

DOC-F
M967
c.1.

Decaimientos paramétricos de ondas electromagnéticas en plasmas de electrones y positrones

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Víctor Hugo Muñoz Gálvez

Abril, 1998

Director de Tesis: **Dr. Luis Gomberoff Jaikles**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Víctor Hugo Muñoz Gálvez

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 7 de Abril de 1998.

Director de Tesis

Dr. Luis Gomberoff



Comisión de Evaluación de la Tesis

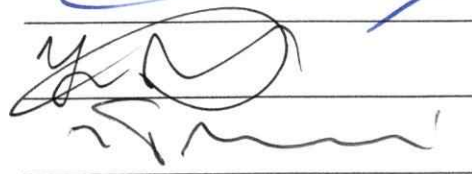
Dr. Mario Molina



Dr. Miguel Orszag



Dr. Jaime Rössler (Presidente)



Dr. Enrique Tirapegui



AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a todos quienes tuvieron algo que ver con que esta tesis llegara a buen término.

A mi director de tesis, Dr. Luis Gomberoff, por su dedicación y enorme colaboración durante los años que este trabajo comprendió.

A mi familia, a la cual debo todas las oportunidades de educación que he tenido, y por las cuales permanezco eternamente en deuda. Por su apoyo incondicional y su paciencia al soportar a un tipo tan poco expresivo en su seno.

A los miembros del Departamento de Física, con quienes he compartido algunos de los mejores momentos que puedo recordar. Muy en particular, a Herbert Massmann, que desde mi primer año de Licenciatura manifestó una mayor confianza en mí de la que soy capaz de tener, y con cuyo aprecio creo contar. También una mención especial a Alfonso Zerwekh, compañero de tantas jornadas, José Rogan, Maximiliano Montenegro, Fernando Méndez, Osvaldo Chandía, Lorena Céspedes, Alejandra Álvarez y Andrés Gomberoff, con quienes una especial amistad me une. Y, por supuesto, a nuestra estimada secretaria, Victoria.

Y a Jacqueline, que ha intentado convertir a este manojito de inseguridades y obsesiones en un ser más normal.

Mi permanencia en el plan de doctorado fue posible gracias a una Beca de Doctorado CONICYT.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por FONDECYT, proyecto No. 1960874, y Proyecto Trinacional, Fundación Andes, No. C-12999/6.

Índice

1	Introducción	1
2	Ecuaciones de fluido en presencia de efectos débilmente relativistas	5
3	Inestabilidades paramétricas en plasmas	13
3.1	Inestabilidades en plasmas	13
3.2	Inestabilidades paramétricas	19
3.2.1	Acoplamiento entre ondas	19
3.2.2	Interacción entre tres ondas	24
3.3	Método de Longtín y Sonnerup	28
4	Relación de dispersión de ondas electromagnéticas en un plasma de electrones y positrones	37
4.1	Polarización lineal	37
4.2	Polarización circular	42
4.3	Polarización circular, en un plasma magnetizado	45
5	Decaimientos paramétricos de una onda electromagnética en un plasma de electrones y positrones	48
5.1	Polarización lineal	49

	iv
5.2 Polarización circular	57
5.3 Polarización circular, en un plasma magnetizado	63
6 Decaimientos no lineales	67
6.1 Ondas linealmente polarizadas	67
6.2 Ondas circularmente polarizadas	76
6.3 Ondas circularmente polarizadas, en un plasma magnetizado	81
7 Conclusiones	95
A Apéndice	100
Referencias	102

RESUMEN

En esta tesis se estudian los decaimientos paramétricos de ondas electromagnéticas en plasmas de electrones y positrones. Se considera, primero, la propagación de ondas planas electromagnéticas polarizadas lineal y circularmente en un plasma no magnetizado; luego, la propagación de ondas circularmente polarizadas a lo largo de un campo magnético externo constante. El análisis se desarrolla en el contexto de una teoría de fluidos, introduciendo consistentemente efectos débilmente relativistas sobre las partículas en el campo de la onda y efectos térmicos no relativistas.

Se muestra que hay una serie de inestabilidades, tanto resonantes como no resonantes, del tipo decaimiento, batimiento y modulacional. Los acoplamientos involucrados y el rango de frecuencias inestables dependen de los parámetros del sistema, tales como la amplitud y frecuencia de la onda bomba, la temperatura del plasma y la intensidad del campo magnético.

ABSTRACT

In this thesis the parametric decays of electromagnetic waves in electron-positron plasmas are studied. First, propagation of linearly and circularly polarized plane electromagnetic waves in an unmagnetized plasma is considered; then, propagation of circularly polarized waves along a constant external magnetic field. The analysis follows a fluid theory, introducing weakly relativistic effects on the particle motion in the wave field, and non relativistic thermal effects.

We show that there is a number of instabilities, resonant as well as non resonant, of the decay, beat wave, and modulational types. The couplings involved and the range of unstable frequencies depend on the system parameters, such as the pump wave amplitude and frequency, the plasma temperature and the magnetic field intensity.

Capítulo 1

Introducción

Los plasmas de electrones y positrones son diferentes de los plasmas de iones y electrones en muchos aspectos, pues, en ausencia de la diferencia de masa entre partículas de distinta carga, no hay escalas naturales de alta y baja frecuencia [1]. La simetría entre las especies introduce así comportamientos exclusivos de estos plasmas, y hace desaparecer otros que dependen de la existencia de escalas de tiempo y espacio diferentes para iones y electrones [2].

Por otra parte, los plasmas de electrones y positrones se presentan en diversos sistemas físicos, en los cuales la temperatura puede ser suficientemente alta para superar la energía en reposo de los electrones y positrones, y los procesos de aniquilación y creación de pares electrón-positrón alcanzan un equilibrio. Casos de interés astrofísico encontramos en modelos de universo primitivo [3, 4], núcleos galácticos activos (AGN) [5–7] y atmósferas de pulsares [8–11]. En algunos de estos sistemas podemos tener además la presencia de un campo magnético (AGN, pulsares). Pero también el estudio de plasmas electrón-positrón es relevante en experimentos de laboratorio [1, 12, 13], como *colliders* de electrones y positrones, y plasmas semiconductores de agujeros y electrones [14]. En este último caso, el plasma puede ser no relativista, aunque también se han considerado regímenes relativistas [15–18]; en los

demás citados, se espera la presencia de importantes efectos relativistas.

Los decaimientos no lineales de ondas electromagnéticas de gran amplitud, polarizadas lineal o circularmente, han sido un campo de activa investigación (ver [2] y las referencias allí presentes, [19–24]). En el caso de polarización lineal el problema es más complicado, debido a la generación de armónicos y las perturbaciones de densidad debidas a la fuerza ponderomotriz de la onda electromagnética. Este problema ha sido estudiado por diversos autores [4, 25–35], en relación con la variabilidad observada de las características espectrales de núcleos galácticos activos y pulsares [36–45]. Para dar cuenta de las observaciones, Chian y Kennel [25, 46] conjeturaron que el pulso electromagnético podría experimentar modulación no lineal [47–49]. Estos autores dedujeron una ecuación no lineal de Schrödinger para la amplitud del pulso, ecuación cuyos coeficientes resultaron ser incorrectos. La razón de esto es que Chian y Kennel omitieron dos fuentes de no linealidad, a saber, la generación de armónicos y los efectos ponderomotrices [26, 50].

Kates y Kaup [27], usando una teoría de perturbaciones en múltiples escalas espacio-temporales, resolvieron el problema anterior consistentemente. Mostraron que en un plasma frío de electrones y positrones, no magnetizado, el sistema es modulacionalmente estable tanto para polarización lineal como circular. Pero cuando se consideran efectos térmicos (no relativistas), hay una inestabilidad modulacional en un estrecho rango justo por encima de la frecuencia de plasma. Recientemente, este resultado ha sido generalizado al considerar efectos térmicos ultrarrelativistas y amortiguamiento fonónico [51]. Tres casos fueron analizados en la Ref. [51]. Primero, cuando el amortiguamiento es $O(\epsilon^0)$ y $O(\epsilon^1)$ (ϵ es el parámetro de la perturbación), una inestabilidad modulacional es posible para todas las frecuencias y temperaturas. Cuando el amortiguamiento fonónico es muy pequeño, $O(\epsilon^2)$, la inestabilidad modu-

lacional ocurre para temperaturas ultrarrelativistas en una banda finita cerca de la frecuencia de plasma reducida.

Por su parte, se mostró que en presencia de un campo magnético externo [28], el plasma de electrones y positrones es inestable para $\omega < \omega_p/2$, donde $\omega_p = (4\pi n_0 e^2/m)^{1/2}$ es la frecuencia de plasma de los electrones (positrones). Notemos que la frecuencia de plasma real del sistema es $\sqrt{2}$ veces la frecuencia de plasma electrónica. Cuando se incluyen efectos térmicos completamente relativistas, el sistema es inestable para frecuencias $\omega \ll \eta\omega_c$, donde η es la razón entre la densidad de energía en reposo y la entalpía del sistema, y ω_c es la girofrecuencia del electrón [52].

En este trabajo estudiamos el decaimiento paramétrico de una onda electromagnética de gran amplitud, introduciendo efectos débilmente relativistas en el movimiento de las partículas en el campo de la onda, la fuerza ponderomotriz, y efectos térmicos no relativistas. En el Cap. 2 expondremos las ecuaciones de movimiento para un fluido relativista, y encontraremos el límite apropiado de ellas en el caso débilmente relativista mencionado. Luego, en el Cap. 3, revisaremos algunos conceptos básicos en el tratamiento de inestabilidades en plasmas, incluyendo la descripción de un método gráfico para su estudio. Los dos capítulos siguientes estarán dedicados a la derivación de la relación de dispersión de la onda electromagnética, primero la relación de dispersión lineal (Cap. 4) y luego la no lineal (Cap. 5) —la cual da cuenta del acoplamiento entre bandas laterales (*sideband waves*), o entre éstas y modos electro-acústicos—, para los casos en que la onda electromagnética tiene polarización lineal (Sec. 5.1) y circular (Sec. 5.2). Comparamos nuestros resultados con los de la Ref. [29], pero, como veremos, el tratamiento en ésta, además de restringirse al estudio de la inestabilidad modulacional, es erróneo en diversos aspectos, lo cual

conduce a expresiones incorrectas para las relaciones de dispersión. En presencia de un campo magnético uniforme, los modos normales para propagación longitudinal son de polarización circular, y éste es el caso estudiado en la Sec. 5.3. En el Cap. 6 se estudian los acoplamientos no lineales de la onda madre (o bomba) a modos electroacústicos y a sideband waves a través del método gráfico previamente introducido. Finalmente, en el Cap. 7 los resultados son resumidos y discutidos.

Capítulo 2

Ecuaciones de fluido en presencia de efectos débilmente relativistas

Las interacciones en un plasma, de carácter electromagnético, son complejas, por cuanto los campos desplazan las cargas, estableciendo nuevos campos que afectan a las propias partículas. Sin embargo, el predominio de los efectos colectivos permite que, en definitiva, la evolución del sistema pueda ser tratada de modo más simple. De hecho, resulta posible tratar al plasma como un fluido, constituido por tantos fluidos independientes como especies de partículas se hallen presentes, todos ellos desplazándose en un campo de fuerzas electromagnéticas.

En particular, estudiaremos un plasma de electrones y positrones ($m_e = m_p = m$), donde ambos fluidos tienen igual temperatura T y coeficiente adiabático γ . Si despreciamos efectos relativistas, las ecuaciones de un fluido ideal (sin efectos disipativos) son:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_j = \frac{q_j}{m} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_j \times \vec{B} \right) - \frac{1}{mn_j} \vec{\nabla} p_j \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (n_j \vec{v}_j) \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sum_j q_j n_j \vec{v}_j \quad (2.7)$$

$$\rho = \sum_j q_j n_j \quad (2.8)$$

$$p_j = C_j (n_j)^\gamma = n_j K T \quad (2.9)$$

donde n_j es la densidad y \vec{v}_j es la velocidad de cada fluido ($j = e$ para electrones y $j = p$ para positrones), \vec{E} y \vec{B} son los campos eléctrico y magnético, respectivamente, K es la constante de Boltzmann, \vec{J} es la corriente total y c es la velocidad de la luz.

Son 16 ecuaciones para 16 incógnitas: n_j , \vec{v}_j , \vec{E} , \vec{B} , p_j .

Debemos tener presente que, al tratar el plasma según una teoría de fluidos, estamos ignorando la individualidad de las partículas, y estudiamos el movimiento de "elementos de fluido", cuya velocidad es el promedio de la función de distribución sobre todas las velocidades de la distribución. Cada elemento de fluido puede contener muchas partículas, preocupándonos sólo la interacción de esos elementos de fluido entre sí y con los campos externos, lo cual equivale a considerar una especie de interacción promedio entre partículas.

Ahora nos preguntamos por las ecuaciones que gobiernan este sistema cuando hay efectos relativistas involucrados. Éstos se presentarán cuando la velocidad de las partículas no sea despreciable respecto a la velocidad de la luz. Ahora bien, esto puede ocurrir por dos razones: por una parte, los campos electromagnéticos sobre las partículas pueden impulsarlas a velocidades relativistas. Por otra, la temperatura puede ser suficientemente alta para que la energía interna del fluido sea comparable o

superior a la energía en reposo de las mismas. En este caso, es la velocidad aleatoria vinculada a la temperatura la que es relativista.

En cualquiera de estos casos, y en la superposición de ellos, nos es posible obtener la versión completamente relativista de las ecuaciones de fluido. (Para una discusión de la hidrodinámica de fluidos relativistas se puede consultar, p. ej., [3, 53, 54].) Por cierto, las ecuaciones de Maxwell (2.4), (2.5) no serán modificadas, de modo que basta estudiar el resto de las expresiones. Para simplificar la notación, nos limitaremos a considerar un gas constituido por una única especie. Adoptemos la convención para el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) .$$

Los índices griegos van de 0 a 3, y rotulan coordenadas de vectores de Lorentz, y los índices latinos van de 1 a 3, rotulando coordenadas de vectores ordinarios. Denotamos la 4-velocidad por

$$u^\mu = (\Gamma, \Gamma\vec{\beta}) ,$$

donde

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} , \quad (2.10)$$

$$\Gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} . \quad (2.11)$$

Definimos la corriente como

$$J^\mu = qnu^\mu \quad (2.12)$$

y el tensor electromagnético como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu , \quad (2.13)$$

donde el 4-potencial está dado en términos del potencial eléctrico ϕ y el potencial vectorial \vec{A} por:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) .$$

Las partículas que conforman el sistema que estudiaremos no interactúan entre sí, no estando sujetas a otra interacción que la de los campos electromagnéticos macroscópicos. Requerimos, pues, la expresión para el tensor de energía y momentum para un gas ideal:

$$T^{\mu\nu} = hu^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} , \quad (2.14)$$

con la densidad de entalpía

$$h = \epsilon + p ,$$

donde ϵ es la densidad de energía (en reposo más cinética) del elemento de fluido y p es la presión, ambas medidas en el sistema de referencia en el cual el elemento de fluido se encuentra en reposo.

Con estas definiciones, las ecuaciones de continuidad, de movimiento y de Maxwell con corrientes (2.3) y (2.6) para velocidades relativistas tienen la forma

$$J^\nu{}_{,\nu} = 0 , \quad (2.15)$$

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = J_\nu F^{\mu\nu} , \quad (2.16)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu , \quad (2.17)$$

respectivamente [${}_{,\nu} \equiv \partial_\nu = \partial/(\partial x^\nu)$].

Reescribamos estas ecuaciones en términos de vectores ordinarios. De (2.14) y (2.16) obtenemos:

$$qnu_\nu F^{\mu\nu} = h_{,\nu} u^\mu u^\nu + hu^\mu{}_{,\nu} u^\nu + hu^\mu u^\nu{}_{,\nu} + p_{,\nu} g^{\mu\nu} . \quad (2.18)$$

Multipliquemos (2.18) por u_μ , y usemos que

$$u^\mu u_\mu = -1 ,$$

$$u^\mu_{,\nu} u_\mu = 0 ,$$

y que, como $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, se tiene

$$u_\mu u_\nu F^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.19)$$

Con ello, (2.18) implica que

$$0 = (hu^\nu)_{,\nu} - p_{,\nu} u^\nu . \quad (2.20)$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad (2.15) se sigue que

$$u^\nu_{,\nu} = -\frac{n_{,\nu}}{n} u^\nu .$$

Usando esto podemos escribir (2.20) en la forma

$$0 = \left[\left(\frac{h}{n} \right)_{,\nu} - \frac{p_{,\nu}}{n} \right] u^\nu . \quad (2.21)$$

De la relación termodinámica

$$d \left(\frac{h}{n} \right) - \frac{dp}{n} = T d \left(\frac{\sigma}{n} \right) ,$$

donde T es la temperatura y σ es la densidad de entropía medida en reposo, podemos escribir finalmente (2.21) como

$$0 = \left(\frac{\sigma}{n} \right)_{,\nu} u^\nu , \quad (2.22)$$

que nos dice que la densidad de entropía específica σ/n es constante a lo largo de la trayectoria de cada elemento de fluido. El movimiento del fluido es, pues, adiabático,

como deberíamos esperar ya que en (2.14) no se ha considerado flujo de calor o fricción interna, es decir, viscosidad.

Usamos ahora la condición de adiabaticidad (2.20) para reescribir (2.18):

$$qn u_\nu F^{\mu\nu} = h u^\mu{}_{,\nu} u^\nu + (u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}) p_{,\nu} , \quad (2.23)$$

que es la ecuación de movimiento que reemplaza a (2.1).

De la componente temporal de (2.23) obtenemos una ecuación para la evolución temporal de Γ :

$$h \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - \Gamma \frac{dp}{dt} + qn \vec{v} \cdot \vec{E} . \quad (2.24)$$

La componente espacial de (2.23), en tanto, nos proporciona la ecuación de movimiento

$$\frac{h}{c^2} \frac{d}{dt} (\Gamma \vec{v}) = qn \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) - \vec{v} \frac{\Gamma}{c^2} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\Gamma} \vec{\nabla} p . \quad (2.25)$$

Observemos que (2.24) no es independiente de (2.25). En efecto, haciendo el producto punto de ésta por \vec{v} reobtenemos (2.24). Esta no independencia era esperable en virtud de que $u_\mu T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ [ecuación (2.19)].

Por otra parte, (2.15) y (2.17) se reescriben:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma n) + \vec{\nabla} \cdot (\Gamma n \vec{v}) = 0 , \quad (2.26)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi q \Gamma n , \quad (2.27)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} q \Gamma n \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (2.28)$$

Lo primero que observamos es que las familiares ecuaciones de Maxwell, que sabemos son invariantes relativistas, han adquirido un inusual factor Γ en la densidad. Esto ocurre simplemente porque n es la densidad medida en el sistema comóvil con

el elemento de fluido. Pero la estructura de la ecuación de continuidad (2.26) nos indica que la densidad de partículas en el laboratorio es

$$n_L = \Gamma n , \quad (2.29)$$

y es en términos de esta cantidad que las ecuaciones de Maxwell —y la ecuación de continuidad— recobran su expresión familiar. Lo usual, por cierto, es definir la corriente directamente en términos de las cantidades medidas en el laboratorio, $J^\mu = (n, \vec{J})$, en cuyo caso ninguno de estos problemas aparece, pero ha sido necesario discutir este punto ya que la entalpía, en (2.14), no se mide en el laboratorio. En lo sucesivo, pues, escribiremos nuestras ecuaciones en términos de la densidad en el laboratorio n_L , eliminando el subíndice por simplicidad. Lo importante es que, como no trabajaremos sino en el sistema del laboratorio, el hecho de que la densidad de partículas no es un invariante de Lorentz es irrelevante [2, pág. 11], [55]. (Notamos, sí, que la Ref. [55] muestra que si una onda electromagnética incide sobre dos partículas cargadas ubicadas en un mismo plano de fase constante de la onda, la aceleración que experimentan, gracias a que es simultánea, no significa una contracción de Lorentz en el sistema de laboratorio. Sin embargo, ello no implica, como pretende [55], que la densidad sea igual que en el sistema comóvil con las partículas, pues los elementos de volumen en ambos sistemas difieren.)

De lo anterior se sigue que las ecuaciones (2.2)–(2.8) conservan su forma en todo sistema de referencia, en cualquier régimen de efectos relativistas. Por el contrario, la ecuación de movimiento (2.1) cambia a la expresión general (2.25). Sin embargo, estamos interesados en el caso en que las temperaturas no son relativistas, en tanto la velocidad de los elementos de fluido es débilmente relativista. Ahora bien, recordemos que la densidad de energía ϵ se mide en el sistema en el cual el elemento de fluido

está en reposo, de modo que la única contribución a la energía cinética es la térmica, mucho menor, a su vez, que la energía en reposo en nuestra aproximación. También la presión es mucho menor que la densidad de energía en reposo. Luego

$$h \simeq nmc^2 . \quad (2.30)$$

Por último, el término proporcional a dp/dt en (2.25) es de un orden superior (v/c) al resto de los términos en la ecuación (para velocidades y presiones no relativistas), de modo que lo despreciaremos. Así pues, usando (2.30) y (2.29), (2.25) toma la forma, en el límite débilmente relativista que nos interesa,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\Gamma \vec{v}_j) = \frac{q_j}{m} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_j \times \vec{B} \right) - \frac{v_s^2}{n_j} \vec{\nabla} n_j . \quad (2.31)$$

Aquí hemos reinsertado los índices de partículas, y definimos la velocidad del sonido

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma KT}{m}} . \quad (2.32)$$

Esto último significa hacer uso de la ecuación de estado (2.9), que suponemos sigue siendo válida en este sistema en que las presiones son no relativistas.

En consecuencia, la introducción de efectos relativistas débiles en las velocidades no térmicas de las partículas tiene como único efecto la modificación de la ecuación de movimiento, a través del factor

$$\Gamma_j = \left(1 - \frac{\vec{v}_j^2}{c^2} \right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{v}_j^2}{c^2} . \quad (2.33)$$

La relación (2.31) ha sido ocasionalmente considerada como la ecuación de movimiento para un fluido en el campo de una onda de amplitud arbitraria, con efectos completamente relativistas [56, 57], lo cual es incorrecto, de acuerdo al análisis que hemos presentado.

Capítulo 3

Inestabilidades paramétricas en plasmas

En este Capítulo introduciremos algunos de los conceptos y métodos básicos a los que recurriremos en el resto del trabajo para estudiar el sistema de nuestro interés. Primero (Sec. 3.1) estableceremos las nociones elementales de inestabilidad y el análisis de ésta por medio de la relación de dispersión de ondas en un plasma. Luego (Sec. 3.2) centramos nuestro interés en las inestabilidades paramétricas. Un modelo simple de osciladores acoplados nos permitirá revisar las características generales de este tipo de inestabilidades. Por último, en la Sec. 3.3, presentaremos un método gráfico de gran utilidad en el estudio de inestabilidades paramétricas.

3.1 Inestabilidades en plasmas

En general, cualquier sistema físico que no se encuentre en un estado de equilibrio evolucionará, intentando reducir su energía libre hasta alcanzar tal estado. Es posible que, alcanzada una situación estacionaria, la aparición de nuevas interacciones o el cambio en alguno de los parámetros del sistema induzca un nuevo estado de equilibrio y obligue al sistema a reacomodarse. Por ello, no basta que, dado un sistema,

encontremos las soluciones de las ecuaciones que lo gobiernan, porque las perturbaciones que puede encontrar en su evolución pueden alejarlo tanto de su trayectoria que en definitiva dichas soluciones no sean observables. Conviene entonces introducir la noción de *estabilidad*. Diremos que un sistema es *estable* cuando las perturbaciones sobre su estado de equilibrio no destruyen éste, y el sistema sigue una trayectoria cercana a la original (como una bolita que es levemente desplazada del fondo de un recipiente esférico, quedando en movimiento armónico en torno a su posición inicial), e *inestable* cuando dichas perturbaciones, en vez de mantenerse acotadas en el tiempo, crecen y alejan al sistema de su trayectoria original (análogamente a una bolita en la cumbre de una colina, que al ser levemente desplazada rueda hacia abajo y no regresa al punto inicial).

En un plasma podemos encontrar una variedad de inestabilidades, de las cuales nos interesarán algunos tipos específicos. Para ilustrar ciertos conceptos generales, estudiemos un ejemplo simple, la llamada *inestabilidad de dos haces*. Consideremos un plasma integrado por electrones e iones, donde los electrones se mueven con velocidad $\vec{u}_e^0 = u_e^0 \hat{x}$ respecto a los iones. El plasma es uniforme, siendo las densidades electrónica e iónica iguales entre sí ($n_e^0 = n_i^0 = n_0$). Supongamos además que el plasma es frío ($T_e = T_i = 0$). Ésta es claramente una solución estacionaria de las ecuaciones de fluido (2.1)–(2.9).

Para estudiar lo que ocurre cuando el sistema se aleja levemente de este equilibrio, escribimos en las ecuaciones de fluido cada cantidad física C como su valor en equilibrio C_0 más una perturbación $\delta C \ll C_0$. El resultado de despreciar en las expresiones resultantes todos los términos que involucren productos de perturbaciones es un sistema de ecuaciones lineales en dichas perturbaciones. Decimos que hemos *linealizado* las ecuaciones. En este caso, podemos suponer además que las

perturbaciones dependen sólo de x y el tiempo. En tales condiciones, las ecuaciones resultantes son:

$$m_i n_0 \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} = e n_0 \delta E , \quad (3.1)$$

$$m_e n_0 \left(\frac{\partial \delta u_e}{\partial t} + u_e^0 \frac{\partial \delta u_e}{\partial x} \right) = -e n_0 \delta E , \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} = 0 , \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \delta u_e}{\partial x} + u_e^0 \frac{\partial \delta n_e}{\partial x} = 0 , \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \delta E}{\partial x} = 4\pi e (\delta n_i - \delta n_e) . \quad (3.5)$$

Como el estado inicial es de equilibrio, las perturbaciones estarán sujetas a un potencial parabólico, y por ende podemos asumirles una dependencia espacio-temporal de la forma

$$\delta C = \tilde{C} e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.6)$$

(o equivalentemente, escribimos las ecuaciones linealizadas en el espacio de Fourier).

Obtenemos así las relaciones:

$$\tilde{u}_i = i \frac{e}{m_i \omega} \tilde{E} , \quad (3.7)$$

$$\tilde{u}_e = -i \frac{e \tilde{E}}{m_e (\omega - k u_e^0)} , \quad (3.8)$$

$$\tilde{n}_i = \frac{k}{\omega} n_0 \tilde{u}_i , \quad (3.9)$$

$$\tilde{n}_e = \frac{k n_0}{\omega - k u_e^0} \tilde{u}_e , \quad (3.10)$$

$$i k \tilde{E} = 4\pi e (\tilde{n}_i - \tilde{n}_e) . \quad (3.11)$$

Este sistema de ecuaciones homogéneo para las perturbaciones tiene solución no trivial cuando su determinante es nulo, lo cual da la relación de dispersión

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k u_e^0)^2} = 1 , \quad (3.12)$$

donde

$$\omega_{pj} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m_j} \right)^{1/2}, \quad j = i, e, \quad (3.13)$$

es la frecuencia de plasmas de electrones ($j = e$) o iones ($j = i$).

Definiendo

$$\mu = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{m_e}{m_i}, \quad (3.14)$$

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad (3.15)$$

$$\eta = \frac{k u_e^0}{\omega_{pe}}, \quad (3.16)$$

podemos escribir (3.12) como

$$1 = F(\xi, \eta) \equiv \frac{\mu}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \eta)^2}. \quad (3.17)$$

Dado un valor de η , nos preguntamos entonces qué valores de ξ satisfacen (3.17). Habrá cuatro raíces, pero no todas reales en general. Cuando son reales, ω es real, y por tanto la perturbación (3.6) es oscilatoria, acotada y, por ende, tenemos un sistema estable. Si en cambio una raíz es compleja, entonces su conjugada también es solución (ya que la relación de dispersión tiene coeficientes reales). Denotando ambas soluciones por $\omega = \omega_r \pm i\gamma$ ($\gamma > 0$), (3.6) tiene entonces la forma

$$e^{i(kx - \omega_r t)} e^{\pm \gamma t},$$

encontrándose que una de las perturbaciones decrece con el tiempo, pero la otra se amplifica, vale decir, se desarrolla una inestabilidad.

Podemos apreciar el comportamiento de (3.17) graficando $F(\xi, \eta)$ para distintos valores de η . En la Fig. 1 hemos hecho esto para $\mu = 0.001$, y dos valores representativos de η , $\eta = 2$ y $\eta = 1$. Cuando η es grande, existen cuatro soluciones reales de (3.17). Al disminuir η hay sólo dos, desapareciendo las soluciones reales en la región

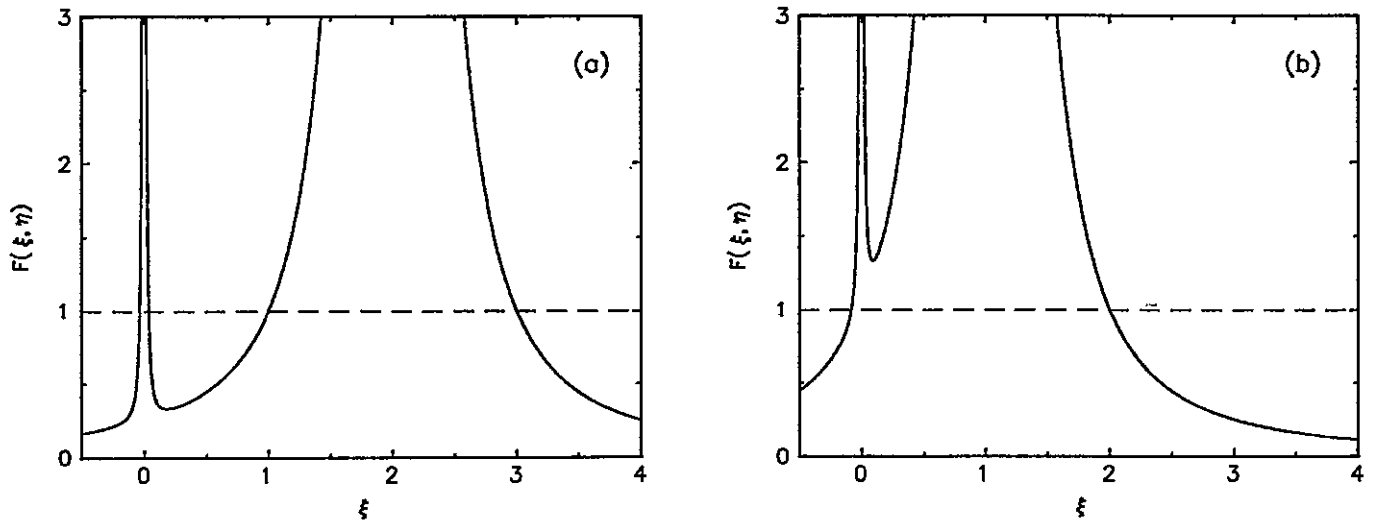


Fig. 1. $F(\xi, \eta)$ [ecuación (3.17)] vs. ξ para $\mu = 0.001$. (a) $\eta = 2$. (b) $\eta = 1$.

