

UCH-FC
DOC-F
M 938
C.1



Aceleración y Calentamiento de Iones en el Viento Solar

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Pablo Sebastián Moya Fuentes

Octubre, 2011

Directores de Tesis: **Dr. J. Alejandro Valdivia**
Dr. Víctor Muñoz

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Pablo Sebastián Moya Fuentes

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 14 de Octubre de 2011.

Directores de Tesis

Dr. J. Alejandro Valdivia

Dr. Víctor Muñoz



Two handwritten signatures in blue ink, one above the other, each on a horizontal line.

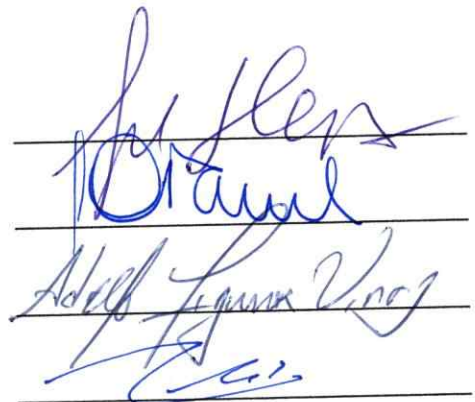
Comisión de Evaluación de la Tesis

Dra. Marina Stepanova

Dr. Jaime Araneda

Dr. Adolfo Figueroa-Viñas

Dr. Rodrigo Soto



Four handwritten signatures in blue ink, stacked vertically, each on a horizontal line.

*A mis padres
y especialmente a mis abuelos.
Sin su historia y ejemplo
esta tesis jamás se hubiese escrito.*

BIOGRAFÍA



Nací a las 16:57 del sábado 8 de octubre de 1983. Mis padres, María Inés y Víctor, acordaron llamarme Pablo Sebastián. 2 años después nació mi hermano Javier y hasta que cumplí 5 años vivimos en la comuna de Maipú. Mi ingreso al Colegio Francisco de Miranda de Peñalolén, nos obligó a cambiarnos de casa. Cuando pasé a primero básico nos cambiamos a La Reina. En el colegio transcurrió gran parte de mi vida. Nunca fui a otro colegio. Desde kinder hasta cuarto medio, 13 años completos, nunca me puse un uniforme. A la distancia agradezco profundamente ese hecho.

En ese ambiente, y con el más absoluto apoyo de mi familia, crecí, conocí a mis mejores amigos y a mi amada Pía. En el intertanto mis padres se separaron y pasamos tiempos difíciles. Lo bueno es que la vida siempre me ha dado recompensas. Ahora mi familia es más grande y tengo dos hermanos más. José Manuel y Álvaro.

El año 2001 salí del colegio y tuve que elegir una carrera. Digo carrera porque nunca hubo opción a la Universidad de Chile. No podría haber estudiado en otro lugar. Después de un año de dudas en Ingeniería el año 2003 ingresé a Ciencias a estudiar Física. Aquí he pasado algunos de mis mejores años y también me he hecho de grandes amigos. El 2007 ingresé al programa de Doctorado y aquí estoy, feliz de haber elegido ser científico.

AGRADECIMIENTOS

Para comenzar quisiera darle las gracias a mi familia. Yo no sería quien soy si no fuese por su ejemplo, su amor incondicional y todo lo que me han enseñado. A mis padres María Inés y Víctor, a mis hermanos Javier, José Manuel y Álvaro, y a especialmente a mis abuelos maternos María y Raúl, y a mis abuelos paternos Rosario y Víctor. Gracias a ellos mis padres me han entregado mucho más que educación y gracias a su ejemplo es que he llegado donde estoy. Agradezco también a quienes con el tiempo se han vuelto familia. Gracias a Claudia, a Achim, a Natalia y a Benjamín por aceptarme y quererme como lo hacen.

Quiero agradecer de manera especial a Pía Vallejo. Faltan las palabras para expresar lo que siento por ella, pero me quedo tranquilo porque estoy seguro que ella sabe, tan bien como yo, que esa falta es sobrepasada enormemente por el profundo amor que compartimos. Le agradezco por todo. Yo no sería el hombre que soy si no fuese por ella. Aprovecho el espacio para agradecerle por su esfuerzo sobrehumano, y de disculparme por mi comportamiento de los últimos meses. De no ser por ella ya no tendríamos casa. El hecho de que esta tesis pueda leerse en gran parte es gracias a ella. Agradezco también a su familia por haberme aceptado como uno más, con todo lo que eso pueda significar.

Agradezco a los amigos que he conocido a lo largo de mi vida. A Camilo Jara, Andrés Kramarenco, Juan Pablo Soto y Nicolás Sáez, mis compañeros de la infancia y adolescencia; a Cristian Farías, Patricio L'Huissier, Max Ramírez y Víctor Pinto, mis más grandes amigos de la Universidad, y a Felipe Asenjo, Denisse Pastén, Roberto Navarro, Macarena Muñoz y Rodrigo López, mis compañeros de oficina. Todos ellos han sido importantes durante mi vida. Les agradezco por su amistad, paciencia y apoyo. En particular, a Macarena Domínguez y a Sebastián Godoy. Gracias a ellos

esta tesis pudo ser terminada e impresa. Les estaré siempre agradecido.

Agradezco también a quienes han marcado mi formación científica. A los profesores y funcionarios del departamento de Física de la Facultad de Ciencias y especialmente a Alejandro Valdivia, Víctor Muñoz y José Rogan. Al profesor Rogan por haber sido el primer académico en recibirme cuando por primera vez vine a esta Facultad, y a los profesores Valdivia y Muñoz, los directores de este trabajo de tesis, por todo lo que significa estar casi 5 años a cargo de un proyecto de tesis doctoral. A los tres, en particular, les agradezco por su confianza en mi trabajo. Agradezco también a los integrantes de la comisión. Cada comentario y corrección han hecho que este trabajo sea mucho más de lo que escribí inicialmente.

De mi estadía Estados Unidos, agradezco al Dr. Adolfo Viñas por todo lo que aprendí durante mi pasantía en NASA. A él, su señora Lourdes, y su familia, así como a Roberto, Carolina, Joel, David, Yoli, Manuel y Carol, les agradezco la hospitalidad, la compañía y la calidez humana tanto conmigo como con Pía.

Para finalizar agradezco a todos quienes hicieron posible mi solvencia económica durante mis años en el doctorado. A CONICYT por la Beca Nacional de Doctorado D-21070397 (2007) que me fue adjudicada, al sistema Becas-Chile por la beca que me permitió realizar una pasantía en Estados Unidos durante el año 2010, y a los proyectos de investigación de mis directores de tesis que hicieron posible mi asistencia a congresos y mi sustento durante los últimos meses. A todos quienes deberían estar en estas páginas y, por algún motivo no están presentes, mis más sinceros agradecimientos.

Índice

Resumen	x
Abstract	xI
1. Introducción	1
2. El Sol, la corona solar y el viento solar	8
2.1. El Sol	9
2.1.1. El parámetro β	10
2.2. El viento solar	12
2.2.1. Modelo de Parker	14
2.3. Aceleración y calentamiento de iones	17
3. Teoría lineal	21
3.1. Relación de dispersión en un plasma de Vlasov en presencia de un campo magnético de fondo	22
3.2. Relación de dispersión en un plasma tipo viento solar	27
3.3. Aproximación semifría	30
3.3.1. Parte real de la relación de dispersión	31
3.3.2. Parte imaginaria: Tasas de crecimiento y amortiguamiento . .	35

3.4. Discusión	38
4. Modelo cuasilineal	41
4.1. Ecuaciones básicas	42
4.2. Evolución temporal de los parámetros macroscópicos para funciones de distribución bi-Maxwellianas	46
4.2.1. Ecuaciones normalizadas	50
4.3. Aplicación para plasmas semifríos	52
4.3.1. Aproximación semifría de las funciones $K_{1z}^\mu, K_{2z}^\mu, y K_{2\perp}^\mu$	53
4.4. Discusión	56
5. Evolución cuasilineal de un plasma compuesto de electrones y protones	59
5.1. Solución numérica del sistema cuasilineal	63
5.1.1. Caso 1: Espectro inicial gaussiano	64
5.1.2. Caso 2: Espectro inicial tipo lorentziano	69
5.2. Resumen y discusión	74
6. Evolución cuasilineal para un plasma tipo viento solar	77
6.1. Relación de dispersión	78
6.2. Efectos tipo cascada para un espectro magnético gaussiano	84
6.3. Resumen y discusión	90
7. Modelos híbridos	97
7.1. Ecuaciones para un plasma híbrido	98
7.1.1. Plasmas híbridos con electrones no inerciales y presión escalar	101
7.2. Modelos de caja en expansión	102

7.2.1. Transformación de las derivadas en tiempo y espacio	105
7.2.2. Ecuaciones para el campo electromagnético: Formulaci3n de campo magnético	107
7.2.3. Ecuaciones para el campo electromagnético: Formulaci3n de potencial vector	109
7.3. Resumen	111
8. Consideraciones sobre simulaciones híbridas	113
8.1. Consideraciones sobre el sistema de referencia	115
8.2. El método <i>Particle in Cell</i> (PIC)	117
8.3. Simulaciones híbridas para un plasma en expansi3n	123
9. Simulaciones híbridas	127
9.1. Simulaciones híbridas de un plasma compuesto de electrones y protones	128
9.2. Simulaciones híbridas de un plasma tipo viento solar	133
9.3. Resumen, discusi3n y comparaci3n con resultados cuasilineales	142
10. Conclusiones	150
A. Derivaci3n general de la relaci3n de dispersi3n en un plasma no colisional en presencia de un campo magnético de fondo	158
B. Propiedades de la funci3n de dispersi3n de plasmas	165
B.1. Integrales relacionadas	166
B.2. Expresiones asint3ticas	166
C. Leyes de conservaci3n en la teoría cuasilineal	168
C.1. Conservaci3n de partículas	168

C.2. Conservación de energía 169

C.3. Conservación de momentum 172

Referencias **175**

Resumen

Respecto al problema de la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar, observaciones recientes y resultados teóricos parecen indicar que la mayor parte de los procesos de aceleración y calentamiento del plasma ocurre a unos pocos radios solares de distancia respecto del Sol, y que el mecanismo principal corresponde a la absorción resonante de ondas electromagnéticas tipo ión-ciclotrón por parte de las partículas. Para estudiar este problema, en este trabajo de tesis se considera la interacción onda partícula y la evolución de ondas electromagnéticas propagándose a través de un plasma compuesto de electrones, protones y una porción minoritaria de partículas α . El análisis presentado ha sido hecho a partir de dos enfoques: (1) una teoría cinética cuasilineal para estudiar la transferencia de energía entre ondas y partículas, y la posterior aceleración y calentamiento de los iones; (2) la realización de simulaciones numéricas híbridas en una dimensión espacial, con y sin incluir un modelo de caja en expansión que emula la expansión esférica del viento solar, para investigar la interacción completamente no lineal entre ondas y partículas. Los resultados numéricos de ambos enfoques indican una evolución anisotrópica de las temperaturas de ambas especies a expensas de la energía del espectro inicial de ondas; en un efecto tipo cascada se observa la aparición de modos de frecuencias más altas que las consideradas inicialmente. Tanto el calentamiento del plasma como la cascada de energía fueron más eficientes en el análisis no lineal que en el cuasilineal.

Abstract

On the problem of acceleration and heating of ions in the wind solar, recent observations and theoretical results seem to indicate that most of the processes of acceleration and heating of solar wind plasma occur within a few solar radii from the Sun, and that the main mechanism corresponds to the resonant absorption of ion-cyclotron waves by particles. To address these issues, in this thesis we study the wave-particle interaction, and the evolution of electromagnetic waves propagating through a plasma composed of electrons, protons and a small concentration of α -particles. The analysis presented has been made using two approaches: (1) a quasilinear kinetic theory has been developed to study the energy transfer between waves and particles, with the subsequent acceleration and heating of ions; (2) one-dimensional hybrid numerical simulations have been performed, with and without including an expanding-box model that emulates the spherical expansion of the solar wind, to investigate the fully nonlinear wave-particle interaction. Numerical results of both approaches show that there is an anisotropic evolution of both species temperatures, at the expense of the initial wave-spectrum energy; in a cascade effect, we observe the emergence of modes at frequencies higher than those initially considered. Both the heating of the plasma as the energy cascade were more efficient in the nonlinear analysis than in the quasilinear.

Research Highlights

- Quasilinear theory and fully nonlinear hybrid simulations for the transfer of energy between particles and waves in plasmas.
- Energy cascade effect in the electromagnetic energy spectrum. Appearance of modes at frequencies higher than the initial modes.
- Perpendicular and parallel heating of drifting protons and α particles.
- Nonlinear heating and energy cascade more efficient than in the quasilinear.

Capítulo 1

Introducción

Al presentar una gran riqueza de fenómenos colectivos mediados por fuerzas electromagnéticas de largo alcance, los plasmas representan un objeto de estudio muy interesante para la investigación desde escalas subatómicas hasta dimensiones astrofísicas. Es por esto que durante muchos años, desde el artículo de Langmuir que define el concepto de plasma en 1928 [1], y principalmente a partir de la segunda mitad del siglo XX, los plasmas han sido un tema activo y creciente en física tanto teórica como experimental.

Debido a que representan más del 99 % de la materia visible en el Universo, la investigación de plasmas ha sido de gran importancia en el estudio y comprensión de sistemas astrofísicos [2-7] (púlsares, núcleos galácticos activos, universo primordial, plasmas de pares electrón-positrón, etc.), en física espacial [8-24] (magnetósferas planetarias, heliósfera, viento solar, espacio interplanetario) y en plasmas de laboratorio [25-29] (fabricación de dispositivos semiconductores, láseres de potencia pulsada, dispositivos tipo *pinch*, plasmas de pares, tokamaks, etc). Además, investigaciones recientes muestran que muchos de los sistemas anteriores presentan características de sistemas complejos, por lo que en su estudio también se consideran fenómenos tales como criticalidad auto-organizada, fractalidad, distribuciones de velocidad tipo

leyes de potencia, difusión anómala, etc. [30-33].

En lo que respecta a la física de plasmas espaciales, uno de los campos más desarrollados ha sido la compleja dinámica Tierra-Sol. Esto, no sólo por su interés científico, sino también tecnológico, ya que el viento solar, al transportar campo magnético y transmitir ondas electromagnéticas, puede tener efectos importantes en satélites y sondas de exploración espacial. En particular la interacción entre las partículas emitidas por el Sol (viento solar) y la magnetósfera terrestre corresponde a uno de los temas más activos y con más interés en las últimas décadas. En las Refs. [34-36] se puede encontrar literatura tanto teórica como observacional al respecto.

Ahora bien, observaciones muestran que las partículas que conforman el viento solar se aceleran en su viaje desde el Sol para conformar lo que se conoce como viento solar rápido [37, 38]. Generalmente se supone que la aceleración y calentamiento de iones pesados ocurre a unos pocos radios solares de distancia del Sol y se debe a la absorción resonante de ondas de Alfvén [39-46]. Además, es ampliamente aceptado que el mecanismo más importante en esta aceleración y calentamiento es la absorción resonante de ondas tipo iónicas-ciclotrónicas [46-48].

Sin embargo, mediciones satelitales *in situ*, a distancias mayores que 0.3 UA del Sol, muestran un espectro de frecuencias de las fluctuaciones electromagnéticas entre 10^{-3} y 10^{-1} Hz, rango de frecuencias en que no es posible acelerar a los iones a las velocidades observadas. Por otro lado, inestabilidades entre 10 y 10^4 Hz, frecuencias capaces de calentar y acelerar a los iones, no han sido observadas ni en el viento ni en la corona solar [40, 41], por lo que se han propuesto variados modelos para explicar la generación de estas ondas de alta frecuencia, y su disipación antes de alcanzar las 0.3 UA [37, 38, 49, 50]. Entre los modelos propuestos están la disipación cinética de

ondas de Alfvén [51], interacción no resonante con ondas de Alfvén [52,53], cascadas inversas de energía en turbulencia MHD [54-57], aceleración a grandes distancias del viento solar [58,59] y cascadas de energía inducidas por los iones [60-62], entre otros. El problema hasta el día de hoy continúa abierto y corresponde a uno de los grandes desafíos de la física de plasmas espaciales en la actualidad. Respecto a los mecanismos propuestos en los modelos nombrados, es importante mencionar que el estudio en profundidad de cada uno de ellos ha contribuido a un mejor entendimiento de la física que gobierna los procesos de aceleración y calentamiento de iones en el viento solar. En el presente trabajo, es precisamente eso lo que se ha intentado hacer, considerando específicamente el último mecanismo mencionado: la transferencia de energía entre ondas y partículas a través de una cascada de frecuencias inducida por los iones.

En ese sentido, recientemente se ha mostrado que el efecto combinado de la presencia de iones pesados (por ejemplo O^{+5} y Mg^{+9}) [42,63-65], con gran anisotropía térmica y velocidad de deriva respecto a los protones, puede provocar inestabilidades tipo ion-ciclotrón más allá de sus correspondientes frecuencias ciclotrónicas [60-62, 66,67]. En un efecto tipo cascada [68,69], estas inestabilidades de mayor frecuencia pueden ser capaces de calentar y acelerar iones menos masivos, que a su vez generan inestabilidades de más alta frecuencia, y así llegar hasta ondas que resuenen con los protones y les cedan energía. Con este fin, los modelos lineales [60-62, 66, 67], para el caso de ondas circularmente polarizadas propagándose en la dirección de un campo magnético de fondo, sugieren que debe existir algún tipo de mecanismo de transferencia de energía entre ondas, desde los modos con longitud de onda más grande hacia los modos con menor longitud de onda, con la subsiguiente aceleración de iones, de especie a especie, a medida que aumenta la razón carga sobre masa.

Sin embargo, los trabajos anteriormente citados corresponden a una teoría lineal y por tanto no dan información acerca de los mecanismos de transferencia de energía entre ondas y las diferentes especies de partículas. Entender estos mecanismos podría ser relevante para entender los procesos de calentamiento de iones observados en el viento solar rápido.

El objetivo de este trabajo de tesis es contribuir al estudio y entendimiento de la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar, considerando efectos no lineales, no considerados en las Refs. [60–62, 66, 67]. Con este propósito, se considera un modelo cinético no lineal, que da cuenta de la interacción entre ondas electromagnéticas circularmente polarizadas y partículas, en un plasma no colisional en presencia de un campo magnético de fondo. Como se dijo anteriormente, los trabajos previos acerca del mecanismo de cascada de energía propuesto corresponden a teoría lineal [60–62, 66, 67]. Sin embargo, dado el carácter no lineal del sistema estudiado, se espera que la teoría lineal, aun cuando es útil para obtener intuiciones acerca de los procesos físicos involucrados, sea insuficiente para modelar el sistema en detalle.

En efecto, la aparición de amortiguamiento o crecimiento de ondas produce cambios en las funciones de distribución de velocidad. Estos cambios, a su vez, pueden alterar las propiedades macroscópicas del plasma como son la temperatura y las velocidades de deriva, lo cual, a su vez induce cambios en la propagación de ondas a través de la relación de dispersión. Por lo tanto, es relevante considerar un modelo no lineal para el sistema en cuestión. En este sentido, la teoría cuasilineal [70, 71] ha tenido amplio uso en el pasado, aplicándose al estudio del viento solar [72–74], en particular, por ejemplo, para analizar la evolución macroscópica del plasma, en el caso de la propagación de ondas tanto paralela [75] como oblicua [76] respecto a un

campo de fondo. Siguiendo esta línea de investigación en esta tesis consideramos un modelo cinético cuasilineal donde las partículas están dadas por funciones de distribución de velocidad bi-Maxwellianas [34,70]. Este modelo corresponde al primer paso de este trabajo en el estudio de estas interacciones onda-plasma inherentemente no lineales que ocurren durante el proceso de cascada de energía ya mencionado [68,69].

Sin embargo, aun cuando un modelo cuasilineal es un avance respecto a un modelo estrictamente lineal, es claro que no da cuenta de toda la no linealidad presente en el sistema. Por ello, en esta tesis se complementa el estudio analítico anterior con la realización de simulaciones computacionales que, en principio, permiten considerar todos los efectos no lineales. Para el caso de un plasma tipo viento solar, en que la dinámica de los electrones es mucho más rápida que la de los iones, lo usual es trabajar modelos híbridos, en los cuales los iones son considerados como partículas, mientras que los electrones son tratados como un fluido. En las últimas décadas se han desarrollado una gran cantidad de códigos computacionales y en la literatura se puede encontrar una gran cantidad de referencias al respecto. En particular, las simulaciones basadas en un modelo híbrido para electrones no masivos (ver Refs. [77-81] entre muchas otras) resultan ser las más utilizadas y presentan una manera estándar y muy estudiada de complementar trabajos tanto teóricos como observacionales.

Por lo tanto, al realizar las simulaciones híbridas, se incorporan a este trabajo efectos no lineales, no presentes en la teoría cuasilineal, que enriquecen el estudio y presentan una vía de comparación interesante del modelo teórico propuesto. Usualmente, las simulaciones computacionales consideran partículas contenidas en una caja de paredes fijas. Sin embargo, en el viento solar, las partículas, al alejarse radialmente del Sol, ocupan un volumen cada vez mayor por el hecho de propagarse de modo isotrópico. Para considerar los efectos de este cambio en la geometría recién-

temente se ha desarrollado el modelo de “caja en expansión” [82]. En este trabajo se estudiarán tanto simulaciones híbridas con la geometría usual, como con el modelo de caja en expansión.

Para desarrollar todas las ideas mencionadas, esta tesis está organizada como sigue: primero, en el Cap. 2 se presentan las propiedades físicas básicas del Sol y el viento solar, así como también una introducción histórica de la investigación respecto al problema de la aceleración y calentamiento de la corona y del viento solar rápido. En el Cap. 3 se presenta el estudio lineal de la propagación de ondas ion-ciclotrónicas en un plasma no colisional, basado en una teoría cinética, y enfatizando en particular los métodos de obtención de las frecuencias complejas en la relación de dispersión para plasmas tipo viento solar, así como la discusión de las Refs. [60–62, 66, 67], que son los trabajos que proponen el efecto tipo cascada mencionado anteriormente, y cuya extensión al régimen no lineal es presentada en esta tesis. Luego, en el Cap. 4 se presenta la teoría cuasilineal propuesta para el estudio de la aceleración y calentamiento de plasmas debido a la interacción con ondas electromagnéticas, para luego aplicar dicha teoría a plasmas semifríos [60–62, 66, 67, 83] compuestos de electrones y protones (Cap. 5), y plasmas semifríos compuestos de electrones, protones y una fracción minoritaria de partículas α (Cap. 6).

Los capítulos siguientes corresponden al estudio completamente no lineal del problema a través de simulaciones computacionales híbridas. En el Cap. 7 se describen los conceptos básicos de los modelos híbridos de plasmas, y además se obtienen detalladamente las expresiones modificadas correspondientes al modelo de caja en expansión [82]. En el Cap. 8 se discuten algunos aspectos técnicos necesarios para la implementación y aplicación de un código híbrido: elección de sistema de referencia, normalización de las variables físicas, algunos detalles sobre el algoritmo utilizado,

etc. A continuación, en el Cap. 9 se muestran los resultados de simulaciones computacionales a partir de los modelos híbridos, con y sin efectos de expansión, en el caso de plasmas compuestos de electrones y protones, así como también compuestos de electrones, protones y partículas α , para luego comparar los resultados con los obtenidos a partir del estudio cuasilineal (Caps. 5 y 6, respectivamente). Para finalizar, en el Cap. 10 se resumen los principales resultados, discutiéndolos, elaborando las conclusiones de este trabajo de tesis y mencionando la posible continuación y las proyecciones de este estudio.

Capítulo 2

El Sol, la corona solar y el viento solar

En este capítulo se describirán algunas características del Sol, la corona solar y el viento solar, haciendo énfasis en los aspectos más relevantes para el presente estudio. Se explicará a grandes rasgos la estructura solar, su composición, densidades y rangos de temperatura, estableciendo los valores típicos del parámetro β en la superficie y atmósfera del Sol en base a las observaciones disponibles y algunos modelos propuestos. Este parámetro será de gran importancia para el análisis teórico que se desarrollará en los capítulos siguientes. Luego, en relación a la corona y el viento solar, se describirá la composición, rangos de temperatura, velocidad y densidad de la corona solar y en particular los llamados agujeros coronales. Además, se expondrá el modelo de Parker [84], que corresponde al primer modelo que explicó la existencia del viento solar. Finalmente se presentará una introducción histórica del problema de la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar, motivada en las observaciones tanto en la superficie terrestre como las obtenidas con el uso de sondas y satélites de exploración espacial, para así mostrar algunos de los modelos propuestos y revisar las ideas fundamentales que son el punto de partida de este trabajo.

2.1. El Sol

El Sol es una estrella tipo G2V¹, de unos 4500 millones de años de edad, con una magnitud absoluta de 4.8 y que se encuentra a unos 1.5×10^8 m de la Tierra, distancia definida como Unidad Astronómica (UA), equivalente a unos ocho minutos luz. Es una bola de plasma compuesta principalmente por un 90 % de hidrógeno, menos de un 10 % de helio y una gran cantidad de otros elementos en abundancias minoritarias. Tiene un radio de $R_S \approx 7 \times 10^5$ km y una masa de $M_S \approx 2 \times 10^{30}$ kg. R_S es unas 109 veces el radio terrestre y M_S es unas 330 mil veces la masa de nuestro planeta [34]. A grandes rasgos, el Sol está compuesto de un *núcleo* con una temperatura de unos 15×10^6 K, en el cual se producen reacciones de fusión, transformando hidrógeno en helio. Alejándose radialmente hacia la superficie, existe una *zona radiativa* en la cual se transmite el calor del núcleo hacia la superficie y una *zona convectiva*, en la cual la densidad y la temperatura son más bajas, llegando a unos 5000 K en la superficie del Sol. Además, esta *zona convectiva* posee una rotación diferencial que depende de la latitud. Hacia el ecuador el periodo es de unos 26 días, mientras que cerca de los polos ese periodo crece hasta 37 días [35].

Inmediatamente sobre la zona convectiva se encuentran la *fotósfera* (capa en la cual se emite la luz solar), la *cromósfera* (llamada así debido a que durante los eclipses solares se observa como una capa delgada que emite *flashes* de luz) y la *corona solar*, que corresponde a la atmósfera externa del Sol y se extiende hacia el espacio interplanetario como un flujo de partículas cargadas conocido como *viento solar*. La corona solar tiene una estructura bastante compleja y, sin entrar en detalles, comienza en una región donde la densidad es de unas 10^9 partículas por cm^3 llamada

¹Las estrellas tipo G2 corresponden a las llamadas *enanas amarillas*, cuya temperatura superficial es cercana a los 5800 K. La clase de luminosidad V corresponde a las estrellas enanas, de la secuencia principal del diagrama de Hertzsprung-Russell [85]

corona baja, hasta la *corona exterior*, a unos $20 R_S$, en donde la densidad promedio es de 10^7 cm^{-3} [36]. En general, la temperatura T_c de la corona es unas mil veces mayor que la temperatura en la superficie del Sol ($T_c \sim 2 \times 10^6 \text{ K}$), alcanzando en las regiones más calientes unos $20 \times 10^6 \text{ K}$ debido a procesos actualmente no del todo claros [86], siendo el problema de la aceleración y calentamiento de *vientos estelares* una de las preguntas más estudiadas en la astrofísica de plasmas en la actualidad [87].

El Sol es una estrella magnetizada y debido a su compleja estructura su campo magnético es altamente fluctuante, exhibiendo una dinámica rica en una gran variedad de fenómenos que han sido estudiados a lo largo de la historia [35]. Actualmente se sabe que fenómenos como manchas solares, eyecciones de masa coronal, fluctuaciones del viento solar, dinámicas turbulentas, etc., dependen fuertemente de la compleja dinámica magnética y se agrupan en lo que se conoce como *actividad solar* [88,89]. La corona solar exhibe una estructura bastante compleja. Existen regiones tanto de líneas de campo magnético cerradas, como líneas abiertas, estas últimas denominadas *agujeros coronales* (llamadas así debido a que aparecen como zonas oscuras en las imágenes de rayos X). En estas regiones de latitudes más altas las líneas de campo son del orden de 1 ó 10 G y se generan flujos de viento solar a altas velocidades [36,37,43,46].

2.1.1. El parámetro β

La dinámica solar está influenciada por fuerzas de carácter electromagnético. En particular, las partículas cargadas tienden a exhibir trayectorias ciclotrónicas siguiendo las líneas de campo magnético. Solamente cuando la energía cinética es mayor que la energía magnética las partículas pueden escapar de sus giro-órbitas y difundir a través de las líneas de campo. La manera usual de cuantificar esta diferenciación

entre las posibles trayectorias de las partículas, es decir, qué tan confinado por el campo magnético se encuentra el plasma, está dada por el llamado parámetro β , definido como la razón entre la presión térmica y la presión magnética, que en el caso de considerar el plasma como un gas ideal es, en el sistema CGS,

$$\beta = \frac{8\pi n k_B T}{B_0^2}, \quad (2.1)$$

donde n y T son la densidad y temperatura del plasma, respectivamente, B_0 es el campo magnético y k_B es la constante de Boltzmann [90]. En el caso del Sol, en la corona generalmente $\beta < 1$, existiendo algunas regiones intermedias con $\beta > 1$.

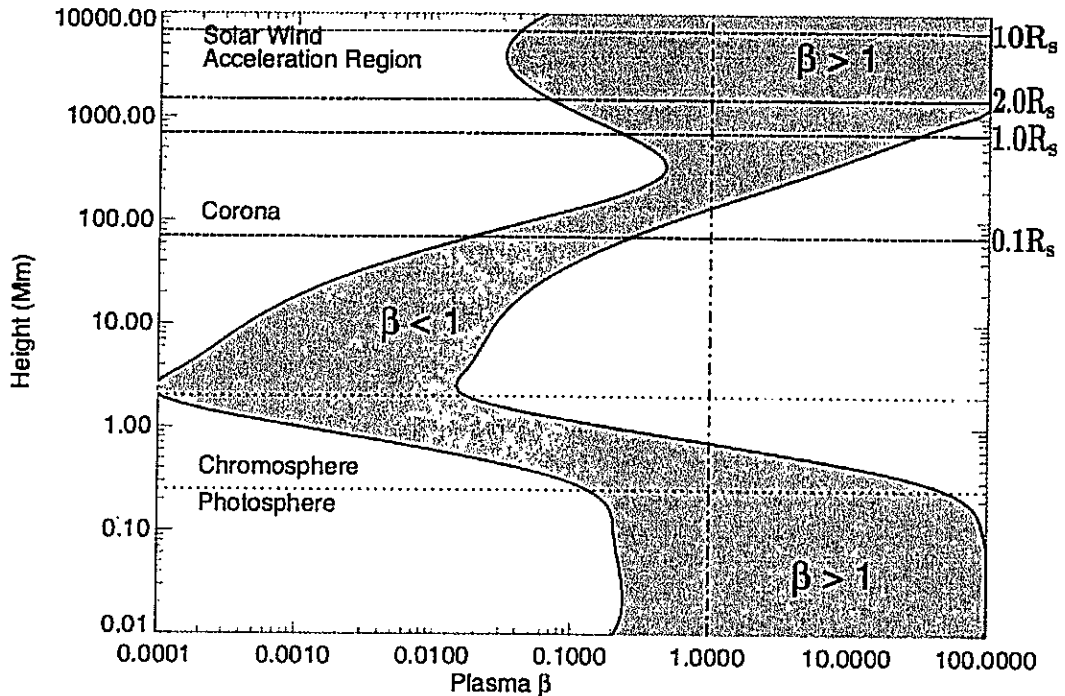


Figura 2.1: Promedio espacial y temporal del parámetro β en la atmósfera solar (región oscurecida en la figura) como función de la distancia radial a la superficie del Sol, correspondiente al modelo propuesto en la Ref. [91].

La Fig. 2.1 presenta un gráfico de los valores de β en función de la distancia a la

superficie solar, a partir de los resultados de un modelo propuesto en la Ref. [91]. Se observa que $\beta < 1$ en la corona y en las regiones de aceleración del viento solar, en donde la intensidad de campo magnético es más baja, como es el caso de los agujeros coronales.

A modo de ejemplo, en la tabla 2.1 (extraída de la Ref. [36]) se muestran los parámetros necesarios para estimar los valores típicos de β en distintas regiones de la atmósfera solar (o *heliósfera*). Como puede observarse en la tabla, salvo en las regiones en que las temperaturas o densidades son tales que la presión del plasma es muy alta con respecto a la presión magnética, en la atmósfera solar el plasma suele estar confinado por los campos magnéticos y $\beta < 1$. Con respecto al valor de β , en este trabajo se considerará $\beta \ll 1$, lo cual permite obtener expresiones analíticas sencillas, y es consistente con la mayoría de los trabajos teóricos y simulaciones en este campo.

Región	Densidad n (cm^{-3})	Temperatura T (K)	Presión (dina cm^{-2})	Campo B_0 (G)	Plasma β
Fotósfera	2×10^{17}	5×10^3	1.4×10^5	500	14
Corona fría	10^9	10^6	0.3	10	0.07
Corona caliente	10^9	3×10^6	0.9	10	0.2
Corona exterior	10^7	10^6	0.02	0.1	7

Tabla 2.1: El parámetro β típico en algunas regiones de la heliósfera.

2.2. El viento solar

El viento solar corresponde a la expansión hidrodinámica de la heliósfera debido al gradiente de presión entre la corona solar y el espacio interplanetario. Corres-

ponde a un flujo de partículas cargadas, principalmente electrones y protones, un 4% de partículas α y una gran variedad de especies iónicas minoritarias con diversas concentraciones, que se alejan casi radialmente de la influencia gravitatoria del Sol [35–38]. Debido a esto, a partir de ciertas distancias (dependiendo de la latitud y otros parámetros) el viento solar se vuelve un flujo supersónico o *superalfvénico*. Gracias a la alta conductividad de plasma, el viento solar es capaz de transportar el campo magnético solar en todas las direcciones para así llenar el espacio en todo el sistema solar. Por esta razón las características del viento solar están fuertemente relacionadas con la actividad solar, produciéndose esporádicamente fenómenos como erupciones solares, eyecciones de masa coronal y ondas de choque [34,35].

A grandes rasgos existen dos tipos de viento solar: el llamado *viento solar lento* y el *viento solar rápido*. El viento solar lento tiene una velocidad promedio V_{SW} de entre 200 km/s y 400 km/s, y en general se produce a bajas latitudes y regiones de líneas de campo magnético cerradas, en una compleja dependencia del llamado *ciclo solar*. Por su parte, el viento solar rápido se produce en las regiones de líneas abiertas (agujeros coronales) y su velocidad promedio V_{FW} fluctúa entre unos 400 y 1000 km/s [35]. Por su parte, las velocidades del sonido C_S y de Alfvén de los protones V_{Ap} están dadas por

$$C_S = \left(\frac{\gamma_e k_B T_e + \gamma_p k_B T_p}{m_p} \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

donde, T_e , γ_e , T_p y γ_p son las temperaturas y constantes adiabáticas de electrones y protones respectivamente y m_p es la masa del protón, y

$$V_{Ap} = \left(\frac{B_0^2}{4\pi n_p m_p} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

siendo B_0 y n_p la intensidad del campo magnético de fondo y la densidad de protones respectivamente. En el caso del viento solar, estas velocidades fluctúan aproximada-

mente entre 10^2 y 10^3 km/s. Luego, se tiene que, en algunas regiones (dependiendo de la latitud y otros parámetros) el flujo es supersónico y/o superalfvénico.

A medida que se aleja del Sol, el viento solar puede encontrarse en su camino, e interactuar con estructuras como las magnetósferas planetarias y cometas, siendo la interacción con la magnetósfera terrestre uno de los temas más estudiados en el campo de los plasmas espaciales. Eventualmente, el viento solar alcanza los límites del sistema solar, donde se forma un arco de choque debido a la interacción de vientos interestelares y la heliósfera (variada literatura al respecto se puede encontrar en [8-23, 34-36], entre otros).

2.2.1. Modelo de Parker

Históricamente el estudio y comprensión del viento solar están ligados a la carrera espacial. Si bien existen trabajos que datan incluso del siglo XIX, recién en los años 50, y a partir de la observación de las colas de los cometas, L. Biermann [92] propuso formalmente la existencia del viento solar aproximadamente como se entiende hoy en día. Luego, en 1957 Alfvén propuso un modelo para la formación de las colas de los cometas [93], basado en la interacción entre el campo magnético del viento solar y la materia que despiden los cometas al moverse a través de éste. Un año más tarde, Parker demostró que la heliósfera no puede estar en un estado de equilibrio estático, sino que se encuentra en constante expansión. De esta manera, se tuvo el primer modelo que explicaba la existencia del viento solar [84], hecho comprobado por primera vez por K. I. Gringauz en 1959, al estudiar los datos obtenidos por la sonda *Luna 1*, y posteriormente estudiado en mayor detalle por una gran cantidad de misiones espaciales tales como *Luna 2*, *Luna 3* en 1959, *Pioneer 5* en 1960, *Venera 1* en 1961 y *Mariner 2* en 1962, entre otras muchas misiones [35, 94] como SOHO, Wind

y ACE, lanzadas en los años 90 [46,95,96], o *SDO*, recientemente lanzada [97].

Uno de los postulados más importantes de Parker fue el hecho de relacionar la existencia de las colas de cometas con el flujo de plasma desde el Sol, considerado como un gas a cierta temperatura, llamándole *viento solar*. Parker propuso que este flujo de "radiación" era suficientemente rápido como para superar la atracción gravitatoria del Sol, y, debido a que la gravedad disminuye con la distancia, a cierta distancia crítica R_c la velocidad del viento solar debía superar una velocidad crítica V_c y volverse supersónico. A grandes rasgos, el procedimiento es el siguiente [35,98,99]:

Para un flujo de partículas de masa m en expansión radial desde el Sol, en el cual la temperatura $T = T(r)$, la densidad $n = n(r)$ y la velocidad $v = v(r)$ dependen solamente de la coordenada radial, se tiene que las ecuación de movimiento está dada por

$$nmv \frac{dv}{dr} = -\frac{dp}{dr} - \frac{nmGM_S}{r^2}, \quad (2.4)$$

donde G es la constante de gravitación universal y M_S la masa del Sol. Por su parte, la presión p está dada por

$$p(r) = n(r)mU^2(r), \quad (2.5)$$

con

$$U(r) = (2k_B T(r)/m)^{1/2} \quad (2.6)$$

la velocidad térmica del plasma. Así, (2.4) se puede expresar como

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{U^2}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{dU^2}{dr} - \frac{GM_S}{r^2}. \quad (2.7)$$

Ahora bien, considerando un flujo constante, la ecuación de continuidad se reduce a $\partial(nv)/\partial r = 0$, y por lo tanto

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = -\frac{2}{r} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dr}. \quad (2.8)$$

Así, utilizando (2.8) en (2.7) se obtiene la ecuación para las velocidades.

$$v \left(1 - \frac{U^2}{v^2} \right) \frac{dv}{dr} = \frac{2U^2}{r} - \frac{GM_s}{r^2} - \frac{dU^2}{dr}. \quad (2.9)$$

Las soluciones que se buscan corresponden a soluciones en las cuales, a la distancia crítica R_c , el flujo pasa de ser subsónico a supersónico. Luego, para $r = R_c$, $v(R_c) = U(R_c)$ y el lado izquierdo de (2.9) se anula. Así, a esa distancia radial se tiene

$$R_c = \frac{GM_s}{2U^2}, \quad (2.10)$$

donde se ha considerado que la temperatura es uniforme ($dT/dr = 0$).

Así, se tiene que (2.9) se puede expresar como

$$v \left(1 - \frac{U^2}{v^2} \right) \frac{dv}{dr} = \frac{2U^2}{r} (r - R_c), \quad (2.11)$$

lo cual se puede integrar, dando la ecuación trascendente

$$\frac{v^2}{U^2} - \ln \left(\frac{v^2}{U^2} \right) = 4 \ln \left(\frac{r}{R_c} \right) + \frac{4r}{R_c} - 3 + C, \quad (2.12)$$

donde C es una constante de integración. Es importante notar que si la temperatura es variable, debido a la dependencia de la presión con la distancia, el procedimiento es un poco más complicado pero las ecuaciones son las mismas y las soluciones similares.

Esta última ecuación (2.12) posee una familia de soluciones, dependiendo del valor de C . En la Fig. 2.2, cada una de las curvas corresponde a un tipo de solución, de las cuales solamente dos cumplen el requisito de pasar por el punto crítico R_c , $U(R_c)$. Una de ellas (la más delgada) corresponde a un flujo que diverge para $r \rightarrow 0$ y se anula cuando $r \rightarrow \infty$. Claramente esta solución es no física y se puede descartar. La otra solución (representada por la curva más gruesa en la figura) corresponde a $C = 0$ y es justamente el tipo de soluciones buscado. Describe el viento solar como un flujo que comienza a distancias cercanas al Sol con velocidades bajas, sufre un proceso de

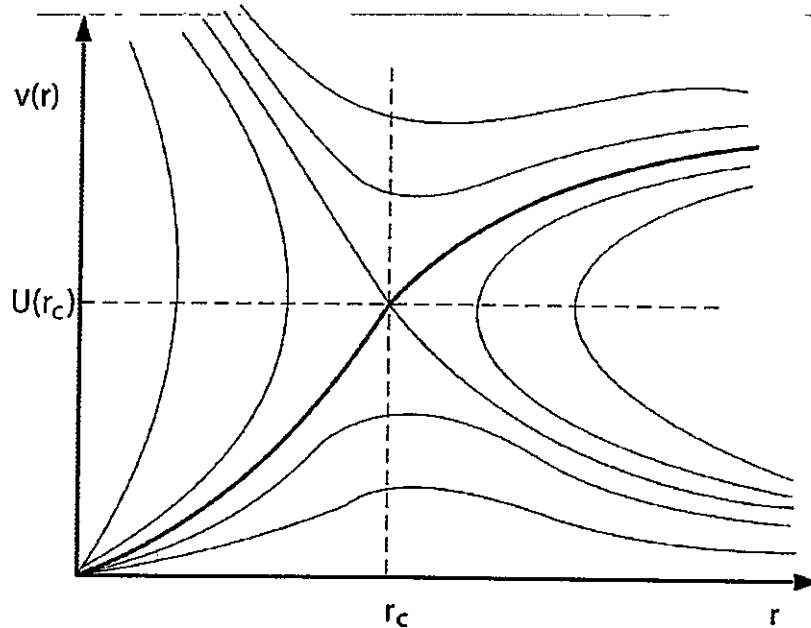


Figura 2.2: Familia de soluciones $v(r)$ de la ecuación (2.12) del modelo de Parker. La curva más gruesa corresponde al tipo de soluciones de interés y corresponde a $C = 0$, tal como aparece en la Ref. [35].

aceleración en la llamada *región de aceleración*, pasa por el punto crítico en el cual se vuelve supersónico y finalmente alcanza una velocidad aproximadamente estable para distancias suficientemente grandes. Esta solución corresponde a la propuesta por Parker en la Ref. [84].

2.3. Aceleración y calentamiento de iones

Aunque el modelo de Parker que se acaba de describir predice la existencia de un viento solar de altas velocidades, dicho modelo no da cuenta de los procesos de aceleración preferencial de las especies minoritarias ni del calentamiento del plasma, siendo el estudio de las causas de estos fenómenos un campo bastante antiguo en la física.

La evidencia observacional de la existencia de gases altamente ionizados en las cercanías del Sol data de 1869, cuando Harkness y Young, al observar el espectro solar, observaron una línea verde de 530 nm durante un eclipse total de Sol, observación que produjo una gran controversia en la época. Solamente después de 70 años, y gracias a la tecnología disponible en la época, Grotrian y Edlén mostraron que dichas líneas de emisión eran producto de elementos como el hierro, calcio y níquel en estados altamente ionizados [46, 95]. Desde ese momento los esfuerzos han ido en la dirección de entender qué tipo de mecanismo físico es capaz de llevar el plasma que circunda al Sol a temperaturas tan altas (ver tabla 2.1) que permitan la existencia de materia en dichos estados de ionización. La pregunta sigue abierta.

Desde la década de 1970, junto con el gran desarrollo tecnológico producido a partir de la llamada carrera espacial, el lanzamiento y utilización de satélites y sondas no tripuladas ha permitido tener cada vez más información y hoy en día existe cierto consenso en que los fenómenos de aceleración y calentamiento del viento solar rápido [37, 38] ocurren a unos pocos radios solares y se debe a procesos de interacción onda-partícula, principalmente con ondas de Alfvén [39–46]. Lamentablemente no existe a la fecha una sonda o satélite capaz de acercarse a menos de 0.3 UA del Sol, por lo que actualmente gran parte del entendimiento de la corona solar es gracias a observaciones a distancia, tales como estudios de absorción y emisión de rayos X y radiación ultravioleta de naves como *SOHO* [39, 46, 63, 95] y *SDO* [97], entre otras.

Tal como se mencionó en el Cap. 1, es generalmente aceptado que el mecanismo más relevante en los procesos de interacción entre iones y ondas correspondería a la interacción resonante de ondas tipo iónicas-ciclotrónicas [46–48] con las partículas. Sin embargo, las observaciones *in situ* disponibles muestran espectros de fluctuaciones electromagnéticas con frecuencias entre 10^{-3} y 0.1 Hz, por lo cual estas ondas

no serían capaces de resonar con las partículas. Además ni en el viento solar ni en la corona se han encontrado ondas con las frecuencias necesarias, que van entre 10 y 10^4 Hz [40, 41]. Por lo tanto, se han propuesto variados modelos para explicar la posible generación de estas ondas de frecuencias más altas y su disipación antes de alcanzar las 0.3 UA [37, 38, 49, 50, 72].

Más recientemente, observaciones a distancia han mostrado que las distintas especies iónicas presentes en el viento solar pueden llegar a presentar grandes anisotropías térmicas en los agujeros coronales. Siendo las temperaturas típicas del orden de 10^6 K, para especies como protones, He^{+2} y O^{+5} entre otras, el sobrecalentamiento perpendicular permite observar anisotropías tales que $A_p \simeq 2 - 3$, $A_{\text{He}^{+2}} \simeq 5 - 10$ y $A_{\text{O}^{+5}} \simeq 10 - 100$ aproximadamente [34–36, 42, 46, 65, 95], entre otras muchas referencias. Aquí la anisotropía térmica A_μ de la especie μ ésima está dada por:

$$A_\mu = \frac{T_{\mu\perp}}{T_{\mu\parallel}} - 1, \quad (2.13)$$

donde $T_{\mu\perp}$, $T_{\mu\parallel}$ corresponde a la temperatura paralela y perpendicular al campo de fondo, respectivamente. En términos del parámetro β , se puede expresar A_μ como

$$A_\mu = \frac{\beta_{\mu\perp}}{\beta_{\mu\parallel}} - 1. \quad (2.14)$$

Respecto a la aceleración, las observaciones muestran que el viento solar se acelera en su viaje desde el Sol, llegando en las regiones de viento solar rápido a ser supersónico [37, 38], tal como se mostró a través de la discusión del modelo de Parker, Sec. 2.2.1. Además, las observaciones han mostrado que, a unos 5–10 radios solares de distancia del Sol, los iones pesados pueden superar en velocidad a los protones, siendo esa velocidad de deriva relativa del orden de 0.2 para los iones He^{+2} y del mismo orden (en unidades de la velocidad de Alfvén) para iones más pesados [37, 38, 41, 45].

En la actualidad, el t3pico de la aceleraci3n y calentamiento de iones en el viento solar es uno de los m3s activos y ha suscitado un gr3n inter3s [87]. Se han propuesto variados modelos que cubren un gran abanico de posibilidades. Entre otros, se ha considerado la disipaci3n cin3tica de ondas de Alfv3n [51], estudio de magnetohidrodin3mica turbulenta [54-57], procesos de aceleraci3n del viento solar a grandes distancias del Sol [58,59] y cascadas de energ3a [68,69], en las cuales, mediante la interacci3n onda-part3cula se genera un proceso de crecimiento de inestabilidades desde las frecuencias m3s bajas hacia las m3s altas [60-62], con la subsiguiente aceleraci3n de iones a medida que aumenta la raz3n carga-masa.

En relaci3n al 3ltimo modelo propuesto, los trabajos citados corresponden a un an3lisis lineal de las ecuaciones [60-62,66,67]. Si bien es cierto, el estudio del r3gimen lineal no describe la din3mica en toda su complejidad, pero permite tener una intuici3n sobre los mecanismo posibles, y es un punto de partida adecuado para estudiar el problema de inter3s en este trabajo. Por ello, en el pr3ximo cap3tulo se expondr3n los principales elementos de dicho an3lisis lineal.

Capítulo 3

Teoría lineal

En física de plasmas es sabido que al modelar la interacción entre ondas y partículas, considerar una descripción de fluido puede llevar a resultados significativamente distintos que al desarrollar el problema desde una descripción cinética. Fenómenos como amortiguamiento de Landau [100], modos de Bernstein [101], amortiguamiento ciclotrónico y generación de armónicos ciclotrónicos entre otros, solo pueden ser descritos correctamente a partir de una teoría cinética, en la cual la velocidad y la posición de las partículas son consideradas como variables independientes.

En el caso del estudio de la aceleración y calentamiento de un plasma tipo viento solar, como ya ha sido comentado en el Cap. 2, el mecanismo de interacción y la consiguiente transferencia de energía entre ondas y partículas más aceptado en la literatura es la resonancia tipo ion-ciclotrónica. De esta manera, para tratar esta interacción onda-partícula microscópica resulta adecuado utilizar una descripción cinética del plasma.

