

UCH-FC
Doc-F
L 864
C 1



Ondas no lineales en plasmas relativistas de electrones y positrones

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Rodrigo Alonso López Herrera

Septiembre, 2013

Directores de Tesis: **Dr. J. Alejandro Valdivia**
Dr. Víctor Muñoz



FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Rodrigo Alonso López Herrera

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 12 de Septiembre de 2013.

Directores de Tesis

Dr. J. Alejandro Valdivia

Dr. Víctor Muñoz

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Jaime Araneda

Dr. Adolfo Figueroa-Viñas

Dr. Rodrigo Soto

Dr. Benjamín Toledo



*A mis padres,
cuyo ejemplo y amor
han iluminado este camino.*

BIOGRAFÍA



Nací el 20 de junio de 1986 en el seno de la familia formada por Juan y Edith, la que ya poseía 2 miembros, Cristian y Leonardo, y a la que años después se unieron Ignacio y Camila, formando así una gran familia de 7 miembros. Parte de mi enseñanza básica la viví en el colegio Complejo Educacional Maipú, donde cursé hasta el cuarto año básico, y luego en el Liceo Juan Bosco, donde estuve desde quinto básico hasta terminar mis estudios en cuarto medio. Fue en este colegio donde conocí a mis dos grandes amigos, Mario y Félix, con quienes he compartido desde entonces.

Ingresé a estudiar Licenciatura en Física en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile el año 2005, lugar donde conocí grandes personas, hice buenos amigos y he vivido importantes momentos. Es en este lugar donde conocí a Carola, quien es hoy mi compañera de vida y quien me ha apoyado durante todo este proceso. El año 2009 ingresé al programa de Doctorado en Física de la Universidad de Chile, del cual estoy a un paso de graduarme.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia quienes han sido el pilar fundamental en mi vida. A mis padres, Edith y Juan, quienes siempre creyeron en mí e hicieron el máximo de los esfuerzos por entregarnos, a mí y a mis hermanos, la mejor educación posible. Por sus sabios consejos, sus valores y enseñanzas, estoy agradecido y orgulloso de tenerlos. A mis hermanos, por el cariño que sólo los hermanos saben dar y por los gratos momentos de la infancia. A Cristian por haber sido siempre un gran ejemplo y cuyos éxitos nos han marcado el camino. A Leonardo, por ser un modelo a seguir, estar siempre dispuesto a ayudarme y con una paciencia tremenda, y además ser quien motivó mi inclinación por las ciencias. A Ignacio por su espíritu y fortaleza, dignas de imitar. A Camila por su cariño a pesar de todo y su enorme talento. Y a los miembros que se han ido sumando a esta familia, a Blanca y María Eugenia.

Un especial agradecimiento a Carola, mi compañera y gran amor, quien me ha acompañado pacientemente durante todo este proceso, brindándome todo su apoyo y amor incondicional, sin el cual nada de esto hubiese sido posible. Por siempre creer en mí, por tener siempre las palabras precisas para animarme en los momentos difíciles, por soportarme en los momentos de estrés, en fin, por ser la hermosa persona que es y que logra sacar lo mejor de mí. También quiero agradecer a la familia de Carola, quienes me han acogido como uno más de los suyos.

Agradezco a mis tutores, Juan Alejandro Valdivia y Víctor Muñoz, por toda su ayuda a lo largo de estos años, por tener siempre la mejor disposición, por confiar en mí y por su constante preocupación, siempre queriendo lo mejor para mí y mi futuro, muchas gracias. Quiero agradecer también a Felipe Asenjo, quien fue un miembro fundamental en este equipo y me ayudó con gran parte de esta tesis. A los miembros de esta comisión por aceptar ser parte de ésta y por todos sus comentarios, los que

han ayudado a mejorar esta tesis.

Un agradecimiento especial al Dr. Adolfo Figueroa-Viñas por su hospitalidad y por todas sus enseñanzas durante mi pasantía en NASA, las cuales fueron esenciales para el desarrollo de esta tesis.

A mis amigos de toda la vida, Mario y Felix, quienes son casi como hermanos, por compartir innumerables momentos y haber estado conmigo en las buenas y en las malas, y a sus parejas, Carolina y Alejandra. A los amigos que hice durante estos años de universidad, Nicole Miller, Luciano Del Valle, Nicolás Verschueren, Diego Cohen, Felipe González; a mis amigos y compañeros de oficina a lo largo de todos estos años, Pablo Moya, Macarena Domínguez, Max Ramírez, Patricio L'Huissier, Roberto Navarro, Macarena Muñoz, Denisse Pastén, Varinia Bernales, Felipe Valencia, Francisco Castillo, María José Tapia, Natalia Gallo, Rafael González, Felipe Torres, Francisco Muñoz; y a la secretaria del departamento de Física, Vicky Alcaíno.

A las fuentes de financiamiento (además de mis padres) que han permitido mi estancia en el programa de doctorado. A la beca de ayudante de laboratorio del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. A CONICYT por la Beca Nacional de Doctorado No. 21100839, la beca de estancias cortas en el extranjero No. 29110076, la beca de asistencia a congresos nacionales No. 81120408 y al sistema Becas Chile por la beca de pasantía doctoral No. 75120086, que permitió mi estadía en el Centro de Vuelo Espacial Goddard de NASA.

Índice

Resumen	IX
Abstract	X
1. Introducción	1
2. Teoría de fluidos para plasmas relativistas	8
2.1. Descripción covariante de las ecuaciones de fluido	9
2.2. Descripción vectorial de las ecuaciones de fluido	10
3. Onda transversal circularmente polarizada	14
3.1. Ecuaciones básicas	15
3.2. Análisis numérico de la relación de dispersión	19
3.3. Resumen	21
4. Decaimientos paramétricos	23
4.1. Onda bomba	24
4.2. Relación de dispersión para los decaimientos paramétricos	25
4.3. Análisis numérico de la relación de dispersión	31
4.4. Conclusiones	46

5. Automodulación de ondas de Alfvén en plasmas fuertemente magnetizados	48
5.1. Ecuaciones no lineales	49
5.1.1. Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)	49
5.1.2. Ecuación no lineal de Schrödinger (NLS)	51
5.1.3. Potencial de Sagdeev	54
5.2. Onda circularmente polarizada	56
5.3. Plasma fuertemente magnetizado	57
5.4. Zona normal de la rama de Alfvén	60
5.4.1. Ecuación no lineal de Schrödinger para la amplitud de la onda	60
5.4.2. Inestabilidad modulacional	62
5.5. Zona anómala de la rama de Alfvén	67
5.5.1. Relación de dispersión	67
5.5.2. Ecuación no lineal de Schrödinger para la amplitud de la onda	68
5.6. Resumen	72
6. Simulaciones de partículas	73
6.1. Simulaciones <i>Particle in cell</i> (PIC)	76
6.1.1. Integración de las ecuaciones de movimiento	77
6.1.2. Integración de los campos electromagnéticos	79
6.1.3. Condición de Courant	80
6.1.4. Asignación de las densidades de carga y corriente	81
6.1.5. Corrección del campo eléctrico longitudinal	85
6.1.6. Normalización	86
6.2. Relación de dispersión	87

6.3. Decaimientos paramétricos	92
6.3.1. Dependencia de la temperatura	102
6.4. Estructuras localizadas	110
6.5. Resumen	116
7. Conclusiones	120
A. Relación de dispersión para los decaimientos paramétricos	127
B. Relación de dispersión cinética para plasmas relativistas de electro-	
nes y positrones	130
B.1. Relación de dispersión	131
B.2. Continuación analítica	135
B.2.1. Caso electrones $J_{L,e}$	137
B.2.2. Caso positrones $J_{L,p}$	139
B.3. Análisis numérico	141
Referencias	144

Resumen

Con el objetivo de estudiar la propagación no lineal de ondas en plasmas relativistas de electrones y positrones, hemos estudiado los decaimientos paramétricos de una onda circularmente polarizada propagándose a lo largo de un campo magnético constante en un plasma con temperaturas relativistas, usando una teoría de fluidos relativistas. Estudiamos sistemáticamente el comportamiento de las inestabilidades en el plasma, para distintos valores de la amplitud de la onda y de la temperatura del plasma, encontrando que mientras aumenta la amplitud de la onda, la tasa máxima de crecimiento de las inestabilidades también aumenta, mientras que al aumentar la temperatura, la tasa de crecimiento disminuye. Se han estudiado inestabilidades modulacionales en la rama de Alfvén, para el límite fuertemente magnetizado, en particular mediante la derivación de la ecuación no lineal de Schrödinger en este tipo de plasmas, encontrándose que la envolvente evoluciona como solitón. Por último hemos desarrollado una simulación de partículas en una dimensión, con el objetivo de considerar el régimen altamente no lineal. Hemos comparado estos resultados con los obtenidos analíticamente, encontrando una gran concordancia entre ellos. Sin embargo, los resultados de estos modelos difieren para temperaturas altas. A medida que la temperatura del plasma aumenta en la simulación, la rama de Alfvén comienza a desaparecer y las ondas de Alfvén ya no se propagan en el plasma.

Abstract

In order to study the nonlinear wave propagation in relativistic electron-positron plasmas, the parametric decays of a circularly polarized electromagnetic wave propagating along a constant background magnetic field in a plasma with relativistic temperatures, have been studied by means of a two-fluid relativistic theory. We study the behavior of the plasma instabilities in a systematic way, for various values of the pump wave amplitude and plasma temperature, finding that as the pump wave amplitude increases, the maximum growth rate of the instabilities increases too, while an increase in the plasma temperature results in a decrease of the growth rates. Modulational instabilities in the Alfvén branch, for the strongly magnetized limit, have been studied in particular through a nonlinear Schrödinger equation, where the wave envelope evolves as a solitary wave. Finally, a relativistic one-dimensional particle-in-cell simulation has been developed, in order to consider the highly nonlinear regime. Numerical and analytical results were compared, finding that there is a very good agreement between them. However, for very high temperatures these models differ. As the plasma temperature increases, the Alfvén branch disappears and the Alfvén wave does not propagate in the plasma.

Research Highlights

- Parametric decays of a circularly polarized electromagnetic waves in a relativistic electron-positron plasmas.
- Self-modulation of nonlinear Alfvén waves in a electron-positron plasmas.
- Relativistic full particle-in-cell (PIC) simulations.

Capítulo 1

Introducción

El término “plasma” fue acuñado por Langmuir [1] en 1928 y hace referencia a un gas completa o parcialmente ionizado constituido por electrones e iones. El hecho de que los gases de descarga actuaran como un sustrato transportando una gran variedad de partículas, tales como electrones, iones o impurezas, lo llevó a utilizar esta palabra, en analogía a lo que sucede con el plasma sanguíneo, el cual transporta sales minerales, proteínas, glóbulos rojos y blancos, entre otros [2]. Existe una gran cantidad de propiedades y fenómenos colectivos en plasmas que los diferencian de los gases neutros o los líquidos, que los hace un objeto de estudio muy atractivo, y ha motivado el llamarlo el cuarto estado de la materia [3].

El plasma representa más del 99 % de la materia visible en el universo, abarcando un amplio intervalo de temperaturas y densidades, desde unas pocas partículas por metro cúbico en gases intergalácticos, hasta plasmas con densidades electrónicas 45 órdenes de magnitud superiores, como en las estrellas de neutrones [4]. Dentro de este intervalo de parámetros encontramos, el medio interestelar, nubes de gas en galaxias, agrupaciones de galaxias, plasmas de fusión, superficies estelares, interiores estelares, etc. Una de las características destacables es que todos estos medios tan

diversos pueden ser descritos esencialmente a partir de un mismo conjunto de ecuaciones, a pesar de la diferencia en el intervalo de parámetros.

El estudio de la física de plasmas se ha llevado a cabo de manera tanto teórica como experimental y ha permitido la comprensión de diversos fenómenos, en sistemas astrofísicos o espaciales, entre otros. Ejemplos de plasmas astrofísicos encontramos en la magnetósfera de pulsares, núcleos activos de galaxias o estallidos de rayos gamma. En el área de física espacial tenemos la magnetósfera terrestre, el viento solar, la heliósfera, entre otros. En plasmas de laboratorios, encontramos láseres de alta potencia, dispositivos de potencia pulsada, dispositivos de fusión (tokamak), etc. Esta línea de investigación es particularmente importante, porque se espera que en el futuro los plasmas de fusión contribuyan a solucionar los problemas energéticos en el mundo.

Gran parte de los esfuerzos en la física de plasmas han estado dedicados al estudio de plasmas de electrones e iones, debido a su gran importancia en diversos contextos de la física espacial, como por ejemplo, el estudio del viento solar. Sin embargo, éste no es el único tipo de plasma que ha recibido gran atención en los últimos años, con la nueva generación de aceleradores de partículas se ha intensificado el estudio de plasmas cuya importancia se da en condiciones mucho más extremas de temperatura y densidad, como el plasma de quarks y gluones, el cual ha sido propuesto como el estado en que se encontraba la materia en la etapa temprana del universo, cuando la temperatura era demasiado alta para la formación de hadrones. En el caso de esta tesis estamos interesados en explorar otro tipo de plasmas, compuestos de electrones y positrones, los cuales presentan algunas diferencias respecto de los plas-

mas usualmente tratados. Existen diversos ambientes en los cuales los plasmas de electrones y positrones son relevantes. Ejemplos de éstos son sistemas astrofísicos de altas energías tales como la magnetósfera de pulsares [5–8], núcleos activos de galaxias [9,10], estallidos de rayos gamma [11,12], modelos de universo temprano [13–15], discos de acreción [16–18], etc. Los plasmas de electrones y positrones presentes en estos ambientes dejan su impronta característica en los espectros de radiación observados [19]. Muchos efectos en estos plasmas están relacionados con la propagación de ondas, tal como los procesos de radio emisión en pulsares [20], la aceleración de jets relativistas [21], o jets relativistas en cuásars [22]. Por otro lado, recientemente se han realizado experimentos en la creación de pares electrón-positrón relativistas [23], con pulsos láser ultra-intensos ($\sim 10^{20}$ W/cm²) [24], donde las mediciones han indicado que la densidad de los positrones es $\sim 10^{16}$ cm⁻³. También se espera la producción de pares electrón-positrón en grandes tokamaks [25], donde pueden ser creados del orden de $\sim 10^{14}$ positrones [26].

Por ejemplo, en la magnetósfera de los pulsares, particularmente en pulsares de milisegundos, debe haber campos eléctricos muy grandes que puedan acelerar a las partículas cargadas a lo largo de campos magnéticos. En estos ambientes, la densidad de partículas puede ser estimada como $n_e \sim 10^{-1}(B/P)$. [27], donde B es el campo magnético, y P el periodo del pulsar en unidades cgs. Para $B \sim 10^{12}$ G y $P \sim 10^{-1}$ s tenemos $n_e \sim 10^{12}$ cm⁻³. Bajo situaciones dinámicas, estos valores pueden crecer hasta en un orden de magnitud [28]. Cuando el campo magnético alcanza un valor cercano a $B > 4 \times 10^{13}$ G, por ejemplo en magnetares, podemos tener otros efectos importantes en la producción de pares electrón-positrón, tales como la separación de un fotón [8], o la aniquilación de un par electrón-positrón en un fotón [29]. Por

lo tanto, en estos ambientes se pueden producir grandes densidades de electrones y positrones. Por ejemplo, Da Costa *et al.* [30] usan $n_e = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

En muchos de los ambientes mencionados anteriormente los efectos relativistas juegan un rol fundamental, así como también las altas temperaturas, por lo que es fundamental entender la propagación de ondas en plasmas relativistas con temperatura finita.

Se han encontrado soluciones exactas para ondas electromagnéticas de amplitud finita, propagándose paralelas a un campo magnético externo, para plasmas fríos y no relativistas [31]. También, en el caso de un plasma de electrones y múltiples especies de iones con velocidad de deriva, se encontró como solución una onda circularmente polarizada con amplitud finita [32]. La propagación no lineal de ondas electromagnéticas circularmente polarizadas en plasmas no magnetizados de electrones, positrones e iones, se ha estudiado para el caso frío [33] y con temperaturas relativistas [34], mostrando la existencia de estructuras localizadas estables. Recientemente, Asenjo *et al.* [35] encontraron una solución no lineal exacta a las ecuaciones de fluido relativista, consistente en una onda circularmente polarizada de amplitud arbitraria, propagándose a lo largo de un campo magnético de fondo en un plasma de electrones y positrones.

El objetivo de esta tesis es estudiar la propagación no lineal de estas ondas en plasmas relativistas de electrones y positrones. Durante la primera etapa de la evolución no lineal de una onda de gran amplitud, los decaimientos paramétricos son una herramienta útil para explicar la excitación de ondas producto de inestabilidades. En el caso débilmente relativista con bajas temperaturas, se han estudiado los

decaimientos paramétricos de una onda circularmente polarizada propagándose paralelamente a un campo magnético constante de fondo, mediante teoría de fluidos [36] y también usando teoría de fluidos y simulaciones de partículas [37]. Se encontró que la aparición de sucesivas inestabilidades paramétricas desembocan en la aparición de estados turbulentos. Usando simulaciones de partículas se estudió la evolución de las inestabilidades paramétricas de ondas de Alfvén de amplitud finita, para grandes escalas de tiempo [38]. La interacción onda-partícula conduce a un proceso de aceleración eficiente, produciendo una función de distribución para la energía en forma de ley de potencia.

En estos trabajos se ha considerado el régimen débilmente relativista y además de bajas temperaturas. Sin embargo, en ambientes astrofísicos de alta energía los efectos de temperaturas relativistas pueden jugar un rol bastante importante [39].

Dadas las condiciones extremas de esos ambientes, se hace importante estudiar la evolución no lineal de ondas de Alfvén, ya que éstas juegan un rol fundamental en plasmas, por ejemplo, son el mayor subproducto de la reconexión magnética en plasmas espaciales, astrofísicos y de laboratorio, como es evidenciado por observaciones satelitales *in situ* en el viento solar [40–42]. Recientemente ha habido un creciente interés en el estudio de reconexión magnética en plasmas relativistas de electrones y positrones [43–47], tanto como de ondas no lineales de Alfvén en este tipo de plasmas, motivados por las potenciales aplicaciones en astrofísica y experimentos de laboratorio [22, 48–51].

La propagación y procesos no lineales de ondas electromagnéticas han sido estudiados por muchos autores. Chian y Kennel [52], usando un modelo de fluido, estudiaron una onda electromagnética circularmente polarizada en un plasma de

electrones y positrones, frío y sin un campo magnético de fondo. Ellos propusieron un mecanismo para explicar las variaciones de intensidad (micropulsos) de la radio emisión de pulsares, sugiriendo que una inestabilidad automodulacional de la onda electromagnética podía ser un proceso natural para la modulación de amplitud. Dicho modelo ha sido perfeccionado en un gran número de trabajos [53–56]. Para el caso de un plasma de electrones y positrones débilmente magnetizado se estudió la automodulación de ondas en la rama electromagnética y se derivó una ecuación de ondas no lineal, la cual describe la propagación de un tren de ondas o de solitones [57].

En esta tesis nos centraremos en dos aspectos de la propagación no lineal de ondas: los decaimientos paramétricos y la propagación de solitones. Además, utilizaremos una simulación relativista de partículas en una dimensión para estudiar el régimen altamente no lineal, y con la cual compararemos nuestros resultados teóricos con los obtenidos a través de la simulación.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: en el Cap. 2 daremos una descripción detallada de las ecuaciones para una teoría de fluidos relativistas, donde consideraremos además el régimen de temperaturas relativistas. En el Cap. 3 usaremos el formalismo desarrollado en el capítulo anterior, para derivar la relación de dispersión de una onda circularmente polarizada de amplitud arbitraria propagándose a lo largo de un campo magnético externo en un plasma relativista de electrones y positrones, con temperatura finita. Describiremos las características más importantes de esta onda, como es la aparición de una zona anómala en la rama de Alfvén, donde $d\omega/dk$ es negativa. En el Cap. 4 estudiaremos el régimen débilmente no lineal, a través de los decaimientos paramétricos de la onda descrita en el capítulo anterior.

Derivaremos la relación de dispersión para los decaimientos y estudiaremos sistemáticamente los distintos tipos de inestabilidades que emergen y su dependencia de la amplitud de la onda y la temperatura del plasma. En el Cap. 5 nos centraremos en la automodulación de una onda no lineal de Alfvén en el régimen fuertemente magnetizado, a través de la derivación de la ecuación no lineal de Schrödinger. Analizaremos las condiciones para las cuales existe propagación de solitones. Finalmente, en el Cap. 6 describiremos el desarrollo de una simulación de partículas relativista, donde incluiremos efectos relativistas en la ecuación de movimiento de las partículas y en la temperatura, al considerar una función de distribución de velocidades relativistas, pero no consideraremos otros efectos posibles como aquellos debidos a la emisión de radiación o creación de pares. Estudiaremos la relación de dispersión en plasmas relativistas de electrones y positrones. Usaremos la onda encontrada en el Cap. 3 como condición inicial en la simulación para estudiar la evolución no lineal de ésta. Compararemos los resultados de la simulación con los decaimientos paramétricos del Cap. 4 y las estructuras localizadas del Cap. 5.

Capítulo 2

Teoría de fluidos para plasmas relativistas

Existen situaciones en las que partículas pueden ser aceleradas hasta alcanzar velocidades cercanas a las de la luz, ya sea porque la energía térmica del plasma es comparable con la energía en reposo del electrón o por la interacción entre las ondas y dichas partículas. En este tipo de situaciones se hace primordial tomar en cuenta los efectos de la relatividad especial. Ejemplos de estas situaciones son los cinturones de radiación de Van Allen durante tormentas geomagnéticas [58], interacción de lasers con la materia [59] y plasmas espaciales [60], además de los presentados en el Cap. 1. Bajo estas consideraciones, se hace necesario desarrollar una teoría que contemple los efectos relativistas sobre el movimiento de las partículas.

En el presente capítulo mostraremos la derivación de las ecuaciones básicas de una teoría de fluidos ideales para plasmas relativistas, desde el punto de vista covariante y vectorial. Incluiremos también efectos de temperaturas relativistas.

2.1. Descripción covariante de las ecuaciones de fluido

En esta sección seguiremos el procedimiento desarrollado por Gratton *et al.* en la Ref. [56] y el desarrollo de la Ref. [61]. En adelante, usaremos la siguiente notación: el tensor métrico lo definiremos como $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. El cuadvectores de velocidad será $U^\mu = (\gamma c, \gamma v^i)$, con $i = 1, 2, 3$. El tensor de energía-momentum para un fluido ideal

$$T^{\mu\nu} = \frac{h}{c^2} U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde h es la entalpía y p la presión, medidas en el sistema de referencia en que el elemento de fluido se encuentra en reposo. Hemos considerado un fluido isotrópico a fin de simplificar el modelo, por lo que usaremos la presión p como un escalar (lo que nos permitirá obtener más adelante una solución exacta a estas ecuaciones de fluidos [ver Cap. 3]).

Las ecuaciones básicas de los fluidos cargados en presencia de campos electromagnéticos se obtienen al relacionar este tensor con el tensor electromagnético, a través de

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{c} J_\nu F^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde $J^\nu = (c\rho, J^i)$ es el cuadvectores de corriente y $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es el tensor electromagnético, con $A^\mu = (\phi, A^i)$ el cuadvectores potencial.

La ecuación de conservación del número de partículas se puede escribir como

$$\partial_\nu (\bar{n} U^\nu) = 0, \quad (2.3)$$

donde \bar{n} es la densidad de partículas en el sistema de referencia en reposo. De la ecuación de conservación $U_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, podemos encontrar la relación entre la entalpía

y la presión,

$$\bar{n}U^\nu \left[\partial_\nu \left(\frac{h}{\bar{n}} \right) - \frac{1}{\bar{n}} \partial_\nu p \right] = 0, \quad (2.4)$$

que es la condición adiabática del sistema. En efecto, dada la relación termodinámica [61]

$$d \left(\frac{h}{\bar{n}} \right) = T d \left(\frac{\sigma}{\bar{n}} \right) + \left(\frac{1}{\bar{n}} \right) dp,$$

donde T es la temperatura y σ la entropía por unidad de volumen, la ecuación (2.4) se puede escribir de la forma

$$\bar{n}U^\nu \left[T \partial_\nu \left(\frac{\sigma}{\bar{n}} \right) \right] = 0,$$

por lo que tenemos

$$U^\nu \partial_\nu \left(\frac{\sigma}{\bar{n}} \right) \equiv \frac{d}{ds} \left(\frac{\sigma}{\bar{n}} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Esto último indica que el flujo es adiabático [61].

2.2. Descripción vectorial de las ecuaciones de fluido

A continuación desarrollaremos las ecuaciones encontradas en la sección anterior, para dar la descripción vectorial de las ecuaciones de fluido que utilizaremos más adelante.

Partiremos de la ecuación adiabática, Ec. (2.4), la cual se puede escribir como

$$\bar{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{h}{\bar{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p. \quad (2.6)$$

De la parte temporal de la ecuación (2.2) obtenemos

$$h \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma \frac{dp}{dt} + q \bar{n} \vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (2.7)$$

Por otra parte, la ecuación adiabática Ec. (2.4) puede ser escrita como

$$\frac{1}{\bar{n}} \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{\bar{n}} \right). \quad (2.8)$$

Por último, usamos las ecuaciones (2.6) y (2.8) para calcular la parte espacial de la ecuación (2.2), obteniendo así

$$\frac{h}{c^2} \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = -\frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} p - \frac{\gamma \vec{v}}{c^2} \frac{dp}{dt} + \bar{n} q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (2.9)$$

que es la ecuación de momentum para un fluido relativista.

Para el caso de un plasma relativista de partículas no interactuantes se puede obtener una expresión exacta para la densidad de entalpía [62], dada por

$$h = m \bar{n} c^2 f(T), \quad (2.10)$$

donde f es una función que depende exclusivamente de la temperatura a través de

$$f(T) = K_3 \left(\frac{mc^2}{k_B T} \right) / K_2 \left(\frac{mc^2}{k_B T} \right), \quad (2.11)$$

donde K_2 y K_3 son las funciones modificadas de Bessel de orden 2 y 3, respectivamente. Por comodidad definiremos el inverso de la temperatura normalizada como

$$\mu = \frac{mc^2}{k_B T}. \quad (2.12)$$

La Fig. 2.1 muestra f en función del inverso de la temperatura μ . Notamos que para el caso clásico $mc^2 \gg k_B T$, es decir, $\mu \gg 1$, tenemos el límite de bajas temperaturas, para el cual $f = 1$.

Usando entonces esta definición para la entalpía [Ec. (2.10)], la condición adiabática Ec. (2.6) puede ser reescrita como

$$m \bar{n} c^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p. \quad (2.13)$$

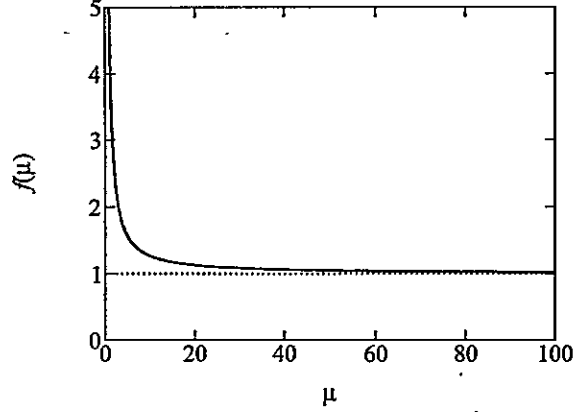


Figura 2.1: Función $f(\mu)$ [Ec. (2.11)] vs. $\mu = mc^2/(k_B T)$. La línea punteada indica el límite frío $f = 1$.

Usando la ecuación (2.8) y que la derivada total se puede escribir como $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$, la ecuación de momentum para fluidos relativistas Ec. (2.9) queda

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) (f\gamma\vec{v}) = \frac{q}{m} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{m\gamma\bar{n}} \vec{\nabla} p. \quad (2.14)$$

Estas ecuaciones [Ecs. (2.13) y (2.14)] fueron deducidas por Asenjo *et al.* en la Ref. [35] usando un camino alternativo. En ella se usó el formalismo de unificación del campo electromagnético y el fluido relativista desarrollado por S. Mahajan en la Ref. [63].

Vemos que, en el límite frío ($T \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \infty$, $f \rightarrow 1$) de la ecuación de momentum (2.14), se reobtiene la ecuación relativista conocida [36, 64]. La ecuación de momentum (2.14) difiere del resultado frío sólo a través del factor f . Esto puede ser entendido de la siguiente manera: para el movimiento de una sola partícula, es posible convertir los resultados no relativistas en resultados relativistas haciendo el cambio $m \rightarrow \gamma m$. Sin embargo, no es posible hacer este simple reemplazo en el caso de un fluido, ya que el promedio del momentum $\langle \vec{p} \rangle$ no es equivalente a $\langle \gamma \rangle \langle m\vec{v} \rangle$.

Sin embargo, podemos pensar que existe un factor de proporcionalidad entre ambas cantidades; f , tal que $\langle \vec{p} \rangle = f \langle \gamma \rangle \langle m \vec{v} \rangle$. Por lo tanto, sería posible convertir la ecuación de momentum de un fluido no relativista en una relativista, usando la misma prescripción que para el movimiento de una sola partícula, $\langle m \vec{v} \rangle \rightarrow \langle \vec{p} \rangle$, pero con el fin de considerar la estadística, $m \rightarrow f \gamma m$. Esto es exactamente lo que se necesita para pasar de la ecuación de momentum fría a la ecuación (2.14).



Capítulo 3

Onda transversal circularmente polarizada

Como dijimos en los capítulos anteriores, existen diversos ambientes donde los plasmas de electrones y positrones son relevantes (ver Cap. 1). En muchos de estos ambientes los efectos relativistas y la temperatura juegan un rol fundamental, por lo que es esencial entender la propagación de ondas en plasmas relativistas con temperatura. Se han encontrado soluciones exactas para ondas electromagnéticas de amplitud finita, propagándose paralelas a un campo magnético externo, para plasmas fríos y no relativistas [31]. También, en el caso de un plasma de electrones y múltiples especies de iones con velocidad de deriva, se encontró como solución una onda circularmente polarizada con amplitud finita [32]. El que sean soluciones exactas significa que las relaciones de dispersión no son soluciones perturbativas sobre alguna de las variables del sistema.

En este capítulo nos centraremos en plasmas relativistas de electrones y positrones. Usaremos el formalismo desarrollado en el Cap. 2 para derivar la relación de dispersión exacta de una onda circularmente polarizada de amplitud arbitraria propagándose a lo largo de un campo magnético externo. Trataremos al sistema como dos fluidos, uno de electrones y otro de positrones. Este capítulo está basado en los

resultados de Asenjo *et al.* [35].

3.1. Ecuaciones básicas

En esta sección definiremos las ecuaciones básicas que utilizaremos en adelante.

La dinámica del plasma estará dada por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_j \vec{v}_j) = 0, \quad (3.1)$$

la ecuación de momentum (ver Cap. 2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (f_j \gamma_j \vec{v}_j) = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_j \times \vec{B} \right) - \frac{1}{m_j n_j} \vec{\nabla} p_j, \quad (3.2)$$

la ecuación para la presión

$$m_j \bar{n}_j c^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) f_j = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) p_j, \quad (3.3)$$

y las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e (n_p - n_e), \quad (3.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Usando el gauge de Lorentz,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j n_j \vec{v}_j. \quad (3.8)$$

Acá, j es el índice de especie ($j = p$ para positrones y $j = e$ para electrones), $q_j = \sigma_j e$ ($\sigma_p = 1$, $\sigma_e = -1$), n_j es la densidad de partículas en el sistema de referencia del laboratorio, \vec{v}_j es la velocidad del fluido, γ_j es el factor relativista de

Lorentz, $\bar{n}_j = n_j/\gamma_j$ es la densidad en el sistema de referencia en reposo, \vec{A} es el vector potencial, \vec{J} es la corriente transversal y f_j es el factor térmico relativista definido por la Ec. (2.11). También consideraremos $p_j = \bar{n}_j k_B T_j$ [35].

Como se muestra en la Ref. [35], podemos encontrar una solución transversal exacta de estas ecuaciones. Consideraremos una onda con polarización circular izquierda que se propaga a lo largo de un campo magnético externo $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{0z}\hat{z}$, cuyos campos eléctricos y magnéticos están dados por

$$\vec{E}_0(z, t) = \bar{E} [\sin(k_0 z - \omega_0 t)\hat{x} - \cos(k_0 z - \omega_0 t)\hat{y}] , \quad (3.9)$$

$$\vec{B}_0(z, t) = \bar{B} [\cos(k_0 z - \omega_0 t)\hat{x} + \sin(k_0 z - \omega_0 t)\hat{y}] + B_{0z}\hat{z} , \quad (3.10)$$

donde \bar{E} y \bar{B} son las amplitudes de la onda monocromática circularmente polarizada, y ω_0 y k_0 son su frecuencia y número de onda, respectivamente. Las amplitudes de los campos pueden ser relacionadas, usando las ecuaciones de Maxwell, en la forma

$$\bar{E} = \frac{\omega_0}{ck_0} \bar{B} . \quad (3.11)$$

Consideraremos que los electrones y positrones tendrán densidades iguales y constantes $n_e = n_p = n$; además sus masas, $m_e = m_p = m$. La temperatura del plasma será constante, con lo cual f será constante, pero permitiremos que ambas especies puedan tener diferentes temperaturas ($f_e \neq f_p$).

Es posible demostrar que esta onda puramente transversal y circularmente polarizada no produce fluctuaciones en la presión ni en f . Con esto seremos capaces de encontrar una solución exacta a las ecuaciones de fluido. Esta onda electromagnética inducirá una velocidad sobre las partículas que será puramente transversal y circularmente polarizada ($v_{zj} = 0$). Es posible demostrar (usando el gauge de Lorentz) que esta velocidad inducida es proporcional a la amplitud del vector potencial, el

cual es constante, por lo tanto el factor relativista

$$\gamma_j = \left(1 - \frac{\vec{v}_j^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (3.12)$$

será constante para ambas especies. Con estas consideraciones, la Ec. (3.2) se puede escribir como

$$f_j \gamma_j \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial t} = -f_j \gamma_j \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_j + \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_j \times \vec{B} \right). \quad (3.13)$$

Para simplificar nuestros cálculos, usaremos la representación transversal

$$C_{\perp} = C_x + iC_y \equiv C e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}, \quad (3.14)$$

donde C es alguna variable física del sistema. Como ejemplo, vemos que para el campo magnético tenemos

$$B_{\perp 0} = B_{x0} + iB_{y0} \equiv B e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}, \quad (3.15)$$

donde $B = \bar{B}$, es real. Usando la Ec. (3.13) podemos escribir la velocidad para cada especie, que resulta ser

$$v_{\perp 0j} = v_{x0j} + i v_{y0j} = \left(\frac{\omega_0}{f_{0j} \gamma_{0j} \omega_0 - \Omega_{cj}} \right) \frac{q_j B_{\perp 0}}{m c k_0}, \quad (3.16)$$

donde

$$\gamma_{0j} = \left(1 - \frac{\vec{v}_{\perp 0j}^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (3.17)$$

y $\Omega_{cp} = -\Omega_{ce} \equiv \Omega_c = eB_{0z}/mc$ es la girofrecuencia del positrón. Notemos que el campo eléctrico longitudinal es $\vec{E} \cdot \hat{z} = 0$ para esta solución. Esto se debe a que no hay acoplamiento entre los modos transversales y longitudinales, lo cual implica que la onda es puramente transversal.

De las ecuaciones de Maxwell podemos relacionar las cantidades transversales por

$$E_{\perp 0} = -\frac{i\omega_0}{ck_0} B_{\perp 0}. \quad (3.18)$$

La versión transversal de la Ec. (3.7) es

$$i\frac{\partial B_{\perp 0}}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_{\perp 0} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_{\perp 0}}{\partial t}, \quad (3.19)$$

donde $J_{\perp 0} = ne(v_{\perp 0p} - v_{\perp 0e})$ es la corriente transversal.

Reemplazando las Ecs. (3.16) y (3.18) en la (3.19), obtenemos la relación de dispersión para un plasma de electrones y positrones

$$\omega_0^2 - c^2 k_0^2 = \sum_j \omega_{pe}^2 \left(\frac{\omega_0}{f_j \gamma_{0j} \omega_0 - \Omega_{cj}} \right), \quad (3.20)$$

donde $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi ne^2/m}$ es la frecuencia de plasma. Vemos que esta relación de dispersión relativista difiere de la relación para plasmas fríos [36,37] sólo en el término f_j . Conocida la amplitud de la onda, α , y la temperatura del plasma, μ_j , la Ec. (3.16) es la solución exacta para las velocidades de las partículas si ω_0 y k_0 están relacionadas por la relación de dispersión (3.20).

Supondremos ahora que las especies tienen la misma temperatura, por lo tanto $f_p = f_e = f$. Con esto, la relación de dispersión Ec. (3.20) quedará como

$$\omega_0^2 - c^2 k_0^2 = \omega_{pe}^2 \left(\frac{\omega_0}{f \gamma_{0p} \omega_0 - \Omega_c} + \frac{\omega_0}{f \gamma_{0e} \omega_0 + \Omega_c} \right). \quad (3.21)$$

Para el caso de un plasma frío, $f = 1$, recuperamos el resultado conocido [36,37]. En el límite de muy altas temperaturas, $k_B T \gg mc^2$, o en el límite ultrarrelativista $1/\gamma_{0j} \rightarrow 0$, (3.21) se reduce, como es esperado, a la relación de dispersión de una onda de luz $c^2 k_0^2 = \omega_0^2$.