$0 < \xi < \eta$ si η es menor que algún valor crítico η_c . Cuando $\eta = \eta_c$ ambas soluciones coinciden. Podemos entonces encontrar el umbral de inestabilidad imponiendo la condición de que (3.17) tenga una raíz doble:

$$F(\xi, \eta_c) = 1 ,$$

$$\left. \frac{dF(\xi, \eta)}{d\xi} \right|_{\eta=\eta_c} = 0 .$$

Dicha raíz resulta ser

$$\xi = \frac{\eta \mu^{1/3}}{1 + \mu^{1/3}}$$

y hay inestabilidad cuando

$$\eta < \eta_c = \left[1 + \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right]^{3/2} . \quad (3.18)$$

El mecanismo físico de esta inestabilidad se puede explicar como sigue. Supongamos que existe una pequeña amplificación del potencial eléctrico $\phi(x)$ (Fig. 2). Los electrones son acelerados por el campo $-\partial\phi(x)/\partial x$, siendo por ende más rápidos en

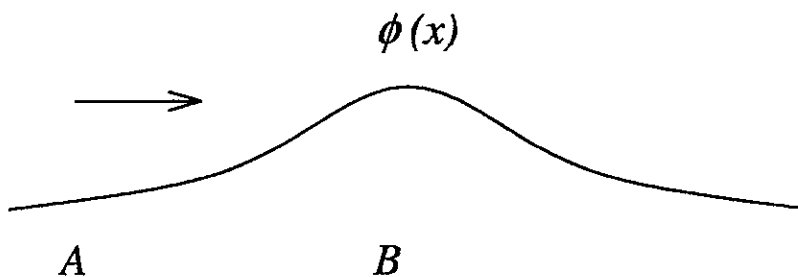


Fig. 2. Mecanismo de la inestabilidad de dos haces. En el punto A la velocidad de los electrones es u_0 y su densidad es n_0 . En B , la velocidad aumenta a $\sqrt{u_0^2 + 2e\phi/m}$ y la densidad disminuye a $n_0/\sqrt{u_0^2 + 2e\phi/m}$.

la cima de la colina que donde $\phi = 0$. En el estado estacionario, el flujo de electrones $n_e u_e$ es constante en todas partes, luego en la cima n_e es menor que en el resto del espacio. La disminución de la densidad en la cima significa un aumento adicional de la altura de ésta, de modo que la perturbación del potencial se amplifica.

Pero independientemente de los detalles de la inestabilidad que consideremos, lo relevante es que podemos estudiarla introduciendo una perturbación oscilatoria pequeña sobre un estado de equilibrio dado, y que la existencia de soluciones complejas (en pares conjugados) para la relación de dispersión resultante es signo de inestabilidad, con una tasa de crecimiento igual a la parte imaginaria de la frecuencia.

Observemos también que siempre la desaparición de dos raíces reales involucra, en la vecindad de la región de inestabilidad, un proceso que es gráficamente como el de la Fig. 1 (una parábola atravesando una recta paralela al eje real), y por tanto la condición de que el umbral de inestabilidad se encuentra cuando dos soluciones reales coinciden es general. (Este punto crítico corresponde a una inestabilidad marginal, pues la parte imaginaria de la frecuencia es nula [58].)

3.2 Inestabilidades paramétricas

En la sección anterior nos hemos ocupado de un único modo de oscilación del sistema, el cual resulta ser inestable o estable dependiendo de los parámetros físicos involucrados. Sin embargo, un caso de amplio interés se presenta cuando dos o más ondas, a través de efectos no lineales, se acoplan, estableciendo nuevas inestabilidades. Se les denomina *inestabilidades paramétricas* y, análogamente a la sección anterior, podemos estudiarlas linealizando las ecuaciones de fluido, sólo que ahora la perturbación se introduce sobre un equilibrio oscilatorio. (Para una discusión alternativa a la que expondremos a continuación respecto a inestabilidades paramétricas, se puede consultar, por ejemplo, [59].)

3.2.1 Acoplamiento entre ondas

La ecuación de movimiento de un oscilador armónico de frecuencia natural Ω es

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \Omega^2 X(t) = 0 . \quad (3.19)$$

Suponemos ahora que la frecuencia natural experimenta una modulación de la forma

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 (1 - 2\epsilon \cos \omega_0 t) . \quad (3.20)$$

Cuando $\epsilon = 0$ tenemos el caso usual: un oscilador armónico no perturbado de frecuencia natural Ω_0 . Esta modulación, en el caso de un plasma, se puede producir por modulación del campo magnético, de la densidad, etc.

La ecuación resultante de combinar (3.19) y (3.20) es la ecuación de Mathieu, con soluciones periódicas dadas por las funciones de Mathieu. Se puede mostrar que si $|\epsilon| \ll 1$, estas soluciones son inestables cuando [60]

$$2\Omega_0 \simeq n\omega_0 , \quad \text{con } n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.21)$$

Para comprender esto físicamente debemos tener presente que $X(t)$ será amplificada cuando la perturbemos con una frecuencia $\pm\Omega_0$. Si una oscilación de frecuencia natural Ω_0 se acopla con una modulación de frecuencia ω_0 , las respuestas del sistema tienen frecuencias $\Omega_0 \pm n\omega_0$. Con el signo positivo no hay modo de obtener $\pm\Omega_0$, pero sí con el negativo, en cuyo caso se podría obtener $-\Omega_0$. Entonces, cuando una de las frecuencias de respuesta es $-\Omega_0$, tal respuesta se acopla resonantemente con la oscilación natural del sistema, que, por tanto, puede absorber energía de la modulación. La condición de resonancia $\Omega_0 - n\omega_0 \simeq -\Omega_0$ da (3.21).

Introduciendo la representación de Fourier

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{X}(\omega), \quad (3.22)$$

la ecuación (3.19) se puede escribir

$$D(\omega)\tilde{X}(\omega) = -\epsilon\Omega_0^2[\tilde{X}(\omega + \omega_0) + \tilde{X}(\omega - \omega_0)], \quad (3.23)$$

donde

$$D(\omega) = \omega^2 - \Omega_0^2. \quad (3.24)$$

Observemos cómo, en ausencia de modulación, recuperamos la relación de dispersión del oscilador armónico usual. De (3.23) se concluye que

$$D(\omega \pm \omega_0)\tilde{X}(\omega \pm \omega_0) = -\epsilon\Omega_0^2[\tilde{X}(\omega) + \tilde{X}(\omega \pm 2\omega_0)]. \quad (3.25)$$

Continuando este proceso obtenemos una jerarquía infinita de ecuaciones, apareciendo siempre respuestas a frecuencias desplazadas en múltiplos enteros de ω_0 respecto a la frecuencia inicial. Pero si la amplitud de la modulación es pequeña ($\epsilon \ll 1$) podemos despreciar algunas respuestas, lo que permite resolver las ecuaciones.

a) Caso $\omega_0 \simeq 2\Omega_0$.

Observemos que, si $|\epsilon| \ll 1$, de (3.23) y (3.25) se sigue que $\tilde{X}(\omega)$ y $\tilde{X}(\omega \pm \omega_0)$ son pequeñas a menos que $|\omega| \simeq \Omega_0$ y $|\omega \pm \omega_0| \simeq \Omega_0$, respectivamente. Lo más simple es, pues, retener todas las respuestas con frecuencias cercanas a $\pm\Omega_0$. Específicamente, si

$$\omega \simeq \Omega_0 , \quad (3.26)$$

entonces $\omega + \Omega_0$ nunca es resonante y sólo queda exigir

$$\omega - \omega_0 \simeq -\Omega_0 . \quad (3.27)$$

Notemos que esto significa que

$$\omega_0 \simeq 2\Omega_0 ,$$

de suerte que esta aproximación, en que sólo retenemos las respuestas resonantes, corresponde al caso $n = 1$ en (3.21). Despreciamos, pues, las respuestas en frecuencias $\omega + \omega_0 \simeq 3\Omega_0$ en (3.23) y $\omega - 2\omega_0 \simeq -3\Omega_0$ en (3.25). De las ecuaciones resultantes obtenemos

$$D(\omega)D(\omega - \omega_0) = \epsilon^2\Omega_0^4 , \quad (3.28)$$

una relación de dispersión cuártica para ω . En ella vemos el acoplamiento entre los únicos dos modos resonantes del sistema, de frecuencias ω y $\omega - \omega_0$. En ausencia de modulación, obtenemos dos relaciones de dispersión separadas, una para cada uno de los modos que cuando $\epsilon \neq 0$ se acoplan. En este último caso, del mismo modo que en la Sec. 3.1, soluciones complejas de (3.28) revelan la presencia de inestabilidades, llamadas paramétricas.

A pesar de que no estaremos específicamente interesados en encontrar umbrales de inestabilidad en nuestro trabajo, por completitud mencionaremos este punto a

continuación. En resonancia, podemos hacer uso de las expresiones aproximadas (3.26)–(3.27), con lo cual, de (3.24),

$$D(\omega) = (\omega + \Omega_0)(\omega - \Omega_0) \simeq 2\Omega_0(\omega - \Omega_0) , \quad (3.29)$$

$$D(\omega - \omega_0) = (\omega - \omega_0 + \Omega_0)(\omega - \omega_0 - \Omega_0) \simeq -2\Omega_0(\omega - \omega_0 + \Omega_0) . \quad (3.30)$$

Definiendo además el desajuste de frecuencia

$$\Delta = \omega_0 - 2\Omega_0 , \quad (3.31)$$

(3.28) se reduce a

$$(\omega - \Omega_0)(\omega - \Omega_0 - \Delta) = -\frac{1}{4}\epsilon^2\Omega_0^2 , \quad (3.32)$$

una ecuación que ahora es cuadrática, y cuya solución es

$$\omega = \Omega_0 + \frac{1}{2} \left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \epsilon^2\Omega_0^2} \right) . \quad (3.33)$$

Se observa que si la perturbación es muy pequeña ($|\epsilon| \ll \Delta/\Omega_0$) hay dos soluciones reales, con frecuencias $\omega \simeq \Omega_0$ (la frecuencia natural) y $\omega \simeq \omega_0 - \Omega_0$ (una frecuencia inducida). Al aumentar la intensidad del acoplamiento, cuando

$$\epsilon^2 = \epsilon_c^2 = \frac{\Delta^2}{\Omega_0^2}$$

ambas soluciones reales coinciden, existiendo una sola oscilación con frecuencia

$$\omega = \Omega_0 + \frac{\Delta}{2} = \frac{\omega_0}{2} .$$

Cuando $\epsilon > \epsilon_c$ el acoplamiento genera una inestabilidad, con una tasa de crecimiento

$$\gamma = \text{Im } \omega = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon^2\Omega_0^2 - \Delta^2}$$

y una frecuencia siempre igual a

$$\omega_r = \text{Re } \omega = \frac{\omega_0}{2} ,$$

independiente de la frecuencia natural del oscilador.

El ejemplo presentado en esta sección nos permite distinguir tres características generales de las inestabilidades paramétricas:

- La frecuencia de la modulación y la frecuencia natural de las oscilaciones excitadas deben satisfacer una condición de igualdad de fase como (3.21).
- La amplificación ocurre cuando la amplitud de la modulación supera un cierto valor crítico (umbral).
- Las frecuencias de las oscilaciones amplificadas están determinadas por la frecuencia de modulación más que por la frecuencia natural (trabadura de fase).

b) Caso $\omega_0 \simeq \Omega_0$.

En este caso [correspondiente a $n = 2$ en (3.21)] ya no podemos despreciar todas las respuestas no resonantes. En efecto, si volvemos a considerar $\omega = \Omega_0$ [de modo que $\tilde{X}(\omega)$ se amplifique], (3.23) nos dice que $\tilde{X}(\omega)$ se acopla a $\tilde{X}(\omega + \omega_0) \simeq \tilde{X}(2\Omega_0)$ y $\tilde{X}(\omega - \omega_0) \simeq \tilde{X}(0)$, ambas no resonantes y pequeñas por tanto. Pero en (3.25) vemos que $\tilde{X}(\omega \pm \omega_0)$ se acoplan a su vez a modos resonantes [$\tilde{X}(\pm\Omega_0)$]. Luego, a menos que retengamos algunas respuestas no resonantes, no podremos dar cuenta de ningún acoplamiento entre ondas y por tanto de ninguna inestabilidad.

Conscientes de ello, ya no estamos obligados a escoger $\omega \simeq \Omega_0$. Consideraremos

$$\omega \simeq 0 . \quad (3.34)$$

De (3.23) y (3.25), despreciando los términos $\tilde{X}(\omega \pm 2\omega_0)$:

$$D(\omega)\tilde{X}(\omega) = -\epsilon\Omega_0^2[\tilde{X}(\omega + \omega_0) + \tilde{X}(\omega - \omega_0)] , \quad (3.35)$$

$$D(\omega \pm \omega_0)\tilde{X}(\omega \pm \omega_0) = -\epsilon\Omega_0^2\tilde{X}(\omega) . \quad (3.36)$$

La elección (3.34) permite que las ecuaciones resultantes sean simétricas, y en ellas es el modo de frecuencia ω , no resonante, el (único, al haber despreciado los de frecuencia $\omega \pm 2\omega_0$) que actúa como conexión entre los dos modos resonantes que se acoplan, de frecuencias $\omega \pm \omega_0$. Se sigue la relación de dispersión

$$1 = \frac{\epsilon^2 \Omega_0^4}{D(\omega)} \left[\frac{1}{D(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{D(\omega - \omega_0)} \right], \quad (3.37)$$

un polinomio de orden seis en ω .

Con aproximaciones de resonancia similares a (3.29)–(3.30), es posible reducir (3.37) a una ecuación cuadrática para ω , con solución

$$\omega = \pm \sqrt{\delta(\delta + \epsilon^2 \Omega_0)}, \quad (3.38)$$

donde δ es el desajuste de frecuencia

$$\delta = \omega_0 - \Omega_0. \quad (3.39)$$

Se aprecian nuevamente las características generales mencionadas en la pág. 23: una vez que la modulación sobrepasa un cierto umbral ($\epsilon^2 > -\delta/\Omega_0$) se gatilla una inestabilidad que, en este caso, involucra una oscilación no resonante de frecuencia $\text{Re } \omega = 0$ (razón por la cual esta inestabilidad se denomina *de modo puramente creciente*), y dos oscilaciones resonantes de frecuencias $\text{Re } (\omega \pm \omega_0) = \pm \omega_0$, independientes de la frecuencia natural, indicando nuevamente una trabadura de fase.

3.2.2 Interacción entre tres ondas

En la subsección anterior consideramos el acoplamiento de una modulación, externa al sistema y de frecuencia ω_0 , con dos oscilaciones naturales del sistema de frecuencia Ω_0 . Comprobamos que tal situación genera inestabilidades. La extensión inmediata

es estudiar un acoplamiento a oscilaciones naturales con frecuencias distintas. Estamos entonces en presencia de una interacción de tres ondas, de la cual es posible encontrar muchos ejemplos en plasmas [61]. Éste también será el problema que nos ocupará en el resto de nuestro trabajo.

Para revisar las características básicas de esta interacción consideremos dos osciladores, de frecuencias

$$0 < \omega_L < \omega_H . \quad (3.40)$$

Sus respectivas ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d^2 X_L(t)}{dt^2} + \omega_L^2(\vec{k}) X_L(t) = 0 , \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2 X_H(t)}{dt^2} + \omega_H^2(\vec{k}) X_H(t) = 0 , \quad (3.42)$$

donde hemos introducido una periodicidad espacial en las oscilaciones, de modo que sus frecuencias dependen del vector de onda \vec{k} .

La modulación ocurre a través de una onda que llamamos *bomba*,

$$Z(\vec{r}, t) = 2Z_0 \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega_0 t) , \quad Z_0 \text{ constante}, \quad (3.43)$$

y, para efectos de esta discusión, suponemos un acoplamiento simple:

$$\frac{d^2 X_L(t)}{dt^2} + \omega_L^2(\vec{k}) X_L(t) = -\lambda Z(\vec{r}, t) X_H(t) , \quad (3.44)$$

$$\frac{d^2 X_H(t)}{dt^2} + \omega_H^2(\vec{k}) X_H(t) = -\mu Z(\vec{r}, t) X_L(t) . \quad (3.45)$$

Introduciendo la representación de Fourier

$$X(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{k} d\omega e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tilde{X}(\vec{k}, \omega) , \quad (3.46)$$

la ecuación (3.44) queda en la forma

$$D_L(\vec{k}, \omega) \tilde{X}_L(\vec{k}, \omega) = \lambda Z_0 [\tilde{X}_H(\vec{k} - \vec{k}_0, \omega - \omega_0) + \tilde{X}_H(\vec{k} + \vec{k}_0, \omega + \omega_0)] , \quad (3.47)$$

y una forma similar para (3.45), que escribiremos directamente en términos de $\tilde{X}_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0)$, que son las respuestas que aparecen al lado derecho de (3.47):

$$D_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0) \tilde{X}_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0) = \mu Z_0 [\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega) + \tilde{X}_L(\vec{k} \pm 2\vec{k}_0, \omega \pm 2\omega_0)]. \quad (3.48)$$

Hemos definido

$$D_L(\vec{k}, \omega) = \omega^2 - \omega_L^2(\vec{k}), \quad (3.49)$$

$$D_H(\vec{k}, \omega) = \omega^2 - \omega_H^2(\vec{k}). \quad (3.50)$$

$D_L = 0$ y $D_H = 0$ son las relaciones de dispersión lineales de los modos normales involucrados.

Restringiéndonos al caso de acoplamiento débil $Z_0 \ll 1$, (3.47) sugiere que $\omega \simeq \omega_L$ es un rango de interés, pues ahí $\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega)$ es resonante. La misma ecuación acopla $\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega)$ con $\tilde{X}_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0)$, pero no podemos despreciar ninguno de los dos *a priori*, pues ω podría ser muy pequeño, y ambos términos ser resonantes a la vez (en $\pm\omega_0$). Un acoplamiento distinto aparece en (3.48), con $\tilde{X}_L(\vec{k} \pm 2\vec{k}_0, \omega \pm 2\omega_0)$, y éste sí lo despreciaremos. En efecto, generalizando el análisis de la pág. 20 [después de la condición de resonancia (3.21)] a una interacción de tres ondas, en que una onda de frecuencia ω_0 se acopla con dos de frecuencias ω_1 y ω_2 ($\omega_0 > \omega_1, \omega_2$) se encuentra la condición [62]

$$\omega_1 + \omega_2 = n\omega_0, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (3.51)$$

Volviendo a (3.48), $\tilde{X}_L(\vec{k} \pm 2\vec{k}_0, \omega \pm 2\omega_0)$ sería resonante sólo si $|\omega \pm 2\omega_0| = \omega_L$, lo que sólo puede ocurrir si $\omega_0 \simeq \omega_L$ o si $\omega_0 \ll \omega_L$. Pero ninguna de estas situaciones es compatible con la relación que deben satisfacer las frecuencias de las tres ondas concurrentes en la interacción, (3.51), y (3.40). Por tanto, el término $\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega)$ domina en el lado derecho de (3.48) y despreciaremos el otro.

Obtenemos así finalmente:

$$D_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0) \tilde{X}_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0) = Z_0 \mu \tilde{X}_L(\vec{k}, \omega) . \quad (3.52)$$

Nuestro modelo queda descrito así por las relaciones (3.47) y (3.52). De ellas se sigue la relación de dispersión, de orden seis para ω ,

$$1 = \frac{\epsilon^2 \omega_0^2 \omega_L^2(\vec{k})}{D_L(\vec{k}, \omega)} \left[\frac{1}{D_H(\vec{k} + \vec{k}_0, \omega + \omega_0)} + \frac{1}{D_H(\vec{k} - \vec{k}_0, \omega - \omega_0)} \right] , \quad (3.53)$$

donde definimos el parámetro adimensional

$$\epsilon^2 = \frac{Z_0^2 \lambda \mu}{\omega_0^2 \omega_L^2(\vec{k})} . \quad (3.54)$$

Como antes, nos restringimos al caso de acoplamiento débil:

$$Z_0 \ll 1 ,$$

de modo que (3.53) se satisface si

$$D_L(\vec{k}, \omega) \simeq 0 \quad \text{ó} \quad D_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0) \simeq 0 .$$

Esto no basta, sin embargo, pues estamos interesados en el caso en que se presentan inestabilidades. Como vimos en la Sec. 3.1, la inestabilidad involucra el cruce de dos ceros reales de la relación de dispersión. Existen, entonces, dos posibilidades:

$$(a) \quad \begin{aligned} D_L(\vec{k}, \omega) \simeq 0 \quad \text{y} \quad D_H(\vec{k} + \vec{k}_0, \omega + \omega_0) \simeq 0 \\ \text{ó} \quad D_H(\vec{k} - \vec{k}_0, \omega - \omega_0) \simeq 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$(b) \quad D_H(\vec{k} + \vec{k}_0, \omega + \omega_0) \simeq 0 \quad \text{y} \quad D_H(\vec{k} - \vec{k}_0, \omega - \omega_0) \simeq 0 . \quad (3.56)$$

En el caso (a) $\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega)$ es resonante y se acopla a $\tilde{X}_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0)$, uno de los cuales es por su parte resonante también, y se acopla a su vez con $\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega)$. Esta inestabilidad involucra pues un intercambio de energía directo entre modos normales, y se llama *acoplamiento resonante*. Corresponde, en el modelo de un oscilador de la sección 3.2.1, al caso $n = 1$ en (3.21).

De (3.55), $\omega \simeq \omega_L(\vec{k})$ y $\omega \pm \omega_0 \simeq \pm \omega_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0)$ (recordemos que $\omega < \omega_0$ y $\omega_H > 0$). Con esto se puede mostrar que

$$\omega_0(\vec{k}_0) \simeq \omega_H(\vec{k}_0 \pm \vec{k}) + \omega_L(\mp \vec{k}), \quad (3.57)$$

lo cual es consistente con (3.51).

En el caso (b), $\tilde{X}_H(\vec{k} \pm \vec{k}_0, \omega \pm \omega_0)$ son resonantes, pero no se acoplan entre sí, sino a través de $\tilde{X}_L(\vec{k}, \omega)$, que no es resonante [relaciones (3.47) y (3.52)]. Corresponde esto a un *acoplamiento no resonante*. Como $\omega \pm \omega_0 \simeq \pm \omega_H(\vec{k} + \vec{k}_0)$, se cumple

$$2\omega_0(\vec{k}_0) \simeq \omega_H(\vec{k}_0 + \vec{k}) + \omega_H(\vec{k}_0 - \vec{k}), \quad (3.58)$$

es decir, (3.51) con $n = 2$.

3.3 Método de Longtin y Sonnerup

Hasta ahora hemos estudiado la existencia de inestabilidades paramétricas analíticamente. Cuando el acoplamiento involucró dos ondas (Sec. 3.2.1), la relación de dispersión resultó de orden cuatro, pero con la interacción de tres ondas (Sec. 3.2.2) fue de orden seis, y por tanto irresoluble analíticamente en general. Sin embargo, es factible estudiar las características de la inestabilidad porque, cerca de la resonancia, el grado de la relación de dispersión se puede reducir a través de aproximaciones en

las frecuencias. Así, situándonos en las regiones de frecuencia cercanas a las posibles resonancias del sistema podemos analizarlas una a una.

Longtin y Sonnerup [63] introdujeron un método gráfico para estudiar las inestabilidades en un plasma que facilita enormemente este análisis y permite detectar todas las inestabilidades posibles en un golpe de vista. Ilustraremos este método con un caso particular, estrechamente vinculado al ejemplo estudiado analíticamente en la Sec. 3.2.2.

Para ello consideraremos las ecuaciones de fluido no relativistas (2.1)–(2.9). En los Caps. 4 y 5 presentaremos los detalles de este tipo de cálculos para el caso débilmente relativista, de modo que los omitiremos por ahora. Una onda electromagnética linealmente polarizada que se propaga en un plasma en la dirección z , satisface la relación de dispersión

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + 2\omega_p^2, \quad (3.59)$$

donde $\omega_p = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ es la frecuencia de plasma de los electrones (o positrones).

El sistema integrado por el plasma de electrones y positrones y esta onda electromagnética se encuentra en un estado de equilibrio, solución de las ecuaciones de fluido. Sobre este estado, que llamaremos *onda bomba*, introducimos una pequeña perturbación longitudinal de la forma $e^{i(kz-\omega t)}$. La relación de dispersión para ω y k resulta ser:

$$0 = SD_+D_- + \frac{1}{2}\omega_p^2\alpha^2 c^2 k^2(D_+ + D_-), \quad (3.60)$$

donde

$$S = \omega^2 - v_s^2 k^2,$$

$$D_{\pm} = c^2(k_0 \pm k)^2 - (\omega_0 \pm \omega)^2 + 2\omega_p^2,$$

y

$$\alpha = \frac{eE_0}{mc\omega_0}$$

es proporcional a la amplitud E_0 del campo electromagnético de la bomba. v_s es la velocidad del sonido definida en (2.32).

Observemos la gran similitud con la relación de dispersión (3.53). Comparándolas, podemos darnos cuenta de que lo que hay en juego es el acoplamiento entre tres ondas: una onda bomba electromagnética de frecuencia ω_0 , una onda de baja frecuencia con relación de dispersión

$$\omega_L^2(k) = v_s^2 k^2$$

y una onda de alta frecuencia que, en este caso, es electromagnética y satisface por tanto la misma relación de dispersión que la bomba,

$$\omega_H^2(k) = c^2 k^2 + 2\omega_p^2 .$$

Ahora estudiamos las inestabilidades posibles. Para ello, nos damos un valor de la frecuencia de la bomba ω_0 y calculamos su correspondiente número de onda k_0 . En este caso hemos escogido $\omega_0/\omega_p = 1.5$, resultando $ck_0/\omega_p = 0.5$.

Dibujamos la relación de dispersión, ecuación (3.60), en términos de $x = \omega/\omega_p$ vs. $y = ck/\omega_p$, para $\alpha = 0$, es decir, en ausencia de acoplamiento [Fig. 3(a)]. Hay cuatro líneas correspondientes a las cuatro soluciones reales de $D_{\pm} = 0$ (ondas electromagnéticas de frecuencias $\omega \pm \omega_0$), rotuladas en la Fig. 3(a) como D_{\pm} , y dos líneas rectas simétricas respecto al origen, correspondientes a los modos electro-acústicos (soluciones de $S = 0$), uno propagándose hacia atrás respecto a la onda bomba (S_- , con velocidad de fase $\omega/k < 0$), y el otro en la misma dirección que la onda bomba (S_+ , $\omega/k > 0$). En total 6 líneas, coincidiendo con el grado en ω y k de la ecuación polinomial (3.60).

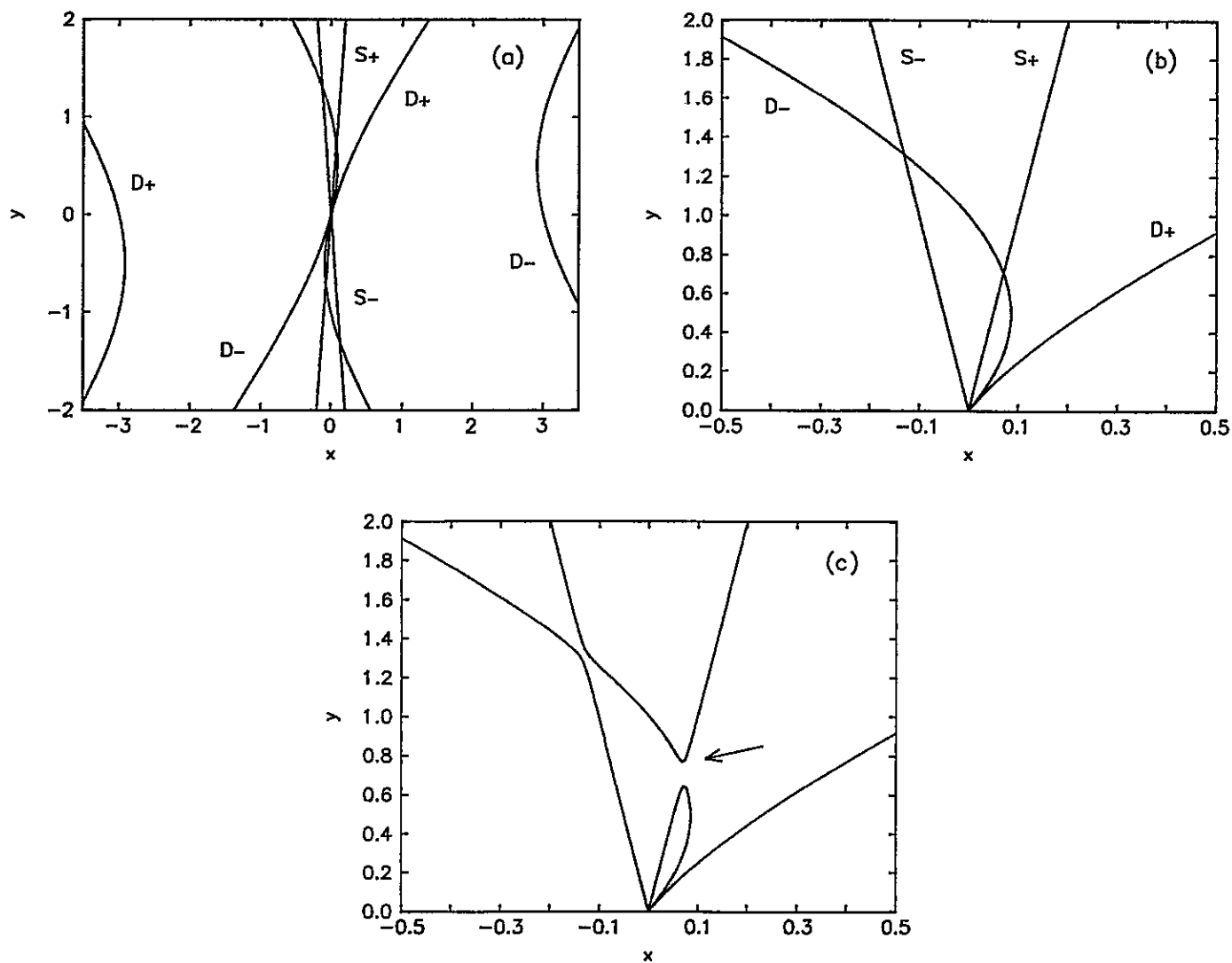


Fig. 3. Relación de dispersión ecuación (3.60). Número de onda normalizado, $y = ck/\omega_p$, vs. frecuencia normalizada, $x = \omega/\omega_p$, para $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0.5$, $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$. Visión general. (b) $\alpha = 0$. Semiplano superior. (c) $\alpha = 0.01$.

En realidad, basta considerar la mitad superior del plano $x-y$: puesto que la relación de dispersión es simétrica bajo inversión simultánea de k y ω , la mitad inferior del plano se puede obtener rotando el semiplano superior en un ángulo de 180° en torno al origen. Preferimos, entonces, la figura 3(b).

De acuerdo al análisis de la Sec. 3.2.2, cuando hay acoplamiento se produce una inestabilidad si dos raíces reales de la relación de dispersión coinciden. Por tanto, debemos prestar atención a los cruces entre líneas. Hay tres: uno entre (D_-, S_-) , otro en el origen entre D_-, D_+, S_- y S_+ , y uno entre (D_-, S_+) . Conectemos la onda bomba. Tomando para su amplitud un valor $\alpha = 0.01$ obtenemos la Fig. 3(c). Se aprecia que en el cruce (D_-, S_+) hay una brecha. Si trazamos una línea horizontal (asociada a algún número de onda k) que pase a través de ella, tal línea intersecará sólo 4 líneas en vez de 6, indicando que para ese valor de k han aparecido dos soluciones complejas de (3.60), una con parte imaginaria negativa, otra con parte imaginaria positiva. Una brecha en el gráfico nos indica, entonces, que en este punto se produce una inestabilidad. Siguiendo lo expuesto en la Sec. 3.2, en esta inestabilidad participan los dos modos cuyas frecuencias reales han desaparecido, modos que resuenan y se amplifican a expensas de la bomba. Decimos que la onda bomba *decae* en dos ondas hijas. En el caso de la Fig. 3(c), el decaimiento es en una onda electro-acústica de frecuencia $\omega_L = \omega$ y una onda electromagnética de frecuencia $\omega_H = \omega_0 - \omega$. Ésta es exactamente la situación descrita por las condiciones (3.55), y estamos en presencia entonces de un acoplamiento resonante. A esta inestabilidad particular se le denomina *inestabilidad de decaimiento* (decay instability). Es inmediato verificar (3.57).