En este capítulo se presentan las ecuaciones básicas de la teoría cinética lineal para encontrar la relación de dispersión, en un plasma tipo Vlasov no colisional, de ondas circularmente polarizadas propagándose en la dirección de un campo magnético de fondo constante. Luego se discuten los resultados obtenidos en los trabajos a partir

de modelos de fluidos y modelos cinéticos semifríos en las Refs. [60-62,66,67] en relación con la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar para un plasma compuesto de electrones, protones y un 4% de partículas α . Una derivación más general de la relación de dispersión en un plasma cinético no colisional se encuentra en el Apéndice A.

3.1. Relación de dispersión en un plasma de Vlasov en presencia de un campo magnético de fondo

En un plasma no colisional, la relación entre la función de distribución $f_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ de la μ -ésima especie y los campos electromagnéticos viene dada por la ecuación de Vlasov [102]

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\mu}{m_\mu} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3.1)$$

con q_μ, m_μ la carga y masa de cada partícula, μ el índice de especie y c la velocidad de la luz. A su vez, la dinámica de los campos viene dada por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

donde las densidades de carga y corriente vienen dadas por

$$\rho = \sum_\mu q_\mu n_\mu \int f_\mu d\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{J} = \sum_\mu q_\mu n_\mu \int \mathbf{v} f_\mu d\mathbf{v}, \quad (3.4)$$

respectivamente, donde se ha escogido la normalización

$$\int f_\mu d\mathbf{v} = 1, \quad (3.5)$$

n_μ es la densidad de la especie μ y las sumatorias incluyen todas las especies que constituyen el plasma. Es importante notar que las ecuaciones (3.1) y (3.5) son compatibles solamente cuando las densidades n_μ son constantes, situación que es considerada en el presente estudio.

Considérese un plasma inicialmente en equilibrio, en el cual las funciones de distribución no dependen ni del tiempo ni del espacio, con un campo magnético de fondo $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$, en el cual se propagan ondas electromagnéticas circularmente polarizadas en la dirección \hat{z} , con vector de onda $\mathbf{k} = k \hat{z}$ y frecuencia $\omega_k = \omega(k) = \omega^{(r)}(k) + i\omega^{(i)}(k)$ dada por una relación de dispersión a determinar. Aquí, $\omega^{(r)}(k)$ y $\omega^{(i)}(k)$ son las partes real e imaginaria de la frecuencia, respectivamente. De esta manera, usando la teoría de perturbaciones, se pueden expandir las cantidades involucradas en las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3), y así encontrar la relación de dispersión.

Dado cierto ϵ pequeño, utilizando teoría de perturbaciones, para cada especie se expande

$$f_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_\mu^{(0)}(v_\perp, v_z) + \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk f_{\mu,k} e^{i(kz - \omega_k t)} + \dots, \quad (3.6)$$

donde las funciones $f_\mu^{(0)}$ satisfacen las relaciones de neutralidad

$$\rho = 0, \quad (3.7)$$

y de cuasineutralidad

$$J_z = 0, \quad (3.8)$$

a través de las expresiones para las densidades de carga y corriente (3.4). Para los campos, sean $\hat{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} \pm i\hat{y})$ los vectores unitarios de polarización circular iz-

quierda y derecha [103]. Así se tiene que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(\mathbf{E}_k e^{i(kz - \omega_k t)} + \mathbf{E}_{-k} e^{-i(kz + \omega_{-k} t)} \right) + \dots, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = B_0 \hat{z} + \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(\mathbf{B}_k e^{i(kz - \omega_k t)} + \mathbf{B}_{-k} e^{-i(kz + \omega_{-k} t)} \right) + \dots, \quad (3.10)$$

donde se ha considerado que la dependencia espacial de todas las cantidades es solamente en la coordenada z . Además, en las ecuaciones (3.9) y (3.10), los campos complejos $\mathbf{E}_{\pm k}$ y $\mathbf{B}_{\pm k}$ vienen dados por

$$\mathbf{E}_{\pm k} = E_{\pm k}^+ \hat{e}_+ + E_{\pm k}^- \hat{e}_-, \quad \mathbf{B}_{\pm k} = B_{\pm k}^+ \hat{e}_+ + B_{\pm k}^- \hat{e}_-. \quad (3.11)$$

Es importante notar que, debido a que los campos son cantidades reales, y a partir de las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11), se cumplen las relaciones

$$(E_k^\pm)^* = E_{-k}^\mp, \quad (B_k^\pm)^* = B_{-k}^\mp, \quad (3.12)$$

y además para la frecuencia, $\omega_k^* = -\omega_{-k}$. Así, la parte real e imaginaria de la frecuencia tienen paridad definida [70]

$$\omega^{(r)}(-k) = -\omega^{(r)}(k), \quad \omega^{(i)}(-k) = \omega^{(i)}(k) \quad (3.13)$$

para un mismo modo o rama de propagación.

Estas últimas relaciones indican que mientras la parte real de la frecuencia compleja es una función impar de k , la parte imaginaria es una función par. Estas relaciones de paridad se obtienen al hacer el cambio de k a $-k$ y al mismo tiempo cambiar la polarización de la onda, de acuerdo a (3.12). Esto es esperable, ya que observar una onda que se propaga en la dirección z positiva con polarización circular derecha, es lo mismo que observar una onda con polarización circular izquierda propagándose en la dirección z negativa. En otras palabras, en el plano $\omega-k$ la continuación de la

curva $\omega = \omega(k)$ para $k < 0$ corresponde a la solución con la polarización opuesta en el tercer cuadrante y no en el segundo. Se ha hecho especial énfasis en este punto debido a que más adelante estas relaciones serán de mucha utilidad.

Reemplazando ahora las ecuaciones (3.6), (3.9) y (3.10) en la ecuación de Vlasov (3.1), y considerando solamente los términos de orden ϵ , se obtiene para cada especie la ecuación diferencial lineal no homogénea en el espacio de Fourier

$$i(\omega_k - kv_z)f_{\mu,k} + \Omega_\mu \frac{\partial f_{\mu,k}}{\partial \phi} = \frac{q_\mu}{m_\mu} \left(\mathbf{E}_k + \frac{k}{\omega_k} \mathbf{v} \times \hat{z} \times \mathbf{E}_k \right) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}, \quad (3.14)$$

donde las velocidades se han expresado en representación cilíndrica [$\mathbf{v} = (v_\perp, \phi, v_z)$] y

$$\Omega_\mu = \frac{q_\mu B_0}{m_\mu c} \quad (3.15)$$

es la frecuencia ciclotrónica o girofrecuencia de cada especie. Además, combinando las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo, también a orden ϵ , se obtiene la ecuación de ondas

$$(c^2 k^2 - \omega_k^2) \mathbf{E}_k = 4\pi i \mathbf{J}_k, \quad (3.16)$$

donde la densidad de corriente compleja viene dada por

$$\mathbf{J}_k = \sum_\mu q_\mu n_\mu \int \mathbf{v} f_{\mu,k} d\mathbf{v}. \quad (3.17)$$

De este modo, para resolver (3.16) es necesario calcular la corriente dada por (3.17), que a su vez depende de la solución de (3.14).

La solución de (3.14) está dada por

$$f_{\mu,k} = \frac{q_\mu}{\Omega_\mu m_\mu \omega_k} \int_{\pm\infty}^{\phi} \left[(\omega_k \mathbf{E}_k - \mathbf{v}' \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{v}'} \right] G(\phi, \phi') d\phi', \quad (3.18)$$

con

$$G(\phi, \phi') = \exp \left(\frac{i}{\Omega_\mu} [(\omega_k + k_z v_z)(\phi - \phi')] \right). \quad (3.19)$$

Luego, usando (3.11) y llevando a cabo la integración en ϕ' se obtiene finalmente

$$f_{\mu,k} = \frac{iq_{\mu}}{\sqrt{2}m_{\mu}\omega_k} \left((\omega_k - kv_z) \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_{\perp}} - kv_{\perp} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_z} \right) \left(\frac{E_k^+ e^{i\phi}}{\omega_k - kv_z + \Omega_{\mu}} + \frac{E_k^- e^{-i\phi}}{\omega_k - kv_z - \Omega_{\mu}} \right). \quad (3.20)$$

De esta manera, a partir de (3.20), la ecuación de ondas (3.16) puede expresarse como

$$R_{ij} E_k^j = 0, \quad \text{con } i, j = +, -, \quad (3.21)$$

donde R corresponde a una matriz diagonal (por este motivo se eligió una expansión en ondas circularmente polarizadas) dada por

$$R_{\pm,\pm} = c^2 k^2 - \omega_k^2 - \pi \sum_{\mu} \omega_{\mu p}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{\infty} \left((\omega_k - kv_z) \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_{\perp}} - kv_{\perp} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_z} \right) \frac{v_{\perp}^2}{\omega_k - kv_z \pm \Omega_{\mu}} dv_{\perp}, \quad (3.22)$$

donde $\omega_{\mu p}^2 = 4\pi q_{\mu}^2 n_{\mu} / m_{\mu}$ corresponde al cuadrado de la frecuencia de plasma de cada especie.

Así, la relación de dispersión viene dada por $R_{\pm,\pm} = 0$, o bien

$$c^2 k^2 = \omega_k^2 + \pi \sum_{\mu} \omega_{\mu p}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{\infty} \left((\omega_k - kv_z) \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_z} + kv_{\perp} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_{\perp}} \right) \frac{v_{\perp}^2}{\omega_k - kv_z \pm \Omega_{\mu}} dv_{\perp}, \quad (3.23)$$

donde el signo \pm corresponde a cada una de las polarizaciones circulares permitidas de las ondas (ver Apéndice A). La ecuación (3.23) es precisamente la relación de dispersión para ondas de Alfvén (ion-ciclotrón) propagándose en la dirección de un campo magnético constante de fondo con polarización circular tanto derecha como izquierda (helicidad negativa y positiva) [104]. Nótese que existe una resonancia (polo

en el plano complejo) para $\text{Re}[\omega_k] - kv_z = \pm\Omega_\mu$. Mientras más pequeña sea la razón carga sobre masa q_μ/m_μ del ion, más cerca del origen se ubica el polo. Físicamente, esto quiere decir que para partículas más masivas, las ondas de Alfvén resonarán con ellas a frecuencias más bajas.

3.2. Relación de dispersión en un plasma tipo viento solar

Como se discutió en el Cap. 2, las distintas especies que conforman el viento solar presentan considerables anisotropías térmicas A_μ [77, 78]. En vista de este hecho, en este contexto es posible considerar las funciones de distribución como bi-Maxwellianas (ver las Refs. [60–62, 66, 67] entre otras). Esto es, modelar las funciones de distribución como una distribución normal gaussiana, pero en las cuales la temperatura de las partículas en la dirección del campo de fondo es distinta de la temperatura en el plano perpendicular a éste. Además, para incluir en el análisis las distintas velocidades de deriva observadas para las distintas especies, escribimos las funciones de distribución de orden cero como

$$f_\mu^{(0)}(v_\perp, v_z) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_{\text{th},\mu\perp}^2 v_{\text{th},\mu\parallel}} \exp\left(-\frac{(v_z - V_\mu)^2}{v_{\text{th},\mu\parallel}^2} - \frac{v_\perp^2}{v_{\text{th},\mu\perp}^2}\right), \quad (3.24)$$

donde V_μ es la velocidad de deriva de la especie μ respecto a un sistema de referencia fijo (que será llamado sistema del laboratorio); $v_{\text{th},\mu j}^2 = 2k_B T_{\mu j}/m_\mu$ ($j = \perp, \parallel$) son los cuadrados de las velocidades térmicas perpendiculares y paralelas, respectivamente, $T_{\mu j}$ las respectivas temperaturas, y k_B es la constante de Boltzmann. La elección del sistema de referencia es un tema que se discutirá en detalle a partir del Cap. 4. Distintos autores han establecido distintas elecciones de sistemas de referencia dependiendo del énfasis que se le quiera dar al análisis. Por ejemplo, en las

Refs. [60–62], para ilustrar el efecto de una deriva relativa entre la parte minoritaria de iones He^{+2} y el grueso del viento solar compuesto de protones, los autores han escogido un sistema de referencia solidario a los protones. Por otro lado, en trabajos basados en simulaciones híbridas (como por ejemplo en las Refs. [78, 79]), y al igual que en el Cap. 7 de esta tesis, el sistema de referencia natural a elegir es un sistema de referencia solidario a los electrones.

Al momento de trabajar numéricamente los resultados, es conveniente normalizar las cantidades involucradas a los parámetros característicos del sistema de estudio. En este caso, debido a que los protones corresponden a más del 95 % de la totalidad de partículas con carga positiva del viento solar, las longitudes, velocidades, frecuencias, números de onda y densidades serán normalizadas a partir de la velocidad de Alfvén, la densidad y las frecuencias de ciclotrón y plasma de los protones. De esta manera, si la especie μ -ésima tiene velocidad de deriva normalizada $U_\mu = V_\mu/V_{Ap}$. De esta manera, la relación de dispersión (3.23), para ondas electromagnéticas con polarización izquierda, se escribe, en términos de cantidades normalizadas, como

$$y^2 + \left(\frac{V_{Ap}}{c}\right)^2 x_y^2 = \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} M_{\mu} \left(A_{\mu} + \frac{[A_{\mu}(x_y - M_{\mu} - yU_{\mu}) + x_y - yU_{\mu}]}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}} Z(\varphi_{\mu}) \right), \quad (3.25)$$

donde la suma es sobre todas las especies, $V_{Ap} = B_0/\sqrt{4\pi n_p m_p}$ es la velocidad de Alfvén de los protones, con n_p la densidad de protones y m_p la masa del protón.

$$x_y = \frac{\omega_k}{\Omega_p} \quad (3.26)$$

e

$$y = \frac{kV_{Ap}}{\Omega_p} \quad (3.27)$$

son la frecuencia y número de onda normalizados, $\eta_\mu = n_\mu/n_p$, $M_\mu = z_\mu m_p/m_\mu$ y z_μ es el grado de ionización de cada partícula, y para protones $z_p = 1$ y para electrones $z_e = -1$. Además, Z es la llamada función de dispersión de plasmas (ver Apéndice B) con argumento

$$\varphi_\mu = \frac{x_y - M_\mu - yU_\mu}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}}, \quad (3.28)$$

que corresponde al cociente entre la frecuencia compleja modificada por efecto Doppler y el producto del parámetro $\bar{\beta}$ y el número de onda. Además, $\bar{\beta}_{\mu j} = v_{th,\mu,j}/V_{Ap}$, con $j = \perp, \parallel$. En esta ecuación se ha dividido a los electrones en tantas subespecies como distintas especies de iones positivos (iones pesados y protones) haya, tal que, dada una especie iónica de densidad n_i , grado de ionización z_i y velocidad de deriva en la dirección del campo magnético de fondo U_i , la subespecie electrónica correspondiente tenga densidad $n_{e_i} = z_i n_i$ (neutralidad) y deriva $U_{e_i} = U_i$ (cuasineutralidad) [104]. De este modo, el sistema presenta neutralidad y cuasineutralidad.

En el caso de ondas de Alfvén, u ondas con suficiente baja frecuencia para considerar $|\omega_k|^2 \ll c^2 k^2$ (o en términos de las variables normalizadas $V_{Ap}^2 |x_y|^2 \ll c^2 y^2$), la relación de dispersión se reduce a

$$y^2 = \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} M_{\mu} \left(A_{\mu} + \frac{[A_{\mu}(x_y - M_{\mu} - yU_{\mu}) + x_y - yU_{\mu}]}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}} Z(\varphi_{\mu}) \right). \quad (3.29)$$

Es importante notar que las fluctuaciones electromagnéticas, y los distintos plasmas que se considerarán a lo largo de este estudio corresponden precisamente al caso de frecuencias o velocidades de Alfvén bajas. Luego, a lo largo de esta tesis, todos los términos proporcionales a V_{Ap}^2/c^2 no serán considerados. Es importante notar que la aproximación $|\omega_k| \ll ck$ es válida para todo el rango de interés ya que para k pequeño la relación de dispersión normalizada se reduce a $x_y = y$, lo que corresponde a $\omega_k = kV_{Ap}$ y, como se mostró en el Cap. 2, en el viento solar efectivamente $V_{Ap} \ll c$.

3.3. Aproximación semifría

Como se discutió en el Cap. 2, en varias regiones de la corona solar, y del viento solar, el parámetro beta del plasma es pequeño. Esto permite utilizar la llamada aproximación semifría para la relación de dispersión [60-62, 66, 67, 104]. En esta aproximación, $\bar{\beta}_{\mu}^2 \ll 1$ y por lo tanto los argumentos φ_{μ} (3.28) de las funciones Z son suficientemente grandes para expandir

$$Z(\varphi_{\mu}) \approx -\frac{1}{\varphi_{\mu}} + i\pi e^{-\text{Re}[\varphi_{\mu}]^2}, \quad (3.30)$$

para todos los iones positivos, donde se ha considerado $\text{Im}[\varphi_{\mu}]$ despreciable. Además, debido a su masa tan pequeña,

$$Z(\varphi_e) \approx -\frac{1}{\varphi_e} \quad (3.31)$$

para los electrones. Estas aproximaciones y otras propiedades de la función Z se pueden ver en el Apéndice B.

Tal como se discute en la Ref. [62], en la cual se realiza el análisis de la relación de dispersión con y sin hacer la aproximación semifría, es importante mencionar que los resultados numéricos muestran que la aproximación semifría resulta ser una muy buena aproximación de las soluciones de la relación de dispersión, salvo que la solución exacta de las ecuaciones permite estudiar escenarios para los cuales el parámetro $\bar{\beta}$ es mayor, como por ejemplo en la base de la corona. De este modo, a lo largo de esta tesis se trabajará con las funciones Z completas en la derivación general de las ecuaciones, pero al momento de aplicar los resultados a casos específicos se utilizará la aproximación semifría tanto en el trabajo algebraico como numérico de las ecuaciones.

3.3.1. Parte real de la relación de dispersión

A partir de la relación de dispersión (3.29) y las aproximaciones (3.31) y (3.30), considerando que $|\omega^{(i)}(k)| \ll |\omega^{(r)}(k)|$, la relación de dispersión se puede separar algebraicamente en su parte real y parte imaginaria. Definiendo las cantidades normalizadas $x = \omega^{(r)}/\Omega_p$ y $\gamma = \omega^{(i)}/\Omega_p$, para la parte real se obtiene

$$y^2 = - \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} \frac{(x - yU_{\mu})^2}{x - (M_{\mu} + yU_{\mu})}, \quad (3.32)$$

donde la suma considera protones, todas las especies de iones y no incluye a los electrones.

La relación (3.32) ha sido estudiada en profundidad en las Refs. [60-62,66,67,104] en relación con la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar rápido para un plasma de electrones, iones He^{+2} y protones [66,67,104], así como también incluyendo en el análisis iones O^{+6} [60-62]. En el caso de un plasma con electrones, protones y un 4% de iones He^{+2} ($\eta_{\alpha} = 0.04$), la relación de dispersión (3.32) obtenida es

$$y^2 = \frac{(x - yU_p)^2}{1 - (x - yU_p)} + \frac{4\eta_{\alpha}(x - yU_{\alpha})^2}{1 - 2(x - yU_{\alpha})}, \quad (3.33)$$

donde U_p y U_{α} son las derivas de protones y partículas α , respectivamente. Para el caso en que no hay velocidad de deriva relativa entre las especies ($U_p = U_{\alpha} = 0$), existe una banda prohibida entre la girofrecuencia de las partículas α ($x = 0.5$) y una frecuencia de corte $x_c = (1 + 4\eta_{\alpha})/(2 + 4\eta_{\alpha})$. En cambio, al considerar una velocidad de deriva relativa entre los protones y los iones He^{+2} , tal que $U_{\alpha} - U_p \neq 0$, aparece una nueva rama en la relación de dispersión y se inhibe la brecha entre las ramas.

En la Fig. 3.1 se puede ver la rama de Alfvén, para $y > 0$, de la relación de dispersión para $U_{\alpha} = U_p = 0$, en donde se aprecia la banda prohibida antes mencionada. En cambio, para el caso $U_p = 0, U_{\alpha} = 0.2$, en la Fig. 3.2 se observa la existencia

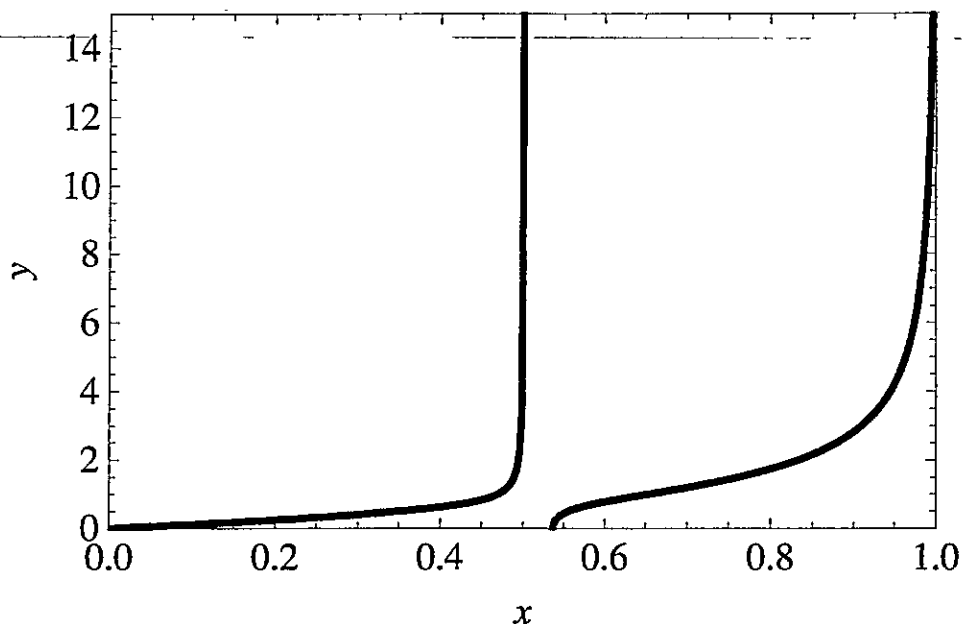


Figura 3.1: Relación de dispersión en el cuadrante $y > 0$ para ondas circularmente polarizadas propagándose en la dirección de un campo de fondo a través de un plasma de electrones, protones y un 4% de partículas α . Aquí, $x = \text{Re}[\omega_k]/\Omega_p$ e $y = kV_{Ap}/\Omega_p$ son la parte real de la frecuencia y el número de onda normalizados, respectivamente.

de un continuo de soluciones de la relación de dispersión en el rango $0 < x < 1$, (curva sólida en la figura). Además, el hecho de que exista una deriva relativa entre protones y partículas α eleva a 3 el orden la ecuación (3.33), y por lo tanto existe una segunda solución para el cuadrante $y > 0$, que nace en la frecuencia de corte x_c y está representada por una línea segmentada en la Fig. 3.2.

En relación a la aceleración preferencial de iones minoritarios en el viento solar, otro punto interesante al analizar la relación de dispersión (3.32), es que existe una velocidad para la cual una partícula de la especie μ resuena con las ondas circularmente polarizadas. En efecto, para frecuencias tales que

$$U_\mu^r = \frac{x}{y} \left[1 - \frac{M_\mu}{x} \right], \quad (3.34)$$

donde U_μ^r es la velocidad de la partícula que entra en resonancia, la partícula de la

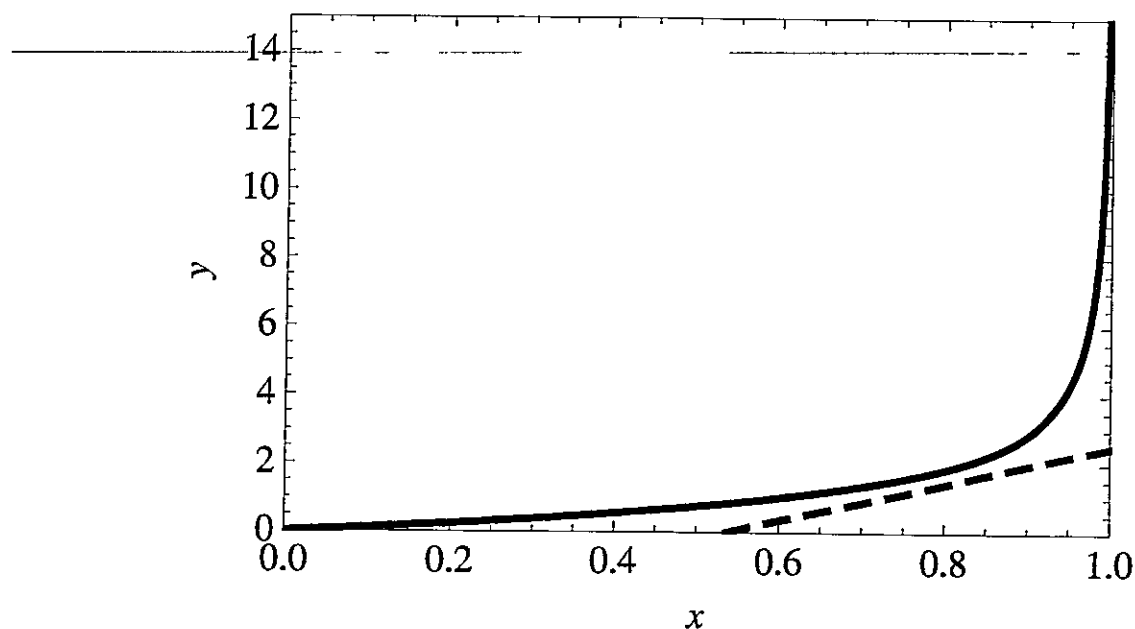


Figura 3.2: Mismo caso que en Fig. 3.1, pero considerando a los iones He^{+2} con una deriva normalizada $U_\alpha = 0.2$ respecto a los protones. Las curvas sólidas y segmentadas corresponden a distintas soluciones de la relación de dispersión.

μ -ésima especie resonará con las ondas.

En la Fig. 3.3 se observan las velocidades de resonancia de una partícula α para el caso (a) $U_\alpha = 0$, y el caso (b) con $U_\alpha \neq 0$. En la Fig. 3.3(b), las curvas sólidas y segmentadas corresponden a las ramas de la relación de dispersión mostradas en la Fig. 3.2, respectivamente. En la Fig. 3.3(a), se puede apreciar que la banda prohibida de la relación de dispersión sin derivas relativas no permite que una partícula α con velocidad inicial negativa respecto a los protones, pueda acelerarse hasta velocidades mayores que la velocidad del grueso de protones. En cambio, para el caso $U_\alpha \neq 0$ [Fig. 3.3(b)], la existencia de la deriva relativa $U_\alpha \neq 0$ entre protones y partículas α genera un continuo entre $U_\alpha^r < 0$ y $U_\alpha^r > 0$ para una partícula α que entre en resonancia con las ondas de la rama sólida de la Fig. 3.2. En base a este hecho, una partícula α con velocidad inicial menor a U_p puede ser acelerada hasta velocidades

iguales a la deriva U_α . Por otro lado, en la Fig. 3.3 se aprecia que las velocidades de deriva de partículas que resuenan con ondas de la rama superior (curva segmentada), pueden llegar a ser considerablemente altas respecto a los protones. Además, para $x \sim 0.9$ se aprecia un pequeño salto $\Delta U_\alpha^r \sim 0.05$ entre las velocidades de resonancia de las partículas que resuenan con la rama inferior con las que resuenan con la rama superior. En el caso de que este salto pudiese anularse, al entrar en resonancia con este tipo de ondas, partículas α con velocidades iniciales negativas podrían llegar a acelerarse continuamente hasta altas velocidades. En el caso de estudio de plasmas generados en las vecindades de cometas [105–107], en la Ref. [105] se plantea que, debido a efectos térmicos, esta brecha entre las dos ramas puede llegar a anularse, permitiendo así la aceleración de iones minoritarios (en este caso iones He^{+2}) en este tipo de plasmas.

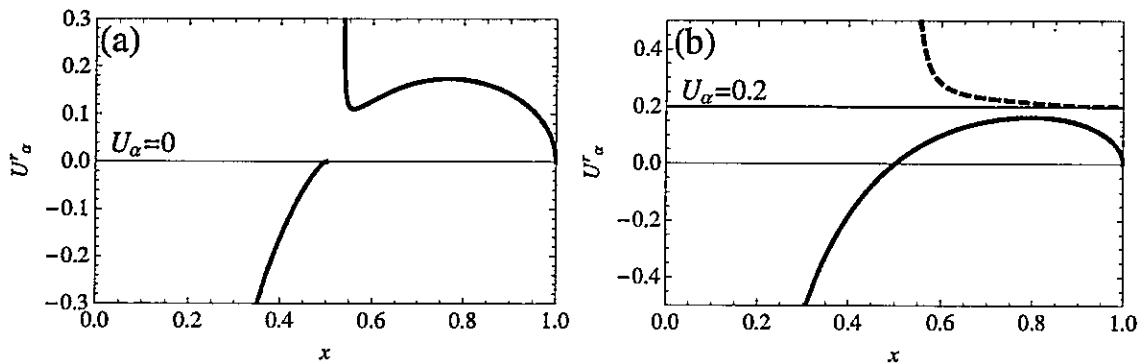


Figura 3.3: Velocidad de resonancia normalizada de iones He^{+2} como función de la frecuencia normalizada x . (a) $U_\alpha = 0$. (b) $U_\alpha = 0.2$. La curva sólida (segmentada) corresponde a la rama de la relación de dispersión representada por la curva sólida (segmentada) de la Fig. 3.2.

3.3.2. Parte imaginaria: Tasas de crecimiento y amortiguamiento

La parte imaginaria de las frecuencias corresponde a una medida de qué tan inestable es un plasma a pequeñas perturbaciones. Si γ es negativo entonces la energía de la onda será absorbida por el plasma, definiendo γ como la tasa de decaimiento o amortiguamiento de la onda en cuestión. Por otro lado, si γ es positivo, entonces la amplitud inicialmente pequeña de la perturbación crecerá exponencialmente y γ corresponde a la tasa de crecimiento de dicha onda. En una descripción cinética de plasmas, es sabido que existe una inestabilidad debido a la anisotropía térmica llamada anisotropía iónica ciclotrónica [70, 71], en la cual el parámetro $A_\mu = -1 + T_{\mu\perp}/T_{\mu\parallel}$ es el factor relevante.

En relación con el estudio de aceleración y calentamiento de un plasma a partir de la interacción con ondas, caracterizar la tasa de crecimiento o amortiguamiento de las ondas entrega información acerca de la factibilidad y eficiencia de un proceso de aceleración y/o calentamiento, así como las regiones del espectro de frecuencias en las cuales se presentan inestabilidades. En el caso de las ondas circularmente polarizadas estudiadas a lo largo de este capítulo, la aproximación semifrío permite obtener una expresión analítica para la tasa de crecimiento (o amortiguamiento) de las ondas. De este modo, a partir de (3.29), en el régimen semifrío la parte imaginaria de las frecuencias normalizadas γ viene dada por

$$\gamma = F(x, y)^{-1} \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} M_{\mu} \left[\frac{\pi^{1/2}}{y \beta_{\mu\parallel}} [A_{\mu}(M_{\mu} - x + yU_{\mu}) - x + yU_{\mu}] e^{-\text{Re}[\varphi_{\mu}^2]} \right], \quad (3.35)$$

donde

$$F(x, y) = \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} \frac{(x - yU_{\mu})[2M_{\mu} - (x - yU_{\mu})]}{(x - M_{\mu} - yU_{\mu})^2}, \quad (3.36)$$

y, al igual que en la ecuación (3.32), en estas últimas dos ecuaciones la suma es

solamente sobre todas las partículas positivas. De la expresión para γ [Ec. (3-35)] se observa que el signo del término $A_\mu(x - M_\mu - yU_\mu) + x - yU_\mu$, y por tanto el valor de A_μ , son preponderantes en el aporte de cada especie iónica a una región de inestabilidad o amortiguamiento. Para el caso del plasma compuesto de electrones, protones y un 4% de iones He^{+2} , estudiado en la subsección 3.3.1, en la Fig. 3.4 se muestra la parte imaginaria de la frecuencia considerando $\bar{\beta}_{\parallel p}^2 = 10^{-4}$, $\bar{\beta}_{\parallel \alpha}^2 = 4 \times 10^{-3}$ y sin anisotropías térmicas para ninguna especie. La Fig. 3.4(c) corresponde al caso de la tasa de amortiguamiento de la rama de Alfvén mostrada en la Fig. 3.4(a) cuando no hay deriva entre protones y partículas α . Se puede observar que existen regiones de amortiguamiento correspondientes a la absorción resonante de ondas para frecuencias por debajo de la girofrecuencia de partículas α y protones, para $x = 0.5$ y $x = 1$, respectivamente. Se aprecia además otra región de absorción en la banda prohibida entre la girofrecuencia de las partículas α y la frecuencia de corte $x_c \sim 0.54$ en este caso. La existencia de una velocidad de deriva entre las dos especies, además de eliminar la banda prohibida [Fig. 3.4(b)] produce un corrimiento en las regiones de absorción de las partículas α como puede observarse en la Fig. 3.4(d). Debido a la deriva entre las especies, la zona de amortiguamiento producida por las partículas α corresponde a frecuencias más altas que su girofrecuencia.

Por otro lado, en la Fig. 3.5 se observa el caso en el cual las partículas α presentan una anisotropía térmica $A_\alpha = 6$. A diferencia del caso sin deriva relativa entre los protones y partículas α , se puede apreciar que la existencia de una anisotropía térmica en el caso de los iones He^{+2} genera zonas de inestabilidad tal como se mencionó previamente en esta sección. Al comparar las Figs. 3.5(a) y 3.5(b), destaca el hecho de que, además de mover las regiones $\gamma \neq 0$, la existencia de una deriva entre las especies genera regiones de inestabilidad más amplias y con máximos más eleva-

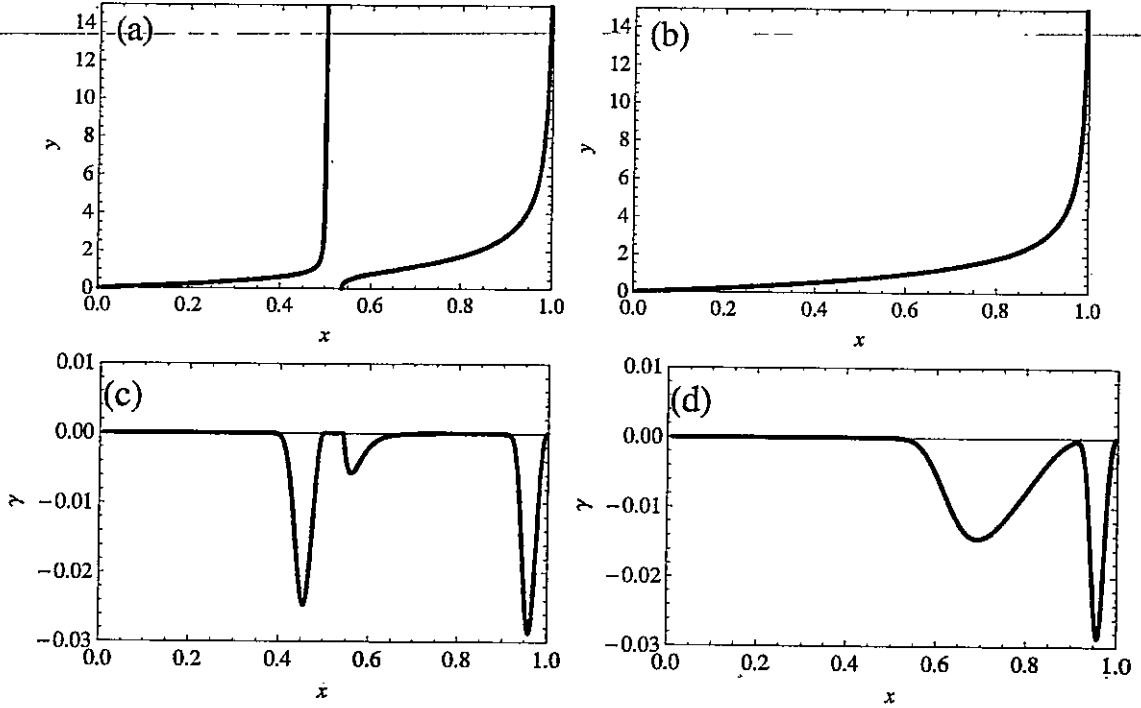


Figura 3.4: (a) Relación de dispersión 3.33, en el cuadrante $x, y > 0$, para $U_p = U_\alpha = 0$. (b) Lo mismo que en (a), pero considerando $U_\alpha = 0.2$. (c) Tasa de amortiguamiento normalizada a la girofrecuencia de los protones para la rama mostrada en (a), con $\bar{\beta}_{\parallel p}^2 = 10^{-4}$, $\bar{\beta}_{\parallel \alpha}^2 = 4 \times 10^{-3}$ y $A_\alpha = A_p = 0$. (d) Lo mismo que en (c), pero para $U_\alpha = 0.2$.

dos. Considerando solamente los valores positivos de γ , en las Figs. 3.5(c) y 3.5(d) se muestran en escala logarítmica los rangos de frecuencias para los cuales existen inestabilidades de las Figs. 3.5(a) y 3.5(b). Así, mientras en la Fig. 3.5(c) existe solamente una región de inestabilidad muy estrecha en torno a $x = 0.4$, y con valor máximo $\gamma_{\max} \sim 9 \times 10^{-4}$, en la Fig. 3.5(d) se observan dos regiones de inestabilidad más anchas y con máximo $\gamma_{\max} \sim 3.7 \times 10^{-3}$ debido a la deriva entre las dos especies. Tanto el rango de las regiones de inestabilidad como las frecuencias para las cuales el valor de γ es máximo son de importancia significativa en el estudio de la aceleración y calentamiento de iones en plasmas debido a absorción resonante de ondas iónicas-ciclotrónicas. En el caso de la aceleración resonante anteriormente mencionada, el

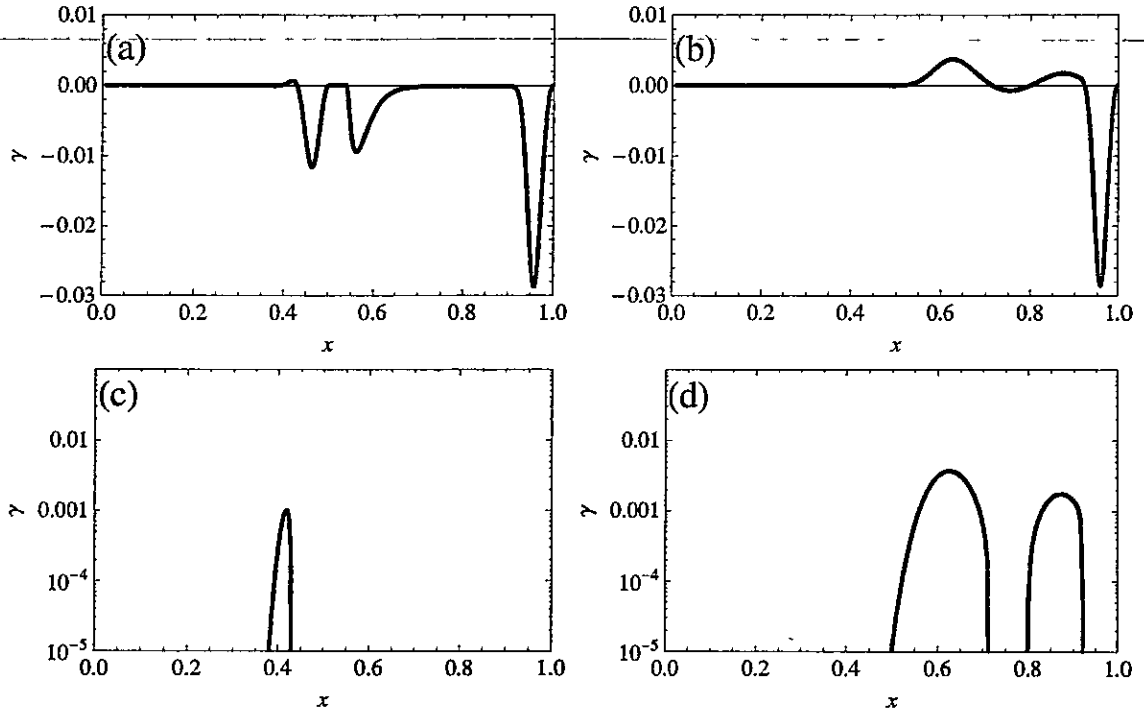


Figura 3.5: Parte imaginaria normalizada de las frecuencias en la rama de Alfvén con $\bar{\beta}_{\parallel p}^2 = 10^{-4}$, $\bar{\beta}_{\parallel \alpha}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_p = 0$ y $A_\alpha = 6$. (a) Caso sin deriva relativa entre protones y partículas α , $U_p = U_\alpha = 0$. (b) Caso con deriva relativa $U_p = 0$, $U_\alpha = 0.2$. (c) Tasas de crecimiento $\gamma > 0$ en escala logarítmica para el caso (a). (d) Lo mismo que en (c), pero para el caso (b) con deriva relativa $U_\alpha - U_p = 0.2$ entre las especies.

mecanismo de aceleración depende de cuánta energía pueda ser intercambiada entre ondas y partículas, y los rangos de inestabilidad dan una medida de qué tan eficiente pueda llegar a ser este intercambio de energía. El mismo tipo de análisis se puede llevar a cabo para el calentamiento del plasma.

3.4. Discusión

Variados estudios en detalle para plasmas de características similares, tanto de la parte real como de la parte imaginaria de las frecuencias, en relación a la aceleración y calentamiento de iones han sido publicados en los últimos años. En las

Refs. [66, 67, 104] se analiza la aceleración preferencial de iones He^{+2} en el viento solar cuando existe una pequeña velocidad de deriva entre los protones y los iones pesados, para el caso de iones isotrópicos y protones con distintos niveles de anisotropía térmica A_p . Los autores estudian las distintas regiones de inestabilidad de la rama de Alfvén como función de A_p , concluyendo que para $A_p > 2$ la tasa de crecimiento se incrementa fuertemente para frecuencias normalizadas en la región $0.5 < x < x_c$, y por ende el proceso de aceleración de partículas α mediante aceleración resonante tiene posibilidades de ocurrir para ese rango de frecuencias. De esta manera, los autores postulan que, para el rango de frecuencias estudiado, el efecto combinado de una pequeña velocidad relativa entre las dos especies, más la anisotropía térmica de los protones, puede generar un posible mecanismo para la aceleración preferencial de partículas α en el viento solar, en regiones de viento solar rápido, a distancias heliocéntricas no mayores a 0.3 UA.

Por otro lado, en relación al calentamiento del plasma en agujeros coronales, en las Refs. [60–62] se realizan estudios similares, pero considerando protones isotrópicos y especies iónicas con distintos grados de anisotropía térmica, como fuente de energía libre para la generación de ondas circularmente polarizadas de frecuencias cercanas a la girofrecuencia de los protones a partir de ondas que resuenan con las especies masivas. En la Ref. [60] los autores postulan distintos escenarios para los cuales una fracción muy minoritaria de iones O^{+6} ($\eta_{\text{O}^{+6}} = 2 \times 10^{-4}$), con anisotropía térmica $A_{\text{O}^{+6}} = 100$ y derivas $U_{\text{O}^{+6}}$ entre 0 y 0.3, puede generar ondas de frecuencias muy cercanas a la frecuencia ciclotrónica de los protones, y mediante absorción resonante éstos pueden ser calentados.

A su vez, en las Refs. [61, 62], los mismos autores incluyen en el análisis la presencia de iones He^{+2} (con $\eta_{\text{He}^{+2}} = 5 \times 10^{-2}$) para mostrar que una anisotropía térmica

$A_{\text{He}^{+2}} = 6$, mucho menor que la necesaria en el caso del estudio con iones O^{+6} , es capaz de generar inestabilidades y ondas protónicas-ciclotrónicas. Los autores demuestran así que la combinación de iones de oxígeno y partículas α , con anisotropía térmica y deriva relativa respecto a los protones, da lugar a un complejo espectro de ondas iónicas ciclotrónicas inestables, así como también a un crecimiento de las inestabilidades protónicas-ciclotrónicas. De esta manera, en un efecto tipo cascada, ondas de frecuencias más bajas pueden resonar con iones con girofrecuencia menor, para así acelerarlos y calentarlos anisotrópicamente tal que se generen ondas e inestabilidades de frecuencias más altas y capaces de resonar con partículas en las cuales la razón carga sobre masa es más grande, hasta así llegar a los protones.

Todos estos resultados indican que la absorción resonante de ondas circularmente polarizadas podría llegar a ser uno de los procesos importantes tanto en la aceleración como en el calentamiento de iones en el viento solar. Sin embargo, al ser un análisis basado en una teoría lineal, los mecanismos de transferencia de energía entre ondas y partículas no están considerados. En un plasma las partículas se mueven bajo la influencia de los campos electromagnéticos, y por lo tanto un cambio en los campos puede modificar los parámetros macroscópicos de las funciones de distribución. Pero, si el plasma se calienta o acelera significa que $f_{\mu}^{(0)}$ cambia y, por lo tanto, los campos también deben cambiar ya que las funciones de distribución determinan las densidades y corrientes. Luego, el calentamiento y la aceleración deberían aparecer en un análisis no lineal. En resumen, esto indica que modelar estos sistemas mediante una teoría lineal, aún cuando se puedan sacar interesantes y útiles conclusiones, puede ser insuficiente y se hace necesario considerar teorías no lineales. Éste será el objetivo en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Modelo cuasilineal [†]

Como se expuso en el capítulo anterior, los resultados a partir del análisis lineal indican que estudiar la interacción resonante entre ondas circularmente polarizadas y las distintas especies de partículas en un plasma, podría ser de gran utilidad para comprender los procesos de aceleración y calentamiento del viento solar. Además, debido a que las funciones de distribución determinan las densidades de carga y corriente, y estas cantidades a su vez determinan la dinámica de los campos, un cambio en los parámetros macroscópicos de las funciones de distribución debe generar cambios en los campos, por lo que se hace necesario considerar teorías y modelos no lineales en el estudio de la aceleración y calentamiento del plasma.

Para incorporar características y efectos no lineales, probablemente la manera más simple de incorporar la no linealidad en una teoría cinética de plasmas corresponde a la teoría cuasilineal de plasmas o teoría de plasmas débilmente turbulentos. Desde la década de 1960, la teoría cuasilineal ha sido ampliamente utilizada para investigar la evolución de los parámetros macroscópicos en variados tipos de plasmas de

[†]Gran parte de este capítulo corresponde a la parte teórica del artículo “*Study of the cascading effect during the acceleration and heating of ions in the solar wind*”, P. S. Moya, V. Muñoz, J. Rogan and J. A. Valdivia, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* **73**, 1390–1397 (2011). [108]

manera teórica [109–112] y ha sido utilizada, en diversos contextos de plasmas para el estudio tanto de electrones [113–116], como iones masivos y protones [52,76,117], entre otros muchos artículos publicados.

En el estudio de la aceleración y calentamiento del viento solar, bajo diversas aproximaciones, la teoría cuasilineal ha sido de gran interés. En la literatura existe un gran número de referencias disponibles, destacando por su reciente publicación las Refs. [72, 74]. (Más referencias pueden ser encontradas en las bibliografías de los artículos mencionados.)

Con esta premisa, en este capítulo se desarrollará un modelo para estudiar la variación temporal de los parámetros macroscópicos de las funciones de distribución (velocidad de deriva y velocidades térmicas) al interactuar un plasma no colisional con ondas circularmente polarizadas en presencia de un campo magnético de fondo, y en particular para funciones de distribución bi-Maxwellianas. Además, al presentarse variaciones macroscópicas en los parámetros de las funciones de distribución (aceleración y/o calentamiento), debe haber un balance de energía y momentum, a partir de las interacciones resonantes, entre ondas y partículas. Las leyes de conservación respectivas serán también derivadas y analizadas (ver Apéndice C). Todo esto, a partir de la solución de las ecuaciones de Vlasov y Maxwell en el primer orden no lineal o cuasilineal.

4.1. Ecuaciones básicas

Consideremos entonces un plasma en el cual para la especie μ -ésima se cumple la ecuación de Vlasov (3.1) y consideremos las ecuaciones de Maxwell (3.2) y (3.3), donde las densidades de carga y corriente están relacionadas con las funciones de distribución a través de (3.4). De manera similar a lo expuesto en la Sec. 3.1, utili-

zando coordenadas cilíndricas para las velocidades $\mathbf{v} = (v_{\perp}, \phi, v_z)$, para cada especie μ , la función de distribución y los campos se expanden como

$$f_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\mu}^{(0)}(v_{\perp}, v_z, \lambda t) + \epsilon f_{\mu}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \dots, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = B_0 \hat{z} + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (4.3)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño y λ indica que la función de distribución de orden cero $f_{\mu}^{(0)}$ no corresponde a una función de equilibrio independiente del tiempo como en el caso lineal, sino que corresponde a una función que evoluciona lentamente en el tiempo. Así, esta restricción de *función lenta del tiempo* significa que en la escala del periodo de oscilación de las ondas (desde ahora escala *rápida*) $f_{\mu}^{(0)}$ puede ser considerada como independiente del tiempo, con lo cual se pueden usar de forma usual las relaciones de dispersión, ya derivadas en el Cap. 3, tal como se verá más adelante. En ese sentido, *lento* significa que $f_{\mu}^{(0)}$ no depende explícitamente del tiempo, pero sus parámetros macroscópicos (velocidad promedio, temperaturas) sí lo son. De esta manera, si por ejemplo $f_{\mu}^{(0)}$ es una Gaussiana, a medida que transcurra el tiempo, $f_{\mu}^{(0)}$ seguirá siendo una Gaussiana, pero su media y su desviación estándar habrán cambiado.