3.2. Análisis numérico de la relación de dispersión

Con el objetivo de resolver la relación de dispersión Ec. (3.21), normalizaremos la frecuencia y el número de onda en la forma $x_0 = \omega_0/\Omega_c$ e $y_0 = ck_0/\Omega_c$. Definiremos además la amplitud normalizada de la onda como

$$\alpha = \frac{eB}{mc^2k_0}. \quad (3.22)$$

Dado un valor del número de onda normalizado y_0 y una amplitud de la onda normalizada α , resolveremos las Ecs. (3.16), (3.17) y (3.21) de manera simultánea para encontrar γ_{0e} , γ_{0p} y x_0 . En la Fig. 3.1 mostramos la solución de la relación de dispersión para $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $1/\mu = 0.01$ y para distintos valores de la amplitud de la onda α . Vemos que existen dos ramas: una electromagnética, que tiene un límite inferior en la frecuencia de plasma efectiva, y una rama de Alfvén, que tiene un límite superior en el número de onda, y un límite superior en la frecuencia.

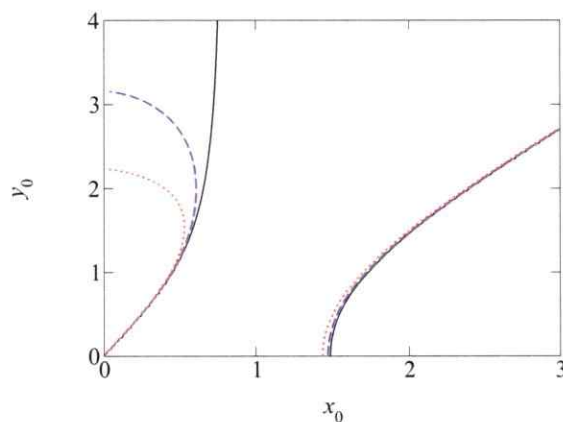


Figura 3.1: Relación de dispersión Ec. (3.21). Número de onda normalizado $y_0 = ck_0/\Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x_0 = \omega_0/\Omega_c$, para $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$ y $1/\mu = 0.01$. Línea continua (negra): $\alpha = 0$; línea segmentada (azul): $\alpha = 0.1$; línea punteada (roja): $\alpha = 0.2$.

La línea continua de color negro corresponde a la solución para $\alpha = 0$, donde $v_{\perp 0j} = 0$ y $\gamma_{0j} = 1$, que es el caso no relativista. En este caso la frecuencia de corte para la rama electromagnética es $x_0 = \sqrt{2}$, que corresponde a la frecuencia de plasma efectiva. A medida que aumentamos la amplitud de la bomba, vemos que la frecuencia de plasma efectiva se reduce. Esta reducción también se produce al aumentar la temperatura [35]. En cuanto a la rama de Alfvén, ésta comienza en el origen siguiendo la relación de dispersión lineal clásica, $\omega = v_A k$, con v_A la velocidad de Alfvén. En esta región $\gamma_{e,p} \approx 1$. Luego, podemos obtener la velocidad de Alfvén desde la Ec. (3.21), considerando el límite $\omega f \ll \Omega_c$, el cual se satisface para frecuencias suficientemente bajas. Se obtiene que la velocidad de Alfvén está dada por

$$v_A = \frac{c}{\sqrt{1 + 2f\omega_{pe}^2/\Omega_c^2}}. \quad (3.23)$$

En la Fig. 3.1 vemos que a medida que aumentamos el número de onda a lo largo de la rama de Alfvén, existe un límite superior para la frecuencia ω_{crit} que resulta estar dado por

$$\frac{\omega_{\text{crit}}}{\Omega_c} = \frac{1}{f} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{f} \right)^{2/3} \right]^{-3/2}. \quad (3.24)$$

Notamos que para $\alpha = 0$ tenemos $\omega_{\text{crit}} = \Omega_c/f$, la cual corresponde a la frecuencia de resonancia de los positrones en la Ec. (3.21), que en el caso frío $f = 1$, es la girofrecuencia de los positrones. Por otro lado, de la Ec. (3.24) vemos que a medida que la temperatura aumenta las ondas de Alfvén quedan restringidas a un intervalo cada vez más estrecho de frecuencias.

Otra característica interesante en la rama de Alfvén es la existencia de un valor máximo para el número de onda, k_{max} . Este límite superior ocurre debido a que una

de las especies (positrones, en este caso) se vuelve ultrarrelativista, moviéndose con velocidades cercanas a la de la luz, por lo tanto, $\gamma_p \rightarrow \infty$. Los electrones no resuenan con la onda, por lo que γ_e es finito. Se puede obtener una expresión analítica para el límite en el número de onda de la rama de Alfvén [35]

$$k_{\max} = \frac{\omega_{pe}}{c\sqrt{\alpha}}. \quad (3.25)$$

Notamos que este límite sólo depende de la amplitud de la onda y no de la temperatura (ver Fig. 3.1). Esto lo podemos entender notando que si la amplitud de la onda es tan grande que la velocidad inducida por ella es ultrarrelativista, entonces las velocidades térmicas no serán relevantes en general. Una característica importante que se observa en la rama de Alfvén, Fig. 3.1, es el hecho de que para $\alpha \neq 0$ existe una zona donde $d\omega_0/dk_0$ es negativa. Para el valor ω_{crit} de la frecuencia, $d\omega_0/dk_0 = 0$; a partir de ese valor la pendiente comienza a ser negativa, llegando a $d\omega_0/dk_0 \rightarrow \infty$ en k_{\max} .

3.3. Resumen

En este capítulo hemos presentado un resumen de los resultados encontrados por Asenjo *et al.* en la Ref. [35]. Hemos derivado la relación de dispersión para plasmas relativistas con temperatura finita, en el contexto de una teoría de fluidos relativistas. En particular, mostramos la propagación de una onda circularmente polarizada a lo largo de un campo magnético constante.

Encontramos dos ramas en la relación de dispersión: una rama electromagnética, la cual presenta un límite inferior para la frecuencia correspondiente a la frecuencia de plasma efectiva ω_{pe}^{eff} , la cual disminuye con la temperatura y con la amplitud de la onda. Cuando los efectos relativistas son grandes, ya sea a través de la temperatu-

ra o del factor relativista γ_j , la onda electromagnética corresponde a la relación de dispersión de una onda de luz no dispersiva. La otra rama corresponde a la rama de Alfvén, la cual para bajos números de onda responde a una relación de dispersión lineal y no dispersiva con velocidad de propagación correspondiente a v_A , la velocidad de Alfvén. A medida que aumenta el número de onda la frecuencia alcanza un límite superior correspondiente a ω_{crit} (en $k = k_{\text{crit}}$), donde $d\omega_0/dk_0 = 0$. Esta frecuencia crítica depende de la temperatura y de la amplitud de la onda. Cuando $k > k_{\text{crit}}$ tenemos que $d\omega_0/dk_0 < 0$, llegando a diverger para cierto $k = k_{\text{máx}}$, donde la velocidad de los positrones inducidos por la onda, es igual a la velocidad de la luz. Además, $k_{\text{máx}}$ depende solamente de la amplitud de la onda y no de la temperatura.

Capítulo 4

Decaimientos paramétricos

En este capítulo consideraremos los decaimientos paramétricos de una onda electromagnética circularmente polarizada y de amplitud finita, que se propaga a lo largo de un campo magnético de fondo en un plasma de electrones y positrones con temperatura finita, cuya relación de dispersión fue encontrada en el Cap. 3. En particular, estudiaremos los efectos de la temperatura relativista sobre los decaimientos de la onda. Estos decaimientos han sido estudiados anteriormente en el límite débilmente relativista para polarización lineal [65, 66], y en el caso magnetizado [36, 37] y no magnetizado [67] con polarización circular. Sin embargo, los efectos de temperaturas relativistas no han sido considerados en esos estudios. En este capítulo abordaremos el límite completamente relativista y con temperaturas relativistas. Estudiaremos los decaimientos paramétricos para ondas en ambas ramas de la relación de dispersión, la rama electromagnética y la de Alfvén. Para la rama de Alfvén analizaremos el caso de la zona normal y la zona anómala (donde $d\omega/dk$ es negativa).

Los resultados de este capítulo han sido publicados en la Ref. [68].

4.1. Onda bomba

Usaremos la solución exacta encontrada en el capítulo anterior como punto de partida en este capítulo. Llamaremos a esta onda, “onda bomba”, y realizaremos pequeñas perturbaciones sobre esta solución con el objetivo de estudiar su estabilidad. Las cantidades transversales correspondientes a la onda bomba, serán las cantidades a orden cero (con el correspondiente subíndice 0) definidas en la Sec. 3.1. Para comodidad futura, definiremos las siguientes cantidades: la Ec. (3.16) se puede escribir como

$$v_{\perp 0j} = \alpha_j \eta_j c e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}, \quad (4.1)$$

donde

$$\alpha_j = \sigma_j \alpha, \quad (4.2)$$

$$\eta_j = \frac{\omega_0}{f_{0j} \gamma_{0j} \omega_0 - \Omega_{cj}}, \quad (4.3)$$

por lo que el factor relativista puede ser escrito como

$$\gamma_{0j} = (1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{-1/2}. \quad (4.4)$$

La Fig. 4.1 muestra la relación de dispersión de la onda bomba, Ec. (3.21), en un intervalo de frecuencia y número de onda más amplio que la Fig. 3.1. En la Fig. 4.1(a) se muestra la relación de dispersión para $\alpha = 0$. Se observan las ramas de Alfvén (que cruzan el origen) y las electromagnéticas. En la Fig. 4.1(b), en cambio, se muestra el caso $\alpha \neq 0$; la rama de Alfvén se curva y aparece el límite máximo para el número de onda discutido en la Sec. 3.2.

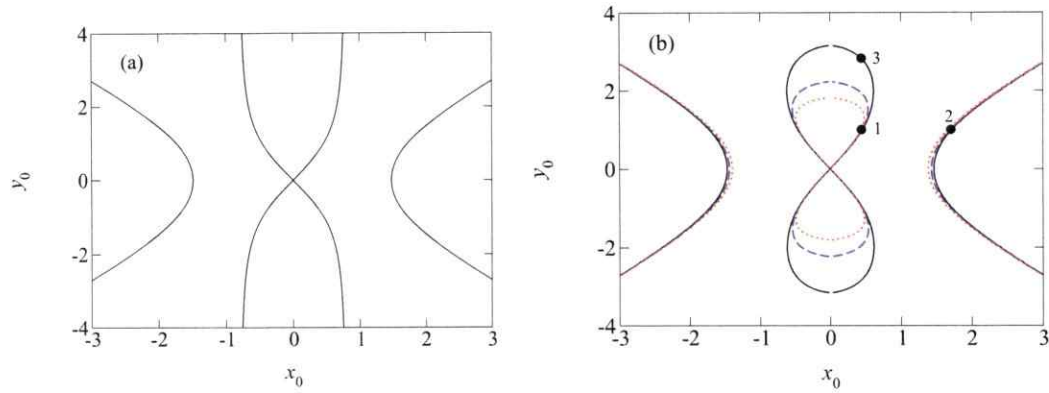


Figura 4.1: Relación de dispersión de la onda bomba, Ec. (3.21). Número de onda normalizado $y_0 = k_0 c / \Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x_0 = \omega_0 / \Omega_c$ para $\omega_p / \Omega_c = 1$, $1/\mu = 0.01$. (a) $\alpha = 0$. (b) Línea continua: $\alpha = 0.1$. Línea segmentada: $\alpha = 0.2$. Línea punteada: $\alpha = 0.3$. Los puntos muestran las 3 zonas que estudiaremos más adelante: 1) Rama de Alfvén, zona normal; 2) rama electromagnética; 3) rama de Alfvén, zona anómala.

4.2. Relación de dispersión para los decaimientos paramétricos

Introduciremos pequeñas perturbaciones sobre la solución de la onda bomba a orden cero descrita en la Sec. 3.1. Así, una cantidad física C será escrita en la forma $C = C_0 + \delta C$, donde C_0 corresponde a la solución de la onda bomba, y $\delta C \ll C_0$.

A primer orden en las cantidades perturbadas, la ecuación de movimiento Ec. (3.2) da:

$$f_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{0j} \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_{0j} \delta \vec{v}_j + \delta \gamma_j \vec{v}_{0j}) + \gamma_{0j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{0j} \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{v}_{0j} \delta f_j) + f_0 \left(\delta \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_{0j} \vec{v}_{0j}) = \frac{q_j}{m} \left(\delta \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_{0j} \times \delta \vec{B} \right) + \frac{q_j}{mc} \delta \vec{v}_j \times \vec{B}_0 - \frac{1}{mn_0} \vec{\nabla} \delta p_j. \quad (4.5)$$

Usando la Ec. (3.3), encontramos

$$\frac{\partial \delta p_j}{\partial t} = mc^2 \bar{n}_{0j} \frac{\partial \delta f_j}{\partial t},$$

la cual, eliminando las constantes de integración, produce

$$\delta p_j = mc^2 \bar{n}_{0j} \delta f_j = -\bar{n}_{0j} f'_j(\mu_0) \mu_0^2 k_B \delta T_j,$$

donde $f' = df/d\mu$. Usando que $n_i = \bar{n}_j \gamma_j$ [34], y $p_j = \bar{n}_j k_B T_j = p_{0j} + \delta p_j$, con $p_{0j} = k_B T_0 n_0 / \gamma_{0j}$, podemos escribir

$$\frac{p_j}{p_{0j}} = \frac{\gamma_{0j}}{n_0 k_B T_0} \frac{k_B (T_0 + \delta T_j) (n_0 + \delta n_j)}{\gamma_{0j} + \delta \gamma_j} = 1 + \left(\frac{\delta T_j}{T_0} + \frac{\delta n_j}{n_0} - \frac{\delta \gamma_j}{\gamma_{0j}} \right),$$

obteniendo

$$\delta p_j = \frac{k_B T_0 n_0}{\gamma_{0j}} \left(\frac{f'_j(\mu_0) \mu_0^2}{1 + f'_j(\mu_0) \mu_0^2} \right) \left(\frac{\delta n_j}{n_0} - \frac{\delta \gamma_j}{\gamma_{0j}} \right),$$

$$\delta f_j = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{f'_j(\mu_0) \mu_0^2}{1 + f'_j(\mu_0) \mu_0^2} \right) \left(\frac{\delta n_j}{n_0} - \frac{\delta \gamma_j}{\gamma_{0j}} \right),$$

$$\delta T_j = -\frac{T_0}{1 + f'_j(\mu_0) \mu_0^2} \left(\frac{\delta n_j}{n_0} - \frac{\delta \gamma_j}{\gamma_{0j}} \right).$$

De las Ecs. (3.1), (3.4) y (3.7), tenemos

$$\frac{\partial \delta n_j}{\partial t} + n_0 \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v}_j = 0, \quad (4.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{E} = 4\pi \sum_j q_j \delta n_j, \quad (4.7)$$

y

$$\vec{\nabla} \times \delta \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j (\delta n_j \vec{v}_j + n_j \delta \vec{v}_j) + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Ahora, definimos cantidades transversales como $C_\perp = C_x + iC_y$, e introducimos pequeñas perturbaciones $\delta C_\perp \ll C_\perp$, $\delta C_z \ll C_z$. Notando que $\delta \gamma_j = \gamma_{0j}^3 \vec{v}_{0j} \cdot \delta \vec{v}_j / c^2 = \gamma_{0j}^3 (v_{\perp 0j} \delta v_{\perp j}^* + v_{\perp 0j}^* \delta v_{\perp j}) / (2c^2)$, donde el superíndice * representa el complejo conjugado, y suponiendo que las cantidades perturbadas sólo dependen de la variable

longitudinal z , las componentes transversales de Ec. (4.5) pueden ser escritas como

$$f_0 \gamma_{0j} \frac{\partial}{\partial t} \left[\delta v_{\perp j} + \frac{\gamma_{0j}^2}{2c^2} (v_{\perp 0j}^2 \delta v_{\perp j}^* + v_{\perp 0j} v_{\perp 0j}^* \delta v_{\perp j}) \right] + f_0 \gamma_{0j} \delta v_{zj} \frac{\partial v_{\perp 0j}}{\partial z} \\ + \gamma_{0j} \frac{v_{\perp 0j}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[v_{\perp 0j} \frac{\delta n_j}{n_0} - \frac{\gamma_{0j}^2}{2c^2} (v_{\perp 0j}^2 \delta v_{\perp j}^* + v_{\perp 0j} v_{\perp 0j}^* \delta v_{\perp j}) \right] = \frac{q_j}{m} \delta E_{\perp} + \frac{i q_j}{mc} B_{\perp 0} \delta v_{zj} \\ - \frac{i q_j}{mc} B_{0z} \delta v_{\perp j}, \quad (4.9)$$

donde hemos definido la velocidad térmica efectiva

$$\frac{v_{\perp 0j}^2}{c^2} = \frac{k_B T_0}{mc^2} \left(\frac{f'_j(\mu_0) \mu_0^2}{1 + f'_j(\mu_0) \mu_0^2} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{f'_j(\mu_0) \mu_0^2}{1 + f'_j(\mu_0) \mu_0^2} \right). \quad (4.10)$$

Notamos que el factor en paréntesis aparece debido a la presencia de f en la Ec. (3.2), es decir, al tomar en cuenta los efectos de temperaturas relativistas de manera consistente en la teoría de fluidos.

Por otro lado, la componente longitudinal de la Ec. (4.5) es

$$f_0 \gamma_{0j} \frac{\partial \delta v_{zj}}{\partial t} = \frac{q_j}{m} \delta E_z + \frac{i q_j}{2mc} (v_{\perp 0j} \delta B_{\perp}^* - v_{\perp 0j}^* \delta B_{\perp} + \delta v_{\perp j} B_{\perp 0}^* - \delta v_{\perp j}^* B_{\perp 0}) \\ - \frac{v_{\perp 0j}^2}{\gamma_{0j}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\delta n_j}{n_0} - \frac{\gamma_{0j}^2}{2c^2} (v_{\perp 0j} \delta v_{\perp j}^* + v_{\perp 0j}^* \delta v_{\perp j}) \right]. \quad (4.11)$$

Las Ecs. (4.6)–(4.8), pueden ser escritas como

$$\frac{\partial \delta n_j}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \delta v_{zj}}{\partial z} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \delta E_z}{\partial z} = 4\pi e (\delta n_p - \delta n_e), \quad (4.13)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \times \delta \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} (\delta n_p \vec{v}_p + n_p \delta \vec{v}_p - n_e \delta \vec{v}_e - \delta n_e \vec{v}_e) + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Ahora, suponemos que las perturbaciones longitudinales y transversales tienen la forma

$$\delta C_z = \text{Re} \left[\tilde{C} e^{i(kz - \omega t)} \right] = \frac{1}{2} \left(\tilde{C} e^{i(kz - \omega t)} + \tilde{C}^* e^{-i(k^* z - \omega^* t)} \right), \quad (4.15)$$

y

$$\delta C = c_+ e^{i(k_+ z - \omega_+ t)} + c_- e^{i(k_- z - \omega_- t)}, \quad (4.16)$$

respectivamente, donde $k_+ = k_0 + k$, $k_- = k_0 - k^*$, $\omega_+ = \omega_0 + \omega$ y $\omega_- = \omega_0 - \omega^*$.

Con esas definiciones, y usando la ecuación de Faraday,

$$ik_{\pm} e_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{c} b_{\pm}. \quad (4.17)$$

Usando las definiciones (4.1), (4.15), (4.16), y (4.17), y Ecs. (4.12) y (4.13), la ecuación transversal (4.9) produce las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \left(\omega_+ \frac{(1 - \frac{1}{2} \alpha_j^2 \eta_j^2)}{(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_{cj}}{f_0} \right) v_{+j} + \left(\omega_+ \frac{\alpha_j^2 \eta_j^2}{2(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{3/2}} \right) v_{-j} \\ & \quad - \frac{v_{ij}^2}{2f_0 c^2} \left(\frac{\alpha_j^2 \eta_j^2}{(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{3/2}} \omega_+ \right) (v_{+j} + v_{-j}) \\ & \quad + \left(\frac{v_{ij}^2 \alpha_j \eta_j \omega_+ k}{2f_0 c (1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{1/2} \omega} + \frac{\alpha_j c k_0}{2f_0} - \frac{\alpha_j \eta_j c k_0}{2(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{1/2}} \right) \tilde{v}_j = \left(\frac{q_j \omega_+}{m f_0 k_+ c} \right) b_+, \quad (4.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_-^* \frac{(1 - \frac{1}{2} \alpha_j^2 \eta_j^2)}{(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_{cj}}{f_0} \right) v_{-j}^* + \left(\omega_-^* \frac{\alpha_j^2 \eta_j^2}{2(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{3/2}} \right) v_{+j} \\ & \quad - \frac{v_{ij}^2}{2f_0 c^2} \left(\frac{\alpha_j^2 \eta_j^2}{(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{3/2}} \omega_-^* \right) (v_{+j} + v_{-j}^*) \\ & \quad + \left(\frac{v_{ij}^2 \alpha_j \eta_j \omega_-^* k}{2f_0 c (1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{1/2} \omega} + \frac{\alpha_j c k_0}{2f_0} - \frac{\alpha_j \eta_j c k_0}{2(1 - \alpha_j^2 \eta_j^2)^{1/2}} \right) \tilde{v}_j = \left(\frac{q_j \omega_-^*}{m f_0 k_-^* c} \right) b_-^*. \quad (4.19) \end{aligned}$$

De la misma forma, la ecuación longitudinal Ec. (4.11), para cada especie, queda

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega_p^2}{f_0} - \frac{\omega^2}{(1 - \alpha_e^2 \eta_e^2)^{1/2}} + \frac{v_{ie}^2}{f_0} (1 - \alpha_e^2 \eta_e^2)^{1/2} k^2 \right) \tilde{v}_e - \frac{\omega_p^2}{f_0} \tilde{v}_p = \\ & \frac{\alpha_e \omega}{m f_0} [\epsilon \eta_e (b_+ - b_-^*) + m c k_0 (v_{+e} - v_{-e}^*)] + \frac{v_{ie}^2 \alpha_e \eta_e k \omega}{f_0 c (1 - \alpha_e^2 \eta_e^2)^{1/2}} (v_{-e}^* + v_{+e}), \quad (4.20) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\omega_p^2}{f_0} - \frac{\omega^2}{(1 - \alpha_p^2 \eta_p^2)^{1/2}} + \frac{v_{ip}^2}{f_0} (1 - \alpha_p^2 \eta_p^2)^{1/2} k^2 \right) \bar{v}_p - \frac{\omega_p^2}{f_0} \bar{v}_e = \frac{\alpha_p \omega}{m f_0} [e \eta_p (b_-^* - b_+) + m c k_0 (v_{+p} - v_{-p}^*)] + \frac{v_{ip}^2 \alpha_p \eta_p k \omega}{f_0 c (1 - \alpha_p^2 \eta_p^2)^{1/2}} (v_{-p}^* + v_{+p}). \quad (4.21)$$

Finalmente, de la Ec. (4.14),

$$(\omega_+^2 - c^2 k_+^2) b_+ = 4 \pi e n_0 c k_+ \left(v_{+p} - v_{+e} + \frac{c k}{2 \omega} (\alpha_p \eta_p \bar{v}_p - \alpha_e \eta_e \bar{v}_e) \right), \quad (4.22)$$

$$(\omega_-^{*2} - c^2 k_-^{*2}) b_-^* = 4 \pi e n_0 c k_-^* \left(v_{-p}^* - v_{-e}^* + \frac{c k}{2 \omega} (\alpha_p \eta_p \bar{v}_p - \alpha_e \eta_e \bar{v}_e) \right). \quad (4.23)$$

Las ecuaciones (4.18)–(4.23) forman un conjunto de 8 ecuaciones para las variables $\mathbf{r} = (v_{+e}, v_{+p}, v_{-e}^*, v_{-p}^*, \bar{v}_e, \bar{v}_p, b_+, b_-^*)$, las cuales pueden ser puestas en forma matricial como

$$\mathbf{A} \mathbf{r} = 0, \quad (4.24)$$

por lo que la relación de dispersión viene dada por

$$F(k, \omega) = \det(\mathbf{A}) = 0. \quad (4.25)$$

Los elementos de matriz A_{ij} están escritos explícitamente en el Apéndice A. Esta última ecuación resulta en una ecuación polinomial de grado 12 para $\omega(k)$.

En el caso frío y débilmente relativista, recuperamos el resultado previamente encontrado en la Ref. [36]. En este límite $\alpha^2 \eta^2 \ll 1$, por lo que el factor (4.3) puede ser escrito como

$$\eta = \frac{\omega_0}{\gamma_0 \omega_0 - \Omega_c} = \frac{\omega_0}{f \omega_0 - \Omega_c} \left[1 - \left(\frac{\alpha^2 \eta^2 f}{2} \right) \frac{\omega_0}{f \omega_0 - \Omega_c} \right]. \quad (4.26)$$

Tomamos el límite frío ($f = 1$), y definimos, siguiendo la Ref. [36],

$$\eta_w = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \Omega_c}. \quad (4.27)$$

Debido a que en este límite la cantidad $\alpha^2\eta^2$ es pequeña, podemos reemplazar η por η_w en el segundo término del lado derecho de la Ec. (4.26). Obtenemos entonces que

$$\eta = \eta_w \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \eta_w^3 \right), \quad (4.28)$$

lo cual es consistente con la Ec. (13) en la Ref. [36]. Así, usando $\alpha^2\eta^2 \ll 1$, y la Ec. (4.28) en las Ecs. (4.18)–(4.23), obtenemos la misma relación de dispersión de la Ref. [36].

Cuando no hay onda bomba, $\alpha = 0$, la Ec. (4.25) entrega los modos normales que se propagan en el plasma. En este límite, no es difícil mostrar que la relación de dispersión (4.25) es

$$F_{SD}(k, \omega) = D_+ D_- S L = 0, \quad (4.29)$$

donde

$$S = -\omega^2 + \frac{v_t^2}{f_0} k^2, \quad (4.30)$$

$$L = \frac{2\omega_p^2}{f_0} - \omega^2 + \frac{v_t^2}{f_0} k^2, \quad (4.31)$$

y

$$D_+ = \omega_+^2 - c^2 k_+^2 - \frac{\omega_p^2}{f_0} \left(\frac{\omega_+}{\omega_+ - \frac{\Omega_c}{f_0}} + \frac{\omega_+}{\omega_+ + \frac{\Omega_c}{f_0}} \right), \quad (4.32)$$

$$D_- = \omega_-^{*2} - c^2 k_-^{*2} - \frac{\omega_p^2}{f_0} \left(\frac{\omega_-^*}{\omega_-^* - \frac{\Omega_c}{f_0}} + \frac{\omega_-^*}{\omega_-^* + \frac{\Omega_c}{f_0}} \right). \quad (4.33)$$

La ecuación (4.30) sugiere que podemos definir una velocidad de sonido efectiva

$$v_s^2 = \frac{v_t^2}{f_0}. \quad (4.34)$$

En la Fig. 4.2 comparamos la velocidad de sonido, dada por la Ec. (4.34), con la velocidad de sonido clásica $v_s = \sqrt{k_B T/m}$. Para bajas temperaturas ambos resultados son equivalentes, mientras que para altas temperaturas la velocidad de sonido

efectiva está acotada por el límite $c/\sqrt{3}$, el cual es un resultado conocido para plasmas relativistas con temperatura finita [61].

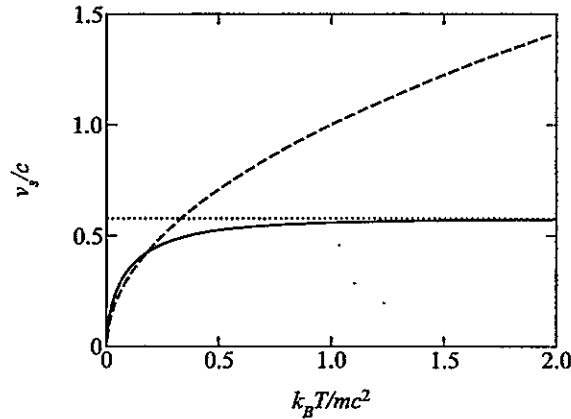


Figura 4.2: Velocidad del sonido normalizada como función de la temperatura normalizada $\mu^{-1} = k_B T/mc^2$. Línea segmentada: resultado clásico ($f = 1$), $v_s/c = v_t/c = \sqrt{\mu^{-1}}$ [ver Ec. (4.10)]. Línea continua: resultado relativista [ver Ec. (4.34)]. La línea punteada horizontal representa el valor límite $1/\sqrt{3}$.

La ecuación (4.29) muestra que los modos normales corresponden a una onda electroacústica (dada por $S = 0$), ondas de Langmuir ($L = 0$), y ondas electromagnéticas de bandas laterales (*sideband*) ($D_{\pm} = 0$). En la presencia de la onda bomba ($\alpha \neq 0$) esos modos normales se acoplan y dan origen a los decaimientos paramétricos. Estudiaremos estos decaimientos en detalle en la Sec. 4.3.

4.3. Análisis numérico de la relación de dispersión

En esta sección resolveremos la relación de dispersión (4.25) numéricamente. Para esto, escogeremos un valor para el número de onda normalizado de la onda bomba $y_0 = k_0 c/\Omega_c$, para un valor dado de α y μ , y resolveremos (3.21) para obtener la frecuencia de la bomba normalizada $x_0 = \omega_0/\Omega_c$, tal como se hizo en la Sec. 3.2 y en

la Ref. [35]. Hacemos notar que, en particular, esto implica la elección de una rama de la onda bomba, debido a que a un k_0 dado le pueden corresponder hasta cuatro valores de ω_0 .

Luego, resolvemos la Ec. (4.25). En la Fig. 4.3 la onda bomba (x_0, y_0) ha sido escogida en la rama de Alfvén, cerca del origen [ver Fig. 4.1(b)]. La Fig. 4.3(a) muestra las soluciones de la Ec. (4.25) para $y_0 = 1$, $\omega_p/\Omega_c = 1$, $1/\mu = 0.01$ y $\alpha = 0$, lo cual es equivalente a resolver la Ec. (4.29). Hay 12 líneas, dos de las cuales corresponden a modos electroacústicos que son soluciones reales de $S = 0$. Han sido etiquetadas como S_+ y S_- , correspondientes a modos que se propagan paralelamente (hacia adelante) y antiparalelamente (hacia atrás) respecto al campo magnético de fondo, respectivamente. Otras dos líneas corresponden a modos de Langmuir dados por $L = 0$ y etiquetadas como L_+ (adelante) y L_- (atrás). Las ocho líneas restantes corresponden a las ocho soluciones reales de $D_{\pm} = 0$. Cuatro de esas líneas son parabólicas y corresponden a las ramas electromagnéticas en la Fig. 4.1, y han sido etiquetadas como D_{\pm} en la Fig. 4.3(a). Las dos líneas p_{\pm} también corresponden a soluciones de D_{\pm} , pero ellas resuenan en la frecuencia de *sideband* $\omega_{\pm} = \Omega_c/f_0$, la cual en el caso frío es la girofrecuencia de los positrones [ver Ecs. (4.32) y (4.33)]. En términos de la frecuencia longitudinal normalizada $x = \omega/\Omega_c$, la resonancia ocurre en $x = \pm(-x_0 + 1/f_0)$, como se muestra en la figura 4.3. De la misma manera, e_{\pm} son dos soluciones que resuenan en la frecuencia de *sideband* $\omega_{\pm} = -\Omega_c/f_0$ (la cual, en el límite frío, es la girofrecuencia de los electrones), que está en $x = \pm(-x_0 - 1/f_0)$.

Podemos ver de la Fig. 4.3(a) que hay varios cruces posibles entre las soluciones de la relación de dispersión. En esos cruces pueden aparecer soluciones complejas cuando $\alpha \neq 0$. Debido a que el polinomio que se resuelve tiene coeficientes reales, esas soluciones siempre ocurren como pares complejos conjugados, en consecuencia una

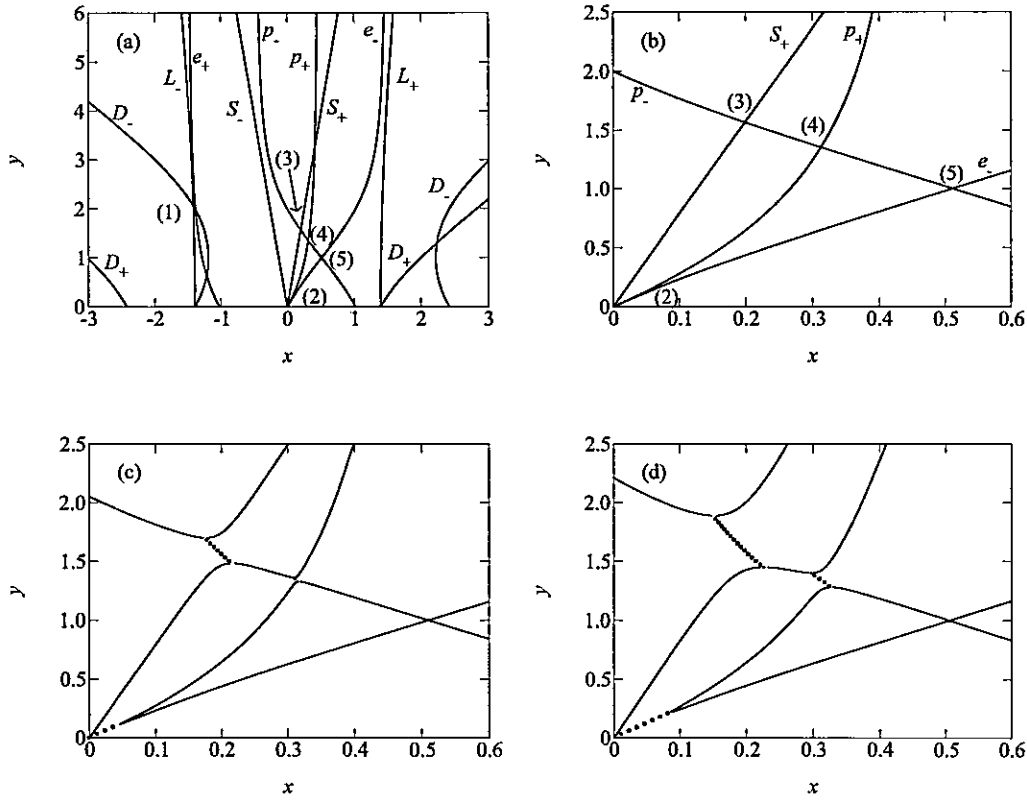


Figura 4.3: Solución de la relación de dispersión Ec. (4.25). Número de onda normalizado $y = kc/\Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ para $y_0 = 1$, $\omega_p/\Omega_c = 1$, $1/\mu = 0.01$. Tomamos la onda bomba en la rama de Alfvén. (a) $\alpha = 0$. (b) Sector de interés para $\alpha = 0$, (c) $\alpha = 0.1$, y (d) $\alpha = 0.2$. Las líneas punteadas representan la parte real de la solución cuando ésta es compleja.

de ellas tendrá parte imaginaria positiva. Por lo tanto, la desaparición de soluciones reales cuando $\alpha \neq 0$ implica la presencia de ondas inestables, correspondientes a los decaimientos paramétricos de la onda bomba.

Sólo los cruces que involucran a modos que satisfacen la condición de resonancia $\omega_1 + \omega_2 = l\omega_0$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) pueden resultar en un acoplamiento de ondas, cuando la onda bomba es encendida ($\alpha \neq 0$). Estos cruces han sido etiquetados en la Fig. 4.3(a) con los números del (1) al (5). En lo sucesivo, sin embargo, el cruce (1) no ha sido

considerado debido a que es inestable sólo en un intervalo de temperaturas muy acotado (cerca de $\mu^{-1} \approx 0.01$) y su tasa máxima de crecimiento es demasiado pequeña (10^{-3}) comparada con la de los otros cruces. Por esto, centraremos nuestra atención en los cruces (2)–(5), que se muestran detalladamente en la Fig. 4.3(b) para $\alpha = 0$. El cruce (3) corresponde a un acoplamiento resonante ($\ell = 1$), y los cruces (2), (4) y (5) corresponden a acoplamientos no resonantes ($\ell \neq 1$).

Ahora encendemos la bomba al considerar $\alpha \neq 0$. En la Fig. 4.3(c) $\alpha = 0.1$, y notamos que algunos cruces se han separado. Esto significa que en esos cruces tenemos soluciones complejas cuyas partes reales están indicadas con líneas punteadas, mientras que las soluciones reales corresponden a líneas continuas. Por lo tanto, tenemos inestabilidades, indicando acoplamientos de ondas. Por ejemplo, el cruce (3) da lugar a un acoplamiento entre (S_+, p_-) , correspondiente a una inestabilidad de decaimiento ordinaria, en la cual la onda bomba decae en un modo electroacústico de frecuencia ω , que se propaga hacia adelante, y en una onda *sideband* electromagnética de frecuencia ω_- . El cruce (4) conduce a un acoplamiento no resonante entre (p_+, p_-) , en el cual la onda bomba decae en dos ondas *sideband* electromagnéticas de frecuencia ω_- y ω_+ . En el caso del cruce (5) no hay separación, y por lo tanto no hay inestabilidad. Finalmente, el cruce (2) representa la intersección de (p_+, e_-) en el origen, por lo que corresponde a una inestabilidad modulacional electromagnética [69]. Ahora aumentamos la amplitud de la bomba a $\alpha = 0.2$ [Fig. 4.3(d)]. La situación es cualitativamente similar a la Fig. 4.3(c), excepto que ahora las separaciones en los cruces (2), (3) y (4) son más grandes. El cruce (5) se mantiene estable.