Fijémonos en que, en verdad, los dos modos normales del sistema dados por $D_- = 0$ y $S_+ = 0$ sólo coinciden en un punto [ver Fig. 3(b)], y sin embargo hay

una cierta región de inestabilidad [la brecha en la Fig. 3(c)]. Este resultado es coherente con el estudio de la sección anterior: puesto que ϵ en (3.53) es pequeño, pero no nulo, las condiciones de inestabilidad serán de la forma (3.55) ó (3.56), y la frecuencia tendrá parte imaginaria en una vecindad del punto de convergencia exacto de las soluciones para $\epsilon = 0$.

También podemos hacer el contacto entre este gráfico y la Fig. 1, aun cuando corresponden a situaciones físicas distintas. La Fig. 1(a) corresponde a un corte horizontal en la Fig. 3(c) a una cierta altura k que pase por encima de la brecha, siendo las dos raíces reales que encontramos en las cercanías de la brecha análogas a las dos intersecciones de $y = 1$ con $F(\xi, \eta)$. Cuando disminuimos η [Fig. 1(b)] descendemos hasta caer en la brecha en la Fig. 3(c), y las dos soluciones han desaparecido. El umbral de inestabilidad se produce cuando las dos soluciones reales coinciden [es decir, cuando en la Fig. 3(c) pasamos por el punto indicado por la flecha].

Hay más cruces que revisar, sin embargo. El cruce (D_-, S_-) de la Fig. 3(b), en presencia del acoplamiento, se ha deformado, pero sin dar origen a una brecha. Aquí las ramas concurrentes se "evitan". Lo denominamos *avoiding crossing*. No hay aquí una inestabilidad. No es sorprendente, por cuanto las frecuencias asociadas a este cruce son $\omega_L = -\omega$ y $\omega_H = \omega_0 - \omega$, y por tanto (3.57) no se satisface. Este cruce no conserva energía y por tanto el acoplamiento es imposible.

Finalmente, el cruce en el origen no cambia cuando conectamos la bomba. Puesto que en este punto convergen D_- y S_+ , que dan origen a un acoplamiento en otro cruce como ya vimos, advertimos que las condiciones (3.55) ó (3.56), junto con (3.51), por sí solas no son suficientes para asegurar que exista una inestabilidad, y será necesario estudiar cada candidato.

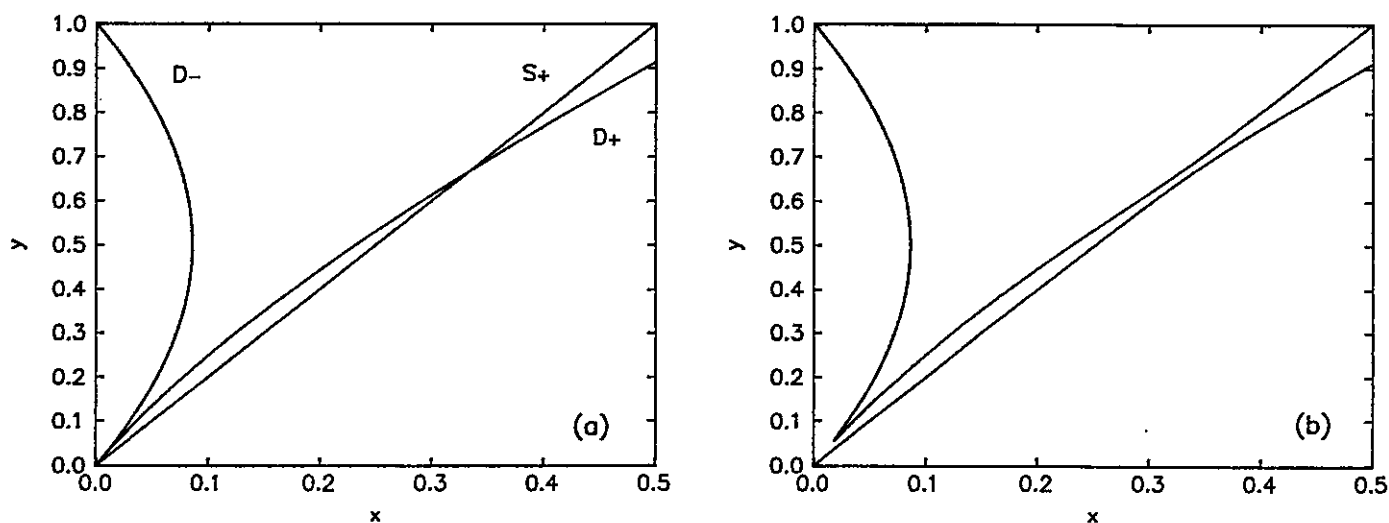


Fig. 4. Relación de dispersión ecuación (3.60). Número de onda normalizado, $y = ck/\omega_p$, vs. frecuencia normalizada, $x = \omega/\omega_p$, para $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0.5$, $v_s/c = 0.5$. (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.02$.

Ahora aumentamos la velocidad del sonido a $v_s/c = 0.5$, manteniendo constantes los otros parámetros. Este valor de la velocidad térmica no cumple con la condición de ser no relativista, como establecimos en el Cap. 2, pero deseamos tener una idea de lo que sucedería. El hecho es que nos encontramos con una nueva situación. En la Fig. 4(a) se han graficado las raíces reales de (3.60) si $\alpha = 0$. Aparte del cruce (D_-, S_-) que, como en el caso anterior, no genera acoplamiento por no satisfacer (3.57), tenemos el cruce en el origen entre S_+ , D_+ y D_- , y el nuevo cruce (D_+, S_+) . En presencia de la bomba [Fig. 4(b)] se comprueba que este último es un avoiding crossing, como esperamos, puesto que las frecuencias de las ramas involucradas no satisfacen (3.57). Pero en el origen ahora hay una brecha, la cual involucra a D_{\pm} . En este caso, pues, la onda bomba decae en dos ondas electromagnéticas, de frecuencias $\omega_{H1} = \omega_0 + \omega$ y $\omega_{H2} = \omega_0 - \omega$. Esto corresponde entonces a un decaimiento no

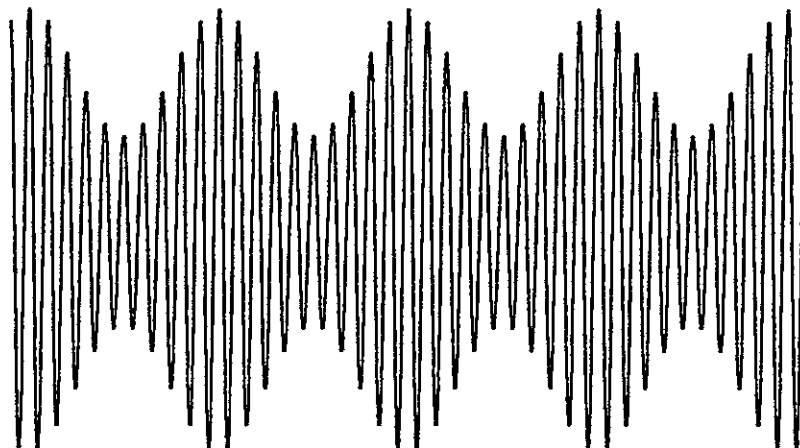


Fig. 5. Evolución de la amplitud para una onda electromagnética que ha sufrido una inestabilidad modulacional.

resonante, dado por las condiciones (3.56) y (3.58). En este caso, el acoplamiento es posible gracias a la mediación de oscilaciones no resonantes.

En particular, el acoplamiento no resonante que hemos observado es una brecha que abarca frecuencias $\omega \ll \omega_0$, y números de onda $k \ll k_0$. Recordemos que ω_0 es la frecuencia con que varía el campo eléctrico de la bomba, de amplitud E_0 , mientras que ω es la frecuencia de la perturbación de esa amplitud. Por tanto, cuando $\omega \ll \omega_0$ el campo eléctrico oscila con dos escalas de tiempo distintas, una mucho más lenta que la otra, resultando la forma indicada en la Fig. 5. A este tipo de inestabilidad, correspondiente a una brecha en la relación de dispersión que se extiende hasta el origen [63], se le denomina *inestabilidad modulacional*.

El método gráfico que hemos explicado nos permite entonces detectar, simultáneamente, todos los acoplamientos posibles. Ellos pueden ser resonantes o no resonantes, según satisfagan una condición como (3.57) ó (3.58), respectivamente.

Además, distinguimos dos tipos de inestabilidades según si la región de inestabilidad excluye $\omega = k = 0$ (inestabilidad de decaimiento) o si lo incluye (inestabilidad modulacional). La presencia de inestabilidades modulacionales será particularmente interesante, por cuanto éste es el mecanismo propuesto para explicar la variabilidad observada en la radiación proveniente de pulsares y núcleos galácticos activos [25, 46].

Capítulo 4

Relación de dispersión de ondas electromagnéticas en un plasma de electrones y positrones

En este Capítulo obtendremos la relación de dispersión de ondas electromagnéticas propagándose en un plasma de electrones y positrones, tanto para polarización lineal como circular, incluyendo, en este último caso, la presencia de un campo magnético externo en la misma dirección de la propagación de la onda. Para ello, supondremos que el plasma es descrito por el conjunto de ecuaciones (2.2)–(2.9) y (2.31).

4.1 Polarización lineal

Suponiendo que una onda electromagnética linealmente polarizada se propaga a lo largo del eje z , en ausencia de efectos relativistas, al linealizar las ecuaciones (2.1)–(2.9) encontramos la solución:

$$\vec{E}_0 = E \cos(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} , \quad (4.1)$$

$$\vec{B}_0 = B \cos(k_0 z - \omega_0 t) \hat{y} , \quad (4.2)$$

$$B = \frac{ck_0}{\omega_0} E , \quad (4.3)$$

que satisface la relación de dispersión

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + 2\omega_p^2 . \quad (4.4)$$

Esta onda induce una velocidad transversal en las partículas dada por

$$\vec{v}_j = -\frac{q_j E}{m\omega_0} \sin(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} . \quad (4.5)$$

La corriente asociada a esta velocidad transversal modifica la relación de dispersión en el vacío y la reemplaza por (4.4).

Cuando se toman en cuenta los efectos relativistas, la componente de la ecuación (2.31) perpendicular a la dirección de propagación de la onda electromagnética plana puede escribirse en términos del vector potencial de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}(\Gamma_j \vec{v}_j) = -\frac{q_j}{mc} \frac{d\vec{A}}{dt} . \quad (4.6)$$

Dados los campos (4.1)–(4.2), se tiene

$$\vec{A} = A \sin(k_0 z - \omega_0 t) \hat{x} . \quad (4.7)$$

Suponiendo que la componente longitudinal de la velocidad es mucho menor que la velocidad perpendicular, la integración de esta ecuación da:

$$\vec{v}_j = -\frac{q_j \vec{A}}{mc} \left[1 + \left(\frac{q_j A}{mc^2} \right)^2 \right]^{-1/2} . \quad (4.8)$$

Claramente, considerar efectos relativistas débiles significa $|q_j A/mc^2| \ll 1$, de modo que, expandiendo la raíz cuadrada, la velocidad transversal está dada por

$$v_{j0x} = -\frac{q_j E}{m\omega_0} \sin(k_0 z - \omega_0 t) \left[1 - \frac{\alpha^2}{2} \sin^2(k_0 z - \omega_0 t) \right] , \quad (4.9)$$

con

$$\alpha = \frac{eA}{mc^2} = \frac{eE}{mc\omega_0} = \frac{eB}{mc^2 k_0} . \quad (4.10)$$

Advertimos así que el parámetro α mide la magnitud de los efectos relativistas sobre las partículas ($\alpha^2 \simeq v_{0x}^2/c^2$), y que la primera corrección relativista introduce términos de orden α^2 .

La velocidad transversal induce una velocidad longitudinal, δv_z , a través del término $\vec{v} \times \vec{B}$ en la fuerza de Lorentz, y, consecuentemente, una perturbación de densidad, δn . Calcularemos este efecto, usando las ecuaciones (2.2)–(2.3) y (2.31), como una perturbación sobre un estado estacionario en el cual la densidad es constante, n_0 , y la velocidad longitudinal es $v_{0z} = 0$. Así, para cada fluido, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_j = -n_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta v_{jz}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta E_z = 4\pi e (\delta n_p - \delta n_e), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta v_{jz} = \frac{q_j}{m} \left(\delta E_z + \frac{1}{c} v_{j0x} B_{0y} \right) - \frac{v_s^2}{n_0} \frac{\partial}{\partial z} \delta n_j. \quad (4.13)$$

Hemos despreciado el factor Γ en el lado izquierdo de la ecuación (4.13). En efecto, si la velocidad longitudinal es mucho menor que la velocidad transversal (lo cual verificaremos más adelante), y $v_{0x} \ll c$, entonces $\Gamma \simeq (1 - v_{0x}^2/c^2)^{-1/2} \simeq 1 + v_{0x}^2/(2c^2)$. Así, de (4.9) se sigue que en el lado izquierdo de (4.13) habría términos de orden

$$\Gamma \delta v_z \simeq [1 + O(E^2) + O(E^4)] \cdot \delta v_z,$$

en tanto al lado derecho los términos son de la forma

$$\delta E_z + \frac{1}{c} v_{0x} B_{0y} \simeq \delta E_z + O(E^2) + O(E^3).$$

Siendo la perturbación $\delta v_z \ll v_{0x} \propto E$, el término dominante en el lado izquierdo es el de orden δv_z , y en el lado derecho los de orden $\delta E_z + O(E^2)$. En definitiva, pues, debemos despreciar el factor Γ y las correcciones relativistas a v_{0x} en (4.13).

Escribiendo las ecuaciones (4.11)–(4.13) para cada especie, y combinándolas, encontramos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \delta n_p + \omega_p^2 (\delta n_p - \delta n_e) = \left(\frac{eE}{m\omega_0}\right)^2 n_0 k_0^2 \cos[2(k_0 z - \omega_0 t)], \quad (4.14)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \delta n_e - \omega_p^2 (\delta n_p - \delta n_e) = \left(\frac{eE}{m\omega_0}\right)^2 n_0 k_0^2 \cos[2(k_0 z - \omega_0 t)]. \quad (4.15)$$

Es fácil ver que estas ecuaciones admiten una solución oscilatoria inducida por la onda electromagnética dada por

$$\delta n_p = \delta n_e = -n_0 \alpha^2 \frac{c^2 k_0^2}{4(\omega_0^2 - v_s^2 k_0^2)} \cos[2(k_0 z - \omega_0 t)],$$

de modo que no hay campos eléctricos restauradores ($\delta E_z = 0$). La correspondiente velocidad longitudinal se deriva de la ecuación de continuidad (4.11).

En consecuencia, el término $\vec{v} \times \vec{B}$ en la ecuación de fuerza (2.31) implica que una onda electromagnética de frecuencia ω_0 induce una oscilación longitudinal de frecuencia $2\omega_0$. Éste es un efecto no lineal (generación de armónicos), de orden α^2 , que acopla los movimientos transversal y longitudinal de las partículas. Puesto que es un efecto del mismo orden que las correcciones relativistas débiles, debe ser considerado en la relación de dispersión.

Esta onda electromagnética, con su relación de dispersión modificada por los efectos relativistas, constituye el nuevo estado de equilibrio sobre el cual introduciremos nuevas perturbaciones. Escribimos pues la densidad en este nuevo “orden cero”:

$$n_{j0} = n_0 + n_{jh} = n_0 \{1 - \alpha^2 \tilde{q} \cos[2(k_0 z - \omega_0 t)]\} \quad (4.16)$$

(donde n_{jh} identifica la perturbación de densidad debida a la generación de armónicos), y la velocidad longitudinal:

$$v_{j0z} = \delta v_{jz} = -\alpha^2 \frac{\omega_0}{k_0} \tilde{q} \cos[2(k_0 z - \omega_0 t)], \quad (4.17)$$

donde

$$\tilde{q} = \frac{c^2 k_0^2}{4(\omega_0^2 - v_s^2 k_0^2)}. \quad (4.18)$$

Observamos asimismo que $\delta v_z \propto \alpha^2$, lo cual es consistente con las aproximaciones introducidas en la ecuación (4.13).

La ecuación (4.18) difiere de la correspondiente expresión en la Ref. [29],

$$\tilde{q} = \frac{\omega_0^2 - \omega_p^2}{4\omega_0^2 - \omega_p^2}.$$

Las diferencias surgen porque sus expresiones corresponden a perturbaciones de densidad debidas a generación de armónicos en un plasma frío de iones y electrones. En tal caso podemos despreciar el movimiento de iones y los efectos térmicos, encontrándose que $\tilde{q} = c^2 k_0^2 / (4\omega_0^2 - \omega_p^2)$ y, usando (4.4), $\tilde{q} = (\omega_0^2 - 2\omega_p^2) / (4\omega_0^2 - \omega_p^2)$. Esto aún difiere del resultado de la Ref. [29] en el factor 2 en el denominador, pero ello se explica porque los autores en [29] consideraron la relación de dispersión $\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + \omega_p^2$.

Combinando las ecuaciones (2.4)–(2.7) encontramos una ecuación de onda para el campo eléctrico de la onda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_j q_j n_j \vec{v}_j. \quad (4.19)$$

Usando las ecuaciones (4.9), (4.16), obtenemos, al orden más bajo en α , una ecuación para E_{0x} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_{0x} = & -2 \frac{\omega_p^2}{\omega_0 c^2} E \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sin(k_0 z - \omega_0 t) \right. \\ & - \alpha^2 \tilde{q} \sin(k_0 z - \omega_0 t) \cos[2(k_0 z - \omega_0 t)] \\ & \left. - \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^3(k_0 z - \omega_0 t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Suponiendo que el campo eléctrico de la onda aún es de la forma (4.1), y puesto que

$$\begin{aligned}\sin(\phi) \cos(2\phi) &= \frac{1}{2}[\sin(3\phi) - \sin(\phi)] , \\ \sin^3(\phi) &= -\frac{1}{4}[\sin(3\phi) - 3\sin(\phi)] ,\end{aligned}$$

las contribuciones resonantes a (4.20) dan la relación de dispersión

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2}q\alpha^2\right) , \quad (4.21)$$

$$q = \frac{3}{4} - \tilde{q} . \quad (4.22)$$

Ésta es la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas linealmente polarizadas en un plasma de electrones y positrones cuando la generación de armónicos, efectos débilmente relativistas y efectos térmicos son incluidos consistentemente.

En la Fig. 6(a) mostramos la relación de dispersión de la onda bomba, $y = ck_0/\omega_p$ versus $x = \omega_0/\omega_p$, para $\alpha = 0.01$, $v_s/c = 0.1$. Las líneas rectas corresponden a los modos electro-acústicos, y las parábolas a los modos electromagnéticos. En la Fig. 6(b), la misma relación de dispersión se muestra para $\alpha = 0.5$. Vemos que, partiendo de $\omega_0 = 0$ y $k_0 = 0$, hay una inestabilidad electrostática. Sin embargo, como el parámetro pequeño es α , de (4.10) se sigue que, dada una intensidad de la onda electromagnética, la relación de dispersión no es válida para valores de ω_0 cercanos al origen.

4.2 Polarización circular

Ahora consideramos una onda electromagnética circularmente polarizada que se propaga a lo largo del eje z , de modo que los campos eléctrico y magnético a orden cero están dados por:

$$\vec{B}_0 = B[\hat{x} \cos(k_0 z - \omega_0 t) + \hat{y} \sin(k_0 z - \omega_0 t)] , \quad (4.23)$$

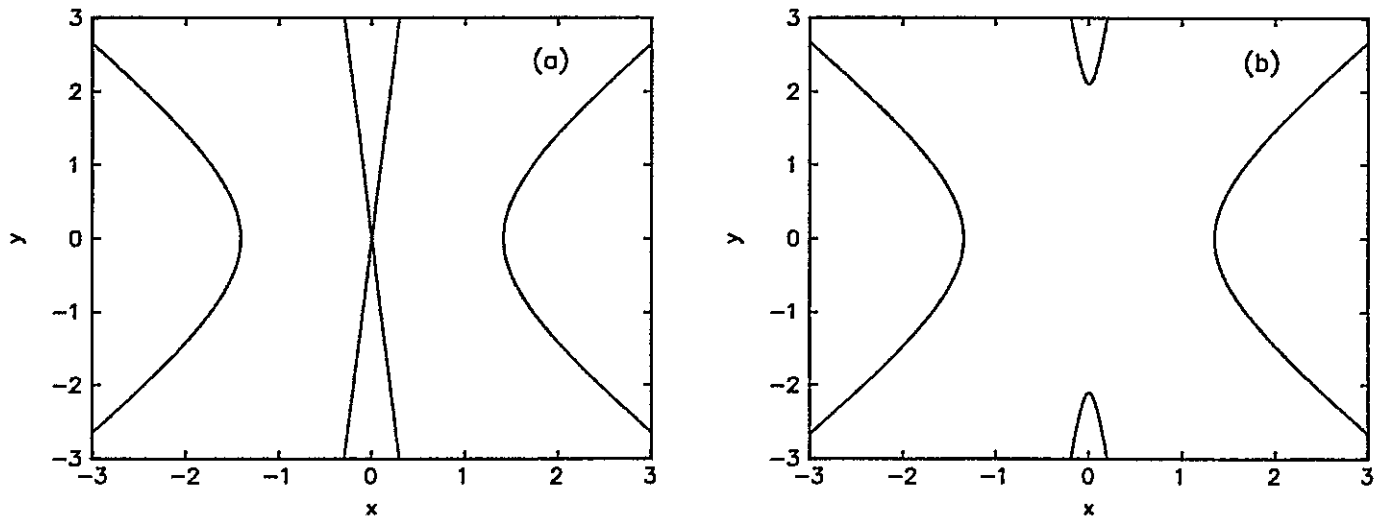


Fig. 6. Relación de dispersión de la onda bomba, ecuación (4.21). Número de onda normalizado, $y = ck_0/\omega_p$, vs. frecuencia normalizada, $x = \omega_0/\omega_p$, para $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0.01$. (b) $\alpha = 0.5$.

$$\vec{E}_0 = E[\hat{x} \sin(k_0 z - \omega_0 t) - \hat{y} \cos(k_0 z - \omega_0 t)] , \quad (4.24)$$

$$B = \frac{ck_0}{\omega_0} E . \quad (4.25)$$

En ausencia de efectos relativistas, estas ondas circularmente polarizadas satisfacen la misma relación de dispersión que las ondas linealmente polarizadas (4.4), lo cual concuerda con el hecho de que la polarización lineal puede ser obtenida simplemente superponiendo dos ondas con polarización circular. Pero los efectos relativistas introducen una no linealidad que destruye el principio de superposición, y las respectivas relaciones de dispersión difieren. De hecho, el tratamiento para la polarización circular resulta bastante más simple que en el caso anterior, debido a que no hay generación de armónicos. En efecto, recordemos que la generación de armónicos se debe a la presencia del término $\vec{v} \times \vec{B}$ en la fuerza de Lorentz, donde \vec{B} es el campo magnético de la onda y \vec{v} es la velocidad inducida por la misma onda. Para una

onda circularmente polarizada el campo \vec{E}_0 dado por (4.24) induce una velocidad transversal

$$\vec{v}_j = \frac{q_j E}{m\omega_0} [\hat{x} \cos(k_0 z - \omega_0 t) + \hat{y} \sin(k_0 z - \omega_0 t)] ,$$

lo que, junto con la forma del campo magnético \vec{B}_0 (4.23), nos da $\vec{v} \times \vec{B} = 0$, de modo que no hay generación de armónicos. [En la expresión anterior para \vec{v} hemos despreciado efectos relativistas. Ya discutimos, a propósito de la ecuación (4.13), que esto es correcto.]

Puesto que no hay generación de armónicos, los efectos relativistas sólo se manifestarán, al orden de nuestra aproximación, en la velocidad transversal que la onda induce en las partículas. De la relación (4.8), y adoptando para las magnitudes transversales la notación

$$C_{\perp 0} = C_{0x} + iC_{0y} = C e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} , \quad C \text{ real}, \quad (4.26)$$

encontramos la expresión

$$v_j = \frac{q_j B}{mck_0} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) . \quad (4.27)$$

Las densidades de electrones y positrones son simplemente

$$n_{j0} = n_0 . \quad (4.28)$$

Para hallar la relación de dispersión de la onda electromagnética introducimos (4.23)–(4.25) y (4.27)–(4.28) en (4.19), obteniéndose:

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) . \quad (4.29)$$

En la Fig. 7(a) mostramos la relación de dispersión de la onda bomba, $y = ck_0/\omega_p$ versus $x = \omega_0/\omega_p$, para $\alpha = 0$, y en la Fig. 7(b) para $\alpha = 0.5$.

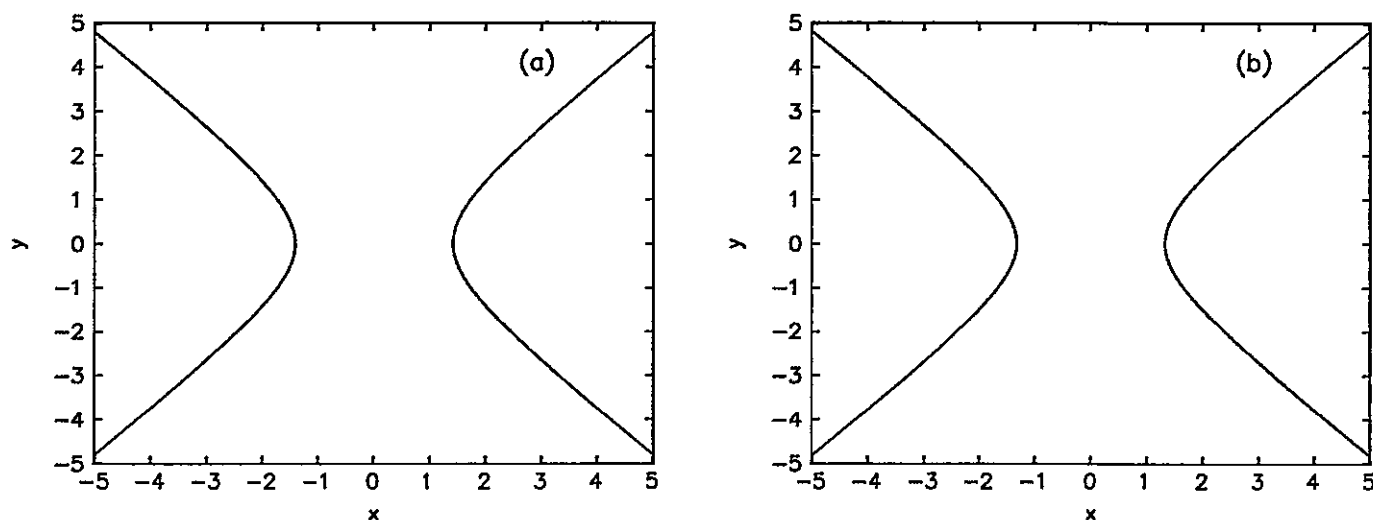


Fig. 7. Relación de dispersión de la onda bomba, ecuación (4.29). Número de onda normalizado, $y = ck_0/\omega_p$, vs. frecuencia normalizada, $x = \omega_0/\omega_p$.
 (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.5$.

Las relaciones de dispersión (4.21) y (4.29) nos muestran que los efectos relativistas se manifiestan en una disminución de la frecuencia de plasma efectiva ω_p . Por tanto, se pueden propagar ondas electromagnéticas en plasmas más densos de lo que se esperaría en virtud de los resultados no relativistas, efecto que ha sido discutido en la literatura tanto para polarización lineal [55] como para polarización circular [64].

4.3 Polarización circular, en un plasma magnetizado

Si introducimos ahora un campo magnético constante en la dirección z , y consideramos propagación de ondas electromagnéticas a lo largo de la misma dirección, los

campos eléctrico y magnético totales a orden cero están dados por:

$$\vec{B}_0 = B[\hat{x} \cos(k_0 z - \omega_0 t) + \hat{y} \sin(k_0 z - \omega_0 t)] + B_{0z} \hat{z}, \quad (4.30)$$

$$\vec{E}_0 = E[\hat{x} \sin(k_0 z - \omega_0 t) - \hat{y} \cos(k_0 z - \omega_0 t)], \quad (4.31)$$

$$B = \frac{ck_0}{\omega_0} E. \quad (4.32)$$

De (4.8), y siguiendo la misma notación para magnitudes transversales (4.26), encontramos que esta onda induce una velocidad transversal en las partículas dada por

$$v_j = \frac{q_j B}{mck_0} \eta_j \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_j^3 \right), \quad (4.33)$$

$$\eta_j = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_{cj}}, \quad (4.34)$$

$$\omega_{cj} = \frac{q_j B_{0z}}{mc}. \quad (4.35)$$

No hay generación de armónicos, de modo que las densidades de electrones y positrones son constantes.

Introducimos, pues, (4.30)–(4.33) y (4.28) en (4.19), para obtener la relación de dispersión de la onda electromagnética, incluyendo efectos débilmente relativistas:

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + \omega_p^2 \sum_j \eta_j \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_j^3 \right). \quad (4.36)$$

En la Fig. 8(a) mostramos la relación de dispersión de la onda bomba (4.36). Hemos considerado $\omega_p/\omega_{cp} = 0.5$ y $\alpha = 0.01$. El primer cuadrante corresponde a ondas de polarización derecha, propagándose en la dirección del campo magnético externo. Las ondas de polarización derecha son sostenidas por los positrones y tienen una resonancia en la girofrecuencia de los positrones, $\omega_0 = \omega_{cp}$. El segundo cuadrante corresponde a ondas de polarización derecha moviéndose en dirección opuesta al campo magnético externo. Estas ondas son transportadas por los electrones y tienen

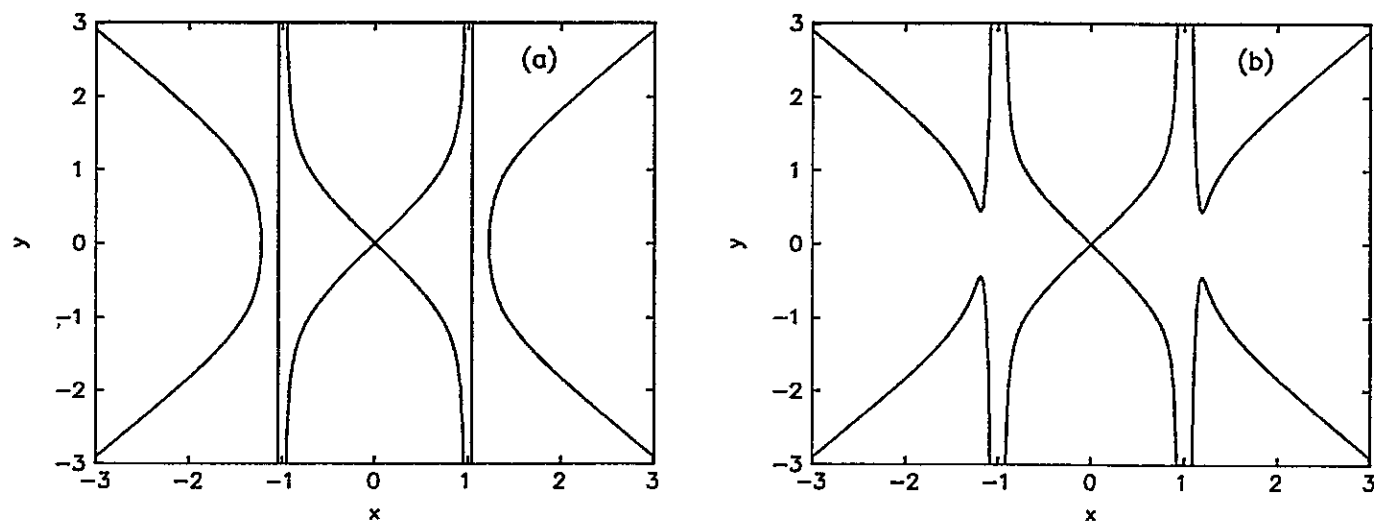


Fig. 8. Relación de dispersión de la onda bomba, ecuación (4.36). Número de onda normalizado, $y = ck_0/\omega_{cp}$, vs. frecuencia normalizada, $x = \omega_0/\omega_{cp}$, para $\omega_p/\omega_{cp} = 0.5$. (a) $\alpha = 0.01$. (b) $\alpha = 0.05$.

una resonancia en la girofrecuencia de los electrones, $\omega_0 = -\omega_{cp}$. El tercer cuadrante corresponde a ondas de polarización izquierda, moviéndose en la dirección del campo magnético. Estas ondas son transportadas por los electrones y la rama tiene un resonancia en la girofrecuencia de los electrones. El cuarto cuadrante corresponde a ondas de polarización izquierda, moviéndose en dirección opuesta al campo magnético externo, y transportadas por los positrones.

