

UCH-FC  
DOC-F  
1522  
C. 1

# Términos de Borde y Origen Estadístico de la Entropía de Agujeros Negros.

Tesis  
Entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias con mención en Física

Facultad de Ciencias

por

Fernando Antonio Méndez Ferrada.

25 OCT 2000

Noviembre, 1999



Director de Tesis: Dr. Jorge Zanelli I.

**INFORME DE APROBACION  
TESIS DE DOCTORADO**

Se informa al Comité del Programa de Doctorado en Ciencias con mención en Física que la Tesis presentada por el candidato

**Fernando Antonio Méndez Ferrada**

ha sido aprobada por la Comisión Informante de Tesis como requisito para la obtención del grado de Doctor en Ciencias con mención en Física.

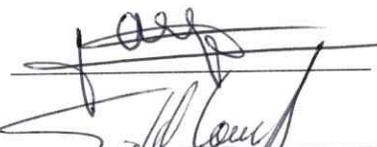
**Director de Tesis**

Dr. Jorge Zanelli

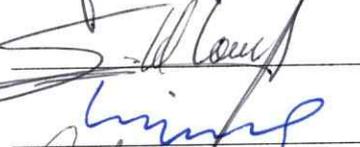


**Comisión Informante de Tesis**

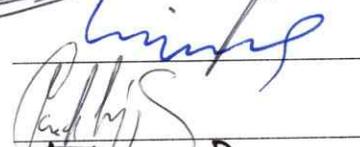
Dr. Jorge Alfaro.



Dr. Sergio del Campo.



Dr. Sergio Hojman. (Presidente)



Dr. Carlos López.



Dr. Nelson Zamorano. 25 OCT 2000



*Para  
mi familia.*

25 OCT 2000



## AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mis agradecimientos a algunas personas e instituciones que me han ayudado y acompañado durante el desarrollo de esta tesis y de mis estudios.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia. Ellos han sido el motor fundamental para poder dedicarme a tiempo completo a la investigación y el apoyo incondicional durante los momentos difíciles. A mis padres, a mis hermanos y a mis abuelos. A Carola, quiero agradecer el haberme soportado en las fases más críticas de este trabajo.

También quiero agradecer a los profesores con los que me formé en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, en especial a mis profesores de los primeros años. Deseo mencionar de manera muy especial a aquellos profesores de los cuales aprendí no solamente ciencia, sino que me formaron como científico: Roberto Hojman, Ricardo Baeza y Manuel Pinto. También a los profesores de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile Romualdo Tabensky y Nelson Zamorano.

Mención aparte merece mi tutor Jorge Zanelli de quién he aprendido lecciones imborrables de física y humanidad. Este trabajo jamás hubiera llegado a su fin sin su constante apoyo y dedicación.

A mis compañeros de la Facultad de Ciencias Osvaldo Chandía, David Groisman y Víctor Muñoz, por su amistad.

Quisiera agradecer de manera muy especial al Centro de Estudios Científicos de Santiago donde esta tesis se llevó a cabo. A su director, don Claudio Teitelboim y a los miembros académicos, quienes me permitieron tener contacto con la comunidad científica internacional por medio de la realización permanente de seminarios con la participación de destacados científicos. Al personal de este Centro, en particular a don Osmán Hernández, Lidia Cárcamo, Ana María Navia, Carlos Pardo, Paulina Rodríguez, Ana Timermann, Ursula Timermann y Ernesto Vega, porque hicieron lo

imposible por facilitarme las inevitables tareas burocráticas.

También quiero agradecer a Rodrigo Aros, Máximo Bañados, Mauricio Contreras, Andrés Gomberoff, Cristián Martínez, Rodrigo Olea y Ricardo Troncoso por discusiones que han sido relevantes para el desarrollo de esta tesis.

Finalmente quiero agradecer a CONICYT por una beca de doctorado.

## ABSTRACT

The statistical origin of black hole entropy in 4 dimensions is an unsolved problem. There have been several attempts to explain which are the states that must be counted and where do they reside; the main progress has been done in 2+1 dimension where gravity can be formulated as a gauge theory. In this arena, there has been successful interpreting the degrees of freedom that appear when gravity is defined on a manifold with boundary, as the states that must be counted to get the entropy of the 2+1 black hole. However, it is still unclear how to extend this idea to higher dimensions.

On a manifold with boundaries gravity gains new physical degrees of freedom corresponding to the diffeomorphism invariance that is lost at the boundaries. In particular, if the horizon is viewed as a boundary, the theory becomes a WZW model there, and gives the correct number of states in the limit of large coupling constant.

On this thesis we investigate the possibility of extending this idea to 3+1 gravity. We discuss how to define an action that gives Dirichlet-type boundary condition on manifolds with boundaries. Applying this result to four dimensional gravity we found the so called "membrane equations". In 2+1 dimensions we found that to define an action principle consistent with Dirichlet-type boundary conditions in a manifold  $M$  with two non connected boundaries, is necessary a projector  $P$ , defined in the submanifold  $r = \text{constant}$ , this induces, in 2+1 dimension, a curved WZW theory on the horizon. What is relevant here is that the entropy of black hole is related to this object, which is also present in 3+1 dimensions. Besides, the WZW theory is a string theory in a curved space.

Dealing with the role of boundary terms in the black hole entropy we also calculated the entropy of a three dimensional black hole in the so called semiclassical approach.

## RESUMEN

El origen estadístico de la entropía de los agujeros negros en 4 dimensiones es un problema no resuelto aún. Sin embargo en dimensión 3, el problema puede enfrentarse usando el hecho que allí la gravitación es una teoría de Chern-Simons para el grupo  $SO(2, 2)$ . Actualmente se conjetura que los estados cuánticos que dan origen a la entropía de los agujeros negros en esta dimensión, provienen del rompimiento de la invariancia de gauge en el horizonte de eventos, lo que origina una teoría de Wess-Zumino-Witten cuya versión cuántica da los estados que al ser contados de manera apropiada, dan la entropía del agujero negro.

En esta tesis se investigó el problema de cómo extender estos argumentos a dimensión 4 y superiores. Para esto, se estudió el problema de cómo definir un principio de acción, en variedades con borde, de manera que las condiciones de borde aparezcan como ecuaciones allí. El resultado de esto es que para el caso de gravitación en dimensión 4, la acción da las conocidas ecuaciones del principio de membranas para gravitación, mientras que para el caso de acciones de Chern-Simons en 3 dimensiones, se obtiene que es necesario incorporar un nuevo elemento: un proyector, que no es otra cosa que la métrica de la variedad en el horizonte.

En este estudio del papel de los términos de borde en la definición de la acción, se calculó la entropía del agujero negro tridimensional en la aproximación semiclásica.

Finalmente, se conjetura de qué manera se podría contar los estados que dan origen a la entropía en términos de una teoría de cuerdas y cómo extender el procedimiento a dimensiones superiores.

# Contenido

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Resumen	v
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Relatividad General. . . . .	1
1.2 Agujeros Negros . . . . .	4
1.3 Termodinámica de agujeros negros. . . . .	7
<b>2 Principio de Acción y Condiciones de Borde.</b>	<b>10</b>
2.1 Introducción. . . . .	10
2.2 Condiciones de borde naturales. . . . .	11
2.3 Cantidades Conservadas y Teorema de Noether. . . . .	15
2.4 Acciones de primer orden. . . . .	17
2.4.1 Formulación de Chern-Simons. . . . .	17
2.4.2 Variedades con un borde conexo. . . . .	19
2.4.3 Variedades con bordes desconexos. . . . .	22
2.5 Gravitación en 3+1. . . . .	25
2.6 Gravitación en dimensión 3. . . . .	27
<b>3 Entropía de Agujeros Negros en la Aproximación Semiclásica.</b>	<b>29</b>
3.1 Introducción. . . . .	29
3.2 Entropía del agujero negro en 3+1 dimensiones. . . . .	30
3.3 Entropía de un agujero negro en tres dimensiones. . . . .	33
3.3.1 Acción covariante para el agujero negro tridimensional. . . . .	35
3.4 Comentarios. . . . .	36
<b>4 Origen Estadístico de la Entropía de Agujeros Negros en 2+1 Dimensiones.</b>	<b>38</b>
4.1 Introducción. . . . .	38

4.2	Origen de nuevos grados de libertad. . . . .	39
4.2.1	Gravitación en 3+1 dimensiones. . . . .	39
4.3	Gravitación en tres dimensiones. . . . .	42
4.3.1	Conteo de estados. . . . .	43
4.4	Principio de acción, términos de borde y proyectores. . . . .	45
4.4.1	Intpretación geométrica de $h_{\alpha\beta}$ . . . . .	48
4.4.2	Conteo de estados. . . . .	50
4.5	Extensión a dimensiones superiores. . . . .	50
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Formulación de Chern-Simons de la gravitación en 3 dimensiones.</b>	<b>54</b>
<b>B</b>	<b>Integral funcional y termodinámica.</b>	<b>58</b>
<b>C</b>	<b>Proyectores</b>	<b>62</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Relatividad General.

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General, que describen la relación entre la materia (energía) y la geometría del continuo espaciotiempo de cuatro dimensiones, están dadas por , [1, 2, 3, 4, 5]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde  $G$  es la constante de Newton y  $c$ , la velocidad de la luz.. La información relativa a la geometría está contenida en la métrica  $g_{\mu\nu}$ , la información relativa a la materia aparece al lado derecho, en términos del tensor de energía momentum  $T_{\mu\nu}$ . Entonces, dada la distribución de materia en el espaciotiempo, se puede conocer la geometría resolviendo las ecuaciones de Einstein para la métrica  $g_{\mu\nu}$  de la variedad.

Una de las primeras soluciones de esta ecuación se debe a Schwarzschild, y describe la geometría en la región exterior de un cuerpo masivo estático y con simetría esférica. La métrica en este caso es [5, 6]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.2)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ ; las coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas usuales del espacio tridimensional, la coordenada  $t$  es el tiempo medido por un ob-

servador situado en el infinito espacial ( $r \rightarrow \infty$ );  $G$  es la constante de Newton y  $M$  resulta ser la masa del objeto que crea el campo gravitacional (medida en  $r \rightarrow \infty$ ) y que deforma el espaciotiempo de manera que su métrica es (1.2).

Supongamos que  $r_0$  es el radio de dicho cuerpo, entonces (1.2) es la métrica de la variedad (que llamaremos  $U$ ) definida por  $r \in (r_0, \infty)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ . En la región  $r < r_0$ , la métrica tiene una forma diferente y se obtiene resolviendo las ecuaciones de Einstein para el tensor de energía-momento ( $T_{\mu\nu}$ ) del cuerpo masivo al que nos estamos refiriendo [5, 7].

Es interesante considerar el caso en que (1.2) es la solución para todo el espacio (es decir,  $r \in [0, \infty)$ ). Si este es el caso, notamos primero que  $g_{rr}$  no está definida para  $r = r_+ = 2MG$ .<sup>1</sup> Sin embargo, puesto que la teoría es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas, es lícito preguntarse si este problema (el que la métrica no esté definida en un punto de  $U$ ) es consecuencia de una desafortunada elección de coordenadas. La respuesta es que efectivamente,  $r = r_+$  no es una singularidad de coordenadas; lo que sucede es que las coordenadas no son las adecuadas para describir esa región del espaciotiempo. No sucede lo mismo con  $r = 0$ , los escalares son divergentes allí, de suerte que no es posible encontrar un sistema de coordenadas regular en el origen.

La extensión maximal de la variedad  $U$  fue construida por Kruskal (1960) y está dada en términos de nuevas coordenadas  $(r', t', \theta, \phi)$ , donde  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas angulares de antes y  $(r', t')$  son funciones implícitas de  $(r, t)$  dadas por [5, 6, 7]

$$r'^2 - t'^2 = \left(\frac{r}{2MG} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2MG}\right), \quad (1.3)$$

$$\frac{2r't'}{r'^2 + t'^2} = \tan\left(\frac{t}{2MG}\right). \quad (1.4)$$

En términos de estas coordenadas, la métrica de la extensión maximal de  $U$  es

---

<sup>1</sup>Usaremos la convención  $c = 1$  de aquí en adelante

$$ds^2 = \left(\frac{32G^3 M^3}{r}\right) \exp\left(-\frac{r}{2MG}\right) (-dt'^2 + dr'^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (1.5)$$

y coincide con la métrica de Schwarzschild en la región  $r \in (r_+, \infty)$ .

La región  $r = r_+$  tiene otra característica notable que no depende del sistema de coordenadas: cualquier señal luminosa enviada desde la región  $r > r_+$  puede alcanzar la región  $r = r_+$  y atravesar hacia  $r < r_+$  en un lapso de tiempo finito, sin embargo las señales enviadas desde el interior no pueden atravesar  $r_+$ , de manera que nunca serán captadas por un observador situado en el exterior de esa región. La superficie  $r = r_+$  se conoce como *horizonte de eventos*.

Por otra parte, la singularidad  $r = 0$ , que sí es física, es inevitable para un observador proveniente de la región  $r > r_+$ , puesto que como ya dijimos, para él la superficie  $r = r_+$  no tiene ninguna particularidad como puede verse en la expresión (1.5). Sin embargo, la información acerca de lo que allí le pueda suceder no llegará jamás a un observador en infinito ( $r \rightarrow \infty$ ).

En resumen, si existe un objeto de masa  $M$  y de radio  $r_0 < r_+$ , existirá una región del espaciotiempo (el horizonte  $r = r_+$ ) que puede ser alcanzada por cualquier observador externo (es decir, que se encuentre en  $r > r_+$ ), pero un observador en el interior no podrá salir de allí. Tales objetos existen y se conocen como *agujeros negros*.

Antes de mirar algunas propiedades de estos objetos, miremos otra solución exacta de (1.1). La métrica (1.2) es la única solución estática de las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica y con un horizonte de eventos. Pero las estrellas, planetas y prácticamente todos los cuerpos celestes de interés se encuentran rotando, de suerte que no esperamos que las soluciones en la región exterior de ellos tenga simetría esférica.

La solución exacta en la región exterior de un cuerpo de masa  $M$  con simetría axial, es la conocida métrica de Kerr [5]. En coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , esta solución es:

$$ds^2 = \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2(\theta) d\phi^2 - dt^2 + \frac{2GMr}{\rho^2} (a \sin^2(\theta) d\phi - dt)^2, \quad (1.6)$$

exclusión de Pauli.

Ahora bien, para estrellas pequeñas y frías, la presión de degeneración es balanceada por las fuerzas electrostáticas entre partículas vecinas. Para cuerpos grandes la autogravedad será importante y comprimirá la materia actuando en contra de la presión de degeneración; en este último caso, cabe distinguir dos situaciones posibles: la estrella está formada por materia relativista o no relativista.

Si la densidad de la estrella es suficientemente baja, la presión de degeneración proviene de los electrones no relativistas y puede ser balanceada con la autogravedad si  $M$  fluctúa en los rangos:

$$\frac{c^3}{m_n^2} < M < \frac{\hbar^{3/2}}{m_n^2}. \quad (1.7)$$

donde  $e$  es la carga del electrón y  $m_n$ , la masa de los nucleones. Tales estrellas se conocen como *enanas blancas* y no colapsarán a un agujero negro.

Sin embargo, si la densidad es suficientemente alta los electrones serán relativistas y la presión de degeneración podrá contener la autogravitación sólo si la masa de la estrella es del orden de  $M_c \simeq 1,5M_\odot^2$ . Estrellas con masa mayor que ésta colapsarán por la acción de la autogravitación. Además, producto de decaimientos tipo beta inversos (es decir  $e^- + p \rightarrow \nu_e + n$ ), eventualmente todos los protones y electrones decaerán a neutrones, siendo posible una vez más el equilibrio entre la presión de degeneración (esta vez de los neutrones) y la autogravedad de la estrella.