Como se mencionó anteriormente, la aparición de separaciones en los cruces significa que hay modos cuya frecuencia tiene parte imaginaria diferente de cero. Existen varios posibles decaimientos simultáneamente, pero no todos serán igualmente re-

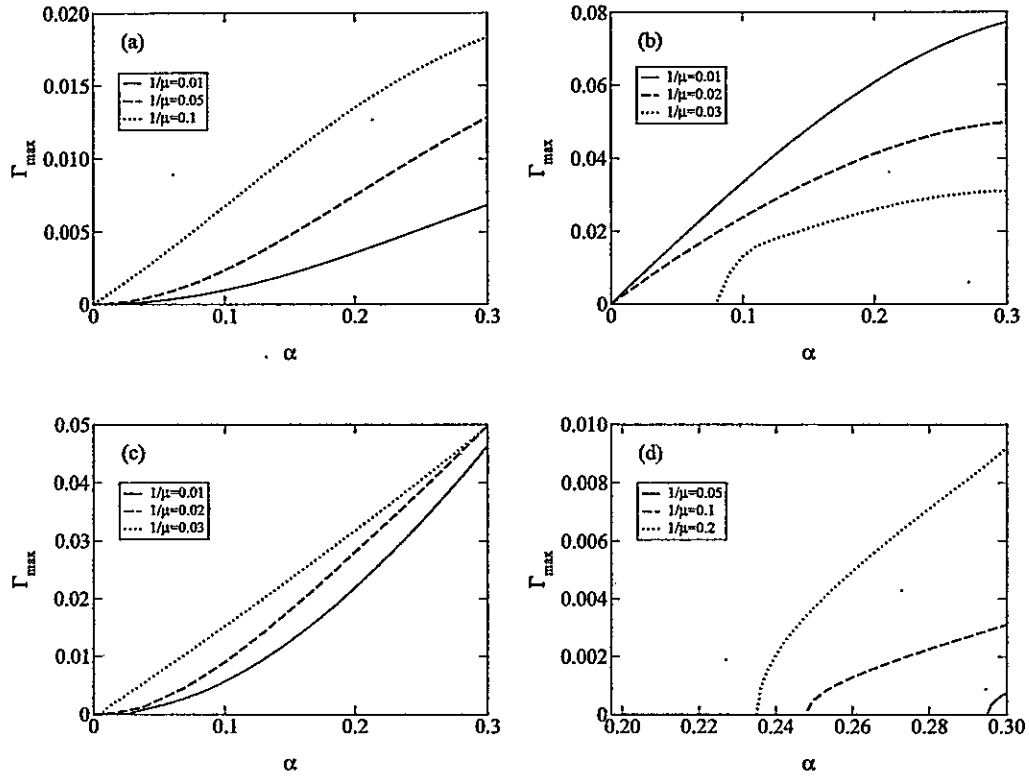


Figura 4.4: Tasa máxima de crecimiento vs. amplitud de la onda bomba α . Las etiquetas numéricas de los cruces son tomadas de la Fig. 4.3. (a) Cruce (2), (p_+, e_-) . (b) Cruce (3), (S_+, p_-) . (c) Cruce (4), (p_+, p_-) . (d) Cruce (5), (e_-, p_-) .

levantes. Podemos cuantificar esto calculando, para un valor dado de α , el máximo valor de la parte imaginaria en cada separación. Al comparar estos valores para todas las separaciones, podremos ganar intuición acerca de la importancia relativa de cada decaimiento para diferentes valores de α . Esto se muestra en la Fig. 4.4. Definimos la parte imaginaria de la frecuencia como $\Gamma = \text{Im}(x)$, y en cada separación buscamos su máximo valor Γ_{\max} (tasa máxima de crecimiento), y la graficamos en función de α para diferentes temperaturas. La primera característica interesante que observamos es que el cruce (3) [Fig. 4.4(b)] es el único cruce que tiende a saturar con el

incremento de la temperatura. En todos los demás casos [Figs. 4.4(a), (c), (d)] las inestabilidades son mayores cuando se aumenta la temperatura. También observamos que el acoplamiento resonante (3) exhibe la dependencia lineal esperada con α , para α pequeño, mientras que los no resonantes usualmente muestran un comportamiento cuadrático para valores pequeños de α .

Otra característica interesante es que, para algunos cruces, existe un umbral para α bajo el cual no hay inestabilidades, y ese umbral depende de la temperatura. Esto puede ser visto en la Fig. 4.4(b), la cual muestra que el cruce (3) da lugar a una inestabilidad sólo si $\alpha > 0.07$, aproximadamente, cuando $1/\mu = 0.03$, mientras que no existe tal umbral para las temperaturas mayores mostradas en ese gráfico. En el caso del cruce (5) [Fig. 4.4(d)], existe un umbral para todas las temperaturas. Cuando la temperatura aumenta, menores valores de α son requeridos para desencadenar una inestabilidad.

En la Fig. 4.4 hemos mostrado el comportamiento de las inestabilidades para unas pocas temperaturas representativas. Sin embargo, con el fin de tener una mayor claridad acerca de la dependencia con la temperatura hemos graficado la tasa máxima de crecimiento para los tres cruces como función de la temperatura y de la amplitud de la bomba. Esto se muestra en la Fig. 4.5. Las Figs. 4.5(a), (b) y (c) corresponden a los cruces (2), (3), y (4), respectivamente. Notemos que las tres curvas en la Fig. 4.4(a) pueden ser obtenidas haciendo cortes con planos para μ constante en la Fig. 4.5(a); igualmente para curvas en la Fig. 4.4(b), (c) y (d), con planos para μ constante en la figura Fig. 4.5(b), (c) y (d), respectivamente. Es interesante notar que, para cada valor de la amplitud de la bomba, el máximo de la tasa máxima de crecimiento siempre ocurre para $\mu^{-1} \leq 0.3$. En la Fig. 4.5(a), (b) y (d) vemos que para $\mu^{-1} > 0.1$ las inestabilidades desaparecen, pero la Fig. 4.5(c) muestra que el cruce (4) sigue

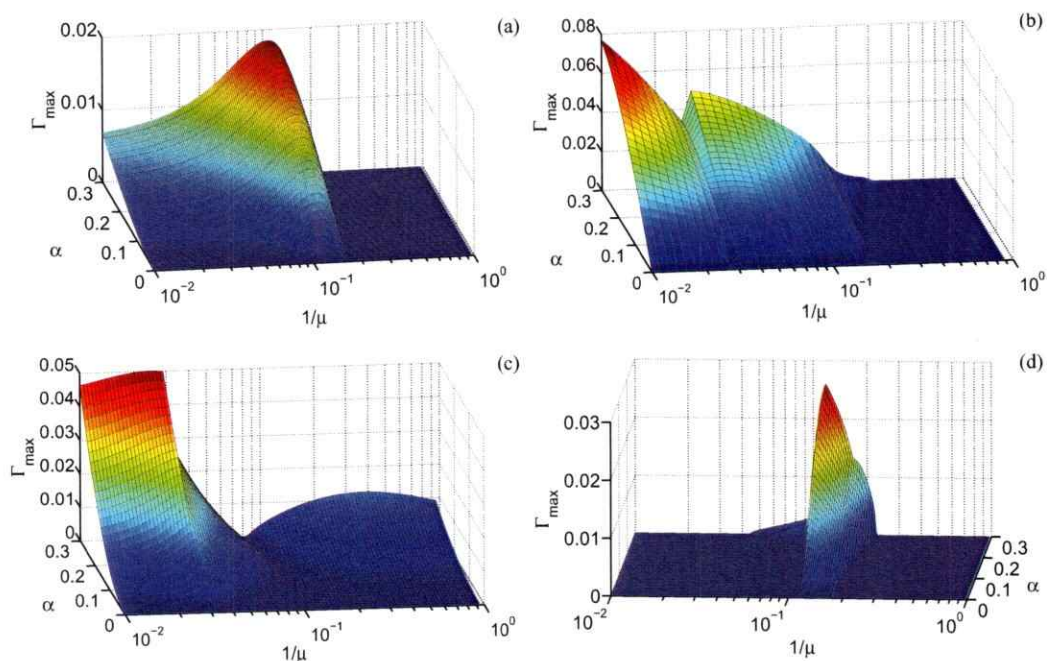


Figura 4.5: Tasa máxima de crecimiento para diferentes valores de la amplitud de la bomba α y la temperatura $1/\mu$. Notar que la escala para la temperatura es logarítmica. (a) Cruce (2), (p_+, e_-) . (b) Cruce (3), (S_+, p_-) . (c) Cruce (4), (p_+, p_-) . (d) Cruce (5), (e_-, p_-) .

siendo inestable. Vemos entonces que para altas temperaturas el cruce (4), entre (p_+, p_-) , es el dominante.

En la Fig. 4.6 hemos graficado la parte imaginaria de la frecuencia como función del número de onda, para diferentes valores de α y un valor fijo de μ . Esta figura nos da una indicación sobre el ancho de banda sobre el cual ocurren los acoplamientos. Es interesante notar que un modo de distinguir las distintas inestabilidades es graficar Γ vs. y/y_0 [70]. En este caso, sin embargo, $y_0 = 1$, de modo que las figuras no cambian. Hemos etiquetado las inestabilidades como en la Fig. 4.3(a). En la Fig. 4.6(a) tomamos $1/\mu = 0.01$, y como es de esperar para este intervalo de valores de α , el acoplamiento resonante (3) es el dominante, teniendo mayor tasa de crecimiento y

ancho de banda que los demás acoplamientos no resonantes, (2), (4) y (5). Esto también ocurre en la Fig. 4.6(b), para $1/\mu = 0.02$. Sin embargo el ancho de banda del cruce (3) se ha reducido significativamente, mientras que para los cruces (2) y (4) se ha incrementado ligeramente. En la Fig. 4.6, el cruce (5) no aparece debido a que es estable para esas temperaturas.

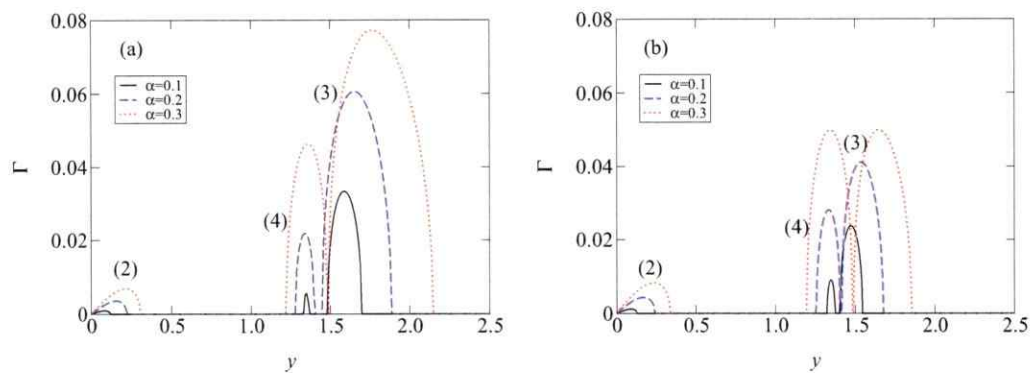


Figura 4.6: Parte imaginaria de la frecuencia vs. número de onda normalizado, para diferentes valores de la amplitud de la onda bomba. Las etiquetas numéricas para los cruces se han tomado de la Fig. 4.3. (a) $1/\mu = 0.01$. (b) $1/\mu = 0.02$.

La Fig. 4.6 sugiere que el acoplamiento dominante puede ser diferente para diferentes valores de α y μ . Podemos apreciar esto en la Fig. 4.7, donde hemos graficado la tasa máxima de crecimiento a lo largo de todos los cruces, para diferentes temperaturas y amplitudes de la bomba. Las discontinuidades en la derivada de la superficie graficada son la indicación del cambio de régimen, donde el máximo de la tasa máxima de crecimiento cambia de un cruce a otro. En particular, para bajas temperaturas el comportamiento dominante está dado por el cruce (3), entre (S_+, p_-) , mientras que para altas temperaturas está dado por el cruce (4), entre (p_+, p_-) , el cual resulta ser el único acoplamiento presente para esas temperaturas.

Ahora estudiamos la relación de dispersión, Ec. (4.25), para una onda bomba en la

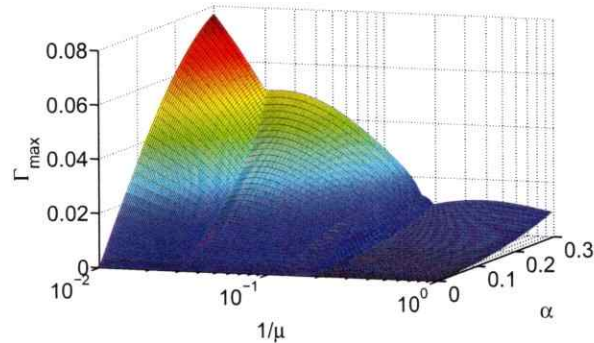


Figura 4.7: Tasa máxima de crecimiento para diferentes valores de la amplitud de la onda bomba α y temperatura $1/\mu$, en escala logarítmica para la temperatura, considerando todos los cruces existentes.

rama electromagnética [ver Fig. 4.1(b)]. Tomamos $y_0 = 1$, y resolvemos la Ec. (3.21) para encontrar x_0 en la rama electromagnética. En la Fig. 4.8 mostramos la relación de dispersión de los decaimientos para $1/\mu = 0.01$ y $\omega_p/\Omega_c = 1$. Identificamos cinco cruces que dan lugar a inestabilidades. En las Figs. 4.8(b)–(d) usamos diferentes valores de α para mostrar que los cruces (1)–(5) se vuelven separaciones cuando la bomba es encendida.

El cruce (1) es un acoplamiento no resonante entre (D_-, p_+) . El cruce (2) es un acoplamiento resonante entre (S_-, p_+) , en el cual la onda bomba decae en un modo electroacústico de frecuencia $-\omega$ y una onda *sideband* electromagnética de frecuencia ω_+ . Del mismo modo, el cruce (3) es un acoplamiento resonante entre (S_+, p_-) , donde la onda bomba decae en un modo electroacústico de frecuencia ω y una onda *sideband* electromagnética de frecuencia ω_- . El cruce (4) es un acoplamiento entre (D_-, S_+) y corresponde a una inestabilidad modulacional resonante ($y \approx 0$). Finalmente, el cruce (5) es también una inestabilidad modulacional resonante, donde el acoplamiento es entre (L_-, p_+) .

Al aumentar α y/o μ , los cruces en la Fig. 4.8 cambiarán de posición, debido a que,

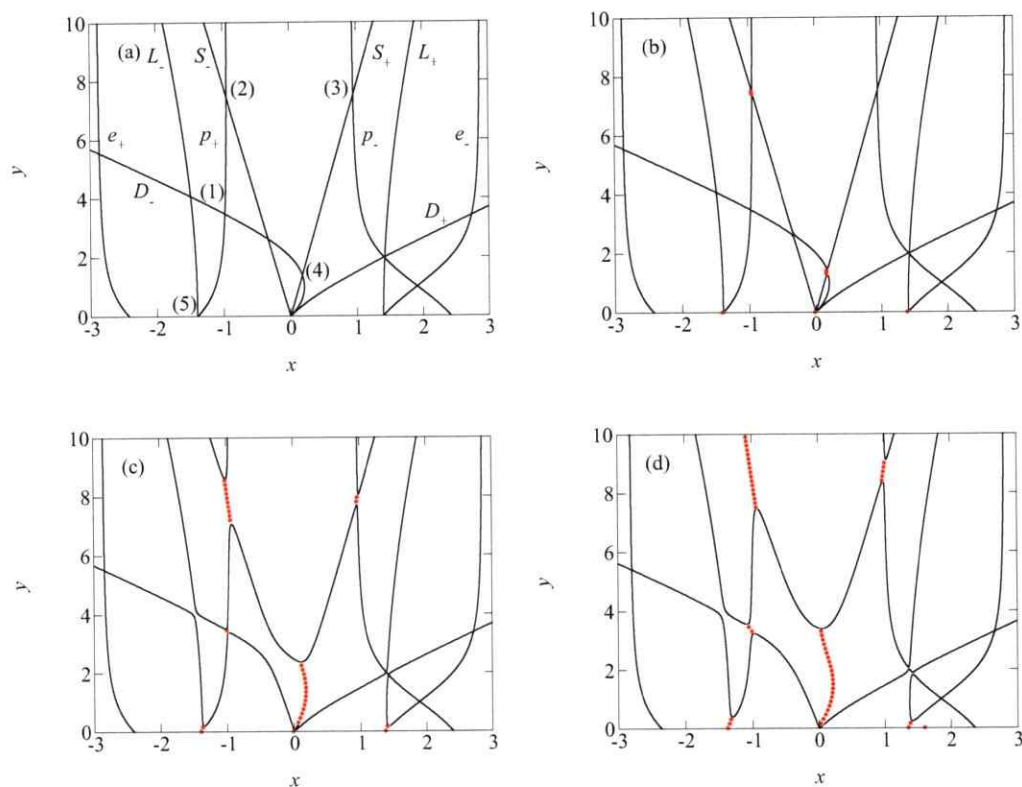


Figura 4.8: Relación de dispersión Ec. (4.25). Número de onda normalizado $y = kc/\Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ para $y_0 = 1$, $\omega_p/\Omega_c = 1$, $1/\mu = 0.01$. Tomamos la onda bomba en la rama electromagnética. (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.001$. (c) $\alpha = 0.1$. (d) $\alpha = 0.2$. Las líneas punteadas representan la parte real de la solución cuando ésta es compleja.

por ejemplo, al aumentar μ la velocidad del sonido aumenta, lo que provoca que las soluciones S_+ y S_- tengan pendientes cada vez más pronunciadas y las intersecciones con las demás soluciones cambiarán de ubicación. Por esta razón, no siempre es fácil seguir cada uno de los cruces a medida que variamos α y/o μ , sin embargo para el intervalo de valores en la Fig. 4.8, y un cierto intervalo de valores de μ , es posible hacerlo. En la Fig. 4.9 mostramos la tasa máxima de crecimiento para cada cruce. Es posible identificar algunos cruces para un gran intervalo de temperaturas, mientras

que otros pierden su identidad para valores pequeños de μ . La tasa de crecimiento de las inestabilidades en (1) y (2) crece con el aumento de la temperatura, mientras que en (3), (4) y (5) decrece al aumentar la temperatura. En esta figura podemos ver también que para $\alpha \ll 1$ la inestabilidad tiene una dependencia lineal en α para los acoplamientos resonantes y cuadrática para los no resonantes, tal como era de esperar. El caso del cruce (3) es de particular interés, debido a que para pequeños valores de α la tasa de crecimiento aumenta, alcanzando un cierto valor máximo, y luego para valores suficientemente grandes de α se estabiliza. Con el incremento de la temperatura, la inestabilidad desaparece rápidamente.

Debido a la dificultad para seguir cada cruce a grandes temperaturas, hemos escogido los cruces (1), (4) y (5) para mostrar su comportamiento como función de la temperatura y la amplitud de la bomba. En la Fig. 4.10 vemos que las inestabilidades disminuyen para altas temperaturas.

En la Fig. 4.11, graficamos la parte imaginaria de la frecuencia como función del número de onda. Notemos que, para el intervalo de temperaturas escogido en la Fig. 4.11, todos los cruces pueden ser individualizados. Como esperamos, la tasa de crecimiento de las inestabilidades resonantes es mayor que la de las no resonantes, es decir, el acoplamiento (4) tiene la mayor tasa de crecimiento y cubre la banda de números de onda más grande. Esta banda decrece con la temperatura, debido a que la velocidad del sonido aumenta con la temperatura. En la Fig. 4.12 graficamos la tasa máxima de crecimiento para todos los cruces para diferentes temperaturas, vemos que para temperaturas bajo $\mu^{-1} \approx 0.1$ el comportamiento es dominado por el cruce resonante (4) [ver Fig. 4.10(b)]. También vemos en la Fig. 4.12 que la tasa máxima de crecimiento siempre disminuye con la temperatura.

Finalmente, resolvemos la relación de dispersión (4.25) para $y_0 = 4.632$ y x_0 en

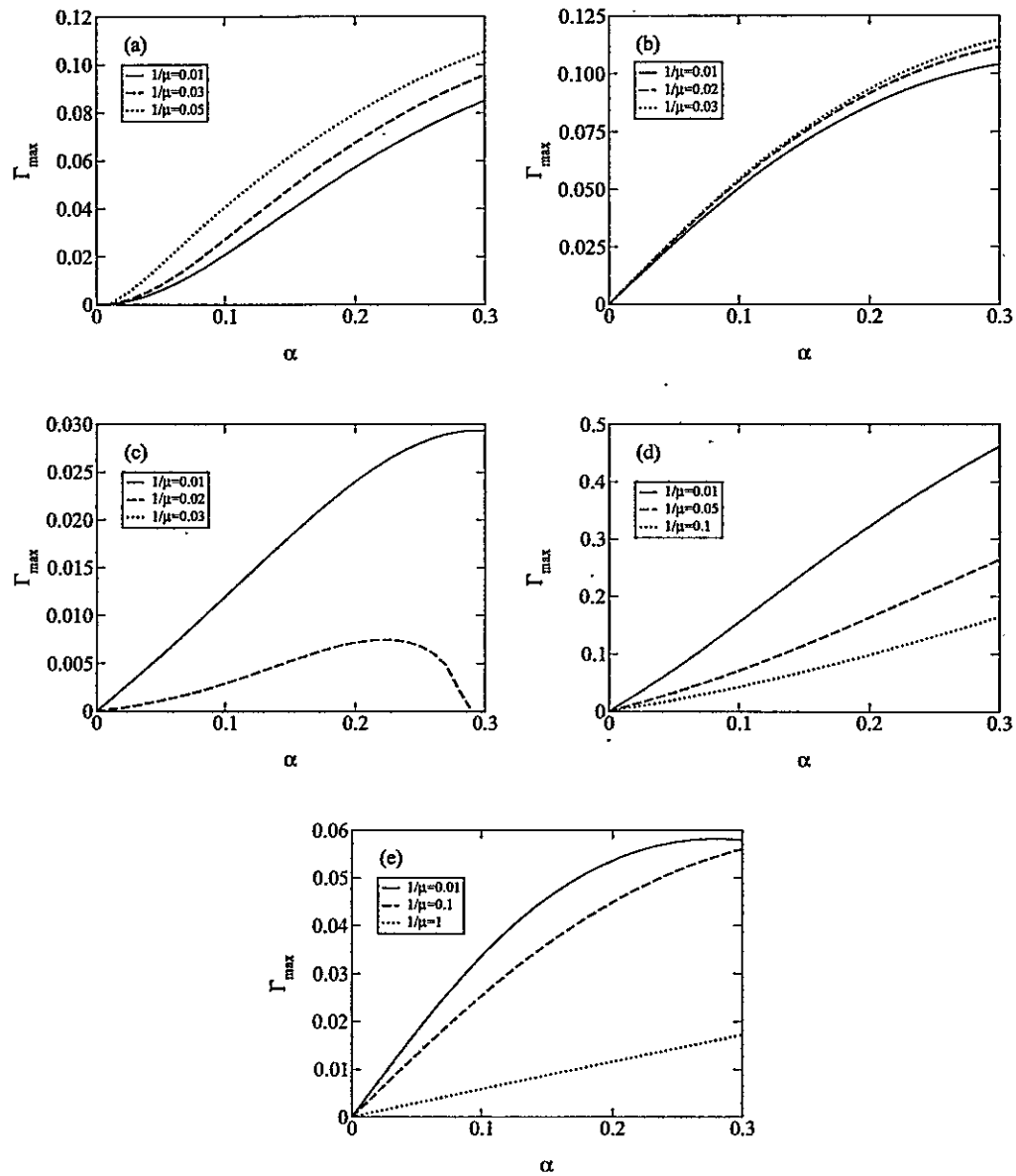


Figura 4.9: Tasa máxima de crecimiento Γ_{\max} vs. amplitud de la onda bomba α , para diferentes valores de la temperatura $1/\mu$. Las etiquetas numéricas de los cruces corresponden a la Fig. 4.8. (a) Cruce (1), (D_-, p_+) . (b) Cruce (2), (S_-, p_+) . (c) Cruce (3), (S_+, p_-) . (d) Cruce (4), (D_-, S_+) . (e) Cruce (5), (L_-, p_+) .

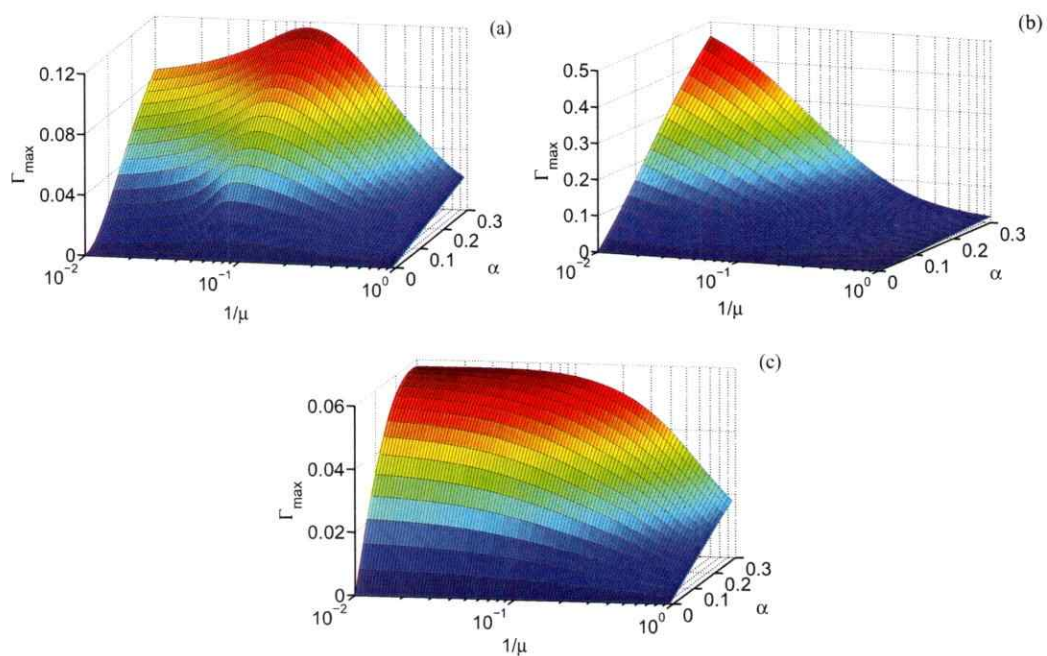


Figura 4.10: Tasa máxima de crecimiento para diferentes valores de la amplitud de la onda bomba α y la temperatura $1/\mu$. (a) Cruce (1), (D_-, p_+) . (b) Cruce (4), (D_-, S_+) . (c) Cruce (5), (L_-, p_+) .

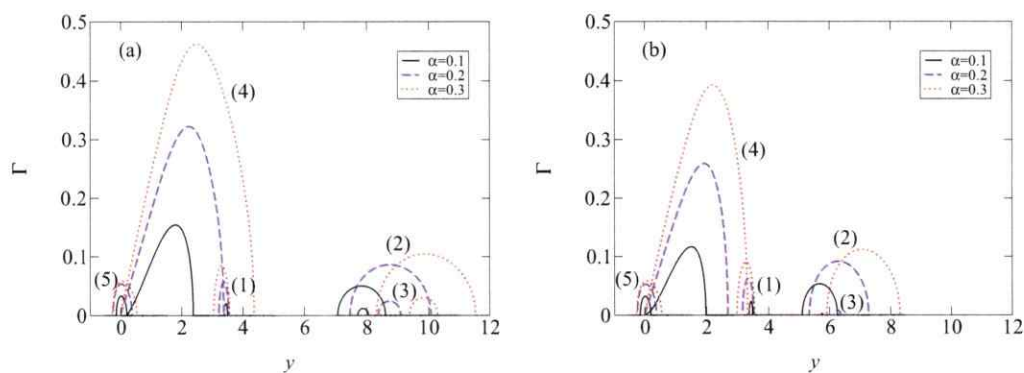


Figura 4.11: Parte imaginaria de la frecuencia vs. número de onda normalizado para todos los cruces en la Fig. 4.8. (a) $1/\mu = 0.01$. (b) $1/\mu = 0.02$.

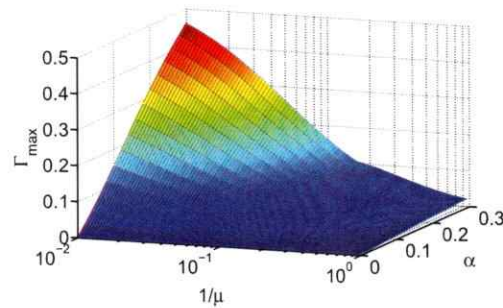


Figura 4.12: Tasa máxima de crecimiento para diferentes amplitudes de la onda bomba α y temperaturas $1/\mu$, en escala logarítmica para la temperatura, considerando todos los cruces en la Fig. 4.8.

la zona anómala de la rama de Alfvén [ver Fig. 4.1(b), donde $d\omega/dk < 0$]. En la Fig. 4.13(a) hemos identificado las ramas para $\alpha = 0$. Para asegurarnos de que la onda bomba esté en la zona anómala de la rama de Alfvén, α no puede superar el valor máximo $\alpha_{\max} \simeq 0.046$. Este valor depende solamente de Ω_c/ω_p , y no de la temperatura, como se indica en la Ec. (3.25).

En las Figs. 4.13(b)–(d) usamos diferentes valores para $\alpha < \alpha_{\max}$. Es interesante notar la inestabilidad que ocurre para grandes valores de y , cercanos a $x \approx 0$, debido al acoplamiento entre (p_-, p_+) , el cual puede ser considerado como una inestabilidad modulacional electromagnética. En la Fig. 4.14 graficamos la tasa máxima de crecimiento considerando todas las inestabilidades mostradas en la Fig. 4.13. Para altas temperaturas, existe una transición desde una inestabilidad dominante a otra, a medida que aumentamos α . El comportamiento con la temperatura es similar al de los casos anteriores, para la onda bomba en la rama de Alfvén [Fig. 4.7] y en la rama electromagnética [Fig. 4.12]. Sin embargo, notamos que Γ_{\max} [Fig. 4.14] es aproximadamente un orden de magnitud mayor que en la Fig. 4.7, cuando la bomba es una onda en la zona normal de la rama de Alfvén. Esta diferencia puede ser ob-

servada en la Fig. 4.15, donde escogemos una amplitud de la onda bomba $\alpha = 0.04$ y una temperatura μ , y graficamos la tasa máxima de crecimiento en función del número de onda, en la rama de Alfvén. La inestabilidad aumenta conforme aumenta el número de onda y_0 , llegando a su máximo valor dentro de la zona anómala.

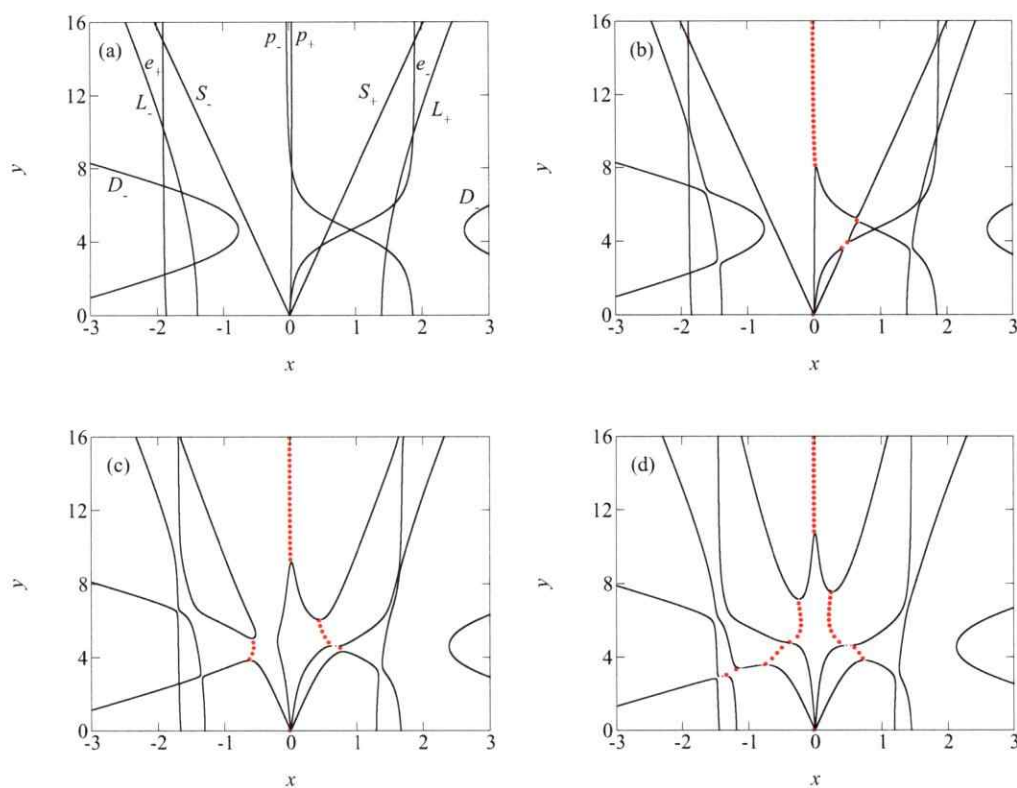


Figura 4.13: Relación de dispersión Ec. (4.25). Número de onda normalizado $y = kc/\Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ para $y_0 = 4.632$, $\omega_p/\Omega_c = 1$, $1/\mu = 0.01$. Hemos tomado la onda bomba en la zona anómala de la rama de Alfvén. (a) $\alpha = 0$. (b) $\alpha = 0.01$. (c) $\alpha = 0.03$. (d) $\alpha = 0.04$. Las líneas punteadas representan la parte real de la solución cuando ésta es compleja.

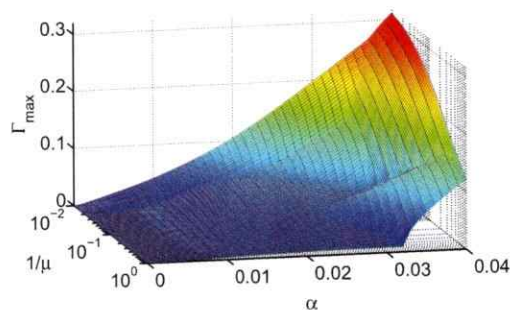


Figura 4.14: Tasa máxima de crecimiento para diferentes valores de la amplitud de la bomba α y la temperatura $1/\mu$, en escala logarítmica para la temperatura, considerando todos los cruces en la Fig. 4.13.

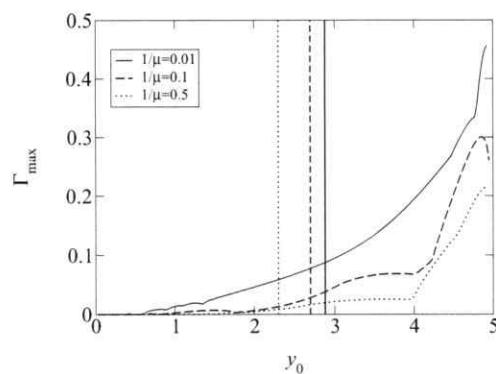


Figura 4.15: Tasa máxima de crecimiento Γ_{\max} vs. número de onda de la onda bomba y_0 , para $\alpha = 0.04$ y diferentes temperaturas. Las líneas verticales indican el valor de y_0 donde $d\omega/dk = 0$.

4.4. Conclusiones

Hemos analizado los decaimientos paramétricos de una onda transversal circularmente polarizada en un plasma relativista de electrones y positrones con temperaturas relativistas, solución exacta a las ecuaciones de fluidos relativistas encontrada en la Ref. [35]. Estudiamos la aparición de los decaimientos, sus tasas de crecimiento y su intervalo de inestabilidad para diferentes temperaturas y amplitudes de la onda

bomba. También consideramos ondas bombas en tres posibles regiones: en la rama de Alfvén; cerca del origen y en la zona anómala, y en la rama electromagnética. Existen acoplamientos resonantes y no resonantes cuando la onda está presente. Para temperaturas suficientemente grandes, la mayor parte de las inestabilidades desaparecen. Para ciertos acoplamientos existe un umbral en la amplitud de la onda bomba, bajo el cual los modos permanecen estables; sólo una vez superado ese umbral las inestabilidades comienzan a crecer.

Cuando la onda bomba pertenece a la zona anómala de la rama de Alfvén ($d\omega/dk < 0$ para $\omega > 0$), la dependencia con la temperatura es similar a la de los casos anteriores, pero notamos que Γ_{\max} se incrementa rápidamente con α , a diferencia de lo que ocurre en la zona normal y en la rama electromagnética, lo cual sugiere que ondas de amplitud finita en este intervalo de frecuencias se desestabilizarán más rápido, algo que pretendemos estudiar más adelante.

Capítulo 5

Automodulación de ondas de Alfvén en plasmas fuertemente magnetizados

El estudio de los decaimientos paramétricos presentado en el Capítulo anterior no es el único modo de estudiar la evolución no lineal de una onda. De hecho, esperamos que sea relevante más bien para la evolución temprana de la onda, cuando las ondas producidas por los decaimientos sean de amplitud pequeña, justificando la linealización de las ecuaciones de fluido. Para tiempos mayores requerimos en general otros formalismos, en particular basados en ecuaciones no lineales para la amplitud de la onda, que permiten estudiar, por ejemplo, la aparición de estructuras localizadas.