Al aumentar la intensidad de la onda bomba hay una inestabilidad para frecuencias comenzando en una frecuencia de corte $\omega_0 > \omega_{cp}$ y $k_0 = 0$. Esto se ilustra en la Fig. 8(b) para $\alpha = 0.05$.

Capítulo 5

Decaimientos paramétricos de una onda electromagnética en un plasma de electrones y positrones

Hemos ya establecido la solución a orden cero, considerando las primeras correcciones relativistas en la velocidad que la onda electromagnética induce en las partículas.

Ahora perturbamos el sistema nuevamente, suponiendo que consiste en electrones, positrones, y una onda electromagnética que satisface la ecuación (4.21), (4.29) ó (4.36), según corresponda —la onda bomba. Los formalismos en el caso de polarización lineal y circular son diferentes, pues para polarización circular (Sec. 5.2) el factor Γ en la ecuación de movimiento resulta, al orden de nuestra aproximación, constante. En el caso de polarización lineal (Sec. 5.1) esto no ocurre y, además, hay que considerar el efecto de generación de armónicos, siendo, por una parte, más delicada la distinción de los términos que contribuyen al orden de nuestra aproximación, y, por otra, menos compactas las ecuaciones en general. Sin embargo, el agregar un campo magnético cuando hay polarización circular (Sec. 5.3) introduce nuevas complicaciones, derivadas del hecho de que la simetría entre electrones y positrones desaparece, ya que las especies presentan giros de Larmor opuestos. Hemos

separado los tratamientos en ausencia y presencia de campo magnético. De este modo, aprovechamos la simetría existente en el primer caso, y comprobamos que éste efectivamente se obtiene como el límite adecuado del segundo.

5.1 Polarización lineal

En la solución a orden cero, los campos están dados por (4.1)–(4.3), la velocidad por (4.9), (4.17), la densidad por (4.16) y la relación de dispersión por (4.21).

Convendrá definir:

$$\begin{aligned} V &= v_{px} - v_{ex} , \\ U &= v_{pz} + v_{ez} , \\ N &= n_p + n_e . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Las perturbaciones longitudinales serán ciertas oscilaciones periódicas en la dirección de propagación de la onda bomba [65], en tanto las perturbaciones transversales tendrán la misma polarización que la onda bomba, y podemos por tanto escribir

$$\begin{aligned} \delta C_z &= \text{Re} \left[\tilde{C} e^{i(kz - \omega t)} \right] , \\ \delta C_{\perp} &= \text{Re} \left[c_+ e^{i(k_+ z - \omega_+ t)} + c_- e^{i(k_- z - \omega_- t)} \right] , \end{aligned} \tag{5.2}$$

con

$$\begin{aligned} k_+ &= k_0 + k , \quad k_- = k_0 - k^* , \\ \omega_+ &= \omega_0 + \omega , \quad \omega_- = \omega_0 - \omega^* . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Siendo v_{0z} una magnitud de orden α^2 , y v_{0x} de orden α , al orden más bajo,

$$\Gamma_0 \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v_{0x}^2}{c^2} ,$$

y

$$\begin{aligned} \delta \Gamma &\simeq \frac{\Gamma_0^3}{c^2} (v_{0x} \delta v_x + v_{0z} \delta v_z) \\ &\simeq \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_{0x}^2}{c^2} \right) (v_{0x} \delta v_x + v_{0z} \delta v_z) \\ &\simeq \frac{1}{c^2} (v_{0x} \delta v_x + v_{0z} \delta v_z) \end{aligned}$$

Así, puesto que

$$\delta(\Gamma v_i) = \delta\Gamma v_{0i} + \Gamma_0 \delta v_i, \quad i = x, z,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \delta(\Gamma v_x) &= \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_{0x}^2}{c^2}\right) \delta v_x, \\ \delta(\Gamma v_z) &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{0x}^2}{c^2}\right) \delta v_z. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Al perturbar las ecuaciones (2.2)–(2.9) y (2.31) obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{j0} \cdot \vec{\nabla}\right) \delta(\Gamma_j \vec{v}_j) + (\delta \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla})(\Gamma_{j0} \vec{v}_{j0}) \\ = \frac{q_j}{m} \left[\delta \vec{E} + \frac{1}{c} (\delta \vec{v}_j \times \vec{B}_0 + \vec{v}_{j0} \times \delta \vec{B}) \right] - \frac{v_s^2}{n_0} \vec{\nabla} \delta n_j, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \delta n_j}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (n_0 \delta \vec{v}_j + \delta n_j \vec{v}_{j0}), \quad (5.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{E} = 4\pi \sum_j q_j \delta n_j, \quad (5.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \delta \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j (n_0 \delta \vec{v}_j + \delta n_j \vec{v}_{j0}) + \frac{1}{c} \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}. \quad (5.9)$$

La ecuación de movimiento perturbada (5.5) corresponde a cuatro ecuaciones escalares, dos para cada especie, una transversal y una longitudinal. Restando las dos ecuaciones transversales, sumando las longitudinales, y escribiendo éstas y el resto de las expresiones escalares resultantes de (5.6)–(5.9) en términos de las definiciones (5.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_{p0x}^2}{c^2}\right) \delta V \right] + v_{p0z} \frac{\partial}{\partial z} \delta V + \delta U \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p0x}^2}{c^2}\right) v_{p0x} \right] \\ = \frac{e}{m} \left[2\delta E_x - \frac{1}{c} (\delta U B_{0y} + 2v_{p0z} \delta B_y) \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p0x}^2}{c^2} \right) \delta U \right] + \frac{\partial}{\partial z} (v_{p0z} \delta U) = \frac{e}{mc} (\delta V B_{0y} + 2v_{p0x} \delta B_y) - \frac{v_s^2}{n_0} \frac{\partial}{\partial z} \delta N, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N = -\frac{\partial}{\partial z} [(n_0 + n_{ph}) \delta U + \delta N v_{p0z}], \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta B_y, \quad (5.13)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \delta B_y = \frac{4\pi e}{c} [(n_0 + n_{ph}) \delta V + \delta N v_{p0z}] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta E_x. \quad (5.14)$$

Hemos usado el hecho de que las velocidades transversales a orden cero satisfacen $\vec{v}_{p0x} = -\vec{v}_{e0x}$ [ver ecuación (4.9)].

Después de introducir las dependencias espacio-temporales que supusimos para las perturbaciones longitudinales y transversales [ecuaciones (5.2)], seleccionamos los términos resonantes en estas ecuaciones. Para las ecuaciones (5.11) y (5.12) esto significa seleccionar términos proporcionales a $e^{i(kz-\omega t)}$; para las otras, $e^{i(k\pm z-\omega\pm t)}$. Pero de (4.16)–(4.17) y (5.2), el término $v_{p0z} \delta U$ en (5.11), y los términos $n_{ph} \delta U$ y $\delta N v_{p0z}$ en (5.12), no tienen la dependencia requerida. Podemos entonces descartar estos términos. Combinando las ecuaciones resultantes obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_{p0x}^2}{c^2} \right) \delta V \right] + v_{p0z} \frac{\partial}{\partial z} \delta V + \delta U \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p0x}^2}{c^2} \right) v_{p0x} \right] \\ = \frac{e}{m} \left[2\delta E_x - \frac{1}{c} (\delta U B_{0y} + 2v_{p0z} \delta B_y) \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p0x}^2}{c^2} \right) - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \delta U = \frac{e}{mc} \frac{\partial}{\partial t} (\delta V B_{0y} + 2v_{p0z} \delta B_y), \quad (5.16)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta B_y = \frac{4\pi e}{c} \frac{\partial}{\partial z} [(n_0 + n_{ph}) \delta V + \delta N v_{p0z}], \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N = -n_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta U, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta B_y. \quad (5.19)$$

Hemos reescrito las tres ecuaciones que no se han alterado, para dejar en claro el conjunto completo de ecuaciones básicas con que contamos.

Reemplazando en las ecuaciones (5.15)–(5.17) las dependencias espacio-temporales supuestas para las cantidades a orden cero [ecuaciones (4.1)–(4.3), (4.9), (4.16)–(4.17)] y las cantidades perturbadas [ecuaciones (5.2)], seleccionando los términos resonantes y de orden no superior a α^2 , se obtiene

$$-i\omega_+ \left(1 + \frac{3}{4}\alpha^2\right) V_+ + i\frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{3}{4}\omega_+ + \frac{\omega_0}{k_0}\tilde{q}k_-^*\right) V_-^* = \frac{e}{m} \left(2e_+ + \alpha^2\frac{\omega_0}{ck_0}\tilde{q}b_-^*\right), \quad (5.20)$$

$$i\omega_-^* \left(1 + \frac{3}{4}\alpha^2\right) V_-^* - i\frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{3}{4}\omega_-^* + \frac{\omega_0}{k_0}\tilde{q}k_+\right) V_+ = \frac{e}{m} \left(2e_-^* + \alpha^2\frac{\omega_0}{ck_0}\tilde{q}b_+\right), \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) - v_s^2 k^2\right] \tilde{U} \\ & = \frac{e}{mc} \cdot i\omega \left[\frac{B}{2}(V_+ + V_-^*) - i\left(\frac{eE_0}{m\omega_0}\right) \left(1 - \frac{3}{8}\alpha^2\right) (b_+ - b_-^*)\right], \quad (5.22) \end{aligned}$$

$$(-\omega_+^2 + c^2 k_+^2) \frac{b_+}{c^2 k_+} = i\frac{4\pi e}{c} \left[n_0 \left(V_+ - \frac{1}{2}\alpha^2\tilde{q}V_-^*\right) + i\frac{\tilde{N}}{2} \left(\frac{eE_0}{m\omega_0}\right) \left(1 - \frac{3}{8}\alpha^2\right)\right], \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & (-\omega_-^{*2} + c^2 k_-^{*2}) \frac{b_-^*}{c^2 k_-^*} \\ & = -i\frac{4\pi e}{c} \left[n_0 \left(V_-^* - \frac{1}{2}\alpha^2\tilde{q}V_+\right) - i\frac{\tilde{N}}{2} \left(\frac{eE_0}{m\omega_0}\right) \left(1 - \frac{3}{8}\alpha^2\right)\right]. \quad (5.24) \end{aligned}$$

Observemos que los pares de ecuaciones (5.20)–(5.21) y (5.23)–(5.24) exhiben una cierta simetría (una ecuación se obtiene de la otra conjugando e intercambiando los subíndices + y –). Si los coeficientes V_{\pm} , b_{\pm} , etc., fuesen reales, podríamos escribir estos pares de ecuaciones como una sola [66, 67], pero dicha suposición no es necesaria.

Por su parte, de la ecuación de continuidad (5.18) y la ley de Faraday (5.19),

$$\tilde{N} = n_0 \frac{k\tilde{U}}{\omega}, \quad (5.25)$$

$$e_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{ck_{\pm}} b_{\pm}. \quad (5.26)$$

Así, de las ecuaciones (5.20)-(5.21),

$$V_+ = \frac{ie}{mc} \left[2 \frac{b_+}{k_+} - \frac{3}{2} \alpha^2 \left(\frac{b_+}{k_+} + \frac{1}{2} \frac{b_-^*}{k_-^*} \right) \right], \quad (5.27)$$

$$V_-^* = -\frac{ie}{mc} \left[2 \frac{b_-^*}{k_-^*} - \frac{3}{2} \alpha^2 \left(\frac{b_-^*}{k_-^*} + \frac{1}{2} \frac{b_+}{k_+} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.25)-(5.28) en (5.22)-(5.24):

$$\begin{aligned} \left[c^2 k_+^2 - \omega_+^2 + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2} q \alpha^2 \right) - \omega_p^2 \alpha^2 \left(\frac{3}{4} + \tilde{q} \right) \right] \frac{b_+}{k_+} - \omega_p^2 \alpha^2 q \frac{b_-^*}{k_-^*} \\ = -\omega_p^2 \frac{E_0 c}{\omega_0} \frac{1}{2} \frac{\tilde{N}}{n_0} \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \left[c^2 k_-^{*2} - \omega_-^{*2} + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2} q \alpha^2 \right) - \omega_p^2 \alpha^2 \left(\frac{3}{4} + \tilde{q} \right) \right] \frac{b_-^*}{k_-^*} - \omega_p^2 \alpha^2 q \frac{b_+}{k_+} \\ = -\omega_p^2 \frac{E_0 c}{\omega_0} \frac{1}{2} \frac{\tilde{N}}{n_0} \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \right), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\left[\omega^2 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha^2 \right) - v_s^2 k^2 \right] \frac{\tilde{N}}{n_0} = \frac{e}{m} k^2 \frac{e E_0}{m c \omega_0} \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \right) \left(\frac{b_+}{k_+} + \frac{b_-^*}{k_-^*} \right). \quad (5.31)$$

(5.29)-(5.31) es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas para \tilde{N} , b_{\pm} . Las contribuciones provenientes de los efectos relativistas están contenidas en los términos proporcionales a α^2 . (De hecho, existen factores proporcionales a E_0 que podríamos haber escrito como α , pero no lo hicimos para hacer explícito que ellos estarían en las ecuaciones aun en ausencia de efectos relativistas.) Anulando el determinante de tal sistema de ecuaciones para que existan soluciones no triviales, obtenemos la siguiente relación de dispersión no lineal:

$$\begin{aligned} 0 = S \left[D_+ D_- - \omega_p^2 \alpha^2 \left(\frac{3}{4} + \tilde{q} \right) (D_+ + D_-) \right] \\ + \frac{1}{2} \omega_p^2 \alpha^2 c^2 k^2 \left[\left(1 - \frac{3}{4} \alpha^2 \right) (D_+ + D_-) - 4 \omega_p^2 \alpha^2 \tilde{q} \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde

$$\begin{aligned}
 D_+ &= c^2 k_+^2 - \omega_+^2 + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2} q \alpha^2\right), \\
 D_- &= c^2 k_-^2 - \omega_-^2 + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2} q \alpha^2\right), \\
 S &= \omega^2 \left(1 + \frac{1}{4} \alpha^2\right) - v_s^2 k^2.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Claramente, cuando $\alpha = 0$, $D_{\pm} = 0$ y $S = 0$, lo cual corresponde a las ondas electromagnéticas y los modos electro-acústicos. Hay dos modos electro-acústicos, uno propagándose en la dirección de la onda electromagnética, y el otro en la dirección opuesta. Cuando $\alpha \neq 0$, los modos se acoplan. Una condición necesaria para el acoplamiento de ondas es (3.51), donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias de las ondas hijas. En la Sección 6.1 estudiaremos numéricamente la relación de dispersión (5.32) y los acoplamientos de que ella da cuenta.

Observemos que hemos obtenido la relación (5.32) reteniendo, en cada paso de nuestros cálculos, efectos relativistas al orden más bajo, es decir, α^2 . Ello es cierto rigurosamente hasta las expresiones (5.29)–(5.31). Sin embargo, en (5.32) hemos dejado algunos términos de orden mayor sólo para escribirla en términos de cantidades que tengan una interpretación física inmediata, como S , D_{\pm} . Cuando hagamos cálculos con estas expresiones, nos limitaremos a valores de α suficientemente pequeños para que los términos de orden superior no contribuyan.

Notemos también que α no sólo mide los efectos relativistas, sino también la presencia de la onda bomba, de modo que el límite no relativista no puede corresponder a hacer $\alpha = 0$ en (5.32). Lo correcto es despreciar los términos de orden cuadrático o superior en α en las ecuaciones (5.29)–(5.31). Al calcular la relación de dispersión correspondiente al sistema de ecuaciones resultante, obtenemos

$$0 = S D_+ D_- + \frac{1}{2} \omega_p^2 \alpha^2 c^2 k^2 (D_+ + D_-), \tag{5.34}$$

y las definiciones de D_{\pm} y S son (5.33), con $\alpha = 0$. [Se trata de la misma relación de dispersión (3.60) que estudiamos numéricamente, a modo de ejemplo, en el Cap. 3.] Comparando las expresiones (5.34) y (5.32) podemos identificar las contribuciones relativistas a ésta.

La relación de dispersión (5.32) difiere del resultado dado en la Ref. [29] en varios aspectos. Su método es similar al nuestro, pero escriben sus expresiones en términos del vector potencial en vez de los campos magnético y eléctrico. Para comparar su método y resultados con los nuestros hemos repetido nuestros cálculos, ahora en términos del vector potencial.

Primero, las ecuaciones (25), (26) y (38) de la Ref. [29], suponiendo (sin pérdida de generalidad) \vec{A}_0 real, se pueden expresar como

$$\left(D_+ - \frac{1}{2}\omega_p^2 q\alpha^2\right) \delta\tilde{A} - \frac{1}{2}\omega_p^2 q\alpha^2 \delta\tilde{A}^* = -\omega_p^2 \delta\tilde{N}A \left(1 - \frac{1}{4}q\alpha^2\right), \quad (5.35)$$

$$\left(D_- - \frac{1}{2}\omega_p^2 q\alpha^2\right) \delta\tilde{A}^* - \frac{1}{2}\omega_p^2 q\alpha^2 \delta\tilde{A} = -\omega_p^2 \delta\tilde{N}A \left(1 - \frac{1}{4}q\alpha^2\right), \quad (5.36)$$

$$(\omega^2 - v_s^2 k^2) \delta\tilde{N} = \left(\frac{e}{mc}\right)^2 Ak^2 (\delta\tilde{A} + \delta\tilde{A}^*). \quad (5.37)$$

Ahora bien, ellos definen, como nosotros, D_{\pm} tal que $D_{\pm} = 0$ es la relación de dispersión lineal de ondas electromagnéticas de frecuencia ω_{\pm} . Sin embargo, su relación de dispersión es incorrecta y debería ser (4.21). Pero hay diferencias más allá de estas definiciones.

Notemos, en primer lugar, que nuestras cantidades están relacionadas con sus equivalentes en la Ref. [29] a través de:

$$\frac{b_+}{k_+} \longrightarrow \delta\tilde{A}, \quad (5.38)$$

$$\frac{b_-^*}{k_-^*} \longrightarrow \delta\tilde{A}^*, \quad (5.39)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\tilde{N}}{n_0} \longrightarrow \delta \tilde{N}, \quad (5.40)$$

consistentes con $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ y las respectivas definiciones de las transformadas de Fourier y las perturbaciones de densidad y del potencial.

Una vez en cuenta esto, podemos ver que el tratamiento de la Ref. [29] da valores erróneos para los factores relativistas en todos los términos en (5.35)–(5.37). Estas diferencias surgen de diversos puntos en su tratamiento, donde los efectos relativistas no son incluidos adecuadamente (en la siguiente enumeración nos referimos a la rotulación de las ecuaciones en la Ref. [29]):

1. La ecuación (13) no es la densidad de corriente correcta para polarización lineal; no se puede obtener a partir de las correspondientes expresiones para la velocidad de las partículas (incluyendo efectos débilmente relativistas) y las perturbaciones de densidad debidas a generación de armónicos.
2. Después de la ecuación (14) para la dependencia temporal del vector potencial, se afirma que, despreciando términos no resonantes, $A^2 = (1/2)\vec{A}_s \cdot \vec{A}_s^*$, y es ésta la expresión que se usa cuando quiera que α^2 aparece. Pero algunos de los términos que se desprecian sí dan contribuciones resonantes a las ecuaciones de onda.
3. La ecuación (31) para la velocidad de las partículas en la dirección longitudinal es también incorrecta, pues ignora efectos relativistas. Estos efectos agregan un factor Γ en el lado izquierdo, el cual, cuando se expande a primer orden en α^2 , modifica el término ω^2 a $\omega^2(1 + \alpha^2/4)$. Además, el término de fuerza ponderomotriz debería incluir efectos relativistas. En efecto, éste proviene del término $\vec{v} \times \vec{B}$ en la fuerza de Lorentz, e incluir correcciones de primer orden

para \vec{v} lo cambia a

$$\vec{F}_\omega = -\frac{e^2}{2mc^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc^2} \right)^2 A^2 \right] \vec{\nabla} A^2 .$$

El término en paréntesis cuadrados falta en la Ref. [29].

Si se tienen en cuenta todas estas observaciones, y se procede siguiendo el método de la Ref. [29], se obtiene la relación de dispersión a orden cero (4.21), y las ecuaciones (5.35)–(5.37) son reemplazadas por:

$$\left[D_+ - \omega_p^2 \alpha^2 \left(\frac{3}{4} + \tilde{q} \right) \right] \delta \tilde{A} - \omega_p^2 q \alpha^2 \delta \tilde{A}^* = -\omega_p^2 \delta \tilde{N} A \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \right) , \quad (5.41)$$

$$\left[D_- - \omega_p^2 \alpha^2 \left(\frac{3}{4} + \tilde{q} \right) \right] \delta \tilde{A}^* - \omega_p^2 q \alpha^2 \delta \tilde{A} = -\omega_p^2 \delta \tilde{N} A \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \right) , \quad (5.42)$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{4} \alpha^2 \right) \omega^2 - v_s^2 k^2 \right] \delta \tilde{N} = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k^2 A \left(1 - \frac{3}{8} \alpha^2 \right) (\delta \tilde{A} + \delta \tilde{A}^*) . \quad (5.43)$$

Teniendo en cuenta las identificaciones (5.38)–(5.40), las ecuaciones (5.41)–(5.43) son exactamente equivalentes a nuestras ecuaciones (5.29)–(5.31) y, por tanto, dan la misma relación de dispersión, ecuación (5.32), que obtuvimos usando un método independiente.

5.2 Polarización circular

En este caso, para la solución a orden cero los campos de la onda están dados por (4.23)–(4.25), la velocidad de las partículas por (4.27), la densidad por (4.28) y la relación de dispersión por (4.29).

Definimos, análogamente a (5.1),

$$\begin{aligned} V &= v_{p\perp} - v_{e\perp} , \\ U &= v_{pz} + v_{ez} , \\ N &= n_p + n_e . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Hemos introducido aquí la notación

$$C_{\perp} = C_x + iC_y \quad (5.45)$$

para las magnitudes transversales. Éstas, a orden cero, vienen dadas por (4.26), en tanto las perturbaciones longitudinales y transversales tendrán la forma:

$$\begin{aligned} \delta C_z &= \operatorname{Re} \left[\tilde{C} e^{i(kz - \omega t)} \right], \\ \delta C_{\perp} &= c_+ e^{i(k_+ z - \omega_+ t)} + c_- e^{i(k_- z - \omega_- t)}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

respectivamente, con k_{\pm} y ω_{\pm} dados por (5.3).

Las expresiones (5.4) se modifican en el caso de polarización circular. Al orden más bajo,

$$\Gamma_0 \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\perp 0} v_{\perp 0}^*}{c^2}$$

(a diferencia de lo que ocurre para ondas polarizadas linealmente, Γ_0 es independiente del tiempo, lo cual simplifica considerablemente los cálculos posteriores) y

$$\begin{aligned} \delta \Gamma &\simeq \frac{\Gamma_0^3}{2c^2} (v_{\perp 0} \delta v_{\perp}^* + \delta v_{\perp} v_{\perp 0}^*) \\ &\simeq \frac{1}{2c^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_{\perp 0} v_{\perp 0}^*}{c^2} \right) (v_{\perp 0} \delta v_{\perp}^* + \delta v_{\perp} v_{\perp 0}^*) \\ &\simeq \frac{1}{2c^2} (v_{\perp 0} \delta v_{\perp}^* + \delta v_{\perp} v_{\perp 0}^*) \end{aligned}$$

Puesto que

$$\delta(\Gamma v_i) = \delta \Gamma v_{0i} + \Gamma_0 \delta v_i, \quad i = x, y, z,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(\Gamma v_x) + i \delta(\Gamma v_y) &= \left(1 + \frac{v_{\perp 0} v_{\perp 0}^*}{c^2} \right) \delta v_{\perp} + \frac{v_{\perp 0}^2}{2c^2} \delta v_{\perp}^*, \\ \delta(\Gamma v_z) &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{\perp 0} v_{\perp 0}^*}{c^2} \right) \delta v_z. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Consideramos ahora las ecuaciones perturbadas (5.5)–(5.9). Construimos, a partir de sus componentes x e y , ecuaciones para las magnitudes transversales de la forma

(5.45), y escribimos las ecuaciones escalares resultantes (longitudinales y transversales), en términos de las definiciones (5.44). Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{v_{p\perp 0} v_{p\perp 0}^*}{c^2} \right) \delta V + \frac{1}{2} \frac{v_{p\perp 0}^2}{c^2} \delta V^* \right] + \delta U \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p\perp 0} v_{p\perp 0}^*}{c^2} \right) v_{p\perp 0} \right] \\ = \frac{e}{m} \left(2\delta E_{\perp} + \frac{i}{c} \delta U B_{\perp 0} \right), \quad (5.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p\perp 0} v_{p\perp 0}^*}{c^2} \right) \delta U \right] \\ = -\frac{e}{mc} \frac{1}{2i} (V_0 \delta B_{\perp}^* - V_0^* \delta B_{\perp} + \delta V B_{\perp 0}^* - \delta V^* B_{\perp 0}) - \frac{v_s^2}{n_0} \frac{\partial}{\partial z} \delta N, \quad (5.49) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta N = -n_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta U, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta E_{\perp} = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta B_{\perp}, \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta B_{\perp} = -i \frac{4\pi e}{c} (n_0 \delta V + \delta N v_{p\perp 0}) - \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta E_{\perp}. \quad (5.52)$$

Combinando estas ecuaciones podemos escribir (5.49) y (5.52) en la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{p\perp 0} v_{p\perp 0}^*}{c^2} \right) - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \delta U \\ = -\frac{e}{mc} \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial t} (V_0 \delta B_{\perp}^* - V_0^* \delta B_{\perp} + \delta V B_{\perp 0}^* - \delta V^* B_{\perp 0}), \quad (5.53) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta B_{\perp} = i \frac{4\pi e}{c} \frac{\partial}{\partial z} (n_0 \delta V + \delta N v_{p\perp 0}). \quad (5.54)$$

Nuestro nuevo conjunto de ecuaciones fundamentales es (5.48), (5.50)–(5.51) y (5.53)–(5.54). Reemplazando en éstas las dependencias espacio-temporales supuestas [ecuaciones (4.26), (4.27), (5.46)], y seleccionando los términos resonantes, se obtiene

$$-i\omega_{\pm} \left[(1 + \alpha^2) V_{\pm} + \frac{\alpha^2}{2} V_{\mp}^* \right] = \frac{2e}{m} e_{\pm}, \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} & \left[\omega^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) - v_s^2 k^2 \right] \tilde{U} \\ & = -\frac{e}{mc} \cdot \omega \left[B(V_+ - V_-^*) + 2 \left(\frac{eB}{mck_0} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) (b_-^* - b_+) \right], \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$(-\omega_+^2 + c^2 k_+^2) \frac{b_+}{c^2 k_+} = -\frac{4\pi e}{c} \left[n_0 V_+ + \frac{\tilde{N}}{2} \left(\frac{eB}{mck_0} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \right], \quad (5.57)$$

$$(-\omega_-^2 + c^2 k_-^2) \frac{b_-^*}{c^2 k_-^*} = -\frac{4\pi e}{c} \left[n_0 V_-^* + \frac{\tilde{N}}{2} \left(\frac{eB}{mck_0} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \right], \quad (5.58)$$

$$\tilde{N} = n_0 \frac{k\tilde{U}}{\omega}, \quad (5.59)$$

$$e_{\pm} = -i \frac{\omega_{\pm} b_{\pm}}{c k_{\pm}}. \quad (5.60)$$

Así, de las ecuaciones (5.55) y (5.60),

$$V_{\pm} = \frac{2e}{mc} \left[\frac{b_{\pm}}{k_{\pm}} - \alpha^2 \left(\frac{b_{\pm}}{k_{\pm}} + \frac{1}{2} \frac{b_{\mp}^*}{k_{\mp}^*} \right) \right]. \quad (5.61)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.59)–(5.61) en (5.56)–(5.58):

$$\left[c^2 k_+^2 - \omega_+^2 + 2\omega_p^2(1 - \alpha^2) \right] \frac{b_+}{k_+} - \omega_p^2 \alpha^2 \frac{b_-^*}{k_-^*} = -\omega_p^2 \frac{B}{k_0} \frac{1}{2} \frac{\tilde{N}}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad (5.62)$$

$$\left[c^2 k_-^2 - \omega_-^2 + 2\omega_p^2(1 - \alpha^2) \right] \frac{b_-^*}{k_-^*} - \omega_p^2 \alpha^2 \frac{b_+}{k_+} = -\omega_p^2 \frac{B}{k_0} \frac{1}{2} \frac{\tilde{N}}{n_0} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad (5.63)$$

$$\left[\omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) - v_s^2 k^2 \right] \frac{\tilde{N}}{n_0} = 2 \frac{e}{m} k^2 \frac{eB}{mc^2 k_0} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \left(\frac{b_+}{k_+} + \frac{b_-^*}{k_-^*} \right). \quad (5.64)$$

Nuevamente encontramos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para \tilde{N} y b_{\pm} [(5.62)–(5.64)], y en el cual las contribuciones relativistas están contenidas en los términos proporcionales a α^2 . [Como en las ecuaciones (5.29)–(5.31), no hemos escrito factores B como α cuando dichos factores estén presentes aun despreciando los efectos relativistas.] Anulando su determinante resulta la siguiente relación de dispersión no lineal:

$$0 = S[D_+ D_- - (D_+ + D_-)\omega_p^2 \alpha^2] + \omega_p^2 \alpha^2 c^2 k^2 (1 - \alpha^2)(D_+ + D_-), \quad (5.65)$$

donde

$$\begin{aligned} D_+ &= c^2 k_+^2 - \omega_+^2 + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right), \\ D_- &= c^2 k_-^{*2} - \omega_-^{*2} + 2\omega_p^2 \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right), \\ S &= \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) - v_s^2 k^2. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Si $\alpha = 0$ de la relación de dispersión se tiene que $D_{\pm} = 0$ (ondas electromagnéticas) y $S = 0$ (modos electro-acústicos, uno propagándose en la dirección de la onda electromagnética, y el otro en la dirección opuesta), que se acoplan si $\alpha \neq 0$ y se satisface (3.51). Presentaremos el estudio numérico de (5.65) y los acoplamientos que describe en la Sec. 6.2.