En este punto del desarrollo, nuevamente la masa de la estrella puede ser del orden de  $M_c$  si los neutrones son relativistas, pero en este caso el radio de la estrella será menor que  $r_+$  por lo que finalmente se convertirá en un agujero negro.

Es claro que para un observador  $A$  en la superficie de la estrella que colapsa, el paso por  $r_+$  no representa ningún problema pues, como hemos visto, no hay ninguna singularidad en ese punto (localmente, esta región está descrita por la métrica (1.5)); además, a dicho observador le tomará un tiempo finito cruzar el horizonte. Sin embargo, para un observador  $A'$  en infinito, cualquier señal luminosa proveniente de  $A$  tendrá un corrimiento al rojo cada vez mayor; en la práctica, para

---

<sup>2</sup>Aquí,  $M_\odot$  es la masa del sol.

A' la superficie de la estrella llegará a ser invisible, de suerte que tendremos un cuerpo que no podemos ver, pero que cambia la geometría del espaciotiempo como si existiera un cuerpo de masa  $M$  produciendo un campo gravitacional. Nótese, además, que la singularidad real  $r = 0$  no puede ser detectada por observadores fuera del horizonte puesto que, como ya dijimos, las señales luminosas no pueden escapar de la región  $r < r_+$  y de hecho ningún cuerpo puede hacerlo. Así, la única singularidad física del espaciotiempo no es accesible para observadores que se encuentran fuera del horizonte de eventos.

Como hemos visto, la solución de Schwarzschild contiene estos objetos nuevos que están caracterizados únicamente por su masa. En la descripción anterior, acerca de cómo se pueden formar estos agujeros negros, vimos que el detalle de cómo está hecha la estrella que colapsa es irrelevante, siendo importante sólo el que tenga simetría esférica<sup>3</sup>. En suma, lo único que interesa es que las estrellas que colapsan satisfagan ciertas condiciones de energía para tener una chance de llegar a ser agujeros negros.

En la sección anterior vimos que existía otra solución de las ecuaciones de Einstein para cuerpos con simetría axial. Esta solución describe, por ejemplo, estrellas rotando, y naturalmente uno puede preguntarse si existen agujeros negros que roten.

La respuesta es que sí existen estos objetos. En general, un agujero negro está caracterizado por su masa ( $M$ ), momentum angular ( $J$ ) y carga eléctrica ( $Q$ ) [8, 9] y la solución de Kerr corresponde a uno agujero negro que rota (en el mismo sentido que (1.2) corresponde a un agujero negro de masa  $M$ ).

De todo lo dicho anteriormente uno espera que los agujeros negros no emitan ningún tipo de radiación. En efecto, se ha señalado que el horizonte de eventos se caracteriza justamente por el hecho que cualquier señal luminosa enviada desde el interior no puede cruzar hacia la zona exterior. Por esto resulta sorprendente que, a pesar de todo lo expresado anteriormente, los agujeros negros sí emitan radiación.

Este resultado fue establecido por Bardeen, Carter y Hawking en 1973 [10]

---

<sup>3</sup>El problema de la simetría esférica de los cuerpos que colapsan y cuán asimétricos pueden ser, está tratado en gran detalle en [6].

y se basa en argumentos de mecánica cuántica relacionados con los procesos de creación y aniquilación de partículas. En 1974, Hawking [11] demostró que, aún cuando los efectos cuánticos pueden ser localmente pequeños, la suma de ellos puede ser significativa si consideramos que se han estado produciendo durante un tiempo del orden de la edad del universo. Estos procesos abrieron las puertas a la posibilidad de que los agujeros negros se evaporaran y además permitió considerar nuevos aspectos de estos objetos tales como sus propiedades termodinámicas.

### 1.3 Termodinámica de agujeros negros.

Como se señaló en la sección anterior, los agujeros negros también pueden emitir radiación termal. Esto permitió considerar otras propiedades como entropía, temperatura, etc. Éstas ya habían sido predichas por Bekenstein [12], quién sugirió que tales cantidades podían ser definidas basándose en la analogía entre las leyes de la termodinámica y las leyes de la “física de agujeros negros”.

Por ejemplo, Hawking [13] había demostrado que la superficie del horizonte de eventos de un agujero negro aumentaba irreversiblemente en cualquier proceso, comportamiento que recuerda a la entropía de un sistema físico. Basado en analogías como ésta y en la teoría de la información, Bekenstein [12, 14] sugirió que podía definirse la entropía ( $S$ ) de un agujero negro como

$$S = \alpha A, \quad (1.8)$$

donde  $A$  es el área del horizonte de eventos y  $\alpha$  una constante con las dimensiones apropiadas.

Sin embargo, hasta ese momento esto sólo era una analogía. Fueron los trabajos de Bardeen, Carter y Hawking (1973) y posteriormente Hawking (1974) que permitieron establecer que ésto no era una coincidencia.

Un nuevo problema surgió entonces. En efecto, en mecánica estadística la entropía de un sistema es una propiedad cuántica y está dada por

$$S = k \ln(\Omega), \quad (1.9)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $\Omega$  es el número de estados microscópicos del sistema, compatibles con las condiciones de borde macroscópicas. Entonces, la pregunta natural es cómo se calcula la entropía de un agujero negro en el marco de la mecánica estadística.

Es claro que para responder esto hay que conocer los estados cuánticos del sistema. Pero este problema no tiene solución (aún) porque no se conoce la formulación cuántica de la teoría de la gravitación. Entonces, tenemos un sistema físico que manifiesta una propiedad cuántica aún cuando la teoría cuántica del sistema es desconocida.

El intento por responder esta pregunta ha ido en todas las direcciones posibles sin progresos significativos. Se cree que los estados que han de ser contados residen en el horizonte [15, 16, 17] y, por lo tanto, lo que hay que cuantizar es alguna teoría que puede definirse en esta región del espaciotiempo. Sin embargo, en otros enfoques del problema [18, 19], bastaría considerar sólo la región  $r \rightarrow \infty$  para dar cuenta de la entropía.

En esta búsqueda, también se ha estudiado intensivamente el problema en tres dimensiones desde que se estableció [20] que en 2+1 dimensiones existen soluciones de las ecuaciones de Einstein (con constante cosmológica) tipo agujero negro. Éste ha sido un buen laboratorio para explorar la situación y hay resultados prometedores, pero la extensión a dimensión cuatro no es directa. En este contexto, un avance significativo lo constituye el trabajo de S. Carlip [15, 17, 21, 22], en el cual se logra identificar los estados cuánticos que, al ser contados de manera apropiada, dan origen a la entropía del agujero negro en tres dimensiones. El problema aquí es que el argumento se basa en la formulación de Chern-Simons de la teoría, de manera que su extensión a dimensión 4 no es directa, puesto que en esta dimensión la gravitación no se puede escribir como una teoría de Chern-Simons.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera. En el siguiente capítulo estudiaremos el problema de cómo definir un principio de acción que contenga las condiciones de borde del problema. Es decir, queremos encontrar una prescripción que permita definir una acción (para variedades con borde) que sea estacionaria cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento en el volumen de la variedad y

en el borde se satisfagan ecuaciones que correspondan a las condiciones de borde del problema.

En el capítulo 3 se estudiará el problema de la entropía del agujero negro en la llamada aproximación semiclásica. En este caso, la variedad tiene un borde en  $r \rightarrow \infty$  y es el valor de la acción en este borde el que da la entropía del agujero negro en 3 y 4 dimensiones. El caso tridimensional es diferente al caso 3+1; a pesar que pasar de uno al otro no es directo, se establece una prescripción que permite tratar ambos casos (y que puede ser aplicado a más dimensiones). Aspectos relacionados con la definición de ensambles y términos de borde también son discutidos en este capítulo.

Finalmente, en el Capítulo 4 es tratado el problema del origen estadístico de la entropía de agujeros negros. Siguiendo la idea de S. Carlip, se estudia el problema de las condiciones de borde y la teoría en el borde para la gravitación en 2+1 dimensiones en la formulación de Chern-Simons. En las primeras secciones se revisa el trabajo antes mencionado y luego se reformula el problema en términos de un nuevo objeto: el proyector en el horizonte. Es este nuevo objeto el que permitiría estudiar el problema en más dimensiones. Además, se analiza la conexión entre este problema y la formulación de una teoría de cuerdas en el borde.

## Capítulo 2

# Principio de Acción y Condiciones de Borde.

### 2.1 Introducción.

En este capítulo se presenta una formulación del principio de acción, para variedades con bordes, en el cual las condiciones de borde (C.B.) del problema aparecen como ecuaciones en los bordes de la variedad para variaciones arbitrarias de los campos allí.

En la primera parte mostraremos que dada una acción, la condición de extremo provee las ecuaciones de movimiento y las condiciones de borde necesarias para integrarlas, tales condiciones se conocen como *condiciones de borde naturales*. Se estudiará además el caso en que la acción es de primer orden (del tipo Chern-Simons)

En la sección siguiente aplicaremos esto al caso de gravitación en 4 dimensiones. Se escribe el principio de acción que contiene a las condiciones de borde y veremos que las ecuaciones en el borde son justamente las condiciones de continuidad del llamado *principio de membranas* que permite calcular la entropía del agujero negro.

La última sección está dedicada al estudio del problema en 3 dimensiones en la formulación métrica.

## 2.2 Condiciones de borde naturales.

Consideremos una variedad  $M$  con borde  $\partial M$ . Tener un principio de acción en esta variedad consiste en tener un funcional de los campos de la teoría, que llamamos acción, el cual tiene un extremo en las órbitas que son soluciones de las ecuaciones de movimiento (ec. de Euler-Lagrange) con ciertas condiciones de borde. Entonces, darse un principio de acción consiste en dar la acción más las condiciones de borde que permitan integrar las ecuaciones de movimiento.

En principio, las C.B. que nos damos provienen de nuestro conocimiento de la teoría general de ecuaciones diferenciales o bien de requerimientos propios del problema que se está resolviendo; sin embargo, existen situaciones en que tales requerimientos no son suficientes para integrar las ecuaciones de movimiento de manera única, En tal caso, el propio principio de acción provee las restantes condiciones de bordes, las cuales aparecen como términos de borde que deben ser anulados para que la acción tenga derivada funcional bien definida.

Tales condiciones se conocen como *condiciones de borde naturales* [25]. Un ejemplo de este caso lo encontramos en el problema de una barra elástica apoyada en ambos extremos y cargada con pesos; podemos pedir que los extremos de la barra estén apoyados en la superficie de suerte que el desplazamiento de estos se pueda fijar igual a cero lo que impone dos C.B., pero las ecuaciones de movimiento son de tercer orden. Si no se prescribe nada más, las condiciones que faltan provendrán de la exigencia que el término de borde de la acción se anule, lo que en este caso se traduce en que las segundas derivadas del desplazamiento sean cero.

Consideremos un ejemplo sencillo de teoría de campos: el campo escalar  $\Phi$ . La variedad  $M$  es de cuatro dimensiones, plana, con métrica  $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ; el borde es  $\partial M$  y es conexo. Una acción posible es

$$I_0 = -\frac{1}{2} \int_M \{\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi\} d^4 x, \quad (2.1)$$

cuya variación es

$$\delta I_0 = \int_M [\partial_\mu \partial^\mu \Phi] \delta \Phi d^4 x - \frac{1}{2} \int_{\partial M} [\partial_n \Phi] \delta \Phi d^3 x. \quad (2.2)$$

donde  $\partial_n = n^\mu \partial_\mu$  y  $n^\mu$  es el vector normal a la superficie  $\partial M$ .

Es claro que  $I$  tiene un extremo (para variaciones arbitrarias del campo en  $M$ ) cuando se satisfacen las ecuaciones de movimiento y se realiza una de las siguientes posibilidades:

1. El campo está fijo en el borde de la variedad (es decir  $\delta\Phi = 0$ ).
2. La derivada normal del campo es cero en el borde<sup>1</sup>.

Estas condiciones son justamente las condiciones de borde tipo Dirichlet y Neumann, respectivamente, y sabemos que cualquiera de ellas es suficiente para integrar las ecuaciones de movimiento.

Como dijimos antes, esta acción es una de las acciones posibles que tiene un extremo en las órbitas que satisfacen la ecuación del campo escalar. Es un hecho conocido que la acción [23, 24]

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_M \Phi \{ \partial_\mu \partial^\mu \Phi \} d^4x. \quad (2.3)$$

da las mismas ecuaciones de movimiento que (2.1). En efecto, la variación de  $I_1$  es

$$\delta I_1 = \int_M [\partial_\mu \partial^\mu \Phi] \delta\Phi d^4x + \frac{1}{2} \int_{\partial M} \{ [\Phi] \delta(\partial_n \Phi) - [\partial_n \Phi] \delta\Phi \} d^3x. \quad (2.4)$$

En este caso, la acción tiene un extremo si se satisfacen las ecuaciones de movimiento en  $M$ , y en el borde se satisface cualquiera de las posibilidades siguientes:

1. El campo está fijo y es cero.
2. La derivada normal del campo está fija y tiene valor cero.
3. La derivada normal del campo es proporcional al campo (es decir  $\partial_n \Phi = \alpha \Phi^2$ ).

<sup>1</sup>El caso con derivada normal no nula lo trataremos mas adelante.

<sup>2</sup>Aquí,  $\alpha = \alpha(x)$  es una función que está fija en el principio variacional

Estas son condiciones del mismo tipo que las anteriores (es decir, Dirichlet y Neumann, respectivamente), pero se agrega un nuevo tipo de C.B., las llamadas C.B. mixtas.

En general, ni el campo ni su derivada normal tienen por qué anularse en el borde. De hecho, debería ser suficiente decir que alguno de ellos está fijo en  $\partial M$  para tener un principio de acción bien definido. Es un hecho conocido que esto se puede obtener a partir de  $I_0$  o  $I_1$  agregando términos de borde adecuados.

Por ejemplo, consideremos  $I_0$ . Esta acción es la acción correcta si deseamos fijar los campos en el borde (no necesariamente iguales a cero). Si ahora deseamos escribir una acción para condiciones de borde Neumann, es suficiente considerar

$$I_N = -\frac{1}{2} \int_M \{\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi\} d^4x + \frac{1}{2} \int_{\partial M} [\partial_n \Phi] \Phi d^3x. \quad (2.5)$$

El término de borde que viene de variar esta acción se anula si escogemos como C.B. que la derivada normal del campo esté fija allí (pero no tiene que ser necesariamente igual a cero).

Entonces, como dijimos al principio, la acción siempre contiene el conjunto de C.B. que permiten integrar las ecuaciones de movimiento si uno no especifica nada desde un comienzo. En el ejemplo del campo escalar, estas C.B. naturales son tipo Dirichlet o Neumann, pero no son suficientemente generales en el sentido que obligan a imponer un valor determinado para el campo o la derivada normal. Ahora bien, los casos más generales (valores fijos del campo o su derivada normal, pero no necesariamente iguales a cero) se obtienen de la acción  $I_0$  o  $I_1$  agregando términos de borde adecuados.

La pregunta es si es posible escribir un principio de acción que contenga estas tres familias de C.B. como ecuaciones en el borde para variaciones arbitrarias de los campos allí.

Consideremos la siguiente acción

$$I_S = -\frac{1}{2} \int_M \{\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi\} d^4x - \frac{1}{2} \int_{\partial M} \left\{ \frac{1}{2} a(x) \Phi^2 - b(x) \Phi \right\} d^3x, \quad (2.6)$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones arbitrarias y no se varían en el principio de acción, es decir, no son campos de la teoría.