El objetivo de este capítulo es estudiar la formación de solitones como resultado de la propagación de una onda no lineal de Alfvén, en un plasma relativista de electrones y positrones fuertemente magnetizado. Como en los capítulos anteriores, introduciremos también el efecto de temperaturas relativistas. Usaremos la solución encontrada en el Cap. 3, la cual como vimos presenta dos ramas: la electromagnética y la de Alfvén, las cuales fueron estudiadas en detalle en el Cap. 3 y la Ref. [35]. Vimos que además de la rama de Alfvén típica, el rango de baja frecuencia posee

una zona anómala, donde $d\omega/dk$ es negativa. En este capítulo consideraremos ambas zonas de la rama de Alfvén: la normal y la anómala.

Los resultados de este capítulo han sido publicados en la Ref. [71].

5.1. Ecuaciones no lineales

En muchas ocasiones las ondas que se propagan en un plasma son capaces de adquirir amplitudes finitas, tal que las relaciones de dispersión lineales, válidas sólo para pequeñas amplitudes, ya no son capaces de describir los fenómenos. Existen dos ecuaciones no lineales que han sido ampliamente estudiadas en relación a la propagación de ondas no lineales en plasmas: la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS). Cada una describe distintos tipos de no linealidades. En esta sección daremos una pequeña descripción de cada una de estas ecuaciones, la cual servirá como base para el desarrollo de este capítulo.

5.1.1. Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

Ésta es una de las ecuaciones más famosas en el estudio de ondas no lineales, usándose en muchas áreas de la física incluyendo la física de plasmas [72-74]. La forma general de la ecuación KdV es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \beta \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} = 0, \quad (5.1)$$

donde Ψ describe la amplitud de alguna cantidad física del sistema y β es una constante. Notamos claramente la naturaleza no lineal de esta ecuación, debida a la presencia del segundo término en (5.1). El tercer término en (5.1) contribuye como un término dispersivo.

Usando la transformación $\xi = z - vt$, la Ec. (5.1) se puede escribir como

$$-v \frac{d\Psi}{d\xi} + \Psi \frac{d\Psi}{d\xi} + \beta \frac{d^3\Psi}{d\xi^3} = 0. \quad (5.2)$$

Escogiendo condiciones de borde tales que la solución esté localizada: $\Psi \rightarrow 0$ y $d\Psi/d\xi \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, una solución es

$$\Psi(\xi) = 3v \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{v}{\beta}} \frac{\xi}{2} \right)^2, \quad (5.3)$$

o en función de las variables originales,

$$\Psi(z, t) = 3v \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{v}{\beta}} \frac{z - vt}{2} \right)^2. \quad (5.4)$$

La Fig. 5.1 muestra la solución (5.3) para $v = 1/3$ y $\beta = 1/2$. Vemos que la amplitud alcanza su máximo en $\xi = 0$ y se desvanece para $\xi \rightarrow \pm\infty$. De la Fig. 5.1 y la Ec. (5.4) vemos que esta solución representa una protuberancia localizada moviéndose con velocidad v . Debido a que esta onda se propaga con gran estabilidad, sin sufrir deformaciones, es conocida como una onda solitaria. Se ha probado que una onda solitaria es capaz de sobrevivir a la colisión con otra de estas ondas. Por este comportamiento tipo partícula es que estas ondas reciben el nombre de "solitón".

Este tipo de soluciones existe debido al balance que existe entre los efectos no lineales y dispersivos del sistema [segundo y tercer término en la Ec. (5.1), respectivamente]. Se puede demostrar [75] que el término no lineal $\Psi \partial \Psi / \partial x$ provoca que la parte superior de la onda tenga una velocidad mayor que la parte inferior de ésta, produciendo que el pulso se deforme, haciendo que la parte superior de la onda sobrepase a la parte inferior. Este efecto es compensado con el término dispersivo, deteniendo la deformación de la onda y dando como resultado que el pulso tenga la forma de un solitón.

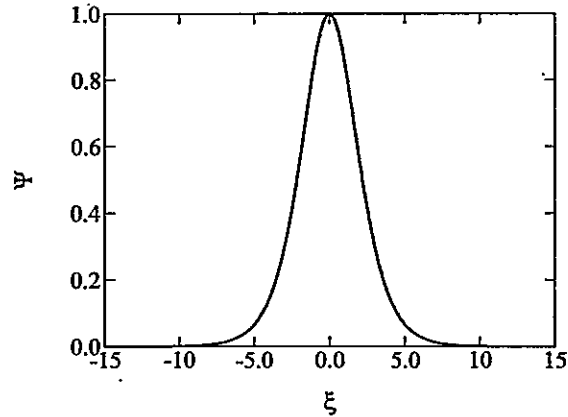


Figura 5.1: Amplitud Ψ vs. ξ , solitón Ec. (5.3), para $v = 1/3$ y $\beta = 1/2$.

5.1.2. Ecuación no lineal de Schrödinger (NLS)

La ecuación no lineal de Schrödinger permite describir una onda cuya amplitud es lo suficientemente grande tal que, al propagarse, modifica las propiedades del medio de modo que su amplitud deja de ser constante, evolucionando a una envolvente solitónica. Supondremos que los efectos no lineales del medio dan como resultado una modulación sobre la amplitud de una onda plana que se propaga a través de éste. La onda plana que es modulada se puede escribir como

$$\Psi(z, t) = \Phi(z, t)e^{i(k_0z - \omega_0t)} + \Phi(z, t)^*e^{-i(k_0z - \omega_0t)}, \quad (5.5)$$

donde $\Phi(z, t)$ es la envolvente compleja de la onda plana modulada. Supondremos que esta onda plana satisface una relación de dispersión no lineal de la forma

$$\omega = \omega(k, |\Phi|^2), \quad (5.6)$$

donde hemos supuesto que la no linealidad depende de la amplitud de la onda. Con una relación de dispersión de esta forma, podemos construir una ecuación para Φ

de la siguiente forma [75]: expandimos ω en torno a una cierta frecuencia ω_0 y el correspondiente número de onda k_0

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k_0}(k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial k_0^2}(k - k_0)^2 + \frac{\partial\omega}{\partial |\Phi|_0^2} |\Phi|^2, \quad (5.7)$$

donde $\partial\omega/\partial k_0$, $\partial^2\omega/\partial k_0^2$ y $\partial\omega/\partial |\Phi|_0^2$ han sido evaluados en $k = k_0$ y $\Phi = 0$. Sólo hemos considerado el orden más bajo en la no linealidad. Sustituyendo $\omega - \omega_0$ por el operador $i\partial/\partial t$ y $k - k_0$ por $-i\partial/\partial z$, en la Ec. (5.7) y aplicándolo sobre Φ , obtenemos

$$i \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial k_0} \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\omega}{\partial k_0^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial\omega}{\partial |\Phi|_0^2} |\Phi|^2 \Phi = 0. \quad (5.8)$$

Usando la transformación $\xi = z - (\partial\omega/\partial k_0)t$ y $\tau = t$, la ecuación anterior se reduce a

$$i \frac{\partial\Phi}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2} + Q |\Phi|^2 \Phi = 0, \quad (5.9)$$

donde $P = (1/2)\partial^2\omega/\partial k_0^2$ es la mitad de la derivada de la velocidad de grupo, y $Q = \partial\omega/\partial |\Phi|_0^2$ el cambio no lineal en la frecuencia. La Ec. (5.9) es conocida como la ecuación no lineal de Schrödinger, debido a su similitud con la ecuación de Schrödinger conocida de la mecánica cuántica,

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2} + V(\xi, \tau)\psi = 0. \quad (5.10)$$

En este caso, el potencial V depende de la amplitud de la misma onda $|\Phi|^2$.

Es posible obtener soluciones de la Ec. (5.9), pero la naturaleza de la solución dependerá de los signos de P y Q . Si ambos tienen el mismo signo, es decir, $PQ > 0$, la solución de la Ec. (5.9), la cual tiende a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, representa una onda solitaria:

$$\Phi(\xi, \tau) = \sqrt{-\frac{2\nu}{Q}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{-\frac{\nu}{P}} \xi \right) e^{-i\nu\tau}, \quad (5.11)$$

donde ν es una constante [76]. Esta solución tiene una forma similar a la solución solitónica encontrada en la sección anterior, por lo tanto es llamada envolvente solitónica (como se muestra en la Fig. 5.2). Una de las diferencias de esta solución con la de la ecuación KdV, es que esta envolvente solitónica se mueve a la velocidad $\partial\omega/\partial k_0$, la cual es independiente de la amplitud de la envolvente. De hecho, se puede mostrar que realizando una transformación de la forma $\bar{\xi} = \xi - v\tau$ y $\bar{\tau} = \tau$, la solución (5.11) se puede escribir como [76]

$$\Phi(\xi, \tau) = \sqrt{-\frac{2\nu}{Q}} \operatorname{sech} \left[\sqrt{-\frac{\nu}{P}} (\xi - v\tau) \right] \exp \left[i \left(\frac{v}{2P} \right) - \frac{i}{2} \left\{ \left(\frac{v}{2P} \right)^2 + 2\nu \right\} \tau \right] \quad (5.12)$$

donde ν y v son variables independientes. Esta solución muestra que la velocidad del solitón puede ser escogida de forma independiente de la amplitud y de $\partial\omega/\partial k_0$.

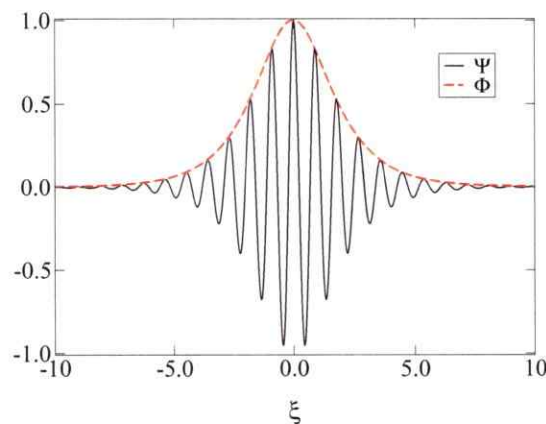


Figura 5.2: Envolvente solitónica. Línea continua: $\Psi(\xi, 0)$. Línea segmentada: envolvente $\Phi(\xi, 0)$.

En la Sec. 5.4.2 veremos de manera más clara que cuando P y Q tienen el mismo signo ($PQ > 0$), se desarrolla una inestabilidad modulacional, la cual produce una solución del tipo (5.11), mostrada en la Fig. 5.2.

5.1.3. Potencial de Sagdeev

Hasta ahora, hemos visto dos ecuaciones no lineales que resultan en soluciones solitónicas, dependiendo de los parámetros involucrados. Mostraremos un método que nos permitirá conocer si una ecuación diferencial puede producir soluciones en forma de solitón. Este método es conocido como el potencial de Sagdeev, o pseudopotencial. Usaremos como ejemplo la ecuación KdV para mostrar cómo funciona este método.

La Ec. (5.2) se puede escribir como [77]

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = 2v\Psi - \Psi^2. \quad (5.13)$$

El lado derecho de esta última ecuación puede ser escrito, a su vez, como el gradiente de un potencial, con lo cual queda una ecuación similar a la que se obtiene al estudiar el movimiento de una partícula bajo la acción de un potencial:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = -\frac{dV}{d\Psi}. \quad (5.14)$$

En este caso, $V = -v\Psi^2 + \Psi^3/3$. La Fig. 5.3(a) muestra la variación del potencial en función de la amplitud. Vemos que el potencial es nulo en $\Psi = 0$ y su segunda derivada es menor que cero en ese punto, por lo que es un máximo local. Para $0 < \Psi < 3v$ el potencial es negativo, si $v > 0$. Y para $\Psi > 3v$ el potencial es positivo. En la Fig. 5.3(b) vemos $d^2\Psi/d\xi^2$, que representa la fuerza en el caso de una partícula sometida a un potencial.

Imaginemos una pseudopartícula sometida al potencial mostrado en la Fig. 5.3, partiendo de $\Psi = 0$. A medida que la pseudopartícula avanza hacia la derecha, $\Psi > 0$, el potencial se vuelve negativo y la fuerza positiva. En $\Psi = 2v$ el potencial alcanza su mínimo valor y la fuerza comienza a cambiar de signo. Una vez que la

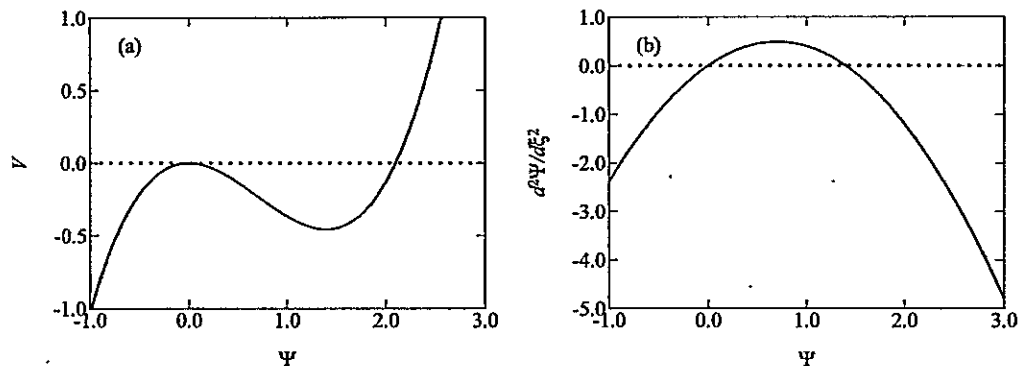


Figura 5.3: (a) Potencial V vs. Ψ . (b) $d^2\Psi/d\xi^2$ vs. Ψ . Ambos gráficos para $v = 0.7$.

pseudopartícula alcanza $\Psi = 3v$, el potencial es cero y la fuerza es positiva, por lo que esta pseudopartícula se devolverá. El proceso de regreso será análogo, pero al llegar a $\Psi = 0$ la fuerza será nula, por lo que la pseudopartícula permanecerá en ese lugar. Notamos que si la fuerza fuera distinta de cero, la pseudopartícula oscilaría entre los dos extremos del potencial. Ahora bien, en lugar de la posición de la pseudopartícula debemos hablar de la amplitud de la onda, por lo que el análisis anterior indica que ésta tendrá un máximo igual a $3v$ y será siempre positiva, tal como se muestra en la Fig. 5.1. Vemos entonces que este potencial da como resultado una solución solitónica, como ya sabíamos de la Sec. 5.1.1.

Hemos aprendido que la forma que tenga el potencial determinará si existe una solución en forma de solitón. La condición para que exista un solitón es:

$$(i) \left. \frac{d^2V}{d\Psi^2} \right|_{\Psi=0} < 0.$$

$$(ii) V(\Psi_{\text{máx}} > 0) > V(0).$$

5.2. Onda circularmente polarizada

Usaremos la onda circularmente polarizada descrita en el Cap. 3. Usando el gauge de Lorentz, la ecuación de ondas para el potencial vector es

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{A} = 4\pi c n e (\vec{v}_p - \vec{v}_e). \quad (5.15)$$

La onda electromagnética circularmente polarizada, dada por los campos Ecs. (3.9) y (3.10), puede ser escrita en términos del potencial vector como

$$\vec{A} = a_0 [\cos(kz - \omega t) \hat{x} + \sin(kz - \omega t) \hat{y}]. \quad (5.16)$$

Usando las ecuaciones de Maxwell podemos relacionar la amplitud del potencial vector con la de los campos eléctrico y magnético. De esta manera, la velocidad transversal inducida por la onda, Ec. (3.16), se puede escribir

$$\vec{v}_j = \eta_j \frac{e \vec{A}}{mc} \left(\frac{\omega}{f_j \gamma_j \omega + \eta_j \Omega_c} \right), \quad (5.17)$$

donde $\eta_e = 1$ y $\eta_p = -1$, y el factor relativista es

$$\gamma_j = \left(1 - \frac{|\vec{v}_j|^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.18)$$

Usando la definición para la velocidad Ec. (5.17), podemos escribir la relación de dispersión para la onda, Ec. (3.21), en función de las velocidades, como

$$\omega^2 - c^2 k^2 = - \frac{\omega_{pe}^2}{c \sqrt{\lambda} A} (v_p - v_e), \quad (5.19)$$

donde $\lambda = e^2 / (m^2 c^4)$ y $A = |\vec{A}|$. Usaremos la misma normalización que en los capítulos anteriores, $x = \omega / \Omega_c$, $y = ck / \Omega_c$, y definiremos $\Theta = \omega_{pe} / \Omega_c$.

Podemos notar que en general la velocidad del fluido depende de \vec{A} [ver Ec. (5.17)], de modo que la ecuación de ondas para \vec{A} es no lineal. En la Ref. [57] se muestra

que en el límite débilmente magnetizado, debido a esta dependencia de la velocidad en \vec{A} estas ondas dan origen a solitones.

Para el caso de ondas de Alfvén de baja frecuencia en un plasma fuertemente magnetizado, se puede llevar a cabo un tratamiento analítico. Éste será descrito en la próxima sección, donde obtendremos una ecuación no lineal de Schrödinger para la propagación de ondas de Alfvén.

5.3. Plasma fuertemente magnetizado

Los modos de baja frecuencia pueden ser estudiados en el límite fuertemente magnetizado para plasmas de electrones y positrones. Este régimen de baja frecuencia corresponde a la rama de Alfvén en la relación de dispersión, Ec. (5.19) [ver Fig. 5.5]. En el límite fuertemente magnetizado, $x = \omega/\Omega_c \ll 1$, podemos usar expresiones aproximadas para la velocidad, capturando los efectos no lineales más importantes producidos por el potencial vector en el factor relativista.

Primero, supondremos que la dirección de la velocidad está dada por el vector potencial, así

$$\vec{v}_j = v_j \frac{\vec{A}}{A}. \quad (5.20)$$

La Ec. (5.17) puede ser escrita como

$$\frac{v_j}{c} = \eta_j \sqrt{\lambda A} \left(\frac{x}{f \gamma_j x + \eta_j} \right). \quad (5.21)$$

Reemplazando el factor relativista (5.18) en la Ec. (5.21), obtenemos la siguiente ecuación para la velocidad de cada fluido:

$$v_j^4 - c^2 v_j^2 - (f_j^2 + \lambda A^2) c^2 x^2 v_j^2 - 2 \eta_j x f_j c^2 v_j^2 \left(1 - \frac{v_j^2}{c^2} \right)^{1/2} + \lambda A^2 c^4 x^2 = 0. \quad (5.22)$$

Esta ecuación puede ser resuelta de forma analítica en el límite fuertemente magnetizado $x \ll 1$, para así obtener expresiones aproximadas para la velocidad, las cuales son

$$\begin{aligned} \frac{v_{j1}}{c} = & -\eta_j + \eta_j \frac{f^2 x^2}{2} + \eta_j \frac{f^4 x^4}{8} - \sqrt{\lambda} A f^2 x^3 \\ & + \frac{3}{2} \eta_j \lambda A^2 f^2 x^4 - \sqrt{\lambda} A f^2 (f^2 + 2\lambda A^2) x^5, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{j2}}{c} = & \sqrt{\lambda} A (x - \eta_j f x^2 + f^2 x^3) - \frac{\eta_j}{2} \sqrt{\lambda} A f (2f^2 + \lambda A^2) x^4 \\ & + \sqrt{\lambda} A f^2 (f^2 + 2\lambda A^2) x^5, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{j3}}{c} = & \sqrt{\lambda} A (x + \eta_j f x^2 + f^2 x^3) + \frac{\eta_j}{2} \sqrt{\lambda} A f (2f^2 + \lambda A^2) x^4 \\ & + \sqrt{\lambda} A f^2 (f^2 + 2\lambda A^2) x^5, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{j4}}{c} = & \eta_j - \eta_j \frac{f^2 x^2}{2} - \eta_j \frac{f^4 x^4}{8} - \sqrt{\lambda} A f^2 x^3 \\ & - \frac{3}{2} \eta_j \lambda A^2 f^2 x^4 - \sqrt{\lambda} A f^2 (f^2 + 2\lambda A^2) x^5. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Con el objetivo de estudiar los efectos no lineales dominantes en la ecuación de ondas (5.15), hemos considerado las expansiones para las velocidades hasta el orden $\mathcal{O}(x^5)$; de otra manera la ecuación de ondas sería lineal en \vec{A} y no aparecerían efectos interesantes [ver Ec. (5.30)].

Cada una de las soluciones (5.23)–(5.26) resulta corresponder a diferentes zonas de la rama de Alfvén. Para poder asociar cada solución con su zona respectiva, en la Fig. 5.4 se muestran junto con la solución numérica exacta para la velocidad (5.21), para positrones y electrones.

Consideremos para empezar sólo la solución exacta para los positrones [línea punteada negra en la Fig. 5.4(a)]. Para $x > 0$, existen dos soluciones posibles. Una de

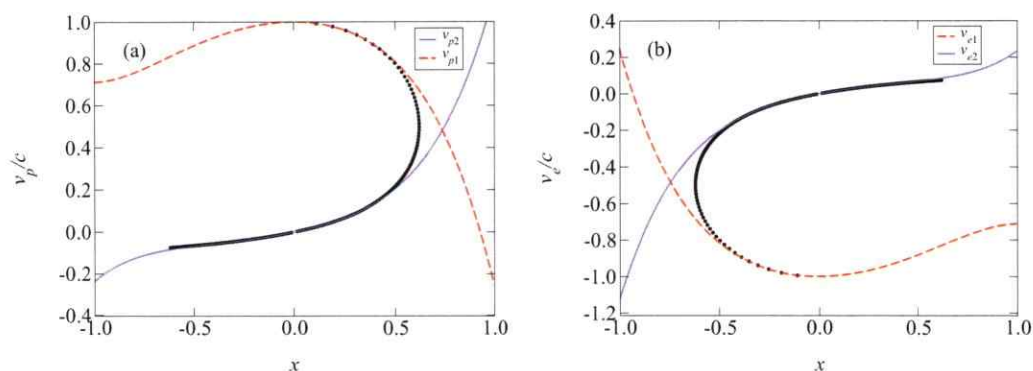


Figura 5.4: Velocidad vs. frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ para $\sqrt{\lambda}A = 0.2$, $1/\mu = 0.02$ y $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$. Línea punteada (negra): solución exacta, Ec. (5.21). (a) Velocidad de los positrones. La línea continua (azul) es la solución aproximada v_{p2} , Ec. (5.24); la línea segmentada (roja) es la solución aproximada v_{p1} , Ec. (5.23). (b) Velocidad para los electrones. La línea continua (azul) es la solución aproximada v_{e2} , Ec. (5.24); la línea segmentada (roja) es la solución aproximada v_{e1} , Ec. (5.23).

esas soluciones tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$, y la otra tiende a uno cuando $x \rightarrow 0$. Al comparar con la Fig. 3.1 (Fig. 1 en Ref. [35]), vemos que la primera corresponde a la velocidad que los positrones tienen en la zona normal y la segunda a la que tienen en la zona anómala, donde $d\omega/dk$ es negativa. En esta zona anómala, los positrones resuenan con la onda de Alfvén, por lo que la velocidad de éstos tiende a la velocidad de la luz. Lo mismo ocurre para los electrones, pero para $x < 0$, como se observa en la Fig. 5.4(b), dando origen a otra zona anómala, donde $v_e/c \rightarrow -1$ para $x \rightarrow 0$.

Ahora observamos la solución aproximada, obtenida a partir de las Ecs. (5.23)–(5.26), para positrones y electrones. La Fig. 5.4 muestra que, para los positrones, las dos soluciones relevantes cerca de $x \ll 1$ son v_{p1} y v_{p2} ; para los electrones, son v_{e1} y v_{e2} . En la Fig. 5.4(a) la línea continua (azul) corresponde a v_{p2} [Ec. (5.24)], y aproxima a la solución exacta en la zona normal. La línea segmentada (roja) es v_{p1}

[Ec. (5.23)], y describe la zona anómala. Notemos que en ambos casos, para $|x| \ll 1$ tenemos un muy buen ajuste de la solución exacta. Para los electrones, Fig. 5.4(b), la línea continua (azul) es v_{e2} [Ec. (5.24)], la cual corresponde a la zona normal, mientras que la línea segmentada (roja) es v_{e1} [Ec. (5.23)], que describe la zona anómala. Nuevamente, tenemos un buen ajuste en ambas situaciones, para $|x| \ll 1$.

5.4. Zona normal de la rama de Alfvén

5.4.1. Ecuación no lineal de Schrödinger para la amplitud de la onda

Estudiaremos el comportamiento de la onda circularmente polarizada en la zona normal de la rama de Alfvén, para el límite $|x| \ll 1$. Como se muestra en la Sec. 5.3 [ver Fig. 5.4], para esta zona la solución aproximada para las velocidades de electrones y positrones está dada por la Ec. (5.24),

$$\begin{aligned} \frac{v_e}{c} = & \sqrt{\lambda}A(x - fx^2 + f^2x^3) - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}Af(2f^2 + \lambda A^2)x^4 \\ & + \sqrt{\lambda}Af^2(f^2 + 2\lambda A^2)x^5, \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_p}{c} = & \sqrt{\lambda}A(x + fx^2 + f^2x^3) + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}Af(2f^2 + \lambda A^2)x^4 \\ & + \sqrt{\lambda}Af^2(f^2 + 2\lambda A^2)x^5. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Reemplazamos estas soluciones aproximadas en la relación de dispersión (5.19), obteniendo la relación de dispersión aproximada en este límite:

$$x^2 - y^2 + \Theta^2 f x^2 [2 + x^2(2f^2 + \lambda A^2)] = 0. \quad (5.29)$$

Vemos en la Fig. 5.5 que esta relación de dispersión aproximada describe perfectamente la zona normal de la rama de Alfvén, en el límite $|x| \ll 1$.

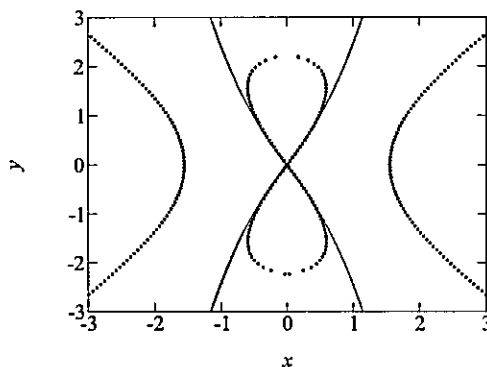


Figura 5.5: Relación de dispersión, número de onda normalizado $y = ck/\Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ para $\sqrt{\lambda A} = 0.2$, $1/\mu = 0.04$ y $\Theta = 1$. La línea punteada (negra) es la solución exacta, Ec. (5.19). La línea continua (azul) representa la solución aproximada, Ec. (5.29), válida para $|x| \ll 1$.

Con las soluciones aproximadas para la velocidad, la ecuación de ondas para el potencial vector Ec. (5.15) queda

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} - \omega_{pe}^2 f x^2 [2 + x^2 (2f^2 + \lambda A^2)] \vec{A} = 0. \quad (5.30)$$

Con el objetivo de estudiar inestabilidades modulacionales, introducimos una representación modulacional compleja y espacio-dependiente, para la amplitud de la onda electromagnética circularmente polarizada [52]:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \left[a(z, t) e^{-i\omega t} \hat{h} + a(z, t)^* e^{i\omega t} \hat{h}^* \right], \quad (5.31)$$

donde

$$\hat{h} = \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}}. \quad (5.32)$$

De no existir modulación,

$$a(z, t) = \sqrt{2} a_0 e^{ikz}. \quad (5.33)$$

Acá, $a(z, t)$ representa la envolvente compleja de una onda modulada que varía muy lentamente, tal que, $\partial_t^2 a \ll \omega^2 a$, entonces la Ec. (5.30) produce la siguiente ecuación

para $a(z, t)$,

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{c^2}{2\omega} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \left\{ \frac{\omega}{2} + \Theta^2 f \omega \left[1 + \frac{\omega^2}{4\Omega_c^2} (4f^2 + \lambda |a|^2) \right] \right\} a = 0. \quad (5.34)$$

Definiendo

$$P(\omega) = \frac{c^2}{2\omega}, \quad (5.35)$$

$$R(\omega, |a_0|^2) = \frac{\omega}{2} + \Theta^2 f \omega \left(1 + \frac{\omega^2 f^2}{\Omega_c^2} \right) + Q(\omega) |a_0|^2, \quad (5.36)$$

$$Q(\omega) = \frac{\Theta^2}{4\Omega^2} f \lambda \omega^3, \quad (5.37)$$

podemos reescribir la ecuación de ondas, Ec. (5.34) como

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + P(\omega) \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + R(\omega, |a_0|^2) a + Q(\omega) (|a|^2 - |a_0|^2) a = 0. \quad (5.38)$$

Notemos que en la Ec. (5.38) hemos agregado y quitado un término proporcional a $|a_0|^2$. Así, nos aseguramos que cuando se cumple (5.33), entonces (5.38) se convierte en (5.29), que es la relación de dispersión de la onda electromagnética no perturbada en el límite fuertemente magnetizado.

Finalmente, haciendo la transformación

$$a \longrightarrow a e^{iR(\omega, |a_0|^2)t}, \quad (5.39)$$

la Ec. (5.38) puede ser escrita como una ecuación de Schrödinger no lineal:

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + P(\omega) \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + Q(\omega) (|a|^2 - |a_0|^2) a = 0. \quad (5.40)$$

5.4.2. Inestabilidad modulacional

De las Ecs. (5.35) y (5.37), podemos ver que $P(\omega)$ y $Q(\omega)$ tienen el mismo signo, por lo tanto se satisface la condición necesaria para desarrollar una inestabilidad modulacional [75].

Para estudiar la estabilidad de la modulación descrita por la Ec. (5.40), introducimos dos variables reales ρ y σ para descomponer a en su parte real y compleja, como [52]

$$a = \sqrt{\rho(z, t)} e^{i\sigma(z, t)}, \quad (5.41)$$

con lo que (5.40) se transforma en

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + 2P \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right), \quad (5.42)$$

$$Q(\rho - \rho_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + P \left[\frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right],$$

donde $\rho_0 = |a_0|^2$. Para linealizar estas ecuaciones, escribimos

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 e^{ik_L z - i\omega_L t},$$

$$\sigma = \sigma_1 e^{ik_L z - i\omega_L t},$$

donde ρ_1 y σ_1 son cantidades a primer orden. Así, obtenemos la relación de dispersión para la modulación de baja frecuencia

$$\omega_L^2 = P^2 k_L^4 - 2PQ\rho_0 k_L^2, \quad (5.43)$$

donde notamos que si $PQ < 0$, la frecuencia ω_L será siempre real, por tanto la modulación será estable. En cambio, como dijimos en un comienzo, si $PQ > 0$ la frecuencia ω_L será negativa para valores pequeños de k_L , por lo que la modulación será inestable y crecerá. Este último es nuestro caso, ya que sabemos que $P(\omega)$ y $Q(\omega)$ tienen el mismo signo. La tasa máxima de crecimiento viene dada por $\Gamma = Q\rho_0$ [52].

En la Fig. 5.6 graficamos la tasa máxima de crecimiento normalizada definida por

$$\Gamma_{\text{nor}} = \frac{4\Gamma}{\lambda\omega_{pe}\rho_0} = \Theta f x^3, \quad (5.44)$$

como función del número de onda normalizado y obtenido de la relación de dispersión normalizada, Ec. (5.29).

A medida que aumentamos la temperatura, la tasa máxima de crecimiento disminuye. Esto es debido a que para $x \ll 1$ en la zona normal la relación de dispersión es $x = y/\sqrt{1 + 2\Theta^2 f}$, y cuando la temperatura es grande ($f \gg 1$) la tasa de crecimiento se comporta como $\Gamma_{\text{nor}} \approx y^3/(\Theta^2\sqrt{8f})$. Por otra parte, en contraste con el caso débilmente magnetizado (rama electromagnética) [57], acá la tasa de crecimiento aumenta con el número de onda.

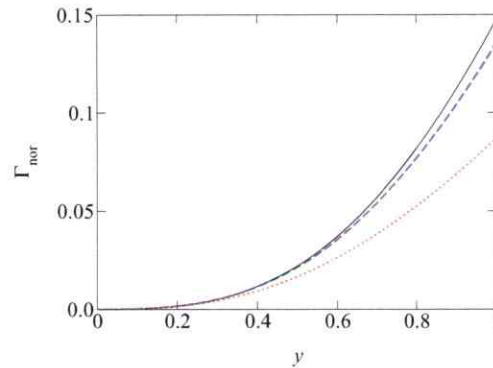


Figura 5.6: Tasa máxima de crecimiento normalizada, Ec. (5.44), como función de $y = ck/\Omega_c$. Usamos $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$ y $\sqrt{\lambda}A = 0.2$. Línea continua (negra): $1/\mu = 0.01$. Línea segmentada (azul): $1/\mu = 0.1$. Línea punteada (roja): $1/\mu = 0.5$.

Cuando la modulación crece, la inestabilidad evoluciona hacia un estado no lineal, en el cual existe un balance entre la dispersión y la no linealidad. Para estudiar ese estado no lineal, nos centramos en la Ec. (5.40) para $a(z, t)$ y definimos la variable normalizada

$$\frac{a(z, t)}{a_0} = \Psi(\xi)e^{i\eta}, \quad (5.45)$$

donde $\xi = (Qa_0^2/2P)^{1/2}\chi$ y $\chi = z - Vt$. Acá V es la velocidad de grupo efectiva del paquete de onda [78], y

$$\eta = \frac{V}{2P}z - \left(\frac{V^2}{4P} + \frac{Qa_0^2}{2}\tau^2 \right)t,$$

con τ un parámetro libre. De esta manera, nos hemos cambiado al sistema de referencia que se mueve solidario con el paquete de onda. Usando la Ec. (5.45) en (5.40), obtenemos

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = (2 - \tau^2)\Psi - 2\Psi^3. \quad (5.46)$$

De la Ref. [57] sabemos que las soluciones a esta ecuación indican que puede haber tanto trenes de onda periódicos como solitones localizados, dependiendo de los valores de τ [ver Fig. 2 in Ref. [57]]. En nuestro caso podemos analizar la Ec. (5.46) con el formalismo del potencial de Sagdeev [77], tal como se realizó en la Ref. [71]. Para ello, reescribimos (5.46) en la forma

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right)^2 + U(\Psi) = 0, \quad (5.47)$$

donde el potencial está dado por

$$U(\Psi) = \frac{\Psi^4}{2} - \frac{2 - \tau^2}{2} \Psi^2, \quad (5.48)$$

con la condición de borde $U(0) = 0$. Usamos este potencial para hacer una analogía con un oscilador en un pozo de potencial. El potencial es positivo para $\Psi > \sqrt{2 - \tau^2}$, y negativo para $\Psi = 0$ y $\Psi = \sqrt{2 - \tau^2}$ [ver Fig. 5.7]. Por lo tanto, existe un solitón para $0 < \Psi < \sqrt{2 - \tau^2}$, si $0 < |\tau| < \sqrt{2}$.

Como caso particular, consideraremos $\tau = 1$ y $\Psi'(0) = 0$. En este caso tenemos como solución una onda solitaria localizada $\Psi = \text{sech}(\xi)$ [57, 79], por lo que la solución de la Ec. (5.46) es

$$a(z, t) = a_0 \text{sech} \left(\sqrt{\frac{Q a_0^2}{2P}} \chi \right) e^{in}, \quad (5.49)$$

y por lo tanto

$$\rho(z, t) = |a(z, t) a^*(z, t)| = \rho_0 \text{sech}^2 \left(\sqrt{f} x^2 \xi \right), \quad (5.50)$$

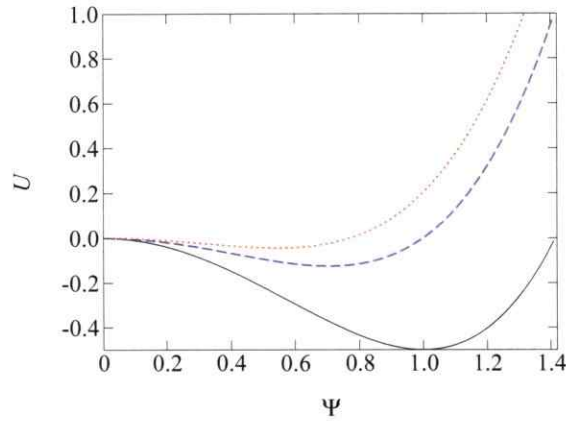


Figura 5.7: Potencial de Sagdeev $U(\Psi)$, Ec. (5.48). Línea continua (negra): $\tau = 0$. Línea segmentada (azul): $\tau = 1$. Línea punteada (rojo): $\tau = 1.4$.

donde $\bar{\xi} = \omega_{pe}/(2c)\sqrt{\lambda\rho_0}\chi$. Esta solución es una envolvente solitónica, debido a que es la envolvente del paquete de ondas la que tiene la forma de una onda solitaria. En la Fig. 5.8 mostramos esta solución en función de la temperatura y del número de onda. En la Fig. 5.8(a) graficamos ρ como función de $\bar{\xi}$ y $1/\mu$. Notamos que el solitón tiende a ser más ancho a medida que la temperatura aumenta, debido a que la solución tendrá la forma $\rho \approx \rho_0 \text{sech}^2(y^2\bar{\xi}/2\Theta^2\sqrt{f})$. En la Fig. 5.8(b) graficamos ρ como función de $\bar{\xi}$ e y , obtenido de la relación de dispersión, Ec. (5.29). En este caso la localización del solitón aumenta con el número de onda y , en contraste con el caso débilmente magnetizado [57].