Como hicimos para una bomba linealmente polarizada [ecuación (5.32)], hemos retenido en la relación de dispersión final factores de orden superior en α para poder escribirla en términos de cantidades con interpretación física (D_{\pm} , S). Si todas las contribuciones relativistas (en la fuerza ponderomotriz y en el factor Γ de la ecuación de movimiento) se ignoran [o, equivalentemente, si se desprecian los términos de orden α^2 o superior en (5.62)–(5.64)], se obtiene la relación de dispersión

$$0 = SD_+D_- + \omega_p^2 \alpha^2 c^2 k^2 (D_+ + D_-), \quad (5.67)$$

donde D_{\pm} y S están dados por (5.66), con $\alpha = 0$, resultado que nos permite identificar las contribuciones relativistas en (5.65).

La relación de dispersión (5.65) difiere del resultado de la Ref. [29]. Para comparar sus resultados con los nuestros escribimos ahora las ecuaciones (25), (26) y (38) de la Ref. [29] para polarización circular. Esto equivale a hacer $q = 1$ en (5.35)–(5.37):

$$\left(D_+ - \frac{1}{2}\omega_p^2 \alpha^2\right) \delta\tilde{A} - \frac{1}{2}\omega_p^2 \alpha^2 \delta\tilde{A}^* = -\omega_p^2 \delta\tilde{N}A \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right), \quad (5.68)$$

$$\left(D_- - \frac{1}{2}\omega_p^2 \alpha^2\right) \delta\tilde{A}^* - \frac{1}{2}\omega_p^2 \alpha^2 \delta\tilde{A} = -\omega_p^2 \delta\tilde{N}A \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right), \quad (5.69)$$

$$(\omega^2 - v_s^2 k^2) \delta \tilde{N} = \left(\frac{e}{mc} \right)^2 Ak^2 (\delta \tilde{A} + \delta \tilde{A}^*). \quad (5.70)$$

Por su parte, las relaciones (5.38)–(5.40) entre nuestras cantidades y las de la Ref. [29] siguen siendo válidas.

Pues bien, como en el caso de polarización lineal ya discutido, el tratamiento en la Ref. [29] no incluye los efectos relativistas adecuadamente. Los problemas son los mismos enumerados en la pág. 56, salvo por el punto 1 [la expresión (13) en la Ref. [29] es correcta para polarización circular]. Pero, por otra parte, hay que emplear con cuidado la definición de la amplitud del potencial \vec{A}_s en la relación (14) de [29]. En efecto, si $A(\vec{r}, t)$ es la amplitud del potencial, tal como la entendemos de una expresión como (4.23), entonces se puede escribir

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \left[e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} A(\vec{r}, t) (\hat{x} - i\hat{y}) + A^*(\vec{r}, t) (\hat{x} + i\hat{y}) e^{-i(k_0 z - \omega_0 t)} \right].$$

Si definimos $\vec{A}_s = A(\hat{x} - i\hat{y})$, recuperamos la expresión (14) de [29], pero términos de la forma $\vec{A}_s \cdot \vec{A}_s$ serán 2 veces el valor de la amplitud real de la bomba. Esto modifica algunos factores numéricos en las expresiones siguientes.

Teniendo en cuenta estas observaciones, hemos repetido nuestros cálculos en términos del vector potencial, usando la notación de la Ref. [29] y siguiendo su procedimiento, incluyendo adecuadamente efectos relativistas. Entonces se obtiene la relación de dispersión a orden cero (4.29), y las ecuaciones (5.68)–(5.70) son reemplazadas por:

$$(D_+ - \omega_p^2 \alpha^2) \delta \tilde{A} - \omega_p^2 \alpha^2 \delta \tilde{A}^* = -\omega_p^2 \delta \tilde{N} A \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad (5.71)$$

$$(D_- - \omega_p^2 \alpha^2) \delta \tilde{A}^* - \omega_p^2 \alpha^2 \delta \tilde{A} = -\omega_p^2 \delta \tilde{N} A \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right), \quad (5.72)$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \omega^2 - v_s^2 k^2 \right] \delta \tilde{N} = \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k^2 A \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) (\delta \tilde{A} + \delta \tilde{A}^*). \quad (5.73)$$

Teniendo las identificaciones (5.38)–(5.40) en cuenta, las ecuaciones (5.71)–(5.73) son exactamente equivalentes a nuestras ecuaciones (5.62)–(5.64) y, por lo tanto, dan la misma relación de dispersión, ecuación (5.65), que obtuvimos usando un método independiente.

5.3 Polarización circular, en un plasma magnetizado

En este caso hay un campo magnético constante en la dirección z . Con ello, a orden cero, los campos quedan dados por (4.30)–(4.32), la velocidad de las partículas por (4.33), la densidad por (4.28) y la relación de dispersión por (4.36).

Mantenemos las definiciones (5.45)–(5.46), en tanto que el resultado (5.47) para $\delta(\Gamma\vec{v})$ sigue siendo válido.

Las ecuaciones perturbadas (5.5)–(5.9) toman la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\delta v_{j\perp} \left(1 + \frac{v_{j\perp 0} v_{j\perp 0}^*}{c^2} \right) + \delta v_{j\perp}^* \frac{v_{j\perp 0}^2}{2c^2} \right] + \delta v_{jz} \frac{\partial}{\partial z} \left[v_{j\perp 0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{j\perp 0} v_{j\perp 0}^*}{c^2} \right) \right] \\ = \frac{q_j}{m} \left[\delta E_{\perp} + \frac{i}{c} (\delta v_{jz} B_{\perp 0} - \delta v_{j\perp} B_{0z}) \right], \quad (5.74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{j\perp 0} v_{j\perp 0}^*}{c^2} \right) \delta v_{jz} \right] = \frac{q_j}{m} \left[\delta E_z \right. \\ \left. + \frac{1}{2ic} (\delta v_{j\perp}^* B_{\perp 0} - \delta v_{j\perp} B_{\perp 0}^* + v_{j\perp 0}^* \delta B_{\perp} - v_{j\perp 0} \delta B_{\perp}^*) \right] - \frac{v_s^2}{n_0} \frac{\partial}{\partial z} \delta n_j, \quad (5.75) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_j = -n_0 \frac{\partial}{\partial z} \delta v_{jz}, \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta E_z = 4\pi e (\delta n_p - \delta n_e), \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta E_{\perp} = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta B_{\perp}, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta B_{\perp} = -i \frac{4\pi e}{c} [n_0 (\delta v_{p\perp} - \delta v_{e\perp}) + \delta n_p v_{p\perp 0} - \delta n_e v_{e\perp 0}] - \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta E_{\perp}. \quad (5.79)$$

Notemos que, para una onda bomba de polarización dada, y a diferencia de lo que ocurre en ausencia de campo magnético, las velocidades de electrones y positrones, a orden cero, no tienen igual módulo [ver (4.33)]. Esto nos obliga a escribir ecuaciones separadas para cada especie, en vez de obtener ecuaciones simples para cantidades como (5.44).

Combinando (5.74)–(5.79) podemos reescribir (5.75) y (5.79):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_{j\perp 0} v_{j\perp 0}^*}{c^2} \right) - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \delta v_{jz} \\ & = \frac{q_j}{m} \frac{\partial}{\partial t} \left[\delta E_z + \frac{1}{2ic} (\delta v_{j\perp}^* B_{\perp 0} - \delta v_{j\perp} B_{\perp 0}^* + v_{j\perp 0}^* \delta B_{\perp} - v_{j\perp 0} \delta B_{\perp}^*) \right], \end{aligned} \quad (5.80)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \delta B_{\perp} = i \frac{4\pi e}{c} \frac{\partial}{\partial z} [n_0 (\delta v_{p\perp} - \delta v_{e\perp}) + \delta n_p v_{p\perp 0} - \delta n_e v_{e\perp 0}]. \quad (5.81)$$

Introducimos ahora las dependencias temporales (5.46). De la ley de Faraday (5.78) y la ecuación de continuidad (5.76) se sigue que

$$e_{\pm} = -i \frac{\omega_{\pm}}{c} \frac{b_{\pm}}{k_{\pm}}, \quad (5.82)$$

$$\tilde{n}_j = n_0 \frac{k \tilde{v}_j}{\omega}. \quad (5.83)$$

Además, de la condición de cuasineutralidad de carga, $\delta n_p = \delta n_e$, y (5.83):

$$\tilde{v}_p = \tilde{v}_e. \quad (5.84)$$

Usando las ecuaciones (4.26), (4.33), (5.46) y (5.82)–(5.84), en las ecuaciones (5.74), (5.80)–(5.81), obtenemos:

$$\begin{aligned} & [(1 + \alpha^2 \eta_j^2) \omega_+ - \omega_{cj}] v_{j+} + \left[\frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 \omega_+ \right] v_{j-}^* \\ & - \left[\frac{1}{2} \frac{q_j B}{mc} \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right] \tilde{v}_j = \frac{q_j}{mc} \omega_+ \frac{b_+}{k_+}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\left[\frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 \omega_-^* \right] v_{j+} + \left[(1 + \alpha^2 \eta_j^2) \omega_-^* - \omega_{cj} \right] v_{j-}^* - \left[\frac{1}{2} \frac{q_j B}{mc} \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right] \tilde{v}_j = \frac{q_j}{mc} \omega_-^* \frac{b_-^*}{k_-^*}, \quad (5.86)$$

$$\left[-\omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 \right) + v_s^2 k^2 \right] \tilde{v}_j = \frac{q_j}{mc} \omega \left[B(v_{j+} - v_{j-}^*) + \frac{q_j B}{mck_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) (b_-^* - b_+) \right], \quad (5.87)$$

$$(c^2 k_+^2 - \omega_+^2) b_+ = -4\pi c e k_+ n_0 \left\{ v_{p+} - v_{e+} + \frac{1}{2} \frac{k \tilde{v}_p}{\omega} \frac{eB}{mck_0} \left[\eta_p \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_p^3 \right) + \eta_e \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_e^3 \right) \right] \right\}, \quad (5.88)$$

$$(c^2 k_-^2 - \omega_-^2) b_-^* = -4\pi c e k_-^* n_0 \left\{ v_{p-}^* - v_{e-}^* + \frac{1}{2} \frac{k \tilde{v}_p}{\omega} \frac{eB}{mck_0} \left[\eta_p \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_p^3 \right) + \eta_e \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_e^3 \right) \right] \right\}. \quad (5.89)$$

Las contribuciones relativistas se encuentran en los términos cuadráticos en α en estas ecuaciones. (Los términos proporcionales a B que no hemos escrito como α estarían presentes aun despreciando los efectos relativistas.) Al anular el determinante del sistema de ecuaciones lineales (5.85)–(5.89) para las variables \tilde{v} , v_{\pm} y b_{\pm} , se encuentra la siguiente relación de dispersión no lineal:

$$0 = F_{1+} F_{2-} - F_{2+} F_{1-}, \quad (5.90)$$

donde $F_{1\pm}$ y $F_{2\pm}$ se definen en el Apéndice A.

Cuando $\alpha = 0$, (5.90) se reduce a

$$0 = S_p S_e D_+ D_-, \quad (5.91)$$

donde

$$\begin{aligned}
 S_p &= S_e = \omega^2 - v_s^2 k^2, \\
 D_+ &= c^2 k_+^2 - \omega_+^2 + \omega_p^2 \left(\frac{\omega_+}{\omega_+ - \omega_{cp}} + \frac{\omega_+}{\omega_+ - \omega_{ce}} \right), \\
 D_- &= c^2 k_-^{*2} - \omega_-^{*2} + \omega_p^2 \left(\frac{\omega_-^*}{\omega_-^* - \omega_{cp}} + \frac{\omega_-^*}{\omega_-^* - \omega_{ce}} \right).
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Las soluciones $D_{\pm} = 0$ y $S_p = S_e = 0$ corresponden a las ondas electromagnéticas y los modos electro-acústicos, respectivamente. Hay cuatro modos electro-acústicos, dos propagándose en la dirección de la onda electromagnética, y los otros en la dirección opuesta. Cuando $\alpha \neq 0$, los modos se acoplan, siendo una condición necesaria para que esto ocurra que se satisfagan las condiciones de resonancia (3.51). Los acoplamientos resultantes serán estudiados numéricamente en la Sec. 6.3.

Para el caso de un plasma no magnetizado ($B_{0z} = 0$, $\omega_{cj} = 0$, $\eta_j = 1$), la ecuación (5.90) se reduce a

$$0 = S[D_+ D_- - (D_+ + D_-)\omega_p^2 \alpha^2] + \omega_p^2 \alpha^2 c^2 k^2 (1 - \alpha^2)(D_+ + D_-), \tag{5.93}$$

con S y D_{\pm} dados por (5.66), lo cual corresponde a la relación de dispersión (5.65) ya obtenida.

Capítulo 6

Decaimientos no lineales

Ahora resolveremos las ecuaciones (5.32), (5.65) y (5.90) gráficamente, usando el método introducido en la Sec. 3.3 y derivado por primera vez por Longtin y Sonnerup [63] (ver también [68–73]).

6.1 Ondas linealmente polarizadas

Escogemos un valor para la frecuencia de la onda bomba ($x_0 = \omega_0/\omega_p = 1.5$), y con la ecuación (4.21) determinamos el correspondiente número de onda, k_0 , para $\alpha = 0$ ($y_0 = ck_0/\omega_p = 0.5$). Los otros parámetros se indican en la Fig. 9.

Dibujamos la relación de dispersión, ecuación (5.32), en términos de $x = \omega/\omega_p$ vs. $y = ck/\omega_p$. Hay cuatro líneas correspondientes a las cuatro soluciones reales de $D_{\pm} = 0$ [ver ecuación (5.33)], rotuladas en la Fig. 9(a) como D_{\pm} , y dos líneas rectas simétricas respecto al origen, correspondientes a los modos electro-acústicos (soluciones de $S = 0$), uno propagándose hacia atrás respecto a la onda bomba (S_-), y el otro en la misma dirección que la onda bomba (S_+). En total, 6 líneas, coincidiendo con el grado en ω y k de la ecuación polinomial (5.32).

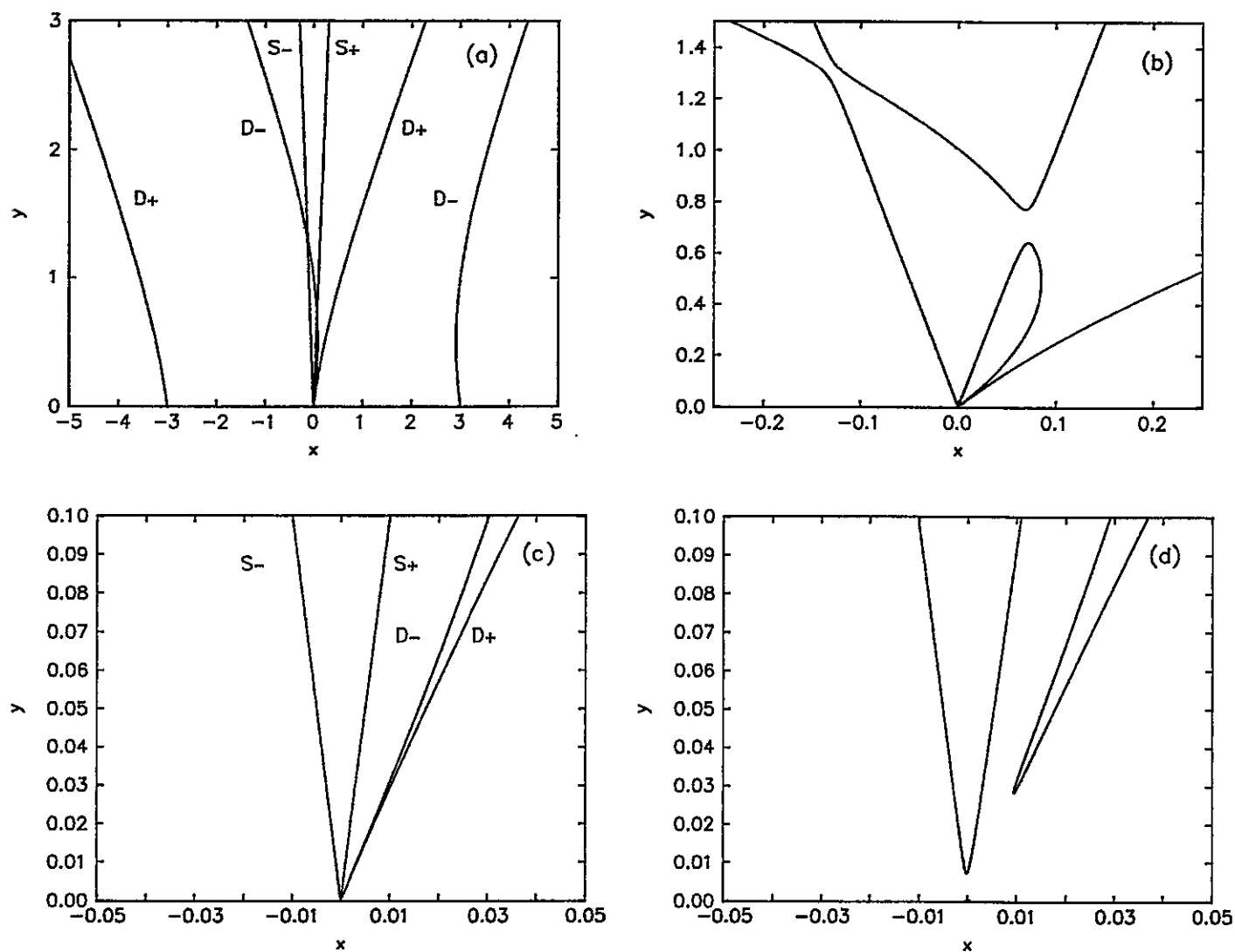


Fig. 9. Relación de dispersión no lineal, ecuación (5.32). Número de onda normalizado, $y = ck/\omega_p$, vs. frecuencia normalizada, $x = \omega/\omega_p$, para $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0.5$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.01$. (c) Ampliación del origen de la Fig. 9(a) para $\alpha = 0$. (d) Igual que la Fig. 9(c), para $\alpha = 0.03$.

Hay diversos cruces entre las líneas. Éstos son, de izquierda a derecha, un cruce entre (D_-, S_-) , otro en el origen entre D_-, D_+, S_- y S_+ , y uno entre (D_-, S_+) . [La Fig. 3(b) es una ampliación de la zona de interés en la Fig. 9(a). Aunque la Fig. 3(b) se obtuvo sin considerar efectos relativistas, cuando $\alpha = 0$ los resultados coinciden.] Algunos de estos cruces —aquéllos entre modos cuyas frecuencias satisfacen la relación (3.51)— pueden dar lugar a acoplamiento de ondas cuando $\alpha \neq 0$. Con el objeto de determinar si los cruces en la Fig. 9(a) conducen o no a un acoplamiento, encendemos la onda bomba. Así, tomando para la onda bomba un valor $\alpha = 0.01$, obtenemos la Fig. 9(b). (D_-, S_-) resulta ser un avoiding crossing, no pudiendo generar un acoplamiento por no conservar energía. El siguiente cruce, a saber, el cruce entre (D_-, S_+) , conduce a acoplamiento. En efecto, en este cruce hay ahora una brecha. Estamos aquí en presencia de una inestabilidad de decaimiento ordinaria, donde la onda bomba decae en una sideband wave de frecuencia ω_- (una solución de $D_- = 0$) y un modo electro-acústico, S_+ , de frecuencia ω .

Luego, en la Fig. 9(c) investigamos el cruce en el origen de la Fig. 9(a), para $\alpha = 0$. En la Fig. 9(d) la amplitud de la onda bomba ha sido aumentada a $\alpha = 0.03$. En el cruce (D_+, D_-) ahora hay una brecha. Esta brecha, que se extiende hasta el origen, es una inestabilidad modulacional. En este caso, se trata de un decaimiento no resonante de la onda bomba en dos sideband waves, de frecuencias ω_+ y ω_- . Este decaimiento es esencialmente electromagnético, pero es mediado por oscilaciones de plasma que no son modos normales del sistema [74] y es de orden más alto (α^4). Los decaimientos que involucran un modo electromagnético y un sonido, en cambio, son resonantes, y de orden α^2 . Hay una segunda inestabilidad modulacional que parece debida a un acoplamiento entre (S_+, S_-) . Sin embargo, éste es un resultado de combinaciones de una inestabilidad modulacional de batimiento entre S_- y D_+ y

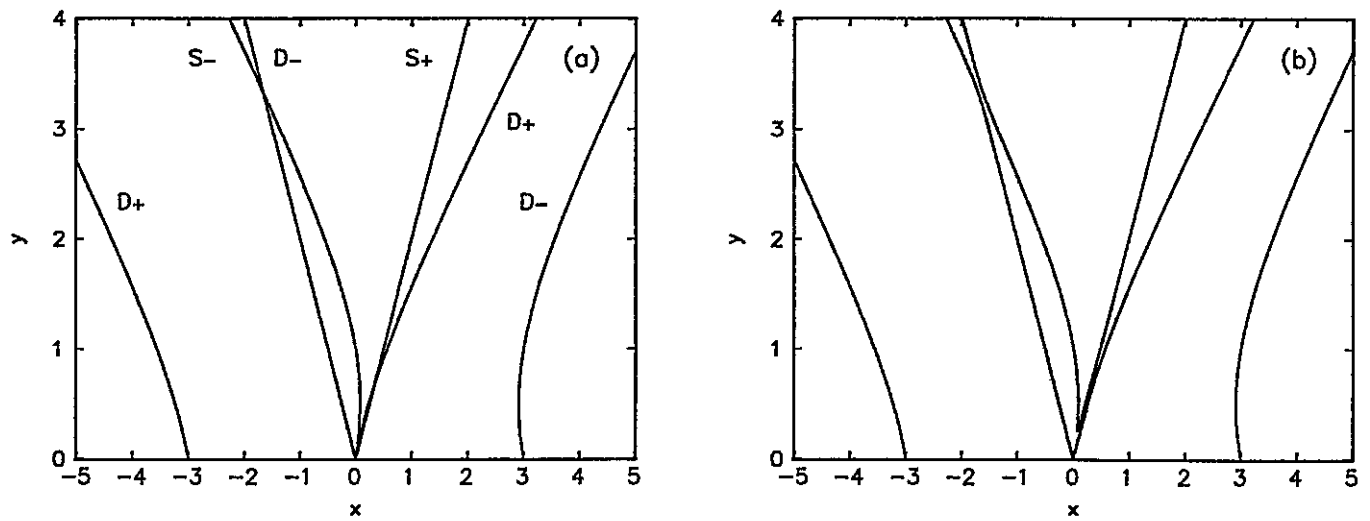


Fig. 10. Igual que la Fig. 9, para $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0.5$ y $v_s/c = 0.5$. (a) $\alpha = 0$.

(b) $\alpha = 0.08$.

una inestabilidad modulacional resonante entre S_+ y D_- .

En el caso en que la temperatura del plasma se aumenta a $v_s/c = 0.5$ [Fig. 10(a)], hay cruces entre (D_-, S_-) , (D_+, S_+) , y uno en el origen. En la Fig. 10(b) hemos aumentado la amplitud de la onda bomba a $\alpha = 0.08$ con objeto de mostrar que los cruces entre (D_-, S_-) y (D_+, S_+) son ahora avoiding crossings. Es fácil ver que para $v_s < c^2 k_0/\omega_0$ (ck_0/ω_0 es el valor de la pendiente con que las curvas $D_{\pm} = 0$ llegan al origen), S_+ siempre cruzará D_- [Fig. 9(a)], dando así origen a una inestabilidad de decaimiento. Cuando $v_s > c^2 k_0/\omega_0$, por su parte, S_+ cruzará D_+ [Fig. 10(a)], dando lugar a un avoiding crossing cuando la bomba es activada. En la Fig. 10(c) hemos ampliado la zona del origen para $\alpha = 0$. En la Fig. 10(d) aumentamos la amplitud de la onda bomba a $\alpha = 0.01$. Hay una inestabilidad modulacional entre (D_-, D_+) , la cual es principalmente electromagnética, en el sentido que la onda bomba decae en dos sideband waves, a través de oscilaciones de plasma no resonantes. Si continua-

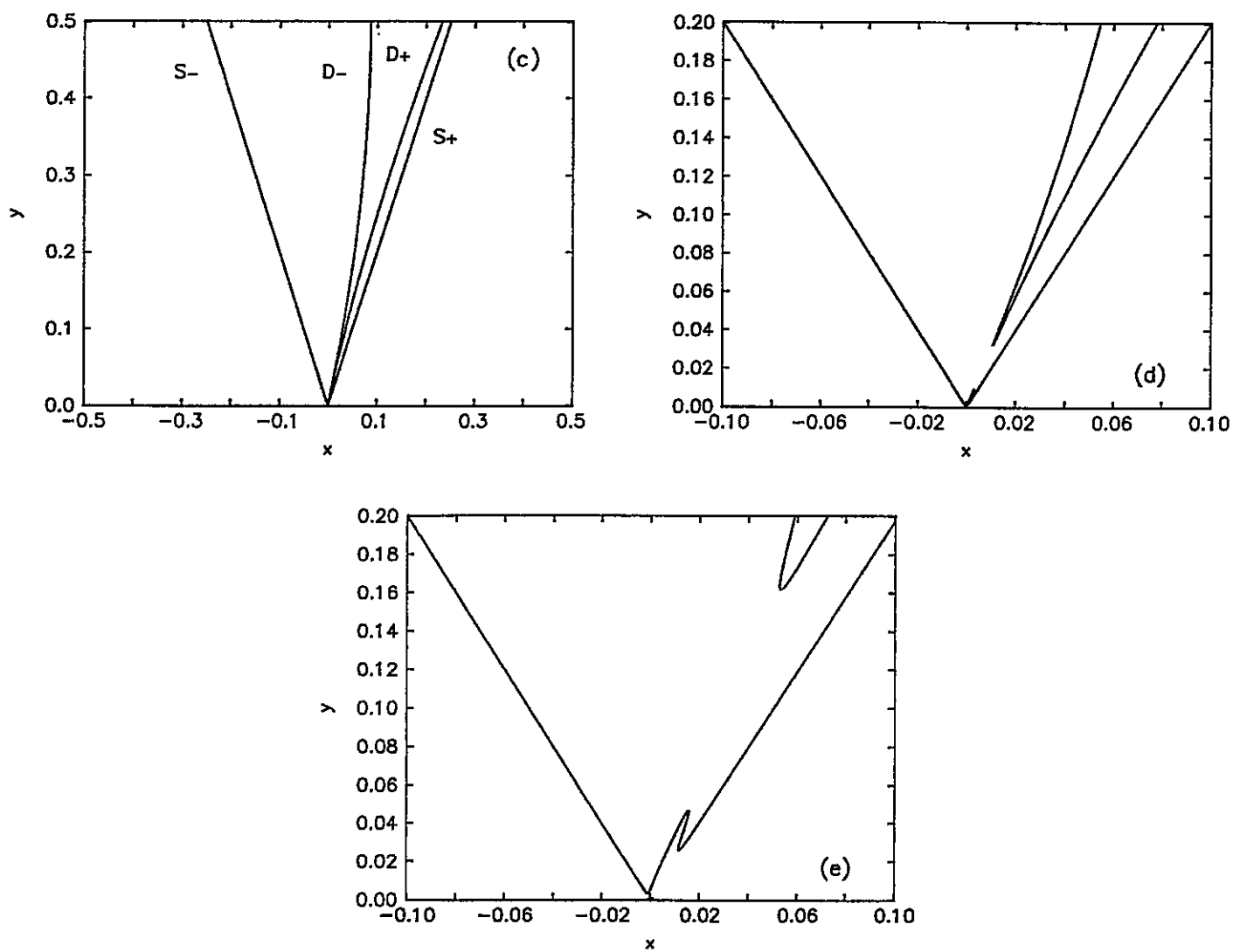


Fig. 10. (Continuación.) Ampliación del origen de la Fig. 10(a). (c) $\alpha = 0$.
 (d) $\alpha = 0.01$. (e) $\alpha = 0.05$.

mos aumentando $\alpha = 0.05$, de la Fig. 10(e) se sigue que hay una nueva inestabilidad modulacional entre (S_+, D_-) . Esta última es una inestabilidad modulacional ordinaria, en la cual la onda bomba decae en un modo electro-acústico y una sideband wave. Esta inestabilidad está siempre presente para $v_s > c^2 k_0 / \omega_0$.

Comparemos estos resultados con los obtenidos en ausencia de efectos relativistas. La relación de dispersión correspondiente, ecuación (3.60), ya fue analizada en la Sec. 3.3, Figs. 3 y 4. Observamos que los mismos cruces y decaimientos están presentes en ambas situaciones, salvo que, en ausencia de efectos relativistas, la inestabilidad modulacional sólo está presente si $v_s \geq c^2 k_0 / \omega_0$. Los efectos relativistas introducen pues esta inestabilidad también para velocidades del sonido bajas. Además, alteran el carácter de ella para velocidades del sonido altas, como se aprecia al comparar la Fig. 4(b) (cuya estructura simple se mantiene al aumentar α), obtenida en ausencia de efectos relativistas, con la Fig. 10(e), correspondiente a la relación de dispersión en presencia de ellos.

Para estudiar la dependencia de los decaimientos paramétricos en la frecuencia de la onda bomba, ponemos $\omega_0 / \omega_p = 2$ y $v_s / c = 0.1$. En la Fig. 11(a) la estructura de los cruces se muestra para $\alpha = 0$. Son los mismos que en los casos anteriores, excepto que la escala es ahora mucho mayor. En la Fig. 11(b) la amplitud de la onda bomba ha sido aumentada a $\alpha = 0.05$. Como antes, hay un avoiding crossing entre (S_-, D_-) y una inestabilidad de decaimiento entre (S_+, D_-) . En la Fig. 11(c) hemos ampliado la zona del origen. Como antes, hay dos inestabilidades modulacionales, una de ellas esencialmente electromagnética entre (D_+, D_-) , las que se muestran en la Fig. 11(d). Para $v_s \geq c^2 k_0 / \omega_0$, hay una nueva inestabilidad modulacional del tipo decaimiento. Ésta se ilustra en la Fig. 11(e) para $v_s / c = 0.8$ y $\alpha = 0.1$. En

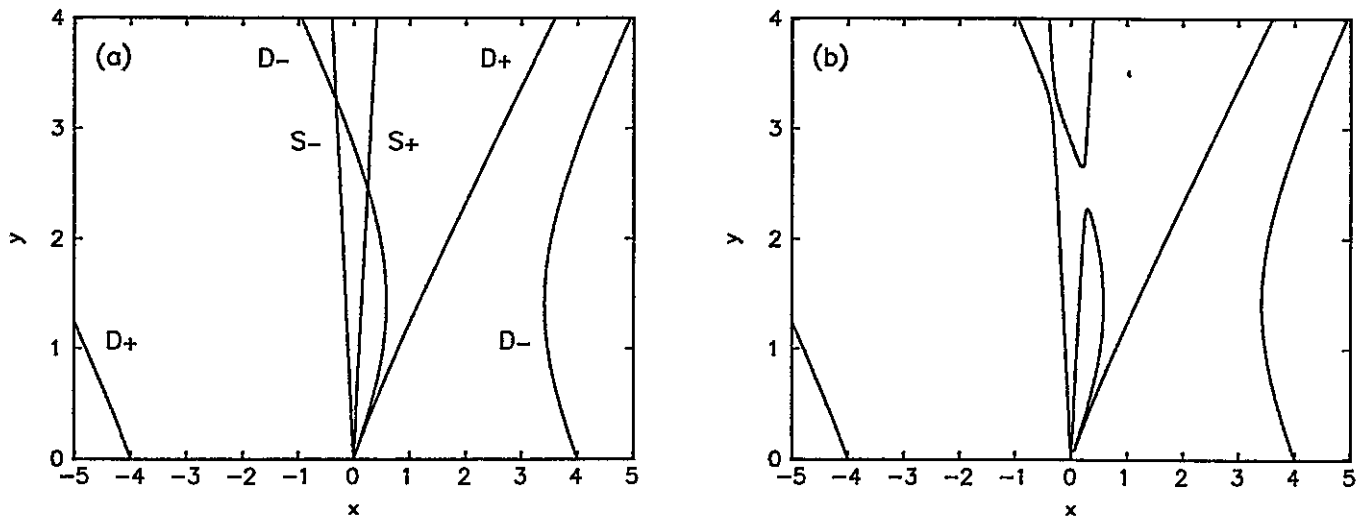


Fig. 11. Igual que la Fig. 9, para $x_0 = 2$, $y_0 = 1.414$ y $v_s/c = 0.1$, (a) $\alpha = 0$.
 (b) $\alpha = 0.05$.

suma, se tiene el mismo comportamiento de inestabilidades y avoiding crossings que para menores valores de la frecuencia [Fig. 10].