La variación de  $I$  es:

$$\delta I_S = \int_M [e.m.] \delta \Phi d^4x - \frac{1}{2} \int_{\partial M} [\partial_n \Phi + a(x)\Phi - b(x)] \delta \Phi d^3x. \quad (2.7)$$

donde  $e.m.$  son las ecuaciones de movimiento. La acción tiene un extremo para variaciones arbitrarias de los campos en  $M$  y  $\partial M$  si y sólo si se satisface

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = 0, \quad \text{en } M, \quad (2.8)$$

$$\partial_n \Phi + a(x)\Phi - b(x) = 0, \quad \text{en } \partial M. \quad (2.9)$$

Es claro que la última ecuación contiene los casos tratados anteriormente (para elecciones adecuadas de las funciones  $a$  y  $b$ ). Así por ejemplo, la elección  $a = 0$  corresponde a dar C.B. tipo Neumann; nótese que, a diferencia del caso anterior, no es necesario fijar la derivada normal igual a cero para tener una variación bien definida.

Como último ejemplo revisemos el caso de electromagnetismo. El análisis del problema es idéntico al caso del campo escalar, de suerte que sólo daremos los resultados.

Consideremos la acción para el campo electromagnético  $A_\mu$  en la variedad  $M$  con borde conexo  $\partial M$ , en un espacio plano con métrica  $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

$$I_{E.M} = -\frac{1}{4} \int_M F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x + \int_{\partial M} \left\{ \frac{1}{2} \alpha(x) A_\mu - \beta_\mu(x) \right\} A^\mu d^3x, \quad (2.10)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .  $\alpha$  y  $\beta_\mu$  son funciones que especifican las condiciones de borde.

La variación de (2.10) es

$$\delta I_{E.M} = \int_M [\partial^\mu F_{\mu\nu}] \delta A^\nu d^4x + \int_{\partial M} [n^\nu F_{\mu\nu} + \alpha A_\mu - \beta_\mu] \delta A^\mu d^3x. \quad (2.11)$$

Esta acción tiene un extremo si, para variaciones arbitrarias de los campos en  $M$  y  $\partial M$ , se satisface:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \text{en } M, \quad (2.12)$$

$$n^\nu F_{\mu\nu} + \alpha A_\mu + \beta_\mu = 0, \quad \text{en } \partial M. \quad (2.13)$$

Nuevamente, C.B. tipo Dirichlet y Neumann están contenidas en la última ecuación escogiendo  $\alpha$  y  $\beta^\mu$  de manera adecuada. Por ejemplo,  $\alpha = 0$  es la C.B. tipo Neumann y no es otra cosa que la ecuación para una corriente superficial  $j^\mu = \beta^\mu$  en  $\partial M$ .

Las acciones construidas de esta manera tiene información acerca de cómo depende la teoría de las C.B. del problema. En el enfoque actual en que se busca la relación entre las teorías definidas en el interior de la variedad con teorías que pudieran existir en los bordes y que contengan la información de las C.B. del problema, acciones como (2.6) resultan útiles para estudiar la dependencia de la teoría en, al menos, algunas clases amplias de C.B. Un problema que surge en este enfoque es cómo hacer los campos  $\alpha$  y  $\beta$  dinámicos de manera que la teoría en el volumen pueda relacionarse con una teoría en el borde; sin embargo este problema escapa al objetivo central de este trabajo, pero queda como un problema abierto que debe ser tratado en el futuro.

## 2.3 Cantidades Conservadas y Teorema de Noether.

Una pregunta natural que surge en este punto es qué sucede con las cantidades conservadas asociadas al Teorema de Noether. Para responder esto recordemos brevemente qué es una simetría de Noether y cuál es la cantidad conservada asociada a ella.

Supongamos que se tiene un lagrangiano que depende de ciertos campos  $\Phi^A$  y de sus derivadas  $L(\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A, x^\mu)$ . Entonces, las transformaciones  $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$  junto con  $\delta \Phi^A = \Phi'^A(x') - \Phi^A(x)$  son transformaciones de simetría de Noether si

$$L'(\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A, x'^\mu) = L(\Phi^A, \partial_\mu \Phi^A, x^\mu) + \partial_\alpha \Omega^\alpha, \quad (2.14)$$

$$\delta L = \partial_\alpha \Omega^\alpha. \quad (2.15)$$

Condición que puede reescribirse

$$\begin{aligned} -\partial_\alpha \Omega^\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \Phi^A} \delta \Phi^A + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \partial_\mu (\delta \Phi^A) + \\ &\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \left( L \delta_\nu^\mu - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \partial_\nu \Phi^A \right) \partial_\mu (\delta x^\nu). \end{aligned} \quad (2.16)$$

y la cantidad conservada es

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \delta \Phi^A + \left( L \delta_\nu^\mu - \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \partial_\nu \Phi^A \right) \delta x^\nu + \Omega^\mu. \quad (2.17)$$

De suerte que las simetrías de Noether de antes, siguen siendo simetrías, pero las cantidades conservadas serán distintas pues habrá una nueva función  $\Omega^\mu$  en las corrientes conservadas.

Por ejemplo, el caso del campo escalar. Consideremos la acción (2.1) y la transformación de simetría

$$\delta \Phi = \epsilon,$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro constante. La corriente conservada en este caso es

$$j^\mu = \partial^\mu \Phi,$$

y se ha escogido  $\Omega^\mu = 0$ . Probar que esta corriente es conservada es directo. Consideremos ahora la acción que contiene los términos de borde (2.6). Supongamos que

$$\partial^\alpha k_\alpha = \frac{1}{2} a(x) \Phi^2 - b(x) \Phi.$$

Una posible elección de  $k_\alpha$  es  $k_\alpha = n_\alpha (\frac{1}{2} a(x) \Phi^2 - b(x) \Phi)$ , donde  $n^\alpha$  es el vector normal a la superficie y  $n_\alpha n^\alpha = 1$ . Entonces, la variación del lagrangiano es

$$\begin{aligned} \delta L &= \partial^\alpha \{ n_\alpha [a(x) \Phi - b(x)] \delta \Phi \}, \\ &= \partial^\alpha \{ n_\alpha [a(x) \Phi - b(x)] \epsilon \}. \end{aligned}$$

De manera que se puede escoger  $\Omega^\mu = n^\mu[a(x)\Phi - b(x)]$  y el teorema de Noether da la cantidad conservada al igual que antes. En este caso, la corriente conservada es

$$j^\mu = \partial^\mu\Phi + n^\mu[a(x)\Phi - b(x)].$$

Este mismo análisis se aplica al caso electromagnético y a gravitación. Es claro entonces que el teorema de Noether sigue siendo válido y lo único que cambia es la cantidad conservada que se obtiene escogiendo  $\Omega^\mu$  de manera adecuada.

Ahora bien, no todas las acciones que nos interesan tienen lagrangianos de segundo orden. En efecto, basta con mirar la formulación hamiltoniana de cualquier problema en mecánica clásica para ver que las formulaciones de primer orden también son significativas. A continuación estudiaremos este problema.

## 2.4 Acciones de primer orden.

Como dijimos, las acciones cuyo lagrangiano contiene sólo primeras derivadas de los campos es también un problema de interés. Estudiaremos el caso de la acción de Chern-Simons porque la teoría de gravitación en tres dimensiones con constante cosmológica puede escribirse en términos de esta acción ([28, 37] y Apéndice A) y además los sistemas descritos por la mecánica clásica también pueden reducirse a una acción de este tipo.

Existen dos casos que son de nuestro interés: variedades con un borde conexo y variedades con dos bordes no conectados.

### 2.4.1 Formulación de Chern-Simons.

La acción de Chern-Simons para la conexión  $A$  de un grupo de Lie  $G$  es

$$I_{C.S.}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}[AdA + \frac{2}{3}A^3], \quad (2.18)$$

donde  $A$  es la 1-forma conexión del grupo  $G$ ,  $\text{Tr}$  es la traza en alguna representación,  $k$  es una constante cuyo valor será especificado más adelante.  $M$  es una variedad con borde  $\partial M$ ; la topología de  $M$  es cilíndrica (Figura I). El borde es el manto de dicho

cilindro para algún valor fijo de  $r$ . La variedad está parametrizada por coordenadas  $(r, \phi, t)$ ;  $t$  es la coordenada a lo largo de  $\mathfrak{R}$  y  $(r, \phi)$  son las coordenadas del manto.

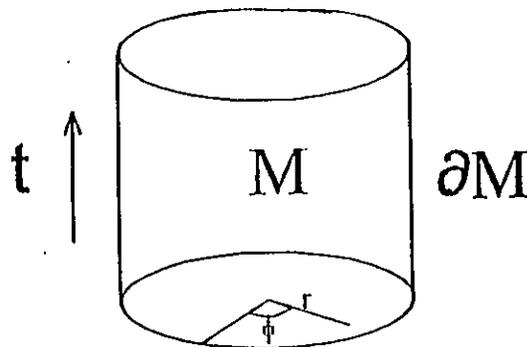


Figura I: Topología de la variedad  $M$  con borde  $\partial M$  conexo.

Estudiamos los casos señalados en el punto anterior.

### 2.4.2 Variedades con un borde conexo.

En este caso la variedad posee sólo un borde que denotaremos por  $\partial M$  y está definido por  $r = \text{cte}$ .

La variación de (2.18) es

$$\delta I_{G.S.} = \frac{k}{2\pi} \int_M \text{Tr}\{F \wedge \delta A\} - \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}\{\epsilon^{\alpha\beta} A_\alpha \delta A_\beta\} dt \wedge d\phi, \quad (2.19)$$

donde  $\{a, b\} \in \{t, \phi\}$ ,  $F = dA + A^2$  y  $\epsilon^{\alpha\beta}$  es el tensor antisimétrico de Levi-Civita.

Es claro que una elección posible de C.B. es fijar los campos sobre  $\partial M$  (en particular iguales a cero como sugiere el término de borde, pero sabemos que la generalización de este caso es directa). Nótese además que fijar derivadas de la conexión no es una C.B. que pueda implementarse en el principio de acción, lo cual es consistente con el hecho que las ecuaciones de movimiento son de primer orden.

Para ver si las C.B. tipo Dirichlet son suficientes para integrar las ecuaciones de movimiento, escribamos en detalle las ecuaciones de campo  $F_{\mu\nu}^a = 0$

$$\partial_r A_t^a - \partial_t A_r^a + [A_r, A_t]^a = 0, \quad (2.20)$$

$$\partial_r A_\phi^a - \partial_\phi A_r^a + [A_r, A_\phi]^a = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_t A_\phi^a - \partial_\phi A_t^a + [A_t, A_\phi]^a = 0. \quad (2.22)$$

Aquí,  $[A_\mu, A_\nu]^a = f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$ , donde  $f_{bc}^a$  son las constantes de estructura del álgebra de Lie de  $G$ .

Supongamos que nos damos los campos  $A_t^a$  y  $A_\phi^a$  para algún  $r_0$  fijo. Entonces, si además se conoce  $A_r^a$  allí es posible calcular el valor de  $A_t^a$  y  $A_\phi^a$  en el punto  $r_0 + \delta$  usando las ecuaciones (2.20) y (2.21). Nótese además que (2.22) impone una restricción sobre los campos  $A_t^a$  y  $A_\phi^a$  que debe ser satisfecha por las condiciones de borde también. Este proceso para conocer el valor de los campos se puede extender para cualquier valor de  $r$  sólo si se conoce el valor  $A_r^a$  en toda la variedad. Esto es así porque no existe una ecuación dinámica para este campo. Dicho de otra forma, no existe una ecuación que contenga a  $\partial_r A_r^a$ ; esto es análogo a lo que ocurre con  $A_t^a$  cuando uno escoge una foliación temporal de la variedad; así, en la foliación radial que hemos escogido debemos fijar el valor de  $A_r^a$  en todas partes.

En resumen, para resolver las ecuaciones de movimiento es suficiente dar los campos  $A_t^a$  y  $A_\phi^a$  en el borde de la variedad (es decir:  $A_t^a(r_0, t, \phi)$  y  $A_\phi^a(r_0, t, \phi)$ ), junto con el campo  $A_r^a$  en toda la variedad, (es decir  $A_r^a(r, t, \phi)$ , para todo  $(r, t, \phi) \in M$ ). La acción (2.18) tiene un extremo sobre los campos que satisfacen las ecuaciones de movimiento y en el borde satisfacen C.B. tipo Dirichlet.

Estas C.B. no son las únicas que hacen (2.18) diferenciable. En efecto, consideremos la condición [15, 29, 30].

$$A_t^a = \Omega(r, t, \phi) A_\phi^a. \quad (2.23)$$

donde  $\Omega$  es una función arbitraria y fija. Es evidente que con esta C.B. el término de borde en (2.19) es cero y por lo tanto uno espera que las ecuaciones de movimiento sean integrables sólo con esta condición. Sin embargo, del análisis hecho anteriormente se ve que esto no es suficiente; debemos además dar  $A_t^a(t, \phi)$  en la frontera de

la variedad (o, lo que en este caso es equivalente, debemos dar  $A_\phi^a(t, \phi)$ ) y al igual que antes, hay que fijar  $A_r^a(r, t, \phi)$ .

La Tabla I resume la situación antes descrita para variedades con un solo borde. Aquí, ( $N$ ) es una condición necesaria y ( $S$ ), suficiente.

Condición de Borde ( $r = r_0$ )	$N$	$S$	Sistema Integrable
$A_t^a(t, \phi)$ y $A_\phi^a(t, \phi)$	Si.	Si.	Si.
$A_t^a(t, \phi) = \Omega(r, t, \phi)A_\phi^a(t, \phi)$	Si.	No.	No.
$A_t^a = \Omega(r, t, \phi)A_\phi^a$ ó $A_t^a(t, \phi)$	Si.	Si.	Si.

Tabla I: C.B. que hacen diferenciable la acción de Chern-Simons.

Al igual que en el caso del campo escalar o electromagnético, aquí también se puede escribir una acción que contenga la información de las C.B. antes señaladas.

Consideremos la acción

$$I_D = I_{C.S.}[A] + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} Tr \left[ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta - \epsilon^{\alpha\beta} f_\alpha A_\beta \right] dt \wedge d\phi, \quad (2.24)$$

donde  $h^{\alpha\beta}$  es una matriz simétrica, invertible y  $f$  es una 1-forma con valores en el álgebra de Lie de  $G$  (es decir  $f = f_\mu^a J_a dx^\mu$ ).

La variación de (2.24) es

$$\delta I_D = \frac{k}{2\pi} \int_M Tr \{ F \wedge \delta A \} + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} Tr \{ [Q^{\alpha\beta} A_\alpha - f^\beta] \delta A_\beta dt \wedge d\phi, \quad (2.25)$$

donde

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta} &= h^{\alpha\beta} - \epsilon^{\alpha\beta}, \\ f^\beta &= \epsilon^{\alpha\beta} f_\alpha. \end{aligned} \quad (2.26)$$

La acción tiene un extremo sobre las soluciones de

$$F_{\mu\nu}^a = 0, \quad \text{en } M, \quad (2.27)$$

$$Q^{\alpha\beta} A_\alpha - f^\beta = 0 \quad \text{en } \partial M. \quad (2.28)$$

Es claro que la ecuación (2.28) especifica el campo  $A_\alpha$  en el borde de la variedad si la matriz  $Q^{\alpha\beta}$  es invertible. Esta ecuación, entonces, corresponde a las C.B. tipo Dirichlet antes discutidas.

Por otra parte, la acción

$$I_P = I_{C.S.}[A] + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \right\} dt \wedge d\phi, \quad (2.29)$$

es estacionaria si se satisfacen las ecuaciones de movimiento en el volumen y, en el borde, se satisface

$$Q^{\alpha\beta} A_\alpha = 0. \quad (2.30)$$

Nótese que, para que este sistema de ecuaciones no lije trivialmente el valor de  $\dot{A}_\alpha$  (con  $\alpha \in \{t, \phi\}$ ), debemos exigir la condición adicional

$$\det(Q^{\alpha\beta}) \neq 0, \quad (2.31)$$

o equivalentemente,  $\det(h_{ij}) \neq -1$ . Nótese que en este caso, además, debemos dar el campo  $A_t$  ó  $A_\phi$  en el borde para poder integrar las ecuaciones de movimiento.