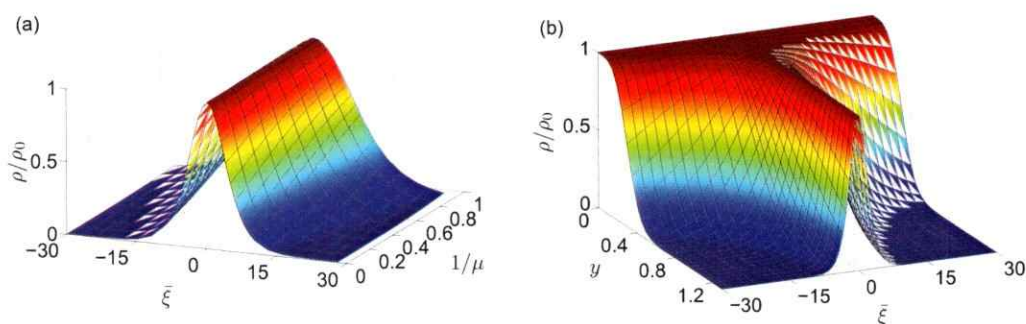


Figura 5.8: (a) Solución solitónica Ec. (5.50) como función de $\bar{\xi}$ y $1/\mu = k_B T/(mc^2)$, para $y = 0.8$. (b) La misma solución anterior, pero como función de y , para $1/\mu = 0.1$.

5.5. Zona anómala de la rama de Alfvén

5.5.1. Relación de dispersión

En esta sección investigaremos la zona anómala de la rama de Alfvén. En la Sec. 5.3 obtuvimos las soluciones aproximadas para la velocidad (5.17), e identificamos las soluciones correspondientes a la zona normal y a la zona anómala. Para tener la primera corrección no lineal en la ecuación de ondas dada en la Ec. (5.15), conservaremos los términos hasta el orden $\mathcal{O}(x^2)$. Más adelante mostraremos que si mantenemos los términos hasta orden $\mathcal{O}(x^5)$, tal como se hizo en la Sec. 5.4, el resultado final no variará significativamente. Centraremos nuestra atención en el primer cuadrante de la relación de dispersión $x, y \geq 0$. Como se muestra en la Sec. 5.3 y la Fig. 5.4, la aproximación correcta a las velocidades en esta zona, son la Ec. (5.24) para electrones y la Ec. (5.23) para positrones, por lo tanto

$$\frac{v_e}{c} = \sqrt{\lambda} A(x - fx^2), \quad (5.51)$$

$$\frac{v_p}{c} = 1 - \frac{1}{2} f^2 x^2. \quad (5.52)$$

Notemos que, para $x, y \geq 0$, los positrones resuenan con la onda de Alfvén, por lo que su velocidad en la zona anómala tiende a la velocidad de la luz. Por otro lado, los electrones no resuenan, por lo que su velocidad tiende a cero en esa zona. Usando (5.51) y (5.52), la relación de dispersión (5.19) queda

$$x^2 - y^2 + \Theta^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda A}} \left(1 - \frac{f^2 x^2}{2} \right) - x(1 - fx) \right] = 0. \quad (5.53)$$

En la Fig. 5.9 comparamos esta solución aproximada con la solución exacta, Ec. (5.19), mostrando una muy buena correspondencia en la zona anómala.

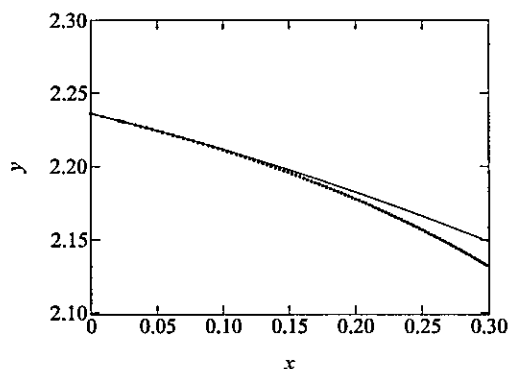


Figura 5.9: Relación de dispersión en la zona anómala, número de onda normalizado $y = ck/\Omega_c$ vs. frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ para $\sqrt{\lambda A} = 0.2$, $1/\mu = 0.04$ y $\Theta = 1$. La línea punteada (negra) es la solución exacta de la relación de dispersión, Ec. (5.19). La línea continua (azul) es la solución aproximada, Ec. (5.53).

5.5.2. Ecuación no lineal de Schrödinger para la amplitud de la onda

Reemplazando las Ecs. (5.51), (5.52), y Ec. (5.20) en la ecuación de onda, Ec. (5.15), tenemos

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \omega_{pe}^2 \left[\left(1 - \frac{f^2 x^2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda A}} - x(1 - fx) \right] \vec{A}. \quad (5.54)$$

Al igual que en el caso anterior, usamos la representación modulacional compleja y espacio dependiente para el vector potencial, Ec. (5.31), y tomamos el límite de variaciones temporales lentas $\partial_t^2 a \ll \omega^2 a$. Obtenemos

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{c^2}{2\omega} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\Omega_c} \left(1 - \frac{f\omega}{\Omega_c} \right) \right] a + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \left(1 - \frac{f^2 \omega^2}{2\Omega_c^2} \right) |a|^{-1} a = 0. \quad (5.55)$$

Notemos que a diferencia del caso anterior, Ec. (5.30), ahora tenemos $|a|^{-1}$ en el factor no lineal. Al igual que en la Ec. (5.34), definimos

$$P(\omega) = \frac{c^2}{2\omega}, \quad (5.56)$$

$$R(\omega) = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega_{pe}^2}{2\Omega_c} \left(1 - \frac{f\omega}{\Omega_c} \right) + Q(\omega) |a_0|^{-1}, \quad (5.57)$$

$$Q(\omega) = \frac{\omega_{pe}^2}{\sqrt{2\lambda}\omega} \left(1 - \frac{f^2 \omega^2}{2\Omega_c^2} \right), \quad (5.58)$$

por lo que la ecuación de ondas se transforma en

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + P(\omega) \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + R(\omega) a + Q(\omega) (|a|^{-1} - |a_0|^{-1}) a = 0.$$

De no existir modulación [ver Ec. (5.33)], recuperamos la relación de dispersión, Ec. (5.53). Ahora, usando la misma transformación que en la Sec. 5.4, Ec. (5.39), obtenemos una ecuación tipo Schrödinger con una no linealidad en forma de ley de potencia:

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + P(\omega) \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + Q(\omega) (|a|^{-1} - |a_0|^{-1}) a = 0. \quad (5.59)$$

Para estudiar el comportamiento no lineal en la zona anómala, hacemos una transformación al sistema de referencia solidario con el paquete de ondas, definiendo la variable

$$a(z, t) = a_0 \Psi(\xi) e^{i\eta}, \quad (5.60)$$

donde la nueva variable Ψ depende de $\xi = (Q/2Pa_0)^{1/2}\chi$, con $\chi = z - Vt$ y

$$\eta = \frac{V}{2P}z - \left(\frac{V^2}{4P} + \frac{Q}{2a_0}\tau^2 \right) t.$$

Reemplazando la Ec. (5.60) en la Ec. (5.59), obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = (2 - \tau^2)\Psi - 2, \quad (5.61)$$

la cual podemos reescribir como (5.47), con un potencial de Sagdeev dado por

$$U(\Psi) = 2\Psi - \frac{2 - \tau^2}{2}\Psi^2, \quad (5.62)$$

con $U(0) = 0$.

Separamos el estudio de este potencial en tres casos. Primero, para $\tau^2 < 2$, el potencial es cero en $\Psi = 0$ y $\Psi = 4/(2 - \tau^2) > 0$. Podemos ver que en el intervalo $0 < \Psi < 4/(2 - \tau^2)$ el potencial es positivo, y para $\Psi > 4/(2 - \tau^2)$ el potencial es negativo. Por lo tanto, no existe una estructura confinada para $U < 0$, con lo que no hay una solución solitónica en este caso. Para $\tau^2 = 2$, el potencial es siempre positivo para $\Psi > 0$, y $U = 0$ sólo para $\Psi = 0$, entonces no hay solución solitónica en este caso tampoco. Finalmente, para $\tau^2 > 2$ el potencial es siempre positivo para $\Psi > 0$. Por lo tanto, en ningún caso existe solución solitónica.

Examinemos el caso particular $\tau^2 \neq 2$, con la condición de borde $\Psi(0) = 1$ y $\Psi'(0) = 0$. En este caso, la solución de la Ec. (5.61) es

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\tau^2 - 2} \left[\tau^2 \cosh \left(\xi \sqrt{2 - \tau^2} \right) - 2 \right]. \quad (5.63)$$

Para $\tau^2 < 2$, esta solución diverge en $\xi \rightarrow \pm\infty$, por lo que la única solución física posible es un tren de ondas periódico para $\tau^2 > 2$, dado por

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\tau^2 - 2} \left[\tau^2 \cos \left(\xi \sqrt{\tau^2 - 2} \right) - 2 \right]. \quad (5.64)$$

Como ilustración, la Fig. 5.10 muestra $\Psi(\xi)$ para $\tau^2 = 3$, en cuyo caso

$$\Psi(\xi) = 3 \cos(\xi) - 2. \quad (5.65)$$

Usando la Ec. (5.60) podemos encontrar

$$a(z, t) = \left[3 \cos \left(\sqrt{\frac{Q}{2Pa_0}} \chi \right) - 2 \right] e^{i\eta}, \quad (5.66)$$

y por lo tanto

$$\rho(z, t) = \left[3 \cos \left(\sqrt{1 - \frac{f^2 x^2}{2}} \bar{\xi} \right) - 2 \right]^2, \quad (5.67)$$

donde $\bar{\xi} = (\omega_{pe}/c) (\sqrt{2\lambda a_0})^{-1/2} \chi$. Es claro que la temperatura y el número de onda tienen un efecto muy pequeño en el perfil de la onda, debido a que $x^2 f^2$ es pequeño, como se muestra en la Fig. 5.10, donde hemos graficado la solución periódica Ec. (5.67) en términos de la temperatura.

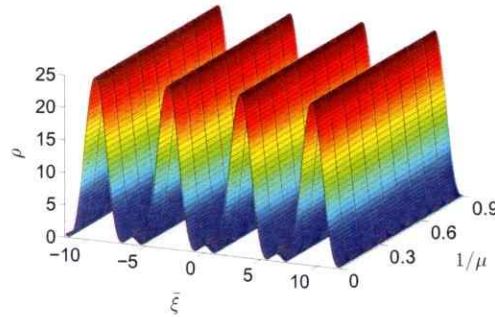


Figura 5.10: Solución para la envolvente, Ec. (5.67), como función de $\bar{\xi}$ y $1/\mu = k_B T/(mc^2)$, para $y = 2.22$.

Podríamos preguntarnos si la expansión hasta x^5 en las velocidades, Ecs. (5.51) y (5.52), el mismo orden considerado en la zona normal, Sec. 5.4, podría introducir nuevos efectos no lineales que produzcan un comportamiento solitónico. En lugar de la Ec. (5.59), obtendríamos una ecuación de la forma

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + P(\omega) \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + Q(\omega) |a|^{-1} a + S(\omega) |a| a + T(\omega) |a|^2 a = 0, \quad (5.68)$$

donde

$$P(\omega) = \frac{c^2}{2\omega}, \quad (5.69)$$

$$Q(\omega) = \frac{\omega_{pe}^2}{\sqrt{2\lambda\omega}} \left(1 - \frac{f^2\omega^2}{2\Omega_c^2} - \frac{f^4\omega^4}{8\Omega_c^4} \right), \quad (5.70)$$

$$S(\omega) = -\frac{3\sqrt{2\lambda}}{8} \omega_{pe}^2 f^2 \frac{\omega^3}{\Omega_c^4}, \quad (5.71)$$

$$T(\omega) = \frac{f\lambda\omega_{pe}^2\omega^3}{8\Omega_c^4} \left(1 - \frac{8f\omega}{\Omega_c} \right). \quad (5.72)$$

Acá, S y T son dos parámetros nuevos que resultan ser mucho menores que Q , debido a que dependen de órdenes más altos de x . En este caso, se puede demostrar que no existen soluciones solitónicas y que la única solución válida sigue siendo la solución periódica.

5.6. Resumen

Hemos estudiado la evolución no lineal de una onda circularmente polarizada de Alfvén propagándose a lo largo de un campo magnético externo en un plasma fuertemente magnetizado de electrones y positrones. Derivamos una ecuación no lineal de Schrödinger para esta onda electromagnética en la zona normal. En este caso se satisface la condición necesaria para una inestabilidad modulacional, de modo que existe propagación de envolvente solitónica en este caso. Calculamos la tasa máxima de crecimiento de la inestabilidad y ésta disminuye cuando la temperatura aumenta, resultado consistente con trabajos previos [57, 68]. Al igual que en el caso débilmente magnetizado [57], el solitón se vuelve más ancho con el aumento de la temperatura. También hemos estudiado la propagación de una onda de Alfvén en la zona anómala, donde no existe solución solitónica y la única solución física posible es un tren de ondas periódico.

Capítulo 6

Simulaciones de partículas

Las simulaciones computacionales se han convertido en una herramienta de gran utilidad para las ciencias en general, y en particular, para la física de plasmas. Éstas se han usado como una herramienta para complementar los estudios llevados a cabo tanto de manera teórica como experimental. A partir de estudios teóricos somos capaces de obtener modelos matemáticos que describan los fenómenos físicos en los que estamos interesados. Resolver las ecuaciones obtenidas de los modelos matemáticos no siempre es posible de realizar de manera analítica, por lo que se hace necesario recurrir a herramientas computacionales para resolver de manera numérica estas ecuaciones. Ejemplos de estas situaciones hay muchos y en variados campos de las ciencias. Por ejemplo, en la física de plasmas, conocemos las leyes básicas que gobiernan el movimiento de las partículas (leyes de Newton y ecuaciones de Maxwell). Resolver ese conjunto de ecuaciones acopladas cuando se trata de un sistema compuesto de miles de millones de partículas es una tarea casi imposible de realizar analíticamente. En algunos casos es posible realizar aproximaciones y con eso reducir el problema a uno más sencillo de tratar, pero restringiendo el rango de validez del modelo teórico. Este tipo de problemas se pueden resolver usando simulaciones computacionales. Los resultados obtenidos con las simulaciones no reemplazan

de ninguna manera a los que se puedan obtener mediante la experimentación, pero sí nos ayudan a complementar nuestros estudios, ampliando nuestra capacidad de análisis y mejorando nuestra intuición.

Tradicionalmente, en física de plasmas existen dos caminos para incorporar a las simulaciones computacionales como mecanismo de estudio. La primera consiste en enfocarnos en la naturaleza de fluido de un plasma, resolviendo las ecuaciones de magnetohidrodinámica (MHD) del plasma (o bien las ecuaciones de fluido para cada especie en conjunto con las ecuaciones para los campos electromagnéticos). La segunda consiste en considerar la naturaleza microscópica de la materia y su interacción a través de los campos electromagnéticos, teniendo así una descripción cinética del plasma. Este capítulo está enfocado en el desarrollo e implementación de un modelo cinético para las simulaciones computacionales.

Para estudiar las propiedades cinéticas del plasma comúnmente se utilizan simulaciones *Particle-In-Cell* (PIC), o códigos de Vlasov [80, 81]. En esta tesis nos centraremos en las simulaciones PIC, donde las funciones de distribución de las especies son representadas por un conjunto de “macropartículas” cuyas trayectorias se calculan de manera autoconsistente con los campos eléctricos y magnéticos. Cada macropartícula contiene un gran número de partículas (electrones, positrones o iones). Estas macropartículas seguirán las mismas trayectorias que las partículas reales, debido a que la fuerza de Lorentz depende sólo de la razón entre la carga y la masa, por lo que el considerar macropartículas nos permitirá reescalar el número de partículas constituyentes del sistema, aumentando significativamente la eficiencia computacional. En el resto de este trabajo, cuando digamos “partículas” en el contexto de la

simulación nos estaremos refiriendo en realidad al concepto de "macropartícula". En el caso de plasmas no colisionales podemos restringir las interacciones Coulombianas entre las partículas, permitiendo que éstas interactúen sólo a través de los campos electromagnéticos. Para esto, se introduce una grilla espacial en la cual se acumulan las densidades de carga y corriente generadas por las partículas usando un método de interpolación. Las ecuaciones de Maxwell para los campos electromagnéticos se resuelven sobre la grilla y las fuerzas que actúan sobre cada partícula se obtienen mediante interpolación. Este procedimiento elimina las fluctuaciones que ocurran en escalas menores que el espaciado de la grilla y reduce el número de operaciones al omitir las interacciones Coulombianas. Más detalles acerca de este método pueden ser encontrados en las Refs. [82, 83].

Las simulaciones de plasmas constituidos por electrones e iones es uno de los casos comúnmente estudiados. Acá, la diferencia entre las masas de ambas especies es muy grande, por lo que las longitudes inerciales y frecuencias características de ambas especies están en escalas completamente diferentes, de modo que la dinámica de los iones es mucho más lenta que la de los electrones. Para resolver este problema se pueden utilizar simulaciones híbridas, donde se toman en cuenta sólo los efectos cinéticos de los iones, y los electrones son tratados como un fluido [84-86]. Sin embargo, éste no es nuestro caso, ya que hemos considerado plasmas no colisionales de electrones y positrones, donde ambas especies tienen la misma masa, por lo que tendremos que considerar los efectos cinéticos de ambas especies. Estas simulaciones son conocidas como *full particle* o *particle-in-cell* (PIC).

Las simulaciones relativistas de electrones y positrones han sido usadas por Mat-

sukiyo *et al.* [37] para estudiar los decaimientos paramétricos de ondas circularmente polarizadas y para estudiar la generación de turbulencia [38]. Ambos estudios se han llevado a cabo en el régimen débilmente relativista. En este capítulo daremos una pequeña descripción del método *particle-in-cell* para plasmas relativistas, donde los efectos relativistas se incluirán en la ecuación de movimiento de las partículas. También introduciremos efectos relativistas al considerar una función de distribución de velocidades relativistas, pero no consideraremos otros efectos posibles como aquellos debidos a la emisión de radiación o creación de pares. Estudiaremos los modos normales de propagación en un plasma relativista de electrones y positrones obtenidos de la simulación y compararemos estos resultados con los estudiados por Asenjo *et al.* [35] y Domínguez *et al.* [87], para una teoría de fluidos y cinética, respectivamente. Estudiaremos también los decaimientos paramétricos de la onda circularmente polarizada encontrada en el Cap. 3 y compararemos estos resultados con los obtenidos en el Cap. 4. Finalmente estudiaremos la propagación de estructuras localizadas en este tipo de plasmas.

Parte importante de los resultados de este capítulo forman parte de la Ref. [88].

6.1. Simulaciones *Particle in cell* (PIC)

Con este método resolveremos, en un tiempo t , las trayectorias de las partículas en la simulación. Para esto debemos resolver de manera consistente las ecuaciones para los campos electromagnéticos con las ecuaciones de momentum para las partículas. Utilizaremos una grilla espacial para dividir el espacio en N_g celdas de igual largo ΔX . En cada instante t , las celdas contendrán una cantidad de electrones y positrones. Éstos serán libres de moverse a lo largo de las celdas y no se considerarán colisiones entre las partículas, las cuales interactúan sólo a través de los campos. Los

campos, las densidades y las corrientes se resolverán en cada punto j de la grilla espacial.

En la Fig 6.1 podemos ver un esquema que resume la idea básica de una simulación PIC. En este esquema se muestra el procedimiento que debemos realizar en un paso de tiempo Δt . Primero, el sistema es iniciado con las condiciones iniciales de posición y velocidad para cada partícula. Para la i -ésima partícula conocemos la posición \vec{X}_i , el momentum \vec{u}_i y el factor relativista γ_i . Con esta información, calculamos las densidades de carga y corriente sobre los puntos de la grilla espacial, ρ_j, \vec{J}_j , mediante un método de interpolación. Una vez conocidas las densidades de carga y corriente, usamos el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Maxwell para encontrar los campos eléctricos y magnéticos sobre la grilla, \vec{E}_j y \vec{B}_j . Una vez conocidos los campos podemos calcular la fuerza que actúa sobre cada partícula, pero como los campos son calculados sobre la grilla y necesitamos la fuerza sobre la posición real de la partícula, debemos interpolar estos campos a la posición de las partículas. De esta forma obtenemos la fuerza sobre la i -ésima partícula, \vec{F}_i , en el nuevo tiempo $t + \Delta t$. Con esta fuerza, integramos la ecuación de movimiento y obtenemos las nuevas posiciones y velocidades, y podemos repetir el proceso.

6.1.1. Integración de las ecuaciones de movimiento

La trayectoria de la i -ésima partícula se calcula usando las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} \left(\vec{E}_i + \frac{\vec{u}_i}{\gamma_i c} \times \vec{B}_i \right), \quad (6.1)$$

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = \frac{\vec{u}_i}{\gamma_i}, \quad (6.2)$$

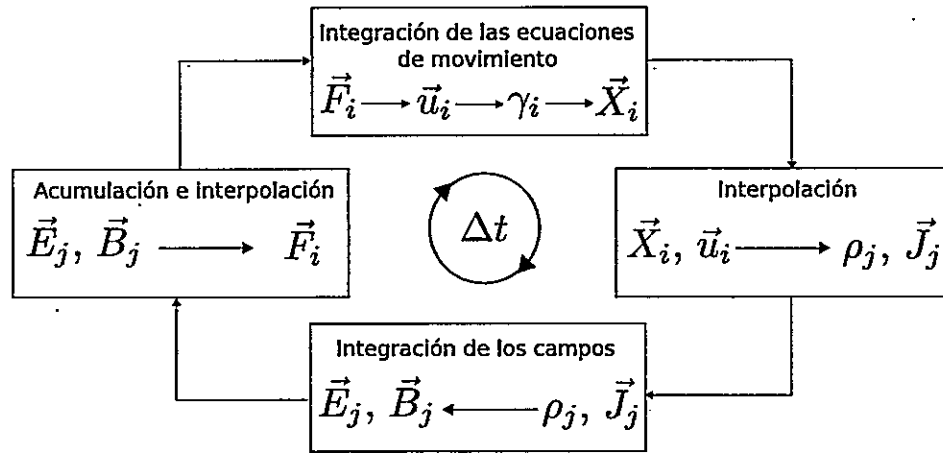


Figura 6.1: Procedimiento básico de una simulación de partículas PIC.

donde $\vec{u} = \gamma\vec{v}$, es el momentum relativista por unidad de masa y $\gamma = (1 + \vec{u}^2/c^2)^{1/2}$ es el factor relativista. \vec{E}_i y \vec{B}_i son los campos eléctrico y magnético, los cuales han sido interpolados a la posición de la partícula i . Para resolver estas ecuaciones usamos el método *leapfrog*, con las posiciones de las partículas definidas en $(n - 1/2)\Delta t$ y la velocidad en $n\Delta t$. Convirtiendo las Ecs. (6.1) y (6.2) en ecuaciones de diferencias finitas, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\vec{u}_i^{n+1} = \vec{u}_i^n + \frac{q_i \Delta t}{m_i} \left[\vec{E}_i^{n+1/2} + \frac{\vec{u}_i^{n+1} + \vec{u}_i^n}{2c\gamma_i^{n+1/2}} \times \vec{B}_i^{n+1/2} \right], \quad (6.3)$$

$$\vec{X}_i^{n+1/2} = \vec{X}_i^{n-1/2} + \frac{\vec{u}_i^n}{\gamma_i^n} \Delta t. \quad (6.4)$$

Hemos considerado $\vec{u}_i^{n+1/2} = (\vec{u}_i^{n+1} + \vec{u}_i^n)/2$. De la misma manera, $\vec{B}_i^{n+1/2}$ es calculado usando $(\vec{B}_i^{n+1} + \vec{B}_i^n)/2$. Resolvemos la Ec. (6.3) usando el método de Boris-Buneman en su versión relativista [82, 89–91]. Para esto, definimos las siguientes

cantidades

$$\vec{u}_i^- = \vec{u}_i^n + \frac{q_i \Delta t}{2m_i} \vec{E}_i^{n+1/2}, \quad (6.5)$$

$$\gamma_i^{n+1/2} = \left(1 + \frac{(\vec{u}_i^-)^2}{c^2} \right)^{1/2}, \quad (6.6)$$

$$\vec{u}_i^0 = \vec{u}_i^- + \frac{q_i \Delta t}{2m_i c \gamma_i^{n+1/2}} \vec{u}_i^- \times \vec{B}_i^{n+1/2}, \quad (6.7)$$

$$\vec{u}_i^+ = \vec{u}_i^- + \frac{q_i \Delta t}{m_i c \gamma_i^{n+1/2}} \frac{\vec{u}_i^0 \times \vec{B}_i^{n+1/2}}{1 + \left(\frac{q_i \Delta t}{2m_i c \gamma_i^{n+1/2}} \vec{B}_i^{n+1/2} \right)^2}. \quad (6.8)$$

Usando estas definiciones podemos conocer el momentum en el tiempo $(n + 1/2)\Delta t$,

$$\vec{u}_i^{n+1} = \vec{u}_i^+ + \frac{q_i \Delta t}{2m_i} \vec{E}_i^{n+1/2}. \quad (6.9)$$

6.1.2. Integración de los campos electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell son resueltas sobre cada uno de los puntos de la grilla, j , usando diferencias finitas. Así, conoceremos las cantidades \vec{E}_j , \vec{B}_j , \vec{J}_j y ρ_j , sobre la grilla. Además estos campos serán evolucionados en el tiempo usando el método *leapfrog*.

Para efectos de la simulación, consideraremos un plasma unidimensional. Tendremos una dimensión espacial, en la dirección \hat{X} , pero conservaremos las tres direcciones en la velocidad de las partículas. Consideraremos un campo magnético de fondo $\vec{B}_0 = B_0 \hat{X}$. Con esto, resolvemos las ecuaciones de Faraday y Ampère usando

diferencias finitas, reduciendo el problema al siguiente sistema de ecuaciones:

$$E_{y,j}^{n+1/2} = E_{y,j}^{n-1/2} - \frac{c\Delta t}{\Delta X} (B_{z,j+1/2}^n - B_{z,j-1/2}^n) - 4\pi\Delta t J_{y,j}^n, \quad (6.10)$$

$$E_{z,j+1/2}^{n+1/2} = E_{z,j+1/2}^{n-1/2} + \frac{c\Delta t}{\Delta X} (B_{y,j+1}^n - B_{y,j}^n) - 4\pi\Delta t J_{z,j+1/2}^n, \quad (6.11)$$

$$E_{X,j+1/2}^{n+1/2} = E_{X,j+1/2}^{n-1/2} - 4\pi\Delta t J_{X,j+1/2}^n, \quad (6.12)$$

$$B_{y,j}^{n+1} = B_{y,j}^n + \frac{c\Delta t}{\Delta X} (E_{z,j+1/2}^{n+1/2} - E_{z,j-1/2}^{n+1/2}), \quad (6.13)$$

$$B_{z,j+1/2}^{n+1} = B_{z,j+1/2}^n - \frac{c\Delta t}{\Delta X} (E_{y,j+1}^{n+1/2} - E_{y,j}^{n+1/2}). \quad (6.14)$$

El sistema tiene además condiciones de borde periódicas, por lo que será sencillo evaluar los campos en los bordes.

Notemos que para la integración de las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de Maxwell, hemos usado el método *leapfrog*. Hemos escogido este método, por sobre otros, debido a que es relativamente sencillo de implementar y de un bajo costo computacional, pero una característica aun más importante es que su representación discreta preserva la estructura de las ecuaciones originales, por ejemplo, la reversibilidad temporal y la estructura simpléctica [83]. Éste resulta ser el método más sencillo que satisface dichas condiciones [92].

6.1.3. Condición de Courant

Al resolver las ecuaciones de Maxwell usando el método de diferencias finitas en el espacio y el método *leapfrog* en el tiempo, el tamaño de la grilla ΔX y el paso de tiempo Δt deben satisfacer la llamada condición de Courant,

$$\Delta X > c\Delta t, \quad (6.15)$$

donde c es la velocidad de la luz. Esta condición nos permitirá asegurar la estabilidad del método *leapfrog*.

6.1.4. Asignación de las densidades de carga y corriente

Notamos que para resolver las ecuaciones de Maxwell necesitamos conocer las densidades de carga y corriente, ρ_j y \vec{J}_j , sobre la grilla. Estas densidades las calcularemos a partir de las posiciones y velocidades de cada partícula. Como la posición de las partículas no coincide en general con los puntos de la grilla, para calcular ρ_j se necesita saber cuánta carga asignar a cada punto de grilla. Técnicamente, se requiere interpolar la carga sobre la grilla. El modo más sencillo consiste en contar el número de partículas a distancia hasta $\pm\Delta X/2$ de un punto de la grilla; dicho número multiplicado por la carga de cada partícula, será la carga sobre ese punto de grilla. Esto es equivalente a identificar, para cada partícula, el punto de grilla más cercano y asignar toda su carga a dicho punto, como se muestra en la Fig. 6.2(a). Este método es denominado de orden cero y es el método computacionalmente más rápido para calcular la densidad, debido a que debemos evaluar sólo un punto de la grilla, pero introduce una gran cantidad de ruido numérico, ya que las partículas se están moviendo y pueden pasar rápidamente de una celda a otra, por lo que la densidad tendrá fluctuaciones muy grandes.

De la discusión anterior se sigue que un mejor método de interpolación, para cada partícula, consiste en distribuir su carga entre los dos puntos de la grilla más cercanos. Para repartir la carga se puede tomar el criterio de asignar a cada punto de grilla un monto de carga que dependa de la distancia entre dicho punto y la partícula, por ejemplo, un monto proporcional a $\Delta X - |X_j - X_i|$. Esto es equivalente a considerar la carga como una distribución uniforme de carga de ancho ΔX , y asignar a cada punto de la grilla un monto igual al traslape entre la grilla y la distribución de carga [ver Fig. 6.2(b)].

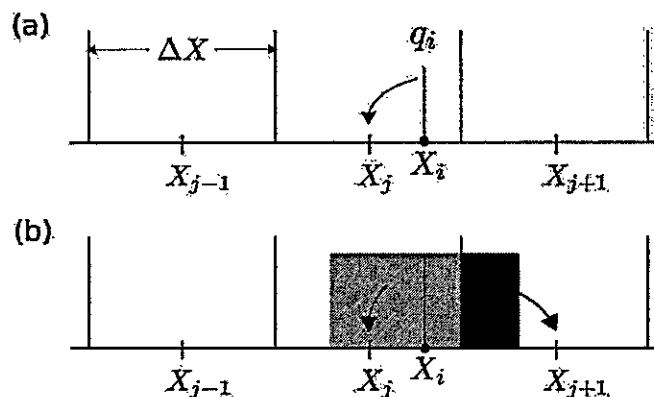


Figura 6.2: Métodos de interpolación para la asignación de la densidad de carga. (a) Método de orden cero. (b) Método de primer orden.

Ambas estrategias de interpolación son casos particulares de un método general, en que se considera a las partículas como nubes de carga [93] con un cierto perfil de densidad. En efecto, si las cargas fueran puntuales, podemos escribir la densidad de carga en cada punto de la grilla así:

$$\rho(\vec{X}_j) = \sum_i q_i \delta(\vec{X}_j - \vec{X}_i). \quad (6.16)$$

En este caso, sólo hay carga sobre la grilla si la posición de alguna carga coincide con la grilla. Pero esto no es útil, así que reemplazamos la delta de Dirac por una función de soporte finito, $S(\vec{X}_j - \vec{X}_i)$, llamada función de forma. Con ello, la densidad en la grilla queda

$$\rho(\vec{X}_j) = \sum_i q_i S(\vec{X}_j - \vec{X}_i). \quad (6.17)$$

Distintas expresiones para la función de forma dan origen a distintos modos de interpolación. Por ejemplo, consideremos S como un rectángulo de ancho ΔX (polinomio de orden cero) [ver Fig. 6.3(a)], que puede ser escrito analíticamente como

$$S(\vec{X}_j - \vec{X}_i) = \frac{1}{\Delta X} \Theta \left(\frac{\Delta X}{2} - |\vec{X}_j - \vec{X}_i| \right), \quad (6.18)$$

donde Θ es la función de Heaviside. Es claro entonces que $\rho(\vec{X}_j) = q_i$ si j es el punto de la grilla más cercano a q_i , que es precisamente el método a orden cero descrito en la Fig. 6.2(a). La siguiente posibilidad es considerar S como un triángulo (dos polinomios de primer orden) centrado en cada partícula [Fig. 6.3(b)]. En este caso, el valor de S sobre dos puntos vecinos de la grilla es:

$$S_j = \frac{X_{j+1} - X_i}{\Delta X^2}, \quad S_{j+1} = \frac{X_i - X_j}{\Delta X^2}, \quad (6.19)$$

por lo que el valor de la carga sobre cada punto de grilla es

$$\rho_j = q_i \frac{X_{j+1} - X_i}{\Delta X^2}, \quad \rho_{j+1} = q_i \frac{X_i - X_j}{\Delta X^2}. \quad (6.20)$$

Notamos que esto es equivalente al método mostrado en la Fig. 6.2(b). Este método, llamado interpolación de primer orden, requiere evaluar dos puntos de la grilla por cada partícula, lo que lo hace un método computacionalmente más costoso que el anterior, pero la densidad que se obtiene es una función mucho más suave.

Podemos considerar interpolaciones de mayor orden con el fin de suavizar aun más el perfil de densidad y con esto reducir el ruido numérico, pero esto a costa de eficiencia computacional. En la simulación usada en esta tesis hemos considerado una función de interpolación de segundo orden, la cual emula la forma de una función gaussiana, como se muestra en la Fig. 6.3(c). En este caso vemos que la carga contribuye a tres puntos de grilla por cada partícula, aumentando el costo computacional, pero a medida que las partículas se muevan a lo largo de la grilla, la variación en la densidad de cada grilla será más pequeña, obteniendo así un perfil de densidad mucho más suave que en los dos casos anteriores.

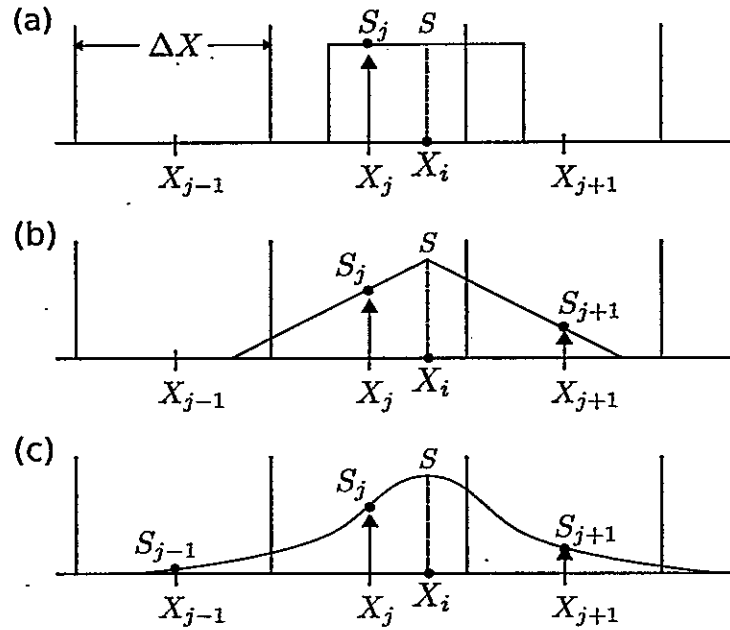


Figura 6.3: Distintas posibilidades para la función de forma S . (a) Interpolación a orden cero. (b) Interpolación a primer orden. (c) Interpolación a segundo orden.

La función de interpolación de segundo orden tiene la forma

$$S_j = \frac{1}{\Delta X} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{X_i - X_j}{\Delta X} \right)^2 \right], \quad (6.21)$$

$$S_{j\pm 1} = \frac{1}{2\Delta X} \left(\frac{1}{2} \pm \frac{X_i - X_j}{\Delta X} \right)^2. \quad (6.22)$$

Una vez calculada la densidad, la corriente se calcula de la misma manera y usando la misma función de interpolación.

Para conocer luego la fuerza que actúa sobre cada partícula, necesitamos conocer los campos en la posición de cada partícula, por lo que necesitaremos, a su vez, interpolar el valor de los campos sobre la grilla a la posición de las partículas. Usaremos la misma función de interpolación de segundo orden, por lo que los campos se

calcularán como

$$\vec{E}(\vec{X}_i) = \sum_j \vec{E}(\vec{X}_j) S(\vec{X}_j - \vec{X}_i). \quad (6.23)$$

En la literatura podemos encontrar distintos tipos de funciones de forma, tipo escalón, lineales, de más alto orden o incluso podemos crear una que nos acomode [82, 83].

6.1.5. Corrección del campo eléctrico longitudinal

Cuando la densidad y las corrientes son determinadas por este método de interpolación, la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0,$$

sólo se cumplirá aproximadamente, debido a que el cálculo de la densidad y la corriente no es exacto. Notamos que la componente E_X del campo eléctrico se calcula usando la ecuación de Ampère, Ec. (6.12), mientras que la densidad y la corriente se calculan a partir de la distribución de las partículas, por lo que la ecuación de Poisson no es necesaria para llevar a cabo los cálculos. Sin embargo, debido a los errores de acumulación que induce la interpolación, podemos usar esta ecuación para corregir cada cierto tiempo la componente E_X del campo eléctrico. Existen distintas técnicas para llevar esto a cabo [82,90]. Acá hemos utilizado las técnicas desarrolladas por B. Marder [94] y A. B. Langdon [95], que modifican la ecuación de Ampère para incluir la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \vec{\nabla} \times \vec{B} - 4\pi \vec{J} + \vec{\nabla} F, \quad (6.24)$$

donde $F = d(\nabla \cdot \vec{E} - 4\pi\rho)$, con d un cierto número real. Notemos que se ha introducido un término adicional, proporcional al gradiente del posible error en la ecuación de

Poisson, $\vec{\nabla} F$, al cual Marder llamó una pseudo-corriente. El campo eléctrico corregido en el tiempo $(n + 1)\Delta t$ será

$$\vec{E}_{\text{corregido}}^{n+1} = \vec{E}^{n+1} + \Delta t \vec{\nabla} \left[d \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{n+1} - 4\pi\rho^{n+1} \right) \right]. \quad (6.25)$$

En nuestro caso la simulación es unidimensional, por tanto sólo debemos corregir la componente longitudinal del campo eléctrico. El parámetro d debe satisfacer la condición [94]

$$\frac{2d\Delta t}{\Delta X^2} < 1, \quad (6.26)$$

para mantener la estabilidad del código.