Finalmente, en la Fig. 12(a) aumentamos la frecuencia de la bomba aún más, a $\omega_0/\omega_p = 4$, con $v_s/c = 0.1$ y $\alpha = 0$. De las Figs. 12(b) y 12(c) se sigue que los decaimientos son los mismos que en los casos anteriores, salvo que la inestabilidad modulacional desaparece, quedando en su lugar una inestabilidad esencialmente electromagnética entre (D_+, D_-) . La inestabilidad modulacional desaparece, pues, para valores suficientemente grandes de la frecuencia de la bomba. Sin embargo, la Fig. 12(d) muestra, al compararla con la Fig. 11(d), que al aumentar (dentro de cierto rango) la frecuencia de la bomba, la brecha en el origen entre (D_+, D_-) crece. En otras palabras, el sistema es mucho más inestable modulacionalmente para mayores frecuencias de la onda bomba.

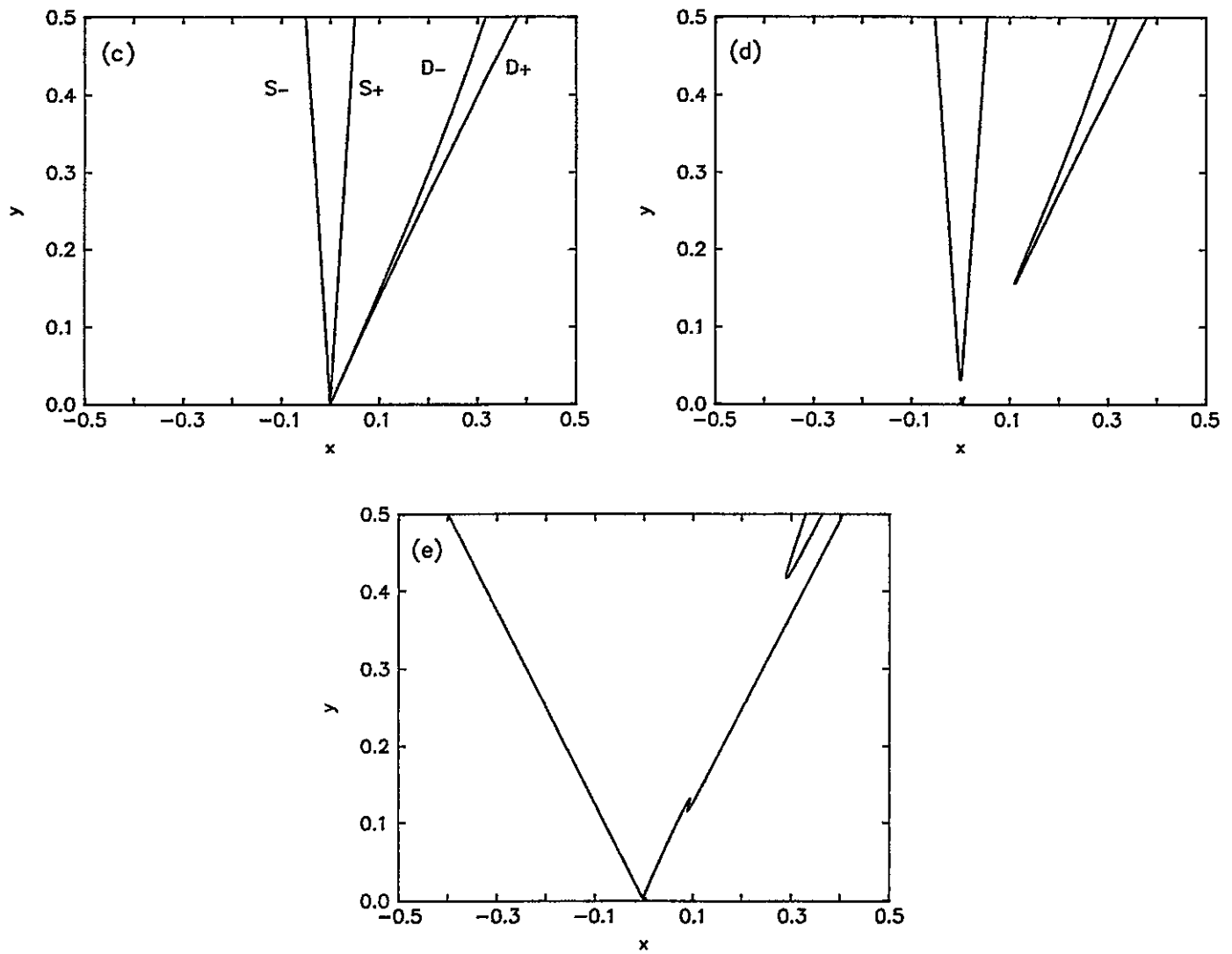


Fig. 11. (Continuación.) Ampliación del origen de la Fig. 11(a). (c) $\alpha = 0$.

(d) $\alpha = 0.1$. (e) $v_s/c = 0.8$ y $\alpha = 0.1$.

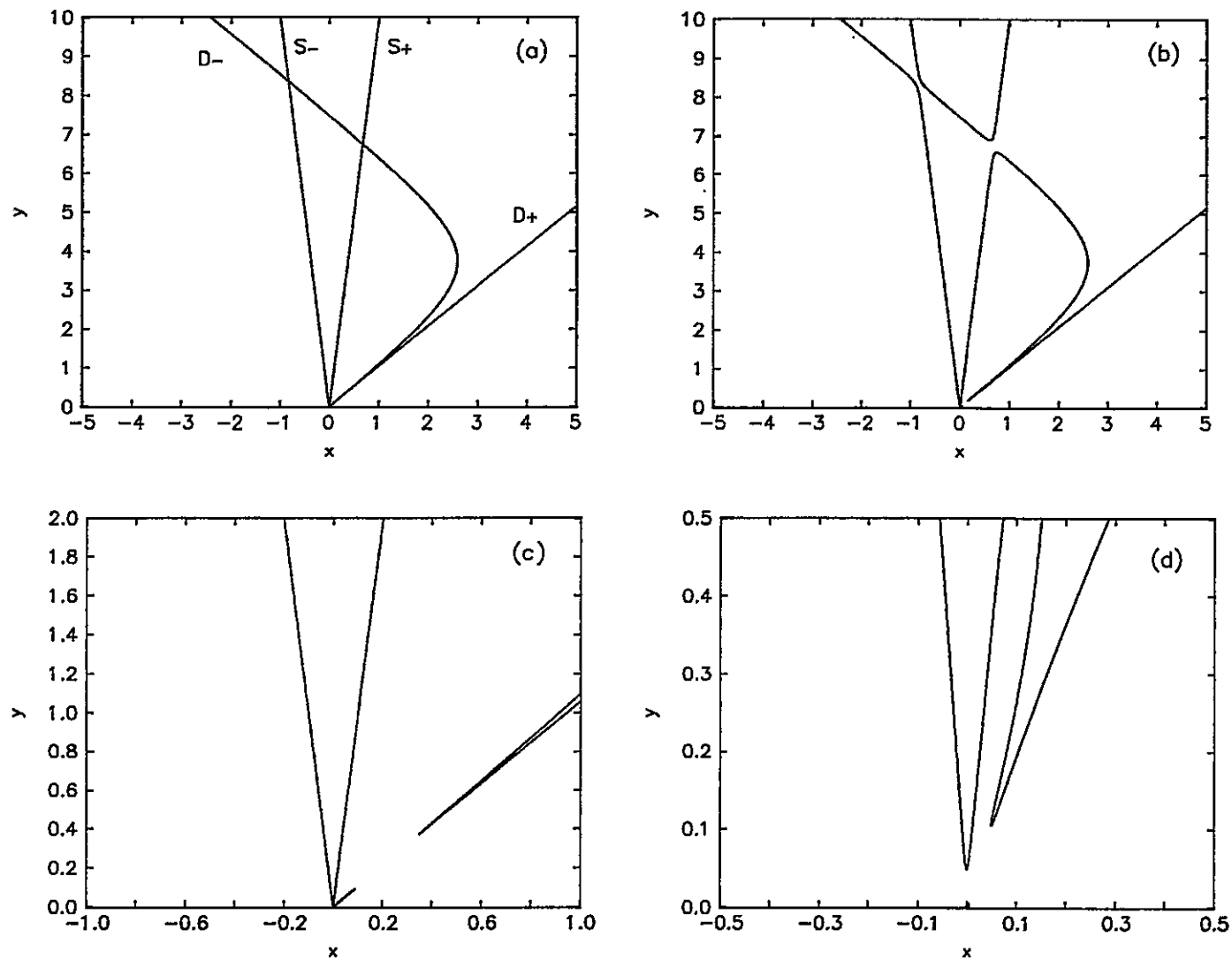


Fig. 12. Igual que la Fig. 9, para $x_0 = 4$, $y_0 = 3.742$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.05$. (c) Ampliación del origen de la Fig. 12(a), para $\alpha = 0.1$. (d) Igual que la Fig. 11(d), para $x_0 = 1.6$, mostrando la disminución del rango de inestabilidad modulacional al bajar la frecuencia de la bomba.

6.2 Ondas circularmente polarizadas

Ahora resolvemos numéricamente la ecuación (5.65). Éste es un polinomio de sexto orden en $x = \omega/\omega_p$ y $y = ck/\omega_p$, de modo que el gráfico de sus soluciones deberá contener seis líneas. Tomando para la onda bomba una frecuencia $x_0 = 1.5$ con el correspondiente número de onda $y_0 = 0.5$ [ver ecuación (4.29)], las soluciones para $\alpha = 0$ se muestran en la Fig. 13(a).

Cuatro líneas corresponden a $D_{\pm} = 0$ [rotuladas D_{\pm} en la Fig. 13(a)] y las dos líneas rectas simétricas respecto al origen son los modos electro-acústicos, uno propagándose hacia atrás respecto a la onda bomba (S_-), y el otro en la misma dirección que la onda bomba (S_+). Hay varios cruces en la Fig. 13(a). En la Fig. 13(b) hemos aumentado la escala para estudiar los cruces que, para $\alpha \neq 0$, pueden conducir a acoplamientos. En la Fig. 13(c) hemos puesto $\alpha = 0.01$. Vemos que en algunos cruces ahora hay brechas, indicando la existencia de inestabilidades. El cruce (D_- , S_-) se ha convertido en un avoiding crossing, como debería, pues no conserva energía. La brecha entre (D_- , S_+) es una inestabilidad de decaimiento ordinaria. Con el objeto de estudiar lo que sucede en el origen, en la Fig. 13(d) hemos reducido la escala aún más y hemos puesto $\alpha = 0.03$. Hay varias inestabilidades modulacionales. Hay una inestabilidad modulacional esencialmente electromagnética entre (D_+ , D_-) y otra inestabilidad modulacional, combinación de una inestabilidad modulacional de batimiento entre (S_- , D_+) y una inestabilidad modulacional resonante entre (S_+ , D_-).

El comportamiento de los cruces es pues análogo a lo observado para polarización lineal (Fig. 9).

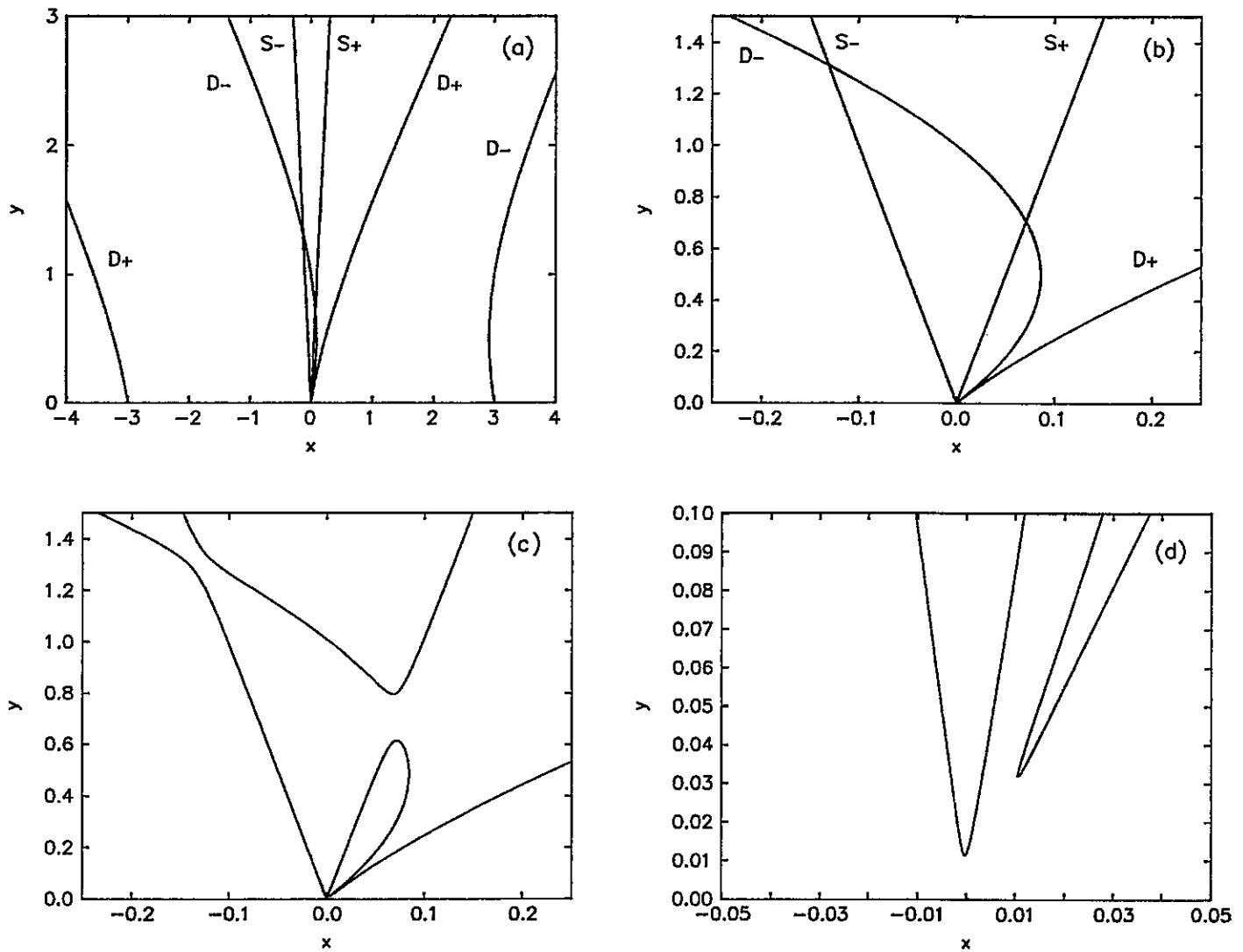


Fig. 13. Relación de dispersión no lineal, ecuación (5.65), $y = ck/\omega_p$ vs. $x = \omega/\omega_p$, para $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0.5$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$. (b) Igual que la Fig. 13(a), pero mostrando sólo los cruces en ella. (c) $\alpha = 0.01$. (d) Ampliación del origen de la Fig. 13(c) para $\alpha = 0.03$.

En la Fig. 14(a) hemos aumentado la velocidad del sonido a $v_s/c = 0.5$. Nuevamente vemos varios cruces para $\alpha = 0$. En la Fig. 14(b) hemos puesto $\alpha = 0.08$. Sólo hay una inestabilidad modulacional electromagnética no resonante entre (D_+, D_-) . En la Fig. 14(c) hemos aumentado la región del origen para $\alpha = 0.04$, con el objeto de ver la estructura detallada en esta zona, comprobándose que hay además una inestabilidad de decaimiento debida al acoplamiento entre (D_-, S_+) . Para valores más grandes de la intensidad de la bomba, vemos, de la Fig. 14(d), que hay otra inestabilidad modulacional. Este comportamiento es similar al descrito en la Fig. 10 para polarización lineal.

Comparemos con los resultados no relativistas. La relación de dispersión en este caso es (5.67), que es igual (salvo un factor numérico) a la relación de dispersión no relativista para polarización lineal (3.60). Por tanto, el análisis numérico de los acoplamientos debería dar resultados análogos a las Figs. 3 y 4, y así es en efecto. Así pues, como en el caso de polarización lineal (Sec. 5.1), las diferencias entre los casos no relativista y débilmente relativista se encuentran en las inestabilidades modulacionales. Debido a los efectos relativistas tales inestabilidades también se presentan cuando la velocidad del sonido es baja [$v_s < c^2 k_0/\omega_0$; comparar Figs. 3(c) y 13(d)] mientras que, cuando $v_s > c^2 k_0/\omega_0$, la estructura de las mismas es modificada [ver el carácter simple de la Fig. 4(b), sin introducción de efectos relativistas, en contraste con la Fig. 14(c)].

La Fig. 15 muestra una situación similar a la de la Fig. 13, pero la frecuencia de la onda bomba ha sido aumentada a $x_0 = 2$ ($y_0 = 1.414$), con $v_s/c = 0.1$. No se aprecian muchas diferencias respecto a lo observado para frecuencias más bajas. La Fig. 15(a) corresponde a $\alpha = 0$ y la Fig. 15(b) a $\alpha = 0.03$. En la Fig. 15(c) hemos

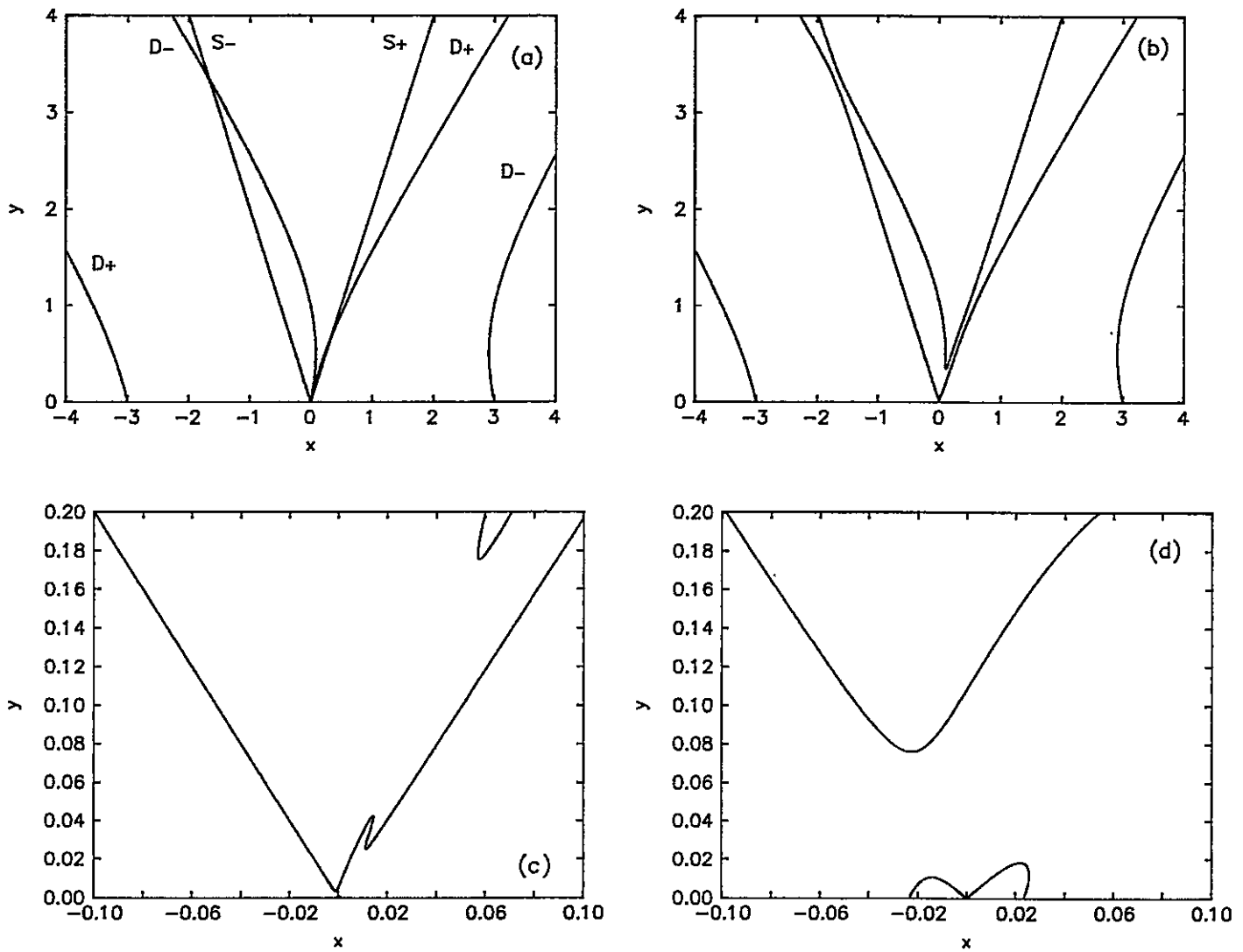


Fig. 14. Igual que la Fig. 13, para $x_0 = 1.5$, $y_0 = 0.5$ y $v_s/c = 0.5$. (a) $\alpha = 0$.

(b) $\alpha = 0.08$. (c) $\alpha = 0.04$. (d) $\alpha = 0.2$.

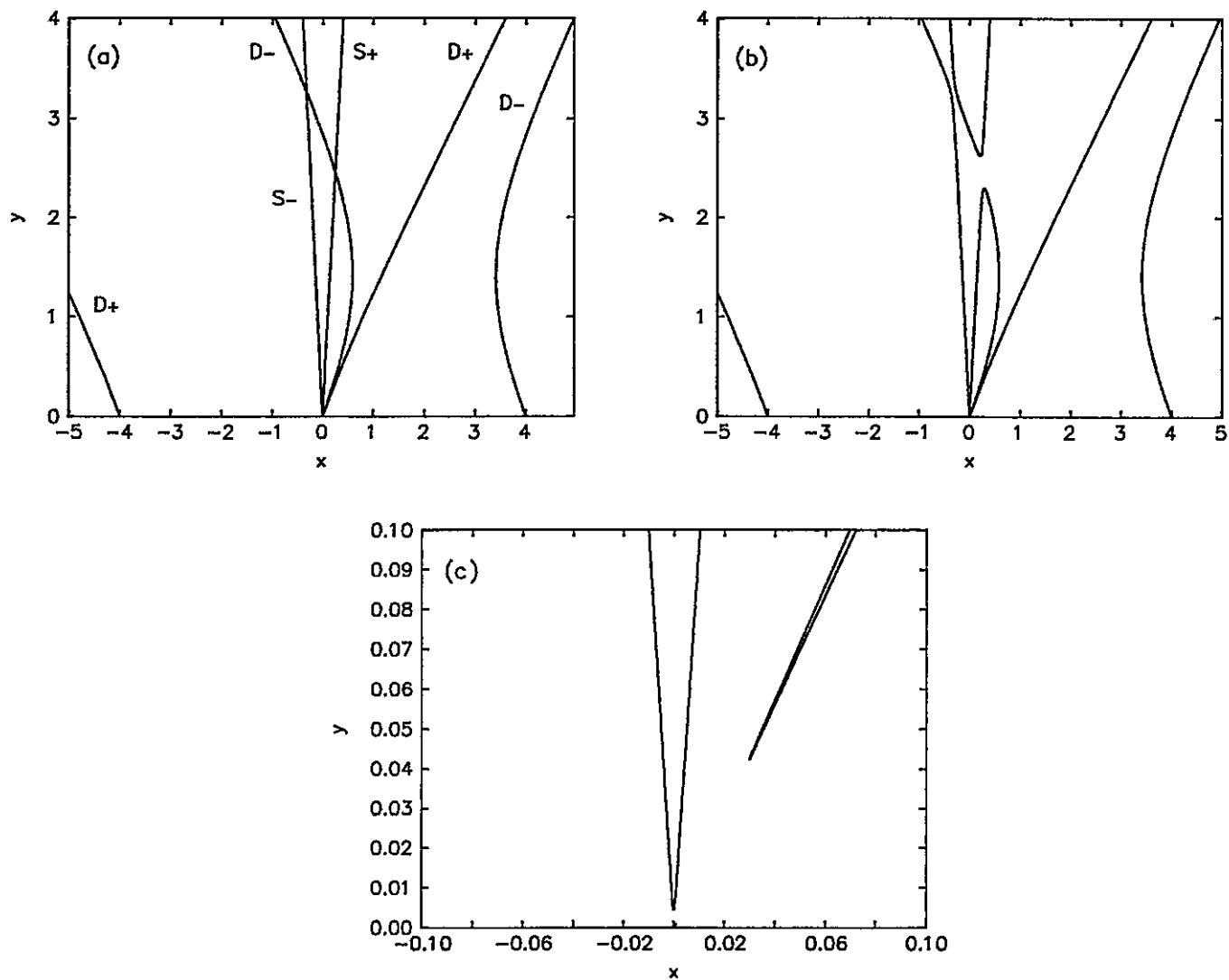


Fig. 15. Igual que la Fig. 13, para $x_0 = 2$, $y_0 = 1.414$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$.

(b) $\alpha = 0.03$. (c) Ampliación del origen de la Fig. 15(b).

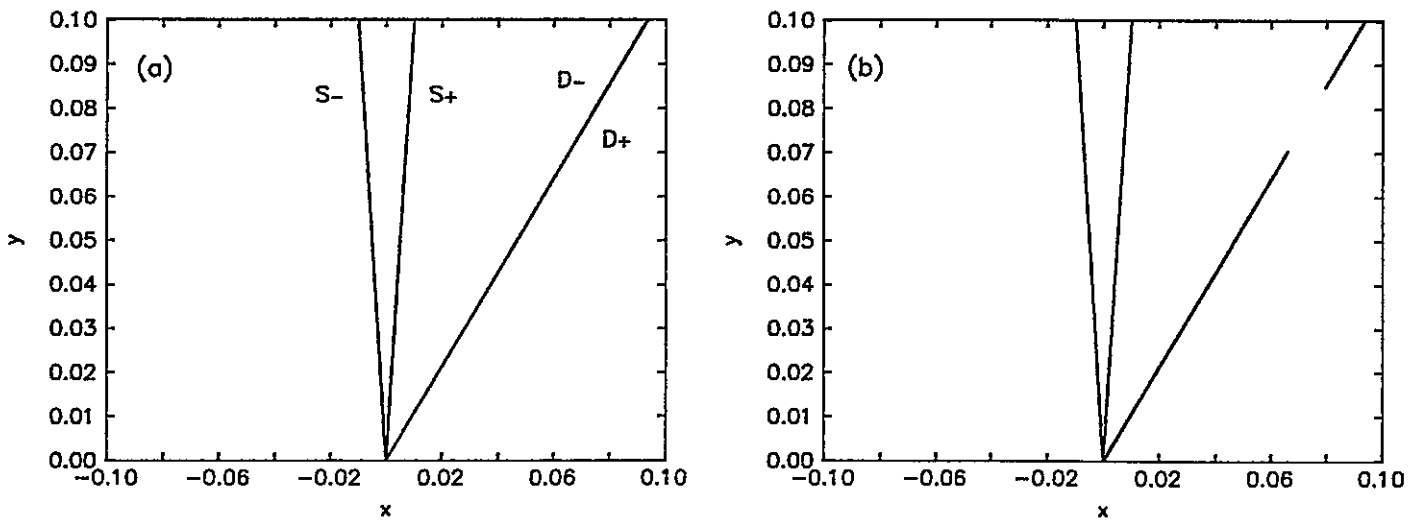


Fig. 16. Igual que la Fig. 13, para $x_0 = 4$, $y_0 = 3.742$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$.

(b) $\alpha = 0.03$.

aumentado el origen para mostrar que hay dos inestabilidades modulacionales.

También hemos investigado valores más altos de la frecuencia de la onda bomba. La única diferencia con los casos previos ocurre alrededor del origen. En la Fig. 16(a) hemos puesto $x_0 = 4$ ($y_0 = 3.742$) y $\alpha = 0$. En la Fig. 16(b), $\alpha = 0.03$. Hay una nueva inestabilidad esencialmente electromagnética entre (D_+ , D_-): como sucede para polarización lineal [Fig. 12(c)], la inestabilidad modulacional en el origen desaparece al aumentar la frecuencia de la onda bomba.

6.3 Ondas circularmente polarizadas, en un plasma magnetizado

En esta sección resolvemos la ecuación (5.90) numéricamente. Para ello, escogemos un valor para la frecuencia de la onda bomba, $x_0 = \omega_0/\omega_{cp} = 0.5$, y con la ecuación (4.36) determinamos el correspondiente número de onda, $y_0 = ck_0/\omega_{cp}$, para $\alpha = 0$.

En la Fig. 17(a), mostramos las soluciones de la ecuación (5.90) ($x = \omega/\omega_{cp}$ vs. $y = ck/\omega_{cp}$) para $\omega_p/\omega_{cp} = 1$, $v_s/c = 0.1$ y $\alpha = 0$. Con estos valores, $y_0 = 0.9574$.

Hay 8 líneas en la figura que corresponden a las 8 soluciones reales de $D_{\pm} = 0$. Cuatro de estas líneas son parabólicas y no exhiben resonancias. Están rotuladas como D_{\pm} en la Fig. 17(a). Las líneas p_{\pm} también corresponden a soluciones de D_{\pm} , pero resuenan en la girofrecuencia de los positrones $\omega_{\pm} = \omega_{cp}$; similarmente, e_{\pm} es la rama de $D_{\pm} = 0$ que resuena en la girofrecuencia de los electrones $\omega_{\pm} = -\omega_{cp}$. Hay también 4 líneas más, rectas, que corresponden a los modos electro-acústicos presentes en el sistema [ver ecuación (A.16) en el Apéndice]. En el caso en que $\alpha = 0$ hay sólo dos de estas líneas, porque hemos supuesto iguales temperaturas de electrones y positrones. Sin embargo, en presencia de la onda bomba los modos acústicos asociados a electrones y positrones se separan, dando origen a 4 líneas, dos modos acústicos propagándose en la dirección de la onda bomba [en la Fig. 17(a) están rotuladas como S_+ y se superponen], y dos en la dirección opuesta (rotuladas como S_-).