Estas dos acciones  $I_D$  e  $I_P$  generalizan lo discutido en esta sección.

### 2.4.3 Variedades con bordes desconexos.

En este caso el borde de la variedad  $M$  consiste en dos subvariedades,  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$ , desconexas. Es decir,  $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ , con  $\partial M_1 \cap \partial M_2 = \emptyset$  como muestra la siguiente figura.

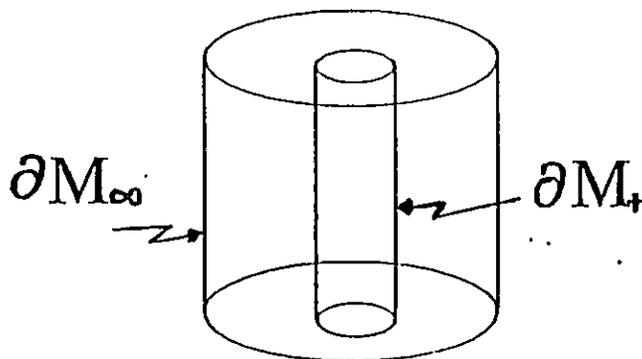


Figura II: Variedad  $M$  con dos bordes desconexos,  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$ .

El problema es entonces definir un principio de acción para variedades de este tipo. La razón por la que nos interesan variedades como éstas es que usualmente se considera el horizonte como un borde y  $r \rightarrow \infty$  como otro borde. El problema de identificar en cuál de estos residen los grados de libertad que dan origen a la entropía del agujero negro no está resuelto aún y de hecho, cálculos como los que serán estudiados en el próximo capítulo sólo necesitan de la existencia del borde  $r \rightarrow \infty$ , mientras que lo que veremos en el Capítulo 4, hace referencia sólo al horizonte.

Es claro que no es posible escribir un principio de acción como  $I_D$  que contenga dos términos de bordes (es decir, con dos funciones  $f^a$  y  $h_{ij}$  para cada borde) porque las ecuaciones de movimiento son de primer orden, por lo que fijar los campos en ambos bordes sobredetermina el problema.

Otra posibilidad es considerar una acción del tipo  $I_P$ , de manera que en cada borde se satisfaga la condición (2.30). Esto también sobredetermina el problema si es que  $A_t$  ó  $A_\phi$  están dados.

En resumen, la generalización de las acciones  $I_D$  o  $I_P$  (en el sentido previamente discutido) para variedades con dos bordes desconexos, en general produce problemas de incompatibilidad de las C.B.

Una solución posible es la siguiente<sup>3</sup>. Supongamos que damos la condición  $A_t^a(r_0, t, \phi)$  (es decir, fijamos el campo  $A_t^a$ , digamos en  $\partial M_1$ ). La ecuación (2.20) permite conocer  $A_t^a$  en toda la variedad; en particular en la subvariedad  $\partial M_2$  sobre la que vamos a imponer la condición (2.23). Esta condición permite entonces conocer  $A_\phi^a$  en ese borde y, a partir de (2.21) es posible conocer este campo sobre toda la variedad.

En resumen, para variedades de este tipo, es posible dar un conjunto de C.B. que es una combinación de (2.23) y (2.28). Estas C.B. deben darse una en cada borde.

Consideremos la siguiente acción

$$I_M = I_{C.S.}[A] + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_1} \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta \right] dt \wedge d\phi$$

<sup>3</sup>Como siempre, estamos suponiendo que  $A_t^a$  está dado en toda la variedad.

$$-\frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_2} \text{Tr}[A_t A_\phi - f A_\phi] dt \wedge d\phi. \quad (2.32)$$

donde  $h^{ij}$  es una matriz simétrica con  $\det(h^{ij}) = -1$  y  $f$ , una función arbitraria que no se varía en el principio de acción. La variación de  $I_M$  es

$$\begin{aligned} \delta I_M = & \int_M (c.m.) + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_1} \text{Tr}[Q^{\alpha\beta} A_\alpha \delta A_\beta] dt \wedge d\phi \\ & - \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_2} \text{Tr}[(2A_t - f) \delta A_\phi] dt \wedge d\phi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por lo tanto,  $I_M$  es estacionaria si se satisfacen las ecuaciones de movimiento y además se satisfacen las siguientes ecuaciones en los bordes

$$Q^{\alpha\beta} A_\alpha^a = 0, \quad \text{en } \partial M_1, \quad (2.34)$$

$$2A_t^a - f^a = 0, \quad \text{en } \partial M_2. \quad (2.35)$$

La ecuación en  $\partial M_1$  es justamente la condición (2.23), que como ya vimos no determina totalmente el problema. La segunda ecuación (en  $\partial M_2$ ) da el valor del campo  $A_t^a$  en el otro borde, lo que permite integrar completamente el problema. De manera similar se puede escribir una acción en la que la C.B. sea el campo  $A_\phi^a$  dado en el borde.

Finalmente nos queda analizar el problema de la restricción (2.22) que debe ser satisfecha en todas partes. En particular esa condición debe cumplirse en  $\partial M_1$ ; puesto que allí además se satisface (2.23), la ecuación (2.22) deviene en

$$(\partial_t - \partial_\phi \Omega) A_\phi^a = 0. \quad (2.36)$$

Supongamos que nos desplazamos en la dirección radial una cantidad  $\varepsilon$  a partir de  $r_1$ . Entonces, las ecuaciones (2.20) y (2.21) se pueden integrar (a primer orden en  $\varepsilon$ ) y es directo demostrar que la constricción se satisface allí. Es decir, es suficiente dar las C.B. antes señaladas y que satisfagan (2.22) para que las ecuaciones de movimiento se puedan integrar completamente.

En resumen, la acción  $I_M$  es la acción correcta para variedades que poseen dos bordes no conexos. El significado de la condición (2.34) será discutido en el Capítulo 4 en el contexto de agujeros negros y proyectores. Mostraremos que la

condición (2.34) no es otra cosa que pedir que la variedad posea un horizonte de eventos y que la forma simétrica  $h_{\alpha\beta}$  puede ser interpretada como una métrica en el borde.

En las secciones siguientes aplicaremos lo discutido en la primera parte al caso de gravitación en dimensiones 3 y 4.

## 2.5 Gravitación en 3+1.

Consideremos la acción para el campo  $g_{\mu\nu}$  en la variedad  $M$  con borde  $\partial M^4$ .

$$I_G = \int_M \sqrt{-g} R d^4 x \quad (2.37)$$

donde  $R$  es el escalar de curvatura de la variedad  $M$  y  $g$ , el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Para estudiar el comportamiento en el borde, calculemos la variación de  $I_G$ .

$$\begin{aligned} \delta I_G &= \int_M (e.m) \sqrt{-g} d^4 x \\ &+ \int_{\partial M} [g_{\sigma\beta} g^{\alpha\mu} (n_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - n_\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\beta)] \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\nu} d^3 \Sigma \\ &+ \int_{\partial M} [n^\mu g^{\sigma\nu} - n^\sigma g^{\mu\nu}] \sqrt{-g} \delta (g_{\mu\nu,\sigma}) d^3 \Sigma. \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde  $n^\mu$  es el vector normal a la superficie  $\partial M$  y  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  son los símbolos de Christoffel para la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

La ecuación de la variación de  $I_G$  nos dice que una condición de borde posible es fijar la métrica de la variedad, lo cual demandaría modificar (2.37), o bien fijar la derivada de la métrica, lo cual también necesitaría una modificación de la acción.

Definamos la acción

$$I_{Gd} = \int_M \sqrt{-g} R d^4 x - \int_{\partial M} [n^\mu g^{\nu\sigma} - n^\sigma g^{\mu\nu}] g_{\mu\nu,\sigma} d^3 \Sigma. \quad (2.39)$$

<sup>4</sup>Hemos suprimido las constantes y los factores numéricos porque no son relevantes en esta parte de la discusión.

Al variar esta acción obtenemos, como es usual, las ecuaciones de movimiento en  $M$  y en el borde un término que es proporcional a la variación del campo, pero no de su derivada.

Esta acción es posible escribirla en términos de tensores de la subvariedad  $\partial M$ ; para esto, supongamos que  $M$  tiene la topología de un cilindro  $\Sigma_3 \times \mathfrak{R}$ , donde  $\Sigma_3$  es una superficie tipo espacio y  $\mathfrak{R}$ , el tiempo.  $\partial M$  es la superficie  $S^2 \times \mathfrak{R}$ . La superficie  $\Sigma_3$  tiene coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , mientras que  $t$  es la coordenada a lo largo de  $\mathfrak{R}$ . El elemento de línea<sup>5</sup>, en una descomposición tipo A.D.M., radial, es:

$$ds^2 = N^{-2} dr^2 + h_{ab} dx^a dx^b \quad (2.40)$$

aquí,  $h_{ab}$  es la métrica de  $\Sigma_3$  con  $r$  constante (es decir, la métrica de  $S^2(r = cte) \times \mathfrak{R}$ ). En términos de esta métrica (2.39) resulta ser

$$I_{Gd} = \int_M \sqrt{-g} R d^4 x + 2 \int_{\partial M} K_{ab} h^{ab} \sqrt{-h} d^3 x \quad (2.41)$$

donde  $K_{ab}$  es la curvatura extrínseca de la variedad  $\partial M$ , que en términos de la métrica anterior es  $K_{ab} = -\frac{N}{2} \partial_r h_{ab}$ .

El hecho que el término de borde de la variación de esta acción sea proporcional sólo a la variación de la métrica en el borde, es un hecho conocido. La construcción de una acción como la que hemos venido discutiendo es ahora directa.

Consideremos la acción

$$I = \int_M \sqrt{-g} R d^4 x - 2 \int_{\partial M} (K - t - f) \sqrt{-h} d^3 x \quad (2.42)$$

donde  $K = K_{ab} h^{ab}$ ,  $t = t_{ab} h^{ab}$  y  $f(x^\alpha)$  es una función arbitraria. La variación de esta acción es

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_M (e.m)_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x \\ & + \int_{\partial M} [K h_{ab} - K_{ab} + 2t_{ab} - (t + f) h_{ab}] \delta h^{ab} d^3 x. \end{aligned} \quad (2.43)$$

<sup>5</sup>En este trabajo sólo estudiaremos el caso de métricas estáticas.

de manera que, la acción tiene un extremo, para variaciones arbitrarias de los campos en  $M$  y en  $\partial M$ , si se satisfacen las ecuaciones

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad \text{en } M, \quad (2.44)$$

$$(K - t + f)h_{ab} - K_{ab} + 2t_{ab} = 0, \quad \text{en } \partial M. \quad (2.45)$$

Con este enfoque del problema uno puede mostrar que, por ejemplo, si uno estudia las propiedades de un agujero negro en una región tipo tiempo cercana al horizonte (el así llamado *stretched horizon*), en vez de estudiar el horizonte, tal región se comporta como un fluido cuyas ecuaciones pueden derivarse de (2.45). Así, la acción (2.42) es una acción apropiada para estudiar el problema de membranas en gravitación [31].

A continuación discutiremos el mismo problema en dimensión tres.

## 2.6 Gravitación en dimensión 3.

Como se muestra en el Apéndice A, la gravitación en 2+1 dimensiones con constante cosmológica negativa, es equivalente a una teoría de Chern-Simons para el grupo  $SO(2,2)$ . También se muestra allí que si el punto de partida es la acción de Chern-Simons uno llega a la formulación métrica de la teoría donde la acción es la acción de Hilbert-Einstein más un término de borde que no es el mismo que aparece en (2.41). En principio no tendrían por qué ser iguales, pero sabemos que una acción como ésta tiene un mínimo cuando se ha fijado la métrica inducida en la variedad. Veamos qué sucede en este otro caso.

La acción que nos interesa es

$$I_{grav.} = \frac{1}{16\pi G} \int_M [R + \frac{2}{\ell^2}] \sqrt{-g} d^3x + \frac{1}{16\pi G} \int_{\partial M} \sqrt{-h} K d^2x. \quad (2.46)$$

donde la variedad tiene la topología descrita en el apéndice A.

Nótese que, a diferencia del caso de dimensión cuatro, aquí el término de borde aparece con un factor 1. Las condiciones de borde naturales emergen de la

variación de esta acción. Usando el resultado (2.38), se obtiene

$$\delta I_{grav.} = \frac{1}{16\pi G} \int_M c.m._{,\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^3x - \frac{1}{16\pi G} \int_{\partial M} h^{ij} \{ \sqrt{-h} \delta [K_{ij}] - K_{ij} \delta [\sqrt{-h}] \} d^2x$$

Es claro que el término de borde se puede escribir como  $\delta[\frac{K_{ij}}{\sqrt{-h}}]$ , de manera que, una condición de borde posible para resolver las ecuaciones de movimiento es fijar esta cantidad. A diferencia del caso en dimensión cuatro, aquí ya no tenemos una interpretación directa del significado geométrico de la C.B. Antes resultaba claro que lo que uno estaba pidiendo era que la geometría del borde no cambiara (es decir  $\delta h_{ij} = 0$ ), ahora es una mezcla de la métrica y su derivada normal lo que se exige que no cambie ( $\delta[\frac{K_{ij}}{\sqrt{-h}}] = 0$ ).

En el capítulo siguiente veremos que esta condición tiene una interpretación posible en el contexto de la termodinámica, donde ya no interesará si es la métrica, sus derivadas o combinaciones de ambas las que se mantienen fijas; lo que interesa ahora son los parámetros termodinámicos que se mantiene fijos y que definen el ensamble.

## Capítulo 3

# Entropía de Agujeros Negros en la Aproximación Semiclásica.

### 3.1 Introducción.

En este capítulo estudiaremos la entropía de agujeros negros en la aproximación semiclásica para dimensiones  $3+1$  y  $2+1$ . En el primer caso, calculado por G. Gibbons y S. Hawking [18] en 1977, se encontró que la entropía del agujero negro se puede obtener de la formulación de integrales funcionales de termodinámica, si la acción de Hilbert-Einstein es regularizada mediante la introducción de un contratérmino en el borde de la variedad.

En el segundo caso, se muestra que es suficiente usar la acción de Chern-Simons para calcular la entropía del agujero negro puesto que el término de borde que aparece al pasar a la formulación métrica de la teoría, cancela los infinitos que provienen de la integral de volumen. Se encuentra entonces que la acción de Chern-Simons, provee una formulación covariante de la integral funcional que es no divergente [32].

El paso de una dimensión a otra no es directo, es decir, si uno aplica a tres dimensiones el mismo procedimiento que usó en 4, no obtiene el resultado correcto para la entropía. En este capítulo se establece un procedimiento único que sí permite calcular la función partición en ambos casos.

## 3.2 Entropía del agujero negro en 3+1 dimensiones.

Como se demuestra en el Apéndice B, las propiedades termodinámicas de un agujero negro pueden obtenerse a partir de la formulación cuántica de la teoría vía la integral funcional. Es decir, bastaría con calcular el kernel para la teoría de gravitación, en su formulación euclídea, para tener las propiedades termodinámicas del campo gravitacional producido por un agujero negro.

Sin embargo el problema no es directo. En efecto, el objeto que nos interesa es

$$K = \int D[g_{\mu\nu}] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} I[g]\right\}, \quad (3.1)$$

donde  $D[g_{\mu\nu}]$  denota una medida de integración en el espacio de las métricas (módulo difeomorfismos) e  $I$  es la acción. A pesar que la expresión (3.1) es no renormalizable, es posible calcular la integral de camino al menos en la aproximación semiclásica (Apéndice B).

La función partición para el campo gravitatorio viene dada por:

$$Z = \exp\{-I_{euct.}[g_0]\} \quad (3.2)$$

donde  $I_{euct.}$  es el valor de la acción en la solución clásica  $g_0$ , en la formulación euclídea.

