^4y\, \frac{e^{ik(x-y)}}{v_{3\rho}k^{\rho}}\, k^{\alpha}v_{3\lambda}\int d^4\bar{k}d^4\bar{y}\, \frac{e^{i\bar{k}(y-\bar{y})}}{v_{1\theta}\bar{k}^{\theta}}\, \bar{k}^{\lambda}v_{1\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(\bar{y}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4kd^4yd^4\bar{k}d^4\bar{y}\, \frac{e^{ikx}e^{-i\bar{k}\bar{y}}e^{iy(\bar{k}-k)}}{(v_{3\rho}k^{\rho})(v_{1\theta}k^{\theta})}(\bar{k}^{\mu}v_{3\lambda})k^{\alpha}v_{1\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(\bar{y}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\int d^4kd^4\bar{y}d^4\bar{k}\, \frac{e^{ikx}e^{-i\bar{k}\bar{x}}\delta(\bar{k}-k)}{(v_{3\rho}k^{\rho})(v_{1\theta}k^{\sigma})}(\bar{k}^{\lambda}v_{3\lambda})k^{\alpha}v_{1\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(\bar{y}) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4kd^4\bar{y}\, \frac{e^{ik(x-\bar{y})}}{v_{1\theta}k^{\theta}}\, k^{\alpha}v_{1\sigma}A^{\alpha}_{\perp}(y) = k^{\alpha}_{1\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(x) \quad . \qquad (5)$$

La substitución de (5) en (4) nos da,

$$\tilde{L}^{\mu}_{1\theta}\tilde{L}^{\theta}_{2\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(x) = L^{\mu}_{2\theta}L^{\theta}_{1\alpha}(\delta^{\alpha}{}_{\sigma} - K^{\alpha}_{3\sigma})A^{\sigma}_{\perp}(x)$$

$$= \tilde{L}^{\mu}_{3\sigma}A^{\sigma}_{\perp}(x) \quad , \qquad (6)$$

es decir, se verifica (1).

Verificaremos ahora la existencia de la transformación inversa. Para demostrar esto escribimos $\tilde{L}^{-1}_{\lambda\mu}$ con $\bar{v}_{\mu}$ como la cuadrivelocidad de 0 relativa a 0'.

$$\tilde{L}^{-1}{}_{\sigma} =$$

$$K^{-1\mu}{}_{\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k' d^4z \, \frac{e^{ik'(y'-z)}}{\bar{v}_{\alpha}k'^{\alpha}} \, k'^{\mu}\bar{v}_{\sigma}$$

Con esto, es posible verificar que:

$$\tilde{L}^{-1}_{\lambda\sigma}\tilde{L}^{\sigma}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) = \delta_{\lambda\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) = A^{\lambda}_{\perp}(x) \quad . \qquad (7)$$

$$\tilde{L}^{-1}_{\lambda\sigma}\tilde{L}^{\sigma}_{\nu}\, A^{\nu}_{\perp}(x) = L^{-1}_{\lambda\mu}[\delta^{\mu}{}_{\sigma} - K^{-1\mu}{}_{\sigma}]L^{\sigma}{}_{\alpha}|\delta^{\alpha}{}_{\nu} - K^{\alpha}_{\nu}|A^{\nu}_{\perp}(x) =$$

$$[L^{-1}_{\lambda\sigma} - L^{-1}_{\lambda\mu}K^{-1\mu}{}_{\sigma}][L^{\sigma}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\alpha}K^{\alpha}{}_{\nu}]A^{\nu}(x) =$$

$$L^{-1}_{\lambda\sigma}L^{\sigma}_{\nu}\, A^{\nu}_{\perp}(x) - L^{-1}_{\lambda\sigma}L^{\sigma}{}_{\alpha}K^{\alpha}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) - L^{-1}_{\lambda\mu}K^{-1\mu}{}_{\sigma}L^{\sigma}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x)$$

$$+ L^{-1}_{\lambda\mu}K^{-1\mu}{}_{\sigma}L^{\sigma}{}_{\alpha}K^{\alpha}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) =$$

$$A_{\lambda\perp}(x) - K_{\lambda\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) - L^{-1}_{\lambda\mu}K^{-1\mu}{}_{\sigma}L^{\sigma}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x)$$

$$+ L^{-1}_{\lambda\mu}K^{-1\mu}{}_{\sigma}L^{\sigma}{}_{\alpha}K^{\alpha}{}_{\nu}A^{\nu}_{\perp}(x) \qquad (8)$$