Utilizando (4.1), (4.2) y (4.3) en la ecuación de Vlasov (3.1), se obtiene una aproximación cuasilineal para dicha ecuación dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_{\mu}}{m_{\mu}} \left[\epsilon \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (B_0 \hat{z} + \epsilon \mathbf{B}_1) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} (f_{\mu}^{(0)} + \epsilon f_{\mu}^{(1)}) = 0. \quad (4.4)$$

En el presente análisis, suponemos que todas las cantidades dependen espacialmente sólo de la coordenada z (a lo largo de la dirección del campo magnético de fondo).

Así, se define ahora el promedio espacial de una cantidad $A(z)$ como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{L} \int dz A(z), \quad (4.5)$$

donde L es una longitud de referencia del plasma.

De esta manera, para las expansiones en términos de ondas circularmente polarizadas de los campos (3.9), (3.10), y la función de distribución (3.6), se obtiene que

$$\langle f_\mu^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{E}_1 \rangle = \langle \mathbf{B}_1 \rangle = 0, \quad (4.6)$$

y por lo tanto

$$\langle f_\mu \rangle = \langle f_\mu^{(0)} \rangle = f_\mu^{(0)}, \quad \langle \mathbf{E} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{B} \rangle = B_0 \hat{z}. \quad (4.7)$$

Luego, aplicando la definición de promedio espacial en (4.4), se obtiene a segundo orden

$$\begin{aligned} \epsilon \left\langle \frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\mu}{m_\mu} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} + \Omega_\mu (\mathbf{v} \times \hat{z}) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \lambda t} + \Omega_\mu (\mathbf{v} \times \hat{z}) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle + \epsilon^2 \left\langle \frac{q_\mu}{m_\mu} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0, \quad (4.8) \end{aligned}$$

donde Ω_μ está dada por (3.15).

A partir de (4.8), y utilizando (4.6), (4.7), dado que el término de orden ϵ se anula, el uso del promedio espacial permite separar la ecuación de Vlasov en las dos escalas de tiempo mencionadas; la escala rápida,

$$\frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\mu}{m_\mu} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} + \Omega_\mu (\mathbf{v} \times \hat{z}) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.9)$$

que corresponde a la ecuación lineal de Vlasov, y es la misma ecuación que fue analizada en el capítulo anterior. A partir de (4.9), expresando la ecuación en el espacio de Fourier, se obtiene

$$i(\omega_k - kv_z) f_{\mu,k} + \Omega_\mu \frac{\partial f_{\mu,k}}{\partial \phi} = \frac{q_\mu}{m_\mu} \left(\mathbf{E}_k + \frac{k}{\omega_k} \mathbf{v} \times \hat{z} \times \mathbf{E}_k \right) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4.10)$$

cuya solución viene dada por (ver Sec. 3.1):

$$f_{\mu,k} = \frac{iq_{\mu}}{\sqrt{2m_{\mu}\omega_k}} \left((\omega_k - kv_z) \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_{\perp}} - kv_{\perp} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_z} \right) \left(\frac{E_k^+ e^{i\phi}}{\omega_k - kv_z + \Omega_{\mu}} + \frac{E_k^- e^{-i\phi}}{\omega_k - kv_z - \Omega_{\mu}} \right). \quad (4.11)$$

De esta manera, en la escala rápida, a partir de (4.11) y de las ecuaciones de Maxwell tiempo-dependientes, se puede escribir una ecuación de ondas y encontrar así la correspondiente relación de dispersión (derivación hecha en el Cap. 3). Es importante notar que a través de todo análisis de la ecuación lineal de Vlasov (4.9), la función de distribución de orden cero $f_{\mu}^{(0)}$, así como también todos sus parámetros macroscópicos, han sido considerados como independientes del tiempo debido a que su evolución temporal es lenta respecto a la escala temporal de las perturbaciones. En otras palabras, $f_{\mu}^{(0)}$ es suficientemente lenta para que, al cabo de varios periodos de las ondas involucradas, su evolución temporal sea irrelevante.

Por otro lado, también a partir de (4.8), se obtiene

$$\frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial \lambda t} + \Omega_{\mu} (\mathbf{v} \times \hat{z}) \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} + \epsilon^2 \left\langle \frac{q_{\mu}}{m_{\mu}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0, \quad (4.12)$$

donde el parámetro $\lambda \ll 1$ es un factor que indica la escala temporal lenta. Pero, como $\mathbf{v} \times \hat{z} = -v_{\perp} \hat{\phi}$, y $f_{\mu}^{(0)}$ no depende de ϕ , redefiniendo $\epsilon \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1$, $\epsilon \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1$ y $\epsilon f_{\mu}^{(1)} = f_{\mu}^{(1)}$ se obtiene

$$\frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial \lambda t} = - \left\langle \frac{q_{\mu}}{m_{\mu}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (4.13)$$

Esta última expresión muestra que, en la aproximación cuasilineal, si $f_{\mu}^{(0)}$ cambia con el tiempo, su tasa de cambio corresponde al primer orden no lineal (cuasilineal) en las perturbaciones de la ecuación de Vlasov. Por lo tanto, al ser de orden ϵ^2 , de manera consistente con la aproximación utilizada, su evolución temporal es lenta en

comparación con la dinámica de las perturbaciones. Ahora, utilizando (3.9), (3.10) y (3.6), y calculando de manera explícita el promedio espacial definido en (4.5), la derivada temporal de $f_\mu^{(0)}$ corresponde a

$$\frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \lambda t} = -\frac{q_\mu}{m_\mu} \frac{1}{2\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' \left[E_{k'}^+ \hat{e}_+ + E_{k'}^- \hat{e}_- + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (B_{k'}^+ \hat{e}_+ + B_{k'}^- \hat{e}_-) \right] \cdot \frac{\partial f_{\mu,k}}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i(k+k')z}. \quad (4.14)$$

Y así, calculando primero la integral en z para luego calcular la integral en k' , se obtiene una expresión integral para la derivada temporal de la función de distribución de orden cero

$$\frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \lambda t} = -\frac{q_\mu}{m_\mu} \int dk \left[E_{-k}^+ \hat{e}_+ + E_{-k}^- \hat{e}_- - \frac{k}{\omega_{-k}} \mathbf{v} \times \hat{z} \times (E_{-k}^+ \hat{e}_+ + E_{-k}^- \hat{e}_-) \right] \cdot \frac{\partial f_{\mu,k}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (4.15)$$

4.2. Evolución temporal de los parámetros macroscópicos para funciones de distribución bi-Maxwellianas

Al igual que en el Cap. 3, el análisis se basa en funciones de distribución bi-Maxwellianas para cada especie μ ,

$$f_\mu^{(0)}(v_\perp, v_z, \lambda t) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_{\text{th},\mu\perp}^2(\lambda t) v_{\text{th},\mu\parallel}(\lambda t)} \exp \left[-\frac{(v_z - V_\mu(\lambda t))^2}{v_{\text{th},\mu\parallel}^2(\lambda t)} - \frac{v_\perp^2}{v_{\text{th},\mu\perp}^2(\lambda t)} \right], \quad (4.16)$$

con la salvedad de que en este caso, las velocidades térmicas $v_{\text{th},\mu\parallel}$, $v_{\text{th},\mu\perp}$ y la velocidad de deriva en la dirección del campo de fondo (V_μ) son ahora funciones lentas del tiempo λt . Al igual que en Cap. 3, las velocidades V_μ son las velocidades de deriva respecto al sistema del laboratorio. De esta manera, al elegir un sistema

de referencia en reposo respecto a cualquier especie, en caso de que las partículas aceleren (y por lo tanto V_μ cambie), el sistema de referencia seguirá siendo inercial.

De la definición (4.16), los momentos v_z , v_\perp^2 y v_z^2 de la distribución corresponden a los parámetros macroscópicos de la función de distribución:

$$\int v_z f_\mu^{(0)}(v_\perp, v_z, \lambda t) d\mathbf{v} = V_\mu(\lambda t), \quad (4.17)$$

$$\int v_z^2 f_\mu^{(0)}(v_\perp, v_z, \lambda t) d\mathbf{v} = \frac{1}{2} [2V_\mu^2(\lambda t) + v_{\text{th},\mu\parallel}^2(\lambda t)], \quad (4.18)$$

$$\int v_\perp^2 f_\mu^{(0)}(v_\perp, v_z, \lambda t) d\mathbf{v} = v_{\text{th},\mu\perp}^2(\lambda t). \quad (4.19)$$

Por lo tanto, derivando estas tres ecuaciones respecto al tiempo, y definiendo las funciones

$$K_{1z}^\mu(\lambda t) = \int v_z \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \lambda t} d\mathbf{v}, \quad (4.20)$$

$$K_{2z}^\mu(\lambda t) = \int v_z^2 \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \lambda t} d\mathbf{v}, \quad (4.21)$$

$$K_{2\perp}^\mu(\lambda t) = \int v_\perp^2 \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \lambda t} d\mathbf{v}, \quad (4.22)$$

se obtiene un sistema de ecuaciones acoplado para la evolución temporal de los parámetros macroscópicos de la función de distribución de cada especie. Esto es,

$$\frac{dV_\mu}{d\lambda t} = K_{1z}^\mu(\lambda t), \quad (4.23)$$

$$\frac{dv_{\text{th},\mu\parallel}}{d\lambda t} = \frac{1}{v_{\text{th},\mu\parallel}(\lambda t)} K_{2z}^\mu(\lambda t) - 2 \frac{V_\mu(\lambda t)}{v_{\text{th},\mu\parallel}(\lambda t)} K_{1z}^\mu(\lambda t), \quad (4.24)$$

$$\frac{dv_{\text{th},\mu\perp}}{d\lambda t} = \frac{1}{2v_{\text{th},\mu\perp}(\lambda t)} K_{2\perp}^\mu(\lambda t). \quad (4.25)$$

Ahora bien, dada la expresión integral (4.15), la derivada de $f^{(0)}$ depende de la función de distribución $f_{\mu,k}$ (4.11) de primer orden, que es función de los campos perturbativos. Así, reemplazando explícitamente $f_{\mu,k}$, realizando las integrales en \mathbf{v} ,

y considerando que los parámetros macroscópicos de cada función de distribución son cantidades reales, las funciones K_j^μ se pueden expresar como

$$K_{1z}^\mu = -\frac{q_\mu^2}{m_\mu^2} \frac{1}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\mathbf{B}_k|^2}{c^2 k} \operatorname{Im} \left\{ A_\mu + [A_\mu(\omega_k \pm \Omega_\mu - kV_\mu) + \omega_k - kV_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{kv_{\text{th},\mu}} \right\}, \quad (4.26)$$

$$K_{2z}^\mu = \frac{q_\mu^2}{m_\mu^2} \frac{1}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\mathbf{B}_k|^2}{c^2 k^2} \operatorname{Im} \left\{ A_\mu(\omega_k \pm \Omega_\mu) + \omega_k - kV_\mu + (\omega_k \pm \Omega_\mu) [A_\mu(\omega_k \pm \Omega_\mu - kV_\mu) + \omega_k - kV_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{kv_{\text{th},\mu}} \right\}, \quad (4.27)$$

$$K_{2\perp}^\mu = -\frac{q_\mu^2}{m_\mu^2} \frac{1}{\pi L} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{|\mathbf{B}_k|^2}{c^2 k^2} \operatorname{Im} \left\{ A_\mu(\omega_k + \omega_{-k} \pm \Omega_\mu) + \omega_k - kV_\mu + (\omega_k + \omega_{-k} \pm \Omega_\mu) [A_\mu(\omega_k \pm \Omega_\mu - kV_\mu) + \omega_k - kV_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{kv_{\text{th},\mu}} \right\}, \quad (4.28)$$

con

$$\varphi_{\mu k}^\pm = \frac{\omega_k \pm \Omega_\mu - kV_\mu}{kv_{\text{th},\mu}}, \quad (4.29)$$

donde el signo + (-) corresponde a la polarización derecha (izquierda).

De esta manera, el sistema (4.23), (4.24), (4.25) depende explícitamente de $|\mathbf{B}_k|^2$ y es necesaria una ecuación dinámica para los campos que sea distinta de las ecuaciones de Maxwell, para así cerrar el sistema. Para esto, como para los campos ondulatorios (3.9), (3.10) con frecuencia compleja $\omega_k = \omega_k^{(r)} + i\omega_k^{(i)}$ se tiene en general para cada modo

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}(k) e^{\omega_k^{(i)} t} e^{i(kz - \omega_k^{(r)} t)}, \quad \mathbf{B}_k = \mathbf{B}(k) e^{\omega_k^{(i)} t} e^{i(kz - \omega_k^{(r)} t)}, \quad (4.30)$$

entonces,

$$|\mathbf{E}_k|^2 = |\mathbf{E}(k)|^2 e^{2\omega_k^{(i)} t}, \quad |\mathbf{B}_k|^2 = |\mathbf{B}(k)|^2 e^{2\omega_k^{(i)} t}, \quad (4.31)$$

y por lo tanto se satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial |\mathbf{E}_k|^2}{\partial t} = 2\omega_k^{(i)} |\mathbf{E}_k|^2, \quad \frac{\partial |\mathbf{B}_k|^2}{\partial t} = 2\omega_k^{(i)} |\mathbf{B}_k|^2, \quad (4.32)$$

que son las ecuaciones que se necesitan para los campos.

Así, a partir de la teoría cuasilineal [70, 71], y en base a funciones de distribución de orden cero bi-Maxwellianas, es posible escribir un sistema de ecuaciones integro-diferencial en el espacio de Fourier y así obtener la evolución temporal lenta de los parámetros macroscópicos de cada una de las especies en un plasma. Es importante notar que las ecuaciones (4.23), (4.24), (4.25), junto con (4.32), dependen explícitamente tanto de la frecuencia como de la tasa de crecimiento o amortiguamiento. Por lo tanto, para resolver el sistema es necesario resolver explícitamente la relación de dispersión $\omega_k = \omega(k) = \omega^{(r)}(k) + i\omega^{(i)}(k)$ a partir de la ecuación lineal de Vlasov o escala rápida en este contexto (ver Cap. 3). En resumen, para funciones de orden cero bi-Maxwellianas, el sistema de ecuaciones a resolver corresponde a

$$\frac{dV_\mu}{dt} = K_{1z}^\mu(t), \quad (4.33)$$

$$\frac{dv_{th,\mu\parallel}}{dt} = \frac{1}{v_{th,\mu\parallel}(t)} K_{2z}^\mu(t) - 2 \frac{V_\mu(t)}{v_{th,\mu\parallel}(t)} K_{1z}^\mu(t), \quad (4.34)$$

$$\frac{dv_{th,\mu\perp}}{dt} = \frac{1}{2v_{th,\mu\perp}(t)} K_{2\perp}^\mu(t), \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial |\mathbf{B}_k|^2}{\partial t} = 2\omega_k^{(i)} |\mathbf{B}_k|^2, \quad (4.36)$$

$$c^2 k^2 = \omega_k^2 + \sum_\mu \omega_{\mu p}^2 \left[A_\mu + [A_\mu(\omega_k \pm \Omega_\mu - kV_\mu) + \omega_k - kV_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{kv_{th,\mu\parallel}} \right], \quad (4.37)$$

donde las funciones K_j^μ vienen dadas por (4.26), (4.27), (4.28). Es importante notar que el factor λ se ha omitido debido a que la escala lenta es la escala temporal de interés. De este modo, todas las derivadas temporales corresponden a variaciones temporales en dicha escala y por lo tanto se subentiende que λ está incorporado.

4.2.1. Ecuaciones normalizadas

Ahora, para realizar la integración y el cálculo de las derivadas numéricas de las ecuaciones que conforman el sistema de estudio, es conveniente escribir estas expresiones de forma adimensional. Con este fin se debe encontrar una normalización adecuada que, además de adimensionalizar las ecuaciones, haga referencia a las escalas propias y a las cantidades intrínsecas del sistema de estudio. Así, de la misma manera en que fue elegida la normalización en la Sec. 3.2, debido a que la especie predominante en los plasmas de estudio son los protones, las longitudes, densidades, frecuencias y velocidades se normalizarán con respecto a la longitud inercial $\lambda_p = V_{Ap}/\Omega_p$, densidad promedio n_p , la frecuencia de ciclotrón $\Omega_p = eB_0/m_p c$ y la velocidad de Alfvén $V_{Ap} = B_0/\sqrt{4\pi n_p m_p}$ de dicha especie. En otras palabras, la magnitud del campo magnético de fondo B_0 , junto con la densidad promedio n_p , masa m_p y carga e de los protones son las cantidades adecuadas para elegir la normalización. Además, con el fin de forzar $\beta > 0$ para todo tiempo en las ecuaciones numéricas, a lo largo de este trabajo al momento de referirse a $\beta_{\mu,j}$ se utilizará $\bar{\beta}_{\mu,j}^2$, tal que

$$\beta_{\mu,j} = \bar{\beta}_{\mu,j}^2, \quad (4.38)$$

con $j = \perp, \parallel$.

De esta manera, para la μ -ésima especie se definen la velocidad normalizada

$$U_\mu = V_\mu/V_{Ap}, \quad (4.39)$$

la concentración η_μ respecto a los protones y la cantidad adimensional M_μ como

$$\eta_\mu = n_\mu/n_p, \quad M_\mu = \Omega_\mu/\Omega_p = z_\mu m_p/m_\mu, \quad (4.40)$$

y las temperaturas normalizadas (parámetros $\bar{\beta}$)

$$\bar{\beta}_{\mu\perp}^2 = v_{\text{th},\mu,\perp}^2/V_{Ap}^2 \quad \text{y} \quad \bar{\beta}_{\mu\parallel}^2 = v_{\text{th},\mu,\parallel}^2/V_{Ap}^2, \quad (4.41)$$

cumpléndose que

$$A_\mu = \frac{\bar{\beta}_{\mu\perp}^2}{\bar{\beta}_{\mu\parallel}^2} - 1 = \frac{\beta_{\mu\perp}}{\beta_{\mu\parallel}} - 1 = \frac{T_{\mu\perp}}{T_{\mu\parallel}} - 1, \quad (4.42)$$

tal como se definió en la Sec. 2.3. En el caso del tiempo t y la frecuencia ω_k , la normalización será respecto a la girofrecuencia Ω_p . Luego, se definen el tiempo normalizado

$$\tau = \Omega_p t, \quad (4.43)$$

la frecuencia compleja normalizada

$$x_y = x + i\gamma, \quad \text{donde} \quad x = \omega^{(r)}/\Omega_p, \quad \gamma = \omega^{(i)}/\Omega_p, \quad (4.44)$$

y el número de onda normalizado

$$y = \lambda_p k. \quad (4.45)$$

Por lo tanto, el cociente $\varphi_{\mu k}^\pm$ [Ec. (4.29)] en términos de las variables normalizadas se puede expresar como

$$\varphi_{\mu k}^\pm = \frac{x_y \pm M_\mu - yU_\mu}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}}. \quad (4.46)$$

Finalmente, con respecto al campo magnético de fondo, se define la densidad espectral de energía magnética como

$$\varepsilon_y^\pm = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\lambda_p L} \frac{|\mathbf{B}_k^\pm|^2}{B_0^2}, \quad (4.47)$$

donde el signo \pm indica la polarización de las ondas.

De esta manera, en términos de las variables adimensionales el sistema cuasilineal (4.33)–(4.37) se puede expresar como

$$\frac{dU_\mu^-}{d\tau} = \mathcal{K}_{1z}^\mu(\tau), \quad (4.48)$$

$$\frac{d\bar{\beta}_{\mu\parallel}}{d\tau} = \frac{1}{\bar{\beta}_{\mu\parallel}(\tau)} \mathcal{K}_{2z}^\mu(\tau) - 2 \frac{U_\mu(\tau)}{\bar{\beta}_{\mu\parallel}(\tau)} \mathcal{K}_{1z}^\mu(\tau), \quad (4.49)$$

$$\frac{d\bar{\beta}_{\mu\perp}}{d\tau} = \frac{1}{2\bar{\beta}_{\mu\perp}(\tau)} \mathcal{K}_{2\perp}^\mu(\tau), \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y^\pm}{\partial t} = 2\gamma \varepsilon_y^\pm, \quad (4.51)$$

$$y^2 = \sum_\mu z_\mu M_\mu \eta_\mu \left[A_\mu + [A_\mu(x_y \pm M_\mu - yU_\mu) + x_y - yU_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}} \right], \quad (4.52)$$

donde las funciones \mathcal{K}_j^μ vienen dadas por

$$\mathcal{K}_{1z}^\mu = M_\mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\varepsilon_y^\pm}{y} \text{Im} \left\{ A_\mu + [A_\mu(x_y \pm M_\mu - yU_\mu) + x_y - yU_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}} \right\}, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{2z}^\mu = M_\mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\varepsilon_y^\pm}{y^2} \text{Im} \left\{ A_\mu(x_y \pm M_\mu) + x_y - yU_\mu \right. \\ \left. + (x_y \pm M_\mu)[A_\mu(x_y \pm M_\mu - yU_\mu) + x_y - yU_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}} \right\}, \quad (4.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{2\perp}^\mu = -M_\mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\varepsilon_y^\pm}{y^2} \text{Im} \left\{ A_\mu(x_y + x_{-y} \pm M_\mu) + x_y - yU_\mu \right. \\ \left. + (x_y + x_{-y} \pm M_\mu)[A_\mu(x_y \pm M_\mu - yU_\mu) + x_y - yU_\mu] \frac{Z(\varphi_{\mu,k}^\pm)}{y\bar{\beta}_{\mu\parallel}} \right\}. \quad (4.55) \end{aligned}$$

4.3. Aplicación para plasmas semifríos

Las ecuaciones cuasilineales encontradas en la sección anterior conforman un sistema acoplado general para el estudio de la evolución temporal de los parámetros macroscópicos, para un plasma bi-Maxwelliano no colisional interactuando con ondas circularmente polarizadas. En las regiones de interés consideradas en este trabajo

se puede considerar $\beta \ll 1$, lo que corresponde a la llamada "aproximación semifría", ampliamente utilizada en este contexto [60-62, 66, 104]. Así, al igual que en la Sec. 3.3 para el análisis lineal, se introduce aquí la aproximación semifría para estudiar el régimen cuasilineal.

4.3.1. Aproximación semifría de las funciones K_{1z}^μ , K_{2z}^μ , y $K_{2\perp}^\mu$

En la aproximación semifría, la función $Z(\zeta)$ de dispersión de plasmas [ver Ec. (B.18) en apéndice B] se puede expandir como:

$$Z(\varphi_{\mu k}^\pm) \approx -\frac{1}{\varphi_{\mu k}^\pm} + i\pi e^{-\text{Re}[\varphi_{\mu k}^\pm]^2}, \quad (4.56)$$

donde se ha aproximado $\text{Im}[\varphi_{\mu k}^\pm] \approx 0$ (más detalles en el apéndice B), para la especie iónica μ -ésima, y además

$$Z(\varphi_{ek}^\pm) \approx -\frac{1}{\varphi_{ek}^\pm} \quad (4.57)$$

para electrones. Además, tanto para electrones como para todas las especies de iones,

$$\text{Re}[\varphi_{\mu k}^\pm] = \frac{\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - k V_\mu}{k v_{\text{th},\mu}}. \quad (4.58)$$

Como en el Cap. 3, se obtiene para ondas con frecuencia baja $|\omega_k|^2 \ll c^2 k^2$, $\omega_k = \omega_k^{(r)} + i\omega_k^{(i)}$, en el régimen semifrío, que el sistema cuasilineal (4.33)-(4.37) se puede expresar como

$$\frac{dV_\mu}{dt} = K_{1z}^\mu(t), \quad (4.59)$$

$$\frac{dv_{\text{th},\mu\parallel}}{dt} = \frac{1}{v_{\text{th},\mu\parallel}(t)} K_{2z}^\mu(t) - 2 \frac{V_\mu(t)}{v_{\text{th},\mu\parallel}(t)} K_{1z}^\mu(t), \quad (4.60)$$

$$\frac{dv_{\text{th},\mu\perp}}{dt} = \frac{1}{2v_{\text{th},\mu\perp}(t)} K_{2\perp}^\mu(t), \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial |\mathbf{B}_k|^2}{\partial t} = 2\omega_k^{(i)} |\mathbf{B}_k|^2, \quad (4.62)$$

$$c^2 k^2 = \pm \sum_\mu \frac{\omega_{\mu p}^2}{\Omega_\mu} \frac{(\omega_k^{(r)} - kV_\mu)^2}{\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu}, \quad (4.63)$$

$$\omega_k^{(i)} = \mp \frac{\sum_\mu \frac{\omega_{\mu p}^2}{\omega_{pp}^2} \frac{\pi^{1/2}}{k v_{\text{th},\mu\parallel}} \left[A_\mu(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu) + \omega_k^{(r)} - kV_\mu \right] e^{-\text{Re}[\varphi_{\mu k}^\pm]}}{\sum_\mu \frac{\omega_{\mu p}^2}{\omega_{pp}^2} \frac{(\omega_k^{(r)} - kV_\mu)(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu)}{(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu)^2}}, \quad (4.64)$$

donde la suma en el índice μ excluye a los electrones, y las funciones K_j^μ vienen dadas por

$$K_{1z}^\mu = \pm \frac{q_\mu^2}{m_\mu^2} \frac{1}{\pi L} \int_0^\infty dk \frac{|\mathbf{B}_k^\pm|^2}{c^2 k^2} \frac{k \Omega_\mu}{(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu)^2} \omega_k^{(i)}, \quad (4.65)$$

$$K_{2z}^\mu = \frac{q_\mu^2}{m_\mu^2} \frac{2}{\pi L} \int_0^\infty dk \frac{|\mathbf{B}_k^\pm|^2}{c^2 k^2} \left(1 - \frac{\omega_k^{(r)} - kV_\mu}{\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu} \mp \frac{(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu) \Omega_\mu}{(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu)^2} \right) \omega_k^{(i)}, \quad (4.66)$$

$$K_{2\perp}^\mu = -\frac{q_\mu^2}{m_\mu^2} \frac{2}{\pi L} \int_0^\infty dk \frac{|\mathbf{B}_k^\pm|^2}{c^2 k^2} \left(1 - \frac{2(\omega_k^{(r)} - kV_\mu)}{\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu} \mp \frac{\Omega_\mu^2}{(\omega_k^{(r)} \pm \Omega_\mu - kV_\mu)^2} \right) \omega_k^{(i)}, \quad (4.67)$$

y el signo indica polarización derecha (+) o izquierda (-).

Así, a partir del uso de la aproximación semifría, se ha obtenido un sistema de ecuaciones en el cual destacan dos hechos principales. Primero, debido a la aproximación de las funciones Z , en todas las expresiones se han podido separar explícitamente

las partes reales e imaginarias. Y segundo, las integrales corresponden ahora a expresiones sencillas de manejar algebraicamente. Es importante notar que gracias a la paridad definida de la parte real e imaginaria de la frecuencia [Ec. (3.13)], a diferencia de las expresiones en términos de las funciones Z [Ecs. (4.26)–(4.28)] que fueron encontradas en el Cap. 3, la versión semifría de las funciones K_j^μ corresponde a integrales para $k > 0$. Este hecho es razonable, debido a que, dentro del presente estudio, el objeto de análisis es un plasma interactuando con ondas para las cuales tanto la polarización como la dirección y sentido de propagación, están definidos.

Ahora bien, de la misma manera en que fueron normalizadas las Ecs (4.33)–(4.37) del sistema sin el uso de la aproximación semifría, es conveniente expresar las ecuaciones en términos de las variables normalizadas [Ecs. (4.39)–(4.47)] introducidas en la sección 4.2.1. Así, en términos de las variables normalizadas, el sistema (4.59)–(4.64) se puede escribir como

$$\frac{dU_\mu}{d\tau} = \bar{\mathcal{K}}_{1z}^\mu(\tau), \quad (4.68)$$

$$\frac{d\bar{\beta}_{\mu\parallel}}{d\tau} = \frac{1}{\bar{\beta}_{\mu\parallel}(\tau)} \bar{\mathcal{K}}_{2z}^\mu(\tau) - 2 \frac{U_\mu(\tau)}{\bar{\beta}_{\mu\parallel}(\tau)} \bar{\mathcal{K}}_{1z}^\mu(\tau), \quad (4.69)$$

$$\frac{d\bar{\beta}_{\mu\perp}}{d\tau} = \frac{1}{2\bar{\beta}_{\mu\perp}(\tau)} \bar{\mathcal{K}}_{2\perp}^\mu(\tau), \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y^\pm}{\partial \tau} = 2\gamma \varepsilon_y^\pm, \quad (4.71)$$

$$y^2 = \sum_\mu \frac{z_\mu \eta_\mu (x - yU_\mu)^2}{M_\mu \pm (x - yU_\mu)}, \quad (4.72)$$

$$\gamma = \mp \frac{\sum_\mu z_\mu M_\mu \eta_\mu \left[\frac{\pi^{1/2}}{y \bar{\beta}_{\mu\parallel}} [A_\mu(x \pm M_\mu - yU_\mu) + x - yU_\mu] e^{-\text{Re}[\varphi_{\mu k}^\pm]^2} \right]}{\sum_\mu z_\mu \eta_\mu \frac{(x - yU_\mu)(x \pm 2M_\mu - yU_\mu)}{(x \pm M_\mu - yU_\mu)^2}}, \quad (4.73)$$

donde las funciones $\bar{\mathcal{K}}_j^\mu$ están dadas por

$$\bar{\mathcal{K}}_{1z}^\mu(\tau) = \pm M_\mu^2 \int_0^\infty dy \frac{\varepsilon_y^\pm}{y} \frac{M_\mu}{(x \pm M_\mu - yU_\mu)^2} \gamma, \quad (4.74)$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{2z}^\mu(\tau) = M_\mu^2 \int_0^\infty dy \frac{\varepsilon_y^\pm}{y^2} \left[1 - \frac{x - yU_\mu}{x \pm M_\mu - yU_\mu} \mp \frac{(x \pm M_\mu)M_\mu}{(x \pm M_\mu - yU_\mu)^2} \right] \gamma, \quad (4.75)$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{21}^\mu(\tau) = -M_\mu^2 \int_0^\infty dy \frac{\varepsilon_y^\pm}{y^2} \left[1 - \frac{2(x - yU_\mu)}{x \pm M_\mu - yU_\mu} - \frac{M_\mu^2}{(x \pm M_\mu - yU_\mu)^2} \right] \gamma. \quad (4.76)$$

Esta versión normalizada del sistema cuasilineal, Ecs. (4.68)–(4.76), será la utilizada a partir de la sección siguiente, salvo cuando sea explícitamente indicado.

4.4. Discusión

En este capítulo, a partir de funciones bi-Maxwellianas y una expansión cuasilineal de la ecuación de Vlasov, se ha desarrollado un método para describir la transferencia dinámica de energía entre ondas y partículas en un plasma [108]. Dentro del formalismo, ha sido posible plantear un sistema de ecuaciones, acoplado e integro-diferencial, para seguir la evolución temporal de las funciones de distribución de velocidades de las especies iónicas, y también de la densidad espectral de energía magnética. Todo esto, en el caso de ondas circularmente polarizadas propagándose a través de un plasma con funciones de distribución bi-Maxwellianas en la dirección de un campo magnético de fondo. El método propuesto corresponde a una aproximación cuasilineal (no lineal) de las ecuaciones de Maxwell y Vlasov. Luego, las derivadas temporales [Ecs. (4.68)–(4.76)] obtenidas para los parámetros macroscópicos del plasma corresponden a funciones que varían en la escala temporal lenta.

Es importante notar que, debido a que el fenómeno en estudio es la transferencia de energía entre ondas y partículas, cualquier cambio en los parámetros de las

funciones de distribución debe verse reflejado en la energía electromagnética. Esto es, la aceleración o calentamiento del plasma debe ser a expensas de la energía libre disponible en el campo electromagnético y viceversa. Por lo tanto, debido a que no hay más energía en el sistema que la de ondas y partículas, debe cumplirse alguna relación de conservación de energía. Esta ley de conservación de energía se cumple en el marco de la teoría cuasilineal y en el Apéndice C se deduce y analiza en detalle. En el mismo Apéndice, además, se muestra que la teoría cuasilineal garantiza también la conservación del número de partículas de cada especie, así como también el momentum total del sistema. De esta manera, las ecuaciones que han sido encontradas para la evolución temporal de las derivas y las velocidades térmicas de las funciones de distribución son consistentes con la conservación de partículas, energía y momentum en el plasma. Además, es importante notar que, debido a que las variaciones de las densidades de energía y momentum que guardan las partículas no se anulan (ver apéndice C) como en el caso de perturbaciones electrostáticas [70,71], se deben incluir las densidades de energía y momentum, a fin de conservar estas cantidades. En otras palabras, dado que las ondas circularmente polarizadas transmiten tanto energía como momentum, las densidades respectivas deben ser consideradas al momento de escribir las leyes de conservación.

Por otro lado, tal como se discutió en el Cap. 3, la motivación principal de este trabajo corresponde a la posible aplicación de la teoría en el estudio del fenómeno de aceleración y calentamiento de iones en ciertas regiones del viento solar, como pueden ser los llamados agujeros coronales [60-62]. Por este motivo, las ecuaciones (4.33)-(4.37) obtenidas en las primeras secciones de este capítulo, fueron reescritas en la aproximación semifría. Así, el conjunto de ecuaciones se pudo expresar de una manera más manejable tanto algebraica como numéricamente y, aprovechando

las relaciones de paridad definida de la frecuencia compleja, se obtuvo entonces el sistema normalizado (4.68)–(4.76), que será la base para obtener resultados numéricos en lo sucesivo. Es importante notar que en dichas ecuaciones todas las derivadas temporales son proporcionales a la función γ . Luego, esta aproximación cuasilínea semifría, en la cual las variaciones temporales son lentas, resulta ser consistente con los valores de γ , con γ_{\max} del orden de 10^{-3} , que fueron encontrados en el Cap. 3 a partir de la misma aproximación semifría en el régimen lineal.

En los dos capítulos siguientes se mostrarán los resultados y el análisis cuasilínea de la aceleración y calentamiento de iones a través de la interacción resonante entre ondas y partículas. Primero, en el Cap. 5, para un plasma compuesto solamente de electrones y protones, y después en un caso como el analizado en el Cap. 3, esto es, un plasma compuesto de electrones, protones y una fracción minoritaria de iones He^{+2} , más cercano a la situación del viento solar y donde se pueden estudiar los efectos tipo cascada propuestos en las Refs. [60–62].

Capítulo 5

Evolución cuasilineal de un plasma compuesto de electrones y protones [†]

El plasma más sencillo de modelar usando el método cuasilineal que ha sido presentado en el Cap. 4 corresponde a un plasma de dos especies, electrones y protones, y en el cual las ecuaciones cuasilineales contienen solamente la especie protónica. Si bien existen dos polarizaciones posibles de las ondas, tal como se discutió en el Cap. 3, debido a que corresponden a la rama de Alfvén resonante, en el presente trabajo se consideran solamente las ondas con polarización circular izquierda [signo negativo en las Ecs.(4.68)–(4.76)]. Además, tal como se discutió en los capítulos anteriores, el sistema de estudio será el conjunto de ecuaciones normalizadas (4.68)–(4.76) para el régimen semifrío.

En este caso, la parte real de la relación de dispersión (4.72) se reduce a

$$y^2 = \frac{(x - yU_p)^2}{1 - (x - yU_p)}, \quad (5.1)$$

ecuación que tiene dos raíces reales $x(y)$. En la Fig. 5.1 se muestran las dos soluciones

[†]Gran parte de este capítulo corresponde a parte del artículo “*Computational and theoretical study of the acceleration and heating of protons*”, P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz and J. A. Valdivia, *en preparación*. [118]

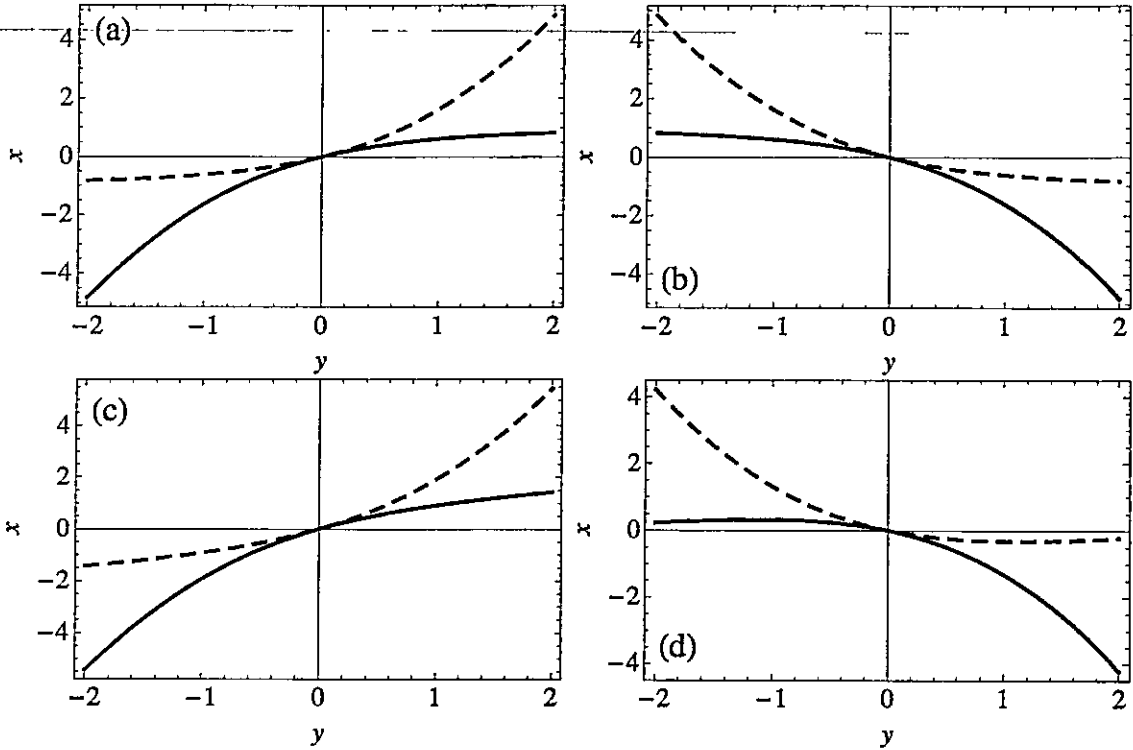


Figura 5.1: (a) Rama de Alfvén de la relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas propagándose en la dirección z de un campo de fondo a través de un plasma compuesto de electrones y protones con velocidad de deriva $U_p = 0$. La curva sólida representa las ondas que se propagan en la dirección $z > 0$ y la curva segmentada a las ondas que se propagan en la dirección contraria. (b) Segunda solución, y su prolongación impar (curvas sólida y segmentada, respectivamente) de la relación de dispersión para $U_p = 0$. (c) Misma situación que en (a), pero con $U_p = 0.3$. (d) Lo mismo que en (b), pero con $U_p = 0.3$.

de la relación de dispersión (5.1), tanto para ondas que se propagan hacia $z > 0$ (curvas sólidas) como para $z < 0$ (curvas segmentadas), para $U_p = 0$ [(a) y (b)] y $U_p = 0.3$ [(c) y (d)]. Se observa en todas las figuras que la relación de paridad discutida en la sección 3.1 [Ec. (3.13)] se cumple cabalmente. Se observa además que la existencia de una velocidad de deriva de los protones distinta de cero y el correspondiente corrimiento Doppler de las frecuencias $x \rightarrow x' = x - yU_p$ se manifiesta en una pérdida de simetría respecto al eje $y = 0$. Luego, mientras que para el caso (a)

la rama de Alfvén, representada por la curva sólida en el primer cuadrante $y > 0$, tiende asintóticamente a $x = 1$, en el panel (c) la misma rama tiende asintóticamente a la recta $x = yU_p + 1$. Así, para modos con número de onda grande, la existencia de una deriva $U_p \neq 0$ transforma considerablemente las soluciones de la relación de dispersión. De todas maneras, en el rango de números de onda de interés, para modos tipo protón-ciclotrón o de Alfvén, las diferencias entre las ramas, al considerar o no $U_p \neq 0$, no son considerables. Como fue visto en el Cap. 3 y será visto en el capítulo siguiente, cuando se considera una especie iónica adicional a los protones, la existencia o no de velocidades de deriva produce cambios considerables incluso para los modos en el rango de frecuencias de estudio.

Por su parte, la parte imaginaria de la frecuencia, relacionada con la tasa de crecimiento o amortiguamiento dada por (4.73), para este caso simple de electrones y protones se escribe como:

$$\gamma = \frac{\pi^{1/2}}{y\bar{\beta}_{p\parallel}} \frac{[A_p(1 - (x - yU_p)) - x + yU_p]}{(x - yU_p)(2 - (x - yU_p))} (x - 1 - yU_p)^2 e^{-\text{Re}(\varphi_{pk})^2}. \quad (5.2)$$

A partir de (5.2) se observa que, para las ondas que se propagan en la dirección z positiva, la generación de inestabilidades ($\gamma > 0$) es posible solamente para $A_p > 0$ y en una región acotada del espacio de Fourier debido al término exponencial dominante para y suficientemente grande. En el caso $A_p = 0$, independiente del valor de U_p , γ siempre es negativo.

En la Fig. 5.2(a) se muestra la tasa de amortiguamiento $\gamma(y)$, en la región $y > 0$ para la rama de Alfvén de la relación de dispersión mostrada en la Fig. 5.1(c) para $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 0.01$, sin anisotropía térmica. Tal como se puede obtener a partir del análisis de la ecuación (5.2), en este caso de $A_p = 0$, $\gamma \leq 0$ para todo $y > 0$. Dada la ecuación (4.71), en este caso la respuesta del plasma al paso de las ondas que

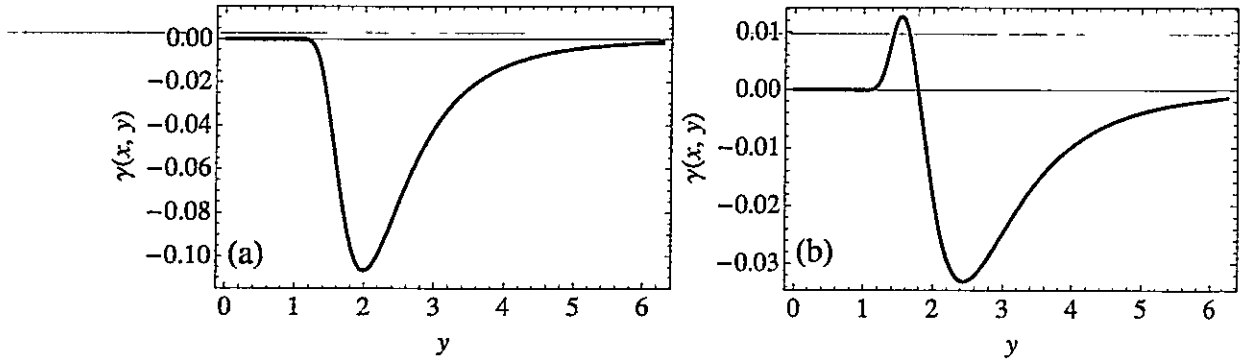


Figura 5.2: (a) Parte imaginaria de las frecuencias para la rama de Alfvén de la relación de dispersión (5.1) para $U_p = 0.3$, $\bar{\beta}_{pz}^2 = 0.01$ y $A_p = 0$. (b) Misma situación que en el panel (a) pero para $A_p = 4$.

satisfacen la relación de dispersión corresponderá a un rápido amortiguamiento de las mismas en la región $1 < y < 7$, en donde γ alcanza un valor mínimo considerable $\gamma_{\min} \sim -0.1$.

Por otro lado, en la Fig. 5.2(b) se observa la parte imaginaria $\gamma(y)$ de las frecuencias que son solución de la relación de dispersión mostrada en la curva sólida de la Fig. 5.1(c), para los parámetros $U_p = 0.3$, $\bar{\beta}_{p\perp}^2 = 0.05 = 5\bar{\beta}_{p\parallel}^2$, con lo cual se tiene $A_p = 4$. En la figura se aprecia que la combinación de parámetros, al contrario que en el caso $A_p = 0$, produce regiones tanto de absorción resonante ($\gamma < 0$), como regiones de inestabilidad ($\gamma > 0$). Se observa que existe una tasa de crecimiento positiva solamente en una estrecha zona alrededor de $y \sim 1.5$ (con $\gamma_{\max} \sim 0.01$), mientras que para $y > 2$ la tasa de crecimiento se vuelve negativa (con $\gamma_{\min} \sim -0.03$) y por lo tanto aparece una región de absorción resonante. A partir de (4.68)–(4.71), dependiendo del perfil inicial de la densidad espectral de energía magnética ε_y , se puede observar que ambos efectos competirán para dar como resultado cambios macroscópicos en la función de distribución de los protones.

5.1. Solución numérica del sistema cuasilineal

Una vez conocidas y analizadas las partes real e imaginaria de la relación de dispersión para este caso simple de electrones y protones, lo que queda es resolver el sistema cuasilineal [Ecs. (4.68)–(4.71)] numéricamente a partir de una situación inicial dada. Con este fin, se ha discretizado el espacio y en $N_y = 700$ puntos para $0 < y < 7$. Por lo tanto, la separación entre puntos de la grilla corresponde a $dy = 0.01$. El rango en el espacio y fue elegido debido a que en los casos de interés, para $y > 7$, la parte imaginaria de las frecuencias es prácticamente nula y se espera que números de onda superiores no aportaren apreciablemente a la dinámica [ver Fig. 5.2]. Además, el paso de tiempo se ha elegido en $d\tau = 0.025$. De esta manera, conociendo la densidad de energía espectral $\varepsilon_y(\tau)$, más los parámetros $U_p(\tau)$, $\bar{\beta}_{p\perp}(\tau)$ y $\bar{\beta}_{p\parallel}(\tau)$ en cierto instante de tiempo τ , se puede resolver la relación de dispersión [Ecs (4.72) y (4.73)] para conocer x y γ como función de y en el tiempo τ . Luego, calculando explícitamente las integrales $\bar{\mathcal{K}}_j^\mu$ dadas por (4.74)–(4.76), se obtienen explícitamente las derivadas temporales de cada uno de los parámetros de la función de distribución. Para integrar numéricamente las ecuaciones se ha utilizado un método Runge-Kutta de cuarto orden [119].

Se realizó la integración numérica para una gran variedad de elecciones tanto en los parámetros iniciales del sistema como en la rama de la relación de dispersión elegida, así como también en la longitud del intervalo de tiempo a considerar. El código fue realizado en el lenguaje de programación C++. En esta sección se muestran los resultados a partir de las dos elecciones que entregaron los resultados más interesantes de analizar. Ambos casos corresponden a los parámetros de plasma iniciales

$$U_p(\tau = 0) = 0.3, \quad \bar{\beta}_{p\parallel}^2(\tau = 0) = 0.01, \quad A_p(\tau = 0) = 4, \quad (5.3)$$

y la diferencia radica en la elección de la densidad espectral de energía magnética.

Los casos elegidos fueron:

$$\text{Caso 1 : } \quad \varepsilon_y(\tau = 0) = 0.35 \exp(-5y^2), \quad (5.4)$$

$$\text{Caso 2 : } \quad \varepsilon_y(\tau = 0) = \frac{0.062}{1 + (0.5y)^{2.75}}, \quad (5.5)$$

ambos para la rama de Alfvén en la relación de dispersión. Esto es, las frecuencias correspondientes a las curvas sólidas en el primer cuadrante $y > 0$ en las Figs. 5.1(b) y 5.2(b). Con esta elección, en ambos casos la situación inicial corresponde a una equipartición de la energía (ver Apéndice C), donde las partículas y las ondas tienen la misma cantidad de energía libre disponible para el intercambio. Así se evitan sesgos al respecto y los traspasos de energía por las interacciones onda-partícula no estarán determinados por este factor de antemano. Es importante mencionar que, debido a que las derivadas temporales de los parámetros del plasma, así como también la derivada de la densidad espectral de energía dependen de $\gamma(x, y)$ [ver Ecs. (4.68)–(4.76)], y con los parámetros escogidos $|\gamma| \sim 10^{-2}$, para obtener resultados considerables se requiere una integración numérica hasta al menos $\tau \sim \gamma^{-1} \sim 10^2$. Luego, considerar un intervalo de integración hasta $\tau = 10^3$ parece ser razonable, y es la elección que se tomó para los dos casos estudiados.

5.1.1. Caso 1: Espectro inicial gaussiano

El primer caso de estudio interesante una vez fijados los parámetros del plasma [Ec. (5.3)] corresponde a perturbaciones electromagnéticas con un perfil gaussiano [Ec. (5.4)]. Al considerar un espectro gaussiano que decae rápidamente, se tiene una situación en la cual la mayor cantidad de la energía del campo electromagnético corresponde a números de onda pequeños $y < 1$, y la energía disponible para $y > 2$ es prácticamente nula. Luego, dada la forma de $\gamma(x, y)$ para la rama de Alfvén

[Fig. 5.2(b)], solamente una porción minoritaria de las ondas correspondientes al espectro inicial interactuará efectivamente con las partículas.