Como se sabe (Apéndice B), conociendo la función partición, uno puede obtener la energía libre del sistema ( $F$ ) y por lo tanto el valor de las variables termodinámicas de interés. De (3.2) se obtiene, para este caso

$$F = I_{euct.}[g_0], \quad (3.3)$$

Entonces, debemos calcular el valor de la acción en la solución clásica. Para esto hay que definir la acción, es decir dar el término de volumen (que no es otra cosa que la acción de Hilbert-Einstein que vimos en el Capítulo 1) más el término de borde (porque como se dijo, la acción de la teoría está definida módulo términos de borde). Así, lo único que queda por determinar es el término de borde adecuado para la acción de Hilbert-Einstein.

La acción euclídea apropiada para la gravitación<sup>1</sup>, con la condición de borde que la métrica en el borde,  $h_{ij}$ , esté fija, es

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_M R \sqrt{g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} [K - t] \sqrt{h} d^3x. \quad (3.4)$$

donde  $K = K_{ij}h^{ij}$ , es la traza de la curvatura extrínseca, y  $t = t_{ij}h^{ij}$  es un tensor en principio arbitrario. La incorporación de este nuevo tensor no afecta las ecuaciones de movimiento (con las condiciones de borde antes especificadas), sólo afecta al valor de la acción y será escogido de manera que  $I$  sea finita en la solución clásica.

La solución euclídea de las ecuaciones de movimiento, estática, con simetría esférica, es la métrica de Schwarzschild con signatura  $\text{diag}(+, +, +, +)$

$$ds^2 = N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.5)$$

donde  $N^2 = 1 - \frac{2M}{r}$ . La variedad euclídea está definida por las coordenadas  $t, r, \theta, \phi$ . La coordenada temporal es periódica con período  $\beta$ .

Al evaluar la acción en la solución clásica, la única contribución proviene del término de borde porque, en la solución,  $R = 0$ . Las componentes de  $K_{ij}$  son

$$K_{tt} = \frac{NM}{r^2}, \quad (3.6)$$

$$K_{\theta\theta} = -rN, \quad (3.7)$$

$$K_{\phi\phi} = -rN \sin^2(\theta). \quad (3.8)$$

de manera que

$$K\sqrt{h} = (3M - 2r) \sin^2(\theta). \quad (3.9)$$

Puesto que el borde es  $r \rightarrow \infty$ , la expresión anterior será divergente, de manera que conviene escoger  $t_{ij}$  de la siguiente manera

$$t_{tt} = 0, \quad (3.10)$$

---

<sup>1</sup>Con  $G = 1$ .

$$t_{\theta\theta} = -r, \quad (3.11)$$

$$t_{\phi\phi} = -r \sin^2(\theta). \quad (3.12)$$

Es decir,  $t_{ij} = K_{ij}(M = 0)$ , lo que regulariza el valor de  $I$ .

Entonces, la acción apropiada para obtener la termodinámica del sistema es

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_M R \sqrt{g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} \left[ K + \frac{2}{rN} \right] \sqrt{h} d^3x. \quad (3.13)$$

Por lo tanto, el valor de la acción euclídea en la solución (3.5) es

$$I_{eucl.}[g_0] = 12\pi M^2, \quad (3.14)$$

$$= \frac{1}{2} M \beta. \quad (3.15)$$

y la función partición:

$$F = \frac{1}{2} M \beta.$$

Finalmente, la entropía del agujero negro es (ver Apéndice B para las relaciones termodinámicas)

$$S = \frac{\beta M}{2},$$

$$= \frac{A}{4}.$$

donde  $A = 4\pi r_+^2$  y  $r_+ = 2M$ , es el área del horizonte de eventos. Esta relación se mantiene para un agujero negro con rotación; es decir, la entropía es proporcional al área del horizonte de eventos.

En lo que sigue, calcularemos la entropía de un agujero negro en 3 dimensiones usando el procedimiento ya descrito.

### 3.3 Entropía de un agujero negro en tres dimensiones.

Al igual que antes, la función partición del sistema (en la aproximación semiclásica) está dada por el valor de la acción euclídea en la solución clásica. Entonces debemos definir la acción apropiada para el problema y evaluar la solución allí.

La solución euclídea del agujero negro tridimensional con momentum angular<sup>2</sup> es [20]

$$ds^2 = \beta^2 N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (N^\phi dt + d\phi)^2 \quad (3.16)$$

con

$$N^2 = \frac{r^2}{\ell^2} - M - \frac{J^2}{4r^2}, \quad (3.17)$$

$$N^\phi = \frac{J}{2r^2} + \Omega. \quad (3.18)$$

Los rangos de las coordenadas son  $0 \leq t \leq 1$  (nótese que hemos introducido un parámetro  $\beta$  en la métrica, igual al período del tiempo euclídeo),  $r_+ \leq r \leq \infty$ , donde  $r_+$  es solución de  $N^2 = 0$ , y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Los parámetros  $M$  y  $J$  son la masa y momentum angular, respectivamente, mientras que  $\Omega$  es la velocidad angular euclídea.

Consideremos la acción euclídea para gravedad en 3 dimensiones con constante cosmológica negativa

$$I_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_M \left( R + \frac{2}{\ell^2} \right) \sqrt{g} d^3 x^3. \quad (3.19)$$

donde hemos escogido  $8G = 1$ . Nótese que, a diferencia del caso en 3+1 dimensiones, aquí no aparece un término de borde relacionado con la traza de la curvatura extrínseca. La razón es que  $\int [K - t]$  es cero si  $t$  se escoge como el término que

<sup>2</sup>El cálculo sin momentum angular es idéntico y, naturalmente, el resultado se mantiene.

<sup>3</sup>El signo menos proviene de exigir que la acción euclídea sea positiva.

regulariza el valor de la acción; esto es válido para espacios que son asintóticamente anti-de Sitter [26].

Calculemos entonces el valor de la acción en la solución clásica. Notando que en el caso de agujeros negros, la variedad tiene curvatura constante  $R = -\frac{6}{\ell^2}$  el cálculo es directo y se encuentra

$$I_0 = \frac{2\beta}{\ell^2}(r_\infty^2 - r_+^2), \quad (3.20)$$

donde  $r_\infty$  es  $r \rightarrow \infty$ . Es claro que esta expresión no es finita. La regularización natural es restar a (3.20) el valor de la acción en el vacío, es decir con  $M = \Omega = J = 0$ . El valor de la acción en este límite es  $-2\beta r_\infty^2/\ell^2$ , de manera que la acción regularizada es

$$I_{reg} = -\frac{1}{2\pi} \int_M \left( R + \frac{2}{\ell^2} \right) \sqrt{g} d^3x - \frac{2\beta r_\infty^2}{\ell^2}, \quad (3.21)$$

y su valor en la solución de agujero negro es  $-2\beta r_+^2/\ell^2$ .

El problema que debemos estudiar ahora es si esta acción corresponde a la acción apropiada para el ensamble canónico. Para esto, evaluemos (Capítulo 2) en la solución (3.5)

$$\delta I_{reg} = \int_M [e.m.]_{\mu\nu} \delta^{\mu\nu} \sqrt{g} d^3x - J\delta(\beta\Omega) - \beta\delta M, \quad (3.22)$$

Es claro que esta acción, vista como función de los parámetros termodinámicos, es estacionaria bajo variaciones arbitrarias de  $M$  y  $\beta\Omega$ , lo que no corresponde a ningún ensamble termodinámico usual. La acción estacionaria bajo variaciones en las que  $\beta$  y  $\Omega$  están fijos, pero no  $M$ , y que por lo tanto es consistente con los requerimientos del ensamble canónico es

$$I_c = I_{reg} + \beta M. \quad (3.23)$$

El valor de esta acción en la solución clásica es ahora  $\beta(M + \Omega J) - A/4$  y por lo tanto, la entropía del sistema es  $A/4$ .

Nótese que, en principio, se podría definir un ensamble microcanónico (MC) usando el argumento anterior. En efecto, basta sustraer el término  $\beta(M + \Omega J)$  a

la acción regularizada para tener un principio de acción estacionario en el que la energía del sistema está fija ( $\delta M = 0$ ). De hecho, la acción así definida, da el resultado esperado para la entropía en este ensamble; sin embargo al trabajar en el ensamble MC uno necesita conocer el número de estados del sistema (o su densidad), lo cual es justamente lo que no conocemos. Entonces, se tiene por un lado que la entropía del sistema en el ensamble MC es conocida, pero cuáles son los estados que dan origen a esta entropía es algo desconocido aún.

En la siguiente sección veremos que la acción de Chern-Simons es justamente (3.23) de manera que lo que se tiene es una formulación covariante del problema.

### 3.3.1 Acción covariante para el agujero negro tridimensional.

Notemos en primer lugar que el término de borde que hemos sumado<sup>4</sup> a la parte de volumen de la acción de Hilbert-Einstein (3.19) está relacionado con la curvatura extrínseca de la variedad. En efecto, un cálculo directo muestra que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} K \sqrt{h} d^2x = \beta \left( -M + \frac{2r_\infty^2}{\ell^2} \right). \quad (3.24)$$

Por lo que la acción (3.23) se puede reescribir

$$I_c = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_M \left[ R + \frac{2}{\ell^2} \right] \sqrt{g} d^3x + \int K \sqrt{h} \right), \quad (3.25)$$

Esta acción es no divergente, es estacionaria para variaciones en las que  $\beta$  y  $\Omega$  están fijos y su valor en la aproximación semiclásica es consistente con el ensamble canónico.

A diferencia del caso en cuatro dimensiones, aquí el término con  $\text{Tr}(K)$  aparece con un factor 1, lo que significa (Capítulo 2) que esta acción no es la apropiada para fijar la métrica en el borde de la variedad sino alguna combinación de la métrica y sus derivadas, pero esto no es otra cosa que decir que no existe una relación unívoca entre fijar la métrica (o derivadas de la métrica) y fijar los parámetros intensivos o extensivos del problema. Por ejemplo, en el caso de cuatro dimensiones uno

<sup>4</sup>Nos referimos al término que regulariza la acción y a la parte que define el ensamble.

puede ver que las derivadas de la métrica (ver (3.5)) son de la forma  $\partial_r g \sim f(N) \frac{2M^5}{r^2}$ , de manera que fijar  $M$  es equivalente a fijar algunas derivadas de la métrica. De la misma forma, fijar la métrica también tiene que ver con fijar  $M$ . Pero en el caso tridimensional, sin embargo,  $\partial_r g \sim r$ , de manera que fijar las derivadas de la métrica no necesariamente tiene que ver con fijar  $M$  (en el caso sin momentum angular, al menos).

Ahora bien, la gravitación euclídea, en tres dimensiones se puede escribir en término de dos acciones de Chern-Simons para  $Sl(2, C)$ <sup>6</sup>

$$I_{euc} = iI_{C.S.}[A] - iI_{C.S.}[\bar{A}], \quad (3.26)$$

$$I_{C.S.}[A] = \frac{k}{4\pi} \int Tr[AdA - \frac{2}{3}A^3]. \quad (3.27)$$

con  $k = -\ell/4G$  y  $A, \bar{A}$  son dos conexiones de  $Sl(2, C)$  relacionadas con la tríada y la conexión de spin por  $A^a = (1/2)\epsilon_{bc}^a \omega^{bc} + ic^a/\ell$ ,  $\bar{A} = (1/2)\epsilon_{bc}^a \omega^{bc} - ic^a/\ell$ .

Tal como se muestra en el Apéndice A, esta acción es justamente  $I_c$ . Entonces, hemos mostrado que la formulación de Chern-Simons, sin agregar términos de borde, provee la acción correcta para calcular la entropía del sistema (en la aproximación semiclásica) en el ensamble canónico. Esta formulación tiene la ventaja de ser covariante, a diferencia del caso en 4 dimensiones.

### 3.4 Comentarios.

En la sección anterior se estableció un procedimiento para definir la acción correcta que da la función partición del sistema en la aproximación semiclásica.

El procedimiento se puede resumir de la siguiente forma. Dada la acción  $I$  en el volumen de la variedad, la acción regularizada se define como la acción anterior menos la parte divergente que proviene de evaluar la acción en la solución clásica:  $I_{reg} = I - I_\infty(g_0)$ . Por otra parte,  $I$  evaluada en la solución clásica como función de los parámetros termodinámicos, debe ser estacionaria. Es decir  $\delta I(\delta M, \delta\beta, \delta\Phi)^7 = 0$ .

<sup>5</sup>Aquí,  $f(N)$  representa alguna función de  $N = 1 - \frac{2M}{r}$ .

<sup>6</sup>En el apéndice, el cálculo se ha hecho para el grupo  $Sl(2, \mathbb{R})$ ; su extensión a  $Sl(2, C)$  es evidente.

<sup>7</sup>Aquí,  $\Phi$  representa otros parámetros termodinámicos.

Esta condición no la satisface  $I$  en general; hay que agregar nuevos términos de bordes. Esta nueva acción, que es finita y que satisface la condición antes mencionada es la acción que ha de usarse para calcular la función partición.

En el caso de 4 dimensiones, este procedimiento conduce al resultado de Gibbons y Hawking . En tres dimensiones define la acción ya señalada. Nótese que si uno trata de usar una acción como (3.4) en tres dimensiones, la entropía no da el valor correcto, mientras que el procedimiento antes descrito funciona en ambos casos.

## Capítulo 4

# Origen Estadístico de la Entropía de Agujeros Negros en $2+1$ Dimensiones.

### 4.1 Introducción.

En este capítulo estudiaremos el problema de identificar los estados que dan origen a la entropía de agujeros negros. En la primera parte revisaremos el enfoque dado por S. Carlip [15, 17, 21, 22], según el cual, los grados de libertad que originan la entropía de los agujeros negros en tres dimensiones, provienen de la invariancia de gauge que se rompe al considerar variedades con borde. Además, en este proceso, un elemento crucial es el hecho que la gravitación en tres dimensiones se puede escribir como una teoría de Chern-Simons lo que hace imposible extender estos argumentos a dimensión 4.

En este capítulo mostramos que es posible entender el resultado anterior en términos de un objeto más fundamental, un proyector, que está relacionado con el hecho que la variedad posee un horizonte. Este proyector aparece también en dimensión 4 y está relacionado con las condiciones de borde del problema.

El problema de contar estados en esta formulación aún permanece abierto, pero se propone una forma que podría dar cuenta del resultado esperado.

## 4.2 Origen de nuevos grados de libertad.

En 1995 S. Carlip [15], e independientemente Balachandran, Chandar y Momen [33, 34], descubrieron un mecanismo mediante el cual se generaban nuevos grados de libertad en gravitación si uno consideraba variedades con borde. El argumento básico es que si uno considera variedades con borde, algunos campos, que en principio son considerados "puro gauge", se transforman en grados de libertad físicos y son éstos, al menos en gravedad en tres dimensiones, los responsables de la entropía de los agujeros negros.