El último término de (8) es

$$L^{-1}_{\lambda\mu} K^{-1\mu}{}_{\sigma} L^{\sigma}{}_{\alpha} K^{\alpha}{}_{\nu} A^{\nu}_{\perp}(x) =$$

$$L^{-1}_{\lambda\mu} \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4k' \frac{e^{ik'(x'-z)}}{\bar{v}_\rho k'^\rho} k'^\mu \bar{v}_\sigma \times$$

$$L^{\sigma}{}_{\alpha} \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k' d^4y \frac{e^{i\bar{k}(z-y)}}{v_\rho \bar{k}'^\rho} \bar{k}^\alpha v_\nu A^{\nu}_{\perp}(y) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4z \frac{e^{ik(x-z)}}{\bar{v}_\rho L^\rho_\theta k^\theta} k_\lambda \bar{v}_\sigma L^{\sigma}{}_{\alpha} \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\bar{k}' d^4y \frac{e^{i\bar{k}(x-y)}}{v_\rho \bar{k}^\rho} \bar{k}^\alpha v_\nu A^{\nu}_{\perp}(y) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4\bar{k} d^4y \frac{\delta(\bar{k}-k) e^{ikx} e^{-i\bar{k}y}}{(\bar{v}_\rho L^\rho{}_\theta k^\theta)(v_\rho \bar{k}^\rho)} k_\lambda (\bar{v}_\sigma L^{\sigma}{}_{\alpha} \bar{k}^\alpha) v_\nu A^{\nu}_{\perp}(y) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k d^4y \frac{e^{ik(x-y)}}{v_\rho k^\rho} v_\nu A^{\nu}_{\perp}(y) = K_{\lambda\nu} A^{\nu}_{\perp}(x)$$

El término $L^{-1}_{\lambda\mu} K^{-1\mu}{}_{\sigma} L^{\sigma}{}_{\nu} A^{\nu}(x)$ es cero ya que es igual a

$$L^{-1}_{\lambda\mu} \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k' d^4z \frac{e^{ik'(x'-z')}}{\bar{v}_\alpha k'^\alpha} k'^\mu \bar{v}_\sigma L^{\sigma}{}_{\nu} A^{\nu}_{\perp}(z)$$

y como $\bar{v}_\sigma L^{\sigma}{}_{\nu}$ es un vector tipo tiempo puro, su producto con $A^{\nu}_{\perp}(x)$ es nulo.

Vemos entonces que (8) se reduce a la expresión $A^{\perp}_{\lambda}(x) = \delta_{\lambda\nu} A^{\nu}_{\perp}(x)$, (9) lo que demuestra la existencia de la inversa.

****

R E F E R E N C I A S.-

A.O.BARUT "Electrodynamics and classical theory of fields and particles" .

Primera edición

MACMILLAN COMPANY.

F.ROHRLICH "Classical charged particles".

ADDISON-WESLEY,1965.

J.D.JACKSON "Classical Electrodynamics".

JOHN WILEY & SONS, INC.

Sexta edición,1967.

****

A G R A D E C I M I E N T O S.-

Deseo expresar mis agradecimientos al Dr. Jorge Krause bajo cuya dirección realicé la mayor parte de este trabajo, así como al Dr. Patricio Cordero, por su ayuda en las partes finales. También deseo agradecer al Dr.Juan Wolfes quien amablemente ha supervisado este trabajo en ausencia del Dr.Krause.

Agradezco también a la Universidad Técnica del Estado en la persona del Director Ing.Sr.Alfredo Seguel Moas, por brindarme las facilidades necesarias para la finalización de este trabajo.

Finalmente, y de manera especial, agradezco a mi esposa Mónica por su gran paciencia y apoyo.

****