En la Fig. 17(a) vemos una serie de cruces entre las soluciones de la ecuación (5.90). Algunos de estos cruces —rotulados de (1) a (5) en la Fig. 17(a)— pueden dar lugar a acoplamiento de ondas cuando la onda bomba se enciende. La Fig. 17(a) no muestra todos los cruces existentes en la mitad superior del plano $x-y$. Hay dos cruces adicionales, sobre la porción mostrada de la figura, entre (S_-, e_+) y (S_+, e_-) , pero no dan origen a acoplamiento de ondas. En la Fig. 17(b) hemos encendido la onda bomba poniendo $\alpha = 0.1$. Algunos cruces ahora son brechas, las cuales corresponden a inestabilidades. Hay, pues, varios acoplamientos posibles. Comenzando por la parte superior, hay uno correspondiente al cruce de un modo electro-acústico propagándose hacia adelante (S_+) y la solución de $D_- = 0$ que tiene

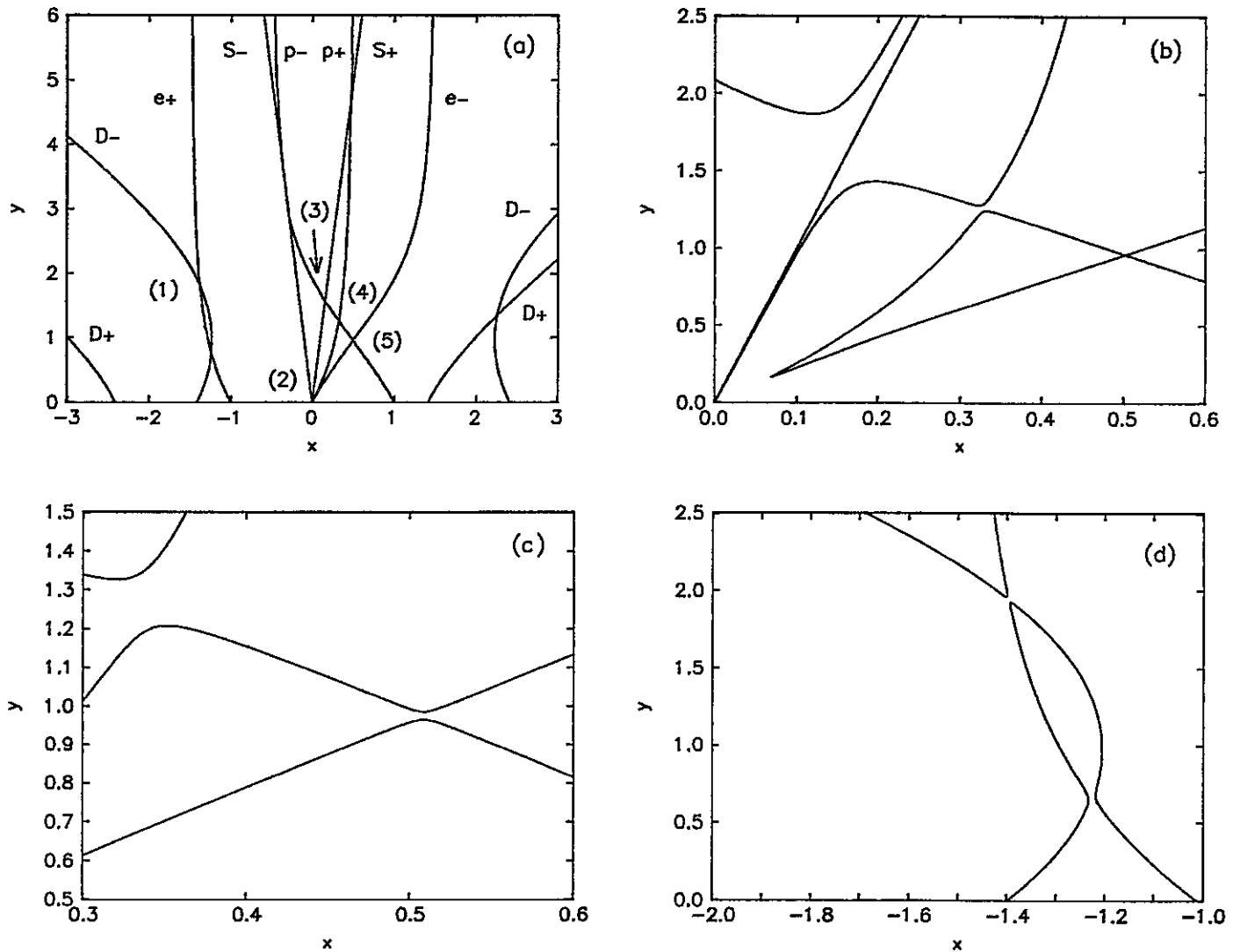


Fig. 17. Relación de dispersión no lineal, ecuación (5.90), $y = ck/\omega_{cp}$ vs. $x = \omega/\omega_{cp}$, para $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.9574$, $\omega_p/\omega_{cp} = 1$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$. (b) Zona de los cruces (2)-(5) para $\alpha = 0.1$. (c) Zona de los cruces (4)-(5) para $\alpha = 0.2$. (d) $\alpha = 0.2$, mostrando el acoplamiento (1).

una resonancia en $\omega_- = \omega_{cp}(p_-)$. Vemos que los dos modos electro-acústicos no sólo se separan cuando $\alpha \neq 0$, sino que también sólo uno de ellos se acopla a p_- . Encontraremos este mismo comportamiento más adelante. El cruce de p_- con el modo electro-acústico da origen a una inestabilidad de decaimiento ordinaria. El siguiente cruce, entre (p_+, p_-) , es un acoplamiento no resonante, en el cual la onda bomba decae en dos sideband waves. Hay otro acoplamiento no resonante entre dos soluciones de $D_- = 0$, (e_-, p_-) , el cual se ve más claramente en la Fig. 17(c) cuando $\alpha = 0.2$. Finalmente, el cruce entre (p_+, e_-) da lugar a una brecha que comienza en el origen [Fig. 17(b)] y corresponde a una inestabilidad modulacional no resonante. La Fig. 17(d) muestra el único acoplamiento restante para este conjunto de parámetros, en el cruce (e_+, D_-) .

Estudiamos a continuación el sistema para valores mayores de ω_p/ω_{cp} . En la Fig. 18(a) consideramos $\omega_p/\omega_{cp} = 10$, $\alpha = 0$ y $v_s/c = 0.01$. Para amplitud de la onda bomba nula, como se indicó más arriba, la relación de dispersión tiene doce raíces. Las ramas parabólicas D_{\pm} están más separadas entre sí que cuando $\omega_p/\omega_{cp} = 1$ y, por lo tanto, los cruces entre (e_+, D_-) presentes en la Fig. 17(a) han desaparecido. El cruce entre (D_+, D_-) mostrado en la Fig. 17(a) aún existe, pero, como en el caso anterior, no conduce a acoplamiento. Las líneas D_{\pm} son, en consecuencia, irrelevantes, y nos concentramos en las otras 6 líneas, como se muestra en la Fig. 18(a). Los cruces que conducen a acoplamiento de ondas están rotulados de (1) a (4); son los mismos que en el caso anterior [$\omega_p/\omega_{cp} = 1$, Fig. 17(a)].

En la Fig. 18(b) la onda bomba ha sido aumentada a $\alpha = 0.01$. Uno de los sonidos que se propagan hacia adelante se ha acoplado a p_- para dar origen a un proceso de decaimiento. Ésta es una inestabilidad de decaimiento ordinaria, en la

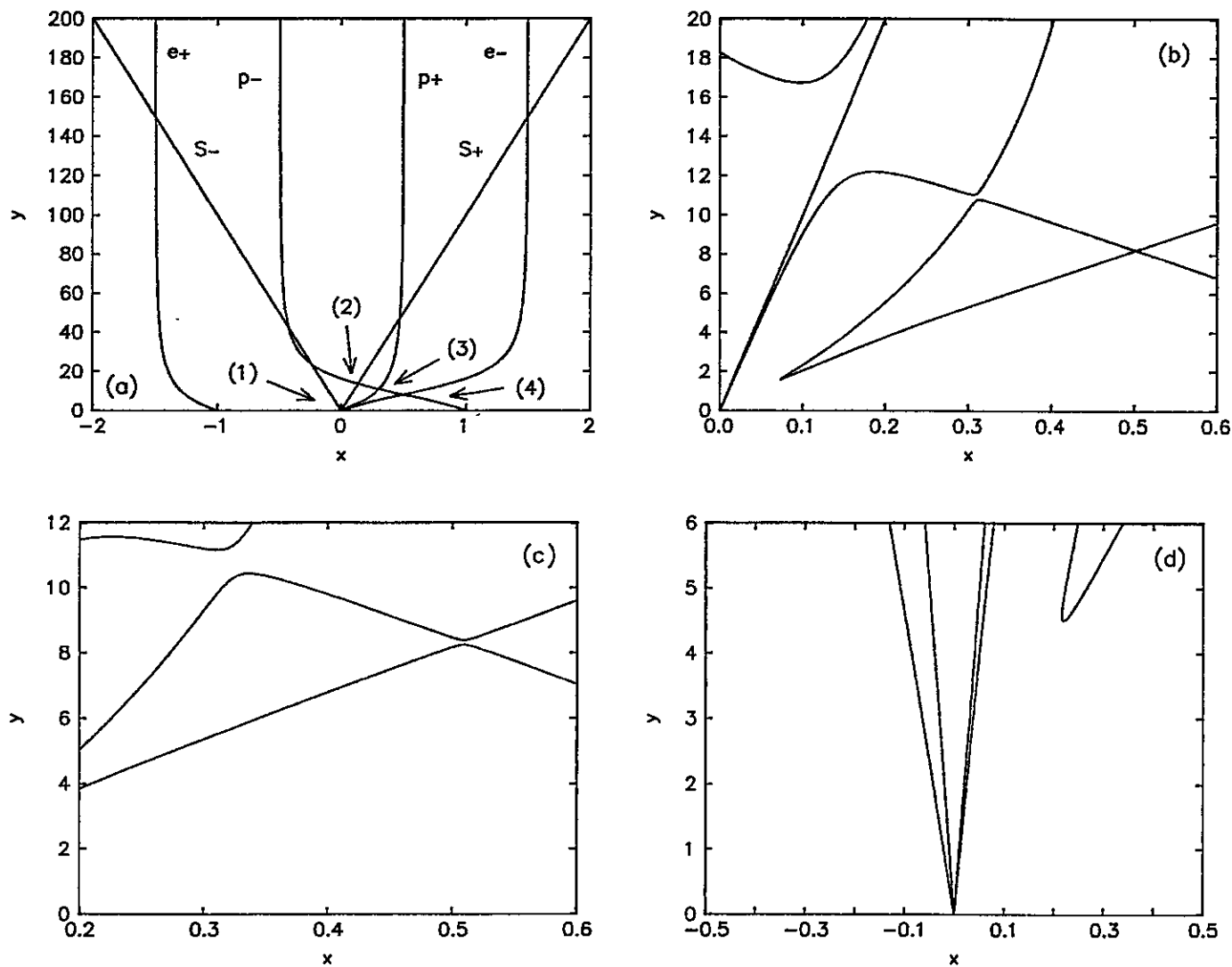


Fig. 18. Igual que la Fig. 17, para $\omega_p/\omega_{cp} = 10$ y $v_s/c = 0.01$. (a) $\alpha = 0$.
 (b) $\alpha = 0.01$. (c) $\alpha = 0.02$. (d) Ampliación del origen de la Fig. 18(a), para
 $\alpha = 0.03$.

cual la onda bomba decae en un sonido propagándose hacia adelante y una sideband wave. Esto corresponde a la primera brecha desde arriba. Hay otra brecha, entre (p_+, p_-) . Éste es un acoplamiento no resonante en el cual la onda bomba decae en dos sideband waves. Una tercera brecha se encuentra en el origen entre (p_+, e_-) . Dicho acoplamiento corresponde a una inestabilidad modulacional no resonante. Moviéndonos hacia la derecha, hay otra inestabilidad no resonante, involucrando (e_-, p_-) [ver Fig. 18(c)]. En la Fig. 18(d) hemos ampliado el origen para mostrar la inestabilidad modulacional (apreciándose, incidentalmente, la separación entre los modos acústicos que para $\alpha = 0$ se superponen). Las Figs. 18(b) y 18(c) son equivalentes a las Figs. 17(b) y 17(c), pero ω_p/ω_{cp} ha aumentado en un orden de magnitud y α ha disminuido en un orden de magnitud. Así, observamos que valores más bajos de α se necesitan para desestabilizar el sistema para mayores valores de ω_p/ω_{cp} .

A continuación aumentamos la velocidad del sonido a $v_s/c = 0.057$. Para amplitud de la onda bomba nula, las soluciones de la ecuación (5.90) se muestran en la Fig. 19(a). Los cruces (S_+, p_+) y (S_-, p_-) han desaparecido, y un nuevo cruce (S_+, e_-) está presente. Hay 5 acoplamientos en este caso, como se indica en la figura. [En realidad, el cruce (S_+, p_-) no conducirá a un acoplamiento a menos que v_s sea ligeramente menor; examinaremos esto luego.] En las Figs. 19(b) ($\alpha = 0$) y 19(c) ($\alpha = 0.001$) vemos el cruce y luego el acoplamiento entre (S_+, e_-) , respectivamente. Como en todos los procesos de decaimiento anteriores, sólo uno de los modos electro-acústicos participa en el acoplamiento. En las Figs. 19(d) y 19(e) mostramos el cruce y la brecha en el origen, respectivamente. S_+ es la línea más a la derecha en la figura, y la inestabilidad modulacional es resonante, involucrando un modo

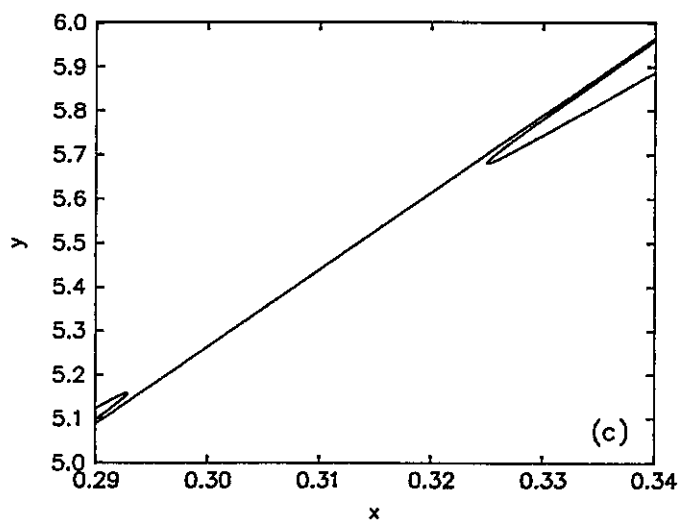
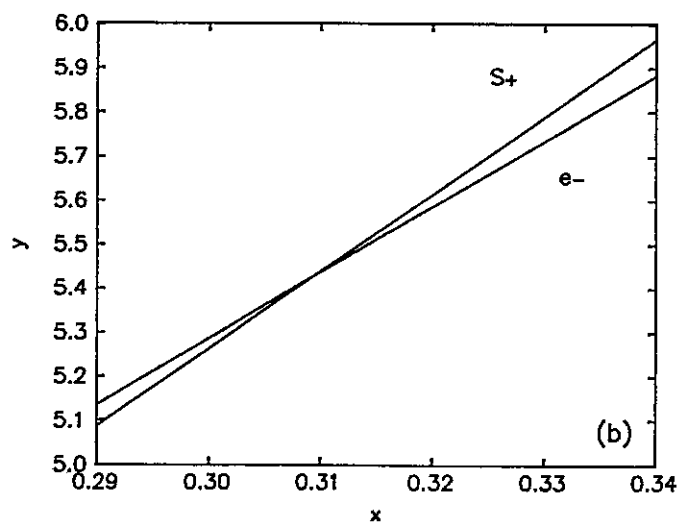
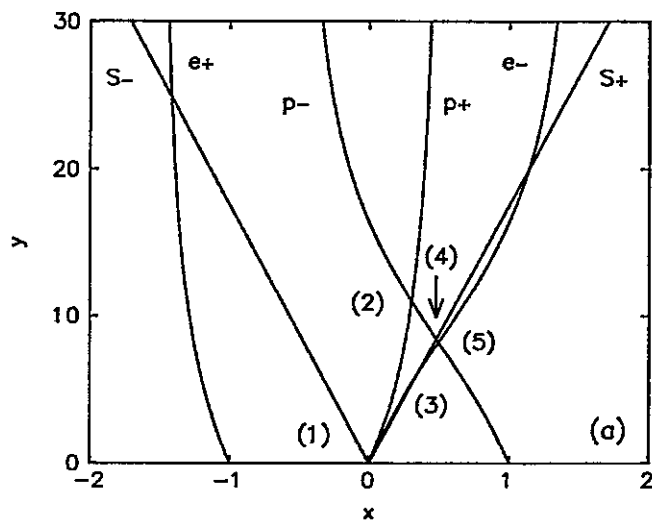


Fig. 19. Igual que la Fig. 17, para $\omega_p/\omega_{cp} = 10$ y $v_s/c = 0.057$. (a) $\alpha = 0$.
 (b) Detalle del cruce (S_+ , e_-) en la Fig. 19(a). (c) Igual que la Fig. 19(b),
 para $\alpha = 0.001$.

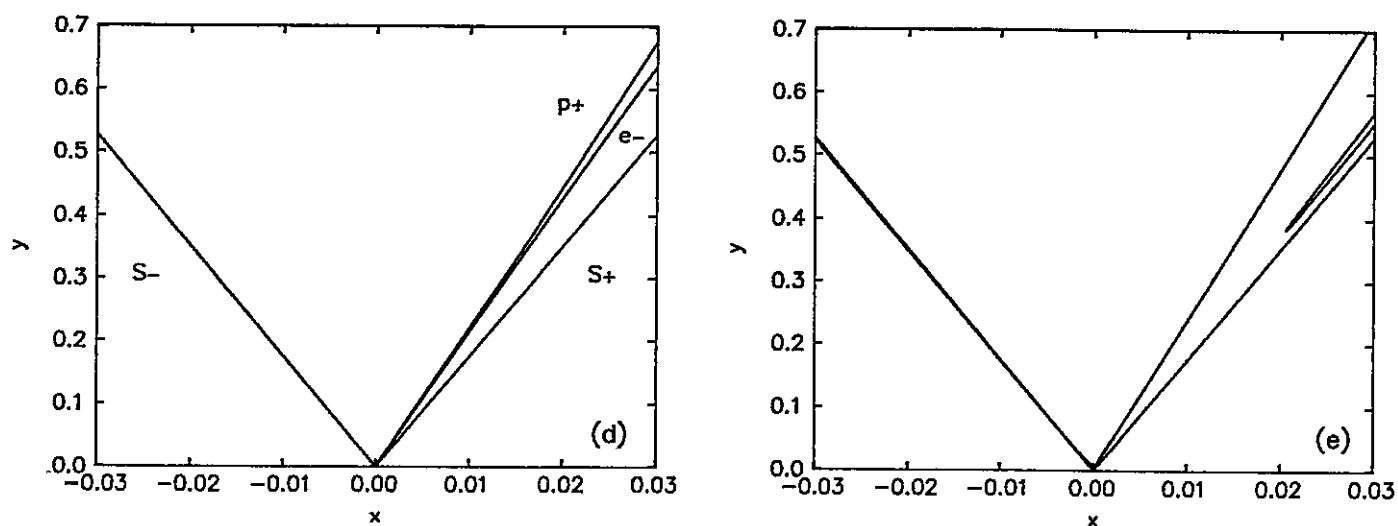


Fig. 19. (Continuación.) (d) Ampliación del origen de la Fig. 19(a). (e) Igual que la Fig. 19(d), para $\alpha = 0.01$.

electro-acústico y e_- . Hemos observado este mismo comportamiento para otros conjuntos de parámetros: cuando v_s es tan baja que S_+ está a la izquierda de p_+ y e_- , la inestabilidad modulacional es no resonante [Fig. 18(d)]; cuando v_s es tan alta que S_+ está a la derecha de p_+ y e_- , la inestabilidad modulacional es resonante [Fig. 19(e)].

Luego, en las Figs. 20(a)–20(c), mostramos las otras dos posibles brechas en la Fig. 19(a), entre (p_+, p_-) y (e_-, p_-) . La Fig. 20(a) muestra la zona relevante para $\alpha = 0$. En la Fig. 20(b) $\alpha = 0.005$, y la brecha entre (e_-, p_-) se ha desarrollado, mientras que el cruce (S_+, p_-) no ha dado origen a una brecha. En la Fig. 20(c) $\alpha = 0.01$, y la brecha (p_+, p_-) es ahora visible también.

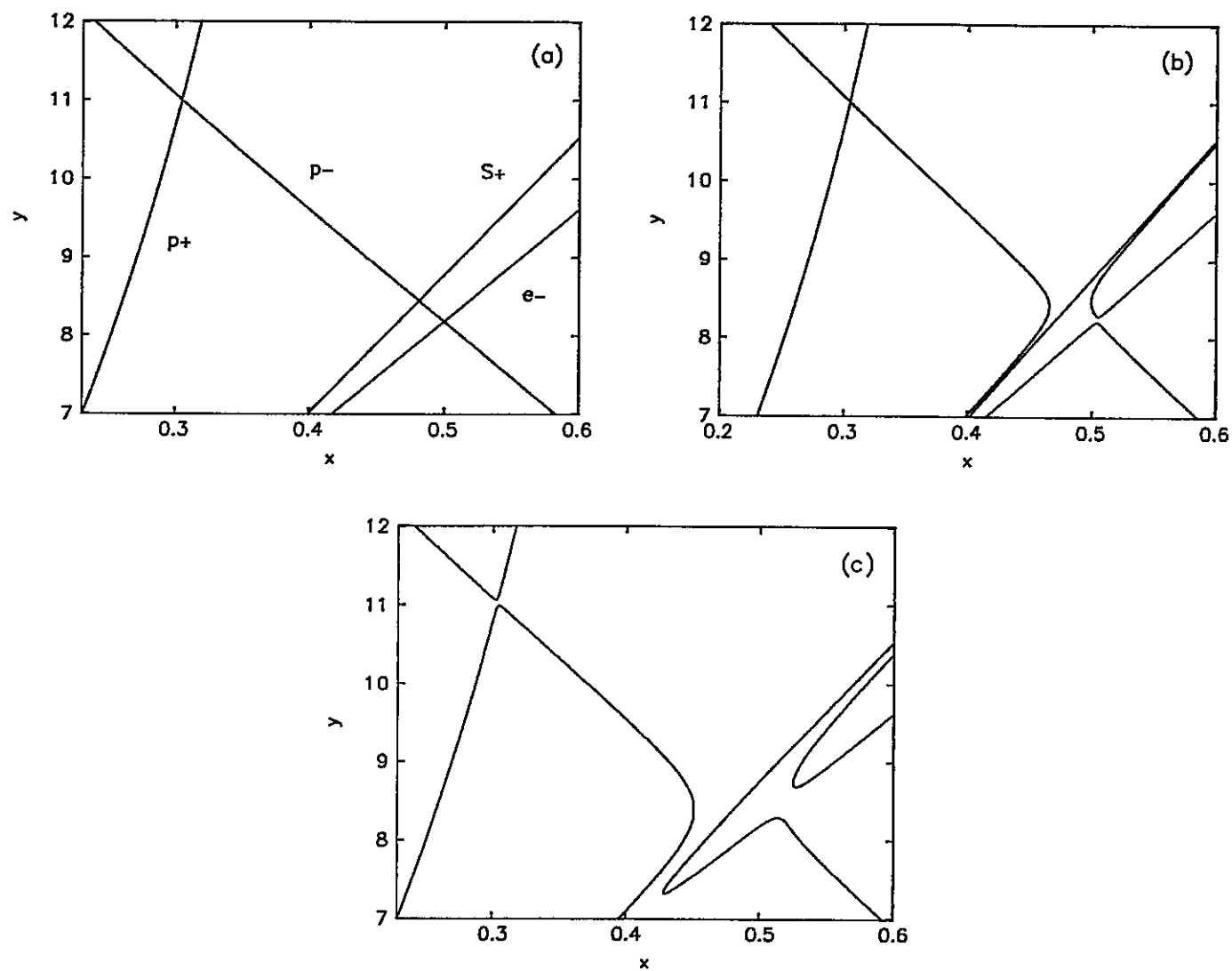


Fig. 20. Igual que la Fig. 19, mostrando en detalle los tres cruces que involucran a p_- . (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.005$. (c) $\alpha = 0.01$.

El cruce (S_+, p_-) exhibe un comportamiento peculiar a medida que se desplaza a lo largo de p_- (es decir, a medida que v_s varía). De hecho, en la Fig. 18(b) hay una brecha en este cruce, y en la Fig. 20(c) no. Revisemos la evolución de dicho cruce en las Figs. 21(a)–21(f). Ya hemos mostrado en la Fig. 18(b) que da un acoplamiento entre un modo electro-acústico y p_- , cuando $v_s/c = 0.01$. En la Fig. 21(a) v_s ha sido aumentada, pero el cruce (S_+, p_-) aún está a la izquierda del cruce (p_+, p_-) . Cuando $\alpha \neq 0$, Fig. 21(b), aún se desarrolla una brecha, pero ahora los dos modos electro-acústicos están involucrados. En la Fig. 21(c) v_s se aumenta aún más, y el cruce (S_+, p_-) está a la derecha del cruce (p_+, p_-) . En estas condiciones, cuando $\alpha = 0.01$, Fig. 21(d), se desarrolla una brecha, con ambos modos electro-acústicos involucrados. Finalmente, las Figs. 21(e) y 21(f) muestran esta brecha justo antes de cerrarse ($v_s/c = 0.037$) e inmediatamente después de cerrarse ($v_s/c = 0.038$). Permanece cerrada para valores más altos de v_s [Fig. 20(c), para $v_s/c = 0.057$]. El cruce (S_+, p_-) ha mostrado un comportamiento similar para los diversos conjuntos de parámetros que analizamos. La transición entre una brecha y un avoiding crossing siempre ocurre cuando este cruce está entre (p_+, p_-) y (e_-, p_-) .

Ahora aumentamos la velocidad del sonido a $v_s/c = 0.1$. La Fig. 22(a) corresponde a $\alpha = 0$. Notamos que los cruces (S_+, e_-) ya no existen, y sólo tres acoplamientos son posibles. Éstos se muestran en la Fig. 22(b) para $\alpha = 0.08$. De la Fig. 22(b) se sigue que hay dos acoplamientos no resonantes, (p_+, p_-) y (e_-, p_-) , y una inestabilidad modulacional resonante entre (S_+, e_-) en el origen.

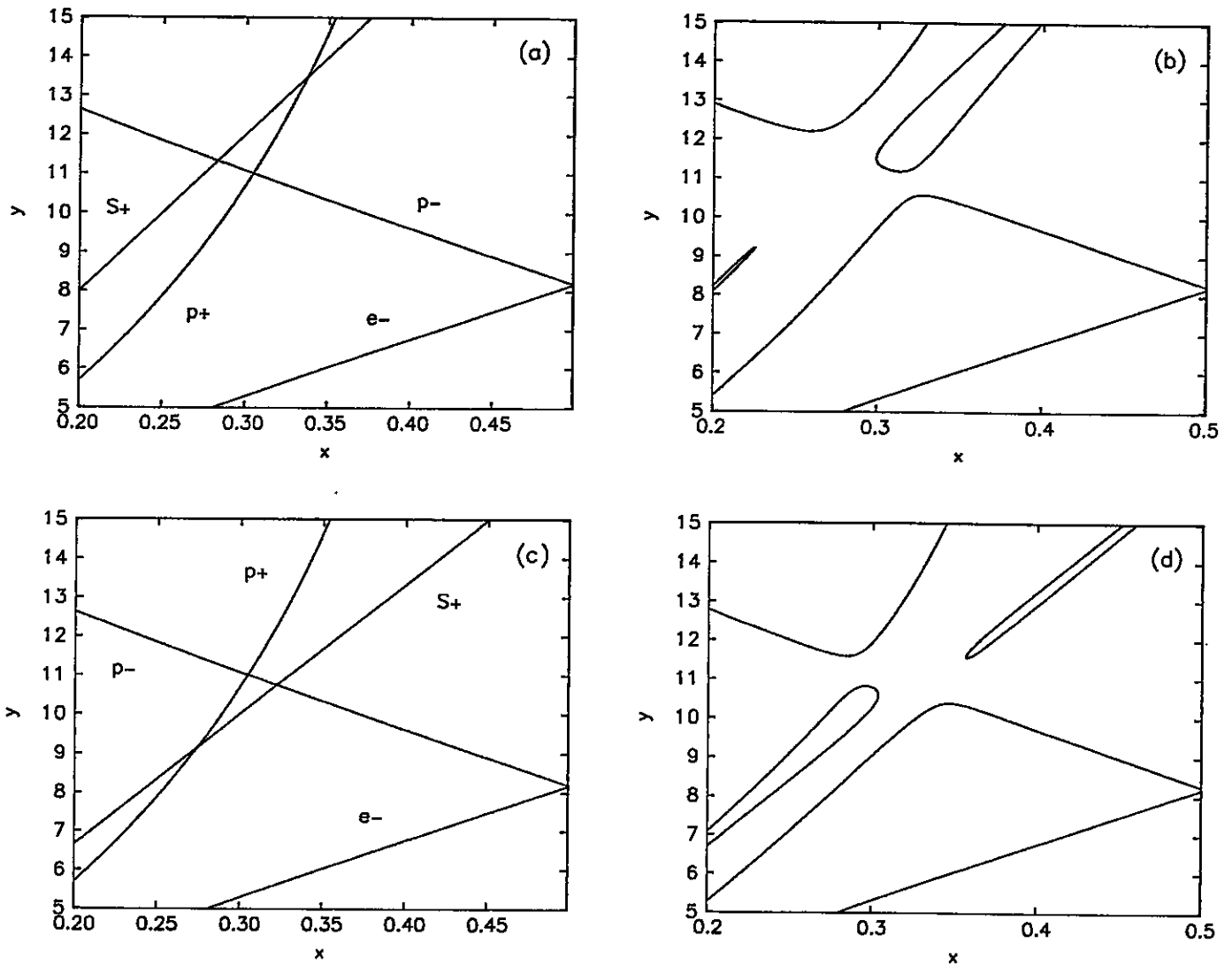


Fig. 21. Igual que la Fig. 20(a). (a) $v_s/c = 0.025, \alpha = 0$. (b) $v_s/c = 0.025, \alpha = 0.01$. (c) $v_s/c = 0.03, \alpha = 0$. (d) $v_s/c = 0.03, \alpha = 0.01$.

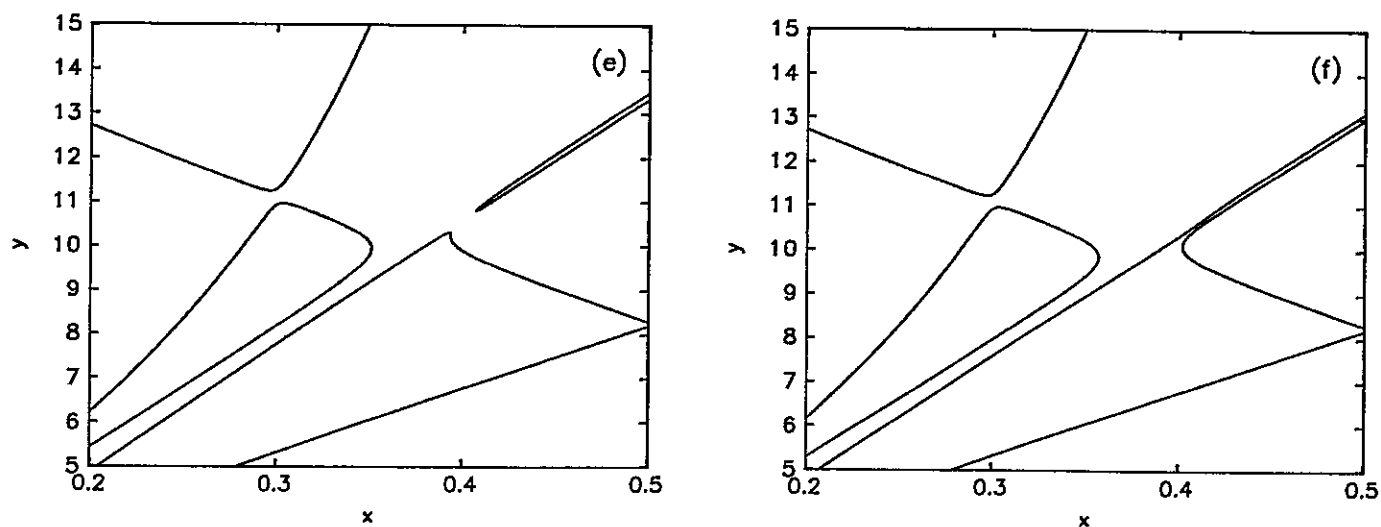


Fig. 21. (Continuación.) (e) $v_s/c = 0.037$, $\alpha = 0.01$. (f) $v_s/c = 0.038$, $\alpha = 0.01$.