A pesar que el argumento es el mismo para gravedad en 2+1 y 3+1 dimensiones, el tratamiento del problema es distinto en cada caso. Mientras que en el primero uno puede hacer uso del hecho que la teoría está descrita por una acción de Chern-Simons y puede cuantizar (con algunas suposiciones que veremos mas adelante) la teoría en el borde, en el caso de 4 dimensiones no es claro aún cómo realizar este proceso. La teoría en el borde es desconocida y por lo tanto su cuantización está lejos de ser alcanzada. Examinemos entonces estos dos casos

### 4.2.1 Gravitación en 3+1 dimensiones.

Una forma de identificar los grados de libertad físicos de esta teoría es mediante el análisis de las ligaduras. Para esto, necesitamos escribir la acción de Hilbert-Einstein en forma hamiltoniana<sup>1</sup>. Consideremos entonces una foliación de la variedad  $M$  del tipo  $\Sigma_3 \times \mathfrak{R}$ , donde  $\Sigma_3$  son superficies tipo espacio y  $\mathfrak{R}$  es el tiempo; los índices  $\{i, j\}$  rotulan coordenadas sobre  $\Sigma_3$  y el índice  $\perp$ , sobre  $\mathfrak{R}$ . Con esta descomposición, la acción hamiltoniana resulta ser

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int_M N^\mu H_\mu d^3x dt, \quad (4.1)$$

donde

$$H_i = -2\nabla_j \pi_i^j = 0, \quad (4.2)$$

<sup>1</sup>El análisis detallado de este procedimiento se puede encontrar en [35]

$$H_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{(\pi^{ij} g_{ij})^2}{2} \right] - \sqrt{g} \bar{R} \quad (4.3)$$

aquí  $\pi^{ij}$  es el momentum conjugado a  $g_{ij}$ , el índice (-) se refiere a tensores definidos en  $\Sigma_3$ , y  $N^{\mu}$  son multiplicadores de Lagrange.

La constricción del momentum es (4.2). Por otra parte, el generador de difeomorfismos espaciales viene dado por

$$G[\zeta] = \int_{\Sigma_3} \{ \nabla_i \zeta_j + \nabla_j \zeta_i \} \pi^{ij} d^3 x, \quad (4.4)$$

$$= \int_{\Sigma_3} \zeta_i H^i d^3 x. \quad (4.5)$$

de suerte que, por ejemplo, la variación de la métrica bajo la acción de (4.4) es

$$\delta g_{ij} = \{ G[\zeta], g_{ij} \} \quad (4.6)$$

$$= \nabla_i \zeta_j + \nabla_j \zeta_i, \quad (4.7)$$

$$= L_{\zeta} g_{ij}. \quad (4.8)$$

Así, puesto que la teoría es invariante bajo difeomorfismos (resultado que proviene de la condición (4.2)), las transformaciones como las dadas por (4.8) no son físicas. Esto último significa que un sistema descrito por los campos  $g_{ij}$  y otro descrito por  $g'_{ij}$ , son el mismo sistema si  $g_{ij}$  y  $g'_{ij}$  difieren por  $\delta g_{ij}$  dado en (4.8). Un argumento similar permite estudiar el caso de las transformaciones generadas por  $H^{\perp}$ .

Lo que nos interesa aquí es el hecho que el generador dado en (4.4) es justamente el generador definido por las ligaduras (4.2) de la teoría, sólo si la subvariedad  $\Sigma_3$  no tiene bordes. En efecto, si  $\partial\Sigma_3$  es el borde de la variedad, entonces

$$G[\zeta] = \int_{\Sigma_3} \zeta_i H^i d^3 x + 2 \int_{\partial\Sigma_3} \zeta_i \pi^{i\perp} d^2 x. \quad (4.9)$$

Es claro que todas las transformaciones con parámetros que satisfagan la condición

$$\zeta_i |_{\partial\Sigma} = 0. \quad (4.10)$$

no serán físicas (en el sentido señalado anteriormente). Sin embargo, aquellas en que el campo vectorial  $\zeta_i$  no se anule en el borde generarán nuevas transformaciones allí, dadas por

$$\check{G} = \int_{\partial\Sigma} \zeta_i \pi^{i\perp} d^2x, \quad (4.11)$$

El problema si estas transformaciones son físicas o no fue resuelto por Balachandran, Chandar y Momen, quienes demostraron que las transformaciones de este tipo conmutan con las ligaduras de la teoría, de manera que se tiene un nuevo conjunto de grados de libertad ligados al borde de la variedad.

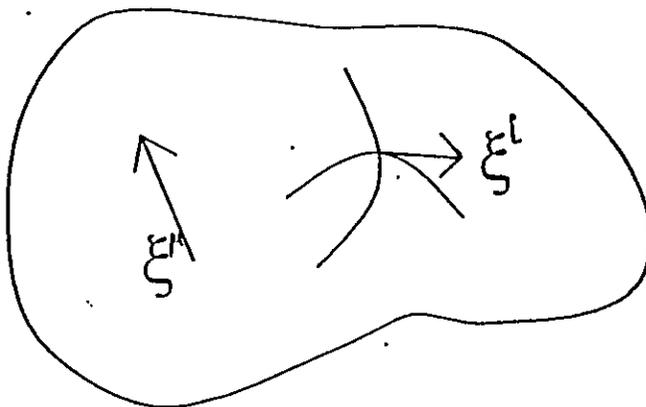


Figura III. La gravitación en variedades con borde adquiere nuevos grados de libertad.

Entonces, si consideramos la teoría de la gravitación en una variedad con bordes, existen nuevos grados de libertad físicos en dicho borde. El problema que surge ahora es descubrir cuál es la teoría en el borde cuyos estados dan origen a la entropía de los agujeros negros. En este caso no se sabe cuál es esta teoría; nótese que sólo conocemos las transformaciones infinitesimales de los campos bajo la acción de los difeomorfismos. Para poder descubrir la teoría del borde deberíamos ser capaces de escribir cómo transforma la acción bajo una transformación finita de los campos. Esto sí puede hacerse en 3 dimensiones y veremos que lo que resulta es una teoría llamada de Wess-Zumino-Witten (W.Z.W.).

### 4.3 Gravitación en tres dimensiones.

Como se mostró en el Apéndice A, la acción de la gravitación en 2+1 dimensiones con constante cosmológica negativa, se puede escribir como una acción de Chern-Simons para el grupo  $SO(2,2) \sim SO(2,1) \times SO(2,1)$ . Es decir

$$I_{grav} = I[A] - I[\bar{A}], \quad (4.12)$$

con

$$I[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M [AdA + \frac{2}{3}A^3]. \quad (4.13)$$

Donde  $A^\alpha = \omega^\alpha + \frac{1}{\ell}e^\alpha$  es la 1-forma conexión de  $SO(2,1)$  y  $\bar{A}^\alpha = \omega^\alpha - \frac{1}{\ell}e^\alpha$ , lo es de la otra copia de  $SO(2,1)$ . Aquí  $\omega^\alpha$  es la conexión de spin y  $e^\alpha$  la tétrada.

Esta acción es invariante bajo la transformación de gauge (finita)

$$A \longrightarrow A' = g^{-1}dg + g^{-1}Ag. \quad (4.14)$$

donde  $g$  es un elemento del grupo  $SO(2,1)$ .

La afirmación anterior es cierta sólo si el borde de la variedad  $M$  es cero. En efecto, supongamos que la variedad tiene un borde  $\partial M$ . Supongamos además que la variedad  $M$  tiene la topología de un cilindro<sup>2</sup> (la variedad es la misma descrita en el Capítulo 2 y en el Apéndice A; la notación es también la de esos capítulos). Es directo mostrar que bajo una transformación del tipo (4.14) la acción (4.13) cambia de la siguiente manera [36, 37]

$$I(A) = I(A') - \frac{k}{4\pi} I_{WZW}[g, A]. \quad (4.15)$$

donde

$$I_{WZW}[g, A] = \frac{1}{3} \int_M (Tr(g^{-1}dg)^3) + \int_{\partial M} (Tr(\partial_t g g^{-1} A_\phi - \partial_\phi g g^{-1} A_t)), \quad (4.16)$$

<sup>2</sup>Suponemos esto porque es el tipo de variedades en las que estaremos interesados más adelante

es la acción de W.Z.W. para el elemento del grupo  $g$ . Es importante notar que esta acción está definida en el borde de la variedad  $\partial M$  y no el volumen, como se pudiera pensar al ver la integral sobre  $M$  que aparece en (4.16).

En efecto, la variación del término de volumen de (4.16) es

$$\delta \left[ \int_M \text{Tr}[(g^{-1}dg)^3] \right] = 3 \int_{\partial M} \text{Tr}[(g^{-1}dg)^2 g^{-1} \delta g], \quad (4.17)$$

de manera que la variación de la acción es sólo un término en el borde  $\partial M$  de la variedad; notemos además que en la acción de W.Z.W., el término en  $\partial M$  contiene al campo  $A^a$ , es decir, el valor de la conexión en el borde, pero eso es justamente la C.B. Por lo tanto, la acción de W.Z.W. en este caso tiene campos dinámicos (los elementos del grupo  $SO(2,1)$ ) y además contiene a las C.B. de los campos que son dinámicos en el volumen de la variedad  $M$ .

La cuantización de esta teoría nos da los estados que deben ser los responsables de la entropía de los agujeros negros en tres dimensiones. En la próxima sección veremos cómo es que esto sucede.

### 4.3.1 Conteo de estados.

En lo que sigue vamos a describir de manera breve cómo surge la entropía del agujero negro a partir de este enfoque del problema. Vamos a describir dos procedimientos que son equivalentes, pero que ponen de manifiesto distintas características del problema.

Primero consideremos la teoría de W.Z.W. en el borde; se sabe que ésta está completamente caracterizada por el álgebra de corrientes [38]

$$[J_m^a, J_n^b] = i f_c^{ab} J_{m+n}^c - km \hat{g}^{ab} \delta_{m+n,0}, \quad (4.18)$$

$$[\bar{J}_m^a, \bar{J}_n^b] = i f_c^{ab} \bar{J}_{m+n}^c + km \hat{g}^{ab} \delta_{m+n,0} \quad (4.19)$$

donde  $J_m^a$  y  $\bar{J}_n^b$  son los coeficientes de la expansión en series de Fourier de  $A_\mu^a$ . Es decir

$$A_\phi^a = -\frac{1}{k} \sum J_n^a \exp(in\phi), \quad \bar{A}_\phi^a = \frac{1}{k} \sum \bar{J}_n^a \exp(in\phi). \quad (4.20)$$

y  $\hat{g}^{ab}$  es la métrica de Killing con la que se suben y bajan los índices  $\{a, b\}$ .

Ahora bien, encontrar una representación para el álgebra (4.21) no es trivial. En efecto, es posible encontrar una representación para  $J_0$  y  $\bar{J}_0$ , pero los estados siguientes, dados por los operadores de creación  $J_{-n}^a$  y  $\bar{J}_{-n}^a$ , no son fáciles de calcular debido a los acoplamientos que aparecen en el álgebra. Sin embargo, uno puede ver que en el límite  $k \rightarrow \infty$  los operadores  $J$  y  $\bar{J}$  se desacoplan y por lo tanto la construcción de los estados es más o menos directa.

El álgebra de corrientes es ahora

$$[J_m^a, J_n^b] = -km \hat{g}^{ab} \delta_{m+n,0}, \quad (4.21)$$

$$[\bar{J}_m^a, \bar{J}_n^b] = km \hat{g}^{ab} \delta_{m+n,0} \quad (4.22)$$

que es el álgebra de osciladores de una cuerda bosónica en seis dimensiones. Así uno identifica la teoría en el borde (en el límite de acoplamiento fuerte) con una teoría de cuerdas bosónica en seis dimensiones y por lo tanto son los estados de esta teoría los que dan origen a la entropía del agujero negro en tres dimensiones.<sup>3</sup>

Una forma equivalente (y más directa) de contar estados es la siguiente [39]. Como hemos señalado ya, la acción de gravitación en tres dimensiones es la acción de Chern-Simons para el grupo  $SO(2,2)$ . Sin embargo, esta acción debe ser modificada (añadiendo términos de borde) si se quiere hacerla diferenciable para C.B. dadas. Entonces, como se dijo en el Capítulo 2, hay que definir la acción apropiada para las C.B. que se especifiquen.

En el caso que nos interesa, las C.B. que vamos a considerar son las usuales para una agujero negro. Es decir, en lenguaje métrico; impondremos la condición

<sup>3</sup>El conteo explícito de los estados no lo haremos aquí porque ya está hecho en las referencias dadas anteriormente y porque no aporta nada nuevo a la discusión de como extender los argumentos a más dimensiones.

$N^\perp(r_+) = 0$ , donde  $(N^\perp)^{-1} = g_{rr}$  y además imponemos la condición  $N_\phi(r_+) = \Omega$ , donde  $N_\phi = g_{t\phi}$ .

Con estas condiciones de borde, la acción apropiada para la gravitación, en la formulación de Chern-Simons es

$$I_{grav}[A, U] = I_{C.S.}[A] - I_{C.S.}[\bar{A}] + I_{W.Z.W.}[U] - I_{W.Z.W.}[\bar{U}] + \frac{k}{2\pi} \int_{\partial M} \Omega(L_0 + \bar{L}_0) dt d\phi, \quad (4.23)$$

donde

$$L_0 + \bar{L}_0 = \frac{k}{2}(A^2 - \bar{A}^2), \quad (4.24)$$

y  $I_{C.S.}[A]$  ( $\bar{A}$ ) es la acción de Chern-Simons para la conexión  $A$  ( $\bar{A}$ ) discutida en el apéndice A;  $I_{W.Z.W.}[U]$  es la acción de W.Z.W para  $U$  obtenida de  $I_{C.S.}[A]$  mediante la transformación de gauge finita (4.14) (lo mismo para  $\bar{U}$ ) y la integral en  $\partial M$  es el término de borde que hace la acción completa diferenciable bajo las C.B antes dadas.

Entonces, la acción en el borde que debe ser cuantizada es

$$I_{\partial M} = I_{W.Z.W.}[U] - I_{W.Z.W.}[\bar{U}] + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} \Omega(L_0 + \bar{L}_0) dt d\phi. \quad (4.25)$$

La versión cuántica de las ligaduras

$$(L_0 + \bar{L}_0) | \Psi \rangle = 0 \quad (4.26)$$

da los estados cuyo conteo da el valor esperado de la entropía del agujero negro.

## 4.4 Principio de acción, términos de borde y proyectores.

Procederemos ahora a estudiar el problema antes descrito, pero en términos de un nuevo objeto: el *proyector en el horizonte* [40]. En el Capítulo 2, estudiamos

el problema de la acción de Chern-Simons y sus términos de borde a la luz de las llamadas *condiciones de borde naturales*. Se estableció que si se quiere estudiar el problema de resolver las ecuaciones de movimiento  $F = 0$  en una variedad con dos bordes no conectados, es decir  $\partial M_1 \cap \partial M_2 = \emptyset$ , entonces las C.B. tipo Dirichlet (que son las condiciones de borde naturales para este problema) sobredeterminan el problema; es decir, en general no existe una solución de las ecuaciones de movimiento si se da el valor de los campos en  $\partial M_1$  e independientemente, en  $\partial M_2$ . Esto es así porque al dar el valor de los campos en una frontera, las ecuaciones de movimiento propagan la información en el volumen lo que determina los campos en cualquier parte, en particular en  $\partial M_2$ .

Consideremos entonces una variedad  $M$  con la topología de un cilindro que tiene dos bordes. Estos bordes serán  $\partial M_+$ , que identificaremos con  $r = r_+$ . (es decir, uno de los bordes será el horizonte de eventos) y el otro borde,  $\partial M_\infty$ , corresponderá a  $r \rightarrow \infty$ , punto que denominaremos  $r_\infty$ .

Las condiciones de borde que impondremos en  $r_\infty$  es fijar  $A_\phi$ . En el horizonte, en cambio, elegiremos la condición  $A_t = \Omega A_\phi$ .

La acción apropiada para estas C.B. es

$$I_M = I[A] + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_+} Tr[\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta] dt \wedge d\phi - \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_\infty} Tr[A_t A_\phi - f A_\phi] dt \wedge d\phi. \quad (4.27)$$

donde  $h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/\Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix}$  y  $f$  es una función arbitraria que no se varía en el principio de acción. La forma de  $h^{\alpha\beta}$  es una de las elecciones más simples para una matriz de rango 2 simétrica con determinante  $-1^4$ .  $I[A]$  es la acción (4.13).