Como primer resultado interesante, se observa que la derivada temporal de U_p [correspondiente a $\overline{\mathcal{K}}_{1z}^p(\tau)$ en (4.74)] es prácticamente nula. Así, la deriva de los protones no presenta ningún cambio apreciable hasta $\tau = 1000$, permaneciendo constante. Por otro lado, la evolución de las temperaturas de los protones se muestra en la

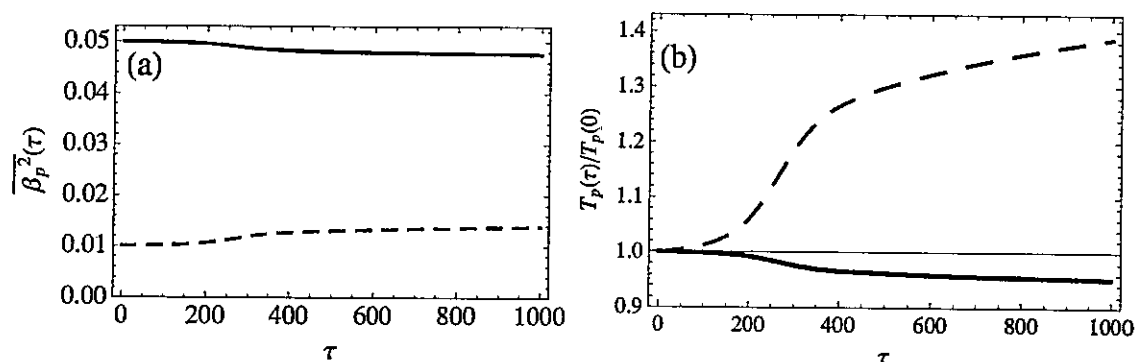


Figura 5.3: Temperaturas de los los protones en función del tiempo. Curva sólida: temperatura perpendicular. Curva segmentada: temperatura paralela. (a) Parámetros $\beta_{p\perp}^2$ y $\beta_{p\parallel}^2$. (b) Temperaturas $T_{p\perp}$ y $T_{p\parallel}$ normalizadas respecto a sus respectivos valores iniciales.

Fig. 5.3(a). Se observa evidencia de un leve enfriamiento perpendicular (curva sólida en la figura) y al mismo tiempo un calentamiento del plasma en la dirección paralela al campo de fondo (curva segmentada en la misma figura). Se observa además en la figura que la mayor parte de los procesos de interacción onda-partícula se dan durante la primera mitad del intervalo considerado. Para tiempos superiores, $\tau > 400$, tanto el calentamiento como el enfriamiento se saturan y el sistema aparentemente se acerca lentamente a un estado de equilibrio. En la Fig. 5.3(b) se muestra la evolución de ambas temperaturas con respecto a su valor inicial. Se observa con claridad que la temperatura paralela (curva segmentada) sufre cambios a medida que las ondas se propagan a través del plasma y su valor final es aproximadamente 1.4

veces mayor que el inicial. En el caso perpendicular (curva sólida) el enfriamiento es mucho menor y alcanza alrededor de un 5% para el final de intervalo estudiado. Se nota también con mayor detalle la saturación para tiempos grandes mayores que $t \sim 400$. Además, en la Fig. 5.4 se muestra la anisotropía térmica como función del tiempo. Debido a que la temperatura perpendicular (inicialmente mayor) disminuye a medida que el tiempo transcurre, y la temperatura paralela (inicialmente menor) aumenta, se observa que la distribución de velocidades de los protones, inicialmente con una anisotropía $A_p = 4$, disminuye monótonamente hasta un valor aproximado de $A_p \sim 2.5$ para $\tau \sim 1000$.

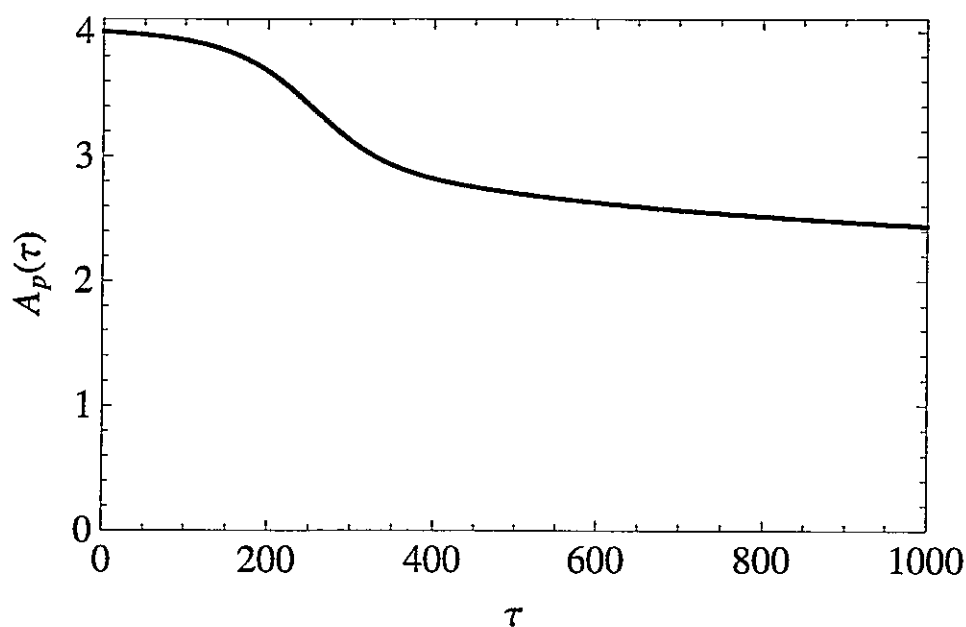


Figura 5.4: Anisotropía térmica de la distribución de protones como función del tiempo.

Finalmente, y a partir de la ecuación para densidad espectral de energía magnética [Ec. (4.71)] que cierra el sistema de ecuaciones, la energía libre disponible debido a la anisotropía térmica de la función de distribución de protones es absorbida por el campo electromagnético para satisfacer la conservación de energía [ver apéndice C]

total del sistema. En la Fig. 5.5 se muestra ϵ_y en torno a $y \sim 1.4$ para el inicio ($\tau = 0$ correspondiente a la curva punteada), la mitad ($\tau = 500$ correspondiente a la curva sólida) y para el final ($\tau = 1000$ correspondiente a la curva segmentada) del intervalo de integración numérica. Se observa que el espectro, inicialmente gaussiano cambia debido a la presencia de zonas de absorción resonante e inestabilidades [ver Fig. 5.2(b)]. Aun cuando las regiones de absorción son más extensas que las zonas inestables, debido al perfil gaussiano inicial rápidamente decreciente, como se dijo anteriormente, para $y > 2$ los modos electromagnéticos tienen muy poca energía disponible para el intercambio y solamente una porción minoritaria de las ondas iniciales interactúan con los protones. Por lo tanto, el efecto neto para este caso corresponde a la generación de inestabilidades para el rango $1 < y < 1.6$, aproximadamente.

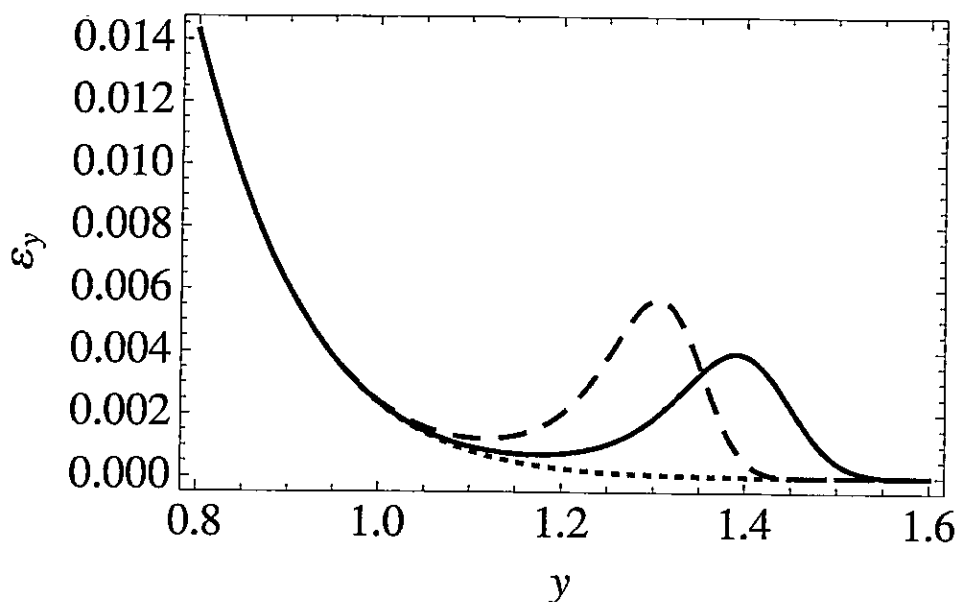


Figura 5.5: Densidad espectral de energía magnética normalizada para $\tau = 0$ (curva punteada), $\tau = 500$ (curva sólida) y $\tau = 1000$ (curva segmentada).

La Fig. 5.5 muestra que la relajación de la anisotropía térmica de las partículas observada en la Fig. 5.4 se traduce en una transferencia de energía desde el plas-

ma al campo electromagnético. Luego, el espectro inicialmente gaussiano cambia y aparecen ondas con números de onda mayores que los iniciales. De esta manera, en respuesta al paso de las ondas el plasma evoluciona transfiriendo parte de su energía hacia las ondas, y al mismo tiempo, debido a la relajación de la anisotropía térmica, se aproxima lentamente al equilibrio. Es importante notar que, si bien debido al

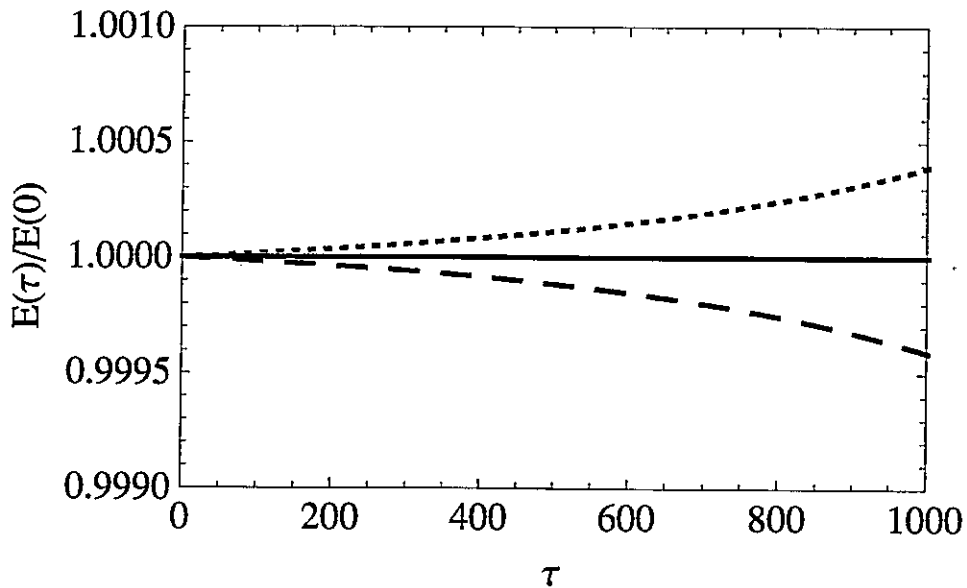


Figura 5.6: Energías del sistema como función del tiempo normalizadas a sus valores iniciales. Las curvas segmentada, punteada y sólida representan las energías del plasma, del campo y energía total, respectivamente.

calentamiento paralelo del plasma y al leve enfriamiento perpendicular del mismo, pudiese parecer que el plasma está ganando energía, absorbiéndola a expensas las ondas, el hecho de que surjan modos más altos, en regiones de número de ondas donde inicialmente existía una baja energía disponible, es una señal clara de que el traspaso de energía es desde las partículas hacia las ondas y no en el sentido contrario. Para remarcar este hecho, en la Fig. 5.6 se muestran las energías de las partículas y de las ondas, como también la energía total (curva segmentada, punteada y sólida, respectivamente) como función de sus valores iniciales. Si bien los números son pequeños, se

observa claramente que la energía total del sistema se mantiene constante, mientras que la energía del campo crece a expensas de la energía disponible en el plasma.

5.1.2. Caso 2: Espectro inicial tipo lorentziano

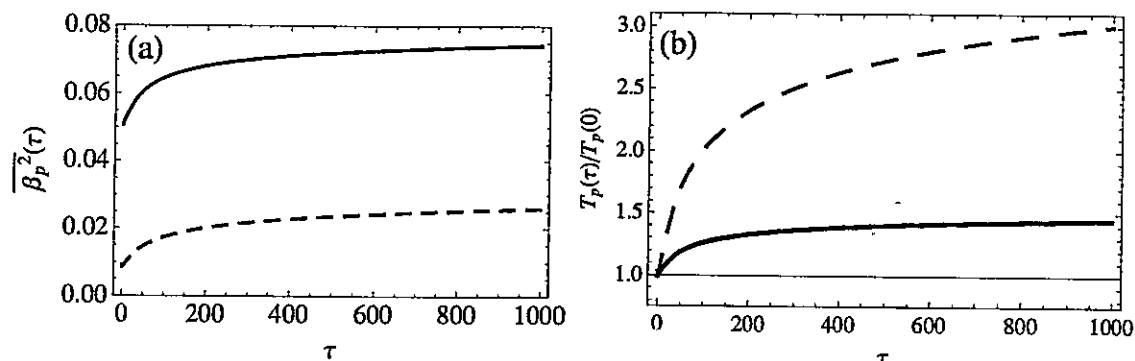


Figura 5.7: Temperaturas de los protones en función del tiempo. Curva sólida: temperatura perpendicular. Curva segmentada: temperatura paralela. (a) Parámetros $\overline{\beta}_{p\perp}^2$ y $\overline{\beta}_{p\parallel}^2$. (b) Temperaturas $T_{p\perp}$ y $T_{p\parallel}$ normalizadas respecto a sus respectivos valores iniciales.

Teniendo en cuenta los resultados de la integración numérica cuasilineal a partir de la elección gaussiana, resulta interesante notar que debido a que el espectro es acotado y rápidamente decreciente, la interacción entre ondas y partículas es bastante reducida. Para estudiar una situación en que las regiones efectivas de interacción no sean tan reducidas, y al mismo tiempo no aumentar la energía disponible en el campo electromagnético, como segundo caso se ha revisado un espectro magnético de menor amplitud pero que decae lentamente. Para esto se ha escogido una función tipo lorentziana (5.5), que para $y \ll 1$ tiende a su valor máximo en $y = 0$, y para $y \gg 1$ se comporta como una ley de potencias $\varepsilon_y \sim y^{-\alpha}$ (y en este caso particular $\alpha = 2.75$). De esta manera, con el espectro escogido se tiene la misma energía que en el caso gaussiano, se tiene que la mayor cantidad de energía magnética corresponde a números de onda de orden $y \sim 1$, pero en este caso además los modos con número

de onda mayor tienen una cantidad de energía razonable para el intercambio. Así, ambas regiones de $\gamma(x, y) \neq 0$, correspondientes a inestabilidades $1 < y < 2$ y absorción $y > 2$ [ver Fig. 5.2(b)], tendrán suficiente energía disponible como para que se observen al mismo tiempo ambos efectos, de crecimiento y amortiguamiento de las ondas, debido a la interacción resonante con las partículas.

Dado que los parámetros del plasma son los mismos que en el caso anterior, en la presente solución numérica del sistema cuasilineal la derivada temporal de $U_p(t)$ (4.74) sigue siendo nula y por lo tanto, para este caso, $U_p = 0.3$ también permanece constante durante todo el intervalo hasta $\tau = 1000$. En este punto es importante señalar que, además de la dependencia en los parámetros iniciales del plasma, la conservación de momentum [ver apéndice C, sección C.3] juega un rol importante. Este tema se abordará más en detalle hacia el final de este capítulo.

La evolución de las temperaturas se muestra en la Fig. 5.7, donde las curvas segmentada y sólida representan las temperaturas paralela y perpendicular, respectivamente. Se observa en la Fig. 5.7(a) un proceso de aumento de ambas temperaturas, en donde la gran parte del fenómeno ocurre para tiempos menores que $\tau \sim 250$. Para tiempos mayores, el sistema comienza a saturarse. En la Fig. 5.7(b) se observa que este calentamiento es mucho más efectivo en el caso de la temperatura paralela $T_{p\parallel}(\tau)$. Mientras la temperatura perpendicular se eleva hasta $T_{p\perp}(\tau = 1000) \sim 1.45T_{p\perp}(0)$, el calentamiento paralelo del plasma alcanza hasta casi 3 veces la temperatura inicial $T_{p\parallel}(0)$. De la misma forma que en el caso gaussiano, este calentamiento anisotrópico preferencialmente paralelo va acompañado de una relajación de la anisotropía térmica inicial de la distribución de protones. En la Fig. 5.8(a) se observa que la anisotropía A_p , inicialmente igual a 4, disminuye hasta llegar a un valor ligeramente superior a $A_p \sim 2$ hacia el final del intervalo de integración. Sin embargo, aunque

el sistema pierde anisotropía a medida que el tiempo transcurre, inicialmente, para $0 < \tau < 5$ el calentamiento perpendicular es mayor que el paralelo y se produce un aumento de la anisotropía hasta un valor $A_p \sim 5$ en $\tau \sim 2$, tal como aparece en la Fig. 5.8(b), para luego dar paso al proceso de relajación ya mencionado. Además, tal como ocurre para las temperaturas, se observa en la figura que la mayor parte de los procesos de interacción onda-partícula ocurren antes de $\tau = 250$, y que en el resto del intervalo los procesos de absorción resonante saturan, llevando el sistema a un estado de equilibrio metaestable, en el cual pareciera que $A_p = 2$ es el valor asintótico.

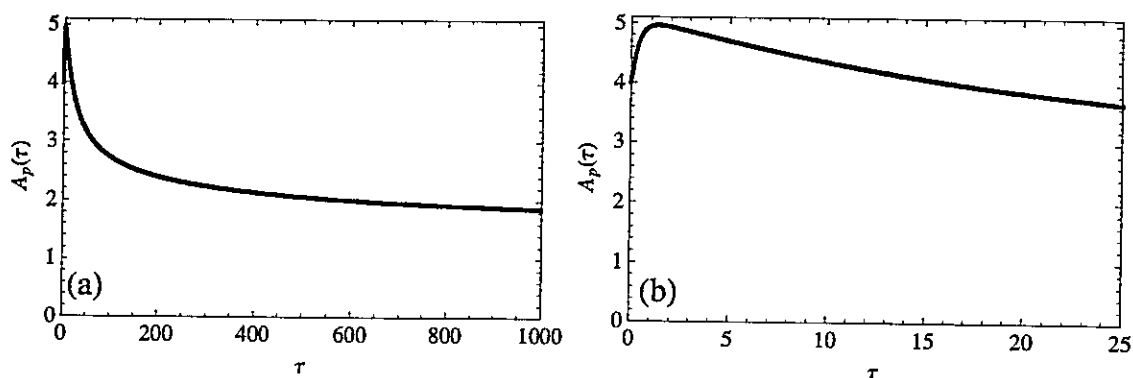


Figura 5.8: (a) Anisotropía térmica de protones $A_p(\tau)$ como función del tiempo normalizado para la solución con espectro inicial lorentziano. (b) La misma situación que en (a), pero hasta $\tau = 25$. Con este nivel de detalle se observa que en los primeros instantes de tiempo la anisotropía crece antes de comenzar a decrecer monótonamente.

Debido a la conservación de energía, el calentamiento del plasma debe ser a expensas de la energía electromagnética disponible y verse reflejado en una evolución del espectro lorentziano inicialmente considerado. La Fig. 5.9 muestra que el espectro de energía magnética, representado por la curva punteada en la figura, ya en $\tau = 10$ (curva sólida) ha disminuido su amplitud para $y > 2$ y además se han generado inestabilidades alrededor de $y \sim 1.5$. El proceso continúa y en $\tau = 100$ (curva

segmentada) prácticamente toda la energía disponible para los modos con $y > 1.6$ ha sido absorbida por el plasma y la región de inestabilidad se ha movido hacia la izquierda del espectro. Finalmente, la curva punteada y segmentada representa el espectro para $\tau = 1000$. Se observa que en la zona $\gamma(x, y) \neq 0$ [ver Fig. 5.2(b)] la densidad de energía magnética ha sido reducida a un estrecho rango de ondas con $y \sim 1$, en los cuales se concentra la mayor parte de la energía restante, y ondas con números de onda mayores para las cuales las energías son prácticamente nulas.

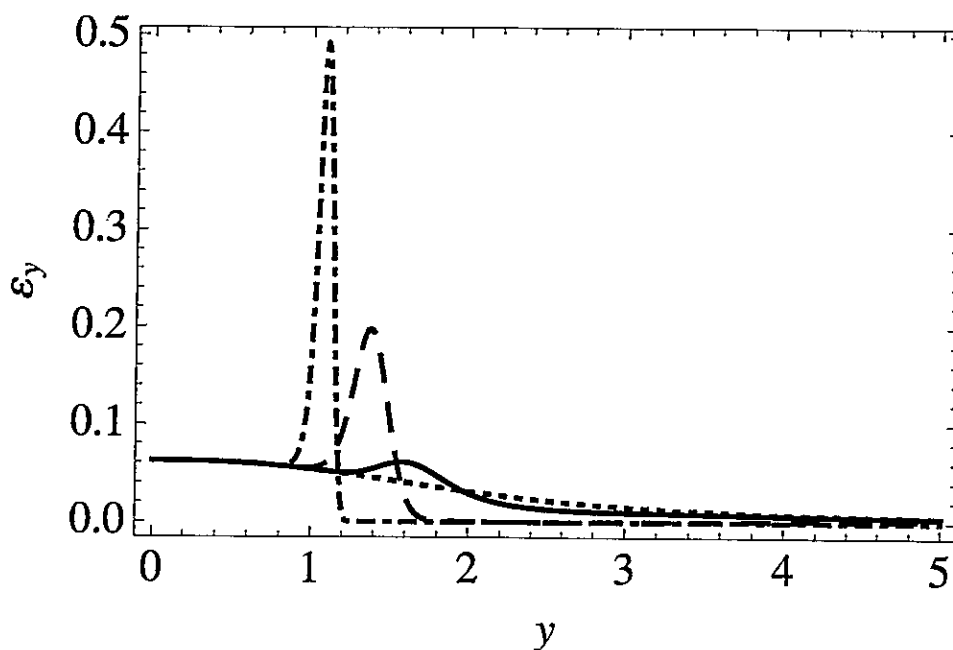


Figura 5.9: Densidad espectral de energía magnética normalizada para $\tau = 0$ (curva punteada), $\tau = 1$ (curva sólida), $\tau = 100$ (curva segmentada) y $\tau = 1000$ (curva punteada y segmentada).

Es importante notar que, al igual que en el caso gaussiano de la sección 5.1.1, estos cambios en las temperaturas, la anisotropía y la densidad espectral magnética satisfacen la ley de conservación de energía. En la Fig. 5.10 se muestran las energías correspondientes al campo, el plasma y la energía total, normalizadas a sus respectivos valores iniciales, como funciones del tiempo normalizado. Se observa que a medida

que la energía contenida en el campo electromagnético disminuye (curva punteada), el plasma se calienta y gana energía (curva segmentada), manteniéndose la energía total (curva sólida) constante. Ahora bien, como la mayor parte de la energía del espectro corresponde a $y < 1$, y en la región de intercambio la energía disponible es reducida, el calentamiento del plasma y su respectivo aumento de energía no supera el 11%. De la misma forma, la energía final del campo magnético no es inferior al 89% del total inicial. Así, hasta al menos el 0.01% la energía del plasma numéricamente se conserva consistentemente a lo largo de todo el intervalo de integración numérica.

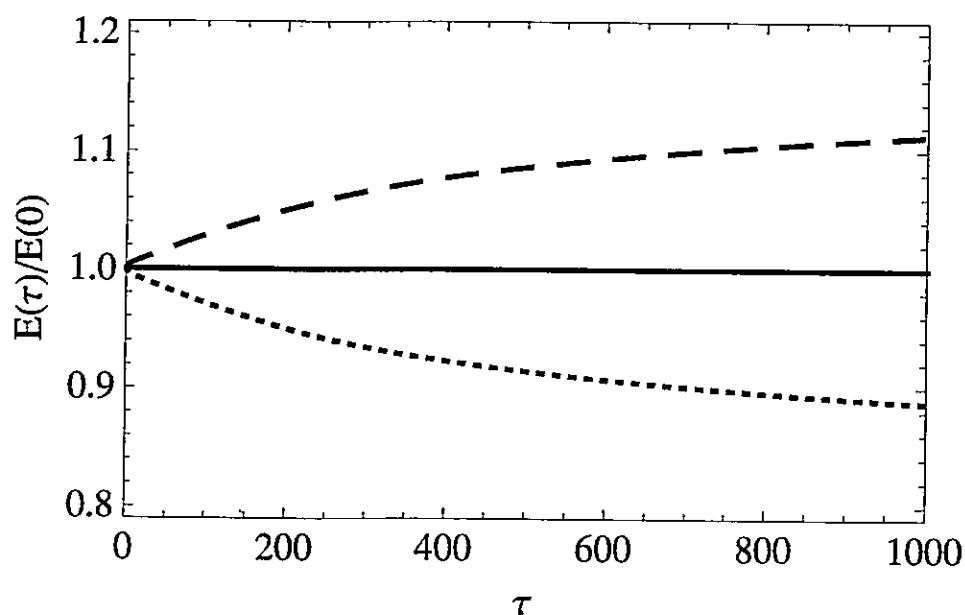


Figura 5.10: Energías del sistema como función del tiempo normalizadas a sus valores iniciales. La curvas segmentada, punteada y sólida representan las energías del plasma, del campo y energía total, respectivamente.

5.2. - Resumen y discusión

Para un plasma de electrones y protones bi-Maxwelliano, se ha integrado numéricamente el sistema de ecuaciones cuasilineales obtenidas en el Cap. 4 hasta $\tau = 1000$, para dos casos que comparten los parámetros iniciales del plasma, pero poseen distintos espectros magnéticos (uno gaussiano y otro lorentziano) iniciales. Para γ pequeño ($\gamma_{\max} \sim 10^{-2}$) la evolución temporal del sistema es lenta para ambos casos. Sin embargo, como en el caso lorentziano las regiones de interacción efectiva son más extensas, entonces los efectos de calentamiento del plasma son más eficientes y más rápidos que en el caso gaussiano.

Debido a que todas las expresiones que conforman el sistema de ecuaciones dinámicas (4.68)–(4.71) dependen del producto $\gamma \varepsilon_y$, más que el valor negativo o positivo de la parte imaginaria de las frecuencias, la cantidad importante resulta ser la derivada temporal de ε_y , igual a $2\gamma \varepsilon_y$. En cualquier región en que esta cantidad sea cercana a cero, aun cuando pudiese existir una inestabilidad, no ocurrirá ninguna interacción onda-partícula. Así, para el caso gaussiano, en que $\gamma > 0$ es la región efectiva de interacción, entonces el resultado neto fue un crecimiento de los modos electromagnéticos a costa de un enfriamiento perpendicular del plasma. Por otro lado, para el caso lorentziano, como la región más extensa del espectro se traslapa con la región $\gamma < 0$, entonces el efecto neto es un calentamiento anisotrópico del plasma a expensas de la energía libre disponible en las ondas. En ambos casos quedó demostrado, tanto analítica como teóricamente, que las leyes de conservación de energía se satisfacen dentro del marco de la teoría cuasilineal y por lo tanto el sistema es autoconsistente.

Con respecto a la anisotropía, debido a que una de las fuentes de energía libre

corresponde a la anisotropía térmica de la función de distribución de velocidades de los protones, al evolucionar el sistema se evidenció que tanto para el caso gaussiano de enfriamiento perpendicular, como para el segundo caso que presentó calentamiento en ambas temperaturas, el sistema se movió lentamente hacia un estado de equilibrio y la anisotropía térmica disminuyó considerablemente respecto a su valor inicial.

Finalmente, en ambos casos la velocidad de deriva U_p se mantuvo constante a lo largo de todo el intervalo de integración. Numéricamente, y como ya fue mencionado, la razón de este comportamiento es que la función $\overline{\mathcal{K}}_{1z}^p(\tau)$ es prácticamente nula para cualquier valor de U_p . Físicamente este hecho se explica a través de la ley de conservación de momentum [ver apéndice C, sección C.3]. Como en la aproximación actual se consideran ondas tales que $V_{Ap}^2/c^2 \ll 1$, entonces el campo electromagnético no transmite momentum y, para satisfacer la ley de conservación de momentum, el momentum total del plasma debe permanecer constante. Luego, como en este caso existe solamente una especie iónica (los protones), la velocidad de deriva de esa especie no experimenta ningún cambio. Salvo errores numéricos menores al 1 %, ésta fue la situación para los dos casos estudiados.

Este último hecho sobre la conservación de momentum abre la siguiente interrogante: Al momento de incluir otras especies iónicas en el sistema, con el fin de satisfacer la conservación de momentum, ¿se mantendrán todas las velocidades de deriva constantes o existirán procesos de aceleración preferencial de alguna especie particular? Como se puede concluir a partir del presente análisis de un plasma compuesto de electrones y protones, al no haber otra especie que aporte con sus propias regiones de absorción o emisión de energía electromagnética, los procesos de cascada propuestos y discutidos en el Cap. 3 no tienen cabida y se hace necesario continuar el estudio incluyendo al menos una especie iónica distinta a los protones. En ese caso,

¿qué pasará con las temperaturas de las distintas especies si las regiones de absorción e inestabilidades corresponden a las estudiadas en ese capítulo? ¿Se podrán encontrar así evidencias de la cascada de energía? Estas preguntas se intentarán responder en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Evolución cuasilineal para un plasma tipo viento solar [†]

Tal como se discutió al final del capítulo anterior, el análisis cuasilineal de la interacción entre protones y ondas circularmente polarizadas resulta ser insuficiente para encontrar y estudiar el efecto tipo cascada propuesto en las Refs. [60–62] y discutido a lo largo de este trabajo. Además, el hecho de tener solamente una especie iónica también restringe el estudio que se pueda hacer respecto a la aceleración de iones masivos. Luego, se hace necesario incluir al menos una segunda especie iónica en el análisis. En este capítulo, se considerará entonces un plasma de electrones, protones y partículas α (iones He^{+2}), considerando que son la segunda especie iónica de mayor concentración en el viento solar. En estas condiciones, se realizará el mismo estudio cuasilineal desarrollado en el capítulo anterior. El estudio en detalle de la relación de dispersión para este plasma en particular ya fue hecho en el Cap. 3, de modo que este capítulo se concentrará en análisis del modelo cuasilineal.

[†]Los resultados numéricos de este capítulo fueron publicados en el artículo “*Study of the cascading effect during the acceleration and heating of ions in the solar wind*”, P. S. Moya, V. Muñoz, J. Rogan and J. A. Valdivia, *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* **73**, 1390–1397 (2011). [108]

6.1. Relación de dispersión

Utilizando la normalización introducida en la sección 4.2.1, la relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas, con polarización izquierda y propagándose en la dirección del campo magnético de fondo dada por (4.72), en el caso de un plasma de electrones, protones y partículas α semifríos se expresa como

$$y^2 = \frac{(x - yU_p)^2}{1 - (x - yU_p)} + \frac{4\eta_\alpha(x - yU_\alpha)^2}{1 - 2(x - yU_\alpha)}, \quad (6.1)$$

donde U_p, U_α corresponden a las derivas paralelas de protones y iones He^{+2} , respectivamente, y η_α es la concentración de las partículas α respecto a los protones. Dado que para las zonas de interés en el viento solar la concentración de partículas α corresponde a un 4% aproximado, a lo largo de este capítulo siempre se utilizará el valor de $\eta_\alpha = 0.04$.

A diferencia del Cap. 3, debido a que las ecuaciones cuasilineales [Ecs. (4.68)–(4.71)] corresponden a integrales en y , en vez de resolver la relación de dispersión como número de onda en función de la frecuencia $y(x)$, ahora se resuelve la relación de dispersión para $x(y)$. En la Fig. 6.1 se muestran las tres ramas de la relación de dispersión para distintos valores de U_p y U_α . En la Fig. 6.1(a) se observan las tres soluciones de la relación de dispersión, tanto para y positivo como $y < 0$, para $U_p = 0.1$ y $U_\alpha = 0.3$. A diferencia de lo ocurrido en el caso de electrones y protones mostrado en la Fig. 5.1, al incluir una segunda especie iónica aparece una tercera solución que en la figura se representa por la curva punteada. Dependiendo de las velocidades de deriva de las especies, esta nueva rama se acerca o se aleja de la rama de Alfvén (curva sólida) generando o eliminando bandas de frecuencias prohibidas.

La situación de la rama de Alfvén en función de las velocidades de deriva se muestra en las figuras 6.1(b), (c) y (d). En el panel (b) se observa que la ausencia de

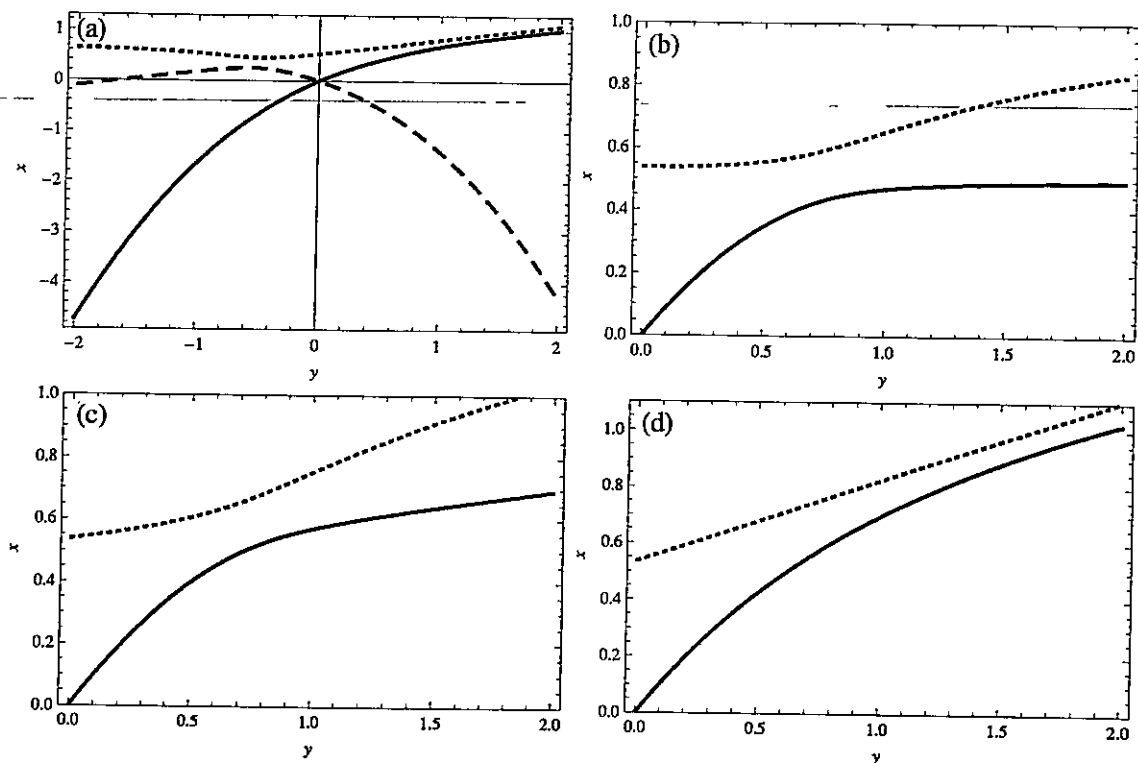


Figura 6.1: (a) Soluciones de la relación de dispersión para ondas con polarización circular izquierda propagándose a través de un plasma compuesto de electrones, protones y partículas α con derivas normalizadas $U_p = 0.1$ y $U_\alpha = 0.3$. (b) Misma relación de dispersión en el cuadrante $x, y > 0$ pero sin derivas paralelas $U_p = U_\alpha = 0$. (c) Misma relación de dispersión en el cuadrante $x, y > 0$, considerando derivas iguales respecto a un sistema fijo $U_p = U_\alpha = 0.1$. (d) Misma relación de dispersión en el cuadrante $x, y > 0$, para $U_p = 0.1$, $U_\alpha = 0.3$, considerando velocidades de deriva respecto al laboratorio y además velocidades de deriva relativas entre las especies.

deriva en ambas especies iónicas causa que ambas ramas (la sólida y la segmentada) tiendan asintóticamente a las frecuencias de ciclotrón de partículas α y protones, respectivamente. Además, tal como se discutió en el Cap. 3, este mismo hecho genera la aparición de una banda prohibida entre $x = 0.5$ (la girofrecuencia de los iones He^{+2}) y una frecuencia de corte $x_c \sim 0.54$, para el valor de η_α , que separa ambas ramas. Ahora, si se incluyen derivas, iguales para ambas especies, respecto a un sistema de referencia fijo, el correspondiente corrimiento Doppler elimina la banda

prohibida tal como se ve en el panel (c), donde $U_p = U_\alpha = 0.1$. Finalmente, en el panel (d), con $U_p = 0.1, U_\alpha = 0.3$, se muestra que, cuando además existe una deriva relativa entre las especies, además de eliminarse la banda prohibida, el hecho de que se cumpla $U_\alpha - U_p > 0$ acerca la rama de Alfvén a la rama de frecuencias más altas. Luego, para el mismo valor del número de onda y se tienen frecuencias de Alfvén más altas. Los alcances de este hecho fueron analizados en el Cap. 3.

Por otro lado, para la relación de dispersión (6.1), la parte imaginaria de las frecuencias $\gamma(x, y)$ viene dada por (4.73), y en este caso es

$$\gamma = F_\alpha(x, y)^{-1} \left[\frac{\pi^{1/2}}{y\beta_{\parallel p}} [A_p(x - 1 - yU_p) + x - yU_p] e^{-\text{Re}[\varphi_p]^2} + \frac{\eta_\alpha \pi^{1/2}}{2y\beta_{\parallel \alpha}} [A_\alpha(2x - 1 - 2yU_\alpha) + 2(x - yU_\alpha)] e^{-\text{Re}[\varphi_\alpha]^2} \right], \quad (6.2)$$

donde

$$F_\alpha(x, y) = \frac{(x - yU_p)[2 - (x - yU_p)]}{[1 - (x - yU_p)]^2} + \frac{8\eta_\alpha(x - yU_\alpha)[1 - (x - yU_\alpha)]}{[1 - 2(x - yU_\alpha)]^2}, \quad (6.3)$$

y

$$\text{Re}[\varphi_p] = -\frac{1 - (x - yU_p)}{y\beta_{\parallel p}}, \quad \text{Re}[\varphi_\alpha] = -\frac{1 - 2(x - yU_\alpha)}{2y\beta_{\parallel \alpha}}. \quad (6.4)$$

Al igual que en el caso de electrones y protones del Cap. 5, debido a los factores exponenciales dominantes para número de onda grande, en la zona $y > 0$ existe una región acotada en la cual se tiene $\gamma(x, y) \neq 0$. El detalle de la existencia de regiones con tasa de crecimiento ($\gamma > 0$) o amortiguamiento ($\gamma < 0$) dependerá entonces del valor particular de los parámetros del plasma. A diferencia de lo que ocurre al considerar solamente protones, al tener al menos dos especies iónicas (con velocidades de deriva, temperaturas y anisotropías térmicas diferentes) se obtiene una gran variedad de combinaciones de parámetros con los cuales pueden generarse y coexistir regiones tanto de inestabilidad como de absorción resonante. En particular, como

cada especie posee su propia girofrecuencia, ondas en distintos rangos de números de onda (y por lo tanto de frecuencias) son capaces de interactuar efectivamente con una u otra especie. Además, dada la dependencia explícita de γ como función de x , el hecho de que la existencia de velocidades de deriva relativa entre las especies transforme las ramas de la relación de dispersión (y por lo tanto el valor de x), la existencia de derivas también influye en el resultado final para la parte imaginaria de las frecuencias.

En la Fig. 6.2 se muestra la parte imaginaria de las frecuencias para cada una de las ramas de la relación de dispersión que se observan en la Fig. 6.1, para los valores $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, valores particulares que han sido escogidos siguiendo las referencias [60-62, 66, 104], y cuatro elecciones para A_p , A_α , U_α y U_p en el rango de los valores discutidos en la Sec. 2.3. Si bien hay tres soluciones de la relación de dispersión, en el presente trabajo el análisis es solamente en relación a la rama de Alfvén (representada por la curva sólida en las figuras), ya que ésta es la rama que aquí se utiliza en la solución de las ecuaciones cuasilineales. En el panel (a) se muestra el caso sin anisotropías térmicas ni derivas en ninguna de las dos especies iónicas. En este caso, la rama de Alfvén posee una gran región de absorción resonante, con un mínimo $\gamma \sim -0.025$ en $y \sim 0.85$, y no se presentan inestabilidades para ningún número de onda $y > 0$. Una situación similar se observa cuando no hay anisotropía térmica para ninguna especie, pero sí existe una deriva relativa $U_\alpha - U_p = 0.2$ entre las especies [panel (b)]. En ese caso, la rama de Alfvén también tiene solamente una región de absorción pero, debido a la modificación de las ramas y a la eliminación de la banda prohibida presente en el caso $U_p = U_\alpha$, ahora el mínimo es $\gamma \sim -0.013$ para $y \sim 1.3$.

Como es sabido, la aparición de inestabilidades ión-ciclotrón en este tipo de plas-

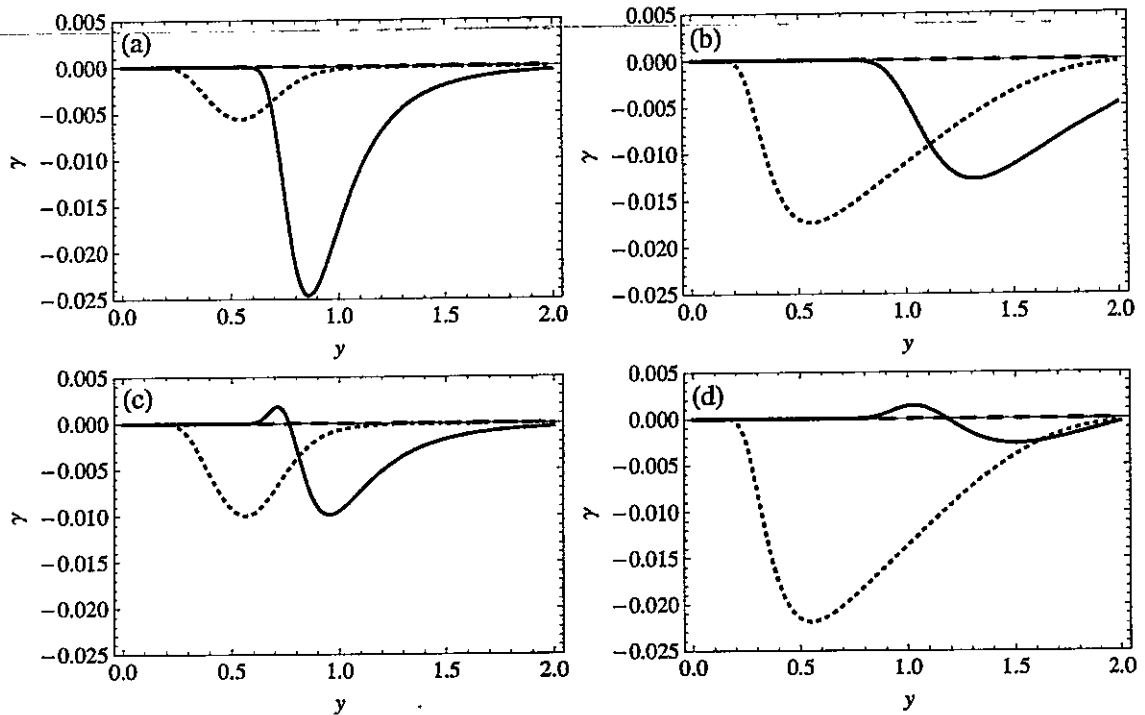


Figura 6.2: Parte imaginaria de las frecuencias para las soluciones de la relación de dispersión (6.1). Las curvas sólidas, punteadas y segmentadas representan las soluciones correspondientes mostradas en la Fig. 6.1. Los parámetros del plasma escogidos son: (a) Caso sin deriva ni anisotropías: $U_p = 0$, $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $A_p = 0$ y $U_\alpha = 0$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_\alpha = 0$. (b) Caso con deriva entre las especies pero sin anisotropías: $U_p = 0.1$, $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $A_p = 0$ y $U_\alpha = 0.3$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_\alpha = 0$. (c) Caso sin deriva pero con partículas α anisotrópicas: $U_p = 0$, $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $A_p = 0$ y $U_\alpha = 0$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_\alpha = 7$. (d) Caso con deriva relativa entre las especies y además partículas α anisotrópicas: $U_p = 0.1$, $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $A_p = 0$ y $U_\alpha = 0.3$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_\alpha = 5$.

mas se debe a la anisotropía térmica de alguna de las especies. En la Fig. 6.2(c) se muestra que, con una anisotropía $A_\alpha = 7$ para los iones He^{+2} , existe una región de inestabilidad en ausencia de velocidades de deriva relativa entre las especies. A diferencia de lo que se muestra en el panel (a), el hecho de que las partículas α sean anisotrópicas, produce una separación de la región de absorción mostrada en (a) en dos zonas. Una región pequeña de inestabilidades aparece centrada en $y \sim 0.7$, y una

región de absorción con un mínimo $\gamma \sim -0.01$ para $y \sim 1$. Esto se debe a que, si bien las partículas α son anisotrópicas y por tanto esa fuente de energía libre genera una región de inestabilidades, los protones con A_p aportan a $\gamma(x, y)$ solamente con absorción. Luego, el resultado final de la parte imaginaria de las frecuencias corresponde a dos regiones bien marcadas. Una región de inestabilidades en los rangos de frecuencia relativos a las partículas α , y otra de absorción resonante debida a los protones. Finalmente, en el panel (d) se muestra el caso en que se tiene el efecto combinado de una anisotropía térmica $A_\alpha = 5$ y una deriva relativa $U_\alpha - U_p = 0.2$ entre las especies. Se observa en el gráfico que la anisotropía genera una región de inestabilidad para $y \sim 1$ (debido a los iones He^{+2} anisotrópicos) y además se tiene una región de absorción mayor centrada en $y \sim 1.5$ (debido a los protones).

A partir del análisis de los cuatro casos escogidos en la Fig. 6.2, es importante notar que la existencia de una velocidad de deriva relativa entre las especies, genera una región de inestabilidad con un máximo comparable al caso (c) de la Fig. 6.2, en el cual la anisotropía térmica de las partículas α es igual a 7, pero con un valor de $A_\alpha = 5$ que es menor. Luego, al considerar distribuciones de velocidad tales que $U_\alpha \neq U_p$, para poder generar regiones de inestabilidad tipo iónica-ciclotrónica no es necesario considerar distribuciones con anisotropías térmicas tan elevadas, sino que el efecto combinado de derivas entre especies y anisotropías térmicas relativamente pequeñas, puede llegar a producir inestabilidades considerables. Por otro lado, al igual que en el caso de electrones y protones del Cap. 5, debido a la dependencia explícita del producto $\gamma\varepsilon_y$ en las ecuaciones cuasilineales (4.68)–(4.71), cuando coexistan regiones de inestabilidades y absorción, dependiendo del perfil inicial de energía espectral magnética $\varepsilon_y(t = 0)$, ambos efectos competirán para así generar cambios macroscópicos en el plasma.

6.2. Efectos tipo cascada para un espectro magnético gaussiano

Como ya se ha discutido a lo largo de este trabajo, la existencia de derivas entre las especies iónicas produce cambios relevantes en las ramas de la relación de dispersión, en particular la eliminación de la banda prohibida de frecuencias que en el caso sin derivas aparece como una cota superior a la rama de Alfvén. Luego, como la rama de Alfvén es la que presenta las frecuencias más bajas para un mismo número de onda, es justamente esa rama la más interesante para usar en el estudio cuasilineal del plasma. De esta manera, en esta sección se trata el caso (d) de las Figs. 6.1 y 6.2, en el cual existe una deriva relativa $U_\alpha - U_p = 0.2$ entre las especies, y los iones He^{+2} poseen una anisotropía térmica $A_\alpha = 5$.

Dado que en el presente modelo el mecanismo principal de transferencia de energía, entre los campos y el plasma, es la interacción resonante entre las ondas con polarización circular izquierda y las partículas, el rango de frecuencias relevante corresponde a frecuencias del orden de las girofrecuencias Ω_μ ($\mu = p, \alpha$). Así, con la normalización $x = \omega_k^{(r)}/\Omega_p$, el rango $0 \leq x \leq 1$ resulta ser razonable. Pero como el presente análisis se hace en términos del número de onda y , es necesario encontrar un rango de estudio en ese espacio. Así, para la rama de Alfvén, a partir de los parámetros escogidos de las velocidades de deriva, a partir de (6.1) se obtiene que $x = 0.5$ y $x = 1$, valores normalizados de la frecuencia de ciclotrón de iones He^{+2} y protones, respectivamente, corresponden a los números de onda $y \approx 0.62$ e $y \approx 1.91$, respectivamente. Por lo tanto, en el presente análisis se consideran ondas en el rango $0 \leq y \leq 2$, y en esa región se integra el sistema cuasilineal dado por (4.68)–(4.71).

Para realizar los cálculos numéricos, el rango de integración $0 < y \leq 2$ se ha

discretizado el espacio en $N_y = 200$ puntos equidistantes separados por $dy = 0.01$. El paso de tiempo elegido es $d\tau = 0.025$ y dado que la dinámica lenta es del orden de γ^{-1} , la integración numérica se hizo hasta $\tau = 6250$, lo que corresponde a 250.000 pasos de tiempo. Considerando los valores de los parámetros en las regiones de interés (ver Cap. 2), la frecuencia de ciclotrón de los protones resulta ser $\Omega_p \sim 10^3, 10^4$ Hz, y $V_{Ap} \sim 10^2, 10^3$ km/s. Luego, dada la normalización $\tau = \Omega_p t$, integrar hasta $\tau \sim 10^4$ corresponde a fenómenos del orden de $t = 1$ s, y las distancias involucradas están en el rango de los cientos de kilómetros, lo que parece ser razonable en relación a los fenómenos que motivan este estudio.