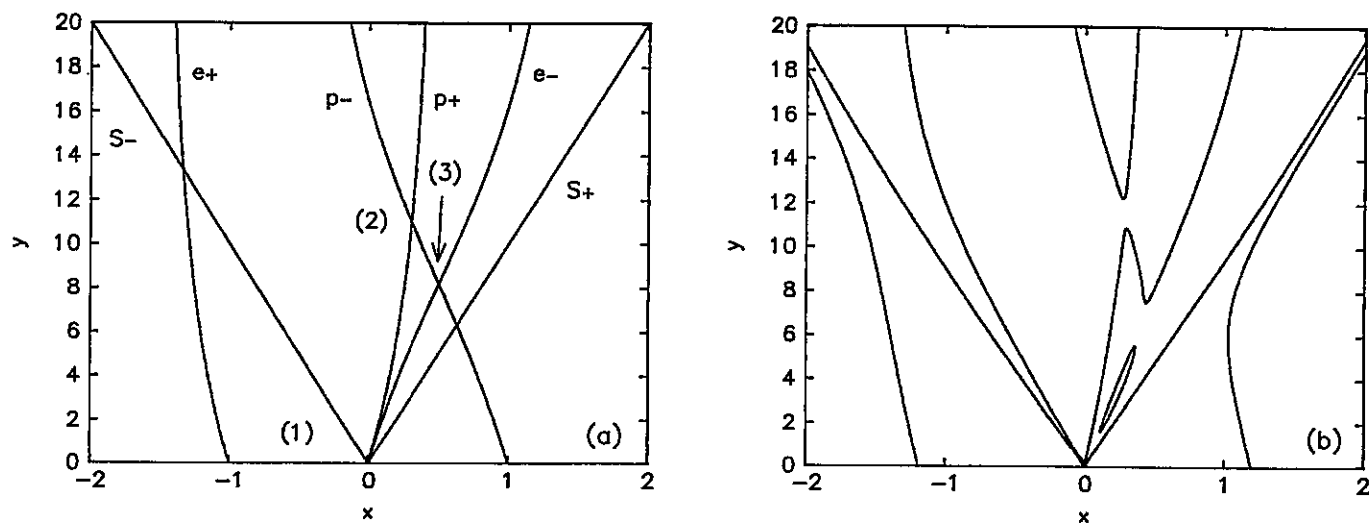


Fig. 22. Igual que la Fig. 17, para $\omega_p/\omega_{cp} = 10$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$.
(b) $\alpha = 0.08$.

En la Fig. 23(a) hemos reducido la frecuencia de plasma a $\omega_p/\omega_{cp} = 0.1$. Los otros parámetros son $v_s/c = 0.1$, $\alpha = 0$. Cuando ω_p/ω_{cp} disminuye, las ramas parabólicas D_{\pm} se acercan, y por tanto los cruces son los mismos que en la Fig. 17(a), más un nuevo cruce, entre (D_+, p_-) . En la Fig. 23(a) hemos seleccionado una región donde todos los cruces que conducen a acoplamiento de ondas están presentes. Los acoplamientos son los esperados, a saber, una inestabilidad de decaimiento ordinaria entre (S_+, p_-) [Fig. 23(b)], una inestabilidad modulacional no resonante entre (e_-, p_+) [Fig. 23(c)], y un acoplamiento no resonante entre (e_-, p_-) [Fig. 23(d)].

La única nueva característica es la ausencia de una brecha en el cruce (p_+, p_-) . Para los otros valores de ω_p/ω_{cp} que hemos estudiado, este cruce siempre condujo a acoplamiento si v_s es suficientemente baja. Éste es el caso para $\omega_p/\omega_{cp} = 1$ y $\omega_p/\omega_{cp} = 10$, donde desarrolla una brecha para $v_s/c \leq 0.48$ y $v_s/c \leq 0.42$, respectivamente. Hacemos notar que también hemos examinado los casos intermedios $\omega_p/\omega_{cp} = 2$ y $\omega_p/\omega_{cp} = 0.5$. En el primer caso, $\omega_p/\omega_{cp} = 2$, el umbral ocurre para $v_s/c \simeq 0.47$, y en el segundo caso, $\omega_p/\omega_{cp} = 0.5$, ocurre para $v_s/c \simeq 0.53$. Estos resultados sugieren que, mientras menor sea ω_p/ω_{cp} , es mayor el valor de v_s sobre el cual (p_+, p_-) deja de ser inestable. Sin embargo, para $\omega_p/\omega_{cp} = 0.1$ [Fig. 23] nunca hay una brecha en este cruce, incluso para valores de v_s/c tan pequeños como 10^{-6} .

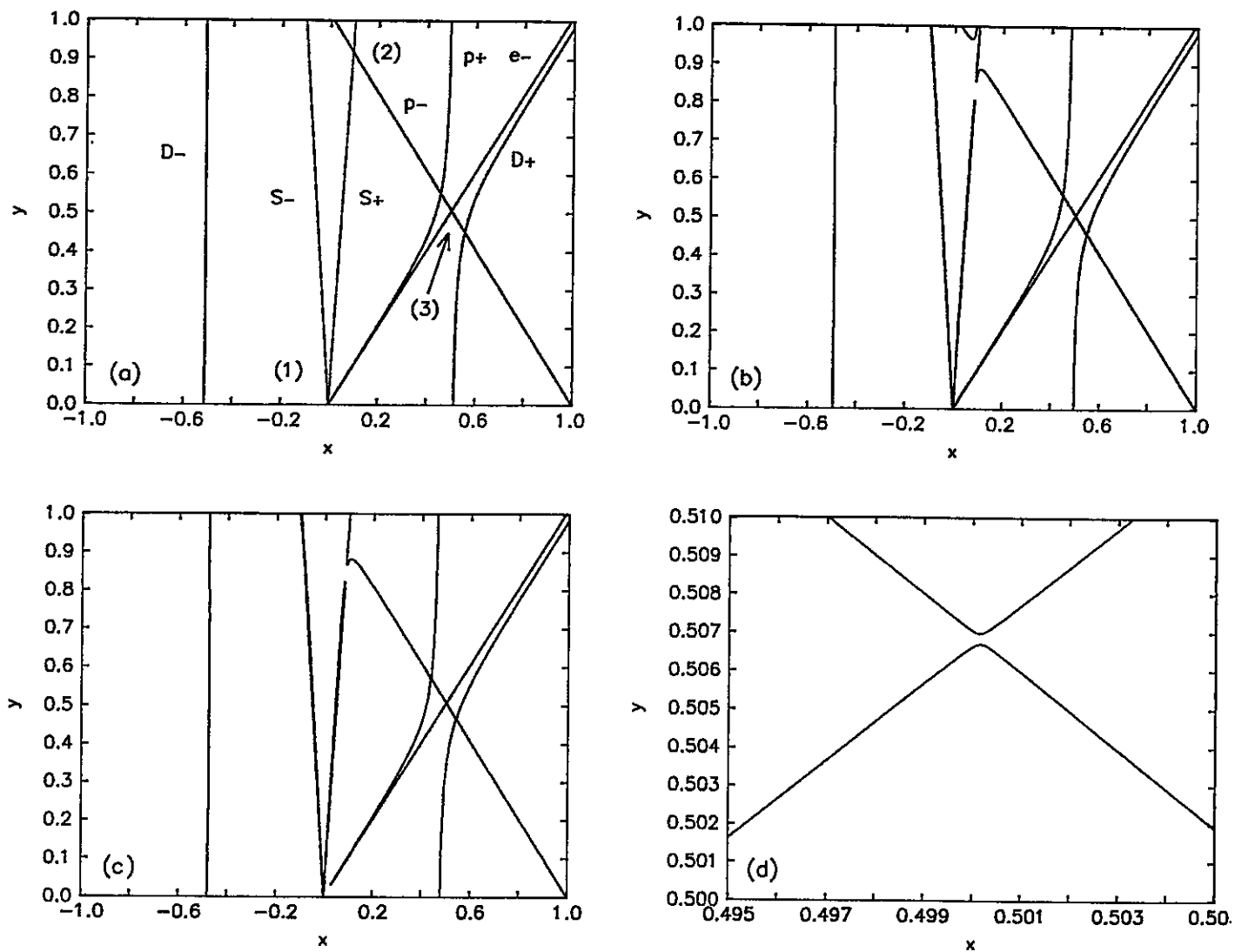


Fig. 23. Igual que la Fig. 17, para $\omega_p/\omega_{cp} = 0.1$ y $v_s/c = 0.1$. (a) $\alpha = 0$.
 (b) $\alpha = 0.2$. (c) $\alpha = 0.3$. (d) Ampliación de la región $x \approx 0.5$ e $y \approx 0.5$ de
 la Fig. 23(c).

Capítulo 7

Conclusiones

Hemos estudiado los decaimientos paramétricos de ondas electromagnéticas lineal y circularmente polarizadas, de frecuencia $\omega_0 > 0$ y número de onda $k_0 > 0$, en un plasma de electrones y positrones. Para polarización circular, además, consideramos propagación tanto en un plasma no magnetizado como en la dirección de un campo magnético externo constante. Se han tenido en cuenta todos los efectos relevantes, tales como generación de armónicos (presente sólo para polarización lineal), la fuerza ponderomotriz y efectos relativistas en el movimiento de las partículas en el campo de la onda.

Hemos comparado nuestro método con el de la Ref. [29]. Hemos demostrado que el tratamiento de ésta tiene varios errores como, por ejemplo, despreciar la temperatura en la componente longitudinal de la ecuación de fuerza [ver ecuaciones (2.31), (4.21), (4.22)], y el procedimiento no lineal que sigue es también erróneo en diversos niveles, como se discute en detalle en las Secciones 5.1 y 5.2.

Encontramos una serie de inestabilidades en los sistemas considerados:

- (a) Inestabilidades resonantes. Se trata de inestabilidades de decaimiento, en que la bomba decae en un modo electro-acústico y una onda electromagnética, o inestabilidades de batimiento, en las cuales un modo electro-acústico se acopla

con la bomba para generar una onda electromagnética. Estos decaimientos resonantes son efectos de orden α^2 .

- (b) Inestabilidades esencialmente electromagnéticas. En este caso la bomba decae en dos ondas electromagnéticas. Es un decaimiento no resonante, mediado por oscilaciones que no son modos normales del sistema. Este efecto es de orden superior, α^4 .

Cada una de las inestabilidades anteriores corresponde, a su vez, a brechas de la relación de dispersión en el plano ω - k . Se presentan dos situaciones:

- (a) La brecha no se extiende hasta el origen ($\omega_0 \gtrsim |\omega|$, $k_0 \gtrsim |k|$), en cuyo caso decimos que se trata de una inestabilidad de decaimiento.
- (b) La brecha se extiende hasta el origen ($\omega_0 \gg |\omega|$, $k_0 \gg |k|$), lo que constituye una inestabilidad modulacional.

Dependiendo de los estados de polarización considerados, y los parámetros explorados, aparecen los diversos tipos de inestabilidades.

1. Polarización lineal.

Para $v_s < c^2/v_p = c^2 k_0/\omega_0$, donde v_s y v_p son las velocidades de fase del modo electro-acústico y de la onda electromagnética, respectivamente [ver Figs. 9(a)–9(d)], hay varias inestabilidades: una inestabilidad de decaimiento ordinaria y dos inestabilidades modulacionales, una de ellas esencialmente electromagnética. Es importante notar que, para pequeñas frecuencias de la onda bomba, la inestabilidad modulacional electromagnética tiene un rango de

frecuencias muy corto [ver Figs. 9(d) y 10(d)]. Sin embargo, el rango de frecuencias crece al aumentar las frecuencias de la onda bomba [ver Figs. 11(d) y 12(d)].

En el caso en que $v_s > c^2/v_p = c^2k_0/\omega_0$ [ver Figs. 10(a)–10(e)], hay dos inestabilidades. Ambas son del tipo modulacional. Al aumentar la amplitud de la onda bomba, la primera en aparecer es la no resonante entre (D_-, D_+) . Al continuar aumentando la intensidad de la onda bomba una nueva inestabilidad se desarrolla, en la cual la onda bomba decae en un modo electro-acústico que se propaga hacia adelante y una sideband wave [ver Fig. 10(e)].

2. Polarización circular.

Aquí también se dan las dos situaciones características anteriores: cuando la velocidad del sonido satisface $v_s/c < c/v_p$ y cuando $v_s/c > c/v_p$. En el primer caso hay una inestabilidad de decaimiento ordinaria entre D_- y S_+ y varias inestabilidades modulacionales. Dos de ellas son inestabilidades resonantes, y la otra es una inestabilidad esencialmente electromagnética no resonante. En el segundo caso, hay sólo inestabilidades modulacionales. Una es una inestabilidad modulacional resonante involucrando S_+ y D_- , y la otra es una inestabilidad modulacional no resonante.

3. Polarización circular, con campo magnético ambiente.

Como en los casos anteriores, existen diversas inestabilidades, tanto resonantes como no resonantes. Dependiendo de la velocidad del sonido y de la razón ω_p/ω_c , hay dos tipos de inestabilidades modulacionales. Para $v_s/c \ll 1$ la inestabilidad modulacional es no resonante y da origen a dos sideband waves hijas. Para valores más grandes de v_s/c , y si ω_p/ω_c es suficientemente alto,

como, por ejemplo, el caso de la Fig. 19(a), la inestabilidad modulacional es resonante e involucra una onda electro-acústica propagándose hacia adelante y una sideband wave.

El sistema es más sensible a la amplitud de la onda bomba para $\omega_p/\omega_c \gg 1$. Al disminuir este cociente, se requieren amplitudes cada vez mayores para desestabilizar el sistema.

En nuestro trabajo, por primera vez, se estudian los decaimientos paramétricos en un plasma de electrones y positrones teniendo en cuenta todas las contribuciones a la corrección relativista de orden más bajo, incluyendo los efectos no lineales de la fuerza ponderomotriz y la generación de armónicos. Así, hemos obtenido expresiones que incluyen en forma consistente, a este orden, todos los efectos no lineales, tanto para las relaciones de dispersión de la onda bomba como para las relaciones de dispersión no lineales. Estas nuevas relaciones de dispersión no lineales, a su vez, nos revelan nuevos decaimientos del sistema. El método gráfico que empleamos para estudiar estas relaciones de dispersión, además, nos permite no sólo reconocer fácilmente los decaimientos, sino también establecer las oscilaciones involucradas en el acoplamiento correspondiente.

Si bien es cierto hemos sido cuidadosos en la apropiada introducción de efectos relativistas, no hemos incluido efectos *térmicos* relativistas [51]. Por lo tanto, nuestro tratamiento sólo es válido para $v_s/c \ll 1$. Las Figs. 10, 11(e) y 14, pues, han de servir sólo como referencia para examinar los casos en que v_s/c es suficientemente alto para que la pendiente de S_+ sea menor que la pendiente de D_{\pm} en el origen.

Es interesante notar que en todos los casos que hemos investigado, es decir, el caso de una onda linealmente [66, 67] o circularmente polarizada en un plasma no magnetizado [75], y ondas circularmente polarizadas en un plasma magnetizado [76,

77, 78], se presentan inestabilidades modulacionales. Por tanto, aunque la Ref. [25] no es correcta, los autores pueden tener razón al suponer que la radiación proveniente de estrellas de neutrones y núcleos galácticos activos es automodulada. Estos resultados son también consistentes con el análisis en las Refs. [51] y [52].

El caso particular de magnetósferas de pulsares corresponde a una situación en la cual $\omega_p/\omega_c \ll 1$, debido a la existencia de campos magnéticos muy fuertes. Este caso ha sido analizado en las Figs. 23(a) a 23(d). En general, el tipo de inestabilidades presentes es el mismo que para valores más elevados de ω_p/ω_c , excepto que los rangos de inestabilidades son menores, y se necesitan amplitudes de la onda bomba mayores para gatillar las inestabilidades.

Finalmente, queremos resaltar el hecho de que nuestro tratamiento se basa en la teoría de fluidos. Por lo tanto, importantes efectos cinéticos como el amortiguamiento de Landau no aparecen en el modelo. Los efectos cinéticos pueden generar regiones de inestabilidad que acoten estos resultados y, dependiendo de la temperatura de los electrones y positrones, es posible que algunos de los modos de decaimiento no existan debido al amortiguamiento de Landau. Si la velocidad de fase del modo electro-acústico es aproximadamente igual a la velocidad térmica de los electrones, el argumento de la función de dispersión del plasma (ver, por ejemplo, [79]) se acerca a uno, y uno o ambos modos electro-acústicos pueden estar fuertemente amortiguados y, por lo tanto, dejan de ser modos normales del sistema. En este caso, las inestabilidades de decaimiento serán amortiguadas. Por tanto, una extensión natural de nuestro resultado debe incluir efectos cinéticos, efectos debidos a la individualidad de las partículas que constituyen el plasma.

Apéndice A

Las definiciones para la relación de dispersión (5.90) son las siguientes:

$$F_{1+} = I_+ + I_1 \left(\frac{H_{p++}}{D_p} + \frac{H_{e++}}{D_e} \right) + \frac{1}{2} I_2 \frac{H_{p0+}}{D_p} \quad (\text{A.1})$$

$$F_{1-} = -\frac{1}{2} I_1 \left(\frac{H_{p+-}}{D_p} + \frac{H_{e+-}}{D_e} \right) - \frac{1}{2} I_2 \frac{H_{p0-}}{D_p} \quad (\text{A.2})$$

$$F_{2+} = -\frac{1}{2} I_1 \left(\frac{H_{p-+}}{D_p} + \frac{H_{e-+}}{D_e} \right) + \frac{1}{2} I_2 \frac{H_{p0+}}{D_p} \quad (\text{A.3})$$

$$F_{2-} = I_- + I_1 \left(\frac{H_{p--}}{D_p} + \frac{H_{e--}}{D_e} \right) - \frac{1}{2} I_2 \frac{H_{p0-}}{D_p} \quad (\text{A.4})$$

$$I_+ = c^2 k_+^2 - \omega_+^2 \quad (\text{A.5})$$

$$I_- = c^2 k_-^2 - \omega_-^2 \quad (\text{A.6})$$

$$I_1 = \omega_p^2 \quad (\text{A.7})$$

$$I_2 = \omega_p^2 k k_0 c^2 \bar{\alpha}^2 \left[\eta_p \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_p^3 \right) + \eta_e \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_e^3 \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

$$D_j = [\omega_+(1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] \cdot \quad (\text{A.9})$$

$$\left\{ -[\omega_-^*(1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] S_j + \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right\}$$

$$- \omega_-^* \frac{1}{4} \alpha^2 \eta_j^2 \left[-S_j \omega_+ \alpha^2 \eta_j^2 + \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \left[\omega_+ \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 - \omega_-^*(1 + \alpha^2 \eta_j^2) + \omega_{cj} \right]$$

$$H_{j++} = \omega_+ \left\{ -S_j [\omega_-^* (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] + \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} k_0 k_+ c^2 \eta_j^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right)^2 \left[\omega_+ \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 - \omega_-^* (1 + \alpha^2 \eta_j^2) + \omega_{cj} \right]$$

$$H_{j+-} = \omega_-^* \left[-\omega_+ \alpha^2 \eta_j^2 S_j + \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right] \quad (\text{A.11})$$

$$+ \bar{\alpha}^2 c^2 k_0 k_-^* \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right)^2 \left[\omega_+ \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 - \omega_-^* (1 + \alpha^2 \eta_j^2) + \omega_{cj} \right]$$

$$H_{j-+} = \omega_+ \left\{ -\omega_-^* \alpha^2 \eta_j^2 S_j - \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$+ \bar{\alpha}^2 c^2 k_0 k_+ \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right)^2 \left[-\omega_-^* \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 + \omega_+ (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj} \right]$$

$$H_{j--} = \omega_-^* \left\{ -S_j [\omega_+ (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] - \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 c^2 k_0^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \right\} \quad (\text{A.13})$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \omega \frac{\omega_{cj}}{\omega_0} k_0 k_-^* c^2 \eta_j^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right)^2 \left[-\omega_-^* \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 + \omega_+ (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj} \right]$$

$$H_{j0+} = \omega_+ \left[\omega_-^* \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 + \omega_-^* (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj} \right] - \frac{k_+}{k_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\times \left\{ [\omega_+ (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] [\omega_-^* (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] - \omega_-^* \omega_+ \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 \right)^2 \right\}$$

$$H_{j0-} = \omega_-^* \left[\omega_+ \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 + \omega_+ (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj} \right] - \frac{k_-^*}{k_0} \eta_j \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^3 \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\times \left\{ [\omega_+ (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] [\omega_-^* (1 + \alpha^2 \eta_j^2) - \omega_{cj}] - \omega_-^* \omega_+ \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 \right)^2 \right\}$$

$$S_j = \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \eta_j^2 \right) - v_s^2 k^2 \quad (\text{A.16})$$

En estas expresiones hemos definido

$$\bar{\alpha} = \frac{eB}{mc^2 k_0}, \quad (\text{A.17})$$

es decir, igual que α en (4.10), para identificar los factores proporcionales a la amplitud de la onda bomba que estarían presentes en ausencia de efectos relativistas.

Referencias

- [1] V. Tsytovich y C. B. Wharton, *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion* **4**, 91 (1978).
- [2] P. K. Shukla, N. N. Rao, M. Y. Yu y N. L. Tsintsadze, *Phys. Rep.* **138**, 1 (1986).
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, Nueva York, 1973).
- [4] T. Tajima y T. Taniuti, *Phys. Rev. A* **42**, 3587 (1990).
- [5] P. J. Wiita, *Phys. Rep.* **123**, 117 (1985).
- [6] R. V. E. Lovelace, *Nature* **262**, 649 (1976).
- [7] A. P. Lightman y A. A. Zdziarski, *Astrophys. J.* **319**, 643 (1987).
- [8] M. A. Ruderman y P. G. Sutherland, *Astrophys. J.* **196**, 51 (1975).
- [9] J. Arons y E. T. Scharlemann, *Astrophys. J.* **231**, 854 (1979).
- [10] A. F. Cheng y M. A. Ruderman, *Astrophys. J.* **235**, 576 (1980).
- [11] J. G. Lominadze, G. Z. Machabeli y V. V. Usov, *Astrophys. Space Sci.* **90**, 19 (1983).
- [12] R. G. Greaves, M. D. Tinkle y C. M. Surko, *Phys. Plasmas* **1**, 1439 (1994).

- [13] H. Boehmer, M. Adams y N. Rynn, *Phys. Plasmas* **2**, 4369 (1995).
- [14] N. W. Ashcroft y N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
- [15] N. Tzoar y J. I. Gersten, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 1634 (1971).
- [16] N. Tzoar y J. I. Gersten, *Phys. Rev. B* **4**, 3540 (1971).
- [17] J. I. Gersten y N. Tzoar, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1650 (1971).
- [18] L. Stenflo y M. Y. Yu, *Phys. Rev. B* **7**, 1458 (1973).
- [19] N. L. Tsintsadze, *Phys. Scripta* **T30**, 41 (1990).
- [20] M. E. Gedalin, J. G. Lominadze, L. Stenflo y V. N. Tsytovich, *Astrophys. Space Sci.* **108**, 393 (1985).
- [21] S. Tamor, *Phys. Fluids* **16**, 1169 (1973).
- [22] J. J. Thomson, W. L. Kruer, S. E. Bodner y J. S. DeGroot, *Phys. Fluids* **17**, 849 (1974).
- [23] M. Y. Yu, P. K. Shukla y N. L. Tsintsadze, *Phys. Fluids* **25**, 1049 (1982).
- [24] J. F. Drake, P. K. Kaw, Y. C. Lee, G. Schmidt, C. S. Liu y M. N. Rosenbluth, *Phys. Fluids* **17**, 778 (1974).
- [25] A. C.-L. Chian y C. F. Kennel, *Astrophys. Space Sci.* **97**, 9 (1983).
- [26] U. A. Mofiz, U. DeAngelis y A. Forlani, *Phys. Rev. A* **31**, 951 (1985).
- [27] R. E. Kates y D. J. Kaup, *J. Plasma Phys.* **41**, 507 (1989).

- [28] R. E. Kates y D. J. Kaup, *J. Plasma Phys.* **42**, 521 (1989).
- [29] R. T. Gangadhara, V. Krishan y P. K. Shukla, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **262**, 151 (1993).
- [30] Dzh. G. Lominadze, G. Z. Machabeli, G. I. Melikidze y A. D. Pataraya, *Sov. J. Plasma Phys.* **12**, 712 (1986).
- [31] C. F. Kennel y R. Pellat, *J. Plasma Phys.* **15**, 335 (1976).
- [32] D. N. Baker, J. E. Borovsky, G. Benford y J. A. Eilek, *Astrophys. J.* **326**, 110 (1988).
- [33] C. Max y F. Perkins, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1731 (1972).
- [34] F. B. Rizzato, *J. Plasma Phys.* **40**, 289 (1988).
- [35] F. B. Rizzato, R. S. Schneider y D. Dillenburg, *Phys. Lett.* **133**, 59 (1988).
- [36] J. Gil, *Astrophys. J.* **308**, 691 (1986).
- [37] J. A. Gil y J. K. Snakowski, *Astron. Astrophys.* **234**, 237 (1990).
- [38] J. A. Gil y J. K. Snakowski, *Astron. Astrophys.* **234**, 269 (1990).
- [39] D. S. Heeschen, Th. Krichbaum, C. J. Schalinski y A. Witzel, *Astron. J.* **94**, 1493 (1987).
- [40] A. Quirrenbach, en *Meeting on Variability of Active Galactic Nuclei*, editado por H. R. Miller y P. J. Wiita (Cambridge University Press, Cambridge, 1990), pág. 165.
- [41] T. V. Smirnova, *Sov. Astron. Lett.* **14**, 20 (1988).

- [42] M. F. Curtis, *The Theory of Neutron Stars Magnetospheres* (University of Chicago Press, Chicago, 1991).
- [43] A. Hewish, *Ann. Rev. Astron. Ap.* **8**, 265 (1970).
- [44] T. V. Smirnova, V. A. Soglasnov, M. V. Popov y A. Yu. Novikov, *Sov. Astron.* **30**, 51 (1986).
- [45] J. M. Cordes y T. H. Hankins, *Astrophys. J.* **218**, 484 (1977).
- [46] A. C.-L. Chian, en *The Magnetospheric Structure and Emission Mechanisms of Radio Pulsars, Proceedings IAU 128, 1990, Lagów*, editado por T. H. Hankins, J. M. Rankin y J. A. Gil (Pedagogical University Press, Zielona Góra, 1990), págs. 356–363.
- [47] V. I. Karpman y E. M. Krushkal', *Sov. Phys. JETP* **28**, 277 (1969).
- [48] V. I. Karpman, *JETP Lett.* **6**, 277 (1967).
- [49] P. K. Shukla, *Astrophys. Space Sci.* **114**, 381 (1985).
- [50] U. A. Mofiz, U. DeAngelis y A. Forlani, *Plasma Phys. Control. Fusion* **26**, 1099 (1984).
- [51] F. T. Gratton, G. Gnavi, R. M. O. Galvão y L. Gomberoff, *Phys. Rev. E* **55**, 3381 (1997).
- [52] L. Gomberoff y R. M. O. Galvão, *Phys. Rev. E* **56**, 4574 (1997).
- [53] J. L. Anderson, *Principles of Relativity Physics* (Academic Press, Nueva York, 1973), segunda edición.

- [54] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Vol. 6 de *Course of Theoretical Physics* (Pergamon Press, Bristol, 1959).
- [55] P. Kaw y J. Dawson, *Phys. Fluids* **13**, 472 (1970).
- [56] L. Stenflo, *Phys. Scripta* **21**, 831 (1980).
- [57] C. E. Max, *Phys. Fluids* **16**, 1277 (1973).
- [58] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon, Oxford, 1961).
- [59] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica*, Vol. 1 de *Curso de Física Teórica* (Reverté, Bilbao, 1965).
- [60] M. Abramowitz y I. A. Stegun, editores, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, Nueva York), pág. 728, 9^a edición.
- [61] K. Nishikawa y M. Wakatani, *Plasma Physics. Basic Theory with Fusion Applications* (Springer-Verlag, Berlín, 1994), Vol. 8 de *Atoms and Plasmas*, Cap. 8, segunda edición.
- [62] K. Nishikawa y C. S. Liu, en *Advances in Plasma Physics*, editado por A. Simon y W. B. Thompson (Wiley, New York, 1976), Vol. 6, Cap. 2, págs. 3-81.
- [63] M. Longtin y B. U. Ö. Sonnerup, *J. Geophys. Res.* **91**, 6816 (1986).
- [64] C. Max y F. Perkins, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1342 (1971).
- [65] V. Jayanti y J. V. Hollweg, *J. Geophys. Res.* **98**, 13247 (1993).

- [66] L. Gomberoff y V. Muñoz, en *Proceedings of Sixth Brazilian Plasma Astrophysics Workshop, 1996, Águas de Lindóia*, Sociedad Brasileña de Física (1996), págs. 132-136.
- [67] L. Gomberoff, V. Muñoz y R. M. O. Galvão, *Phys. Rev. E* **56**, 4581 (1997).
- [68] J. V. Hollweg, R. Esser y V. Jayanti, *J. Geophys. Res.* **98**, 3491 (1993).
- [69] L. Gomberoff, F. T. Gratton y G. Gnavi, *J. Geophys. Res.* **99**, 14 717 (1994).
- [70] R. M. O. Galvão, G. Gnavi, L. Gomberoff y F. T. Gratton, *Plasma Phys. Control. Fusion* **36**, 1679 (1994).
- [71] L. Gomberoff, F. T. Gratton y G. Gnavi, *J. Geophys. Res.* **100**, 1871 (1995).
- [72] L. Gomberoff, F. T. Gratton y G. Gnavi, *J. Geophys. Res.* **100**, 17 221 (1995).
- [73] G. Gnavi, R. M. O. Galvão, F. T. Gratton y L. Gomberoff, *Phys. Rev. E* **54**, 4112 (1996).
- [74] D. W. Forslund, J. M. Kindel y E. L. Lindman, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 249 (1972).
- [75] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Rev. E* **58**, 994 (1998).
- [76] L. Gomberoff y V. Muñoz, en *Proceedings of VII Latin American Workshop on Plasma Physics, Venezuela* (por aparecer).
- [77] L. Gomberoff y V. Muñoz, *Astrophys. Space Sci.* (por aparecer).
- [78] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* (enviado).
- [79] S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics* (W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1973).