La variación de esta acción es

$$\delta I_M = \int_M e.m. + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_+} Tr[Q^{\alpha\beta} A_\alpha \delta A_\beta] dt \wedge d\phi$$

<sup>4</sup>Casos más generales serán considerados un poco más adelante.

$$-\frac{k}{4\pi} \int_{\partial M_\infty} \text{Tr}[(2A_t - f)\delta A_\phi] dt \wedge d\phi. \quad (4.28)$$

donde  $Q^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/\Omega & -1 \\ 1 & -\Omega \end{pmatrix}$  y se satisface  $\det(Q^{\alpha\beta}) = 0$ .

Entonces, la acción tiene un extremo si se satisfacen las ecuaciones de movimiento en el volumen y en los borde se satisface

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta} A_\alpha |_{\partial M_+} &= 0, \\ A_t |_{\partial M_+} &= \frac{f}{2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Estudiemos la condición en  $\partial M_+$ . Primero notemos que la matriz  $P_\beta^\alpha$  definida por

$$P_\beta^\alpha = \frac{1}{2} Q^{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta}, \quad (4.30)$$

es un proyector. Es decir,  $P_\beta^\alpha P_\gamma^\beta = P_\gamma^\alpha$  y  $\det(P_\beta^\alpha) = 0$ .

Ahora bien, el hecho que en  $\partial M_+$  aparezca la forma simétrica  $\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta$  sugiere que  $h^{\alpha\beta}$  es una métrica en el borde y por lo tanto el proyector  $P$ , construido a partir de  $h^{\alpha\beta}$ , no puede ser otra cosa que una parte de la métrica del espaciotiempo, la cual sabemos es singular en el horizonte.

Para ver esto, recordemos que la métrica de  $M$ , en la foliación radial, es

$$ds^2 = -[N^2 - (N^\phi)^2] dt^2 + 2r^2 N^\phi dt d\phi + r^2 d\phi^2 + \frac{1}{N^2} dr^2, \quad (4.31)$$

$$= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \frac{1}{N^2} dr^2. \quad (4.32)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es la métrica inducida en el borde con  $\{\alpha, \beta\} \in \{t, \phi\}$ .  $N$  y  $N^\phi$  son funciones sólo de  $r$ . En el horizonte satisfacen  $N(r_+) = 0$ , lo que asegura que  $r_+$  es el horizonte<sup>5</sup>, y  $N^\phi(r_+) = \Omega$ , que es el equivalente a la condición (4.29) en lenguaje métrico.

<sup>5</sup>En general esto no es cierto. Al menos para métricas estáticas y con simetría axial sí se satisface en dimensiones 3 y 4.

Entonces, la métrica inducida en el horizonte es

$$g_{\alpha\beta} = r_+^2 \begin{pmatrix} \Omega^2 & \Omega \\ \Omega & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Es directo demostrar que

$$g_{\alpha\beta} = 2r_+ M_{\alpha\gamma} P_\beta^\gamma. \quad (4.34)$$

donde  $M_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ . La relación entre el proyector (y por lo tanto la métrica  $h^{\alpha\beta}$ ) y la existencia de un agujero negro es ahora evidente.

En efecto, en la formulación de Chern-Simons de la teoría, la condición de borde que asegura la diferenciabilidad de la acción induce un término de borde de la forma  $\int_{\partial M_{r_+}} Tr(h^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta)$  donde  $h^{\alpha\beta}$  es una métrica. Este término de borde genera la C.B.  $P_\gamma^\alpha A_\alpha = 0$ . Aquí,  $P_\beta^\alpha$  es un proyector y es proporcional a la métrica del horizonte de eventos, es decir si  $M$  es una matriz invertible, entonces la métrica en el horizonte es  $g = M * P$ .

Ahora bien, el que la métrica en el horizonte de eventos deba ser degenerada<sup>6</sup> es un hecho conocido (si la variedad es de dimensión  $D$ , entonces el horizonte es una subvariedad de dimensión  $D - 2$  [6]). Entonces, la métrica en el horizonte debe ser proporcional a un proyector (ver Apéndice C). Lo notable es que este proyector no es cualquiera, sino el que se construye a partir de la métrica  $h_{\alpha\beta}$ , la que no es degenerada y que aparece justamente en el borde  $r_+$ . de manera que el término de borde en la acción de Chern-Simons está bien definido.

#### 4.4.1 Interpretación geométrica de $h_{\alpha\beta}$ .

Puesto que  $h$  no es la métrica del horizonte, queda abierta la pregunta ¿cuál es la interpretación geométrica de  $h_{\alpha\beta}$ ? Como se señaló en la sección (4.3), una transformación de gauge finita induce una teoría W.Z.W en el borde. En nuestro caso, la acción en el borde es

<sup>6</sup>Es decir, su determinante es cero.

$$I_{\partial M_+} = \frac{1}{12\pi} \int_M (g^{-1} dg)^3 + \frac{1}{4\pi} \int \text{Tr}(h^{\alpha\beta} \partial_\alpha g \partial_\beta g^{-1}). \quad (4.35)$$

Es decir, la acción en el borde es ahora una teoría de W.Z.W., pero en un fondo curvo con métrica  $h_{\alpha\beta}$ . Entonces, la métrica en el borde es la métrica para la teoría de W.Z.W. en el borde de la variedad.

Pero aún se puede ir un poco más allá. En efecto, se sabe que una teoría de W.Z.W. para el grupo  $Sl(2, \mathfrak{R})$  es equivalente a una teoría de cuerdas. A continuación mostraremos que en nuestro caso lo que se obtiene es una teoría de cuerdas donde  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica del "world sheet" de la cuerda.

Para ver esto [41] consideremos la acción (4.35), donde  $g$  es un elemento de  $Sl(2, \mathfrak{R})$ . Es decir, el grupo de matrices  $M$  de  $2 \times 2$  con coeficientes reales con  $\det(M) = 1$ .  $g$  puede parametrizarse según

$$g(t', \theta', \theta) = \begin{pmatrix} \exp(\sqrt{2/k} q \theta' \cosh(\theta)) & \exp(\sqrt{2/k} q t' \sinh(\theta)) \\ \exp(-\sqrt{2/k} q t' \sinh(\theta)) & \exp(-\sqrt{2/k} q \theta' \cosh(\theta)) \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

donde  $q$  es una constante arbitraria. Reemplazando esta expresión para  $g$  en (4.35) se obtiene

$$I_{\partial M_{r_+}} = \frac{1}{\pi} \int d^2 \sigma \left( G_{\mu\nu} h^{\alpha\beta} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} B_{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta} \right) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (4.37)$$

donde los índices  $(\alpha, \beta) \in \{t, \phi\}$  y  $(\mu, \nu) \in \{\theta, \theta', t'\}$ . La matriz  $G_{\mu\nu}$  está dada por

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -q^2 \sinh^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & q^2 \cosh^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

y  $B_{\mu\nu}$  es el tensor antisimétrico

$$B_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{3k}{4}} q \sinh(\theta) \cosh(\theta) \left( \ln(\sinh(\theta)) + \sqrt{\frac{2}{k}} q t' \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

La acción (4.37) es la acción de la cuerda en un fondo curvo con métrica  $G_{\mu\nu}$  y, tal como se adelantó,  $h_{\alpha\beta}$  es la métrica del "world sheet". Todo lo dicho hasta ahora es bien conocido, es decir, el hecho que la acción de W.Z.W. para el grupo  $Sl(2, \mathfrak{R})$  sea equivalente a una teoría de cuerdas, es un hecho establecido. Lo nuevo aquí es que la acción de Chern-Simons definida en una topología que contiene un agujero negro, necesita de un término de borde que contiene una métrica la cual es la métrica de una teoría de cuerdas.

Adicionalmente se puede demostrar que la métrica  $G_{\mu\nu}$  es, nuevamente, la métrica de un agujero negro en tres dimensiones en la variedad del grupo

#### 4.4.2 Conteo de estados.

El problema de cómo contar estados en este contexto no ha sido resuelto aún. Sin embargo, podemos aventurar qué es lo que sucederá. En efecto, hasta ahora sabemos que la teoría en el horizonte es una teoría de cuerdas donde la métrica de la cuerda es la misma que define el proyector en el horizonte. Es natural suponer entonces que los estados que han de ser contados para obtener la entropía del agujero negro son los de esta teoría de cuerdas

Por lo tanto, lo que sigue es estudiar el problema de la cuantización de este objeto y mostrar que, efectivamente, los estados de esta teoría son los dan origen a la entropía.

### 4.5 Extensión a dimensiones superiores.

Si bien es cierto que la formulación de Chern-Simons de la teoría de gravitación no es válida en dimensión 4 (en dimensiones pares, en general) hemos encontrado un objeto que está presente en ambas formulaciones de la teoría. Nos referimos al proyector que define el horizonte. En efecto, en dimensión 4 por ejemplo, uno puede escribir la métrica del horizonte de la forma (4.34) donde  $P$  es un proyector.

EL problema, sin embargo, es que no es claro cómo identificar  $h_{\alpha\beta}$  ni cuál

es el objeto que representa esta matriz. En dimensión 5, en cambio, uno sabe que nuevamente obtendrá un término tipo W.Z.W. Esperamos que en este caso el objeto de interés ya no será una cuerda sino una membrana. En este caso el conteo de estados no ha de ser trivial pues el problema de cuantizar los estados de una membrana es un problema abierto.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El problema del origen estadístico de la entropía de agujeros negros no ha sido resuelto aún. Se cree que los grados de libertad que dan cuenta de ésta residen en el horizonte, pero esto aún no ha sido aclarado. Es por esto que en este trabajo se ha estudiado el problema de definir principios de acción en variedades con borde.

En este contexto, en el Capítulo 2, se estudió el problema de cómo incorporar al principio de acción las condiciones de borde necesarias y suficientes para integrar las ecuaciones de movimiento. La aplicación de los resultados obtenidos aquí al problema de gravitación en 4 dimensiones, permite entender el problema de la entropía de un agujero negro desde el punto de vista del llamado *principio de membranas* [31].

En el Capítulo 3, se estudió el problema de la entropía de un agujero negro en tres dimensiones en la llamada aproximación semiclásica. El caso de cuatro dimensiones ya había sido tratado por Gibbons y Hawking [18]. La extensión del caso anterior a tres dimensiones no da el resultado conocido para la entropía [20], sin embargo, el método mostrado aquí para calcular la entropía en tres dimensiones sí reproduce el resultado en 4 y se espera que al aplicarse a dimensiones superiores también de los resultados correctos.

Finalmente, en el Capítulo 4 se estudia el problema de cómo extender los resultados conocidos en dimensión 3, acerca del origen estadístico de la entropía, a dimensión 4. En este contexto se muestra que la forma consistente (en el sen-

tido estudiado en el Capítulo 2) de tratar el problema en dimensión 3 requiere de la incorporación de un proyector en el horizonte que también está presente en 4 dimensiones.

# Apéndice A

## Formulación de Chern-Simons de la gravitación en 3 dimensiones.

La acción de Hilber-Einstein para la gravitación en 3 dimensiones con constante cosmológica negativa es equivalente a la acción de Chern-Simons

$$I_{C.S.}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}[AdA + \frac{2}{3}A^3], \quad (\text{A.1})$$

para la 1-forma conexión  $A$  del grupo  $SO(2, 2)$  ([27],[28])

Para demostrar esto, notemos primero que  $SO(2, 2)$  es isomorfo a  $SL(2, \mathfrak{R}) \times SL(2, \mathfrak{R})$ , de manera que (A.1) se puede reescribir

$$I_{C.S.}[A] = I_{C.S.}[A^+] - I_{C.S.}[A^-], \quad (\text{A.2})$$

donde  $A^\pm$  son las conexiones de las dos copias de  $SL(2, \mathfrak{R})$  y se definen por

$$A_\mu^{\pm a} = \omega_\mu^a \pm \frac{1}{\ell} e_\mu^a, \quad (\text{A.3})$$

aquí,  $\omega_\mu^a$  es la 1-forma conexión de spin y está relacionada con la conexión de dos índices por  $\omega^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\omega_{bc}$ .  $e_\mu^a$  es la 1-forma triáda.

El álgebra de Lie de los generadores  $J_a$  de este grupo es

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{ab}^c J_c. \quad (\text{A.4})$$

donde  $\epsilon_{012} = 1$ ,  $\epsilon^{012} = -1$  y los generadores se han escogido  $J_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$J_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , de manera que la traza es

$$\text{Tr}(J_a J_b) = \frac{1}{2} \eta_{ab}, \quad (\text{A.5})$$

donde  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ .

Reemplazando (A.3) en (A.2) y usando las propiedades (A.4) y (A.5), se obtiene

$$I_{C.S.}[A] = \frac{k}{2\pi\ell} \int_M [(d\omega^a + \frac{1}{2} \epsilon_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c) \wedge e_a + \frac{1}{6\ell^2} e^a \wedge e^b \wedge e^c \epsilon_{abc}] - \frac{k}{4\pi\ell} \int_{\partial M} \omega^a \wedge e^b \eta_{ab} \quad (\text{A.6})$$

Notemos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} d\omega^a + \frac{1}{2} \epsilon_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c &= \frac{1}{2} \epsilon_{bc}^a (d\omega^{bc} + \omega^b \wedge \omega^c), \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{bc}^a (d\omega^{bc} + \omega_c^b \wedge \omega^{ec}), \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{bc}^a R^{bc}, \end{aligned}$$

de suerte que (A.6) deviene en

$$I_{C.S.}[A] = \frac{k}{4\pi\ell} \int_M (\epsilon_{bc}^a R^{bc} \wedge e_a + \frac{1}{3\ell^2} e^a \wedge e^b \wedge e^c \epsilon_{abc}) - \frac{k}{4\pi\ell} \int_{\partial M} \omega^a \wedge e^b \eta_{ab}. \quad (\text{A.7})$$

Reescribamos esto en notación de índices. Para esto, miremos cada término por separado en la integral sobre  $M$ .

$$\begin{aligned} \epsilon_{bc}^a R^{bc} \wedge e_a &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \epsilon_{abc} R_{\lambda\mu}^{bc} e_\nu^a d^3x, \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\mu\nu} (\epsilon_{abc} e_\alpha^b e_\beta^c e_\nu^a) R_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} d^3x, \\ &= -\frac{1}{2} e \epsilon^{\lambda\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\nu} R_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} d^3x, \end{aligned}$$

donde  $e = \det [e^a_\mu] = \sqrt{-g}$ . Finalmente usamos la identidad  $\epsilon^{\lambda\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\delta_{[\alpha\beta]}^{[\lambda\mu]}$  para obtener

$$\epsilon^a_{bc} R^{bc} \wedge e_a = \sqrt{-g} R d^3x \quad (\text{A.8})$$

Calculemos ahora el otro término en la integral sobre el volumen de  $M$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\ell^2} e^a \wedge e^b \wedge e^c \epsilon_{abc} &= -\frac{1}{3\ell^2} (e^a_\alpha e^b_\beta e^c_\gamma \epsilon_{abc}) \epsilon^{\alpha\beta\gamma}, \\ &= -\frac{e}{3\ell^2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3x, \\ &= \frac{2\sqrt{-g}}{\ell^2} d^3x \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, reemplazando (A.8) y (A.9) en (A.7), se obtiene:

$$I_{grav.} = \frac{k}{4\pi\ell} \int_M [R + \frac{2}{\ell^2}] \sqrt{g} d^3x - \frac{k}{4\pi\ell} \int_{\partial M} \omega^a \wedge e^b \eta_{ab}.$$

Entonces, si  $k = \frac{\ell}{4G}$ , donde  $G$  es la constante de Newton, la parte de volumen de la acción anterior, es la acción de Hilbert-Einstein para la gravitación en 3 dimensiones

$$I_{grav.} = \frac{1}{16\pi G} \int_M [R + \frac{2}{\ell^2}] \sqrt{-g} d^3x - \frac{1}{16\pi G} \int_{\partial M} \omega^a \wedge e^b \eta_{ab}. \quad (\text{A.10})$$