De esta manera, con la misma metodología utilizada en el estudio del capítulo anterior, se resolvió numéricamente el sistema a partir de los valores iniciales $U_\mu(\tau = 0)$, $\bar{\beta}_\mu^2(\tau = 0)$, $A_\mu(\tau = 0)$ para cada especie, la frecuencia $x(y)$ y la tasa de crecimiento/amortiguamiento $\gamma(x, y)$ para esos parámetros, y el espectro inicial $\varepsilon_y(\tau = 0)$, a través de un método Runge-Kutta de cuarto orden [119], programado en C++. Al igual que en el caso de electrones y protones, con este método se realizó la integración numérica para distintas elecciones en los parámetros y el espectro inicial, como también en la rama utilizada. Tal como fue mencionado en el Cap. 5, en este trabajo se muestran los mejores resultados, en los cuales resulta evidente la cascada de energía propuesta. Otras soluciones numéricas para otras elecciones de parámetros aquí no son analizadas. Así, considerando la rama de Alfvén en presencia de velocidades de deriva relativas entre las especies y un espectro que contenga la mayor cantidad de energía para frecuencias menores a la girofrecuencia de las partículas α , en el sistema de referencia del laboratorio, se han elegido

$$U_p(\tau = 0) = 0.1, \quad \bar{\beta}_{p\parallel}^2(\tau = 0) = 10^{-4}, \quad A_p(\tau = 0) = 0, \quad (6.5)$$

para los protones,

$$U_{\alpha}(\tau = 0) = 0.3, \quad \bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2(\tau = 0) = 4 \times 10^{-3}, \quad A_{\alpha}(\tau = 0) = 5 \quad (6.6)$$

para las partículas α , y

$$\varepsilon_y(\tau = 0) = 0.8 \exp(-10y^2) \quad (6.7)$$

para el espectro.

Con los parámetros escogidos, el producto $\gamma\varepsilon_y$, proporcional a la derivada temporal del espectro ε_y , resulta ser positivo en un pequeño rango alrededor de $y = 1$ [ver Fig. 6.2(d)]. Luego, para el rango de modos de resonancia de las partículas α sería esperable que el campo ganase energía a expensas de esa especie iónica. Además, para valores cercanos a $y = 1.5$ aparece una región de absorción resonante correspondientes a los protones. En la Fig. 6.3 se muestra ε_y como función de y , en la zona $0.65 < y < 0.95$ para el inicio ($\tau = 0$, curva sólida), la mitad ($\tau = 3125$, curva punteada) y el final ($\tau = 6250$, curva segmentada) del intervalo de integración. Se observa en la figura la aparición de modos con frecuencias (números de onda) mayores que los existentes en el espectro inicial, para $y \sim 0.75$, lo que se expresa en un aumento en la energía $\varepsilon_y(y)$ para los modos mencionados. Este hecho es la principal manifestación de la cascada de energía, desde los números de ondas (y por lo tanto frecuencias) más bajos a los más altos, a la que se ha hecho relación en todos los capítulos anteriores.

Con el fin de satisfacer las relaciones de conservación de energía (ver apéndices, Sec. C.2) la evolución del espectro de energía magnética debe ser acompañada por cambios en los parámetros macroscópicos en las funciones de distribución de velocidades de las especies iónicas. Para los protones, en la Fig. 6.4(a) se muestra la evolución temporal de las temperaturas, donde la temperatura perpendicular a la

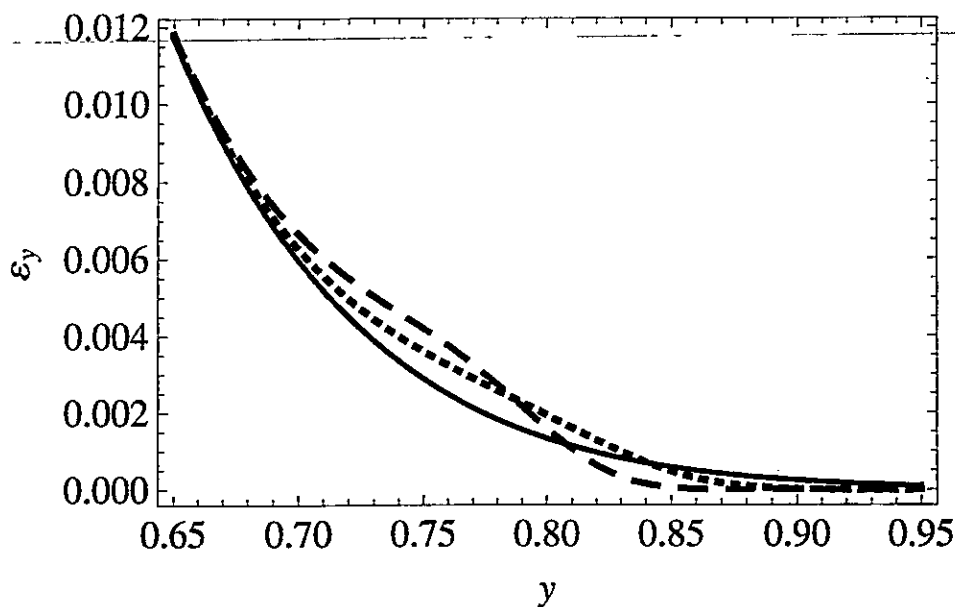


Figura 6.3: Región $0.65 < y < 0.95$ de la densidad espectral de energía normalizada como función del número de ondas y para $\tau = 0$ (curva sólida), $\tau = 3125$ (curva punteada) y $\tau = 6250$ (curva segmentada). Los valores de τ mostrados corresponden al inicio, a la mitad y al final del intervalo de integración.

dirección del campo de fondo corresponde a la curva sólida y la temperatura paralela a la curva segmentada. Se observa en el gráfico que ambas temperaturas aumentan a medida que avanza el tiempo, siendo este calentamiento no isotrópico. Luego, el paso de las ondas provoca la emergencia de una anisotropía térmica para esta especie, ya que inicialmente las temperaturas son iguales, pero el calentamiento paralelo es más rápido que el perpendicular. En la figura también se observa que este proceso de calentamiento anisotrópico ocurre para tiempos menores que $\tau \sim 1000$, y para tiempos mayores el sistema pareciera acercarse a un equilibrio metaestable, con una leve anisotropía $A_p < 0$. Además, como puede verse en la Fig. 6.4(b), los procesos de interacción resonante onda-protón son tales que producen un calentamiento de, al menos, el doble de las temperaturas inicialmente consideradas y al final de la integración numérica se tiene que $T_{p\perp} \sim 2T_{p\perp}(0)$ y $T_{p\parallel} \sim 2.5T_{p\parallel}(0)$.

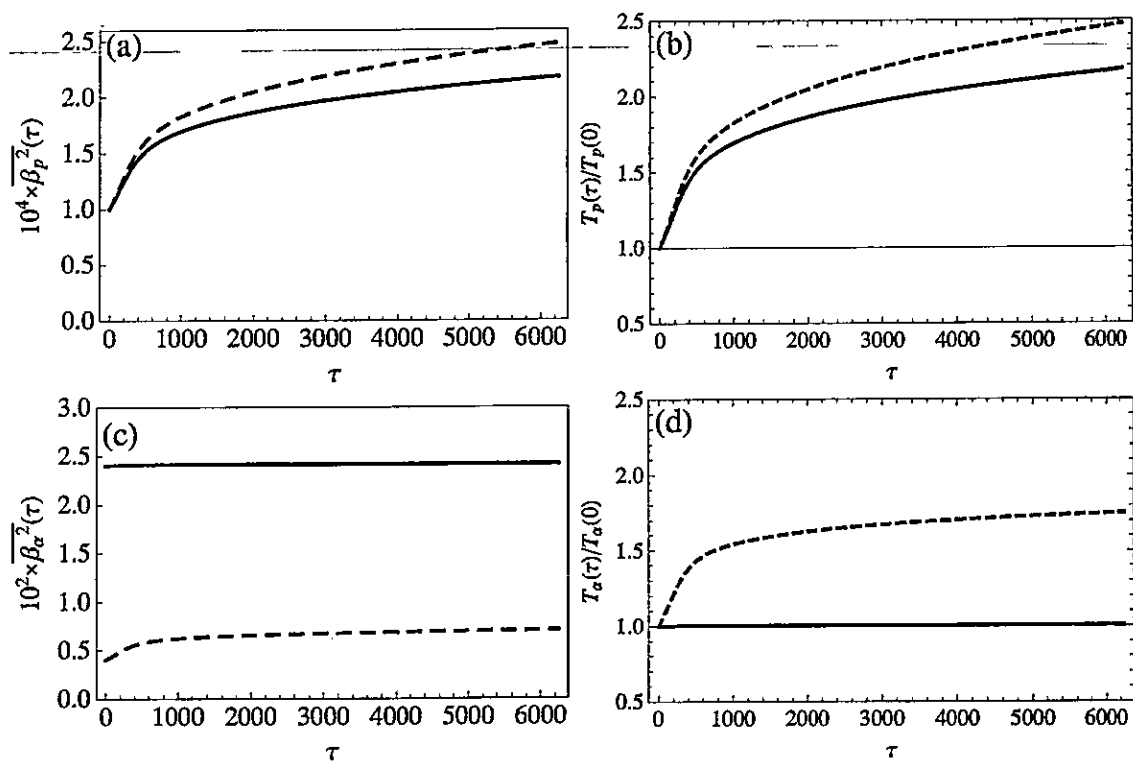


Figura 6.4: (a) Evolución temporal de las temperaturas normalizadas de protones. Las curvas sólidas y segmentadas corresponden a las temperaturas perpendiculares y paralelas, respectivamente. (b) Temperaturas de protones normalizadas a su valor inicial como función del tiempo τ . La curva sólida (segmentada) corresponde a la temperatura perpendicular (paralela). (c) Mismo gráfico que en el panel (a) pero para la evolución de las partículas α . (d) Lo mismo que en el panel (b), pero para las partículas α .

Para las partículas α , la evolución a partir de la interacción con las ondas es bastante distinta. En la Fig. 6.4(c) se observa que para esta especie el resultado principal en la función de distribución es una disminución considerable de la anisotropía inicial, que se ve reflejada en un calentamiento paralelo (curva segmentada), mientras que la temperatura perpendicular (curva sólida) se mantiene constante. En la Fig. 6.4(d) se observa que este calentamiento paralelo de los iones He^{+2} es considerablemente más lento que para los protones, llegando a un valor de aproximadamente $T_{\alpha\parallel} \sim 1.7 T_{\alpha\parallel}(0)$. Al igual que en el caso de los protones, la mayor parte

del calentamiento ocurre en el intervalo inicial menor a $\tau \sim 1000$.

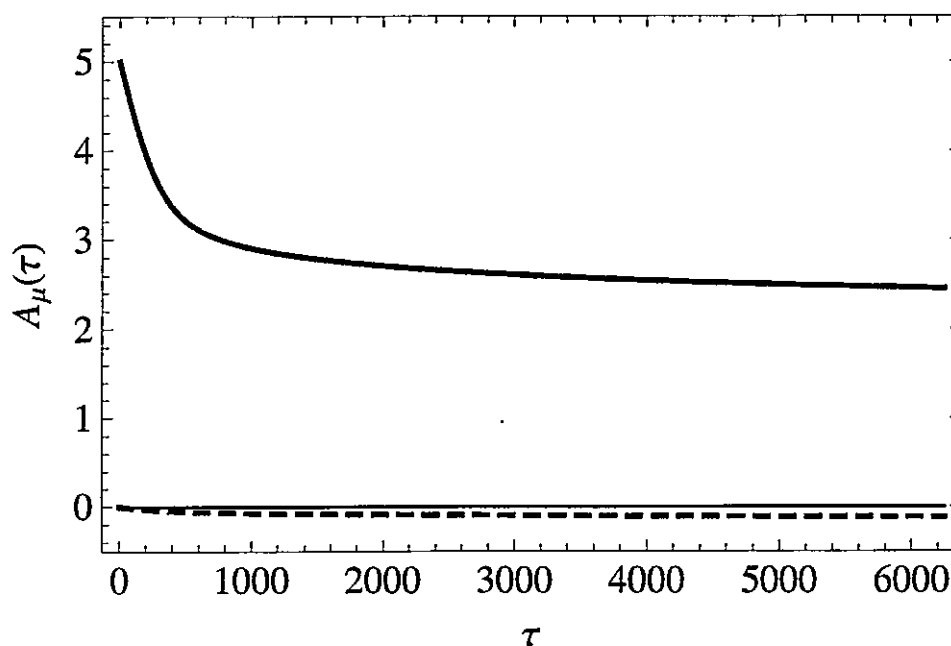


Figura 6.5: Anisotropías térmicas como función del tiempo normalizado. Las curvas sólida y segmentada corresponden a partículas α y protones, respectivamente.

Si bien las temperaturas de ambas especies evolucionan de manera distinta, sería esperable que ambas temperaturas (paralela y perpendicular) convergieran a un mismo valor en una especie de equilibrio, en el cual no haya energía libre disponible para transferirse entre ondas y partículas. En la Fig. 6.5 se muestra que en el caso de las partículas α , representada por la curva sólida, la anisotropía $A_{\alpha}(\tau)$ decrece a la misma tasa en que evolucionan las temperaturas. Antes de $\tau = 1000$, esta anisotropía inicialmente de $A_{\alpha} = 5$, ya disminuye hasta un valor de 3, y pareciera que tiende asintóticamente a $A_{\alpha} \sim 2.4$. En el caso de los protones, representado por la curva segmentada en la figura, debido a las condiciones iniciales y la subsiguiente absorción resonante se observa la emergencia de una pequeña anisotropía térmica negativa, en la cual la temperatura paralela es mayor que la temperatura perpendicular. En caso

de que la temperatura paralela fuese muy alta respecto a la perpendicular, se podría llegar a producir una inestabilidad tipo *firehose* [120-124]. De todas maneras, debido a la aparente saturación de los efectos cuasilineales observados hacia $\tau = 1000$, y para tiempos mayores la evolución resulta ser mucho más lenta, el intervalo de integración en el tiempo considerado parece ser razonable.

6.3. Resumen y discusión

A partir del formalismo descrito en el Cap. 4, y a través de una solución numérica con el uso de un código computacional, se ha realizado un análisis cinético para la evolución cuasilineal de la interacción entre un espectro de ondas circularmente polarizadas y un plasma compuesto de electrones, protones y un 4% de partículas α . Para las condiciones iniciales elegidas (6.5)-(6.7), los resultados numéricos muestran un calentamiento paralelo de los iones He^{+2} y un calentamiento anisotrópico, paralelo y perpendicular, de los protones. Además, debido a la conservación de energía (ver apéndice C.2), que numéricamente se cumplió con un error menor al 0.1%, esta evolución de los parámetros macroscópicos de las funciones de distribución iónicas está acompañada de cambios en el espectro de energía magnética inicial. Así, para esta elección particular en las condiciones iniciales, se observa una cascada de energía desde las ondas con número de onda más bajos (y por lo tanto frecuencias más bajas) hacia las frecuencias más altas, generándose un nuevo máximo (en $y \sim 0.75$) cerca de la frecuencia de resonancia de los iones minoritarios (en este caso iones He^{+2}). Por lo tanto, estos resultados parecen sugerir que este mecanismo de cascada de energía puede ser relevante en la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar, en regiones cercanas al Sol.

En relación a la aceleración, al menos para el conjunto de parámetros elegidos, no

hubo cambios considerables en la velocidad. Salvo errores numéricos menores, hasta el final de los intervalos de integración considerados, las velocidades de deriva de ambas especies se mantuvieron constantes. Luego, si bien no es posible afirmarlo con total certeza, a partir de este análisis no es posible estudiar el traspaso de momentum entre ondas y partículas. Debido a que el momentum de las ondas es de orden V_{Ap}^2/c^2 , para velocidades de Alfvén bajas respecto a c , el campo electromagnético no transmite momentum (ver apéndice C.3) y por lo tanto, ni en el caso simple de protones ni en el caso con más especies iónicas hay aceleración del plasma. Por ende, tampoco se observó evidencia de aceleración preferencial de alguna especie en particular. Es posible que, con aproximaciones diferentes a las utilizadas en este trabajo, el modelo cuasilineal sea capaz de describir aceleración del plasma (o de alguna especie en particular). Por ejemplo, no eliminando los términos de orden V_{Ap}^2/c^2 , no utilizar la aproximación semifría, o incluir otro tipo de términos en las ecuaciones, como interacciones no lineales de más alto orden o términos de acoplamiento entre ondas.

Ahora bien, aunque no se hayan podido observar variaciones en las velocidades de deriva de las especies iónicas, de todas maneras es importante notar que la existencia de derivas tales que $U_\alpha - U_p \neq 0$ para $\tau = 0$, permite la existencia de crecimiento o amortiguamiento de ondas, debido a la modificación de las ramas de la relación de dispersión a causa del corrimiento Doppler. Si bien las velocidades paralelas de deriva no experimentaron cambios a lo largo de la integración numérica, el hecho de que existan implica cambios notables en las temperaturas, tanto de protones como de iones, incluso en el caso en que la anisotropía térmica de estos últimos no es tan pronunciada. En ese sentido, aunque era esperable que el calentamiento fuese más intenso para el caso de los iones más masivos, el comportamiento observado se debe a los valores iniciales de las anisotropías de ambas especies. Así, mientras los

protones contribuyen a la parte imaginaria de las frecuencias $\gamma(x, y)$ solamente con absorción, la anisotropía inicial de los iones He^{+2} genera inestabilidades para $y \sim 1$, y así se produce la cascada de energía ya mencionada. Por esta razón las partículas α presentan esta dinámica más lenta, y por lo tanto un calentamiento más suave para el intervalo de tiempo aquí considerado.

Al igual que en el análisis del capítulo anterior, es importante mencionar que, debido a que la dinámica depende fuertemente del factor $\gamma \varepsilon_y$, cualquier cambio apreciable en las funciones de distribución aparecerá solamente después de un tiempo del orden de γ^{-1} . Más aún, debido a que en la aproximación semifrío se debe cumplir que $|\gamma| \ll |x|$, y además el factor $\gamma \varepsilon_y < |\gamma|$ hace que las derivadas temporales de los parámetros macroscópicos [funciones $\bar{K}_j^\mu(\tau)$ en (4.74)–(4.76)] sean todavía más pequeñas que γ , tal como se muestra en los resultados, se hace necesario integrar hasta tiempos grandes para apreciar efectos significativos. Como se observa en las Figs. 6.4 y 6.5, la integración hasta $\tau \sim 6000$ resultó ser más que suficiente, tomando en cuenta que los efectos cuasilineales saturaron aproximadamente al cabo de $\tau \sim 1000$.

Por otro lado, es bien sabido que en el viento solar hay más especies iónicas que solamente H^+ y He^{+2} . En ese sentido, ¿Qué sucedería si se considerasen más especies en este análisis? Como se ha visto a lo largo de este estudio, a partir del sistema de ecuaciones en el régimen semifrío, la parte imaginaria de las frecuencias $\gamma(x, y)$ ha resultado ser una de las cantidades físicas más relevantes en la evolución cuasilineal de los sistemas estudiados. De esta manera, incluso sin llevar a cabo las integraciones numéricas de las ecuaciones, la sola caracterización de γ puede dar indicios cualitativos de la dependencia temporal de las cantidades macroscópicas de los plasmas en el caso de tres o más especies iónicas. A modo de ejemplo, considérese un plasma

compuesto de electrones, protones, partículas α y una tercera especie iónica, por ejemplo O^{+6} o Mg^{+9} [42, 63-65]. En el caso de la propagación de ondas con polarización circular izquierda, las partes real e imaginaria de las frecuencias permitidas por la relación de dispersión vienen dadas por (4.72) y (4.73), respectivamente (signo negativo en las ecuaciones), donde las sumas corresponden a $\mu = p, \alpha$ y además una tercera especie $\mu = O^{+6}$ o bien $\mu = Mg^{+9}$.

Para los iones O^{+6} , dados el grado de ionización $z_{O^{+6}} = 6$ y la masa $m_{O^{+6}} \approx 16 m_p$, se tiene $\Omega_{O^{+6}} \approx 0.375 \Omega_p$, cumpliéndose $\Omega_{O^{+6}} < \Omega_\alpha < \Omega_p$. En la Fig. 6.6, se muestran las partes real e imaginaria de las frecuencias [soluciones de (4.72) y (4.73), respectivamente] considerando una concentración de $\eta_{O^{+6}} = 2 \times 10^{-4}$ [61, 62], y dos elecciones distintas en los parámetros macroscópicos de las funciones de distribución de cada especie. En este caso, al incluir una tercera especie iónica, la relación de dispersión tiene cuatro soluciones $x = x(y)$. En el panel (a) de la figura se observan las tres soluciones que tienen ramas en el primer cuadrante del plano $x-y$ en el caso en que ninguna especie tiene deriva en la dirección paralela al campo de fondo. De la misma forma que en el caso de protones y partículas α , al no haber derivas relativas entre las especies, existen bandas de frecuencias prohibidas, donde cada una de las ramas tiende asintóticamente a los valores normalizados de las frecuencias de ciclotrón de cada una de las especies. Así, la curva sólida en la Fig. 6.6(a) (rama de Alfvén) tiende asintóticamente a $x = x_{O^{+6}} = 0.375$ (o bien $\omega_k^{(\tau)} = \Omega_{O^{+6}}$), la curva segmentada tiende asintóticamente a $x = x_\alpha = 0.5$ (o bien $\omega_k^{(\tau)} = \Omega_\alpha$) y la curva punteada tiende asintóticamente a $x = x_p = 1$ (o bien $\omega_k^{(\tau)} = \Omega_p$). Por otro lado, en el caso en que existen derivas relativas entre las especies la situación es diferente. Debido al corrimiento Doppler en las frecuencias, asintóticamente las ramas tienden a rectas oblicuas y se eliminan las bandas prohibidas, como se muestra en la Fig. 6.6(b) para

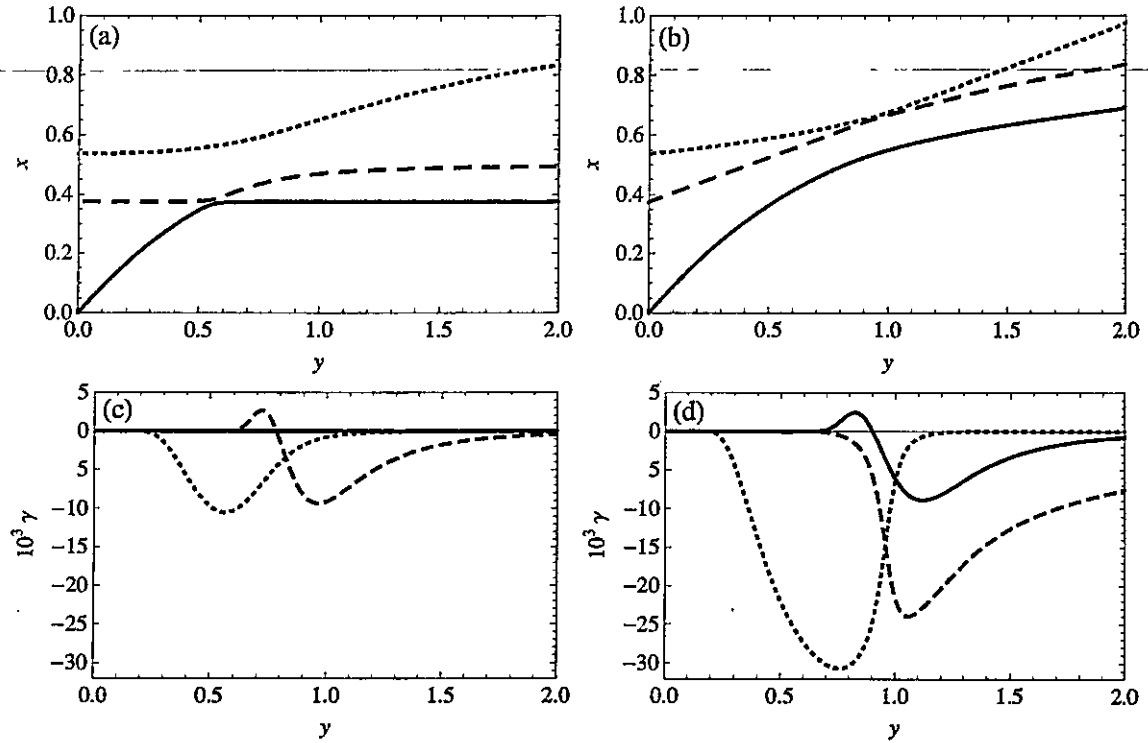


Figura 6.6: (a) Soluciones de la relación de dispersión $x = x(y)$ para ondas con polarización circular izquierda, propagándose en la dirección de un campo magnético de fondo, en un plasma compuesto de electrones, protones, iones He^{+2} e iones O^{+6} , donde $U_p = U_\alpha = U_{\text{O}^{+6}} = 0$, $\eta_\alpha = 4 \times 10^{-2}$ y $\eta_{\text{O}^{+6}} = 2 \times 10^{-4}$. Las curvas sólida, segmentada y punteada corresponden a las 3 soluciones (de un total de 4) que aparecen en el primer cuadrante del plano x - y . (b) La misma relación de dispersión que en (a), pero con derivas $U_p = 0$, $U_\alpha = 0.1$ y $U_{\text{O}^{+6}} = 0.3$. (c) Partes imaginarias de las ramas de la relación de dispersión mostradas en (a). Para cada especie se tiene $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $A_p = 0$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_\alpha = 5$ y $\bar{\beta}_{\text{O}^{+6}\parallel}^2 = 4 \times 10^{-4}$, $A_{\text{O}^{+6}} = 80$. (d) Partes imaginarias de las ramas de la relación de dispersión mostradas en (b). Para cada especie se tiene $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$, $A_p = 0$, $\bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}$, $A_\alpha = 5$ y $\bar{\beta}_{\text{O}^{+6}\parallel}^2 = 4 \times 10^{-4}$, $A_{\text{O}^{+6}} = 50$.

$U_p = 0$, $U_\alpha = 0.1$ y $U_{\text{O}^{+6}} = 0.3$. Luego, para un mismo número de onda se tienen, en general, frecuencias permitidas más altas, lo que, como ya se ha visto a lo largo de esta tesis, puede dar origen a la aceleración resonante y calentamiento de los iones.

Con respecto a las tasas de crecimiento o amortiguamiento, la existencia de deriva entre especies, y la correspondiente eliminación de las bandas prohibidas, juega un

papel muy importante. Centrando el análisis en la rama de Alfvén, representada por las curvas sólidas en la Fig. 6.6, el hecho de que haya bandas de frecuencias no permitidas repercute directamente en la estabilidad de la rama. En el caso sin derivas [ver Fig. 6.6(c)], para el rango de números de onda estudiado $0 < y < 2$ ($0 < x < x_{O^{+6}}$ en este caso), la rama de Alfvén presenta una parte imaginaria nula y las inestabilidades corresponden a la rama representada por la curva segmentada. Dicha inestabilidad se debe a la anisotropía térmica presente en las funciones de distribución de iones O^{+6} y partículas α , con valores $A_{O^{+6}} = 80$, $A_\alpha = 5$, respectivamente. Ahora bien, cuando se consideran derivas entre las especies ($U_p = 0$, $U_\alpha = 0.1$ y $U_{O^{+6}} = 0.3$), incluso con una anisotropía térmica $A_{O^{+6}} = 50$, menor que en el caso mostrado en (c), la situación cambia considerablemente. En el mismo rango $0 < y < 2$ (o en este caso $0 < x < 0.7$), la rama de Alfvén tiene frecuencias con parte imaginaria no nula entre $y \sim 0.7$ e $y = 2$, con $\gamma > 0$ para $0.7 < y < 0.9$, y $\gamma < 0$ para $0.9 < y < 2$, aproximadamente [ver Fig. 6.6(d)]. Es decir, la existencia de deriva entre las especies condiciona la inestabilidad de las ramas y además permite valores considerables de γ cuando las anisotropías térmicas son menores, con la salvedad de que el corrimiento Doppler en las frecuencias causa un desplazamiento de los valores máximos y mínimos de γ en el eje y . Así, mientras en la Fig. 6.6(c) el máximo de γ corresponde a $y \sim 0.75$ (o bien $x \sim 0.43$ en términos de las frecuencias), en la Fig. 6.6(d) el máximo aparece en $y \sim 0.8$ (o bien $x \sim 0.5 = x_\alpha$).

A partir de este análisis de la relación de dispersión, con tres especies iónicas, se desprende una diferencia importante con el caso estudiado de electrones, protones y partículas α . Al considerar derivas entre las especies, mientras en el caso de dos especies iónicas el máximo de las inestabilidades de la rama de Alfvén se presenta para $y \sim 1$ [ver Fig. 6.2(d)], o $x \sim 0.7$ en ese caso, cuando se incluyen iones O^{+6} ese

máximo aparece en $y \sim 0.8$ (o bien $x \sim 0.5$). Así, para un mismo espectro de ondas electromagnéticas la evolución del sistema puede ser considerablemente distinta, tal como fue estudiado en el Cap. 3. Al generarse inestabilidades para números de onda (frecuencias) menores, dado un valor fijo de y , el producto $\gamma\varepsilon_y$ resulta ser mayor, cuando hay tres especies iónicas que cuando hay solamente dos. Luego, las regiones efectivas de interacción resonante serán más extensas y por lo tanto la evolución cuasilineal más eficiente. Por otro lado, desde el punto de vista de los espectros de ondas, al observarse inestabilidades para números de ondas menores, incluso con espectros más angostos que los utilizados en este capítulo [por ejemplo una función gaussiana con un exponente mayor que el considerado en la ecuación (6.7)], podrían llegar a obtenerse efectos similares a los observados en este capítulo. De esta manera, la existencia de una tercera especie iónica con razón carga sobre masa menor, y además con anisotropía térmica y deriva relativa a las otras especies, podría generar una cascada de energía, pero iniciándose en modos, con número de onda y por lo tanto frecuencias más bajas que las obtenidas en este capítulo, incluso cuando la concentración de esta especie fuese muy minoritaria ($\eta_{O^{+6}} = 2 \times 10^{-4}$). Dadas las observaciones que muestran perturbaciones alfvénicas de baja frecuencia en las zonas de interés del viento solar, todo esto podría sugerir que el mecanismo de cascada de energía pudiese ser importante en la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar, en regiones cercanas al Sol.

Capítulo 7

Modelos híbridos †

Además de las descripciones de fluido o la descripción cinética de plasmas, otra manera de describir un sistema tipo plasma corresponde a los llamados *modelos híbridos*. Debido a la gran diferencia de masas entre electrones y protones ($m_p \sim 1800 m_e$), en ciertos escenarios y escalas de tiempo, como por ejemplo el viento solar, resulta conveniente considerar las propiedades cinéticas solamente de los iones positivos, y considerar los electrones como un fluido. Esto es posible ya que las longitudes inerciales y las frecuencias características de las dos especies se encuentran en escalas muy distintas, de modo que la dinámica de los protones es mucho más lenta que la de los electrones. Al no incluir los efectos cinéticos de electrones en un plasma cuasi-neutral, es posible hacer diversas aproximaciones a las ecuaciones, para así enfocarse en perturbaciones y fenómenos en escalas temporales asociadas a la girofrecuencia de protones o alguna fracción no muy pequeña de ésta. De todas maneras, hay que tener presente que el hecho de considerar los electrones como un fluido, elimina todos los efectos cinéticos, como amortiguamiento de Landau [100] u otro tipo de efectos

†Las ecuaciones mostradas en la Sec. 7.2.2, si bien corresponden originalmente a otros autores, han sido obtenidas independientemente como parte de este trabajo de tesis y fueron publicadas en el artículo “*Hybrid models of solar wind plasma heating*”, L. Ofman, A.-F. Viñas and P. S. Moya, *Annales Geophysicae* **29**, 1071–1079 (2011). [108]

cinéticos o térmicos referidos a los electrones [116, 125, 126], y por lo tanto si se está interesado en ese tipo de fenómenos el modelo híbrido no es el adecuado.

Ahora bien, cuando los fenómenos de interés (como por ejemplo la aceleración y calentamiento de iones) corresponden a fluctuaciones con frecuencias cercanas a la girofrecuencia del protón, los modelos híbridos resultan adecuados y realizar simulaciones híbridas (que será el tópico a tratar en el Cap. 9) se vuelve una técnica de gran utilidad. Durante la últimas décadas han sido desarrollados una gran cantidad de códigos híbridos y en la literatura existe una gran variedad de referencias en las cuales se han utilizado simulaciones híbridas [24, 77–80, 127–132]. En particular, las simulaciones basadas en modelos híbridos con electrones no masivos han sido las más utilizadas, y corresponden al método estándar de complementar trabajos tanto teóricos como observacionales [77, 79, 80, 131–133]. En este capítulo, se describirán y obtendrán las ecuaciones básicas de los modelos híbridos en general, y también considerando electrones no inerciales, para después obtener las ecuaciones de una modificación recientemente desarrollada para el estudio del viento solar llamada *modelo de caja en expansión* [82].

7.1. Ecuaciones para un plasma híbrido

Al considerar los electrones como un fluido, la dinámica del flujo de electrones con velocidad \mathbf{U}_e viene dada por la ecuación de movimiento

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{U}_e}{dt} \equiv m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial t} + (\mathbf{U}_e \cdot \nabla) \mathbf{U}_e \right) = -en_e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U}_e \times \mathbf{B} \right] - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e, \quad (7.1)$$

donde el operador d/dt corresponde a la llamada *derivada convectiva*. m_e , e y n_e son la masa, carga y densidad promedio de los electrones, respectivamente, y $\mathbf{\Pi}_e$ es el tensor de presiones de los electrones. Existen diversos formalismos para obtener esta

ecuación tipo fluido para un plasma, siendo el cálculo de momentos en las velocidades de la ecuación de Vlasov [70] y la fluidización de la ecuación de movimiento para una partícula en términos de la fuerza de Lorentz [90], los más utilizados.

En un plasma cuasineutral, la corriente \mathbf{J} se puede escribir como la suma vectorial de las corrientes asociadas a los electrones y las partículas cargadas positivamente,

$$\mathbf{J} = en(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e), \quad (7.2)$$

donde $n_e = n_i \equiv n$ es la densidad promedio del plasma, y \mathbf{U}_i corresponde al promedio de velocidades de todos los iones en conjunto (o velocidad de fluido), que por ejemplo se puede calcular como un momento de las funciones de distribución.

Por otro lado, para sistemas no relativistas, para los cuales la velocidad de Alfvén es mucho menor que la velocidad de la luz, a partir de las ecuaciones de Maxwell y utilizando la llamada aproximación de Darwin, en la cual no se consideran las derivadas temporales del potencial vector [134], la corriente también se puede expresar como

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}. \quad (7.3)$$

Así, combinando las ecuaciones (7.2) y (7.3) se obtiene una expresión para el campo de velocidades de electrones, que luego de reemplazar en la Ec. (7.1) permite escribir el campo eléctrico como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\frac{1}{c} \mathbf{U}_i \times \mathbf{B} + \frac{e}{m_e c^2} (\mathbf{H} \times \mathbf{B} - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}) - \frac{m_e}{e} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + (\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_i \right) \\ & + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{U}_i - \frac{1}{en_e} \nabla \cdot \Pi_e, \quad (7.4) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{H} = \lambda_e^2 \nabla \times \mathbf{B}, \quad (7.5)$$

con $\lambda_e = (m_e c^2 / 4\pi en_e)^{1/2}$ la longitud inercial del electrón.

Ahora bien, como en la escala de tiempo de interés se consideran efectos cinéticos para los iones y protones, en dicha escala de tiempo se cumple

$$\frac{1}{|\mathbf{U}_i|} \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} \ll \omega_{pe}, \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{n_e} |\nabla n_e| \ll \frac{1}{\lambda_e}, \quad (7.6)$$

con $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_e / m_e)^{1/2}$ la frecuencia de plasma de los electrones. Luego, el término correspondiente a la derivada temporal parcial de la velocidad de fluido de los iones se puede despreciar. De este modo, utilizando esta aproximación y (7.4) en la ley de Faraday, se obtiene para el campo magnético

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = & \nabla \times \mathbf{U}_i \times \mathbf{B} - \frac{e}{m_e c} \nabla \times \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \frac{m_e c}{e} \nabla \times [(\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_i] \\ & + \frac{e}{m_e c} \nabla \times [(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}] - \nabla \times [(\mathbf{U}_i \cdot \nabla) \mathbf{H} + (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{U}_i] + \frac{c}{e} \nabla \times \left(\frac{1}{n_e} \nabla \cdot \Pi \right), \end{aligned} \quad (7.7)$$

con

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{H}. \quad (7.8)$$

De esta manera, a partir de las ecuaciones de Maxwell, una representación tipo fluido para los electrones y con las aproximaciones indicadas, es posible obtener un conjunto de ecuaciones en las cuales las cantidades importantes corresponden al campo magnético y a la velocidad de flujo macroscópica de los iones. Luego, el aporte al sistema de la dinámica de los electrones queda descrito por su densidad y tensor de presiones, así como también la longitud inercial de éstos. Si bien el modelo no permite estudiar fenómenos en la escala espacial y temporal de los electrones, la inercia de éstos sí influye en la dinámica de los campos, como una corrección a la ecuación de Faraday a través del campo \mathbf{H} dado por la Ec. (7.5). Además, el haber hecho uso de la aproximación de Darwin permite que el campo eléctrico sea descrito, no como una entidad dinámica a la par del campo magnético, sino que como un campo que evoluciona a partir de los cambios en el campo magnético y las presiones del sistema.

Por lo tanto, en el marco de un modelo híbrido, el considerar los electrones como un fluido permite simplificar el trabajo con esta especie para centrarse principalmente en la descripción cinética de los iones y, entre otros resultados, obtener el campo macroscópico \mathbf{U}_i presente en las ecuaciones dinámicas para el campo magnético y poder resolverlas.

7.1.1. Plasmas híbridos con electrones no inerciales y presión escalar

Si bien las aproximaciones de plasma híbrido permiten simplificar considerablemente las ecuaciones respecto de un modelo cinético, el hecho de considerar los electrones como un fluido requiere la incorporación de ecuaciones que relacionen la densidad, la presión y la temperatura, ejercicio que posee su complejidad propia dependiendo del tipo de fluido que se considere y sus ecuaciones de estado, flujo de calor, conservación de energía, etc. Además, al considerar el campo \mathbf{H} , la contribución de la longitud inercial del electrón hace necesario considerar una ecuación más [la ecuación (7.8)] al momento de resolver el sistema. Para obviar estas dificultades, al momento de trabajar numéricamente las ecuaciones, por ejemplo en simulaciones numéricas, una de las aproximaciones más utilizadas al modelo híbrido es considerar los electrones como no masivos o no inerciales. Al respecto existe una extensa literatura en variados escenarios de plasmas, y las aplicaciones van desde estudios de plasmas espaciales [77–81] hasta el uso en modelamiento de dispositivos experimentales de fusión [135], entre otros. Otra aproximación ampliamente utilizada es considerar, en vez de un tensor de presiones, una presión escalar P_e para los electrones y una ecuación de estado tipo gas ideal

$$P_e = n_e k_B T_e, \quad (7.9)$$

con T_e la temperatura electrónica y k_B la constante de Boltzmann. Es importante notar que esta expresión supone electrones sin anisotropía térmica, lo cual ha sido reportado en trabajos observacionales y teóricos con respecto al viento solar (ver Refs. [59, 121, 136–138] entre otras).

De esta manera, las ecuaciones para el modelo híbrido se reducen a

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{U}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi en_e}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{en_e}\nabla(n_e k_B T_e), \quad (7.10)$$

para el campo eléctrico, y

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \left[-\frac{1}{c}\mathbf{U}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi en_e}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{en_e}\nabla(n_e k_B T_e) \right], \quad (7.11)$$

para el campo magnético. Pero, como el rotor de un gradiente es idénticamente nulo, se obtiene finalmente

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{U}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi en_e}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{k_B T_e}{en_e}\nabla(n_e), \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U}_i \times \mathbf{B}) - \frac{c}{4\pi en_e}\nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (7.13)$$

donde, en esta aproximación, se ha considerado una compresión iostérmica (T_e constante y la constante adiabática es igual a 1 [90]) al calcular el gradiente de presión.

El conjunto de ecuaciones (7.9), (7.12) y (7.13), junto con el tratamiento cinético de \mathbf{U}_i (calculada como el promedio macroscópico de las velocidades de cada uno de los iones) y las distintas propiedades correspondientes a iones, son las ecuaciones básicas del modelo híbrido que se utilizará en el siguiente capítulo para realizar simulaciones numéricas híbridas de plasmas.

7.2. Modelos de caja en expansión

Como se verá en el siguiente capítulo, realizar simulaciones numéricas tipo *Particle In Cell (PIC)* en plasmas con geometría esférica siempre ha sido complicado debi-

do a la aparición de fuerzas no físicas en la implementación de los códigos [139–141]. Recientemente, se ha desarrollado un formalismo en el cual un plasma en expansión radial esférica, como el viento solar, puede ser modelado a partir de una representación cartesiana de las coordenadas. En esta sección se deducen las ecuaciones y se describe en detalle el así llamado *Modelo de caja en expansión* [82, 142–145], desarrollado por Velli, Grappin y Mangeney, entre otros. Si bien el modelo ha sido bastante criticado por la extraña elección en las transformaciones de coordenadas y las aproximaciones que utiliza, no deja de ser interesante el hecho de que el modelo, incluso en aplicaciones en simulaciones híbridas para una dimensión espacial [145], incorpore una manera simple de dar cuenta de los efectos de expansión del viento solar, así como también la disminución del campo magnético en función de la distancia y el enfriamiento del plasma del viento solar al ser considerado como un gas en expansión.

En el modelo se considera inicialmente una delgada capa de plasma (la caja) alejándose radialmente del origen de cierto sistema inercial S con coordenadas x , y y z , con velocidad constante $U_0\hat{x}$. La posición radial de la caja en el sistema S viene dada por

$$R = R(t) = R_0 + U_0 t, \quad (7.14)$$

donde $R_0\hat{x}$ corresponde a la posición de la caja en el tiempo $t = 0$, como se puede ver en la Fig. 7.1.

Se define la cantidad adimensional

$$a = a(t) = \frac{R(t)}{R_0} = 1 + \frac{U_0 t}{R_0}. \quad (7.15)$$

Luego, se tiene que

$$\frac{da}{dt} = \frac{U_0}{R_0}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \approx \frac{U_0}{R_0}, \quad \text{para} \quad \epsilon \equiv \frac{U_0}{R_0} t \ll 1, \quad (7.16)$$

y es importante notar que todas las derivaciones que siguen desprecian los términos $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ y superiores.

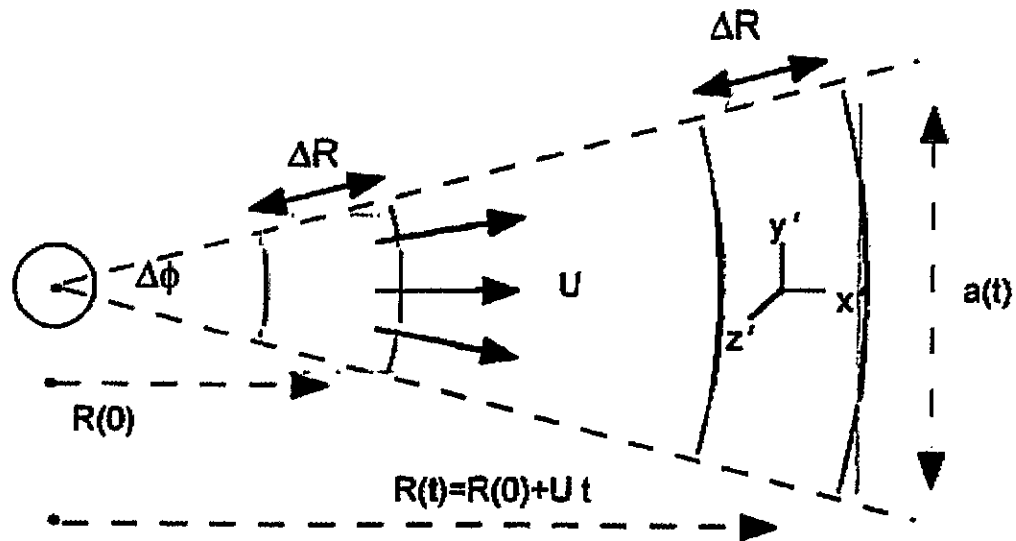


Figura 7.1: Esquema del modelo de caja en expansión tal como aparece en la Ref. [145].

La idea básica del modelo es plantear las ecuaciones de plasmas en un sistema de referencia S' solidario a la caja que se mueve y expande, que sea capaz de incorporar los efectos de una expansión esférica, pero con coordenadas cartesianas planas x', y', z' (ver Fig. 7.1). Para esto, se alinea el eje cartesiano \hat{x} con el eje radial de las coordenadas esféricas. Así, la velocidad de la caja en el sistema S viene dada por

$$\mathbf{U}_0 = U_0 \hat{r}. \quad (7.17)$$

De esta manera, para mantener el volumen de la caja constante, al menos para $\epsilon \ll 1$, la transformación de coordenadas entre S y S' se divide en dos fases. Primero, una transformación galileana entre x y x' , a través de la velocidad U_0 , y después un

estrechamiento de las coordenadas en el plano y - z . Esto es,

$$x = x' + R, \quad (7.18)$$

$$y = ay', \quad (7.19)$$

$$z = az'. \quad (7.20)$$

Estas transformaciones indican que para un observador moviéndose junto con la caja, ésta no cambia su volumen, pero para un observador en reposo respecto a S la caja se expande a medida que ésta se aleja del origen.

7.2.1. Transformación de las derivadas en tiempo y espacio

A partir del conjunto de transformaciones del sistema S al sistema S' dadas por las ecuaciones (7.18)–(7.20) es posible expresar las derivadas temporales y espaciales en el sistema S' . En relación a las derivadas temporales, como una variación temporal debe ser invariante si se cambia entre S y S' , se debe cumplir que $dt = dt'$, donde t' es el tiempo medido en S' . Luego, la derivada temporal total debe ser igual en ambos sistemas de referencia:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}. \quad (7.21)$$

Para obtener la transformación de las derivadas temporales parciales, como en el sistema en reposo la caja se mueve con velocidad U_0 , entonces, en S se tiene

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \cdot \nabla. \quad (7.22)$$

Pero, en el sistema en movimiento, la caja está en reposo y por lo tanto

$$\frac{d}{dt'} = \frac{\partial}{\partial t'}. \quad (7.23)$$

De esta manera, comparando (7.22) y (7.23) la transformación entre ambos sistemas

resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{U}_0 \cdot \nabla. \quad (7.24)$$

Ahora, para escribir la transformación (7.24) correctamente en el sistema móvil, se deben representar \mathbf{U}_0 y ∇ en el sistema S' en términos de x', y', z' y t' . Usando (7.18)–(7.20), la transformación de cada una de las derivadas parciales está dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y'}. \quad (7.26)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (7.27)$$

Así, el operador gradiente ∇' en S' está dado por

$$\nabla' = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z'}. \quad (7.28)$$

En el caso de la velocidad \mathbf{U}_0 , al ser radial, se tiene

$$\mathbf{U}_0 = U_0 \hat{r} = \frac{U_0}{r} (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = \frac{U_0}{r} ((x' + R)\hat{x} + ay'\hat{y} + az'\hat{z}), \quad (7.29)$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Luego, usando (7.18)–(7.20), se obtiene

$$r = R \left(1 + \frac{2x'}{R} + \frac{x'^2}{R^2} + \frac{y'^2}{R_0^2} + \frac{z'^2}{R_0^2} \right)^{1/2} \quad (7.30)$$

$$\approx R \left(1 + \frac{x'}{R} + \frac{x'^2}{2R^2} + \frac{y'^2}{2R_0^2} + \frac{z'^2}{2R_0^2} \right), \quad (7.31)$$

y así

$$\mathbf{U}_0 \approx U_0 \left(\hat{x} + \frac{y'}{R_0} \hat{y} + \frac{z'}{R_0} \hat{z} \right). \quad (7.32)$$

De esta manera el producto $\mathbf{U}_0 \cdot \nabla'$ está dado por

$$\mathbf{U}_0 \cdot \nabla' = U_0 \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{y'}{r} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{z'}{r} \frac{\partial}{\partial z'} \right) \approx U_0 \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{y'}{R} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{z'}{R} \frac{\partial}{\partial z'} \right). \quad (7.33)$$

Finalmente, usando (7.33) en (7.24) se obtiene que la derivada temporal se transforma de acuerdo a

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - U_0 \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{y'}{R} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{z'}{R} \frac{\partial}{\partial z'} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{U}_0 \cdot \nabla'. \quad (7.34)$$

7.2.2. Ecuaciones para el campo electromagnético: Formulación de campo magnético

Una vez conocidas las transformaciones tanto de las coordenadas como de las derivadas parciales temporales y espaciales, se está en condiciones de escribir las ecuaciones básicas del modelo híbrido, tal como están descritas en la Sec. 7.1.1, pero en el sistema solidario a la caja en expansión S' . Es decir, se necesita obtener las ecuaciones de evolución espacio temporal de los campos \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{U}_i en el sistema móvil.