6.1.6. Normalización

En nuestro código normalizaremos las variables utilizando parámetros típicos del plasma. El tiempo será normalizado según la frecuencia de plasma de los electrones:

$$\bar{t} = \omega_{pe} t. \quad (6.27)$$

La posición es normalizada con la longitud inercial de los electrones:

$$\bar{X} = \frac{\omega_{pe}}{c} X. \quad (6.28)$$

El momentum por unidad de masa es normalizado a la velocidad de la luz:

$$\bar{u} = \frac{u}{c}. \quad (6.29)$$

Debido a que trabajamos en el sistema de unidades cgs, el campo eléctrico y magnético tienen las mismas unidades, por lo que serán normalizados usando el mismo parámetro

$$\bar{B} = \frac{\Omega_c}{\omega_{pe} B_0} B, \quad \bar{E} = \frac{\Omega_c}{\omega_{pe} B_0} E, \quad (6.30)$$

donde B_0 es la magnitud del campo magnético externo aplicado y $\Omega_c = eB_0/(mc)$ es la girofrecuencia del positrón. La densidad de carga normalizada es:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{en_0}, \quad (6.31)$$

donde n_0 es la densidad promedio de electrones. Por último, la corriente se normaliza así:

$$\bar{J} = \frac{J}{en_0c}. \quad (6.32)$$

Con los elementos descritos en esta sección, podemos construir una simulación relativista de partículas mediante un algoritmo *particle-in-cell*. Resolvemos los campos electromagnéticos y las ecuaciones de movimiento de las partículas, de manera autoconsistente. Con esto, somos capaces de seguir la trayectoria de cada una de las partículas a lo largo de la simulación. Los campos han sido resueltos mediante diferencias finitas, la fuerza de Lorentz se resuelve usando el método de Boris-Buneman y la evolución temporal se resuelve mediante el método *leapfrog*. Además, consideraremos condiciones de borde periódicas. Para más detalles acerca de los métodos de la simulación ver las Refs. [82, 83, 89–91, 93–96].

6.2. Relación de dispersión

En esta sección estudiaremos los modos normales de propagación en esta simulación relativista de electrones y positrones. Como vimos en la sección anterior, los efectos relativistas han sido incluidos a través de la fuerza de Lorentz. Incluiremos también efectos relativistas a través de la velocidad térmica de las partículas, considerando una función de distribución de velocidades de Maxwell-Jüttner [97]

$$f(u) = \frac{\mu u^2}{c^3 K_2(\mu)} \exp \left[-\mu \left(1 + \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2} \right], \quad (6.33)$$

donde $\mu = mc^2/(k_B T)$ y K_2 es la función modificada de Bessel de orden 2.

Consideraremos que el sistema tiene un largo $L = 512c/\omega_{pe}$. El número de grillas usadas es $N_g = 2048$ y el paso de tiempo es $\omega_{pe}\Delta t = 0.01$. Hemos usado el mismo número de electrones y positrones en cada grilla, con $n_e = n_p = 1000$. La condición inicial para las posiciones de las partículas ha sido escogida de tal manera que las partículas estén distribuidas homogéneamente en el espacio. En tanto para las velocidades usamos la Ec. (6.33): escogemos un valor para la temperatura μ , y asignamos de manera aleatoria las velocidades de las partículas, tal que la distribución resultante sea de Maxwell-Jüttner. Hemos escogido la misma temperatura para ambas especies.

Inicialmente, debido a que las partículas están distribuidas uniformemente en el espacio, la densidad de carga es nula en cada punto de la grilla, por lo que si la temperatura es cero, lo será también la velocidad inicial de cada partícula, y el sistema no evolucionará (salvo por el ruido numérico). Si la temperatura es distinta de cero, las partículas se desplazarán de sus posiciones de equilibrio por lo que se generarán corrientes y comenzarán a aparecer los campos electromagnéticos. Dejamos evolucionar el sistema a partir de las fluctuaciones térmicas hasta llegar a un tiempo $\omega_{pe}t = 1310.72$. En la Fig. 6.4 mostramos la relación de dispersión obtenida de la simulación para este periodo de tiempo. Ésta fue obtenida realizando una transformada de Fourier en el espacio y el tiempo de manera simultánea a los datos de las fluctuaciones del campo magnético transversal B/B_0 . La escala de colores representa la potencia del espectro en escala logarítmica. En la Fig. 6.4(a) hemos usado la temperatura $\mu = mc^2/(k_B T) = 100$, es decir, la energía térmica es cien veces menor que la energía en reposo del electrón. En este caso podemos ver cierta similitud

con la relación de dispersión derivada en el Cap. 3. Podemos comparar este gráfico con la Fig. 4.1(a), donde hemos usado los mismos parámetros. Vemos que en ambos casos existe una rama con un límite inferior para la frecuencia, la que corresponde a la rama electromagnética descrita anteriormente. También podemos identificar la rama que cruza el origen y que tiende a la frecuencia ciclotrónica de los positrones (o electrones, dependiendo del cuadrante), la cual corresponde a la rama de Alfvén. Podemos identificar claramente los modos con polarización circular izquierda y derecha que se propagan de manera paralela al campo magnético de fondo, en el primer y tercer cuadrante, respectivamente. De la misma manera, vemos los modos con polarización circular izquierda y derecha que se propagan de manera antiparalela al campo magnético de fondo, en el segundo y cuarto cuadrante. A diferencia de la Fig. 4.1(a), vemos que en la relación de dispersión de la simulación, Fig. 6.4(a), la rama de Alfvén comienza a perder su identidad para grandes valores del número de onda. En la Fig. 6.4(b) graficamos la relación de dispersión de las fluctuaciones del campo magnético para un mayor valor de la temperatura. Vemos que para esta temperatura el límite inferior para la frecuencia en la rama electromagnética (frecuencia de plasma efectiva) es menor que en el caso de la Fig. 6.4(a), y la rama de Alfvén está restringida a un intervalo más estrecho de frecuencias. En este caso la rama de Alfvén pierde su identidad para valores menores, comparados con la Fig. 6.4(a), del número de onda.

Hemos podido identificar las ramas que aparecen en la relación de dispersión, Fig 6.4, y compararlas con la solución de fluidos, Fig. 4.1(a). Sin embargo, en la relación de dispersión obtenida de la simulación aparecen modos que no han sido descritos por el modelo de fluidos. En la Fig. 6.4(a), aparte de las ramas ya descritas, la potencia del espectro se concentra también en $x \sim 1$ y $x \sim -1$, y se va

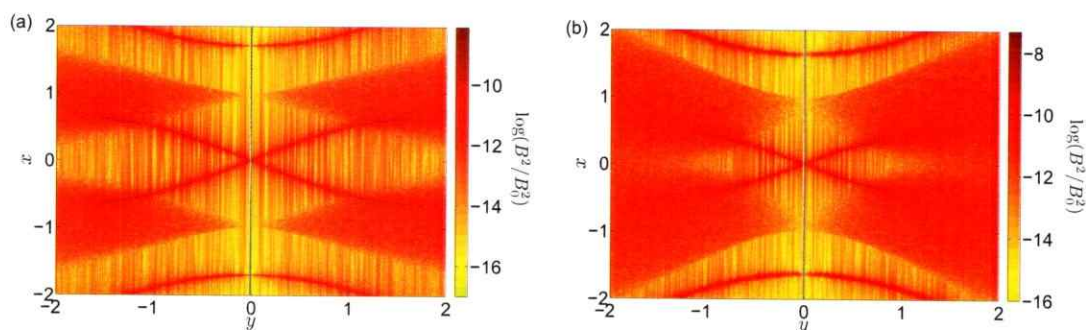


Figura 6.4: Relación de dispersión para las fluctuaciones del campo magnético transversal, frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ vs. número de onda normalizado $y = ck/\Omega_c$, para $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$. (a) $\mu = 100$. (b) $\mu = 20$.

ensanchando a medida que aumenta el número de onda $|y|$. Vemos que lo mismo sucede para temperaturas más grandes, Fig. 6.4(b), pero esta vez el triángulo que forman estos modos es más ancho. En la Ref. [98], Araneda *et al.* estudiaron estos modos, en un plasma de electrones e iones en el contexto de una teoría cinética. Se estudió el comportamiento de estos modos usando simulaciones híbridas y el teorema de fluctuación-disipación, describiéndolos como emisiones espontáneas de las fluctuaciones del campo magnético. Vemos entonces que estas fluctuaciones espontáneas son producto de los efectos cinéticos del plasma, razón por la cual nuestra teoría de fluidos fue incapaz de predecirlos. A pesar de que se han estudiado plasmas de electrones y positrones usando teoría cinética [87,99], no se han reportado este tipo de modos, debido a que en estos trabajos no se ha considerado el amortiguamiento de las ondas. Esperamos que al desarrollar una teoría cinética que sí tome en cuenta estos efectos, como se muestra en el Apéndice B.1, podamos explicar la aparición de estos modos en el caso relativista.

En trabajos anteriores se ha estudiado la dependencia de la frecuencia de plasma efectiva (límite inferior para la frecuencia en la rama electromagnética) con la

temperatura, y la dependencia de la velocidad de Alfvén con la temperatura, tanto para un modelo de fluidos [35], como para uno cinético [87]. En la Fig. 6.5(a) hemos graficado la variación de la frecuencia de plasma efectiva con la temperatura, para el modelo de fluidos, Cap. 3 [línea continua (negra)], el modelo cinético, Ref. [87] [línea segmentada (roja)] y la simulación [puntos (azul)]. Vemos que los datos de la simulación son cualitativamente similares a los que se obtuvieron de los otros modelos. En esta figura, el error está asociado con el ancho de la rama electromagnética en la simulación. Como vimos en la Fig. 6.4, para bajas temperaturas (μ grande) la rama electromagnética está bien definida, por lo que es más fácil obtener un valor para la frecuencia de plasma efectiva, en cambio para altas temperaturas (μ pequeño) la rama se vuelve difusa y va perdiendo su identidad, por lo que se hace más difícil su medición. Es por esta razón que para altas temperaturas el error en la medición

ε

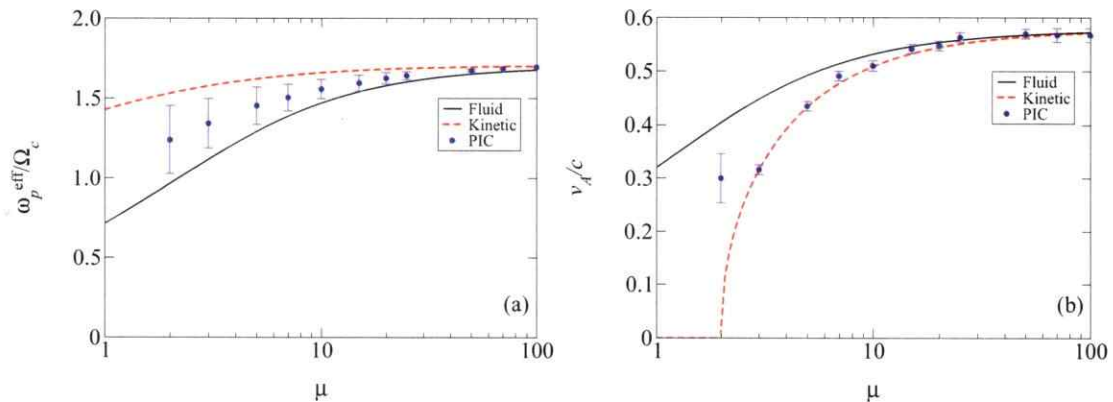


Figura 6.5: (a) Frecuencia de plasma efectiva $\omega_{pe}^{\text{eff}}/\Omega_c$ vs. μ . (b) Velocidad de Alfvén v_A/c vs. μ . Línea continua (negra): Modelo de fluido, Cap. 3. Línea segmentada (roja): Modelo cinético, Ref. [87]. Puntos (azul): Valores obtenidos de la simulación.

La Fig. 6.5(b) muestra la variación de la velocidad de Alfvén en función de la temperatura. Al igual que en el caso anterior, los resultados de la simulación son

consistentes con ambos modelos. Para bajas temperaturas los modelos de fluido y cinético casi no presentan diferencias y los resultados de la simulación se ajustan perfectamente. Para altas temperaturas en cambio, existen diferencias entre ambos modelos. En el modelo de fluido, Ec. (3.23), la velocidad de Alfvén tiende a cero cuando la temperatura es muy grande, en cambio en el modelo cinético, Ec. (26) de la Ref. [87], existe una temperatura crítica sobre la cual la rama de Alfvén deja de existir. Para $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$ la temperatura crítica es $\mu_{crit} = 2$. Esto se ve en la Fig. 6.5, ya que la línea segmentada (roja) no pasa por el origen. Para este intervalo de temperaturas los datos de la simulación se comportan de manera similar al modelo cinético, lo que es esperable debido a que la simulación es un modelo puramente cinético. En la simulación, para altas temperaturas, vemos que la rama de Alfvén va perdiendo su identidad a medida que aumenta el número de onda, Fig. 6.4(b). Mientras mayor es la temperatura, más bajo es el valor del número de onda a partir del cual la rama pierde su identidad. Es así como para $\mu = 1$, y temperaturas mayores, ya no es posible calcular la velocidad de Alfvén, sugiriendo que no existe la rama de Alfvén para esas temperaturas. Este efecto es consistente con los resultados cinéticos preliminares presentados en el Apéndice B.1.

6.3. Decaimientos paramétricos

En el Cap. 4 estudiamos los decaimientos paramétricos de una onda circularmente polarizada propagándose a lo largo de un campo magnético de fondo, en un plasma de electrones y positrones. Ahora estudiaremos los decaimientos paramétricos de esta onda, pero desde el punto de vista de la simulación de partículas. Usaremos los resultados obtenidos para la onda bomba en el Cap. 3 como condición inicial para la simulación y estudiaremos la evolución temporal de esta onda.

Por motivos de convención, en las simulaciones de partículas de una dimensión, se acostumbra a designar X como la dirección espacial, y nosotros seguiremos esta convención también. Por lo tanto, si queremos estudiar la propagación paralela a un campo magnético de fondo, éste debe apuntar en la dirección X . Esto implica hacer algunos cambios menores en las ecuaciones mostradas en el Cap. 3. Los campos electromagnéticos de la onda con polarización circular izquierda, Ecs. (3.9) y (3.10), serán ahora

$$\vec{E}_0(X, t) = \bar{E}[\sin(k_0 X - \omega_0 t)\hat{y} - \cos(k_0 X - \omega_0 t)\hat{z}], \quad (6.34)$$

$$\vec{B}_0(X, t) = \bar{B}[\cos(k_0 X - \omega_0 t)\hat{y} + \sin(k_0 X - \omega_0 t)\hat{z}] + B_{0X}\hat{X}. \quad (6.35)$$

Esta onda se propaga en la dirección X , la misma en la que se encuentra el campo magnético de fondo B_{0X} . Por otra parte, la velocidad transversal inducida por esta onda circularmente polarizada, Ec. (3.16), se puede escribir ahora como

$$v_{\perp 0j} = v_{y0j} + iv_{z0j} = -\eta_j \left(\frac{\omega_0 \alpha}{f_{0j}\gamma_{0j} - \Omega_{cj}} \right) e^{i(k_0 X - \omega_0 t)}. \quad (6.36)$$

Notamos que, para efectos prácticos, el único cambio que hemos realizado es la permutación cíclica de las variables $z \rightarrow X$, $X \rightarrow y$ e $y \rightarrow z$. Por esta razón, el resto del análisis hecho en los Cap. 3 y 4, permanece intacto. La relación de dispersión de la onda bomba, Ec. (3.21), será la misma.

Hecha la aclaración, podemos comenzar a detallar el procedimiento usado. Los parámetros usados en la simulación son los mismos que describimos en la Sec. 6.2. Usaremos como condición inicial para los campos electromagnéticos las Ecs. (6.34) y (6.35). La velocidad del fluido sobre cada punto de grilla estará dada por la Ec. (6.36), la que luego será interpolada sobre la posición de las partículas para conocer la

velocidad de cada una de ellas. Además a cada partícula se le agregará una velocidad térmica según la distribución de velocidades, Ec. (6.33), donde fijaremos un valor para la temperatura, μ . Escogemos un valor para el número de onda normalizado de la bomba, $y_0 = ck_0/\Omega_c$. En el Cap. 4 usamos $y_0 = 1$, pero en este capítulo usaremos el valor $y_0 = 0.49$, es decir, consideraremos $m = 40$, que es el número de modos de oscilación en nuestra caja de largo $L = 512 c/\omega_{pe}$, así $y_0 = 2\pi m/L$. Hemos escogido un valor diferente debido a que, como vimos en la Sec. 6.2, a medida que aumenta la temperatura la rama de Alfvén va perdiendo su identidad para valores cada vez menores de y , por lo que si queremos considerar temperaturas más grandes corremos el riesgo de estar en una zona donde ya no existe rama de Alfvén. Es por esto que hemos disminuido el valor de y_0 . Para este valor del número de onda, resolvemos la Ec. (3.21), y encontramos el valor para la frecuencia normalizada, $x_0 = 0.27$, en la rama de Alfvén. Los decaimientos paramétricos de esta nueva onda bomba de Alfvén son esencialmente los mismos, respecto a los del Cap. 4, y los iremos detallando a medida que los necesitemos.

Con esta onda bomba como condición inicial, con amplitud normalizada $\alpha = 0.2$, dejamos evolucionar la simulación hasta el tiempo $\omega_{pet} = 1310.72$, lo que nos permitirá tener un número de iteraciones que sea potencia de dos, y así poder realizar nuestro análisis de Fourier sin problemas. En la Fig. 6.6 mostramos la evolución espaciotemporal de la componente B_y del campo magnético. En la etapa inicial de la simulación, $\omega_{pet} \lesssim 400$, vemos sólo la presencia de la onda bomba, cuya velocidad de propagación es consistente con la relación de dispersión, Ec. (3.21). En un tiempo cercano a $\omega_{pet} \approx 400$, las inestabilidades comienzan a aparecer, excitando ondas que se propagan en dirección opuesta a la onda bomba original. Hacia el final de la simulación, estas ondas excitadas se transforman en estructuras localizadas que se

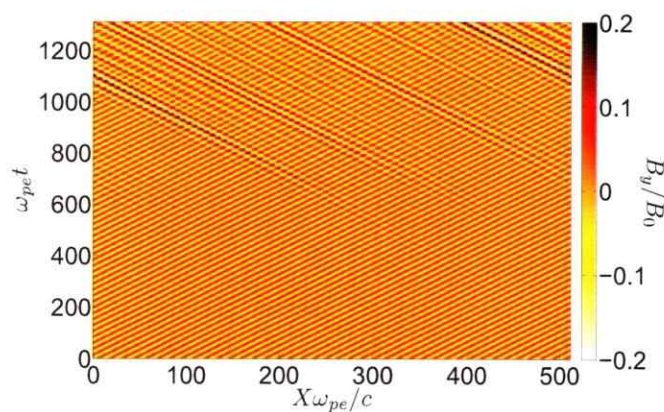


Figura 6.6: Evolución espaciotemporal de la componente y del campo magnético normalizado. Tiempo normalizado $\omega_{pe}t$ vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$ e $y_0 = 0.49$.

propagan.

La Fig. 6.7(a) muestra el espectro de potencias para las fluctuaciones del campo magnético transversal. En esta figura se aprecia la relación de dispersión típica para plasmas relativistas con sus respectivas ramas de Alfvén y electromagnéticas (creciendo desde el ruido térmico) [ver Fig. 6.4], más algunas regiones donde se concentra la energía del espectro, como veremos a continuación. Hemos notado que podemos eliminar mucho del ruido numérico en esta figura, ejecutando varias simulaciones con los mismos parámetros, pero con diferentes semillas para la condición inicial de velocidad, y tomando promedio sobre las cantidades resultantes en las simulaciones. La Fig. 6.7(b) muestra el resultado de promediar sobre dieciséis simulaciones distintas, para el espectro de potencias de las fluctuaciones del campo magnético transversal. Vemos que las características principales del espectro mostrado en la Fig. 6.7(a) se han mantenido, lo que significa que son un comportamiento robusto en la simulación. El ruido numérico se ha reducido considerablemente, dando lugar a una figura

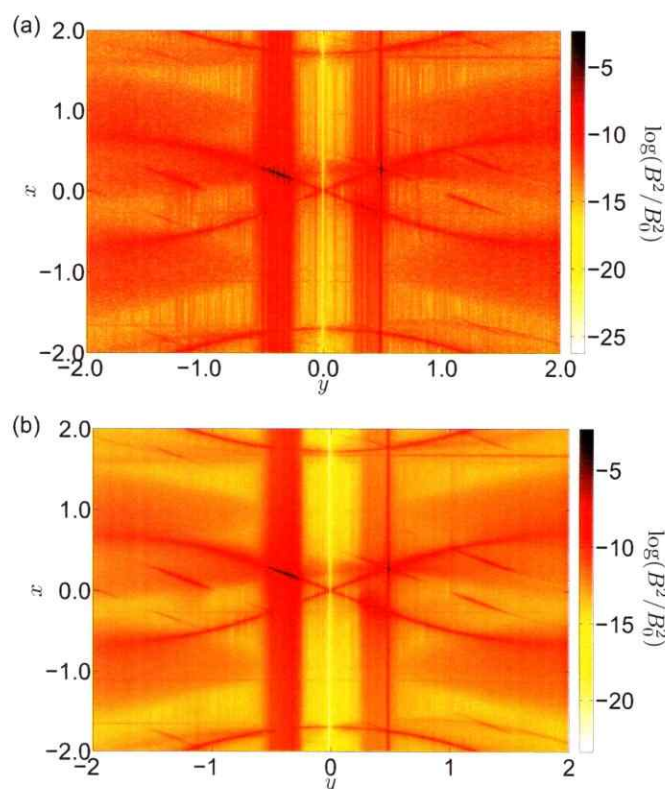


Figura 6.7: (a) Espectro de potencias para las fluctuaciones del campo magnético transversal. Frecuencia normalizada $x = \omega/\Omega_c$ vs. número de onda normalizado $y = ck/\Omega_c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$. (b) El mismo gráfico anterior, pero tomando promedio sobre dieciséis simulaciones.

mucho más suave. De ahora en adelante usaremos las cantidades promediadas para la mayor parte del análisis.

Debido a que la onda bomba tiene polarización circular izquierda, el primer cuadrante de la relación de dispersión, Fig. 6.7, muestra las ondas que se propagan hacia adelante (con respecto al campo magnético de fondo) con polarización circular izquierda (\mathcal{L}_f *left-handed*), mientras el segundo cuadrante muestra las ondas con polarización circular izquierda que se propagan hacia atrás (\mathcal{L}_b *left-handed*). El ter-

cer y cuarto cuadrante muestran las ondas con polarización circular derecha que se propagan hacia adelante y hacia atrás, respectivamente (\mathcal{R}_f , \mathcal{R}_b). De acuerdo con la Fig. 6.7, la mayor parte de la energía del espectro reside en la rama de Alfvén del primer cuadrante $(y, x) \approx (0.49, 0.27)$, lo que corresponde a la onda bomba \mathcal{L}_f . También observamos ondas de Alfvén \mathcal{L}_b alrededor de $(y, x) \approx (-0.49, 0.27)$ y \mathcal{R}_b $(y, x) \approx (0.49, -0.27)$ en el segundo y cuarto cuadrante, respectivamente, mientras que las ondas \mathcal{R}_f (tercer cuadrante) se excitan muy débilmente.

Descompondremos la onda obtenida en la Fig. 6.6 en dos modos espirales, uno con helicidad positiva y el otro con helicidad negativa (correspondientes a números de onda positivos y negativos, respectivamente) como fue realizado en la Ref. [84]. Por lo tanto, el modo espiral B_y^r con helicidad positiva ($k > 0$) consiste en ondas del tipo \mathcal{L}_f y \mathcal{R}_b propagándose hacia adelante y atrás, respectivamente. Por otro lado, el modo espiral B_y^l con helicidad negativa ($k < 0$) consiste en ondas \mathcal{R}_f y \mathcal{L}_b . En la Fig. 6.8 se muestra la descomposición de B_y en los dos modos espirales. La Fig. 6.8(a) muestra B_y^r , donde podemos ver claramente la presencia de la onda bomba, la cual es una onda \mathcal{L}_f con $y_0 = 0.49$ ($m = 40$ modos). Menos clara es la presencia de ondas \mathcal{R}_b , tal como vimos en el cuarto cuadrante de la Fig. 6.7. La Fig. 6.8(b) muestra B_y^l . Acá notamos la presencia de ondas \mathcal{L}_b , como era de esperar (segundo cuadrante de la Fig. 6.7), mientras que las ondas \mathcal{R}_f tienen una presencia muy débil (tercer cuadrante de la Fig. 6.7). Notamos que al comienzo de la simulación no hay ondas presentes en la Fig. 6.8(b), debido a que el sistema comienza con la onda bomba \mathcal{L}_f .

Sabemos del Cap. 4, que esta onda circularmente polarizada evoluciona y experimenta decaimientos paramétricos, los cuales también pueden ser estudiados usando esta simulación. En las Figs. 6.6 y 6.8, vemos que luego de la etapa inicial de la

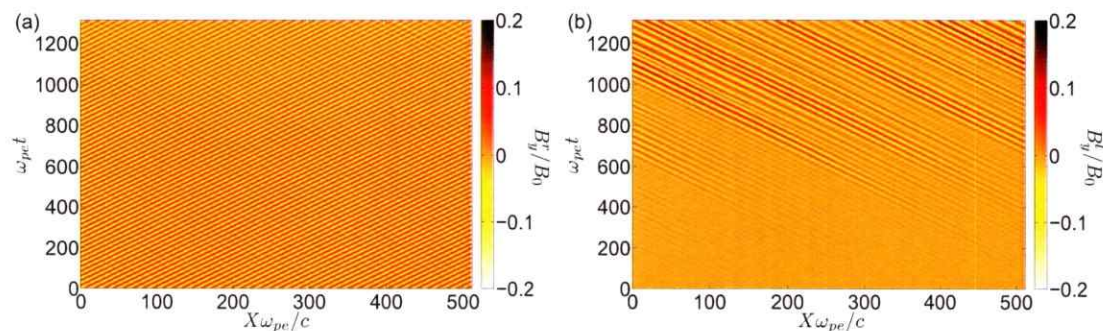


Figura 6.8: Evolución espaciotemporal de la componente y del campo magnético normalizado. Tiempo normalizado $\omega_{pe}t$ vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$. (a) Helicidad positiva B_y^r , mostrando ondas \mathcal{L}_f y \mathcal{R}_b . (b) Helicidad negativa B_y^l , mostrando ondas \mathcal{L}_b y \mathcal{R}_f .

simulación $\omega_{pe}t \gtrsim 400$, otras ondas comienzan a crecer y propagarse en el sistema. Estas ondas son debidas al acoplamiento de la onda bomba con las fluctuaciones térmicas longitudinales, lo que corresponde a los decaimientos paramétricos. Podemos estudiar estos decaimientos graficando los modos de oscilación transversales y longitudinales, y veremos cuáles son los modos que se excitan en la simulación. Con el objetivo de comparar los resultados de la simulación con los obtenidos analíticamente en el Cap. 4, graficamos en la Fig. 6.9(a) la relación de dispersión, Ec. (4.25), para los decaimientos paramétricos del modelo de fluido (con $y_0 = 0.49$), para $\alpha = 0.2$. Tal como en el Cap. 4, la línea punteada (roja) muestra la parte real de la solución compleja, indicando la presencia de una inestabilidad. De la solución analítica observamos que sólo tres cruces desarrollan inestabilidades. El primer cruce es una inestabilidad modulacional [69] cercana al origen entre (p_+, e_-) . El segundo cruce es entre (S_+, p_-) y corresponde a una inestabilidad de decaimiento ordinaria, en la cual la onda bomba decae en un modo electroacústico de frecuencia y número de onda (ω, k) , que se propaga paralelo al campo magnético externo, y una onda *sideband*

con $(\omega_-, k_-^*) = (\omega_0 - \omega, k_0 - k)$. Finalmente el tercer cruce ocurre entre (p_+, p_-) , en el cual la onda bomba decae en dos ondas *sideband* electromagnéticas p_+ con $(\omega, k) = (\omega_0 + \omega, k_0 + k)$ y p_- . En la Fig. 6.9(a) vemos que las inestabilidades ocurren en $(x, y) \approx (0, 0.1)$, $(x, y) \approx (0.1, 0.8)$, y $(x, y) \approx (0.25, 0.53)$, respectivamente.

En la Fig. 6.9(b) hemos graficado el espectro de potencia de las fluctuaciones de densidad normalizada $\rho^2/(en_0)^2$. Comparando esta figura con la Fig. 6.9(a), podemos identificar muchos de los modos predichos por el modelo de fluido, aunque algunos de ellos están más amortiguados que otros. Existe un claro máximo en el espectro de potencia en la región $0.8 < y < 1$, para $x \sim 0.1$, lo cual concuerda con la predicción del modelo de fluido para la inestabilidad de decaimiento ordinario (S_+, p_-) . Como dijimos anteriormente, la onda *sideband* electromagnética p_- tiene frecuencia y número de onda normalizados $(x_0 - x, y_0 - y)$. Recordemos que la onda bomba tiene $(x_0, y_0) = (0.27, 0.49)$, y que la inestabilidad ocurre en $(x, y) \approx (0 \sim 0.1, 0.8 \sim 1)$, luego debería haber un máximo en el espectro de potencia electromagnético en el intervalo $(0 \sim 0.17, -0.31 \sim -0.51)$, lo cual es consistente con la Fig. 6.7. Por lo tanto, la onda *sideband* p_- es la onda de polarización izquierda propagándose hacia atrás (\mathcal{L}_b) mostrada en la Fig. 6.8(b). El modo electroacústico S_+ tiene frecuencia y número de onda $(x, y) \approx (0 \sim 0.1, 0.8 \sim 1)$.

La inestabilidad modulacional (p_+, e_-) predicha en la Fig. 6.9(a), tiene una tasa de crecimiento menor comparada con la inestabilidad (S_+, p_-) [ver Fig. 6.11(a) más adelante], por lo que su efecto no es relevante en la Fig. 6.9. Lo mismo ocurre con la inestabilidad (p_+, p_-) .

Podemos ver la evolución temporal del espectro de números de onda en la Fig. 6.10. Observamos que para las fluctuaciones del campo magnético transversal, Fig. 6.10(a), la onda bomba, que se caracteriza por, $y = 0.49$, es el modo predominante. En la

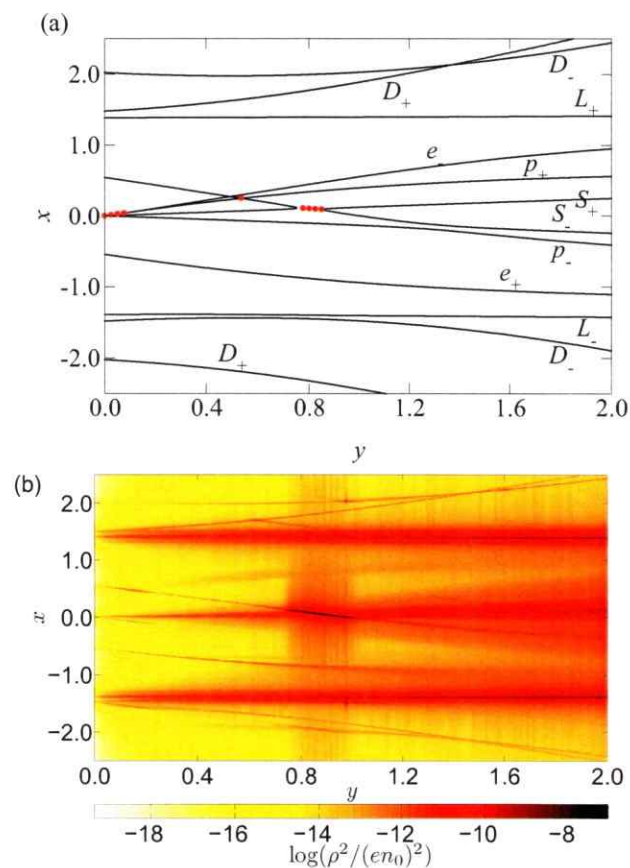


Figura 6.9: Relación de dispersión x vs. y . (a) Modelo de fluido Cap. 4, Ec. (4.25). La línea punteada (roja) representa la parte real de la solución cuando es compleja. (b) Espectro de potencia para las fluctuaciones de densidad normalizada, tomando promedio sobre dieciséis simulaciones. Ambos gráficos para $\mu = 100$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$.

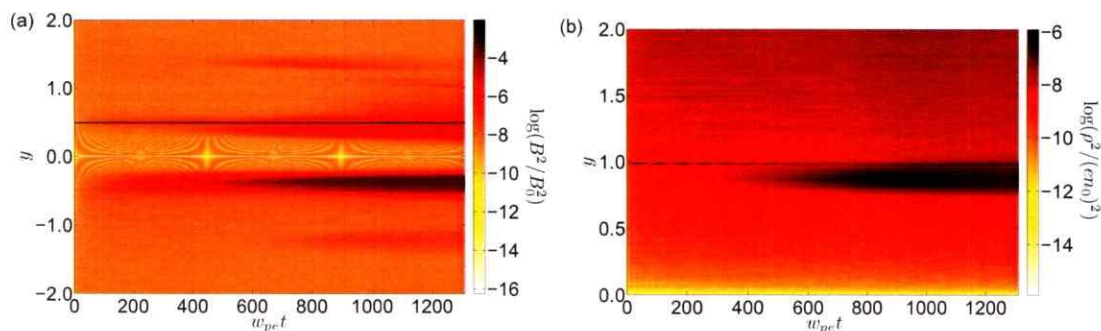


Figura 6.10: Evolución temporal del espectro de números de onda, y vs. $\omega_{pe}t$. (a) Modos de las fluctuaciones del campo magnético transversal. (b) Modos para las fluctuaciones de densidad. Ambos gráficos para $\mu = 100$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$, y tomando promedio sobre dieciséis simulaciones.

etapa lineal de la simulación, hasta $\omega_{pe}t \approx 300$, los modos en $y \approx -0.3 \sim -0.5$ comienzan a crecer, lo que corresponde al modo p_- , como vimos anteriormente. Casi al mismo tiempo, la evolución de los modos en las fluctuaciones de densidad, Fig. 6.10(b), muestran el crecimiento de modos en $y \approx 0.8 \sim 1$, correspondientes al modo S_+ . Los modos que crecen cercanos a $y \approx 0.49$ en la Fig. 6.10(a), pueden corresponder a la inestabilidad modulacional (p_+, e_-) en $(x, y) \approx (0, 0.1)$ que se observa en la Fig. 6.9(a), debido a que p_+ y p_- satisfacen la condición $y_0 + y \approx 0.5$ e $y_0 - y \approx 0.48$, respectivamente. Para el final de la simulación, $\omega_{pe}t \approx 900$ los modos en $y \approx 1$ son ligeramente excitados como se observa en la Fig. 6.10(a); esto puede corresponder al modo p_+ del decaimiento (p_+, p_-) en $(x, y) \approx (0.25, 0.53)$ en la Fig. 6.9, con número de onda $y_0 + y \approx 1.02$. Vemos en la Fig. 6.10(a) que para ese tiempo existen otras zonas que están activas también, las cuales no son esperadas de acuerdo al modelo de fluido. Esto puede corresponder a un proceso de decaimientos sucesivos [37], o a otro tipo de interacciones no lineales que se hacen patentes en la Fig. 6.8.

En la Fig. 6.11 graficamos las tasas de crecimiento para las inestabilidades en el sistema. La Fig. 6.11(a) muestra las tasas de crecimiento para el modelo de fluido, donde $\Gamma = \text{Im}(x)$ tiene un valor máximo en $y \approx 0.8$. Las inestabilidades en el origen $y \approx 0.1$, y en $y \approx 0.5$, son muy débiles. Observamos que con el aumento de la amplitud de la bomba, α , las tasas de crecimiento de las inestabilidades aumentan también. La Fig. 6.11(b) muestra las tasas de crecimiento calculadas a partir de las fluctuaciones de densidad en la simulación. Éstas fueron calculadas a partir de la Fig. 6.10(b), donde para cada modo buscamos el intervalo de crecimiento lineal cuya pendiente corresponde a la tasa de crecimiento buscada. Esta figura [Fig. 6.11(b)] muestra un comportamiento similar al predicho por el modelo de fluidos [Fig. 6.11(a)]. El máximo en la tasa de crecimiento está en $y \approx 0.8 \sim 1$, aumentando la tasa de crecimiento a medida que aumentamos α . Notamos que las inestabilidades en la simulación, Fig. 6.11(b), tienen una tasa de crecimiento menor a la esperada según el modelo de fluido; esto puede ser entendido al considerar la presencia de efectos cinéticos en la simulación como el amortiguamiento de Landau, los cuales no han sido incluidos en el modelo de fluido.