Finalmente evaluemos el término de borde de esta acción. Supongamos que  $M$  tiene la topología del cilindro y el borde es la superficie  $r = \text{constante}$ . Consideraremos espacios con métricas estáticas y simetría axial, de suerte que la triada sólo depende de la coordenada  $r$ . Finalmente notemos que la métrica puede escogerse de la siguiente forma

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Aquí,  $h_{ij}$  es la métrica inducida en  $\partial M$  y los índices  $j$  toman valores en el conjunto  $\{t, \phi\}$ . Esto significa que hemos escogido una coordenada a lo largo de  $n_r$ , la dirección

normal a  $\partial M$ , lo que es siempre posible debido a la invariancia de la teoría bajo transformaciones generales de coordenadas. Con esta elección de  $g_{\alpha\beta}$ , el elemento de línea es:

$$ds^2 = g_{rr} dr^2 + h_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.12})$$

Finalmente notemos que la conexión de spin está relacionada con la triada por la condición de torsión cero de manera que

$$\omega_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = \omega_\mu^c c_{c\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_\sigma^b c_\nu^c (\partial_\mu e_\sigma^a - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda e_\lambda^a), \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_\sigma^b e_\nu^c \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda e_\lambda^a - \frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_\sigma^b e_\nu^c \partial_\mu e_\sigma^a, \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \frac{1}{2} \epsilon_{abc} e_\sigma^b e_\nu^c \partial_\mu e_\sigma^a. \quad (\text{A.15})$$

El integrando en el término de superficie de (A.10) es

$$\begin{aligned} \omega^a \wedge e^b \eta_{ab} &= n_r \omega_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} dx^\mu \wedge dx^\nu, \\ &= n_r \omega_\mu^a e_\nu^b \epsilon^{r\mu\nu} \eta_{ab} d^2 x, \\ &= n_r [\omega_t^a e_\phi^b - \omega_\phi^a e_t^b] \eta_{ab} d^2 x. \end{aligned}$$

Nótese que en (A.13) las derivadas de la triada no contribuyen pues son derivadas en las coordenadas  $t$  y  $\phi$ . Entonces, la última expresión deviene en

$$\begin{aligned} \omega^a \wedge e^b \eta_{ab} &= \frac{1}{2} n_r \sqrt{-g} \{ \epsilon_{\phi\lambda\alpha} g^{\alpha\sigma} \Gamma_{t\sigma}^\lambda - \epsilon_{t\lambda\alpha} g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\phi\sigma}^\lambda \} d^2 x, \\ &= \frac{1}{2} n_r \sqrt{-g} g^{rr} h^{ij} h_{ij,r} d^2 x, \\ &= -\sqrt{-h} d^2 x. \end{aligned}$$

donde  $K = h^{ij} K_{ij}$  y  $K_{ij} = -\frac{\sqrt{g_{rr}}}{2} h_{ij,r}$ , es la curvatura extrínseca de  $\partial M$ .

Entonces, la acción de gravitación obtenida a partir de la acción de Chern-Simons es

$$I_{grav.} = \frac{1}{16\pi G} \int_M [R + \frac{2}{\ell^2}] \sqrt{-g} d^3 x + \frac{1}{16\pi G} \int_{\partial M} \sqrt{-h} K d^2 x.$$

## Apéndice B

# Integral funcional y termodinámica.

La construcción de una teoría de campos compatible con los principios de mecánica cuántica y de relatividad, es posible gracias a la formulación de la teoría cuántica en términos de las llamadas *integrales de camino*.

El objeto central en esta formulación es el *Kernel* :  $K(b, a)$ , que es la amplitud de probabilidad de que un sistema en un estado inicial  $a$ , en el instante  $t_a$ , pase a un estado final  $b$ , en el instante  $t_b$ . En el caso de una partícula unidimensional, si  $q(t)$  es la posición de la partícula en el instante  $t$  y  $S$ , la acción del sistema, el kernel viene dado por

$$K(b, a) = \int_a^b D[q(t)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[q(t_b), q(t_a)]\right\}. \quad (\text{B.1})$$

Lo que esta expresión quiere decir es que para obtener la amplitud de probabilidad de ir del estado  $a$  al estado  $b$  uno debe sumar sobre todas las trayectorias posibles que comiencen en  $a$  y terminen en  $b$ . Cada trayectoria tiene peso  $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[q(t_b), q(t_a)]\right\}$ , donde  $S$  es la acción correspondiente a cada uno de los caminos que se están sumando, de manera que (B.1) no sólo contiene el camino clásico, sino que todos los caminos posibles que conecten los dos eventos.  $D[q(t)]$  denota la medida de integración en el "espacio de caminos" donde esta integral está definida y es

un objeto que debe definirse para cada problema (o clase de problemas) que se esté tratando. La expresión (B.1) se conoce como *integral de camino*.

La extensión de este formalismo a teorías de campo es directa. En efecto, consideremos una teoría de campos descrita por la acción  $S$  para un conjunto de campos  $\Phi^A$  ( $A$  es un índice arbitrario, por ejemplo un índice vectorial o de grupo). Si  $\Phi^A(x_b) \equiv \Phi_b^A$ , es la configuración de los campos en  $x_b$  y  $\Phi^A(x_a) \equiv \Phi_a^A$ , en  $x_a$ , entonces la integral de caminos es

$$K(b, a) = \int_a^b \prod_A D[\Phi^A(x)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\Phi_b^A, \Phi_a^A]\right\}. \quad (\text{B.2})$$

El cálculo de estas amplitudes, sin recurrir a aproximaciones, no es trivial; no existe un formalismo general para tratar estos problemas y, de hecho, el significado de objetos como  $D[\Phi^A(x)]$  no está unívocamente definido. Una forma de abordar el problema es por medio de la llamada *aproximación semiclásica* y es la que nos interesa en este momento. En este enfoque, uno expande el valor de la acción en torno a la configuración de campos que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (puesto que allí la acción tendrá su valor extremo, de suerte que la principal contribución a la suma sobre caminos debe provenir de ése término) y obtiene así el valor del kernel, al menos a primer orden.

Entonces, si  $\Phi^A = \Phi_{cl}^A + \delta\Phi^A$ , donde  $\Phi_{cl}^A$  es solución de las ecuaciones de movimiento clásicas (Euler-Lagrange) y  $\delta\Phi^A$  es una perturbación (es decir  $\delta\Phi^A \ll \Phi_{cl}^A$ ), la expresión para el kernel (B.2) deviene en

$$K(b, a) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right\} \int_a^b \prod_A D[\delta\Phi^A(x)] \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left\{ \left( \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 S[\Phi_b^A, \Phi_a^A]}{\delta\Phi^{A2}} \right)_{cl} + \dots \right\}\right\}. \quad (\text{B.3})$$

donde  $S_{cl}$  es el valor de la acción en la configuración de campos clásica y la suma que aparece en el exponente es la expansión en serie de Taylor de la acción.

Esta formulación cuántica de una teoría de campos permite construir la termodinámica del sistema<sup>1</sup>. Para esto, recordemos que el objeto fundamental a

<sup>1</sup>Naturalmente, estamos considerando la descripción en el estado de equilibrio termodinámico.

partir del cual es posible obtener las cantidades termodinámicas usuales como la energía interna, entropía, presión, etc., es la función partición  $Z$ .

Consideremos un sistema con energía  $E$  y temperatura  $T = \beta^{-1}$  fija. La probabilidad de que el sistema esté en un estado  $i$  con energía  $E_i$

$$p_i = \frac{\exp[-\beta E_i]}{Z}, \quad (\text{B.4})$$

donde  $Z$  es el factor de normalización:

$$Z = \sum_{\{j\}} \exp[-\beta E_j]. \quad (\text{B.5})$$

Aquí,  $j$  rotula los estados del sistema;  $E_i$ , por otra parte, no es más que el autovalor del hamiltoniano  $H$  del sistema correspondiente al estado  $i$ , de manera que (B.5) puede reescribirse

$$Z = \sum_{\{j\}} \langle j | \exp[-\beta H] | j \rangle, \quad (\text{B.6})$$

$$= \text{Tr}\{\exp[-\beta H]\}. \quad (\text{B.7})$$

Esta función partición es la que corresponde al ensamble canónico, en el cual el sistema tiene temperatura  $T$  y energía fija  $E$ .

El caso que nos interesa, en que el sistema físico está descrito por campos  $\Phi^A$ , la expresión para la función partición es la extensión natural de (B.7)

$$Z = \int D\Phi^A \exp\{-\beta H[\Phi^A]\} \quad (\text{B.8})$$

Por otra parte, notemos que el kernel (B.1) no es otra cosa que

$$K(b, a) = \langle \Phi_b, t_b | \Phi_a, t_a \rangle, \quad (\text{B.9})$$

$$= \langle \Phi_b | \exp[-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)] | \Phi_a \rangle, \quad (\text{B.10})$$

que resulta ser exactamente (B.7) si uno supone  $\Phi_b = \Phi_a$  y  $(t_b - t_a) = -i\beta$ .

Por lo tanto, la integral de caminos tomada sobre configuraciones de campo periódicas, con período imaginario  $\beta$ , es la función partición del sistema físico descrito por esos campos. Por lo tanto, la termodinámica de una teoría de campos, se puede obtener de (B.1), con las prescripciones dadas anteriormente y una forma de calcularla es, por ejemplo (B.1).

Una vez que se tiene la función partición, la termodinámica es directa. En efecto, supongamos que se conoce  $Z$ , entonces, la *energía libre de Helmholtz* se define como

$$Z = e^{-\beta F}. \quad (\text{B.11})$$

De donde se obtiene directamente

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z. \quad (\text{B.12})$$

Las variables termodinámicas como presión, entropía, energía, pueden calcularse en términos de esta función usando la relación usual de termodinámica

$$U = F - TS. \quad (\text{B.13})$$

donde  $U$  es la energía interna del sistema y  $S$ , la entropía. Entonces

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta F), \quad (\text{B.14})$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad (\text{B.15})$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V}. \quad (\text{B.16})$$

# Apéndice C

## Proyectores

Sea  $O$  una matriz de  $2 \times 2$  singular, es decir,  $\det(O) = 0$ . Nos preguntamos de qué manera se puede factorizar  $O$  de suerte que uno de los factores sea un proyector. Para responder esto definamos en primer lugar un proyector  $P_0$ , al que llamaremos *proyector fundamental* que está dado por

$$P_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Claramente  $P_0$  representa una clase muy particular de estos objetos. De hecho, representa los operadores que proyectan en una dirección fija. Así, para obtener las clases que proyecten en otras direcciones debemos rotar  $P_0$ .

Luego, la descomposición de  $O$  debe contener un proyector de dos parámetros  $P$ , dado por

$$P(\lambda, \theta) = R^T(\theta)P_0(\lambda)R(\theta), \quad (\text{C.2})$$

donde  $R(\theta)$  es una matriz de rotaciones.

Nótese que la definición de  $P_0$  es sólo un asunto de convención pues siempre se puede rotar para llevarlo a la forma deseada. Por ejemplo, en vez de usar  $P_0$  como el proyector fundamental podríamos haber usado  $P'_0$  definido por

$$P'_0(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

y es directo probar que  $P'_0(\lambda) = R^T(\theta)P_0(x)R(\theta)$  donde  $x = 1/\lambda - \lambda$  y  $\tan(2\theta) = -x$ . Nótese que (C.3) es precisamente el proyector en el horizonte (con  $\lambda = \Omega$ ). La diferencia entre  $P_0$  y  $P'_0$  es la dirección de proyección; en efecto, si consideramos un vector en la variedad

$$v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_\phi \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

entonces  $P_0$  proyecta sólo en la dirección  $t$  mientras que  $P'_0$  lo hace sobre una recta en la dirección  $\hat{u} = \cos(\theta)\hat{t} + \sin(\theta)\hat{\phi}$ .

Ahora bien, el proyector así definido es un objeto de dos parámetros, mientras que  $O$  es una matriz de tres parámetros. La única forma en que  $O$  puede depender ahora de  $P$  es por un reescalamiento. En consecuencia, la matriz  $O$  se puede desacomponer, en términos del proyector fundamental, de la siguiente manera

$$O = \exp(\gamma)R^T(\theta)P_0(\lambda)R(\theta). \quad (\text{C.5})$$

# Bibliografía

- [1] A. Einstein, M. Grossmann, *Z. Math. Phys.*, **62** 225 (1913).
- [2] A. Einstein, *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, 1914, p. 1030; 1915, pp. 778, 779, 831, 844
- [3] A. Einstein, *Annalen der Phys.*, **49** 769 (1916).
- [4] R. M. Wald. "General Relativity". University of Chicago Press, 1984.
- [5] S. Weinberg. "Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity". John Wiley & Sons, 1972.
- [6] S. Hawking and G. Ellis. "The large scale structure of the space-time". Cambridge University Press, 1973, pp. 117-178.
- [7] C. Misner, J. Wheeler and K. Thorn. "Gravitation". W H Freeman & Co, 1973.
- [8] J. Hartle, *Phys. Rev D***3**, 2938 (1971).
- [9] C. Teitelboim, *Let. Nuov. Cim.* **3**, 326 and 397 (1972).
- [10] J. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, *Comm. math. Phys.*, **31**, 161-170 (1973).
- [11] S. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [12] J. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [13] S. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1344 (1971).
- [14] J. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **9**, 3292 (1974).

- [15] S. Carlip, Phys. Rev. D**51**, 632 (1995).
- [16] C. Teitelboim, Phys. Rev. D**53**, 2870 (1996).
- [17] S. Carlip, Class. Quant. Grav. **12**, 2853 (1995).
- [18] G. Gibbons and S. Hawking, Phys. Rev. D**15**, 2752 (1977).
- [19] A. Strominger, J. High Energy Phys. **02**, 009 (1998).
- [20] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992).
- [21] S. Carlip, Phys. Rev. D**55**, 878 (1997).
- [22] S. Carlip, Nucl. Phys. Proc. Suppl. D**57**, 8 (1997).
- [23] S. Hojman and L. F. Urrutia. J. Math. Phys. **22**, 1896 (1981).
- [24] S. Hojman, R. Hojman and J. Sheinbaum. Phys. Rev. D**28**, 1333 (1983).
- [25] C. Lanczos, "The variational principles of mechanics." Dover Publications, pp 66-68, Dover Publications (1970).
- [26] S. Hawking and D. Page, Commun.Math.Phys **87**; 577 (1983)
- [27] A. Achúcarro and P. K. Townsend, Phys. Lett **B180**, 89 (1986).
- [28] E. Witten, Nuc. Phys. B**311**, 45 (1988).
- [29] O. Coussaert, M. Henneaux, P. van Driel, Class. Quant. Grav. **12**, 2961 (1995).
- [30] M. Bañados, T. Brotz and M. Ortiz, hep-th/9802076
- [31] M. Parikh and F. Wilczek, Phys.Rev.D**58**:064011 (1998).
- [32] M. Bañados and F. Méndez, Phys. Rev. D**58**, 104014 (1998).
- [33] A. P. Balachandran, L. Chandar, and A. Momen, gr-qc/9412019 (1994).
- [34] A. P. Balachandran, L. Chandar, and A. Momen, gr-qc/9506006 (1995).

- [35] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim. "Constrained Hamiltonian System".  
Accademia Nazionale dei Lincei. pp. 107. (1976).
- [36] E. Witten, Comm. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
- [37] S. Elitzur et al., Nucl. Phys. **B326**, 108 (1989).
- [38] D. Gepner and E. Witten, Nucl. Phys. **B278**, 493 (1986).
- [39] M. Bañados and A. Gomberoff, Phys. Rev **D55** 6162 (1997).
- [40] F. Mendez and J. Zanelli, en preparación.
- [41] N. Kaloper, Phys. Rev **D48**, 2598