En el caso de una transformación galileana con velocidad \mathbf{U}_0 , las transformaciones para los campos están dadas por [146]

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (7.35)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}, \quad (7.36)$$

y para la velocidad de fluido de los iones

$$\mathbf{U}'_i = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_0. \quad (7.37)$$

Una forma de encontrar estas ecuaciones es considerar la ecuación de evolución temporal del campo magnético en un modelo híbrido [Ec. (7.13)]. Dicha ecuación está escrita en el sistema en reposo S . En el sistema S' , usando (7.34), (7.35) y (7.37) se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} - (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla') \mathbf{B}' = \nabla' \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}') + \nabla' \times (\mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}') - \frac{c}{4\pi en} \nabla' \times [(\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] . \quad (7.38)$$

Reordenando términos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} - \nabla' \times (\mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}') + \frac{c}{4\pi en} \nabla' \times [(\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] \\ = (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla') \mathbf{B}' + \nabla' \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}') . \end{aligned} \quad (7.39)$$

Esto es, en el sistema S' se ha obtenido la ecuación (7.13) pero con dos nuevos términos, ambos en el lado derecho de (7.39).

Ahora, considerando la siguiente relación vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}, \quad (7.40)$$

y utilizándola en el lado derecho de (7.39), para $\mathbf{a} = \mathbf{U}_0$ y $\mathbf{b} = \mathbf{B}'$, y usando además la misma relación vectorial en el lado izquierdo de la misma ecuación, pero escogiendo $\mathbf{a} = \mathbf{U}'_i$ y $\mathbf{b} = \mathbf{B}'$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \mathbf{B}'(\nabla' \cdot \mathbf{U}'_i) - (\mathbf{B}' \cdot \nabla') \mathbf{U}'_i + (\mathbf{U}'_i \cdot \nabla') \mathbf{B}' \\ = +(\mathbf{B}' \cdot \nabla') \mathbf{U}_0 - \mathbf{B}'(\nabla' \cdot \mathbf{U}_0) - \frac{c}{4\pi en} \nabla' \times [(\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] , \end{aligned} \quad (7.41)$$

donde se cumple además $\nabla \cdot \mathbf{B}' = 0$. Finalmente, definiendo

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

y reordenando el lado derecho de (7.41), en el sistema que se mueve junto con la caja, la ecuación de evolución temporal del campo magnético está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \mathbf{B}'(\nabla' \cdot \mathbf{U}'_i) - (\mathbf{B}' \cdot \nabla')\mathbf{U}'_i + (\mathbf{U}'_i \cdot \nabla')\mathbf{B}' \\ + \frac{c}{4\pi en} \nabla' \times [(\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] = -\frac{U_0}{R} \vec{L} \cdot \mathbf{B}'. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Es importante notar que esta última ecuación es la misma que Grappin y Velli muestran en la Ref. [143], pero considerando además el término de Hall $(\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'$, no incluido en el trabajo citado. En el caso del campo eléctrico, usando la ecuación de transformación (7.36) en (7.12), en el sistema móvil S' , se obtiene

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}' + \frac{1}{4\pi en} (\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}' - \frac{1}{en} \nabla' (nk_B T_e). \quad (7.44)$$

En síntesis, se tienen todas las ecuaciones para el modelo híbrido estándar, pero en un sistema de referencia que es solidario a la caja en expansión. En el sistema móvil, las ecuaciones a resolver son (7.43) y (7.44) para los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Además, es necesario poder escribir las ecuaciones de movimiento para las partículas también en el sistema móvil. Dicho desarrollo será mostrado en la Sec. 8.3.

7.2.3. Ecuaciones para el campo electromagnético: Formulación de potencial vector

Otra forma de obtener las ecuaciones para los campos electromagnéticos en el sistema de referencia móvil es usar los potenciales escalar y vectorial en vez de los

campos, tal como aparece en la Ref. [145] de Liewer *et al.*. Su derivación es mostrada en este capítulo debido a que corresponde a una manera distinta de describir un modelo híbrido. Es importante mencionar que la derivación en la representación de potenciales mostrada acá es diferente, pero equivalente, a la que aparece en la Ref. [145].

Así, se resuelven las ecuaciones en términos de los potenciales, y luego para calcular las fuerzas sobre las partículas se obtienen los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} a partir de [103]

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (7.45)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (7.46)$$

Aquí \mathbf{A} y φ son el potencial vector y escalar en el sistema en reposo, que se relacionan con su contraparte en el sistema móvil de la siguiente manera [146]:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}, \quad (7.47)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{A}, \quad (7.48)$$

Comparando (7.45) con (7.12) y resolviendo para el campo eléctrico se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + c \nabla \varphi = \mathbf{U}_i \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{c}{en} \nabla P_e, \quad (7.49)$$

que es una ecuación equivalente al conjunto (7.12), (7.13).

Para expresar esta última ecuación en el sistema S' , al igual que en la formulación basada en las ecuaciones para los campos, a partir de las expresiones de transformación para \mathbf{A} , φ , \mathbf{U}_i y las derivadas parciales espacio-temporales, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'} - (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla') \mathbf{A}' + c \nabla' \varphi' + \nabla' (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{A}') \\ = \mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}' + \mathbf{U}_0 \times (\nabla' \times \mathbf{A}') - \frac{1}{en} \mathbf{J}' \times \mathbf{B}' + \frac{c}{en} \nabla' P_e. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Y usando la identidad vectorial

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (7.51)$$

para $\mathbf{a} = \mathbf{U}_0$ y $\mathbf{b} = \mathbf{A}$, se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'} = -(\mathbf{A}' \cdot \nabla')\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}' - \frac{1}{en} \mathbf{J}' \times \mathbf{B}' + \frac{c}{en} \nabla' P_e - c \nabla' \phi' - \mathbf{A} \times (\nabla' \times \mathbf{U}_0). \quad (7.52)$$

En este punto se presentan dos posibilidades, debido a las libertades de gauge presentes en la teoría [103]. Primero, \mathbf{U}_0 es un vector radial, por lo tanto $\nabla' \times \mathbf{U}_0 = 0$ y es conveniente elegir $\nabla' \phi' = 0$. Una segunda opción, aun cuando el rotor de \mathbf{U}_0 llegase a ser distinto de cero en el sistema móvil, es elegir $\nabla' \phi' = -\nabla' \times \mathbf{U}_0$. Así, en cualquiera de las dos situaciones, los dos últimos términos del lado derecho de (7.52) se anulan. Por lo tanto, la ecuación para el potencial vector en el sistema móvil (7.52) se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'} = -\frac{U_0}{R} \overset{\leftrightarrow}{P} \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}' - \frac{1}{en} \mathbf{J}' \times \mathbf{B}' + \frac{c}{en} \nabla' P_e, \quad (7.53)$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{P}$ es la matriz de proyección

$$\overset{\leftrightarrow}{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

7.3. Resumen

En este capítulo se han derivado y obtenido las ecuaciones básicas de los llamados modelos híbridos de plasmas, en el caso de una compresión isotérmica, con [Ecs. (7.12) y (7.13)] y sin [Ecs. (7.44) y (7.43)] incluir las transformaciones de coordenadas correspondientes a los modelos de expansión. Estas expresiones para la dinámica de los campos eléctrico y magnético dependen de la velocidad de fluido \mathbf{U}_i , que considera una descripción cinética para todos los iones.

A diferencia de lo acontecido en la aproximación cuasilineal desarrollada en los Caps. 4, 5 y 6, las expresiones para los campos son completamente no lineales y además, al escribirse en el espacio real, no tienen las limitaciones de la elección de cierta rama particular de la relación de dispersión, permitiendo así además una posible interacción entre los distintos modos, lo que podría ser relevante en la dinámica. Luego, al resolverlas es esperable que se manifiesten propiedades que en el análisis cuasilineal no se observan, o bien, las mismas propiedades y fenómenos se presenten de una manera cuantitativamente distinta. Por este motivo, en el siguiente capítulo se utilizarán las expresiones obtenidas de los modelos híbridos, a través de la realización de simulaciones computacionales (simulaciones híbridas) en las cuales el tratamiento cinético de los iones será a través de la técnica llamada *Particle in Cell* (PIC) [139–141], que se describe en la Sec. 8.2. De esta manera, incluyendo una no linealidad de más alto orden, a través de un estudio computacional se pretende complementar el estudio teórico cuasilineal desarrollado a lo largo de esta tesis sobre la aceleración y calentamiento de iones en el viento solar.

Capítulo 8

Consideraciones sobre simulaciones híbridas

Desde principios de los años sesenta, y a partir de la rápida evolución y desarrollo de computadores, el uso de simulaciones en el estudio de plasmas ha sido de gran interés y creciente uso. La complejidad natural de los problemas encontrados en física de plasmas, ha motivado el uso de este tipo de herramientas computacionales como una manera eficiente y precisa de complementar estudios tanto teóricos como experimentales [140]. Es decir, a través de la solución numérica de las ecuaciones, efectos no lineales muy tediosos o complicados de manejar de manera formal se vuelven abordables, ampliando así la capacidad de análisis respecto a una gran cantidad de estudios. En este sentido, tal como fue dicho en el Cap. 7, en el caso de plasmas espaciales, una buena y ampliamente aceptada manera de utilizar estas herramientas computacionales ha sido el uso de simulaciones de tipo híbridas. Durante la últimas décadas se han desarrollado una gran cantidad de códigos híbridos, y existe una gran variedad de trabajos en las cuales se han utilizado simulaciones híbridas [24, 77–80, 127–132]. En particular, las simulaciones basadas en modelos híbridos con electrones no masivos han sido las más utilizadas, y corresponden al método estándar de complementar trabajos tanto teóricos como observacionales [77, 79, 80, 131–133]. Además, este tipo

de simulaciones es el mismo que ha sido modificado y utilizado en la implementación de los modelos de expansión descritos en el Cap. 7 [123, 145, 147–149].

En relación a este trabajo de tesis, tal como fue expuesto en el Cap. 7, además de poder incluir efectos no lineales ausentes en un análisis cuasilineal, al resolver las ecuaciones híbridas en el espacio real no se presenta la limitación de tener que elegir alguna rama de la relación de dispersión, presente en el análisis cuasilineal desarrollado. Luego, a través de un análisis en base a simulaciones híbridas podría ser posible la observación de otro tipo de propiedades no lineales, o bien los mismos mecanismos descritos por el modelo cuasilineal (principalmente la interacción resonante entre ondas y partículas) se podrían ver de manera más clara o cuantitativamente distinta. De esta manera, la realización de simulaciones híbridas, y simulaciones híbridas con expansión, es una manera de enriquecer el estudio sobre la aceleración y calentamiento de iones, y además presenta una interesante vía de comparación de los resultados del modelo teórico cuasilineal aquí propuesto.

En una simulación híbrida la idea básica consiste en resolver numéricamente las ecuaciones para la evolución temporal del campo electromagnético y las partículas, considerando los iones como partículas y los electrones como un fluido. Es decir, en la simulación se calculan y evolucionan numéricamente el campo magnético, el campo eléctrico y la trayectoria de cada ión debido a las fuerzas electromagnéticas, todo esto a través del método de *Particle in Cell* o PIC. A continuación se presenta un breve resumen de los aspectos más importantes a considerar al utilizar un código híbrido.

Este capítulo se estructura de la siguiente manera. Primero se analizan los alcances de la elección del sistema de referencia en las relaciones de neutralidad, cuasineutralidad y la normalización de las ecuaciones. Luego, se revisa brevemente el

algoritmo utilizado para realizar las simulaciones, mostrando las ecuaciones básicas y algunos detalles en relación a la técnica y los parámetros numéricos necesarios para una simulación *Particle in Cell* [139–141] utilizada. Finalmente, a partir de las transformaciones de coordenadas introducidas en la Sec. 7.2, se obtienen las ecuaciones para la velocidad y posición de las partículas, en el sistema de referencia de la caja en expansión.

8.1. Consideraciones sobre el sistema de referencia

Al igual que en el caso cuasilineal es necesario elegir un sistema de referencia en el cual se midan las cantidades y, en particular, se escriban las relaciones de neutralidad y cuasineutralidad (ausencia de corrientes paralelas al campo de fondo). Para un plasma compuesto de electrones con densidad n_e y deriva paralela V_e , protones con densidad n_p y deriva paralela V_p , y un número de especies iónicas con densidades n_μ , grado de ionización z_μ y deriva paralela al campo magnético de fondo V_μ , estas dos relaciones vienen dadas por

$$n_e = n_p + \sum_{\mu} z_{\mu} n_{\mu}, \quad (8.1)$$

para la neutralidad, y

$$n_e V_e = n_p V_p + \sum_{\mu} z_{\mu} n_{\mu} V_{\mu}, \quad (8.2)$$

para la cuasineutralidad.

En la literatura sobre simulaciones híbridas es ampliamente aceptado utilizar como sistema de referencia un sistema solidario a los electrones ($V_e = 0$), y además normalizar las densidades a la densidad electrónica. Así, definiendo $\eta_{\mu} = n_{\mu}/n_e$, las relaciones (8.1) y (8.2) se reducen a una relación únicamente para las densidades y

velocidades de las especies iónicas (incluyendo protones) que se expresan como

$$1 = \eta_p + \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} \quad (8.3)$$

y

$$\eta_p U_p = - \sum_{\mu} z_{\mu} \eta_{\mu} U_{\mu}, \quad (8.4)$$

donde las velocidades U_j son las velocidades de cada especie normalizadas a la velocidad de Alfvén local $V_{Ap} = B_0 / (4\pi n m_p)^{1/2}$. Finalmente, definiendo las velocidades relativas $U_{\mu,p} = U_{\mu} - U_p$ entre cada especie y los protones, se tiene que

$$U_p = - \sum_{\nu} z_{\nu} \eta_{\nu} U_{\nu,p}, \quad (8.5)$$

$$U_{\mu} = \eta_p U_{\mu,p} + \sum_{\nu \neq \mu} z_{\nu} \eta_{\nu} (U_{\mu,p} - U_{\nu,p}). \quad (8.6)$$

De esta manera, a partir del sistema de referencia escogido y las definiciones realizadas, es posible eliminar del análisis la especie electrónica y así centrarse solamente en los iones positivos. Con las Ec. (8.5), (8.6) queda de manifiesto que en este sistema de referencia lo que realmente importa son las velocidades relativas entre las especies. En el caso de un plasma con electrones, protones y partículas α , en el sistema de referencias escogido, para mantener la relación (8.4), si se presenta una aceleración preferencial de las partículas α entonces los protones deben acelerar en la dirección contraria. Es decir, al acelerar los iones He^{+2} , la cantidad que ha crecido corresponde a $U_{\alpha,p}$. En otras palabras, cualquier cambio en $U_{\alpha,p}$ considera un cambio para ambas especies dado por (8.5) y (8.6), considerando $\mu, \nu = \alpha$.

Por otro lado, debido a la relación de neutralidad (8.1) que define la densidad n , cabe destacar que la normalización de las densidades ha sido efectuada en relación a la densidad electrónica $n_e \equiv n$, y no en relación a la densidad protónica n_p , escogida en el análisis lineal y cuasilineal de los Caps. 3 y 4, respectivamente. Asimismo, esta

densidad n es la utilizada al definir la frecuencia de plasma ω_{pp} y la velocidad de Alfvén. Por lo tanto, si bien se utilizan las mismas definiciones, la normalización de todas las cantidades es ligeramente distinta al caso cuasilineal. Este hecho será tomado en cuenta al analizar y comparar los resultados de las simulaciones respecto al análisis teórico.

8.2. El método *Particle in Cell* (PIC)

La realización de una simulación híbrida requiere resolver, en un tiempo t , de manera consistente el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones de posición y velocidad para cada partícula, más las ecuaciones híbridas de los campos introducidas en el Cap. 7. En el método PIC, a grandes rasgos, se procede de la siguiente manera (ver esquema en la Fig. 8.1): A partir de los valores iniciales de los campos se calcula la fuerza de Lorentz \mathbf{F}_i que actúa sobre la partícula i -ésima y se resuelven las ecuaciones de movimiento para todas las partículas. Con este resultado actualizado de la trayectoria de cada partícula, se encuentran la velocidad \mathbf{U}_i , la presión y densidad electrónica, valores con los cuales, a través de las ecuaciones híbridas, se calculan los valores de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Finalmente, con los valores de los campos se encuentra la nueva fuerza de Lorentz en el tiempo $t + \Delta t$, y así sucesivamente.

Para realizar la solución numérica de las ecuaciones se discretiza el espacio en una grilla espacial, dividiendo así el espacio en N_g celdas. En este caso, esa grilla es unidimensional y divide una línea de largo L en N_g celdas de largo ΔX . Inicialmente cada celda contiene una cantidad de iones de cada una de las especies, más un fluido de electrones no masivos. Tanto las partículas como el fluido pueden moverse libremente entre celdas y no se consideran las colisiones. Las interacciones entre las partículas son entonces a través de los campos producidos por las densidades de

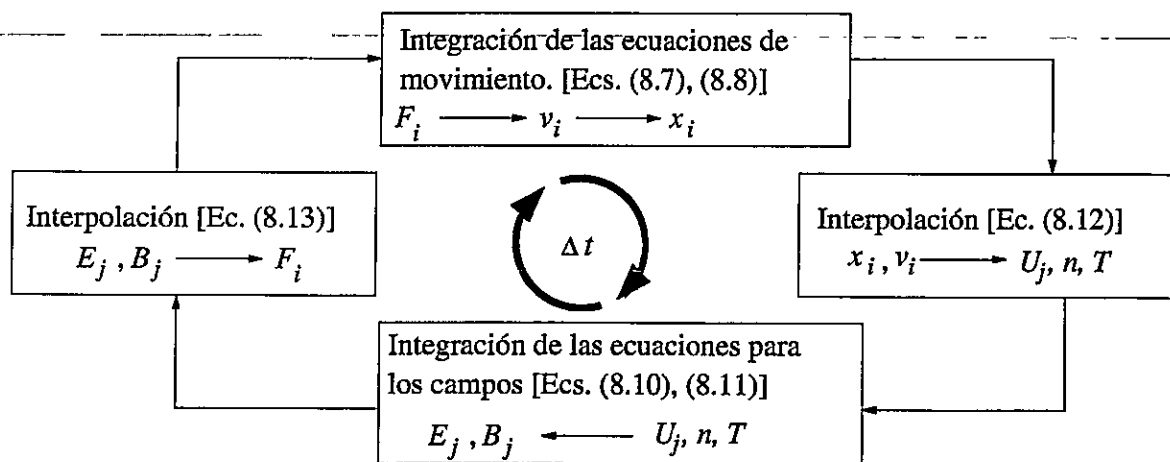


Figura 8.1: Procedimiento código PIC para actualizar todas las cantidades simuladas en un paso de tiempo Δt .

carga y corriente. Aquí, μ es el índice de especie, y N_μ el número total de partículas de la especie μ -ésima, el número total de partículas corresponde a $N = \sum_\mu N_\mu$.

Sean $\mathbf{x}^{\mu,i}$ y $\mathbf{v}^{\mu,i}$ la posición y velocidad de la partícula i -ésima de la especie μ -ésima. Para seguir la trayectoria de esta partícula en el espacio de fase se resuelven las ecuaciones de movimiento

$$m_\mu \frac{d\mathbf{v}^{\mu,i}}{dt} = q_\mu \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}^{\mu,i} \times \mathbf{B} \right) \quad (8.7)$$

y

$$\frac{d\mathbf{x}^{\mu,i}}{dt} = \mathbf{v}^{\mu,i}, \quad (8.8)$$

donde m_μ, q_μ son la carga y masa de la partícula, respectivamente, \mathbf{E}, \mathbf{B} corresponden a los campos eléctrico y magnético y c es la velocidad de la luz. Como en este caso se considera solamente una coordenada espacial para un plasma con un campo magnético de fondo $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{x}$, al resolver solamente la dirección paralela al campo entonces, en vez de (8.8), se trabaja únicamente la componente en la dirección \hat{x} :

$$\frac{dx^{\mu,i}}{dt} = v_x^{\mu,i}. \quad (8.9)$$

Además, autoconsistentemente se necesita resolver la evolución de los campos en cada punto j de grilla. Esta dinámica está regida por las ecuaciones de Maxwell, que en el caso de una descripción híbrida del plasma (ver Sec. 7.1.1) se pueden expresar como

$$\frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U}_{i,j} \times \mathbf{B}_j) - \frac{c}{4\pi en_j} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}_j) \times \mathbf{B}_j] \quad (8.10)$$

y

$$\mathbf{E}_j = -\frac{1}{c} \mathbf{U}_{i,j} \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi en_j} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{k_B T_e}{en_j} \nabla n_j, \quad (8.11)$$

donde $\mathbf{U}_{i,j}$ es la velocidad promedio obtenida al sumar vectorialmente las velocidades de todas las partículas en la celda j -ésima. Además, en cada celda se ha considerado una presión escalar $P_{e,j} = n_j k_B T_{e,j}$ para el fluido electrónico, donde $T_{e,j}$, n_j son la temperatura (considerada constante) y densidad electrónica en la celda j , respectivamente. k_B es la constante de Boltzmann.

En el método PIC las cantidades macroscópicas del plasma y los campos se calculan solamente en los puntos de grilla, pero las partículas pueden moverse libremente a lo largo de todo el rango de la simulación. De este modo, se hace necesario interpolar los valores de las cantidades calculadas en los puntos de grilla, para así obtener funciones continuas que puedan ser evaluadas en las posiciones de cada una de las partículas. Para esto, en este método se considera que cada partícula tiene una *forma* definida y se introduce el concepto de "macropartícula". De esta manera, para la partícula i -ésima en la posición x_i se define la así llamada función de forma $\mathcal{S}(x - x_i)$ de tal manera que, por ejemplo, la densidad de carga ρ y el campo eléctrico se aproximan por

$$\rho(x) = \sum_i q_j \delta(x - x_i) \approx \sum_i q_i \mathcal{S}(x - x_i) \quad (8.12)$$

y

$$\mathbf{E}(x) = \sum_j \mathbf{E}_j \mathcal{S}(x - x_j), \quad (8.13)$$

donde la suma en j considera todas las partículas y la suma en i todos los puntos de grilla. Es importante notar que se ha elegido la misma función de forma para ambas interpolaciones debido a que ambas cantidades aparecen en las mismas ecuaciones. De esta forma los cálculos de las densidades de carga y corriente son consistentes con las expresiones para los campos, y así la interpolación mediante la función \mathcal{S} permite que no se introduzcan fuerzas no físicas sobre las partículas [139–141].

Además, dado que la función de forma \mathcal{S} depende de las posiciones espaciales de cada punto de grilla, entonces también depende de la manera en que se ha discretizado el espacio, así como también de las condiciones de borde del sistema. Luego, en caso de tener una grilla con puntos no equidistantes, las funciones de forma, y por lo tanto las macropartículas, no son todas iguales, introduciendo problemas como la aparición de fuerzas no físicas, incluso si la función de forma utilizada es la misma para partículas y campos. En ese sentido, discretizar el espacio a partir de representaciones no cartesianas planas (por ejemplo coordenadas cilíndricas o esféricas) puede hacer imposible definir funciones de forma adecuadas. En el caso del viento solar, que corresponde a un plasma en expansión esférica radial, el uso de coordenadas esféricas sería lo adecuado. Pero por las consideraciones anteriores, en una simulación PIC lo mejor es utilizar, de todos modos, coordenadas cartesianas. La idea del modelo híbrido de expansión (Sec. 7.2) es justamente tener una solución para este problema, en que, a través de ciertas transformaciones de coordenadas de traslación y estrechamiento, se emula la expansión esférica natural del viento solar, pero utilizando coordenadas cartesianas.

Es importante notar que, mientras se cumplan ciertas condiciones básicas (por

ejemplo, a partir de (8.12) \mathcal{S} debe tener norma igual a 1 [140, 141]) la elección de la función de forma es libre y es posible encontrar en la literatura funciones tipo escalón, funciones lineales o expresiones de más alto orden que consideran macropartículas que utilizan una, dos, tres o más celdas en su construcción [139–141]. Debido a que \mathcal{S} reemplaza a la delta de Dirac, mientras más suave sea la función de forma, más precisión se tiene, pero al mismo tiempo las operaciones necesarias para realizar las simulaciones crecen en número y complejidad. En el caso de esta tesis se utiliza una función \mathcal{S} de orden dos, utilizando tres celdas para cada macropartícula, a través de funciones cuadráticas que se aproximan a una gaussiana.

En resumen, para realizar una simulación híbrida en una dimensión espacial vía el método PIC se requiere resolver numéricamente el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones para cada partícula (8.7) y (8.9), más las ecuaciones de los campos (8.10) y (8.11). Para esto, a partir de los valores en un tiempo t de los campos se calcula la fuerza de Lorentz \mathbf{F}_i que actúa sobre la partícula i -ésima y se resuelven las ecuaciones de movimiento para todas las partículas. Con este resultado actualizado de la trayectoria de cada partícula, vía interpolación con la función \mathcal{S} , se encuentran las velocidades $\mathbf{U}_{i,j}$ y las densidades n_j , valores con los cuales a través de las ecuaciones híbridas se integran numéricamente los valores de los campos \mathbf{E}_j y \mathbf{B}_j en cada punto de grilla. Finalmente, con los valores de los campos en la grilla, vía la interpolación mediante la función \mathcal{S} , se encuentra la nueva fuerza de Lorentz en el tiempo $t + \Delta t$, y así sucesivamente.

De esta manera, definiendo el tiempo normalizado τ mediante

$$\tau = \Omega_p t, \quad (8.14)$$

la velocidad promedio $\mathbf{u}_{i,j}$ por

$$\mathbf{u}_{i,j} = \frac{\mathbf{U}_{i,j}}{V_A}, \quad (8.15)$$

la cantidad M_μ y las velocidades y posiciones normalizadas de la partícula i -ésima de la especie μ

$$M_\mu = \frac{z_\mu m_\mu}{m_p}, \quad \mathbf{w}^{\mu,i} = \frac{\mathbf{v}^{\mu,i}}{V_A}, \quad \text{y} \quad \xi^{\mu,i} = \frac{x^{\mu,i}}{\lambda_p}, \quad (8.16)$$

los campos electromagnéticos normalizados

$$\mathbf{b}_j = \frac{\mathbf{B}_j}{B_0}, \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_j = \frac{c}{V_A} \frac{\mathbf{E}_j}{B_0}, \quad (8.17)$$

y

$$\beta_{e,j} = \frac{2k_B T_{e,j}}{m_e V_A^2}, \quad \eta_j = \frac{n_j}{n}, \quad (8.18)$$

como el parámetro β y la densidad electrónica normalizada a la densidad promedio en cada celda, respectivamente, el sistema de ecuaciones que se resuelve en la simulación híbrida en una dimensión corresponde a

$$\frac{d\xi^{\mu,i}}{d\tau} = w_x^{\mu,i}, \quad (8.19)$$

$$\frac{d\mathbf{w}^{\mu,i}}{d\tau} = M_\mu (\mathbf{e}_j + \mathbf{w}^{\mu,i} \times \mathbf{b}_j), \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial \tau} = \nabla \times (\mathbf{u}_{i,j} \times \mathbf{b}_j) - \frac{1}{\eta_j} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{b}_j) \times \mathbf{b}_j], \quad (8.21)$$

$$\mathbf{e}_j = -\mathbf{u}_{i,j} \times \mathbf{b}_j + \frac{1}{\eta_j} (\nabla \times \mathbf{b}_j) \times \mathbf{b}_j - \frac{\beta_{e,j}}{2\eta_j} \nabla \eta_j. \quad (8.22)$$

Aquí, el operador ∇ ha sido expresado en unidades de λ_p^{-1} . Además, es importante notar que, a diferencia del caso cuasilineal, tanto la velocidad de Alfvén local

$$V_A = \left(\frac{B_0^2}{4\pi n m_p} \right)^{1/2}, \quad (8.23)$$

como la longitud inercial del protón

$$\lambda_p = \frac{V_A}{\Omega_p} = \left(\frac{m_p c^2}{4\pi n e^2} \right)^{1/2}, \quad (8.24)$$

han sido definidas en términos de la densidad promedio n , y no respecto la densidad de los protones.

En el presente trabajo, a través de la utilización de un código escrito en el lenguaje Fortran [150], las derivadas espaciales de las ecuaciones para los campos se llevaron a cabo mediante un método pseudoespectral tipo *Fast Fourier Transform* (FFT) [151] y la integración temporal del sistema se realizó a través de un método Runge-Kutta racional [152].

8.3. Simulaciones híbridas para un plasma en expansión

Como se vio en el Cap. 7, el modelo de expansión permite modelar un plasma en expansión esférica (la *caja* en expansión) a partir de una representación cartesiana de las coordenadas. Para esto, se introduce una transformación entre dos sistemas de coordenadas. El primero, S , en reposo con coordenadas (x, y, z) , y el segundo S' solidario al plasma en movimiento, con coordenadas

$$x' = x + R(t), \quad (8.25)$$

$$y' = \frac{1}{a(t)}y, \quad (8.26)$$

$$z' = \frac{1}{a(t)}z, \quad (8.27)$$

donde $R(t) = R_0 + U_0t$ describe la posición del origen del sistema S' en el sistema S . Además, $a(t) = R(t)/R_0$, o en términos del tiempo normalizado ya introducido [Ec. (8.14)]

$$a = a(\tau) = 1 + \epsilon\tau, \quad (8.28)$$

con $\epsilon = U_0/(\Omega_p R_0)$ un parámetro adimensional. Así, para un observador moviéndose junto con la caja, la caja no cambia su volumen, pero para un observador en reposo

respecto al sistema S , la caja se expande a medida que se aleja del origen debido a que $a(\tau)$ es monótonamente creciente.

Tal como se dedujo en el Cap. 7, a partir de las transformaciones (7.25)–(7.27) para las derivadas espaciales y (7.34) para la derivada temporal, se pueden escribir todas las ecuaciones del modelo híbrido en el sistema S' . Dado que es justamente el sistema de referencia solidario al plasma en expansión el sistema de referencia a utilizarse para emular la expansión radial, es en S' donde deben obtenerse las ecuaciones, resolverlas y así llevar a cabo las simulaciones.

De esta manera, las ecuaciones para el campo eléctrico y magnético en S' se expresan como (ver Sec. 7.2.2)

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\mathbf{U}'_i \times \mathbf{B}' + \frac{1}{4\pi en} (\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}' - \frac{1}{en} \nabla' (nk_B T_e), \quad (8.29)$$

para el campo eléctrico, y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} + \mathbf{B}'(\nabla' \cdot \mathbf{U}'_i) - (\mathbf{B}' \cdot \nabla')\mathbf{U}'_i + (\mathbf{U}'_i \cdot \nabla')\mathbf{B}' \\ + \frac{c}{4\pi en} \nabla' \times [(\nabla' \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] = -\frac{U_0}{R} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{B}' \end{aligned} \quad (8.30)$$

para el campo magnético. El superíndice ' indica que las cantidades y operadores están medidos y expresados en el sistema S' . Además, $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}}$ está dado por

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.31)$$

Por otro lado, al igual que en el caso de las simulaciones híbridas sin expansión, es necesario resolver la trayectoria de todas las partículas en cada instante de tiempo. En el caso de la evolución de las velocidades, para una partícula con velocidad \mathbf{v}_i , la velocidad \mathbf{v}'_i en el sistema S' está dada por la transformación galileana

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{U}_0, \quad (8.32)$$

donde, expresada en S' , la velocidad \mathbf{U}_0 se puede escribir como [145]

$$\mathbf{U}_0 = U_0 \left(\hat{x} + \frac{y'}{R_0} \hat{y} + \frac{z'}{R_0} \hat{z} \right). \quad (8.33)$$

Así, a partir de esta última expresión, las transformaciones para las derivadas (7.25)–(7.27) y (7.34), y aplicando la regla de la cadena, se obtiene que

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv'_i}{dt'} + \frac{U_0}{R_0} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}'_i, \quad (8.34)$$

con $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}}$ el tensor de proyección dado por

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.35)$$

De igual manera, en el caso de las posiciones \mathbf{x}'_i de cada partícula, a partir de las transformaciones (8.25)–(8.27) y la transformación galileana para las velocidades (8.32), se obtiene que, en S' , las derivada temporal de \mathbf{x}'_i viene dada por

$$\frac{d\mathbf{x}'_i}{dt} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}(t) \cdot \mathbf{v}'_i, \quad (8.36)$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}(t)$ es otro tensor diagonal, dependiente del tiempo, dado por

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (8.37)$$

Es decir, en el sistema solidario a la caja la velocidad en la coordenada x de expansión es la misma que en el sistema S , pero en el plano perpendicular las velocidades se amplifican a medida que la caja se aleja y se expande.

En resumen, en el caso de una simulación híbrida con expansión en una dimensión, en términos de las variables normalizadas [Ecs. (8.16)–(8.18), (8.14)–(8.15)],

expresadas en el sistema S' , en cada celda j el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\frac{d\xi'^{\mu,i}}{d\tau} = w_x'^{\mu,i}, \quad (8.38)$$

$$\frac{d\mathbf{w}'^{\mu,i}}{d\tau'} = M_\mu \left(\mathbf{e}'_j + \mathbf{w}'^{\mu,i} \times \mathbf{b}'_j \right) - \epsilon \vec{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{w}'^{\mu,i}, \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}'_j}{\partial \tau'} = -\mathbf{b}'_j (\nabla' \cdot \mathbf{u}'_{i,j}) + (\mathbf{b}'_j \cdot \nabla') \mathbf{u}'_{i,j} - (\mathbf{u}'_{i,j} \cdot \nabla') \mathbf{b}'_j \quad (8.40)$$

$$-\frac{1}{\eta_j} \nabla' \times [(\nabla' \times \mathbf{b}'_j) \times \mathbf{b}'_j] - \frac{\epsilon}{a(\tau)} \vec{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{b}'_j, \quad (8.41)$$

$$\mathbf{e}'_j = -\mathbf{u}'_{i,j} \times \mathbf{b}'_j + \frac{1}{\eta_j} (\nabla' \times \mathbf{b}'_j) \times \mathbf{b}'_j - \frac{\beta_{e,j}}{2\eta_j} \nabla' \eta_j,$$

Al igual que en el caso de simulaciones híbridas sin expansión, en el presente trabajo se utilizó una modificación del código híbrido escrito en Fortran [153], por lo que el algoritmo y las técnicas numéricas utilizadas son las mismas ya mencionadas en la Sec. 8.2. Igualmente, la normalización utilizada para la simulación sin expansión se mantuvo y los únicos parámetros que se debieron incluir corresponden a la función $a(\tau)$ [Ec. (8.28)] y el parámetro ϵ , que son los valores que dan cuenta de la expansión.

En síntesis, sobre la base de los dos modelos híbridos descritos en el Cap. 7, en este capítulo se han mostrado las ecuaciones a resolver en una simulación híbrida incluyendo o no expansión, algunas consideraciones sobre las diferencias entre los sistemas de referencia y la normalización utilizadas en la solución cuasilineal y las simulaciones híbridas, así como también los elementos básicos del método de *Particle in Cell* utilizado e implementado para la realización de las simulaciones. Todos estos conceptos serán utilizados en el siguiente capítulo para la realización de simulaciones numéricas, primero de un plasma compuesto de electrones y protones (Sec. 9.1), y luego de un plasma tipo viento solar, compuesto de electrones, protones y una población minoritaria de partículas α (Sec. 9.2).

Capítulo 9

Simulaciones híbridas †

Tal como se discutió en los capítulos anteriores, en este trabajo la realización y análisis de simulaciones híbridas se incluyen principalmente para complementar, y también comparar, el análisis cuasilineal teórico con estudios de tipo numérico computacional completamente no lineales. Luego, de entre las múltiples cantidades físicas posibles de analizar mediante simulaciones computacionales (al conocer los valores de los campos, la posición y la velocidad de todas las partículas en cada celda y en cada paso de tiempo), en este capítulo se trabajarán solamente las mismas cantidades macroscópicas ya estudiadas a partir del modelo cuasilineal para plasmas inicialmente iguales o similares a los ya analizados en los Caps. 5 y 6. De la misma forma, en el presente capítulo se incluye el seguimiento del espectro de campo electromagnético.

La estructura de este capítulo es la siguiente: primero se muestran y analizan los resultados a partir de la realización de simulaciones, con y sin expansión, para un

†Los resultados mostrados en la Sec. 9.1 corresponden a algunos de los resultados contenidos en el artículo "*Computational and theoretical study of the acceleration and heating of protons*", P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz and J. A. Valdivia, *en preparación*. [118].

Los resultados mostrados en la Sec. 9.2 corresponden a algunos de los resultados contenidos en el artículo "*Computational and theoretical study of the acceleration and heating of ions in the solar wind*", P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz and J. A. Valdivia, *en preparación*. [154]

plasma compuesto de electrones y protones interactuando con un espectro tipo gaussiano de fase aleatoria. Luego, se realiza un análisis similar para el caso de un plasma tipo viento solar, compuesto de electrones, protones y una población minoritaria de partículas α . En ambos casos se considera una dimensión espacial (la coordenada x en la dirección del campo magnético de fondo $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{x}$) y tres dimensiones en el espacio de velocidades. Finalmente, se resumen y discuten los principales resultados, revisando las similitudes y diferencias de las soluciones numéricas híbridas con los resultados cuasilineales analizados en los Caps. 5 y 6.

9.1. Simulaciones híbridas de un plasma compuesto de electrones y protones

Como primera aproximación al estudio de la aceleración y calentamiento de iones vía simulaciones computacionales, y para poder comparar con los resultados obtenidos en el análisis cuasilineal, se han realizado simulaciones híbridas incluyendo o no expansión.

Para resolver las ecuaciones para los campos se ha utilizado una grilla en la dirección x , con condiciones de borde periódicas, compuesta de $N_x = 512$ celdas de tamaño $dx = 0.5$, donde inicialmente se tienen 100 partículas por celda. La velocidad y posición iniciales de cada partícula se eligen de manera que en $t = 0$ se tenga una distribución espacialmente homogénea, y que la función de distribución de velocidades sea bi-Maxwelliana. Además, el paso de tiempo normalizado utilizado es $d\tau = 0.025$ y se realizaron 40000 iteraciones hasta alcanzar un tiempo $\tau = 1000$. En términos de las cantidades reales en las regiones de interés, la longitud inercial del protón λ_p es del orden de kilómetros. Luego, la caja de simulación tiene una longitud del orden de los cientos de kilómetros. Además, dado que la frecuencias Ω_p

tiene valores entre 10^3 y 10^4 Hz, el tiempo total es del orden de décimas de segundos o segundos.

Con respecto a los parámetros iniciales del plasma, dado que las ecuaciones se resuelven en el sistema de referencia de los electrones (ver Sec. 8.1) y que solamente se considera una especie iónica, para no tener corrientes paralelas se escoge $U_p = 0$. Además, para comparar la simulación con el análisis hecho en el Cap. 5, se eligieron temperaturas tales que $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 0.01$ y $A_p = 4$. Por otro lado, respecto al campo magnético, debido a que en una dimensión espacial $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)$ (el campo solamente depende de la coordenada x), entonces $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que la componente B_x del campo se mantiene constante igual a B_0 para todo tiempo. Además, para la componente transversal se consideraron dos casos: un espectro gaussiano y ruido blanco. En el caso del espectro gaussiano, se consideró el mismo que en la Sec. 5.1.1, $\varepsilon_y(\tau = 0) = 0.35 \exp(-5y^2)$. En el caso de ruido blanco, se escogió un espectro inicial aleatorio con amplitud $0.01B_0$,

Con las condiciones iniciales ya mencionadas fueron realizadas un número considerable de simulaciones, pero, al igual que en el caso de las soluciones numéricas cuasilineales, en esta sección se muestran los mejores resultados. Además, los resultados numéricos (las temperaturas, espectros y velocidades promedio obtenidas) para las dos elecciones del campo electromagnético inicial difirieron en menos de 10^{-4} . Por lo tanto, en esta tesis se muestra solamente el caso con el espectro inicial gaussiano.

Las simulaciones permiten obtener cantidades macroscópicas para cada celda de simulación, lo que equivale a tener dichas cantidades como función de la posición (coordenada x en este caso). Por su parte, en la teoría cuasilineal, como se puede observar en la Ec. (4.13), se estudian cantidades macroscópicas promediadas espacialmente sobre una longitud de referencia del plasma. Entonces, para poder comparar

los resultados de las simulaciones con la teoría cuasilineal, aquéllos deben ser promediados con respecto a la longitud de referencia, que en este caso se ha escogido igual a la longitud de la caja de simulación. Así, en este capítulo y el siguiente, cantidades como temperatura, anisotropía térmica, velocidad de deriva o campo magnético total corresponderán a cantidades promediadas sobre todas las celdas de la caja de simulación. Además, para reducir el ruido numérico, las curvas que se presentan son las obtenidas luego de realizar un promedio móvil [155] con un 10% de los datos para cada una de las cantidades como función del tiempo. Es decir, el valor mostrado de cierta cantidad en un tiempo τ , corresponde al promedio entre dicha cantidad obtenida en el intervalo $\tau \pm \Delta\tau/2$, donde $\Delta\tau$ corresponde al 10% del total del intervalo de tiempo simulado.

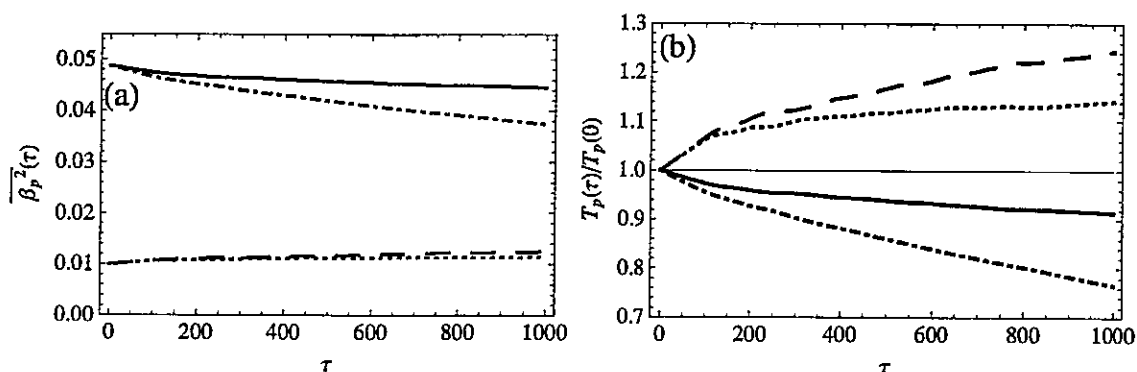


Figura 9.1: (a) Temperatura de los protones como función del tiempo, para la simulación híbrida, con condiciones iniciales $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 0.01$ y $A_p = 4$. Curva sólida: temperatura perpendicular simulación sin expansión ($\epsilon = 0$); curva segmentada: temperatura paralela simulación sin expansión; curva punteada-segmentada: temperatura perpendicular simulación con expansión ($\epsilon = 10^{-4}$); curva punteada: temperatura paralela simulación con expansión. (b) Temperaturas de los protones, normalizadas respecto a sus valores iniciales. Las curvas sólida, segmentada, punteada-segmentada y punteada corresponden a las mismas temperaturas mostradas en (a).

En la Fig. 9.1(a) se muestra la evolución temporal de las temperaturas perpendicular y paralela de los protones para una simulación híbrida con condiciones iniciales

$\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 0.01$ y $A_p = 4$. En el caso de las simulaciones híbridas sin expansión ($\epsilon = 0$), se observa un leve calentamiento paralelo (curva segmentada) y un enfriamiento perpendicular. Al igual que en estudio cuasilineal, tales cambios son más evidentes cuando se grafican las temperaturas normalizadas a sus valores iniciales. La Fig. 9.1(b) muestra que la temperatura paralela crece aproximadamente en un 25 %, y la temperatura perpendicular cae al 90 % de su valor inicial. De esta manera, la anisotropía térmica, inicialmente igual a 4, relaja a un valor igual a $A_p(\tau = 1000) \sim 2.6$ al final del intervalo simulado, como puede verse en la curva sólida en la Fig. 9.2(a). Es importante notar que tanto el calentamiento paralelo como el enfriamiento perpendicular, sufren los cambios más importantes antes de $\tau \sim 300$, en la primera parte de la simulación. Para tiempos superiores se observan leves cambios y pareciese que el sistema se acercara a un estado de equilibrio metaestable anisotrópico.

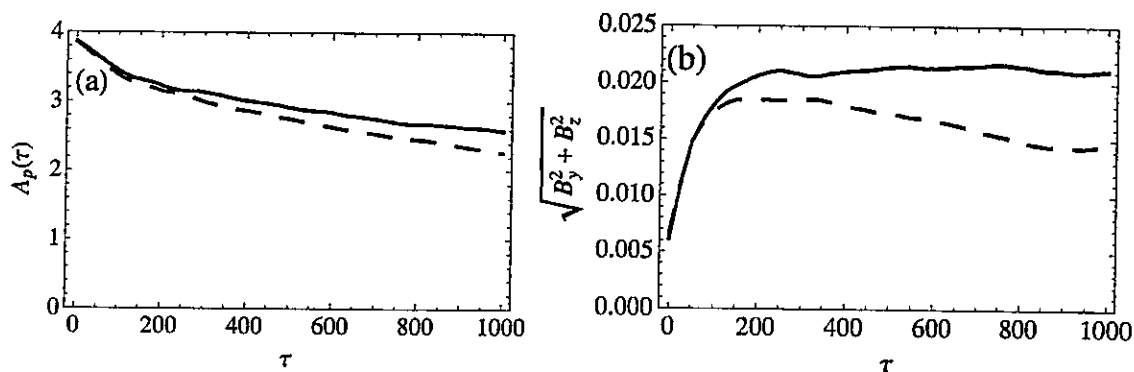


Figura 9.2: (a) Anisotropía térmica de protones, en la simulación híbrida normal (curva sólida) y la simulación híbrida con expansión (curva segmentada), como función del tiempo. Se observa que los efectos de expansión son importantes sólo para tiempos suficientemente grandes. (b) Evolución temporal del campo magnético perpendicular $(B_y^2 + B_z^2)^{1/2}$ normalizado al campo magnético de fondo B_0 . Las curvas sólida y segmentada corresponden a las simulaciones híbridas sin expansión y con expansión, respectivamente.

Por otro lado, en el caso de la simulación incluyendo los efectos de expansión esférica ($\epsilon = 10^{-4}$), en la Fig. 9.1(a) se observa que el calentamiento paralelo (curva

punteada) es más suave que en el caso sin expansión; mientras que el enfriamiento perpendicular (curva punteada-segmentada) es mayor. En la Fig. 9.1(b) se observa que la expansión trunca el proceso de calentamiento paralelo, y para tiempos mayores que $\tau \sim 200$ esta temperatura no sufre mayores cambios, alcanzando un 14 % más que el valor inicial, un 10 % por debajo del caso sin expansión. Por el contrario, cuando se incluye expansión la temperatura perpendicular se enfría más rápido y alcanza un valor final de un 75 % respecto al valor inicial (curva segmentada-punteada). Así, la anisotropía térmica evoluciona más rápido y, al final del intervalo de tiempo simulado, alcanza un valor de $A_p(\tau = 1000) \sim 2.4$, tal como muestra la curva segmentada en la Fig. 9.2(a). En dicha figura, dado que la expansión está regulada por la función $a(\tau) = 1 + \epsilon\tau$, se observa que los efectos de la expansión se vuelven relevantes para tiempos mayores que $\tau \sim 200$, tiempo suficiente para que el factor $\epsilon\tau$ (con $\epsilon = 10^{-4}$) produzca un cambio significativo en la función a . Es importante mencionar que en las zonas de interés (como la corona solar), el parámetro ϵ es del orden de 10^{-5} . Pero, para obtener cambios razonables en tiempos del orden de $\tau \sim 10^3$, ha sido necesario amplificar dicho parámetro, y así poder encontrar los efectos de la expansión en los tiempos mencionados [145]. Cabe destacar, que al igual que en las soluciones cuasilineales, en ambas simulaciones la velocidad de deriva U_p no sufrió ningún cambio considerable y se puede considerar esencialmente constante.

Finalmente, los cambios en los parámetros macroscópicos del plasma deben ir acompañados de la evolución del campo magnético de las ondas electromagnéticas. En la Fig. 9.2(b) se observa que la interacción entre los campos y las partículas genera perturbaciones con una amplitud promedio unas 4 veces mayor que las correspondientes al espectro inicial. Asimismo, en correspondencia con la evolución de las temperaturas, en el caso sin expansión (curva sólida en la figura) este crecimien-

to del campo perpendicular ocurre inicialmente rápido, y para tiempos mayores a $\tau \sim 200$ se satura y pareciese llegar a un valor de equilibrio. Por el contrario, en el caso de la simulación que incluye expansión (curva segmentada), luego del crecimiento inicial el campo comienza a decaer, y hacia el final del intervalo simulado disminuye a un 75 % aproximado del valor final del campo en la simulación normal. Al igual que en la evolución de las anisotropías, los efectos de la expansión son apreciables solamente para tiempos mayores a $\tau \sim 200$.

La disminución de las temperaturas perpendiculares y del campo magnético promedio respecto a las mismas cantidades en la simulación híbrida sin expansión, podrían inducir a error, debido a que una relajación más rápida de la anisotropía debería estar asociada a una mayor absorción de energía por parte de las ondas. Luego, si la anisotropía decrece más rápido cuando se incluye expansión, se esperaría que las perturbaciones crezcan más rápidamente. Sin embargo, como se discutió en el Cap. 7, una de las propiedades del modelo híbrido con expansión es que el campo magnético disminuye con la distancia por un efecto geométrico, y que además el plasma se enfría al expandirse. Así, la relajación más rápida en el caso con expansión se entiende debido al mayor enfriamiento perpendicular, más que a un mayor calentamiento paralelo. Por lo tanto, tal como se observa en la Fig. 9.2(b), a medida que la caja se desplaza radialmente, las perturbaciones disminuyen su amplitud.