6.3.1. Dependencia de la temperatura

En el Cap. 4 los decaimientos paramétricos fueron estudiados para diferentes valores de la amplitud de onda y de la temperatura del plasma. En este modelo de fluido encontramos que un aumento en la temperatura del plasma μ , resulta en una disminución de las tasas de crecimiento. Para estudiar este comportamiento, en la Fig 6.12(a) hemos graficado la relación de dispersión de los decaimientos, Ec. (4.25), para $\alpha = 0.2$, pero para una temperatura mayor que antes, $\mu = 50$. En este caso aparecen las mismas inestabilidades, pero en un rango más estrecho de número de

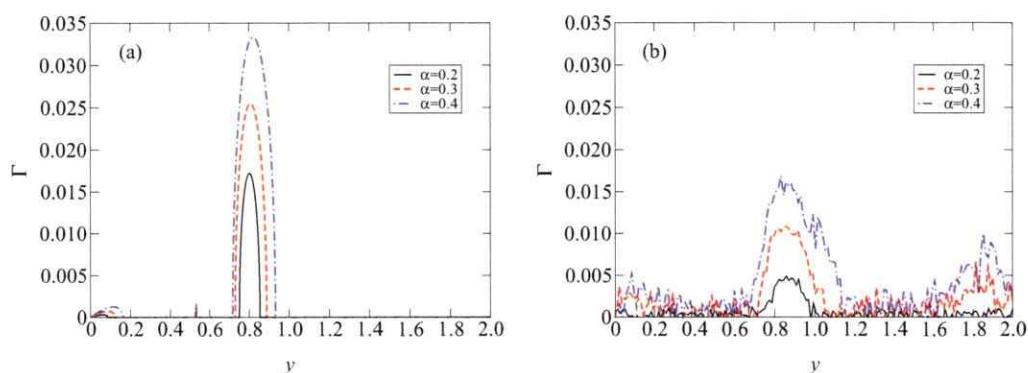


Figura 6.11: Tasas de crecimiento para los decaimientos, $\Gamma = \text{Im}(x)$ vs. y . (a) Teoría de fluido en Cap. 4. (b) Tasas de crecimiento para las fluctuaciones de densidad en la simulación, tomando promedio sobre dieciséis simulaciones. Ambos gráficos para $\mu = 100$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$ y x_0 perteneciente a la rama de Alfvén. Línea continua (negra): $\alpha = 0.2$; línea segmentada (roja): $\alpha = 0.3$; línea segmentada y punteada (azul): $\alpha = 0.4$.

onda, mientras que las tasas de crecimiento de las inestabilidades, Fig. 6.12(b), son menores en comparación al caso anterior, Fig. 6.11(a).

En la Fig. 6.13 hemos graficado la relación de dispersión y las tasas de crecimiento para las fluctuaciones de densidad en la simulación, para $\mu = 50$. En la Fig. 6.13(a) la relación de dispersión muestra la mayor parte de los modos predichos por la teoría de fluidos [Fig. 6.12]. Hay una gran concentración de la potencia en el rango $y \approx 0.7 \sim 0.9$, el cual corresponde al acoplamiento (S_+, p_-) , como en el caso anterior [Fig. 6.9(b)]. La Fig. 6.13(b) muestra que en esta zona tenemos la mayor inestabilidad, al igual que en el caso anterior [Fig. 6.11]. La Fig. 6.13(b) también muestra que con el incremento de la amplitud de la bomba α , aumentan también las inestabilidades, en acuerdo con lo que sucede en el modelo de fluido, Fig. 6.12(b). Claramente las tasas de crecimiento disminuyen con el aumento de la temperatura, tal como era esperado.

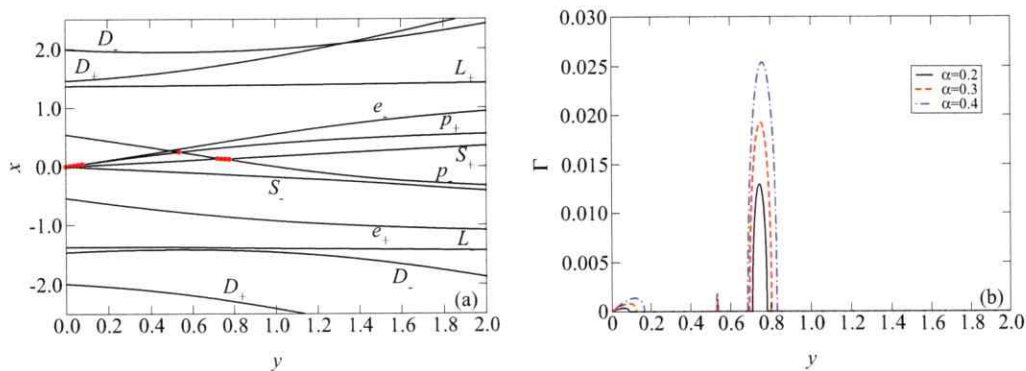


Figura 6.12: (a) Relación de dispersión x vs. y para el modelo de fluido, Ec. (4.25), para $\alpha = 0.2$. Las líneas punteadas representan la parte real de la solución cuando ésta es compleja. (b) Tasas de crecimiento para los decaimientos en el modelo de fluido, $\Gamma = \text{Im}(x)$ vs. y . Línea continua (negra): $\alpha = 0.2$; línea segmentada (roja): $\alpha = 0.3$; línea segmentada y punteada (azul): $\alpha = 0.4$. Ambos gráficos para $\mu = 50$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$.

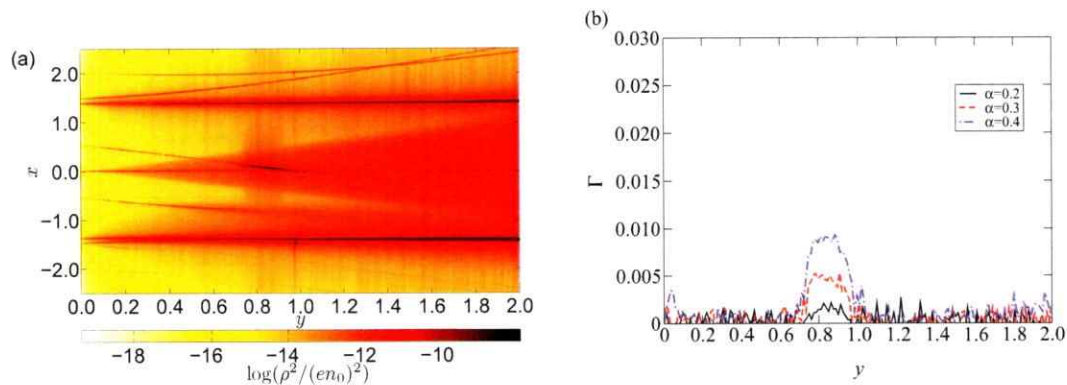


Figura 6.13: (a) Relación de dispersión x vs. y para las fluctuaciones de densidad en la simulación. (b) Tasas de crecimiento para los modos de las fluctuaciones de densidad en la simulación, $\Gamma = \text{Im}(x)$ vs. y . Línea continua (negra): $\alpha = 0.2$. Línea segmentada (roja): $\alpha = 0.3$. Línea segmentada y punteada (azul): $\alpha = 0.4$. Ambos gráficos para $\mu = 50$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$, y promediando sobre dieciséis simulaciones.

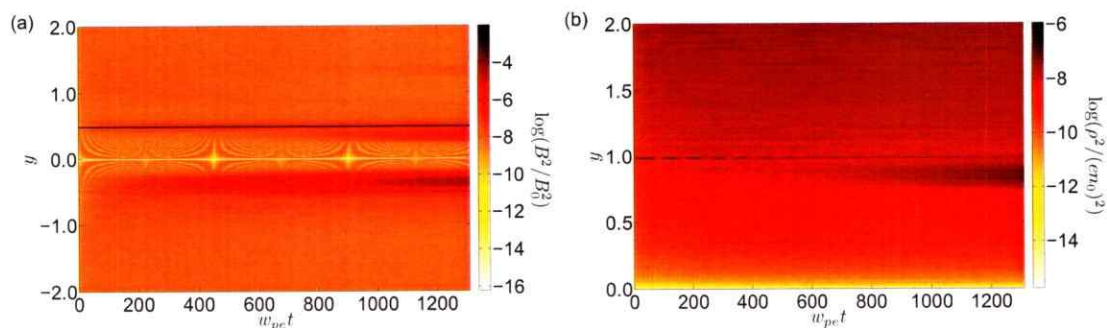


Figura 6.14: Evolución temporal del espectro de números de onda, y vs. $\omega_{pe}t$. (a) Modos para las fluctuaciones del campo magnético transversal. (b) Modos para las fluctuaciones de densidad. Ambos gráficos para $\mu = 50$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$, y promediando sobre dieciséis simulaciones.

En la Fig. 6.14 observamos la evolución temporal del espectro de números de onda. La Fig. 6.14(a) muestra la evolución de los modos electromagnéticos. Acá, el modo de mayor actividad, para todo el periodo de la simulación, es el correspondiente a la onda bomba en $y = 0.49$, en contraste con el caso anterior para una temperatura menor [Fig. 6.10(a)]. El modo secundario está en $y \approx -0.3 \sim -0.5$ y corresponde al modo p_- del acoplamiento (S_+, p_-) . El modo S_+ se puede ver en la Fig. 6.14(b) en $y \approx 0.8$. El hecho de que, en este caso, las tasas de crecimiento sean menores hace que las inestabilidades se desarrollen en tiempos mayores en comparación con la Fig. 6.10(b). De hecho, el modo S_+ en la Fig. 6.14(b) comienza a crecer en $\omega_{pe}t \approx 800$, un tiempo mayor que en la Fig. 6.10(b), donde el modo aparece cercano a $\omega_{pe}t \approx 500$.

Ahora, consideremos una temperatura aun mayor, $\mu = 10$. En el modelo de fluido, Fig. 6.15, podemos apreciar las mismas inestabilidades que en los casos anteriores, pero con tasas de crecimiento muy pequeñas. De la Fig. 6.15(a) vemos que los acoplamientos (S_+, p_-) y (p_+, p_-) ocurren en un intervalo de frecuencia y número de onda bastante acotado, $(\omega, k) \approx (0.2, 0.6)$. Debido a que estas inestabilidades son tan

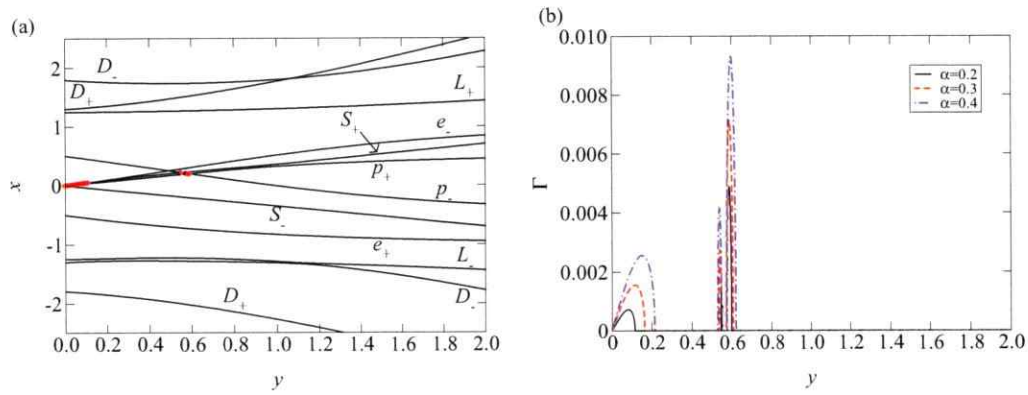


Figura 6.15: (a) Relación de dispersión x vs. y para la teoría de fluidos, Ec. (4.25), para $\alpha = 0.2$. La línea punteada (roja) representa la parte real de la solución cuando ésta es compleja. (b) Tasas de crecimiento para los decaimientos en el modelo de fluido, $\Gamma = \text{Im}(x)$ vs. y . Línea continua (negra): $\alpha = 0.2$; línea segmentada (roja): $\alpha = 0.3$; línea segmentada y punteada (azul): $\alpha = 0.4$. Ambos gráficos para $\mu = 10$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$.

pequeñas, esperamos que ellas aparezcan para tiempos muy grandes de la simulación.

En la Fig. 6.16 graficamos la evolución espaciotemporal de la componente y del campo magnético transversal en la simulación, para $\mu = 10$. Acá la onda bomba es la única onda propagándose en el sistema durante toda la simulación. De existir otros decaimientos, éstos están muy amortiguados y no se pueden distinguir de esta figura.

En la Fig. 6.17 hemos graficado la evolución temporal para el espectro de números de onda, para esta temperatura. En el espectro electromagnético, Fig. 6.17(a), la potencia está concentrada en el número de onda de la bomba $y = 0.49$. La inestabilidad principal aparece alrededor de $y \approx 0.49$, lo cual corresponde a la inestabilidad modulacional (p_+ , e_-). Sin embargo, no podemos apreciar otras inestabilidades, debido a que las tasas de crecimiento son muy pequeñas. En la Fig. 6.17 observamos que no hay inestabilidades predominantes en el espectro. Por lo tanto, para grandes temperaturas la simulación está en acuerdo con el modelo de fluido. Debido al he-

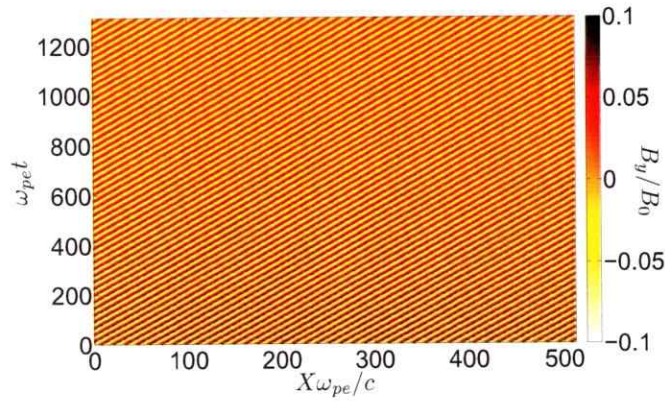


Figura 6.16: Evolución espaciotemporal de la componente y del campo magnético transversal normalizado. Tiempo normalizado $\omega_{pe}t$ vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 10$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$ y x_0 en la rama de Alfvén.

cho de que las inestabilidades aparecen en un intervalo muy estrecho de números de onda, es muy complicado estimar numéricamente las tasas de crecimientos a partir de la simulación desde la Fig. 6.17(b), lo que es consistente con el hecho de que no hay modos predominantes en esta figura.

Finalmente, consideramos un régimen de temperaturas bastante altas $\mu = 1$ ($k_B T = mc^2$). Del modelo de fluidos esperamos que para esta temperatura no existan inestabilidades, como se muestra en la Fig. 6.18. Como se discutió en el Cap. 4 esto es esperable debido a que necesitamos una amplitud de la onda muy grande, $\alpha > 1$, para contrarrestar el movimiento térmico de las partículas.

En la Fig. 6.19 mostramos la evolución espaciotemporal de las fluctuaciones de la componente y del campo magnético. Vemos que la onda bomba sobrevive sólo hasta $\omega_{pe}t \approx 10$, y luego de ese tiempo desaparece debido al movimiento térmico de las partículas. Este comportamiento no es el que esperábamos según la teoría de fluidos, y vemos que los efectos cinéticos se vuelven relevantes. Esto significa que la onda bomba dada por la Ec. (3.21) no puede ser considerada como un modo normal del

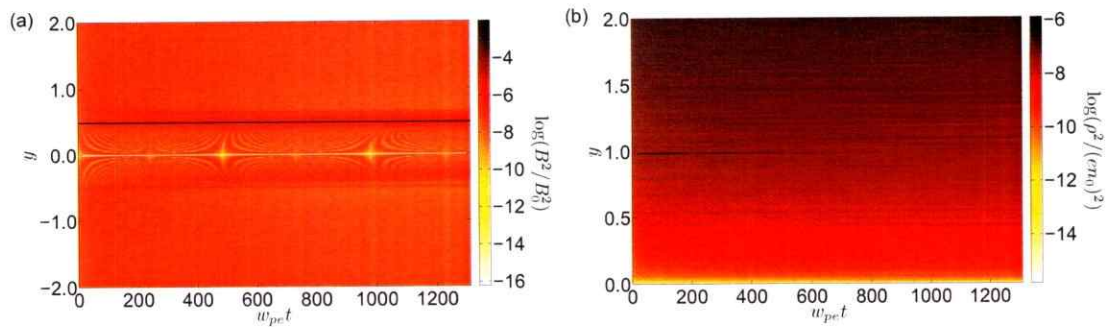


Figura 6.17: Evolución temporal del espectro de números de onda y vs. $\omega_{pe}t$. (a) Modos para las fluctuaciones del campo magnético transversal. (b) Modos para las fluctuaciones de densidad. Ambos gráficos para $\mu = 10$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$, y promediando sobre dieciséis simulaciones.

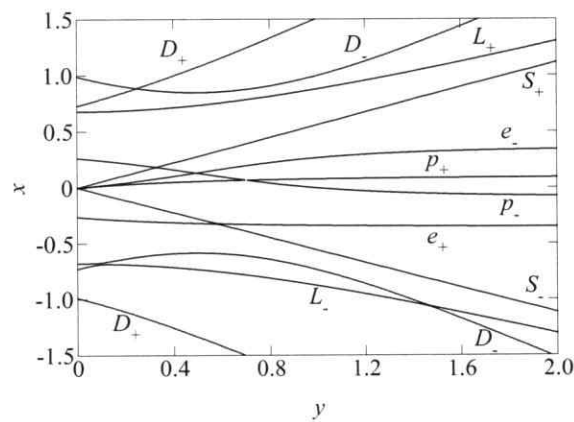


Figura 6.18: Relación de dispersión x vs. y para el modelo de fluido, Ec. (4.25), para $\mu = 1$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$.

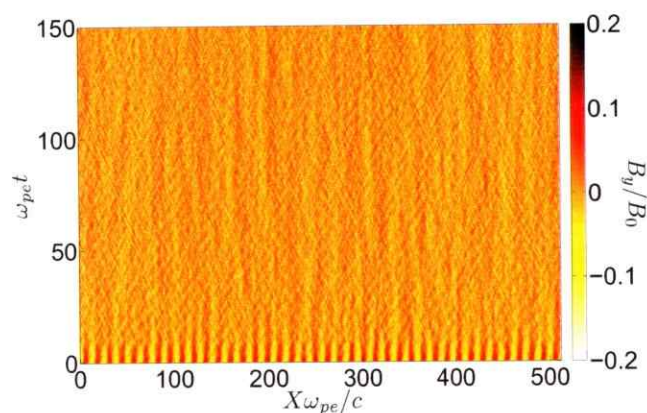


Figura 6.19: Evolución espaciotemporal de la componente y del campo magnético normalizado. Tiempo normalizado $\omega_{pe}t$ vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 1$, $\alpha = 0.2$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$.

plasma para temperaturas muy altas, y sería más apropiado considerar un modelo basado en teoría cinética.

Domínguez *et al.* [87] estudiaron la propagación de una onda circularmente polarizada por medio de un tratamiento cinético en una dimensión, basado en la ecuación relativista de Vlasov. Se mostró que la rama de Alfvén desaparece para grandes temperaturas, y en particular para $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$ el máximo valor de la temperatura para la cual la rama de Alfvén aún existe corresponde a $\mu = 2$. Por lo tanto, el resultado mostrado en la Fig. 6.19 es consistente con el análisis en la Ref. [87].

La situación en la Fig. 6.19 es que la onda de Alfvén está siendo forzada a propagarse en el sistema, pero no siendo un modo normal de éste, la onda se desestabiliza rápidamente. El ruido resultante muestra la existencia de ondas electromagnéticas (en la parte superior de la rama electromagnética [35]).

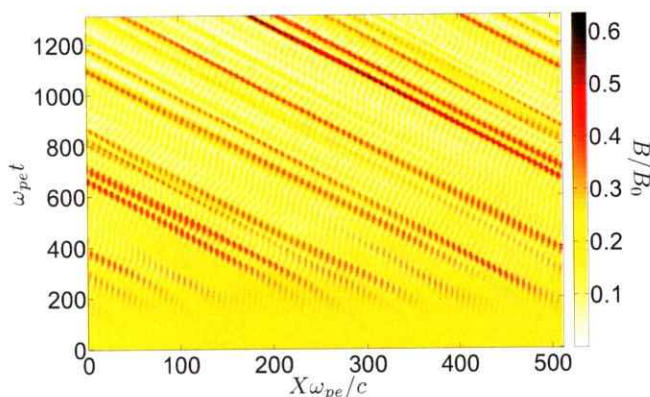


Figura 6.20: Evolución espaciotemporal del campo magnético. Tiempo normalizado $\omega_{pe}t$ vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.5$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$.

6.4. Estructuras localizadas

En la sección anterior vimos que la onda bomba se propaga sin alteraciones durante la primera etapa de la simulación [Fig. 6.6]. Luego, las inestabilidades comienzan a crecer, formando ondas que se propagan en el sentido contrario a la onda bomba. Aprendimos también, que a medida que aumenta la amplitud de la onda bomba, las tasas de crecimiento de las inestabilidades crecen también, haciendo que éstas aparezcan en etapas más tempranas de la simulación. A continuación consideraremos una mayor amplitud para la onda bomba y mostraremos la evolución espaciotemporal del campo magnético. En la Fig. 6.20 vemos la evolución del campo magnético para la amplitud $\alpha = 0.5$. Vemos que en un comienzo la amplitud del campo es constante y que a partir de $\omega_{pe}t \approx 100$ comienzan a emerger las inestabilidades, propagándose en sentido contrario a la onda inicial. Para tiempos mayores, estas ondas están perfectamente localizadas y se propagan con la misma velocidad. La energía de la onda bomba se ha transferido a estas ondas hijas, que aumentan su amplitud considerablemente.

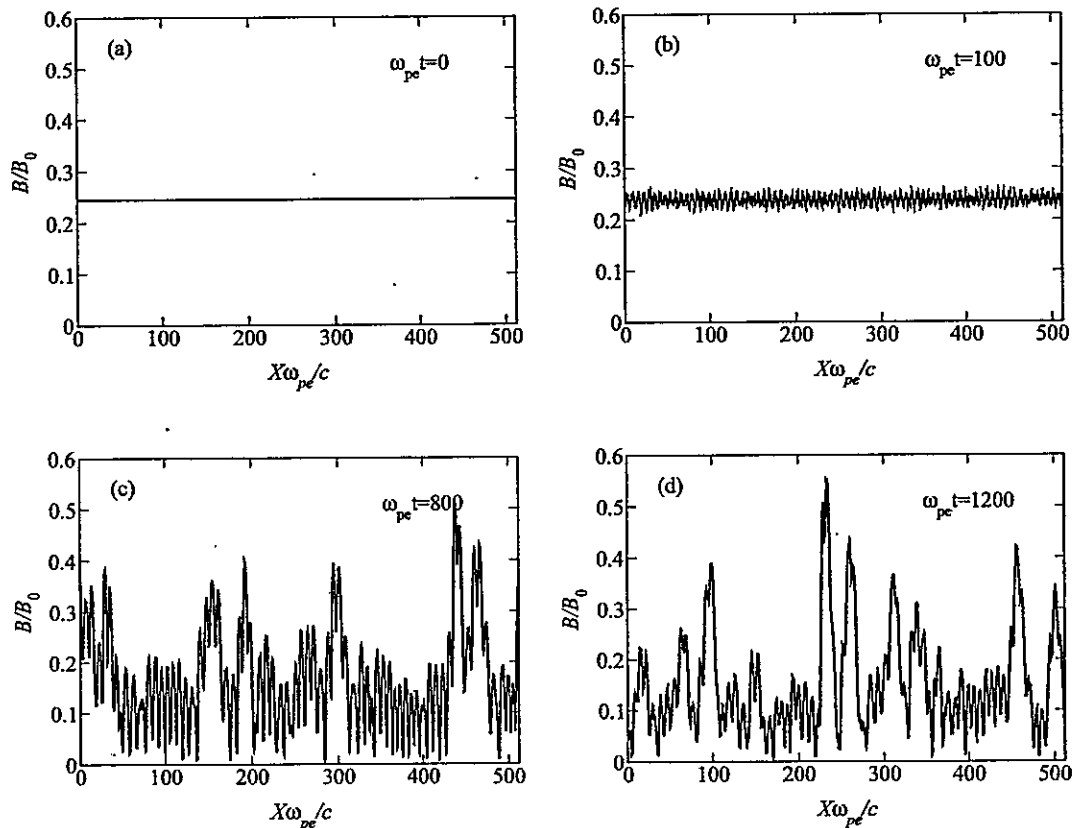


Figura 6.21: Campo magnético transversal normalizado B/B_0 vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.5$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $y_0 = 0.49$. (a) $\omega_{pe}t = 0$. (b) $\omega_{pe}t = 100$. (c) $\omega_{pe}t = 800$. (d) $\omega_{pe}t = 1200$.

En la Fig. 6.21 podemos ver la magnitud del campo magnético transversal en distintos momentos de la simulación. En la Fig. 6.21(a) vemos el campo en $\omega_{pe}t = 0$, el cual es constante. Como vimos anteriormente las inestabilidades emergen tempranamente, como se aprecia en la Fig. 6.21(b), donde hay presencia de inestabilidades modulacionales en $\omega_{pe}t = 100$. Por último, para tiempos mayores, Fig. 6.21(c) y (d), vemos la clara formación de estructuras localizadas espacialmente, que como vimos en la Fig. 6.20 se propagan con una velocidad constante.

En el Cap. 5 mostramos a través de la teoría de fluidos, que el plasma de electrones y positrones acepta soluciones solitónicas, por lo que el comportamiento que vemos en la simulación pareciera ser consistente con la teoría. Para comprobar esto, consideramos como condición inicial la solución de la ecuación no lineal de Schrödinger encontrada en el Cap. 5, y estudiaremos la propagación de estas estructuras. Para esto, primero calculamos los campos electromagnéticos asociados a dicha solución, Ec. (5.49). Usamos las Ecs. (5.31), (5.32), (5.39), las definiciones Ecs. (5.35), (5.36), (5.37) y la solución (5.49), para escribir el potencial vector normalizado de la solución solitónica

$$\vec{A}(\bar{X}, \bar{t}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} [\delta(\bar{X} - \bar{V}\bar{t})] \{ \cos(\xi\bar{X} - \beta\bar{t})\hat{y} + \sin(\xi\bar{X} - \beta\bar{t})\hat{z} \}. \quad (6.37)$$

donde hemos usado las definiciones,

$$\alpha = \sqrt{\lambda} a_0, \quad (6.38)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{f} x_0^2 \alpha, \quad (6.39)$$

$$\xi = \frac{\Omega_c}{\omega_{pe}} \bar{V} x_0, \quad (6.40)$$

$$\beta = \frac{\omega_{pe}}{\Omega_c} f x_0 \left(1 + f^2 x_0^2 + \frac{x_0^2 \alpha^2}{8} \right) - \frac{\Omega_c}{\omega_{pe}} \frac{x_0}{2} (1 + \bar{V}^2). \quad (6.41)$$

Acá x_0 es la frecuencia normalizada de la onda bomba y \bar{V} es la velocidad de grupo normalizada, usada en el Cap. 5. Notamos que nuevamente hemos realizado una permutación cíclica entre los ejes coordenados, de tal manera que la solución se propague en la dirección X . Usando las ecuaciones de Maxwell podemos encontrar los campos eléctrico y magnético normalizados. Debido a que sólo estamos interesados

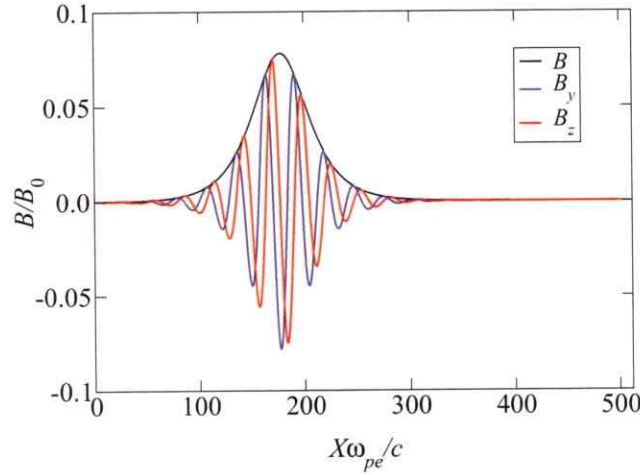


Figura 6.22: Campo magnético normalizado B/B_0 vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\omega_{pe}t = 0$, $\mu = 100$, $\alpha = 0.5$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $x_0 = 0.41$ y $\bar{V} = 0.537$. Línea negra: modulo del campo magnético B/B_0 . Línea azul: Componente y del campo magnético B_y/B_0 . Línea roja: Componente z del campo magnético B_z/B_0 .

en la condición inicial, evaluamos estos campos en $t = 0$, obteniendo

$$\vec{B}(\bar{X}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \text{sech}(\delta\bar{X}) \{ [\delta \tanh(\delta\bar{X}) \sin(\xi\bar{X}) - \xi \cos(\xi\bar{X})] \hat{y} - [\delta \tanh(\delta\bar{X}) \cos(\xi\bar{X}) + \xi \sin(\xi\bar{X})] \hat{z} \}, \quad (6.42)$$

$$\vec{E}(\bar{X}) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \text{sech}^2(\delta\bar{X}) \{ -[\beta \cosh(\delta\bar{X}) \sin(\xi\bar{X}) + \bar{V} \delta \sinh(\delta\bar{X}) \cos(\xi\bar{X})] \hat{y} + [-\bar{V} \delta \sinh(\delta\bar{X}) \sin(\xi\bar{X}) + \beta \cosh(\delta\bar{X}) \cos(\xi\bar{X})] \hat{z} \}. \quad (6.43)$$

Para las velocidades de las partículas, usaremos las velocidades de fluido, Ec. (5.27) y (5.28), usadas en la Sec. 5.4. Luego, estas velocidades serán interpoladas a la posición de cada partícula para conocer la velocidad de cada una de éstas. En la Fig. 6.22 podemos ver la condición inicial para el campo magnético, para $\alpha = 0.5$.

Al dejar evolucionar el sistema, este solitón comienza a propagarse hacia la derecha. En la Fig. 6.23 vemos el espectro de la evolución temporal del campo magnético. El sistema parte de la solución solitónica de la Fig. 6.22, por lo que la potencia está lo-

calizada. Con el paso del tiempo la amplitud del campo comienza a oscilar mientras se propaga hacia la derecha. Este solitón inicial da origen a un segundo solitón, de amplitud mucho más pequeña, que se propaga en el sentido contrario. A partir de $\omega_{pe}t \approx 100$ en el sistema coexisten dos solitones propagándose en sentidos opuestos y con diferentes amplitudes. De no existir condiciones de borde periódicas, ambos solitones se propagarían hasta alejarse infinitamente uno del otro, sin alterar su forma. Sin embargo, el sistema tiene condiciones de borde periódicas, por lo que vemos que cerca de $\omega_{pe}t \approx 380$, ambos solitones se encuentran e interactúan. Nuevamente vemos una oscilación en la amplitud de campo magnético y para $\omega_{pe}t \approx 550$ ambos solitones vuelven a separarse, siguiendo cada uno su trayectoria original. Notamos que las amplitudes de ambos solitones casi no han sufrido alteraciones, por lo que luego de encontrarse cada uno siguió su camino sin sufrir mayores modificaciones. Este proceso se repite nuevamente debido a la periodicidad de las condiciones de borde. La amplitud de los campos se ven modificadas debido a las fluctuaciones del sistema, pero esencialmente son las mismas originales. Cada uno de los solitones se propaga con la misma velocidad, la cual es constante a lo largo de toda la simulación.

En la Fig. 6.24 podemos ver el campo magnético para dos tiempos diferentes. La Fig. 6.24(a) muestra el campo para $\omega_{pe}t = 200$; vemos la presencia del solitón que se propaga hacia la derecha (a la derecha de la figura) y el que se propaga a la izquierda (izquierda de la figura) que es de menos tamaño. En el lugar donde ocurre la separación $X\omega_{pe}/c \approx 250$ existe un remanente de fluctuaciones, que se mantiene a lo largo de toda la simulación [ver Fig. 6.23]. La Fig. 6.24(b) muestra el campo magnético para $\omega_{pe}t = 700$, una vez que los solitones ya han interactuado. Se observa que la forma de ambos solitones es esencialmente la misma antes y después de la interacción.

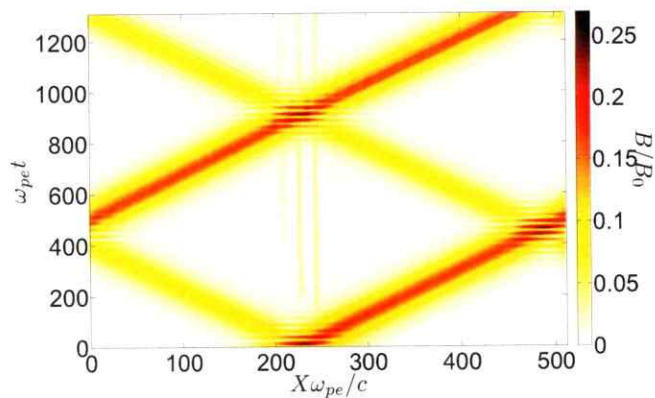


Figura 6.23: Evolución temporal del campo magnético. Tiempo normalizado $\omega_{pe}t$ vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.5$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $x_0 = 0.41$ y $\bar{V} = 0.537$.

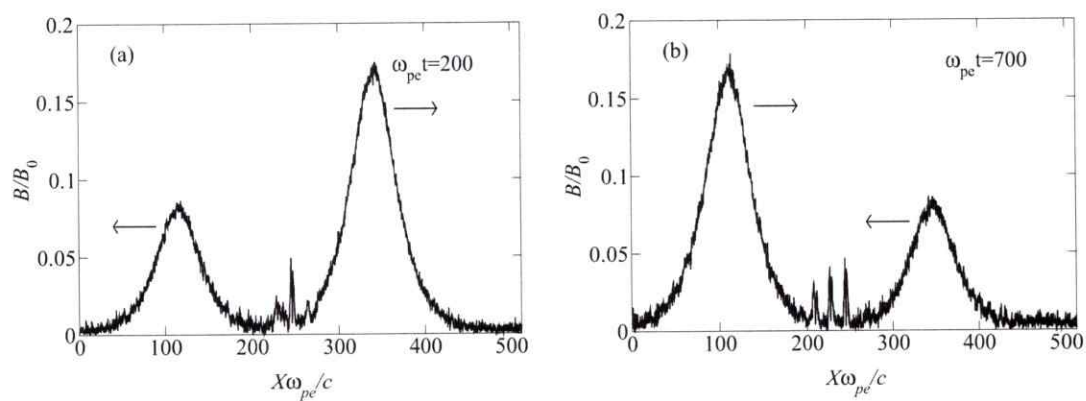


Figura 6.24: Campo magnético normalizado B/B_0 vs. distancia normalizada $X\omega_{pe}/c$, para $\mu = 100$, $\alpha = 0.5$, $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$, $x_0 = 0.41$ y $\bar{V} = 0.537$. (a) $\omega_{pe}t = 200$. (b) $\omega_{pe}t = 700$.

Esperábamos que la solución solitónica del Cap. 5 mostrada en la Fig. 6.22 se propagara sin deformarse durante todo el periodo de la simulación. En lugar de eso, este solitón inicial se separa en dos solitones que se propagan en sentido contrario. Esto se puede deber a que la solución usada como condición inicial es una solución para un modelo de fluidos, por lo tanto no necesariamente lo es para un modelo cinético como lo es la simulación. Esto provoca que, inicialmente, el sistema busca acomodar esta condición inicial, para lo cual debe expulsar un segundo solitón. Otro aspecto interesante de notar, es que la amplitud de los solitones resultantes es mayor que la condición inicial, lo que significa que el campo magnético está creciendo a expensas de la energía cinética de las partículas.

Estudios similares a los de esta sección han sido realizados para soluciones solitónicas de la ecuación DNLS (*Derivative Nonlinear Schrödinger Equation*) derivada de las ecuaciones de MHD y simulaciones MHD en las Refs. [100,101], y con simulaciones híbridas [102]. Los resultados presentados en esta sección son preliminares, y esperamos en el futuro continuar con el estudio de solitones en la simulaciones PIC relativistas que hemos descrito en este capítulo.

6.5. Resumen

Desarrollamos una simulación relativista de partículas en una dimensión, usando el método *particle-in-cell* (PIC). Primero estudiamos los modos normales de un plasma relativista de electrones y positrones. Comparamos la relación de dispersión de la simulación con modelos de fluido [35] y cinético [87] para este tipo de plasmas. Notamos que los resultados son cualitativamente similares, respecto de la velocidad de Alfvén y de la frecuencia de plasma efectiva. Además, en la simulación vemos la

presencia de modos de alto orden, que no han sido descritos en los modelos de fluido y cinéticos, debido a que en ellos no se han considerado efectos de amortiguamiento en las ondas. Este tipo de modos ha sido descrito para plasmas de electrones e iones no relativistas en la Ref. [98]. Esperamos que al desarrollar una teoría cinética relativista tal como se muestra en el Apéndice B.1, podamos dar cuenta de este tipo de modos.

Estudiamos también los decaimientos paramétricos de una onda de Alfvén con polarización circular izquierda propagándose a lo largo de un campo magnético de fondo, considerando efectos relativistas en la velocidad transversal de las partículas y en la temperatura, por medio de la simulación de partículas unidimensional descrita. Los resultados de la simulación han sido comparados con las predicciones hechas mediante la teoría de fluidos presentada en el Cap. 4.