9.2. Simulaciones híbridas de un plasma tipo viento solar

Teniendo en cuenta los resultados de las simulaciones realizadas para el plasma simple de electrones y protones, es interesante notar que los efectos de la no linealidad de más alto orden, así como también la presencia del parámetro ϵ en el caso

de expansión, producen algunas diferencias y similitudes notables respecto al caso cuasilineal (esto se desarrollará en detalle en la sección final de este capítulo). En esta sección se realizará un estudio análogo, con un plasma compuesto de electrones, protones y una concentración minoritaria de partículas α , caso analizado con la teoría cuasilineal en el Cap. 6

De la misma forma que en la Sec. 9.1, para resolver las ecuaciones se utilizó una grilla de 512 celdas de tamaño $dx = 0.5$, cada una de las cuales inicialmente contiene en cada celda 100 partículas de cada especie (protones y partículas α). Asimismo, la posición de cada una de las partículas se escoge de manera tal que exista una distribución uniforme de partículas para la cual $n_p = 0.92$ y $n_\alpha = 0.04$, y así cumplir la neutralidad (8.3), con un 4% de iones He^{+2} . En el caso de las velocidades, con un generador de números aleatorios se inicializaron las velocidades de modo que cada una de las funciones de distribución tenga parámetros macroscópicos normalizados

$$U_p = -0.016, \quad \bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-3}, \quad A_p = 0, \quad (9.1)$$

para los protones, y

$$U_\alpha = 0.184, \quad \bar{\beta}_{\alpha\parallel}^2 = 4 \times 10^{-3}, \quad A_\alpha = 5, \quad (9.2)$$

para las partículas α . Nótese que las velocidades de deriva escogidas son tales que la deriva relativa entre las especies es $U_{\alpha,p} = 0.2$ [ver Ecs. (8.5) y (8.6)], y en el sistema de referencia del laboratorio $U_p = 0.1$ y $U_\alpha = 0.3$, tal como en el caso cuasilineal.

En general, los parámetros de plasma utilizados son los mismos que en el caso híbrido, salvo por la temperatura paralela de los protones, por razones de estabilidad numérica: en vez de $\bar{\beta}_{p\parallel}^2 = 10^{-4}$ se eligió un valor 10 veces mayor. Además, es importante notar que, para cumplir la relación de ausencia de cuasineutralidad [Ec. (8.4)],

la existencia de $U_{\alpha,p} \neq 0$ requiere que la deriva de una de las dos especies (en este caso los protones) sea menor que cero. Es decir, en este modelo, los electrones avanzan ligeramente más rápido que los protones. El paso de tiempo utilizado en la solución numérica de las ecuaciones de partículas y campos fue $d\tau = 0.025$, realizándose 40000 iteraciones, desde $\tau = 0$ hasta $\tau = 1000$. Finalmente, con el mismo fin de comparar con el caso cuasilineal, el campo magnético real en el plano y - z se inicializó como un espectro gaussiano de perturbaciones electromagnéticas $\epsilon_y = 0.25 \exp(-10y^2)$, con fase aleatoria.

Con los valores iniciales mencionados se realizaron simulaciones híbridas sin expansión y dos casos distintos de simulaciones incluyendo expansión: $\epsilon = 10^{-4}$ y $\epsilon = 10^{-3}$. Esto se realizó para estudiar más a fondo el rol del parámetro ϵ a lo largo de las simulaciones, teniendo presente que en las zonas de interés dicho parámetro suele ser todavía menor, del orden de $\epsilon = 10^{-5}$. Cabe destacar que, al igual que en las simulaciones híbridas para electrones y protones, ninguna de las velocidades de deriva presentó cambios considerables y en esta discusión se consideran como constantes.

En la Fig. 9.3 se observan las temperaturas paralelas (curvas segmentadas) y perpendiculares (curvas sólidas) para cada una de las especies, y para las tres elecciones distintas de ϵ , representadas por curvas de distinto grosor. Así, las curvas más gruesas corresponden a la simulación sin expansión ($\epsilon = 0$), la segunda más gruesa a la simulación con $\epsilon = 10^{-4}$ y la más delgada a la simulación con $\epsilon = 10^{-3}$. En el caso de la simulación sin expansión, en el panel (a) se observa un calentamiento anisotrópico en el cual la temperatura perpendicular (curva sólida más gruesa) crece en mayor medida. Respecto a los valores iniciales, en el panel (b) se observa que la temperatura perpendicular alcanza un valor final de $T_{p\perp} \sim 1.4T_{p\perp}(0)$, mientras que

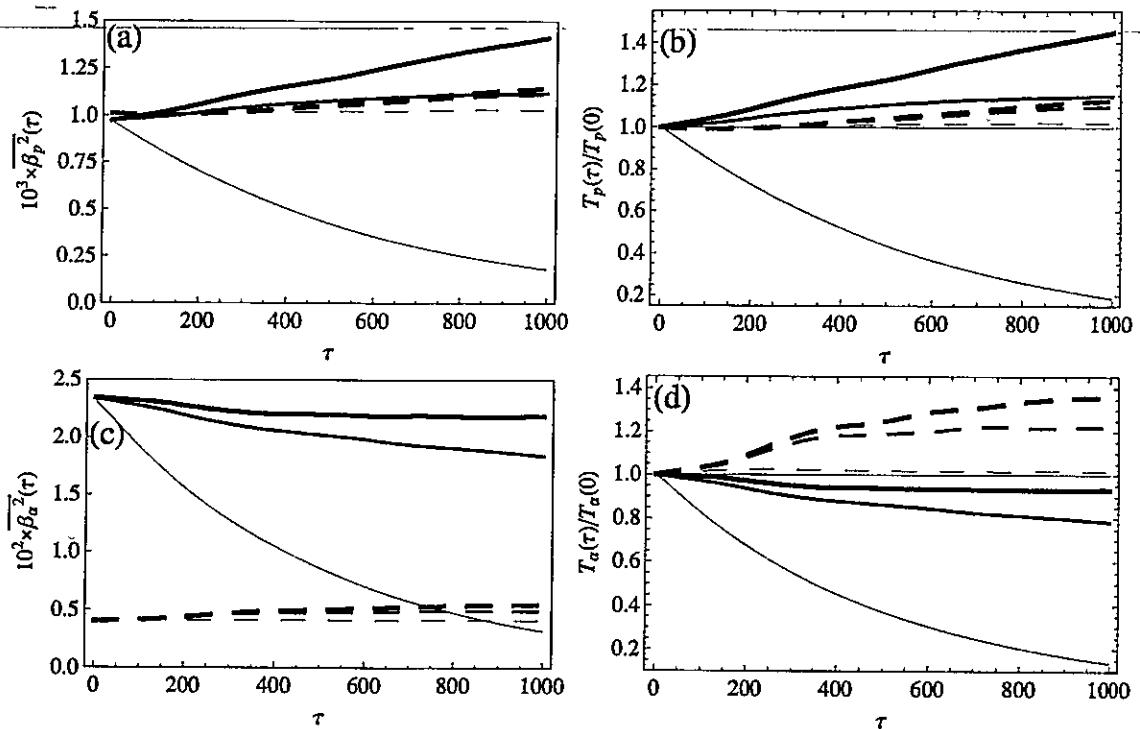


Figura 9.3: (a) Temperaturas normalizadas de protones como función del tiempo para las simulaciones híbridas. Las curvas sólidas corresponden a la temperatura perpendicular $\bar{\beta}_{p\perp}^2(\tau)$ y las curvas segmentadas a la temperatura paralela $\bar{\beta}_{p\parallel}^2(\tau)$. El grosor de la curva corresponde a las tres distintas elecciones del parámetro ϵ , correspondiendo la curva más gruesa a $\epsilon = 0$, la segunda más gruesa a $\epsilon = 10^{-4}$ y la más delgada a $\epsilon = 10^{-3}$. (b) Temperaturas de protones como función del tiempo respecto a su valor inicial $T_p(0)$. Las curvas sólidas y segmentadas corresponden a las curvas mostradas en el panel (a). De la misma forma, el grosor de cada curva también indica las mismas opciones de ϵ . (c) Misma situación que en (a), pero en el caso de las partículas α . (d) Misma situación que en (b), pero para las partículas α .

la temperatura paralela crece en no más de un 15%. De esta manera, la distribución de protones, inicialmente isotrópica, hacia el final de intervalo de tiempo simulado alcanza un valor de $A_p \sim 0.2$, tal como se observa en la curva segmentada más gruesa en la Fig. 9.4(a).

Para las partículas α , dado que esta especie se inicializa de manera anisotrópica [Ec. (9.2)] la situación es distinta. En la Fig. 9.3(c) se muestran las temperatu-

ras normalizadas tanto paralela (curvas segmentadas) como perpendicular (curvas sólidas). En el caso sin expansión representado por las curvas más gruesas, lo que se obtuvo fue un leve enfriamiento perpendicular, acompañado de un calentamiento paralelo. Así, en la Fig. 9.3(d), se observa justamente que, mientras la temperatura perpendicular disminuye en menos de un 10%, la temperatura paralela alcanza un valor de $T_{p\parallel} \sim 1.4T_{p\parallel}(0)$. Luego, la anisotropía disminuye desde $A_\alpha = 5$ hasta $A_\alpha \sim 3$ hacia el final del intervalo [ver Fig. 9.4(a)]. Cabe mencionar que para ambas especies, los valores finales encontrados para los parámetros macroscópicos resultaron ser bastante estables. Esta simulación se realizó también hasta el doble del tiempo $\tau = 2000$ y los valores finales obtenidos no variaron considerablemente respecto de los resultados aquí mostrados. Es decir, se puede decir que estas simulaciones no lineales saturan para tiempos del orden de 1000 y el sistema relaja a una especie de estado de equilibrio en el cual existen ondas de cierta amplitud que se propagan a través del plasma, tal como se discutirá más adelante.

En el caso de la simulación con $\epsilon = 10^{-4}$, en las Figs. 9.3 y 9.4 se observa que los efectos de expansión son leves. Así, cualitativamente la evolución de las temperaturas y anisotropías de cada especie es la misma que en el caso sin expansión, pero los valores finales son levemente distintos. Para los protones, en la Fig. 9.3(b) se observa un calentamiento anisotrópico con una leve preferencia en el calentamiento perpendicular (segunda curva sólida más gruesa), llegando esta temperatura a un 15% más que el valor inicial, mientras que la temperatura paralela crece en un 10% (segunda curva segmentada más gruesa en la figura). De esta manera, en la Fig. 9.4(a) se observa que la anisotropía térmica A_p no sufre cambios considerables y se mantiene esencialmente constante. De todas maneras, dado que a medida que avanza el tiempo el efecto de expansión se amplifica, podría suceder que para tiempos

$\tau \sim \epsilon^{-1}$ se alcancen valores de las temperaturas tales que $A_p < 0$ y por lo tanto, al igual que en el caso cuasilineal, se podrían llegar a producir inestabilidades de tipo *fire-hose*.

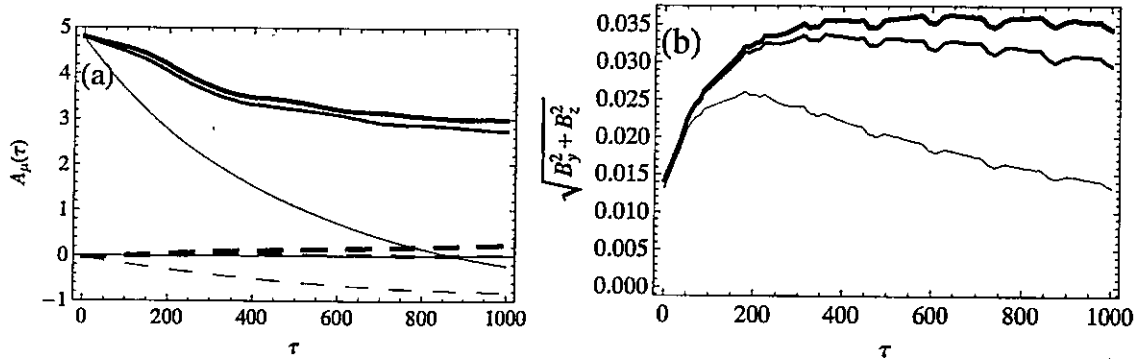


Figura 9.4: (a) Anisotropías térmicas como función del tiempo en las simulaciones híbridas. Las curvas sólidas y segmentadas representan a las anisotropías para iones He^{+2} y protones, respectivamente. (b) Evolución del campo magnético promedio de las perturbaciones normalizado al campo de fondo. El grosor de todas las curvas corresponde a las tres distintas elecciones del parámetro ϵ , correspondiendo la curva más gruesa a $\epsilon = 0$, la segunda más gruesa a $\epsilon = 10^{-4}$ y la más delgada a $\epsilon = 10^{-3}$.

Para los iones He^{+2} la situación es similar. Al considerar expansión con $\epsilon = 10^{-4}$, se observa en la Fig. 9.3 un calentamiento paralelo y un enfriamiento perpendicular (segundas curvas más gruesas segmentadas y sólidas, respectivamente en la figura), lo cual es cualitativamente similar al caso sin expansión, pero con valores menores en temperaturas. Así, vía interacción onda-partícula incluyendo expansión, el enfriamiento perpendicular es acelerado respecto al caso sin expansión, llegando a $T_{\alpha\perp} \sim 0.8T_{\alpha\perp}(0)$ al final de la simulación. Por el contrario, el calentamiento paralelo es más bajo que en el caso con $\epsilon = 0$ y el crecimiento alcanza un 25% más que el valor inicial. De esta manera, debido a que la relajación de $T_{\alpha\perp}$ es más rápida, el resultado final en la anisotropía térmica es un poco menor y para $\tau = 1000$ se tiene $A_\alpha \sim 2.7$, como puede observarse en la Fig. 9.4(a).

Finalmente, en el tercer caso (con $\epsilon = 10^{-3}$, 10 veces mayor que en el segundo caso) se encuentran las simulaciones con mayor incidencia de los términos de expansión. En la Fig. 9.3, representado por las curvas más delgadas, se puede observar que en esta simulaciones los efectos de expansión introducen diferencias cualitativas. En la Fig. 9.3(a) se observa que, al contrario de los dos primeros casos descritos, en vez de un calentamiento perpendicular de los protones, lo que se tiene es un enfriamiento considerable. Así, en el panel (b), en $\tau = 1000$ se observa que se tiene $T_{p\perp} \sim 0.2T_{p\perp}(0)$. Por su parte, la temperatura paralela evidencia un leve aumento, menor al 5%. De esta manera, debido a esta violenta disminución de la temperatura perpendicular, la anisotropía es monótonamente decreciente, llegando a un valor de $A_p \sim -1$ hacia el final del intervalo, tal como se observa en la Fig. 9.4(a). Al igual que en el segundo caso, aunque no fue observado, para tiempos mayores podrían observarse inestabilidades tipo *fire-hose*.

Asimismo, en el caso de las partículas α , la fenomenología es la misma y en las Figs. 9.3(c) y 9.3(d) se muestran las curvas de temperatura perpendicular y paralela, para las cuales se tiene un calentamiento paralelo casi imperceptible (curva segmentada más delgada) y un gran enfriamiento perpendicular de más de un 80% respecto al valor inicial. Por lo tanto, a partir de esta evolución la anisotropía térmica de los iones He^{+2} termina con valores negativos cercanos a $A_\alpha(\tau = 1000) \sim -0.2$, como se observa en la Fig. 9.4(a).

Debido a la conservación de energía, todos los cambios descritos respecto a los parámetros del plasma deben tener una correlación en la evolución temporal de las perturbaciones electromagnéticas. En la Fig. 9.4(b) se puede observar que la anisotropía térmica inicial de las partículas α da lugar a la generación de perturbaciones que en promedio alcanzan el doble de la amplitud que las iniciales, en el caso de la

simulación sin expansión (curva más gruesa en la figura). En la misma figura también se muestran los efectos de la expansión en relación a la disminución del campo con la distancia. Así, mientras la segunda curva más gruesa muestra un leve decrecimiento de la amplitud para tiempos mayores a $\tau \sim 400$, en la simulación con $\epsilon = 10^{-4}$, en la simulación con $\epsilon = 10^{-3}$ el efecto es mayor y además más rápido, como se observa en la curva más delgada en la figura.

Esta evolución de las amplitudes promedio (energía total) también se puede analizar a partir de las densidades espectrales de las perturbaciones, facilitando además la comparación con las soluciones cuasilineales descritas y analizadas en el Cap. 6. En la Fig. 9.5 se muestran las densidades espectrales para distintos instantes de tiempo y además se comparan las tres distintas simulaciones realizadas. Para la simulación sin expansión, en la Fig. 9.5(a) se muestra la densidad espectral normalizada ϵ_y para $\tau = 0$ (curva punteada), $\tau = 10$ (curva segmentada), $\tau = 100$ (curva punteada-segmentada) y $\tau = 1000$ (curva sólida) al final del intervalo simulado. En la figura se observa que rápidamente, en $\tau = 10$, las partículas absorben la mayor cantidad de la energía para las ondas con números de onda más bajos. Dado que en este tipo de simulaciones híbridas la interacción onda-partícula es completamente no lineal y los campos reales corresponden generalmente a una superposición de los modos propios, este comportamiento pareciera indicar que la interacción resonante no es inicialmente con la rama de Alfvén, sino que con otra de las ramas, representada por las curvas punteadas en la Fig. 6.2. Ya en $\tau = 100$ (curva punteada-segmentada) lo que se observa es una aparición de modos para $y \sim 0.6$, fenómeno que sí podría asociarse a la interacción resonante entre partículas y los modos correspondientes a la rama del Alfvén. Finalmente, en $\tau = 1000$ la dispersión es mayor, pero de todas maneras aparecen perturbaciones para números de onda (y por tanto frecuencias) más altos que

los modos iniciales (curva sólida en la figura), manifestándose la cascada de energía anteriormente mencionada.

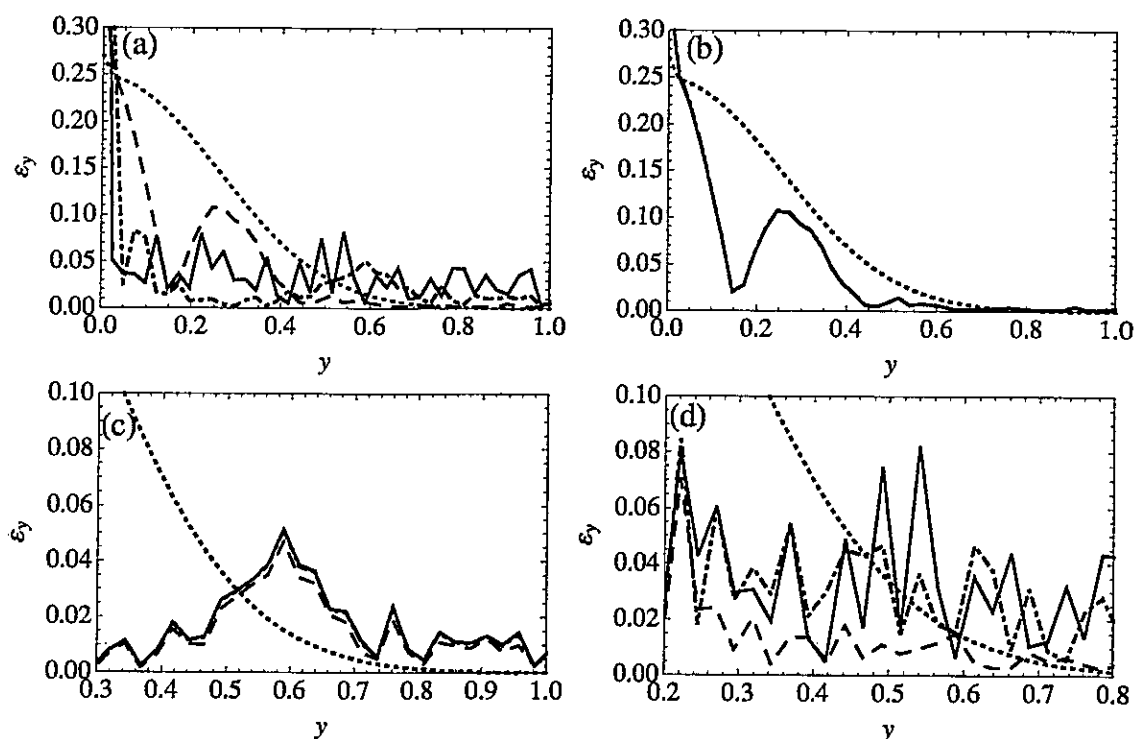


Figura 9.5: (a) Espectro de energía magnética de las perturbaciones para distintos instantes de tiempo, en el caso de la simulación híbrida sin expansión. Las curvas, punteada, segmentada, punteada-segmentada y sólida corresponden a los tiempos $\tau = 0, 10, 100$ y 1000 , respectivamente. (b) Espectros de energía para tres distintas simulaciones en $\tau = 10$. La curva sólida corresponde a las tres simulaciones ($\epsilon = 0, 10^{-4}, 10^{-3}$, que prácticamente coinciden para ese tiempo tan bajo y la curva punteada al espectro inicial. (c) Misma situación que en (b), pero para $\tau = 100$. La curva sólida corresponde a la simulación sin expansión ($\epsilon = 0$) y con expansión moderada ($\epsilon = 10^{-4}$), mientras que la curva segmentada corresponde a la simulación con $\epsilon = 10^{-3}$. (d) Misma situación que en (c), pero para $\tau = 1000$. Al igual que en el panel (c), la curva segmentada corresponde a la simulación con el parámetro de expansión mayor ($\epsilon = 10^{-3}$), y las curvas sólida y punteada-segmentada corresponden a las simulaciones sin expansión, y con expansión moderada, respectivamente.

Finalmente, en relación a las tres elecciones del parámetro de expansión, en las Figs. 9.5(b), (c) y (d) se muestra como referencia el espectro en $\tau = 0$ (curva pun-

teada), y en caso de haber diferencias, los espectros para $\tau = 10, 100$ y 1000 , respectivamente. Así, en el panel (b) se puede observar que no hay mayores diferencias en las tres elecciones y todas las curvas se superponen; en el panel (c) las simulaciones sin expansión y con expansión moderada se superponen (curva sólida), mientras que el caso con la expansión más rápida (curva segmentada) para ese instante de tiempo ya se observa una leve menor amplitud en todos los modos para el rango de y graficado, en completa concordancia con lo mostrado en la Fig. 9.5(b); y en el panel (d), hacia el final del intervalo, en general la mayor amplitud corresponde al caso sin expansión (curva sólida), y en los otros dos casos claramente las perturbaciones han ido perdiendo amplitud.

9.3. Resumen, discusión y comparación con resultados cuasilineales

A partir de los modelos híbridos, sin expansión ($\epsilon = 0$) y con expansión ($\epsilon = 10^{-4}$) mostrados en el Cap. 7, y utilizando los procedimientos descritos en el Cap. 8, se han realizado simulaciones híbridas de plasmas, para estudiar la interacción entre perturbaciones electromagnéticas y partículas, tanto en el caso de un plasma compuesto de electrones y protones, como para un plasma compuesto de electrones, protones y una porción minoritaria de partículas α .

En el caso de las simulaciones sin expansión, para un plasma de electrones y protones anisotrópicos, los resultados numéricos mostraron un calentamiento paralelo y un leve enfriamiento perpendicular de los protones, por lo cual la anisotropía térmica fue al mismo tiempo decayendo, indicando un acercamiento del sistema a una especie de equilibrio. Además, por conservación de energía, el campo electromagnético mostró un crecimiento de su amplitud promedio a expensas de la energía

libre (anisotropía térmica) almacenada en las partículas α . Se observa además en las Figs. 9.2(a) y 9.2(b), que estos procesos se producen rápidamente, en tiempos menores que $\tau \sim 200$, y luego parecen saturar, estableciendo un estado de equilibrio. Finalmente, las simulaciones con expansión mostraron un comportamiento similar a las simulaciones sin expansión para tiempos $\tau < 200$, pero debido a los efectos de expansión, que crecen junto con la función $a(\tau) = 1 + \epsilon\tau$, para tiempos mayores se evidenció una disminución de la amplitud del campo, así como también un mayor enfriamiento perpendicular y un enlentecimiento del calentamiento paralelo.

Por otro lado, en el caso que incluye un 4% de iones He^{+2} anisotrópicos, en el caso sin expansión se evidenció un calentamiento anisotrópico de los protones y además un calentamiento paralelo de los iones (Fig. 9.3). Al igual que en el caso sin partículas α , se observa también un crecimiento en la amplitud promedio de las perturbaciones electromagnéticas (Fig. 9.4) a expensas de la anisotropía térmica de la especie minoritaria. Al estudiar la densidad espectral de energía magnética, se observa además la aparición de ondas con número de onda (y por lo tanto frecuencias) más altos que los considerados inicialmente, como se puede ver en la Fig. 9.5. Finalmente, en relación a las simulaciones con expansión, la situación con expansión moderada ($\epsilon = 10^{-4}$) fue similar al caso con electrones y protones, observándose los mismos fenómenos pero con una disminución en las temperaturas, de la amplitud del campo y de su espectro, para tiempos suficientes tales que el parámetro a cobrase relevancia. En adición, en el caso con una expansión mayor ($\epsilon = 10^{-3}$) lo que se observó fue completamente distinto. Las temperaturas perpendiculares de ambas especies decayeron rápidamente, mientras que las temperaturas paralelas alcanzaron una especie de equilibrio. Debido, por una parte, al calentamiento por interacción resonante con las ondas, y por otra al enfriamiento propio de la expansión, las temperaturas paralelas de am-

bas especies se mantuvieron prácticamente constantes. Algo similar ocurrió para la amplitud promedio de los campos. Hasta $\tau \sim 100$ creció, pero debido a la expansión a partir de ese instante decayó hasta volver al mismo valor inicial hacia el final de la simulación [ver Fig. 9.4(b)]. El espectro se comportó de igual manera y sufrió una pérdida de amplitud general en el rango $0 < y < 2$ considerado, siendo mucho menor que en los otros dos casos en $\tau = 1000$ [Fig. 9.5(d)].

En relación al análisis cuasilineal de la primera parte de este trabajo, las simulaciones exhiben algunas similitudes y diferencias. Si bien ambos estudios (el híbrido y el cuasilineal) se llevan a cabo en sistemas de referencia distintos, y por lo tanto debiese considerarse un corrimiento Doppler en las frecuencias de los espectros entre el sistema del laboratorio (considerado en el trabajo cuasilineal) y el sistema solidario a los electrones (considerado en el trabajo con simulaciones híbridas), en el rango de frecuencias y velocidades estudiado, ese corrimiento no debería afectar mayormente los resultados. Además, tanto en el trabajo cuasilineal como en el híbrido no se observaron cambios en las velocidades de deriva de las especies, por lo que se puede concluir que en ambos casos no hubo transferencia de momentum entre ondas y partículas. Debido a que este hecho ocurre cuando se consideran ondas de frecuencias $|\omega| \ll ck$ o también $V_{Ap} \ll c$ (ver Apéndice C), entonces el corrimiento Doppler que sí existe entre los sistemas de referencia no produce cambios considerables en los espectros. Además, las aproximaciones hechas al plantear las ecuaciones del modelo de expansión ($\epsilon \ll 1$) también permiten que no se considere el corrimiento Doppler entre el sistema en reposo y el sistema de la caja en expansión. Es importante notar que esto es correcto solamente en el rango de validez del modelo de expansión, es decir, para tiempos tales que no se tenga $\epsilon\tau \sim 1$. En síntesis, en el rango de frecuencias y velocidades estudiado, es posible comparar los resultados de los trabajos

cuasilineal e híbridos.

En el caso de las simulaciones con electrones y protones, la evolución de las temperaturas es cualitativamente muy parecida. Si bien la temperatura perpendicular disminuye más rápido en el caso híbrido que en el cuasilineal, para la temperatura paralela ocurre lo contrario y por lo tanto las anisotropías alcanzan valores muy similares al cabo de un mismo tiempo. Sin embargo, para tiempos pequeños ($\tau < 200$) ambas anisotropías no coinciden y claramente las curvas difieren (ver Fig. 9.6). El hecho de que la simulación incluya toda la no linealidad que no se presenta en las ecuaciones cuasilineales es uno de los factores relevantes a considerar. Como ya se discutió anteriormente, el método cuasilineal es bastante lento y depende exclusivamente de la parte imaginaria γ (ver Sec. 6.3). Luego, para γ pequeño (del orden de $|\gamma_{\max}| \sim 10^{-2}$) en todo el análisis cuasilineal) es bastante razonable que se presente esta lentitud respecto al caso híbrido. Por otro lado, por el hecho de que en la simulación están incluidas todas las ramas posibles, es posible que ocurra una interacción onda partícula más compleja y por lo tanto más eficiente.

Cuando se incluyen partículas α nuevamente aparecen similitudes cualitativas, pero en este caso las diferencias son más grandes. Para las partículas α en las simulaciones híbridas el calentamiento paralelo y enfriamiento perpendicular son considerablemente más rápidos a obtenidos en el análisis cuasilineal. Además, la expansión contribuye a una relajación perpendicular todavía más rápida. Sin embargo, al igual que en el caso de protones y electrones, si bien la evolución de las temperaturas por separado es distinta en ambos casos, el resultado global en la anisotropía es consistente en ambos enfoques, tal como se muestra, hasta $\tau = 1000$, en la Fig. 9.7 hasta $\tau = 1000$. En el caso de los protones, mientras la solución cuasilineal arroja una anisotropía térmica negativa ($T_{p\parallel} > T_{p\perp}$), en los casos híbridos lo que se tiene

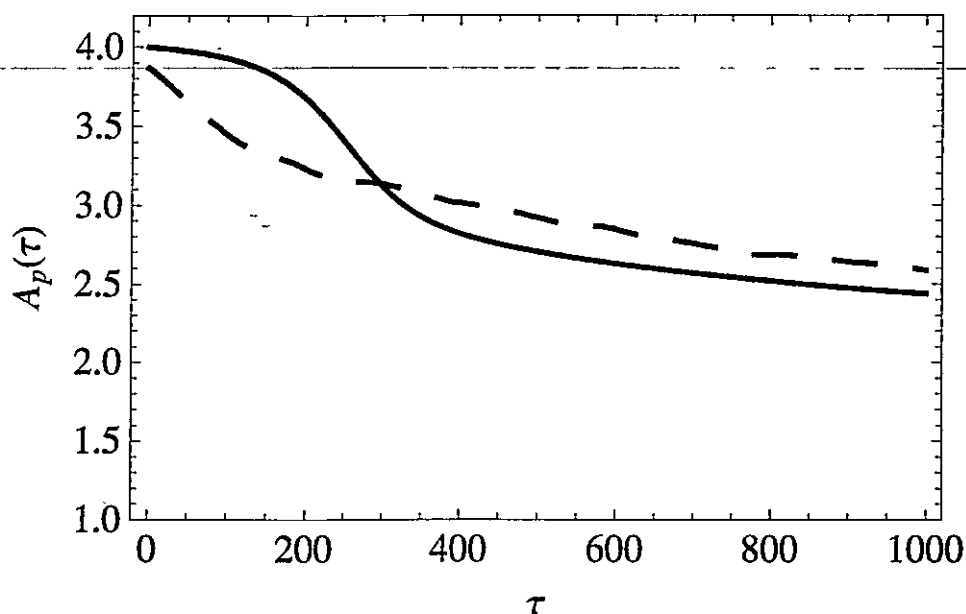


Figura 9.6: Comparación entre los casos híbrido (Sec. 9.1) y cuasilineal (Sec. 5.1.1), para la evolución de las anisotropías térmicas de protones inicialmente anisotrópicos. Las curvas sólida y segmentada corresponden a los casos, cuasilineal e híbrido, respectivamente.

es la generación de una anisotropía positiva debido principalmente a la interacción resonante (ver Fig. 9.7). Salvo en el caso con la mayor incidencia de la expansión ($\epsilon = 10^{-3}$), para el cual también se produce una anisotropía menor que cero, se tienen anisotropías de protones positivas ($T_{p\parallel} < T_{p\perp}$). La diferencia con el caso de mayor expansión es debida al enfriamiento perpendicular propio de los modelos de expansión. En general, si bien es muy complicado poder comparar los modelos híbridos con expansión, con un modelo cuasilineal que está escrito en otro tipo de coordenadas y no incluye dichos efectos, de todas maneras es posible concluir que al menos cualitativamente la discordancia entre los modelos en relación al signo de la anisotropía térmica de los protones, es eliminada al considerar la expansión.

Con respecto al análisis del espectro, como ya ha sido dicho, las simulaciones híbridas en general no contienen el sesgo en la rama de la relación de dispersión

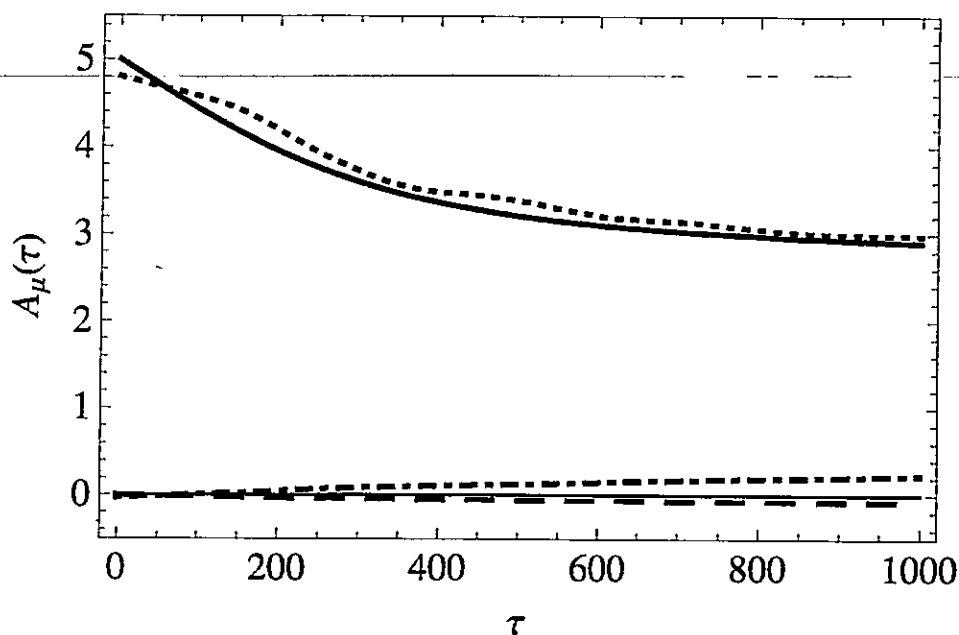


Figura 9.7: Comparación entre los casos híbrido (Sec. 9.2) y cuasilineal (Sec. 6.2), para la evolución de las anisotropías térmicas de protones y partículas α . Las curvas sólida y segmentada corresponden a las anisotropías de partículas α y protones, en el caso cuasilineal, respectivamente. Las curvas punteada y punteada-segmentada corresponden a las anisotropías de partículas α y protones, en el caso híbrido, respectivamente.

elegida para la interacción. Los resultados indican que para tiempos pequeños las partículas rápidamente absorben energía de las perturbaciones con número de onda (y por lo tanto frecuencias) más bajos, a través de la interacción con la rama de más alta frecuencia, representada con las curvas punteadas en las Figs. 6.2(c) y (d). De todas maneras, para tiempos mayores, al igual que el fenómeno de cascada de energía en el caso cuasilineal, se observa la emergencia de ondas para valores de y más altos, en los cuales la amplitud depende de la velocidad de la expansión. A mayor ϵ , menor amplitud del campo para tiempos suficientemente largos, y además menor energía en el espectro de fluctuaciones.

Otra de las similitudes que se encontraron entre el análisis cuasilineal y el híbri-

do, es que se observa la nula evolución temporal de las velocidades de deriva. Ni en el caso cuasilineal ni en ninguno de los casos híbridos (con y sin partículas α) se observa una aceleración para ninguna de las especies. Como ya se dijo anteriormente, una explicación sería la ausencia de momentum electromagnético al considerar perturbaciones tales que $V_{Ap} \ll c$. Así, las densidades de momentum de los campos son despreciables y solamente se observa traspaso de energía vía interacción resonante. De todas maneras, el modelo híbrido sí ha sido utilizado en el estudio de la deriva relativa entre especies y ha entregado resultados interesantes. En el caso de simulaciones con una deriva relativa inicial $V_{\alpha,p} = 2V_{Ap}$ entre protones y partículas α , en la Ref. [156] se observa la aparición de fluctuaciones electromagnéticas (con y sin considerar efectos de expansión) debido a las inestabilidades que se generan cuando las derivas relativas son superalfvénicas. En ese caso, la energía libre disponible corresponde solamente a la deriva entre especies, y no se consideran anisotropías térmicas ni en los protones ni en las partículas α .

Uno de los resultados interesantes obtenidos en la Ref. [156], es que el crecimiento de inestabilidades electromagnéticas debido a la deriva inicial entre especies es más rápido en el caso con expansión que cuando $\epsilon = 0$. De todas maneras, para tiempos más grandes, tales que $\epsilon\tau \sim 1$, los efectos de expansión se vuelven dominantes y hacia el final del intervalo de simulación la energía total del campo magnético es menor que en el caso sin expansión. Respecto a las temperaturas, los resultados muestran que ambas especies sufren un calentamiento anisotrópico, y también se observa que la expansión produce anisotropías térmicas negativas en la función de distribución de los protones. Se concluye entonces que, si bien el modelo de expansión ha sido una manera controversial y poco clara de incluir la expansión natural del viento solar, dado que en general las observaciones muestran $T_{\mu\perp} > T_{\mu\parallel}$ (por ejemplo como se

muestran en la Ref. [157]), el hecho de que, debido a la expansión, las anisotropías se vuelvan negativas, sugiere que los procesos que dan lugar al calentamiento perpendicular debiesen producirse continuamente para contrarrestar así los efectos debidos a la expansión del viento solar.

Capítulo 10

Conclusiones

En este trabajo se han realizado dos tipos de estudio, uno teórico y otro computacional, para modelar la aceleración y calentamiento de iones en un plasma, en el contexto de los sistemas como la corona o el viento solar, obteniendo resultados relevantes respecto al calentamiento.

En primer lugar, en términos de un formalismo cinético, se desarrolló un método en el cual fue posible plantear un sistema de ecuaciones acoplado, para describir la dependencia cuasilineal de las temperaturas, velocidades de deriva y densidad espectral de energía magnética, cuando ondas electromagnéticas circularmente polarizadas interactúan con un plasma no colisional. Dos tipos de plasma fueron considerados: un plasma compuesto de electrones y protones anisotrópicos (Cap. 5), y otro compuesto de electrones y protones isotrópicos, y un 4% de iones He^{+2} anisotrópicos (Cap. 6), ambos en presencia de un campo magnético de fondo. Los resultados numéricos indicaron que la existencia de derivas relativas entre las distintas especies es capaz de eliminar las bandas prohibidas que separan las ramas de la relación de dispersión, y al considerar las partículas α anisotrópicas, es capaz de generar regiones de inestabilidades. En un efecto tipo cascada, los resultados numéricos mostraron la emergencia de modos para números de onda (y por tanto también frecuencias) mayores a los

considerados inicialmente.

Dado que en una de las aproximaciones utilizadas, se consideró la parte imaginaria de las frecuencias γ mucho menor que la parte real x , la dinámica cuasilineal resultó ser bastante lenta y muy dependiente del producto $\gamma\epsilon_y$, entre la densidad espectral de energía magnética normalizada ϵ_y y la parte imaginaria de las frecuencias. Así, los tiempos en los que numéricamente se evidenció un calentamiento anisotrópico de las especies resultaron ser del orden de γ^{-1} y por lo tanto bastante grandes. Al momento de considerar un plasma de electrones y protones con distribuciones Maxwellianas, más una porción minoritaria de partículas α con anisotropía térmica, se observó un calentamiento paralelo de la especie minoritaria, un enfriamiento perpendicular de dicha especie, y un calentamiento anisotrópico de los protones, para el cual se obtuvo $A_p < 0$. Además, a partir de este análisis, para perturbaciones con frecuencias del orden de la girofrecuencias de los protones, tanto numérica como analíticamente no se reportó transferencia de momentum importante entre ondas y partículas, y por lo tanto en este análisis las velocidades de deriva paralela al campo de fondo resultaron ser constantes.

En segundo lugar, con el afán de incluir toda la no linealidad de las ecuaciones se trabajó en la realización de simulaciones computacionales a partir de dos modelos híbridos de plasmas (Caps. 7-9). El primero es un modelo híbrido usual con electrones no masivos, y el segundo el llamado modelo de caja en expansión, recientemente propuesto en la literatura. A partir del análisis de los modelos sin expansión, en condiciones similares a las consideradas en las soluciones cuasilineales, los resultados fueron bastante parecidos a los del modelo cuasilineal. Entre las diferencias, lo más notable fue el hecho de que los procesos de calentamiento del plasma fueron considerablemente más rápidos en las simulaciones, y que además los protones re-

sultaron ser calentados anisotrópicamente, pero con la temperatura perpendicular mayor a la paralela. Sin embargo, al menos cualitativamente se observó el mismo enfriamiento perpendicular y calentamiento paralelo de las partículas α obtenido a partir de las soluciones cuasilineales, y también la generación de una especie de cascada de energía, esta vez completamente no lineal, desde los modos de longitud de onda grande hacia los modos de más alta frecuencia. Así, estos resultados parecen indicar que los mecanismos propuestos y analizados a lo largo de esta tesis podrían ser relevantes en los procesos de calentamiento del viento solar.

Además, los modelos híbridos de expansión fueron capaces de reproducir de cierta manera tanto el enfriamiento del plasma (al ser considerado un gas en expansión) como la disminución de la amplitud promedio del campo magnético con la distancia. Este resultado es consistente con el análisis teórico del modelo de expansión. Así, al considerar un parámetro de expansión pequeño, ($\epsilon = 10^{-4}$), se obtuvo un comportamiento similar al de las simulaciones híbridas sin expansión, pero con la salvedad de que para tiempos τ tales que $\epsilon\tau \sim 1$ las temperaturas perpendiculares mostraron un enfriamiento considerablemente más rápido. Por el contrario, en el caso de una expansión más rápida ($\epsilon = 10^{-3}$), al ser los términos de expansión 10 veces mayores, se observaron bruscas caídas de la amplitud promedio de los campos, la temperatura perpendicular y, por lo tanto, la anisotropía térmica.

En ese sentido, debido a que la anisotropía térmica suele ser positiva en la mayoría de las regiones de interés en el espacio interplanetario (ver Cap. 2), el hecho de que la expansión lleve a valores negativos de la anisotropía, podría ser una señal acerca de los procesos que dan lugar a las funciones de distribución anisotrópicas. Si el modelo predice que luego de cierto tiempo las anisotropías se vuelven negativas, el hecho de que esa situación sea difícil de observar en el viento solar podría sugerir que

los procesos de aceleración y calentamiento se presentan incluso a distancias considerablemente grandes respecto al Sol, tal como se concluye en la Ref. [156]. Además, ambos modelos híbridos coincidieron con el estudio cuasilineal en términos de las velocidades de deriva. Ni en el modelo con expansión, ni en el modelo sin expansión, las simulaciones mostraron transferencia de momentum entre ondas electromagnéticas y partículas y por lo tanto las derivas se mantuvieron constantes para todas las especies. En ese sentido (tal como se concluyó en el Cap. 6), en el caso cuasilineal una posible manera de incluir la aceleración de los iones, sería por ejemplo no eliminar los términos de orden $|\omega_k|^2/c^2k^2$, o no utilizar la aproximación semifría, o incluir más efectos a las ecuaciones cuasilineales (términos no lineales de más alto orden o términos de acoplamiento entre las distintas ramas de la relación de dispersión). En el caso híbrido se podrían realizar simulaciones en más dimensiones espaciales, o en general para ambos modelos, se podría considerar ondas con propagación no paralela al campo de fondo para así tener perturbaciones a lo largo de la dirección en que se espera observar aceleración.

En resumen, a partir de esta comparación entre el enfoque cinético cuasilineal y el híbrido no lineal, es posible concluir que el análisis cuasilineal basado en la solución formal de un sistema de ecuaciones acopladas para todos los parámetros del plasma, es un método interesante de profundizar en relación a los procesos de calentamiento del viento solar. Dado que los procesos cuasilineales resultaron ser considerablemente lentos, la solución de las ecuaciones que lo conforman entrega información relevante respecto a la posibilidad de observar ciertos fenómenos, como es el calentamiento del plasma y la correspondiente cascada de energía. Aunque el modelo no es capaz de entregar valores correctos desde el punto de vista cuantitativo (los valores observados en el viento solar), el hecho de que permita encontrar curvas de temperatura en

~~función del tiempo es un aporte interesante al momento de estudiar cierto tipo de~~ interacciones en un plasma y su posible importancia respecto a otros procesos. En otras palabras, si cierto proceso se puede observar levemente a partir del análisis cuasilineal, sería esperable que el mismo proceso fuese relevante al considerar otros términos (como por ejemplo la no linealidad de más alto orden).

A modo de proyecciones y continuación de este trabajo de tesis surgen varias alternativas. Para poner a prueba la aproximación semifría resultaría interesante relajar ciertas aproximaciones y, por ejemplo, considerar el caso de β arbitrario. Por otro lado, para poder estudiar los procesos de transferencia de momentum y la posible aceleración global o preferencial de ciertas especies, se podría no despreciar los términos de orden V_{Ap}^2/c^2 . Además, debido a que el viento solar es un medio no homogéneo, y cualquier fluctuación inicialmente paralela al campo de fondo es rápidamente refractada a una dirección oblicua al campo, para estudiar procesos asociados al viento solar sería pertinente considerar ondas propagándose en una dirección no paralela al campo de fondo. De esta manera, así también sería posible estudiar perturbaciones electromagnéticas a lo largo de la dirección paralela, en la cual se espera observar aceleración. Es importante notar que las perturbaciones de campo eléctrico no han sido consideradas en ninguna parte del presente estudio. Ni en la parte cuasilineal ni en el análisis mediante simulaciones híbridas. Debido a que un campo eléctrico paralelo al campo de fondo ejerce una fuerza sobre las partículas en esa dirección, una componente eléctrica paralela debiese ser importante en el estudio de la aceleración del viento solar, efecto que a lo largo de este trabajo no fue observado.

Otra posible continuación sería la consideración de funciones de distribución distintas de bi-Maxwellianas, por ejemplo funciones tipo kappa, que han sido reportadas

en diversos estudios de plasmas espaciales, tanto de electrones como de iones (por ejemplo las Refs. [158-162] y las Refs. mencionadas en ellas). Se podría además complementar las ecuaciones cuasilineales incluyendo los efectos de expansión, la solución en más dimensiones, o bien la consideración de interacciones tipo onda-onda [76] u otros efectos no lineales [163].

Por otro lado, en el caso de las simulaciones, se podrían considerar simulaciones con electrones con masa o bien la realización de simulaciones en más dimensiones espaciales, tal como fue hecho en la Ref. [156] en el caso de electrones, protones y partículas α con densidad inicial no homogénea. Al realizar simulaciones en dos dimensiones espaciales y las tres de velocidad se observó con claridad que primero se calientan anisotrópicamente los iones He^{+2} , se generan inestabilidades que pueden calentar los protones y finalmente las especies disminuyen su anisotropía térmica a medida que el sistema se acerca a un nuevo equilibrio. Además, debido a que la mayor parte de los efectos de expansión se observan analíticamente en el plano perpendicular a la dirección del campo de fondo, es esperable que un análisis en base a simulaciones híbridas con expansión en dos o tres dimensiones aporte en el entendimiento de la dinámica de plasmas en expansión esférica como el viento solar.

Si bien las posibilidades de mejora de los modelos estudiados en este trabajo de tesis son diversas y pudiesen contribuir en buena medida al entendimiento de los fenómenos de interés, el hecho de haber considerado solamente análisis espacialmente unidimensionales no corresponde a una limitante grave. Al haber considerado solamente la propagación de ondas en la dirección del campo de fondo, y así simplificar en buena medida tanto las ecuaciones como el trabajo numérico, se dio paso a un trabajo más intuitivo de exploración y análisis de los procesos fundamentales, que así se presentaron de una manera más limpia. Por lo tanto, y a modo de conclusión

final, el proceso de cascada de energía mencionado inicialmente a partir de un análisis lineal fue evidente incluso en el caso de dos especies iónicas y en una dimensión espacial, tanto en el estudio cuasilineal como en las simulaciones híbridas. De esta manera, este trabajo puede ser considerado como el punto de partida de un análisis más complejo y completo de este efecto tipo cascada que continúe aportando al entendimiento de los procesos de aceleración y calentamiento del viento solar.

Publicaciones

Este trabajo de tesis dio origen a los siguientes artículos publicados o en proceso de redacción:

1. "*Study of the cascading effect during the acceleration and heating of ions in the solar wind*", P. S. Moya, V. Muñoz, J. Rogan and J. A. Valdivia, *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.* **73**, 1390–1397 (2011).
2. "*Hybrid models of solar wind plasma heating*", L. Ofman, A.-F. Viñas and P. S. Moya, *Ann. Geophys.* **29**, 1071–1079 (2011).
3. "*Computational and theoretical study of the acceleration and heating of protons*", P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz and J. A. Valdivia, *en preparación*.
4. "*Computational and theoretical study of the acceleration and heating of ions in the solar wind*", P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz and J. A. Valdivia, *en preparación*.

Apéndice A

Derivación general de la relación de dispersión en un plasma no colisional en presencia de un campo magnético de fondo

El estudio de propagación de ondas en plasmas y la obtención de las relaciones de dispersión correspondientes, en general, corresponde al análisis de un sistema en equilibrio que es perturbado en el tiempo $t = 0$, en el cual los valores iniciales de las perturbaciones deben ser tomados en cuenta. Por este motivo, el modo más correcto para resolver las ecuaciones que dan origen a la relación de dispersión es realizar una transformada de Fourier solamente en el espacio $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}$ y una transformación de Laplace en la variable temporal $t \rightarrow S$, donde S es un número complejo que cumple $\text{Re}[S] > S_0$, y S_0 se elige suficientemente grande para que las integrales involucradas converjan [70, 164].

Considérese entonces un plasma no colisional para el cual, en el espacio de fase se satisface la ecuación de Vlasov [102]

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{x}} + q_\mu \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (\text{A.1})$$

con q_μ , m_μ la carga y masa de cada partícula, μ es el índice de cada especie y c es la

velocidad de la luz. A su vez, la dinámica de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} viene dada por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad (\text{A.3})$$

donde las densidades de carga y corriente vienen dadas por

$$\rho = \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \int f_{\mu} d\mathbf{p} \quad , \quad \mathbf{J} = \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \int \mathbf{v} f_{\mu} d\mathbf{p} \quad , \quad (\text{A.4})$$

respectivamente. n_{μ} es la densidad de la especie μ -ésima y la sumatoria incluye todas las especies que constituyen el plasma.

Utilizando la teoría de perturbaciones se resolverán estas ecuaciones a primer orden para un plasma inicialmente en equilibrio. En dicho estado de equilibrio, hay un campo magnético de fondo $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ y una función de distribución de equilibrio independiente de la posición y el tiempo $f_{\mu}^{(0)} = f_{\mu}^{(0)}(\mathbf{p})$, para cada especie μ . En coordenadas cilíndricas, $\mathbf{p} = (p_{\perp}, \phi, p_z)$ y la función de distribución de equilibrio sólo depende de p_{\perp} y p_z . Esto es, $f_{\mu}^{(0)}(\mathbf{p}) = f_{\mu}^{(0)}(p_{\perp}, p_z)$.

Para cierto ϵ pequeño, se consideran las cantidades perturbadas a primer orden en ϵ :

$$f_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f_{\mu}^{(0)}(p_{\perp}, p_z) + \epsilon f_{\mu}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = B_0 \hat{z} + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (\text{A.7})$$

Reemplazando (A.5)–(A.7) en (A.1), (A.3) y (A.4), a orden ϵ^0 se obtiene

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} = -v_{\perp} B_0 \hat{\phi} \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad , \quad (\text{A.8})$$

ecuación que se satisface debido a que $f_{\mu}^{(0)}$ es función de p_{\perp} , p_z pero no del ángulo ϕ , donde, en coordenadas cilíndricas, se ha escrito $\mathbf{v} \equiv v_{\perp} \cos \phi \hat{x} + v_{\perp} \sin \phi \hat{y} + v_z \hat{z}$.

Por otro lado, a orden ϵ se obtiene

$$\frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_{\mu}}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(1)}}{\partial \mathbf{p}} + q_{\mu} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_1 + \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}, \quad (\text{A.11})$$

con

$$\mathbf{J}_1 = \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \int \mathbf{v} f_{\mu}^{(1)} d\mathbf{p}, \quad (\text{A.12})$$

que corresponde al sistema de ecuaciones lineales a resolver. Como ya se mencionó, al ser éste un problema de valores iniciales, la manera más correcta de resolver el conjunto de ecuaciones (A.9)–(A.12) es mediante el uso de transformadas integrales, para así, en el espacio (S, \mathbf{k}) resolver un sistema de ecuaciones algebraicas que depende explícitamente de los valores iniciales de las cantidades involucradas. Esto es, definiendo

$$f_{\mu,k}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, S) = \int_0^{\infty} dt e^{-St} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f_{\mu}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, S) = \int_0^{\infty} dt e^{-St} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (\text{A.14})$$

y

$$\mathbf{B}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, S) = \int_0^{\infty} dt e^{-St} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.15})$$

las ecuaciones (A.9)–(A.11) se reducen a

$$(S^2 + c^2 k^2) \mathbf{E}_{\mathbf{k}} - c^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}) = 4\pi S \sum_{\mu} q_{\mu} n_{\mu} \int \mathbf{v} f_{\mu,k} d\mathbf{p} + S\mathbf{e} + i c \mathbf{k} \times \mathbf{b}, \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned}
(S + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})f_{\mu,k} + \frac{q_\mu}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_{\mu,k}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{q_\mu}{S} (S\mathbf{E}_k - i\mathbf{v} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{p}} \\
= g_\mu + \frac{q_\mu}{Sc}(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

donde

$$g_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f_\mu^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t = 0) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t = 0) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t = 0) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.20})$$

corresponden a las transformadas de Fourier de las perturbaciones en $t = 0$. Además, $k = |\mathbf{k}|$.

Ahora, sin pérdida de generalidad, se puede escribir $\mathbf{k} = k_\perp \hat{x} + k_z \hat{z}$. Aunque en este trabajo de tesis no se consideran efectos relativistas, en el siguiente análisis se procederá de modo general, incluyendo términos relativistas. Luego, para cada especie μ se tiene que la relación entre la velocidad \mathbf{v} y el momentum \mathbf{p} está dada por:

$$\mathbf{p} = m_\mu \gamma^* \mathbf{v}, \quad \text{con} \quad \gamma^* = \left(1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (\text{A.21})$$

Entonces, la solución de la ecuación (A.17) viene dada por

$$\begin{aligned}
f_{\mu,k}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, S) = \int_{\pm\infty}^{\phi} \left[\frac{q_\mu}{\Omega_\mu S} (S\mathbf{E}_k - i\mathbf{v}' \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{p}'} \right. \\
\left. + \frac{q_\mu}{Sc\Omega_\mu} (\mathbf{v}' \times \mathbf{b}) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{p}'} - \frac{g_\mu}{\Omega_\mu} \right] G(\phi, \phi') d\phi', \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

con

$$G(\phi, \phi') = \exp \left(\frac{1}{\Omega_\mu} [(S + ik_z v_z)(\phi - \phi') + ik_\perp v_\perp (\sin \phi - \sin \phi')] \right) \quad (\text{A.23})$$

y donde

$$\Omega_\mu = \frac{q_\mu B_0}{\gamma^* m_\mu c} \quad (\text{A.24})$$

es la frecuencia ciclotrónica relativista. Así, reemplazando (A.22) en (A.16) se obtiene la ecuación de ondas

$$4\pi \sum_\mu \frac{q_\mu n_\mu}{\gamma^* m_\mu \Omega_\mu} \int \mathbf{p} \int_{\pm\infty}^{\phi} (S\mathbf{E}_k - i\mathbf{v}' \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_k) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{p}'} G(\phi, \phi') d\phi' d\mathbf{p} \\ + (S^2 + c^2 k^2) \mathbf{E}_k - c^2 \mathbf{k} (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{k}) = \Lambda, \quad (\text{A.25})$$

con

$$\Lambda = S\mathbf{e} + i c \mathbf{k} \times \mathbf{b} \\ + 4\pi \sum_\mu \frac{q_\mu n_\mu}{\gamma^* m_\mu \Omega_\mu} \int \mathbf{p} \int_{\pm\infty}^{\phi} \left(S g_\mu - \frac{q_\mu}{c} (\mathbf{v}' \times \mathbf{b}) \cdot \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial \mathbf{p}'} \right) G(\phi, \phi') d\phi' d\mathbf{p}. \quad (\text{A.26})$$

Como en el presente trabajo se han considerado solamente perturbaciones que se propagan a lo largo del campo magnético \mathbf{B}_0 , entonces $\mathbf{k} = k\hat{z}$ y (A.25) se puede expresar como sigue

$$\overset{\leftrightarrow}{D} \cdot \mathbf{E}_k = \Lambda, \quad (\text{A.27})$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{D}$ es el llamado tensor dieléctrico, que en este caso viene dado por

$$\overset{\leftrightarrow}{D} = \begin{pmatrix} A & -iB & 0 \\ iB & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

con

$$A = S^2 + c^2 k^2 - S\pi \sum_\mu \frac{\omega_{p,\mu}^2}{\gamma^*} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p_\perp^2 \chi(f_\mu^{(0)}) \frac{S + ikv_z}{\Omega_\mu^2 + (S + ikv_z)^2} dp_\perp dp_z, \quad (\text{A.29})$$

$$B = -iS\pi \sum_\mu \frac{\omega_{p,\mu}^2}{\gamma^*} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p_\perp^2 \chi(f_\mu^{(0)}) \frac{\Omega_\mu}{\Omega_\mu^2 + (S + ikv_z)^2} dp_\perp dp_z \quad (\text{A.30})$$

y

$$C = S^2 - 2\pi \sum_{\mu} \frac{\omega_{p,\mu}^2}{\gamma^*} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\perp} p_z \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial p_z} \frac{dp_{\perp} dp_z}{S + ikv_z}, \quad (\text{A.31})$$

donde

$$\chi(f_{\mu}^{(0)}) = \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial p_{\perp}} + i \frac{kv_z}{S} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial p_{\perp}} - i \frac{kv_{\perp}}{S} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial p_z} \quad (\text{A.32})$$

y

$$\omega_{p,\mu}^2 = \frac{4\pi q_{\mu}^2 n_{\mu}}{m_{\mu}} \quad (\text{A.33})$$

corresponde al cuadrado de la frecuencia de plasma de la especie μ -ésima.

La ecuación (A.27) representa dos tipos de modos para las perturbaciones. Un tipo corresponde a modos longitudinales, que no son afectados por B_0 y que vienen dados por

$$CE_{k,z} = \Lambda_z \quad (\text{A.34})$$

y otro tipo de modos transversales, que pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} E_{k,x} \\ E_{k,y} \end{pmatrix} = \frac{1}{(A+B)(A-B)} \begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_x \\ \Lambda_y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Estos últimos modos transversales se pueden entender como la suma de dos modos circularmente polarizados, cuyos denominadores de Landau [70, 165] están dados por $L_{\pm} = A \pm B$, en los cuales, vía continuación analítica, las integrales en el tensor dieléctrico han sido prolongadas desde $Re[S] > S_0$ a $Re[S] < S_0$. De esta manera, con el signo $+(-)$ correspondiente a los modos con polarización derecha (izquierda), las relaciones de dispersión se obtienen a partir de $L_{\pm} = 0$, o bien

$$0 = S^2 + c^2 k^2 - S\pi \sum_{\mu} \frac{\omega_{p,\mu}^2}{\gamma^*} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\perp}^2 \frac{\chi(f_{\mu}^{(0)})}{S + ikv_z \mp i\Omega_{\mu}} dp_{\perp} dp_z. \quad (\text{A.36})$$

Ahora, en el caso de los eventos típicos en un plasma tipo viento solar, las ecuaciones pueden ser tratadas de manera no relativista. De esta manera, para ondas

con frecuencia ω , y redefiniendo $f_\mu^{(0)} = m_\mu^3 f_\mu^{(0)}$, reemplazando S por $i\omega$ la relación de dispersión para modos transversales viene dada por

$$c^2 k^2 = \omega^2 + \pi \sum_\mu \omega_{p,\mu}^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[(\omega - kv_z) \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial v_\perp} + kv_\perp \frac{\partial f_\mu^{(0)}}{\partial v_z} \right] \frac{v_\perp^2}{\omega - kv_z \pm \Omega_\mu} dv_\perp dv_z. \quad (\text{A.37})$$

Apéndice B

Propiedades de la función de dispersión de plasmas

Al considerar plasmas con funciones de distribución Maxwellianas o bi-Maxwellianas, tanto la relación de dispersión (3.29) como las ecuaciones diferenciales cuasilineales (4.26)–(4.28) pueden expresarse en términos de la llamada *función de dispersión de plasmas* [83]

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \zeta} dt, \quad \text{Im}[\zeta] > 0, \quad (\text{B.1})$$

y la región $\text{Im}[\zeta] \leq 0$ se define mediante continuación analítica de manera que

$$Z(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \zeta} dt + i\pi^{1/2} e^{-\zeta^2}, & \text{Im}[\zeta] = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \zeta} dt + 2i\pi^{1/2} e^{-\zeta^2}, & \text{Im}[\zeta] < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.2})$$

donde \mathcal{P} indica el valor principal de Cauchy. De esta última ecuación se obtiene que

$$Z(0) = i\pi^{1/2} + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt = i\pi^{1/2}. \quad (\text{B.3})$$

B.1. Integrales relacionadas

Considérese la integral

$$I_1(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-t^2}}{t-\zeta} dt. \quad (\text{B.4})$$

Reordenando se obtiene

$$I_1(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-\zeta}{t-\zeta} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-t^2}}{t-\zeta} dt. \quad (\text{B.5})$$

Luego,

$$I_1(\zeta) = 1 + \zeta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-\zeta} dt, \quad (\text{B.6})$$

y por lo tanto se cumple que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t-\zeta} e^{-t^2} dt = 1 + \zeta Z(\zeta). \quad (\text{B.7})$$

Utilizando un procedimiento similar se obtiene también la relación

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{t-\zeta} e^{-t^2} dt = \zeta[1 + \zeta Z(\zeta)]. \quad (\text{B.8})$$

B.2. Expresiones asintóticas

A partir de la definición (B.1), y derivando respecto al argumento ζ ,

$$Z'(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{(t-\zeta)^2} dt. \quad (\text{B.9})$$

Luego, integrando por partes se obtiene

$$Z'(\zeta) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t-\zeta} e^{-t^2} dt. \quad (\text{B.10})$$

Así, utilizando (B.7) se tiene que la función Z satisface la ecuación diferencial

$$Z'(\zeta) + 2\zeta Z(\zeta) + 2 = 0, \quad (\text{B.11})$$

ecuación que en términos de la función error complementaria [164], y tomando en cuenta (B.3) como condición de borde, tiene solución

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2}e^{-\zeta^2} \operatorname{erfc}(-i\zeta). \quad (\text{B.12})$$

De esta manera, utilizando las expresiones en serie de la función error complementaria en torno a $\zeta = 0$ [164, 165], la función Z en torno a $\zeta = 0$ se puede expandir en serie de Taylor como

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2}e^{-\zeta^2} - \pi^{1/2}\zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{2n}}{\Gamma(n+1/2)}, \quad (\text{B.13})$$

o bien

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2}e^{-\zeta^2} - 2\zeta \left(1 - \frac{2\zeta^2}{3} + \frac{4\zeta^4}{15} + \dots \right), \quad |\zeta| \ll 1. \quad (\text{B.14})$$

Ahora, para argumentos grandes $\zeta \rightarrow \infty$, a partir de las definiciones (B.1) y (B.2) en las distintas regiones del plano complejo, expandiendo $1 - t/\zeta$ para $t/\zeta \ll 1$, se tiene

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2}\sigma e^{-\zeta^2} - \frac{1}{\pi^{1/2}\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\zeta^n} e^{-t^2} dt, \quad (\text{B.15})$$

con

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im}[\zeta] > 0 \\ 1, & \operatorname{Im}[\zeta] = 0 \\ 2, & \operatorname{Im}[\zeta] < 0 \end{cases}, \quad (\text{B.16})$$

y en el caso $\operatorname{Im}[\zeta] = 0$ la integral corresponde al valor principal de Cauchy. Así, calculando explícitamente las integrales se obtiene

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2}\sigma e^{-\zeta^2} - \frac{1}{\pi^{1/2}\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\zeta^{2n}} dt, \quad (\text{B.17})$$

o bien,

$$Z(\zeta) = i\pi^{1/2}\sigma e^{-\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{3}{4\zeta^4} + \dots \right), \quad |\zeta| \gg 1. \quad (\text{B.18})$$

Apéndice C

Leyes de conservación en la teoría cuasilineal

Dadas las ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones cuasilineales (4.48)–(4.52), es importante notar la relevancia de la parte imaginaria o tasa de crecimiento (amortiguamiento). En (4.51) se observa de manera explícita que esta componente de la frecuencia compleja modera la amplitud de las perturbaciones electromagnéticas, y por lo tanto la cantidad de energía y momentum que pueden transmitirse ondas y partículas para cada número de onda k y las respectivas frecuencias dadas por la relación de dispersión.

Así, la transferencia de energía y momentum entre partículas y ondas está moderada por la tasa de crecimiento y, dependiendo del signo de $\omega_k^{(i)}$, la onda crecerá en amplitud enfriando y frenando las partículas (si $\omega_k^{(i)} > 0$), o bien la onda se amortiguará calentando o acelerando el plasma (si $\omega_k^{(i)} < 0$).

C.1. Conservación de partículas

Es importante notar que en el marco de la teoría cuasilineal [70,71,165], el número total de partículas se conserva en el espacio de fase, es decir, las funciones de distri-

bución $f_{\mu}^{(0)}$ se mantienen normalizadas independientemente de los cambios debido a la evolución cuasilineal de los parámetros. Esto es,

$$\int f_{\mu}^{(0)} d\mathbf{v} = 1 \quad (\text{C.1})$$

se mantiene para todo tiempo. Así, para conservar la cantidad de partículas se debe satisfacer

$$\int \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial t} d\mathbf{v} = 0, \quad (\text{C.2})$$

donde, la evolución cuasilineal de la función de distribución de orden cero viene dada por la ecuación (4.14). Así, la condición (C.2) se puede escribir como

$$I_0 = -\frac{q_{\mu}}{m_{\mu}} \int dk \int d\mathbf{v} \left(\mathbf{E}_{-k} - \frac{k}{\omega_{-k}} \mathbf{v} \times \hat{z} \times \mathbf{E}_{-k} \right) \cdot \frac{\partial f_{\mu,k}}{\partial \mathbf{v}}, \quad (\text{C.3})$$

con I_0 a determinar, siendo igual a cero si se satisface la ley de conservación de partículas.

Ahora, a partir de la ecuación (C.3), integrando por partes y considerando el límite $f_{\mu} \rightarrow 0$ cuando $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$, se obtiene

$$I_0 = \frac{q_{\mu}}{m_{\mu}} \int dk \int d\mathbf{v} f_{\mu,k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\mathbf{E}_{-k} - \frac{k}{\omega_{-k}} \mathbf{v} \times \hat{z} \times \mathbf{E}_{-k} \right). \quad (\text{C.4})$$

Pero, la divergencia en las velocidades del vector $\mathbf{E}_{-k} - \frac{k}{\omega_{-k}} \mathbf{v} \times \hat{z} \times \mathbf{E}_{-k}$ resulta ser nula. Por lo tanto

$$I_0 = \int \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial t} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{C.5})$$

y se satisface entonces la conservación de partículas en la teoría cuasilineal.

C.2. Conservación de energía

Por otro lado, de la teoría cuasilineal se sabe que este tipo de sistemas conserva la densidad de energía por unidad de volumen. La energía conservada corresponde a

la suma de la energía contenida en el plasma, temperatura y velocidades de derivadas, y la energía que se propaga junto con la onda.

Para funciones de distribución bi-Maxwellianas, la energía contenida en el plasma viene dada por

$$E_{\text{plasma}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \int |\mathbf{v}|^2 f_{\mu}^{(0)} d\mathbf{v} = \sum_{\mu} \left(\frac{n_{\mu} m_{\mu} V_{\mu}^2}{2} + n_{\mu} K_B T_{\mu\perp} + \frac{1}{2} n_{\mu} K_B T_{\mu\parallel} \right). \quad (\text{C.6})$$

Luego,

$$\frac{dE_{\text{plasma}}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \int |\mathbf{v}|^2 \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial t} d\mathbf{v}. \quad (\text{C.7})$$

Así, usando (4.11) y (4.14), y realizando un procedimiento similar al utilizado para mostrar la conservación de partículas en la sección C.1, para la derivada temporal de la energía de las partículas en el plasma se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{plasma}}}{dt} = & -\frac{1}{8\pi L} \sum_{\mu} \omega_{\mu p}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{i|\mathbf{E}_k|^2}{\omega_k} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_0^{\infty} \frac{\left((\omega_k - kv_z) \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_{\perp}} + kv_{\perp} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial v_z} \right)}{\omega_k - kv_z \pm \Omega_{\mu}} v_{\perp}^2 dv_{\perp}. \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

En esta última ecuación se reconoce parte de la relación de dispersión. De esta manera, usando (3.23), la ecuación (C.8) se reduce a

$$\frac{dE_{\text{plasma}}}{dt} = -\frac{1}{16\pi^2 L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i|\mathbf{E}_k|^2}{\omega_k} (c^2 k^2 - \omega_k^2) dk. \quad (\text{C.9})$$

Pero, como $\omega_k = \omega_k^{(\tau)} + i\omega_k^{(i)}$, separando parte real y parte imaginaria de (C.9) y usando las relaciones de paridad (3.13), se obtiene

$$\frac{dE_{\text{plasma}}}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\omega_k^{(i)} |\mathbf{E}_k|^2}{2\pi L} \left(\frac{c^2 k^2}{|\omega_k|^2} + 1 \right) dk. \quad (\text{C.10})$$

Así, utilizando (4.32), y expresando $2\omega_k^{(i)}|\mathbf{E}_k|^2$ en términos de la derivada temporal de $|\mathbf{E}_k|^2$, la ecuación de conservación de energía resulta ser

$$\frac{d}{dt}E_{\text{total}} = \frac{d}{dt}(E_{\text{campo}} + E_{\text{plasma}}) = 0, \quad (\text{C.11})$$

donde

$$E_{\text{campo}} = \frac{1}{8\pi^2 L} \int_0^\infty (|\mathbf{E}_k|^2 + |\mathbf{B}_k|^2) dk. \quad (\text{C.12})$$

Finalmente, normalizando las energías (C.6) y (C.12) a la densidad de energía del campo de fondo $B_0^2/8\pi = n_p m_p V_{Ap}^2/2$, en términos del tiempo normalizado $\tau = \Omega_p t$ se obtiene

$$\frac{d}{d\tau}(E_c + E_p) = 0, \quad (\text{C.13})$$

donde

$$E_c = \int_0^\infty dy \varepsilon_y \left(1 + \frac{V_{Ap}^2 |x_y|^2}{c^2 y^2} \right) \quad (\text{C.14})$$

y

$$E_p = \sum_{\mu} \frac{\eta_{\mu} M_{\mu}}{z_{\mu}} \left(U_{\mu}^2 + \beta_{\mu\perp}^2 \frac{1}{2} \beta_{\mu\parallel}^2 \right). \quad (\text{C.15})$$

El procedimiento recién mostrado para obtener la conservación de energía es general y no hay aproximaciones de por medio salvo las derivadas temporales, calculadas a partir de la teoría cuasilineal. Pero, como se vio en la Sec. 3.2, en el presente estudio las fluctuaciones a considerar son de frecuencias bajas. Luego, al considerar $V_{Ap}^2 \ll c^2$ la ecuación (C.14) se reduce a

$$E_c = \int_0^\infty dy \varepsilon_y \quad (\text{C.16})$$

y la ley de conservación (C.13), se satisface. En otras palabras, en el caso de ondas de Alfvén o de frecuencias bajas comparadas con ck , la energía en el campo eléctrico

es despreciable respecto a la contenida en el campo magnético, y es este campo el que principalmente cede o recibe energía del plasma al interactuar con las partículas.

C.3. Conservación de momentum

En el caso de ausencia de fuerzas externas (gradientes de presión, campos gravitatorios, etc.) al sistema compuesto del plasma y los respectivos campos electromagnéticos, si existen variaciones temporales de las velocidades promedio de las especies que conforman el plasma, para satisfacer la conservación de momentum es entonces necesario que el momentum asociado a las ondas electromagnéticas también evolucione como función del tiempo y se cumpla alguna ley de conservación. En el caso de campos que dependen solamente de la coordenada z , la densidad de momentum de una onda electromagnética viene dada por

$$\mathbf{P}_{\text{campo}} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi c} dz = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{S}}{c^2} dz, \quad (\text{C.17})$$

donde $\mathbf{S} = (c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ es el llamado vector de Poynting [103] y L la longitud de referencia del plasma. Esto es, reemplazando las expresiones integrales (3.9), (3.10) para los campos (C.17) se puede expresar como

$$\mathbf{P}_{\text{campo}} = \frac{1}{4\pi^2 c L} \int_0^{\infty} dk (\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{-\mathbf{k}} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}}). \quad (\text{C.18})$$

Pero a partir de las ecuaciones de Maxwell se tiene

$$\mathbf{B}_{\pm\mathbf{k}} = \pm \frac{ck}{\omega_{\pm}} \hat{z} \times \mathbf{E}_{\pm}, \quad (\text{C.19})$$

y por lo tanto, en términos de la amplitud compleja de los modos de campo eléctrico, el momentum asociado a los campos es

$$\mathbf{P}_{\text{campo}} = \frac{1}{2\pi^2 L} \int_0^{\infty} dk \frac{k}{|\omega_k|^2} \omega_k^{(r)} |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \hat{z}. \quad (\text{C.20})$$

Luego, en términos de las variables normalizadas introducidas en la Sec. 4.2.1, la densidad de momentum $\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_{\text{campo}} / n_p m_p V_{Ap}$ se expresa como

$$\mathbf{P}_c = 2 \int_0^\infty dy \frac{V_{Ap}^2}{c^2} \frac{x}{y} \varepsilon_y^\pm \hat{z}. \quad (\text{C.21})$$

A partir de la última expresión es importante notar que, si bien en general $P_c \neq 0$, al igual que en el caso de la energía, a orden $V_{Ap}^2 \ll c^2$ se tiene

$$P_c \approx 0. \quad (\text{C.22})$$

Luego, en esta aproximación el campo electromagnético no transmite momentum.

Por otro lado, para el caso de la partículas, en el caso de las funciones de distribución bi-Maxwellianas (4.16), la densidad total de momentum del plasma viene dada por [70, 71, 165]

$$\mathbf{P}_{\text{plasma}} = \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \int \mathbf{v} f_{\mu}^{(0)} d\mathbf{v} = \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} V_{\mu} \hat{z}. \quad (\text{C.23})$$

Luego, la derivada temporal del momentum de las partículas está dada por

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{plasma}}}{dt} = \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \int \mathbf{v} \frac{\partial f_{\mu}^{(0)}}{\partial t} d\mathbf{v} = \sum_{\mu} n_{\mu} m_{\mu} \frac{dV_{\mu}}{dt} \hat{z}. \quad (\text{C.24})$$

Siguiendo un procedimiento similar al cual se utilizó para obtener una expresión exacta para la conservación de energía (Sec. C.2), en este caso también se puede obtener una expresión para la derivada del momentum del plasma en términos de las integrales K_j^{μ} . Esto es, reemplazando las expresiones para la derivada temporal de $f_{\mu}^{(0)}$ [Ec. (4.14)], y reemplazando las expresiones integrales por la relación de dispersión [Ec. (3.23)] se obtiene que la derivada temporal del momentum de las partículas respecto al tiempo es

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{plasma}}}{dt} = -\frac{1}{8\pi^2 L} \int_0^\infty dk \frac{ik|\mathbf{E}_k|^2}{|\omega_k|^2} c^2 k^2 \left(1 + \frac{\omega_k^2}{c^2 k^2} \right) \hat{z}. \quad (\text{C.25})$$

En la aproximación $|\omega_k|^2 \ll c^2 k^2$ la derivada temporal del momentum se reduce a

$$\frac{dP_{\text{plasma}}}{dt} = -\frac{1}{8\pi^2 L} \int_0^\infty dk \frac{ik|E_k|^2}{|\omega_k|^2} c^2 k^2 \hat{z}, \quad (\text{C.26})$$

expresión que por las relaciones de paridad de la frecuencia compleja (3.13) resulta ser nula. Luego, en esta aproximación

$$\frac{dP_{\text{plasma}}}{dt} \approx 0. \quad (\text{C.27})$$

Así, a partir de (C.22) y (C.27) se obtiene

$$\frac{dP_{\text{total}}}{dt} \approx \frac{dP_{\text{plasma}}}{dt} = 0, \quad (\text{C.28})$$

lo que en esta aproximación corresponde a la conservación de momentum.

Finalmente, en términos de las variables normalizadas la conservación de momentum se puede escribir como

$$P_p = \sum_{\mu} \frac{z_{\mu} \eta_{\mu}}{M_{\mu}} U_{\mu} = \text{cte.}, \quad (\text{C.29})$$

donde $P_p = P_{\text{plasma}}/n_p m_p V_{Ap}$.

Es importante notar que esta expresión es válida solamente en el marco de la aproximación de frecuencias bajas y el hecho de despreciar el momentum del campo electromagnético es completamente consistente, ya que a partir de la misma aproximación se desprende que el momentum total del plasma es constante, garantizando la conservación de momentum. Sin embargo, en el caso general, a partir del mismo procedimiento se puede demostrar que, cuando las velocidades de Alfvén no son despreciables respecto a la velocidad de la luz, el momentum de los campos no es despreciable y al mismo tiempo el momentum de las partículas no es constante. Así, con y sin la aproximación $V_{Ap}^2 \ll c^2$, en la teoría cuasilineal el momentum total del sistema siempre es conservado.

Referencias

- [1] I. Langmuir, P. Natl. Acad. Sci. USA **14**, 627 (1928).
- [2] E. Asseo, Plasma Phys. Controlled Fusion **45**, 853 (2003).
- [3] U. A. Mofiz, G. M. Bhuiyan, Z. Ahmed y M. A. Asgar, Phys. Rev. A **38**, 5935 (1988).
- [4] M. Y. Yu, P. K. Shukla y N. Rao, Astrophys. Space Sci. **107**, 327 (1984).
- [5] O. G. Onishchenko, O. A. Pokhotelov, P. K. Shukla, L. Stenflo, A. V. Bogdanov y F. F. Kamenets, Phys. Scr. **T84**, 139 (2000).
- [6] D. A. Keston, E. W. Laing y D. A. Diver, Phys. Rev. E **67** (2003).
- [7] V. Muñoz, T. Hada y S. Matsuyiko, Earth Planets Space **58**, 1213 (2006).
- [8] B. H. Mauk, S. M. Krimigis, E. P. Keath, A. F. Cheng, T. P. Armstrong, L. J. Lanzerotti, G. Gloecker y D. C. Hamilton, J. Geophys. Res. **92**, 15283 (1987).
- [9] J. D. Scudder, E. C. Sittler Jr. y H. S. Bridge, J. Geophys. Res. **86**, 8157 (1981).
- [10] M. Stepanova, V. Pinto, J. A. Valdivia y E. E. Antonova, J. Geophys. Res. **116**, 1 (2011).

- [11] V. Muñoz, *Nonlinear Proc. Geophys.* **13**, 237 (2006).
- [12] C. Tsallis y A. M. C. de Souza, *Phys. Lett. A* **235**, 444 (1997).
- [13] J. M. Liu, J. S. D. Groot, J. P. Matte, T. W. Johnston y R. P. Drake, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2717 (1994).
- [14] M. R. Collier, D. C. Hamilton, G. Gloecker, P. Bochsler y R. B. Sheldon, *Geophys. Res. Lett.* **23**, 1191 (1996).
- [15] X. P. Huang y C. F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2187 (1994).
- [16] D. Koga, A. C.-L. Chian, R. A. Miranda y E. L. Rempel, *Phys. Rev. E* **75** (2007).
- [17] Y. Voitenko y M. Goossens, *Space Sci. Rev.* **122**, 255 (2006).
- [18] Y. Voitenko y M. Goossens, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005).
- [19] D. J. Wu, *Space Sci. Rev.* **121**, 333 (2005).
- [20] L. Yang y D. J. Wu, *Phys. Plasmas* **12** (2005).
- [21] Y. Nariyuki, T. Hada y K. Tsubouchi, *Phys. Plasmas* **15** (2008).
- [22] H. D. Singh y R. P. Sharma, *Phys. Plasmas* **14** (2007).
- [23] H. D. Singh y R. P. Sharma, *Solar Phys.* **243**, 219 (2007).
- [24] J. A. Araneda, A. F. Viñas y H. Astudillo, *J. Geophys. Res.* **107**, 1453 (2002).
- [25] W. Oohara y R. Hatakeyama, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 205005 (2003).
- [26] W. Oohara y R. Hatakeyama, *Thin Solid Films* **435**, 280 (2003).

- [27] V. Stefan y V. T. Tikhonchuk, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1476 (1982).
- [28] M. Barnes, F. I. Parra, E. G. Highcock, A. A. Schekochihin, S. C. Cowley y C. M. Roach, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 175004 (2011).
- [29] M. Etehad Abari y B. Shokri, *Phys. Plasmas* **18**, 053111 (2011).
- [30] T. Chang, *Phys. Plasmas* **6**, 4137 (1999).
- [31] J. Valdivia, J. Rogan, V. Muñoz, L. Gomberoff, A. Klimas, D. Vassiliadis, V. Uritsky, S. Sharma, B. Toledo y L. Wastavino, *Adv. Space Res.* **35**, 961 (2005).
- [32] J. A. Valdivia, J. Rogan, V. Muñoz y B. Toledo, *Space Sci. Rev.* **122**, 313 (2006).
- [33] W. M. Macek, *Adv. Space Res.* **46**, 526 (2010).
- [34] M. G. Kivelson y C. T. Russell, editores, *Introduction to Space Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [35] Y. Kamide y A. C. L. Chian, editores, *Handbook of the Solar-Terrestrial Environment* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007).
- [36] M. J. Aschwanden, *Physics of the Solar Corona. An Introduction with Problems and Solutions* (Praxis Publishing Ltd., 2006).
- [37] W. I. Axford y J. F. McKenzie, *The origin of the high speed solar wind streams* (University Press, New York, 1992).
- [38] W. I. Axford y J. F. McKenzie, en *Solar Wind Eight, AIP Conf. Proc.* (Pergamon, New York, 1996), pág. 382.

- [39] J. L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. C. E. Huber, S. R. Cranmer, L. Strachan, A. V. Panasyuk, L. D. Gardner, M. Romoli, S. Fineschi, D. Dobrzycka, J. C. Raymond, P. Nicolosi, O. H. W. Siegmund, D. Spadaro, C. Benna, A. Ciaravella, S. Giordano, S. R. Habbal, M. Karovska, X. Li, R. Martin, J. G. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, R. H. O'Neal, C. Pernechele, G. Poletto, P. L. Smith y R. M. Suleiman, *Astrophys. J.* **501**, L127 (1998).
- [40] S. R. Cranmer, J. L. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. C. E. Huber, L. Strachan, A. V. Panasyuk, L. D. Gardner, M. Romoli, S. Fineschi, D. Dobrzycka, J. C. Raymond, P. Nicolosi, O. H. W. Siegmund, D. Spadaro, C. Benna, A. Ciaravella, S. Giordano, S. R. Habbal, M. Karovska, X. Li, R. Martin, J. G. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, R. H. O'Neal, C. Pernechele, G. Poletto, P. L. Smith y R. M. Suleiman, *Astrophys. J.* **511**, 481 (1999).
- [41] S. R. Cranmer, G. B. Field y J. L. Kohl, *Astrophys. J.* **518**, 481 (1999).
- [42] R. Esser, S. Fineschi, D. Dobrzycka, S. R. Habbal, R. J. Edgar, J. C. Raymond, J. L. Kohl y M. Guhathakurta, *Astrophys. J. Lett.* **510**, L63 (1999).
- [43] C. Y. Tu y E. Marsch, en *Solar Wind Nine, AIP Conf. Proc.* (Woodbury, New York, 1999), pág. 373.
- [44] E. Marsch, *Nonlinear Proc. Geophys.* **5**, 11 (1998).
- [45] Y. Q. Hu y S. R. Habbal, *J. Geophys. Res.* **104**, 17045 (1999).
- [46] S. R. Cranmer, *Space Sci. Rev.* **101**, 229 (2002).

- [47] P. A. Isenberg, *J. Geophys. Res.* **106**, 29249 (2001).
- [48] J. V. Hollweg y P. A. Isenberg, *J. Geophys. Res.* **107**, 1147 (2002).
- [49] P. A. Isenberg y J. V. Hollweg, *J. Geophys. Res.* **88**, 3923 (1983).
- [50] C. Y. Tu y E. Marsch, *Space Sci. Rev.* **73**, 1 (1995).
- [51] B. T. Tsurutani, G. S. Lakhina, J. S. Pickett, F. L. Guarnieri, N. Lin y B. E. Goldstein, *Nonlinear Proc. Geophys.* **12**, 321 (2005).
- [52] P. H. Yoon, C. B. Wang y C. S. Wu, *Phys. Plasmas* **16** (2009).
- [53] C. S. Wu y P. H. Yoon, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007).
- [54] S. Galtier, *Nonlinear Proc. Geophys.* **16**, 83 (2009).
- [55] R. Marino, L. Sorriso-Valvo, V. Carbone, A. Noullez, R. Bruno y B. Bavassano, *Earth, Moon, and Planets* **104**, 115 (2009).
- [56] E. Camporeale y D. Burgess, *Astrophys. J.* **730**, 114 (2011).
- [57] F. Sahraoui, M. L. Goldstein, P. Robert y Y. V. Khotyaintsev, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 231102 (2009).
- [58] S. J. Bame, J. R. Asbridge, W. C. Feldman, S. P. Gary y M. D. Montgomery, *Geophys. Res. Lett.* **2** (1975).
- [59] E. Marsch, K.-H. Mohlhauserr, R. Schwenn, H. Rosenbauer, W. Pilipp y F. M. Neubauer, *J. Geophys. Res.* **87**, 52 (1982).
- [60] L. Gomberoff y J. A. Valdivia, *J. Geophys. Res.* **107**, 1494 (2002).
- [61] L. Gomberoff y J. A. Valdivia, *J. Geophys. Res.* **108**, 1050 (2003).

- [62] L. Gomberoff, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *Planet. Space Sci.* **52**, 679 (2004).
- [63] J. Kohl, G. Noci, E. Antonucci, G. Tondello, M. Huber, L. Gardner, P. Nicolosi, L. Strachan, S. Fineschi, J. Raymond, M. Romoli, D. Spadaro, A. Panasyuk, O. Siegmund, C. Benna, A. Ciaravella, S. Cranmer, S. Giordano, M. Karovska, R. Martin, J. Michels, A. Modigliani, G. Naletto, C. Pernechele, G. Poletto y P. Smith, *Solar Phys.* **175**, 613 (1997).
- [64] X. Li, S. R. Habbal, J. Kohl y G. Noci, *Astrophys. J.* **501**, L133 (1998).
- [65] J. L. Kohl, R. Esser, S. R. Cranmer, S. Fineschi, L. D. Gardner, A. V. Panasyuk, L. Strachan, R. M. Suleiman, R. A. Frazin y G. Noci, *Astrophys. J.* **510**, L59 (1999).
- [66] L. Gomberoff y R. Elgueta, *J. Geophys. Res.* **96**, 9801 (1991).
- [67] H. F. Astudillo, *J. Geophys. Res.* (1996).
- [68] B. G. D. Chandran, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008).
- [69] Q. Luo y D. Melrose, *Planet Space Sci.* **55** (2007).
- [70] N. A. Krall y A. W. Trivelpiece, *Principle of Plasma Physics* (San Francisco Press Inc., 1986).
- [71] A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich y A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984).
- [72] E. Marsch y C. Y. Tu, *J. Geophys. Res.* **106**, 8357 (2001).
- [73] P. B. Dusenbery, y J. V. Hollweg, *J. Geophys. Res.* **86**, 153 (1981).

- [74] P. A. Isenberg y B. J. Vasquez, *Astrophys. J.* **668**, 546 (2007).
- [75] R. C. Davidson y J. M. Ogden, *Phys. Fluids* **18**, 1045 (1975).
- [76] P. H. Yoon, *Phys. Fluids B* **4**, 3627 (1992).
- [77] S. P. Gary, D. Yin, D. Winske y L. Ofman, *J. Geophys. Res.* **106**, 10715 (2001).
- [78] L. Ofman, A. Viñas y S. P. Gary, *Astrophys. J.* **547** (2001).
- [79] L. Ofman y A. F. Viñas, *J. Geophys. Res.* **112** (2007).
- [80] L. Ofman, *J. Geophys. Res.* **115** (2010).
- [81] K. R. Moore, V. A. Thomas y D. J. McComas, *J. Geophys. Res.* **96**, 7779 (1991).
- [82] M. Velli, R. Grappin y A. Mangeney, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **62**, 101 (1991).
- [83] B. D. Fried y S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function* (Academic, San Diego, California, 1961).
- [84] E. N. Parker, *Astrophys. J.* **128**, 644 (1958).
- [85] R. Smith, *Observational Astrophysics* (Cambridge University Press, 1995).
- [86] R. Erdélyi y I. Ballai, *Astron. Nachr.* **328**, 726 (2007).
- [87] *Research Opportunities in Plasma Astrophysics*, Princeton, New Jersey (2010).
Report of the Workshop on Opportunities in Plasma Astrophysics.

- [88] C. Schrijver y G. Siscoe, *Heliophysics: Evolving Solar Activity and the Climates of Space and Earth*, Heliophysics 3 Volume Set (Cambridge University Press, 2010).
- [89] E. Priest, *Solar magneto-hydrodynamics*, Geophysics and astrophysics monographs (D. Reidel Pub. Co., 1984).
- [90] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics* (Plenum Press, New York, 1984).
- [91] G. A. Gary, *Solar Phys.* **203**, 71 (2001).
- [92] L. Biermann, *Z. Astrophys.* **29**, 274 (1951). En idioma alemán.
- [93] H. Alfvén, *Tellus* **9**, 92 (1957).
- [94] B. Harvey, *Russian planetary exploration: history, development, legacy, prospects*, Springer-Praxis books in space exploration (Springer, 2007).
- [95] S. R. Cranmer, en *13th Cambridge Workshop on Cool Stars, Stellar Systems and the Sun*, editado por F. Favata, G. A. J. Hussain, & B. Battrock (2005), Vol. 560 de *ESA Special Publication*, pág. 299.
- [96] Información disponible en <http://www.nasa.gov/missions/>.
- [97] D. Pesnell y K. Addison, *SDO-solar dynamics observatory: About the SDO mission*, NASA (2010).
- [98] V. Nakariakov, *Solar magnetohydrodynamics*, Curso de la Universidad de Warwick (2008).

- [99] R. Fitzpatrick, Plasma physics, Curso de la Universidad de Texas en Austin (2011).
- [100] L. Landau, J. Phys. USSR **10**, 25 (1946).
- [101] I. B. Bernstein, Phys. Rev. **109**, 10 (1958).
- [102] A. A. Vlasov, J. Phys. USSR **9**, 25 (1945).
- [103] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Inc., 1962).
- [104] R. Elgueta, *Aceleración resonante de partículas alfa en el viento solar rápido*, Tesis de Magíster, Universidad de Chile (1992).
- [105] A. L. Brinca y B. T. Tsurutani, Astron. Astrophys. **187**, 311 (1987).
- [106] F. Verheest, Icarus **86**, 273 (1990).
- [107] M. B. Bavassano Cataneo y V. Formisani, Phys. Scr. **T50** (1994).
- [108] P. S. Moya, V. Muñoz, J. Rògan y J. A. Valdivia, J. Atmos. Solar-Terr. Phys. **73**, 1390 (2011).
- [109] I. B. Bernstein y F. Engelmann, Phys. Fluids **9**, 937 (1966).
- [110] A. A. Vedenov, J. Nucl. Energy, Part C Plasma Phys. **5** (1963).
- [111] C. F. Kennel y F. Engelmann, Phys. Fluids **9**, 2377 (1966).
- [112] C. S. Wu, Phys. Fluids **11**, 1733 (1968).
- [113] V. Arunasalam, P. C. Efthimion, J. C. Hosea, H. Hsuan y G. Taylor, Phys. Rev. A **37** (1988).

- [114] C. Roberson, K. W. Gentle y P. Nielsen, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971).
-
- [115] E. P. Kontar, V. I. Lapshin y V. N. Mel'nik, en *International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory* (1998), Vol. 2, págs. 688–690.
- [116] J. Pavan, P. H. Yoon y T. Umeda, *Phys. Plasmas* **18** (2011).
- [117] B. Basu y N. J. Grossbard, *Phys. Plasmas* **18**, 092106 (2011).
- [118] P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz y J. A. Valdivia, en preparación (2011).
- [119] A. L. García, *Numerical methods for Physics* (Prentice-Hall, New Jersey, 2000), segunda edición.
- [120] J. V. Hollweg y H. J. Völk, *Nature* **225**, 441 (1970).
- [121] G. Paesold y A. O. Benz, *Astron. Astrophys.* **351**, 741 (1999).
- [122] J. C. Kasper, A. J. Lazarus y S. P. Gary, *Geophys. Res. Lett.* **29**, 1839 (2002).
- [123] P. Hellinger, P. Trávníček, J. C. Kasper y A. J. Lazarus, *Geophys. Res. Lett.* **33**, L09101 (2006).
- [124] L. Matteini, S. Landi, P. Hellinger y M. Velli, *J. Geophys. Res.* **111**, A10101 (2006).
- [125] G. Brodin, M. Marklund, J. Zamanian, Å. Ericsson y P. L. Mana, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008).
- [126] F. A. Asenjo, *Phys. Lett. A* **373**, 4460 (2009).
- [127] M. E. McKean, D. Winske y P. S. Gary, *J. Geophys. Res.* **99**, 11141 (1994).

- [128] P. S. Gary, J. Wang, D. Winske y S. A. Fuselier, *J. Geophys. Res.* **102**, 27159 (1997).-----
- [129] W. Daughton, P. S. Gary y D. Winske, *J. Geophys. Res.* **104**, 4657 (1999).
- [130] P. S. Gary, L. Yin, D. Winske y D. B. Reisenfeld, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 1355 (2000).
- [131] P. S. Gary, L. Yin, D. Winske, L. Ofman, B. E. Goldstein y M. Neugebauer, *J. Geophys. Res.* **108**, 1068 (2003).
- [132] H. Xie, L. Ofman y A. Viñas, *J. Geophys. Res.* **109**, A08103 (2004).
- [133] L. Ofman, P. S. Gary y A. Viñas, *J. Geophys. Res.* **107**, 1461 (2002).
- [134] C. G. Darwin, *Philos. Mag.* **39**, 537 (1920).
- [135] J. Lang y G.-Y. Fu, *Phys. Plasmas* **18**, 055902 (2011).
- [136] W. G. Pilipp, H. Miggenrieder, M. D. Montgomery, K.-H. Mühlhäuser, H. Rosenbauer y R. Schwenn, *J. Geophys. Res.* **92**, 1075 (1987).
- [137] W. G. Pilipp, H. Miggenrieder, K.-H. Mühlhäuser, H. Rosenbauer, R. Schwenn y F. M. Neubauer, *J. Geophys. Res.* **92**, 1103 (1987).
- [138] Š. Štverák y P. Trávníček, *J. Geophys. Res.* **113**, A03103 (2008).
- [139] J. M. Dawson, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 403 (1983).
- [140] C. K. Birdsall y A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulations* (McGraw-Hill Company, 1985).

- [141] H. Matsumoto y Y. Omura, editores, *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software* (Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, 1993).
- [142] M. Velli, R. Grappin y A. Mangeney, *Computer Physics Communications* **59**, 153 (1990).
- [143] R. Grappin y M. Velli, *J. Geophys. Res.* **101**, 425 (1996).
- [144] P. C. Liewer, M. Velli y B. E. Goldstein **87**, 257 (1999).
- [145] P. C. Liewer, M. Velli y B. E. Goldstein, *J. Geophys. Res.* **106**, 29,261 (2001).
- [146] M. L. Bellac y J. M. Lévy-Leblond, *Nuovo Cim.* **14B** (1973).
- [147] P. Hellinger, P. Trávníček, A. Mangeney y R. Grappin, *Geophys. Res. Lett.* **30** (2003).
- [148] P. Hellinger, M. Velli, P. Trávníček, P. S. Gary, B. E. Goldstein y P. C. Liewer, *J. Geophys. Res.* **110** (2005).
- [149] P. Hellinger y P. Trávníček, *J. Geophys. Res.* **113**, A10109 (2008).
- [150] Código original, 2-comp. de velocidad y 1-dim. espacial, por M. Hoshino y T. Teresawa (1985). Modificado por A. F. Viñas (1993) para incluir 3-comp. de velocidad y 1-dim. espacial. Código actual incluye modificaciones menores por P. S. Moya (2010).
- [151] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky y W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1992), segunda edición.

- [152] A. Wambecq, *Computing* **20**, 333 (1978).
- [153] Código híbrido modificado para incluir efectos de expansión por A. F. Viñas y P. S. Moya (2010).
- [154] P. S. Moya, A. F. Viñas, V. Muñoz y J. A. Valdivia, en preparación (2011).
- [155] L. E. Gumley, *Practical IDL programming: creating effective data analysis and visualization applications* (Morgan Kaufmann, 2002).
- [156] L. Ofman, A. F. Viñas y P. S. Moya, *Ann. Geophys.* **29**, 1071 (2011).
- [157] E. Marsch, editor, *Physics of the Inner Heliosphere II: Particles, Waves and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991), Cap. Kinetic Physics of the Solar Wind Plasma, págs. 45–133.
- [158] T. Nieves-Chinchilla y A. F. Viñas, *Geofísica internacional* **47**, 245 (2008).
- [159] L. F. Burlaga, A. F. Viñas y C. Wang, *J. Geophys. Res.* **112**, A07206 (2007).
- [160] S. Jurac, AGU Fall Meeting Abstracts pág. A1151 (2004).
- [161] M. Maksimovic, V. Pierrard y J. F. Lemaire, *Astron. Astrophys.* **324**, 725 (1997).
- [162] Z. Kiran, H. Shah, M. Qureshi y G. Murtaza, *Solar Physics* **236**, 167 (2006).
- [163] P. H. Yoon, C.-M. Ryu y T. Rhee, *Phys. Plasmas* **10**, 3881 (2003).
- [164] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, Inc., 1985).
- [165] J. D. Callen, *Fundamentals of Plasma Physics* (University of Wisconsin, Madison, 2006).