Para bajas temperaturas, $\mu = 100$, la teoría de fluidos predice diferentes inestabilidades. La inestabilidad principal en este caso es una inestabilidad de decaimiento, en la cual la onda bomba decae en un modo electroacústico que se propaga hacia adelante y una onda electromagnética que se propaga hacia atrás, (S_+, p_-) . También hay una inestabilidad modulacional y una inestabilidad de batimiento, con tasas de crecimiento menores.

Hemos realizado la simulación con los mismos parámetros que en el modelo de fluidos del Cap. 4, excepto por el número de onda de la bomba, el cual ha sido reducido a $y_0 = 0.5$. Los resultados de la simulación muestran que la onda bomba se propaga en el plasma con la velocidad de fase esperada en la etapa lineal de la simulación. Para tiempos mayores, observamos la aparición de inestabilidades. Podemos asociar esas inestabilidades en la simulación con las predichas por el modelo de fluidos, encontrando un gran acuerdo entre ambos resultados. Las tasas de crecimiento

para las inestabilidades en la simulación en general concuerdan con las de la teoría de fluidos, aunque en la simulación las tasas de crecimiento son menores que en la teoría de fluido debido a que en esta última no se consideran efectos cinéticos como el amortiguamiento de Landau.

El efecto de la amplitud de la onda bomba también fue estudiado y encontramos el mismo comportamiento que en la teoría de fluidos: un aumento en la amplitud de la onda produce un aumento en la tasa de crecimiento de las inestabilidades.

A medida que aumentamos la temperatura, encontramos el mismo comportamiento que en la teoría de fluidos: aparecen las mismas inestabilidades, pero con tasas de crecimiento menores y en un intervalo más estrecho de frecuencias y números de onda. En consecuencia, la onda bomba se propaga por un mayor tiempo y no se aprecian inestabilidades en la simulación (debido a que están muy amortiguadas).

Para temperaturas muy altas, $\mu = 1$, el modelo de fluido predice la desaparición de todas las inestabilidades. En lugar de eso, en la simulación, la onda bomba se desestabiliza en un periodo muy corto de tiempo. Esta inconsistencia entre la simulación y el modelo de fluidos puede ser resuelta al considerar el tratamiento cinético presentado en la Ref. [87], donde se muestra la desaparición de la rama de Alfvén para temperaturas muy altas. En particular, la Ref. [87] predice que $\mu = 2$ es el mínimo valor para μ (máxima temperatura) para el cual la onda de Alfvén es un modo normal del sistema cuando $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$. Para temperaturas mayores no hay rama de Alfvén. Estos resultados son consistentes con los de nuestra simulación de partículas (PIC).

Para una comparación más apropiada entre modelos teóricos y las simulaciones de partícula, debemos considerar los decaimientos paramétricos basados en un tratamiento cinético, tal como en las Refs. [99, 103, 104].

Finalmente, también hemos corroborado la existencia de soluciones localizadas usando la simulación de partículas. Para grandes tiempos en la simulación, los efectos no lineales del sistema desembocan en la generación de soluciones localizadas que se propagan con velocidad constante. Por otro lado, hemos usado como condición inicial la solución solitónica del Cap. 5, la cual resulta propagarse a lo largo del sistema, generando un segundo solitón que se propaga en sentido contrario. Debido a las condiciones de borde periódicas, los solitones vuelven a encontrarse, interactuando, y luego cada uno sigue su trayectoria original, manteniendo su forma esencialmente inalterada.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado la propagación y evolución no lineal de una onda electromagnética circularmente polarizada en un plasma relativista de electrones y positrones. Este trabajo ha sido llevado a cabo tanto de manera teórica como computacional. Estos resultados son relevantes, por ejemplo, para el estudio de sistemas astrofísicos de alta energía.

Como punto de partida, derivamos las ecuaciones que describen la evolución de fluidos en el contexto relativista (Cap. 2). Basamos nuestro desarrollo en la derivación usada en las Refs. [56,61] y mostramos que estos resultados son consistentes con los obtenidos por Asenjo *et al.* [35] usando un formalismo distinto desarrollado por S. Mahajan [63]. En esta derivación hemos incluido de manera consistente los efectos de temperaturas relativistas. Usando estas ecuaciones para fluidos relativistas con temperatura finita, en el contexto de un plasma de electrones y positrones, mostramos que una onda electromagnética circularmente polarizada de amplitud arbitraria propagándose a lo largo de un campo magnético constante, es una solución exacta de estas ecuaciones, tal como se muestra en la Ref. [35]. Estudiamos la relación de dispersión de esta onda y vemos que en el límite de un plasma frío la relación de

dispersión coincide con la relación de dispersión fría usada por otros autores [36,37]. Además encontramos dos ramas: una rama electromagnética, la cual presenta un límite inferior para la frecuencia correspondiente a la frecuencia de plasma efectiva ω_{pe}^{eff} , que disminuye con la temperatura y con la amplitud de la onda. Cuando los efectos relativistas son grandes, ya sea a través de la temperatura o del factor relativista de Lorentz γ_j , la onda electromagnética responde a la relación de dispersión de una onda de luz no dispersiva. La otra rama corresponde a la rama de Alfvén, la cual para bajos números de onda corresponde a una relación de dispersión lineal y no dispersiva con velocidad de propagación correspondiente a v_A , la velocidad de Alfvén. A medida que aumenta el número de onda la frecuencia alcanza un límite superior correspondiente a ω_{crit} (en k_{crit}), donde $d\omega_0/dk_0 = 0$. Esta frecuencia crítica depende de la temperatura y de la amplitud de la onda. A partir de $k > k_{\text{crit}}$ tenemos que $d\omega_0/dk_0 < 0$, llegando a diverger para $k = k_{\text{máx}}$, donde la velocidad de los positrones inducidos por la onda, es igual a la velocidad de la luz. Además, $k_{\text{máx}}$ depende solamente de la amplitud de la onda y no de la temperatura. A esta zona la hemos llamado zona anómala.

Considerando el régimen débilmente no lineal, hemos estudiado, en el Cap. 4, los decaimientos paramétricos de la onda circularmente polarizada y de amplitud arbitraria encontrada en el Cap. 3. Estudiamos la aparición de los decaimientos, sus tasas de crecimiento y su intervalo de inestabilidad para diferentes temperaturas y amplitudes de la onda bomba. Este trabajo se diferencia de trabajos anteriores [36,37], en que estos últimos consideran el régimen débilmente relativista y temperaturas no relativistas. Nosotros hemos considerado el régimen completamente relativista y temperaturas relativistas; además hemos estudiado consistentemente los efectos de

la temperatura relativista en las inestabilidades.

También examinamos los casos en que la onda bomba está en tres posibles regiones: en la rama de Alfvén; cerca del origen y en la zona anómala, y en la rama electromagnética. Existen acoplamientos resonantes y no resonantes cuando la onda está presente. Para temperaturas suficientemente grandes, la mayor parte de las inestabilidades desaparecen. Para ciertos acoplamientos existe un umbral en la amplitud de la onda bomba, bajo el cual los modos permanecen estables; sólo una vez superado ese umbral las inestabilidades comienzan a crecer.

Cuando la onda bomba pertenece a la zona anómala de la rama de Alfvén ($d\omega/dk < 0$ para $\omega > 0$), la dependencia con la temperatura es similar a la de los casos anteriores, pero notamos que Γ_{\max} se incrementa rápidamente con α , a diferencia de lo que ocurre en la zona normal y en la rama electromagnética, lo cual sugiere que ondas de amplitud finita en este intervalo de frecuencias se desestabilizarán más rápido, algo que pretendemos estudiar más adelante.

Debido a la importancia que tienen las ondas de Alfvén en la física de plasmas, nos centramos en el estudio de inestabilidades modulacionales en la rama de Alfvén, estudiando la evolución no lineal de una onda circularmente polarizada de Alfvén propagándose a lo largo de un plasma fuertemente magnetizado de electrones y positrones (Cap. 5). Derivamos una ecuación no lineal de Schrödinger para esta onda en la zona normal. En este caso se satisface la condición necesaria para una inestabilidad modulacional. Calculamos la tasa máxima de crecimiento de la inestabilidad y ésta disminuye cuando la temperatura aumenta, resultado consistente con trabajos previos [57, 68]. Esta inestabilidad modulacional admite una envolvente solitónica.

Al igual que en el caso débilmente magnetizado [57], el solitón se vuelve más ancho con el aumento de la temperatura. También hemos estudiado la propagación de una onda de Alfvén en la zona anómala, donde no existe solución solitónica y la única solución física posible es un tren de ondas periódico.

Finalmente en el Cap. 6, hemos complementado estos resultados teóricos con el desarrollo y la implementación de una simulación relativista de partículas en una dimensión, utilizando el método de *particle-in-cell*. Primero, estudiamos los modos normales de un plasma relativista de electrones y positrones, que crecen a partir del ruido térmico, el cual fue asignado a través de una función de distribución de velocidades relativistas de Maxwell-Jüttner. Comparamos la relación de dispersión de la simulación con los modelos de fluido [35] y cinético [87] para este tipo de plasmas. Notamos que los resultados son cualitativamente similares, respecto de la velocidad de Alfvén y de la frecuencia de plasma efectiva. Además, en la simulación vemos la presencia de modos de alto orden, que no han sido descritos en los modelos de fluido y cinético, debido a que en ellos no se han considerado efectos de amortiguamiento en las ondas. Este tipo de modos ha sido descrito para plasmas de electrones e iones no relativistas en la Ref. [98]. Esperamos que al desarrollar una teoría cinética relativista tal como se muestra en el Apéndice B.1, podamos dar cuenta de este tipo de modos.

Estudiamos también los decaimientos paramétricos de una onda de Alfvén con polarización circular izquierda propagándose a lo largo de un campo magnético de fondo, considerando efectos relativistas en la velocidad transversal de las partículas y en la temperatura, por medio de la simulación de partículas en una dimensión. Los resultados de la simulación de partículas han sido comparados con las predicciones hechas mediante la teoría de fluidos presentada en el Cap. 4.

Para bajas temperaturas, la teoría de fluidos predice diferentes inestabilidades. La inestabilidad principal en este caso es una inestabilidad de decaimiento, en la cual la onda bomba decae en un modo electroacústico que se propaga hacia adelante y una onda electromagnética que se propaga hacia atrás, (S_+, p_-) . También hay una inestabilidad modulacional y una inestabilidad de batimiento, con tasas de crecimiento menores.

Hemos realizado la simulación con los mismos parámetros que en el modelo de fluidos del Cap. 4. Los resultados de la simulación muestran que la onda bomba se propaga en el plasma con la velocidad de fase esperada, en la etapa lineal de la simulación. Para tiempos mayores, observamos la aparición de inestabilidades. Podemos asociar esas inestabilidades en la simulación con las predichas por el modelo de fluidos, encontrando un gran acuerdo entre ambos resultados. Las tasas de crecimiento para las inestabilidades en la simulación en general concuerdan con las de la teoría de fluidos, aunque en la simulación las tasas de crecimiento son menores que en la teoría de fluido debido a que en esta última no se consideran efectos cinéticos como el amortiguamiento de Landau.

El efecto de la amplitud de la onda bomba también fue estudiado y encontramos el mismo comportamiento que en la teoría de fluidos: un aumento en la amplitud de la onda produce un aumento en la tasa de crecimiento de las inestabilidades.

A medida que aumentamos la temperatura, encontramos el mismo comportamiento que en la teoría de fluidos: aparecen las mismas inestabilidades, pero con tasas de crecimiento menores y en un intervalo más estrecho de frecuencias y números de onda. En consecuencia, la onda bomba se propaga por un mayor tiempo y no se aprecian inestabilidades en la simulación (debido a que están muy amortiguadas).

Para temperaturas muy altas, el modelo de fluido predice la desaparición de todas

las inestabilidades. En lugar de eso, en la simulación, el perfil inicial de la onda bomba se desarma en un periodo muy corto de tiempo. Esta inconsistencia entre la simulación y el modelo de fluidos puede ser resuelta al considerar el tratamiento cinético presentado en la Ref. [87], donde se muestra la desaparición de la rama de Alfvén para temperaturas muy altas. Esta predicción es consistente con los resultados de la simulación de partículas (PIC) y los resultados preliminares presentados en el Apéndice B.1.

Para una comparación más apropiada entre modelos teóricos y las simulaciones de partículas, debemos considerar los decaimientos paramétricos basados en un tratamiento cinético, tal como en las Refs. [99, 103, 104].

Finalmente, también hemos corroborado la existencia de soluciones localizadas usando la simulación de partículas. Para grandes tiempos en la simulación, los efectos no lineales del sistema provocan la aparición de solitones que se propagan con velocidad constante. Por otro lado, hemos usado como condición inicial la solución solitónica del Cap. 5, la cual resulta propagarse a lo largo del sistema, generando un segundo solitón que se propaga en sentido contrario. Debido a las condiciones de borde periódicas, los solitones vuelven a encontrarse, interactuando, y luego cada uno sigue su trayectoria original, manteniendo su forma esencialmente inalterada.

Estos resultados pueden ser relevantes en el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en ambientes en donde los plasmas de electrones y positrones son importantes, tales como la propagación de emisión de radio a través de la magnetosfera de pulsares [20] y la aceleración de *jets* relativistas [21] entre otros.

Publicaciones

Este trabajo de tesis dio origen a los siguientes artículos publicados, enviados o en proceso de redacción:

1. "*Parametric decays in relativistic magnetized electron-positron plasmas with relativistic temperatures*", R. A. López, F. A. Asenjo, V. Muñoz, and J. A. Valdivia, *Phys. Plasmas* **19**, 082104 (2012).
2. "*Self-modulation of nonlinear Alfvén waves in a strongly magnetized relativistic electron-positron plasma*", R. A. López, F. A. Asenjo, V. Muñoz, A. C.-L. Chian, and J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E* **88**, 023105 (2013).
3. "*Particle-in-cell simulations for parametric decays of a circularly polarized Alfvén wave in a relativistic thermal electron-positron plasma*", R. A. López, A. F. Viñas, V. Muñoz, and J. A. Valdivia, *enviado a Phys. Plasmas*.
4. "*Kinetic dispersion relation for relativistic electron-positron plasmas*", R. A. López, P. S. Moya, V. Muñoz, A. F. Viñas, and J. A. Valdivia, *en preparación*.

Apéndice A

Relación de dispersión para los decaimientos paramétricos

Acá daremos las definiciones para los términos usados en la relación de dispersión Ec. (4.25). La relación de dispersión para los decaimientos paramétricos viene dada por el determinante de la matriz

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} G_{+e} - J_{+e} & 0 & M_{+e} - J_{+e} & 0 & N_{+e} & 0 & -P_{+e} & 0 \\ 0 & G_{+p} - J_{+p} & 0 & M_{+p} - J_{+p} & 0 & N_{+p} & -P_{+p} & 0 \\ M_{-e} - J_{-e} & 0 & G_{-e} - J_{-e} & 0 & N_{-e} & 0 & 0 & -P_{-e} \\ 0 & M_{-p} - J_{-p} & 0 & G_{-p} - J_{-p} & 0 & N_{-p} & 0 & -P_{-p} \\ -T_e - \Theta_e & 0 & T_e - \Theta_e & 0 & W + S_e & -W & R_e & -R_e \\ 0 & -T_p - \Theta_p & 0 & T_p - \Theta_p & -W & W + S_p & R_p & -R_p \\ -a_+ & a_+ & 0 & 0 & b_+ \eta_e & b_+ \eta_p & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & -a_- & a_- & b_- \eta_e & b_- \eta_p & 0 & -A_- \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$G_{+p} = \omega_+ \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \eta_p^2)}{(1 - \alpha^2 \eta_p^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_c}{f_0}, \quad (\text{A.2})$$

$$G_{+e} = \omega_+ \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \eta_e^2)}{(1 - \alpha^2 \eta_e^2)^{3/2}} + \frac{\Omega_c}{f_0}, \quad (\text{A.3})$$

$$G_{-p} = \omega_-^* \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \eta_p^2)}{(1 - \alpha^2 \eta_p^2)^{3/2}} - \frac{\Omega_c}{f_0}, \quad (\text{A.4})$$

$$G_{-e} = \omega_-^* \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\eta_e^2)}{(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{3/2}} + \frac{\Omega_c}{f_0}, \quad (\text{A.5})$$

$$M_{+p} = \frac{\omega_+}{2} \frac{\alpha^2\eta_p^2}{(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{3/2}}, \quad (\text{A.6})$$

$$M_{+e} = \frac{\omega_+}{2} \frac{\alpha^2\eta_e^2}{(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{3/2}}, \quad (\text{A.7})$$

$$M_{-p} = \frac{\omega_-^*}{2} \frac{\alpha^2\eta_p^2}{(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{3/2}}, \quad (\text{A.8})$$

$$M_{-e} = \frac{\omega_-^*}{2} \frac{\alpha^2\eta_e^2}{(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{3/2}}, \quad (\text{A.9})$$

$$P_{+p} = \frac{e\omega_+}{mf_0k_+c} = -P_{+e} \quad (\text{A.10})$$

$$P_{-p} = \frac{e\omega_-^*}{mf_0k_-^*c} = -P_{-e} \quad (\text{A.11})$$

$$J_{+p} = \frac{v_s^2}{2c^2} \left(\frac{\alpha^2\eta_p^2}{(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{3/2}} \right) \omega_+, \quad (\text{A.12})$$

$$J_{+e} = \frac{v_s^2}{2c^2} \left(\frac{\alpha^2\eta_e^2}{(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{3/2}} \right) \omega_+, \quad (\text{A.13})$$

$$J_{-p} = \frac{v_s^2}{2c^2} \left(\frac{\alpha^2\eta_p^2}{(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{3/2}} \right) \omega_-^*, \quad (\text{A.14})$$

$$J_{-e} = \frac{v_s^2}{2c^2} \left(\frac{\alpha^2\eta_e^2}{(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{3/2}} \right) \omega_-^*, \quad (\text{A.15})$$

$$N_{+p} = \frac{v_s^2\alpha\eta_pk\omega_+}{2c(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{1/2}\omega} + \frac{\alpha ck_0}{2f_0} - \frac{\alpha\eta_p ck_0}{2(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.16})$$

$$N_{+e} = -\frac{v_s^2\alpha\eta_ek\omega_+}{2c(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{1/2}\omega} - \frac{\alpha ck_0}{2f_0} + \frac{\alpha\eta_e ck_0}{2(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.17})$$

$$N_{-p} = \frac{v_s^2\alpha\eta_pk\omega_-^*}{2c(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{1/2}\omega} + \frac{\alpha ck_0}{2f_0} - \frac{\alpha\eta_p ck_0}{2(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.18})$$

$$N_{-e} = -\frac{v_s^2\alpha\eta_ek\omega_-^*}{2c(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{1/2}\omega} - \frac{\alpha ck_0}{2f_0} + \frac{\alpha\eta_e ck_0}{2(1 - \alpha^2\eta_e^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.19})$$

$$S_p = \frac{-\omega^2}{(1 - \alpha^2\eta_p^2)^{1/2}} + v_s^2 (1 - \alpha^2\eta_p^2)^{1/2} k^2, \quad (\text{A.20})$$

$$S_e = \frac{-\omega^2}{(1 - \alpha^2 \eta_e^2)^{1/2}} + v_s^2 (1 - \alpha^2 \eta_e^2)^{1/2} k^2, \quad (\text{A.21})$$

$$R_p = \frac{e\omega\alpha\eta_p}{mf_0}, \quad (\text{A.22})$$

$$R_e = \frac{e\omega\alpha\eta_e}{mf_0}, \quad (\text{A.23})$$

$$\Theta_p = \frac{v_s^2 \alpha \eta_p k \omega}{c (1 - \alpha^2 \eta_p^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.24})$$

$$\Theta_e = -\frac{v_s^2 \alpha \eta_e k \omega}{c (1 - \alpha^2 \eta_e^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.25})$$

$$T_p = \frac{\alpha \omega c k_0}{f_0} = -T_e, \quad (\text{A.26})$$

$$T_p = \frac{\alpha \omega c k_0}{f_0} = -T_e, \quad (\text{A.27})$$

$$a_+ = \omega_{pe}^2 \frac{mc}{e} k_+, \quad (\text{A.28})$$

$$a_- = \omega_{pe}^2 \frac{mc}{e} k_-^*, \quad (\text{A.29})$$

$$b_+ = \omega_{pe}^2 \frac{mc^2 \alpha}{2\omega e} k k_+, \quad (\text{A.30})$$

$$b_- = \omega_{pe}^2 \frac{mc^2 \alpha}{2\omega e} k k_-^*, \quad (\text{A.31})$$

$$A_+ = \omega_+^2 - c^2 k_+^2, \quad (\text{A.32})$$

$$A_- = \omega_-^{*2} - c^2 k_-^{*2}, \quad (\text{A.33})$$

$$W = \frac{\omega_{pe}^2}{f}. \quad (\text{A.34})$$

Finalmente, η_p y η_e satisfacen las relaciones

$$\eta_p = \frac{\omega_0}{f_0 (1 - \alpha^2 \eta_p^2)^{-1/2} \omega_0 - \Omega_c}, \quad (\text{A.35})$$

$$\eta_e = \frac{\omega_0}{f_0 (1 - \alpha^2 \eta_e^2)^{-1/2} \omega_0 + \Omega_c}. \quad (\text{A.36})$$

Apéndice B

Relación de dispersión cinética para plasmas relativistas de electrones y positrones

A partir de los resultados del Cap. 6 de esta tesis, es evidente que existen diferencias entre los modelos de fluido y cinético a la hora de estudiar estos plasmas; por lo que se hace necesario desarrollar una teoría cinética para poder comparar de manera correcta los resultados obtenidos en la simulación y estudiar otro tipo de fenómenos como la aceleración de partículas debido a la interacción onda-partícula.

Muchos trabajos se han dedicado al estudio de los efectos cinéticos en la propagación de ondas en plasmas relativistas [105–109]. Domínguez *et al.* [87] estudiaron la propagación de ondas en plasmas relativistas de electrones y positrones, basándose en la ecuación relativista de Vlasov, con el fin de incluir efectos térmicos a lo largo de la dirección de propagación. Estos resultados pueden ser comparados con los obtenidos a través de la teoría de fluidos en la Ref. [35] y en los Caps. 3 y 6 de esta tesis. Si bien se han considerado efectos cinéticos en el estudio de propagación de ondas [87], de los decaimientos paramétricos [99, 103, 110] y para la propagación de solitones [111], en estos trabajos los efectos cinéticos han sido introducidos sólo a lo

largo de la dirección de propagación de la onda, por lo que no se tiene una descripción completa de la función de distribución de las partículas y tampoco se consideran efectos de amortiguamiento de ondas. Al respecto, Lazar y Schlickeiser [109] proponen una relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas propagándose a lo largo de un campo magnético constante, en plasmas relativistas. Han considerado efectos cinéticos en las tres direcciones y una función de distribución relativista e isotrópica de Maxwell-Jüttner.

En este capítulo nos basaremos en los resultados de las Refs. [105, 106, 108, 109] para encontrar la relación de dispersión de ondas circularmente polarizadas en plasmas relativistas de electrones y positrones, propagándose a lo largo de un campo magnético constante, y considerando efectos cinéticos en las tres direcciones.

B.1. Relación de dispersión

Resolveremos la ecuación relativista de Vlasov dada por

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{x}} + q_j \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde q_j es la carga y m_j la masa de cada partícula, j es el índice de especie y c la velocidad de la luz. Acá \vec{p} es el momentum relativista. Consideraremos un campo magnético de fondo constante $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ y la propagación paralela de la onda electromagnética $\vec{k} = k \hat{z}$.

La relación de dispersión lineal es derivada de la Ec. (B.1). Realizamos pequeñas perturbaciones sobre el sistema y resolvemos las ecuaciones utilizando el método de Fourier-Laplace, donde hacemos una transformada de Fourier en el espacio y una transformada de Laplace en el tiempo, por lo que consideramos que la frecuencia

$\omega = \omega_r + i\Gamma$ es un número complejo tal que $\Im\omega = \Gamma > 0$, es lo suficientemente grande para que la transformada de Laplace inversa converja. Con este método obtenemos la relación de dispersión para la perturbación transversal [108],

$$\Lambda_{R,L}^+ = 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} + \pi \sum_j \omega_{p,j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{\infty} dp_{\perp} \frac{p_{\perp}^2}{\gamma\omega - kp_z/m \pm \Omega_j} \times \left[\left(\omega - \frac{kp_z}{m\gamma} \right) \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial p_{\perp}} + \frac{kp_{\perp}}{m\gamma} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial p_z} \right] = 0, \quad (\text{B.2})$$

donde $\omega_{p,j} = \sqrt{4\pi q_j^2 n_j/m}$ es la frecuencia de plasma y $\Omega_j = q_j B_0/(mc)$ es la frecuencia ciclotrónica para la especie j . R y L representan ondas con polarización circular derecha (+ en el denominador) e izquierda (- en el denominador), y el signo + en $\Lambda_{R,L}^+$ indica que esta relación es válida para $\Gamma > 0$. Finalmente, $\gamma = \sqrt{1 + (p_{\perp}/mc)^2 + (p_z/mc)^2}$ es el factor relativista.

Consideremos ahora la transformación

$$s = p_z/(mc), \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma = \sqrt{1 + p_{\perp}^2/(mc)^2 + p_z^2/(mc)^2}. \quad (\text{B.4})$$

El determinante de la matriz Jacobiana de la transformación es

$$\det Jc = \frac{\gamma(mc)^2}{\sqrt{\gamma^2 - 1 - z^2}}. \quad (\text{B.5})$$

Entonces, la Ec. (B.2) toma la forma

$$\Lambda_{R,L}^+ = 1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \pi \sum_j (m_j c)^3 \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \int_1^{\infty} d\gamma \int_{-\sqrt{\gamma^2-1}}^{\sqrt{\gamma^2-1}} ds \left(\frac{\partial f_j}{\partial s} + \frac{\omega}{ck} \frac{\partial f_j}{\partial \gamma} \right) \times \frac{\gamma^2 - 1 - s^2}{s - \gamma\omega/(ck) \mp \Omega_j/(ck)} = 0. \quad (\text{B.6})$$

En el caso de una función de distribución isotrópica, $f_j(\gamma, s) = f(\gamma)$, tenemos

$$\Lambda_{R,L}^+ = 1 - \frac{1}{z} - \pi \sum_j (m_j c)^3 \frac{\omega_{pj}^2}{c^2 k^2 z} \int_1^{\infty} d\gamma \frac{df_j}{d\gamma} \int_{-\sqrt{\gamma^2-1}}^{\sqrt{\gamma^2-1}} ds \frac{\gamma^2 - 1 - s^2}{s - \gamma z \mp t_j} = 0, \quad (\text{B.7})$$

donde hemos definido $z = \omega/(ck)$ y $t_j = \Omega_j/(ck)$. Podemos escribir la Ec. (B.7), como

$$\Lambda_{R,L}^{\pm} = 1 - \frac{1}{z^2} - \pi \sum_j (m_j c)^3 \frac{\omega_{pj}^2}{c^2 k^2 z} \int_1^{\infty} d\gamma \frac{df_j}{d\gamma} L_j^{\pm}(\gamma) = 0, \quad (\text{B.8})$$

donde hemos definido

$$L_{R,L;j}^{\pm}(\gamma) = \int_{-\sqrt{\gamma^2-1}}^{\sqrt{\gamma^2-1}} ds \frac{\gamma^2 - 1 - s^2}{s - \gamma z \mp t_j}. \quad (\text{B.9})$$

Para resolver la integral en la Ec. (B.9), usamos la sustitución $(s \mp t_j)/\gamma = \xi$, de modo que

$$L_{R,L;j}^{\pm}(\gamma) = \int_{-\sqrt{1-\gamma^{-2} \mp t_j/\gamma}}^{\sqrt{1-\gamma^{-2} \mp t_j/\gamma}} d\xi \frac{\gamma^2 - 1 - t_j^2 - \gamma^2 \xi^2 \mp 2t_j \gamma \xi}{\xi - z}. \quad (\text{B.10})$$

Podemos escribir la Ec. (B.10) como

$$L_{R,L;j}^{\pm}(\gamma) = [(1 - z^2)\gamma^2 \mp 2zt_j\gamma - (1 + t_j^2)] J_{R,L;j}^{\pm}(\gamma) - 2(z\gamma \pm t_j)\sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad (\text{B.11})$$

donde hemos definido

$$J_{R,L;j}^{\pm}(\gamma) = \int_{-\sqrt{1-\gamma^{-2} \mp t_j/\gamma}}^{\sqrt{1-\gamma^{-2} \mp t_j/\gamma}} d\xi \frac{1}{\xi - z}. \quad (\text{B.12})$$

Ahora podemos escribir la relación de dispersión Ec. (B.8), en la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{R,L}^{\pm} &= 1 - \frac{1}{z^2} + 2\pi \sum_j (m_j c)^3 \frac{\omega_{pj}^2}{c^2 k^2 z} \int_1^{\infty} d\gamma \frac{df_j}{d\gamma} (\gamma z \pm t_j) \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &\quad - \pi \sum_j (m_j c)^3 \frac{\omega_{pj}^2}{c^2 k^2 z} \int_1^{\infty} d\gamma \frac{df_j}{d\gamma} [(1 - z^2)\gamma^2 \mp 2zt_j\gamma - (1 + t_j^2)] J_{R,L;j}^{\pm}(\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Al igual que en el resto de esta tesis, consideraremos una función de distribución relativista de Maxwell-Jüttner [97]

$$f_j(\gamma) = \frac{\mu_j}{4\pi K_2(\mu_j)} e^{-\mu_j \gamma}, \quad (\text{B.14})$$

donde $\mu_j = mc^2/(k_B T_j)$, caracteriza la temperatura del plasma. Reemplazando esta función de distribución en la Ec. (B.13), y considerando que las especies son electrones y positrones, tal que $m_e = m_p = m$, tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{R,L}^+ &= 1 - \frac{1}{z^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \mu}{c^2 k^2} \\ &+ \frac{\omega_{pe}^2 \mu^2}{4K_2(\mu)} \frac{1}{c^2 k^2 z} \left\{ \int_1^\infty d\gamma e^{-\mu\gamma} [(1-z^2)\gamma^2 \pm 2zt\gamma - (1+t^2)] J_{R,L,e}^+(\gamma) \right. \\ &\left. + \int_1^\infty d\gamma e^{-\mu\gamma} [(1-z^2)\gamma^2 \mp 2zt\gamma - (1+t^2)] J_{R,L,p}^+(\gamma) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Acá hemos usado $\mu_e = \mu_p = \mu$ y las definiciones

$$\int_1^\infty \sqrt{\gamma^2 - 1} e^{-\mu\gamma} d\gamma = \frac{K_1(\mu)}{\mu}, \quad (\text{B.16})$$

$$\int_1^\infty \gamma \sqrt{\gamma^2 - 1} e^{-\mu\gamma} d\gamma = \frac{K_2(\mu)}{\mu}, \quad (\text{B.17})$$

donde K_1 y K_2 son las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo orden, respectivamente.

A lo largo de esta tesis hemos estudiado ondas con polarización circular izquierda, por lo que la relación de dispersión para este caso toma la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_L^\pm &= 1 - \frac{1}{z^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \mu}{c^2 k^2} \\ &+ \frac{\omega_{pe}^2 \mu^2}{4K_2(\mu)} \frac{1}{c^2 k^2 z} \left\{ \int_1^\infty d\gamma e^{-\mu\gamma} [(1-z^2)\gamma^2 - 2zt\gamma - (1+t^2)] J_{L,e}^+(\gamma) \right. \\ &\left. + \int_1^\infty d\gamma e^{-\mu\gamma} [(1-z^2)\gamma^2 + 2zt\gamma - (1+t^2)] J_{L,p}^+(\gamma) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

con la apropiada definición de $J_{L,j}^+$ de la Ec. (B.12). Recordamos que esta relación de dispersión es válida para $\Im\omega = \Gamma > 0$. La relación de dispersión $\Lambda_{L,j}^-$, para $\Gamma < 0$, la encontramos haciendo la continuación analítica adecuada de la Ec. (B.18), tal que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} \Lambda_{L,j}^\pm = \lim_{\Gamma \rightarrow 0^-} \Lambda_{L,j}^-. \quad (\text{B.19})$$

Esto es equivalente a encontrar la continuación analítica de $J_{L;j}^+$, tal que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0^+} J_{L;j}^+ = \lim_{\Gamma \rightarrow 0^-} J_{L;j}^-, \quad (\text{B.20})$$

donde

$$J_{L;j}^+(\gamma) = \int_{-\sqrt{1-\gamma^{-2}+t_j/\gamma}}^{\sqrt{1-\gamma^{-2}+t_j/\gamma}} d\xi \frac{1}{\xi - z}. \quad (\text{B.21})$$

B.2. Continuación analítica

En adelante centraremos nuestra atención en resolver la integral (B.21). Nos basaremos en el procedimiento desarrollado por Felten *et al.* [112], para el caso no magnetizado. En el caso no magnetizado $t_j = 0$, por lo que la integral (B.21) se realiza sobre un intervalo simétrico. En nuestro caso el intervalo de integración no es simétrico, por lo que la integral es más complicada de resolver.

Definiremos las cantidades

$$S_{1j}(\gamma) = \sqrt{1-\gamma^{-2}} - \frac{t_j}{\gamma}, \quad (\text{B.22})$$

$$S_{2j}(\gamma) = \sqrt{1-\gamma^{-2}} + \frac{t_j}{\gamma}. \quad (\text{B.23})$$

Luego, la solución de la integral (B.21) es

$$J_{L;j}^+ = \ln |X_j| + i\Phi, \quad (\text{B.24})$$

donde

$$X_j = \frac{z - S_{2j}}{z + S_{1j}}, \quad (\text{B.25})$$

y $\Phi = \arg X_j$ es el argumento de la función, el cual está sobre el intervalo $-\pi \leq \arg X_j \leq \pi$. Definiremos además $z = R + iI$, donde $R = \Re z$ es la parte real de z e

$I = \Im z$ es su parte imaginaria. Entonces la Ec. (B.24) puede ser escrita como

$$J_{L;j}^+ = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R - S_{2j})^2 + I^2}{(R + S_{1j})^2 + I^2} \right] + i \left[\arctan \left(\frac{S_{2j} - R}{I} \right) + \arctan \left(\frac{S_{1j} + R}{I} \right) \right]. \quad (\text{B.26})$$

Recordemos entonces que, para que la relación de dispersión (B.18) esté bien definida en todo el plano complejo, la Ec. (B.26) debe ser continua y analítica en todo el plano complejo. Observando la Ec. (B.24), notamos que eso es cierto para todos los puntos del plano complejo, exceptuando a aquéllos sobre el eje real negativo, $\lim_{I \rightarrow 0^\pm} \Re X_j < 0$. Como la parte real de X_j viene dada por

$$\Re X_j = \frac{(R - S_{2j})(R + S_{1j}) + I^2}{(R + S_{1j})^2 + I^2}, \quad (\text{B.27})$$

se sigue que debemos tener cuidado al evaluar la solución (B.26) en los casos en que

$$\lim_{I \rightarrow 0^\pm} \Re X_j = \frac{R - S_{2j}}{R + S_{1j}} \leq 0. \quad (\text{B.28})$$

Existen dos posibilidades para satisfacer la condición (B.28), $R - S_{2j}(\gamma) < 0$ y $R + S_{1j}(\gamma) > 0$, ó $R - S_{2j}(\gamma) > 0$ y $R + S_{1j}(\gamma) < 0$. Como ejemplo veamos lo que sucede con la primera condición:

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \lim_{I \rightarrow 0^+} \Phi(R, I) = \pi, \\ \Phi^- &= \lim_{I \rightarrow 0^-} \Phi(R, I) = -\pi, \end{aligned}$$

por lo tanto existe una discontinuidad al acercarnos por $I \rightarrow 0^+$ ó $I \rightarrow 0^-$.

Para que esta función, Φ , sea continua en todo el plano complejo, basta con imponer

$$\lim_{I \rightarrow 0^+} \Phi(R, I) = \lim_{I \rightarrow 0^-} \Phi(R, I). \quad (\text{B.29})$$

Luego, para este caso conviene definir

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \arctan \left(\frac{S_{2j} - R}{I} \right) + \arctan \left(\frac{S_{1j} + R}{I} \right), \\ \Phi^- &= \Phi^+ + 2\pi. \end{aligned}$$



Para el segundo caso, $R - S_{2j}(\gamma) > 0$ y $R + S_{1j}(\gamma) < 0$, podemos realizar un procedimiento análogo. Con esto, la función Φ será continua en todo el plano complejo, por lo que se asegura la analiticidad de la relación de dispersión. Las dos posibles condiciones que hemos identificado para satisfacer la Ec. (B.28) son muy generales, por lo que deberemos estudiar cada una de estas condiciones en detalle para poder expresarlas en función de γ .

B.2.1. Caso electrones $J_{L,e}$

La Ec. (B.26) para el caso de los electrones es

$$J_{L,e}^{\dagger} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R - S_{2e})^2 + I^2}{(R + S_{1e})^2 + I^2} \right] + i \left[\arctan \left(\frac{S_{2e} - R}{I} \right) + \arctan \left(\frac{S_{1e} + R}{I} \right) \right], \quad (\text{B.30})$$

donde

$$S_{1e}(\gamma) = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} + \frac{t}{\gamma}, \quad (\text{B.31})$$

$$S_{2e}(\gamma) = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} - \frac{t}{\gamma}. \quad (\text{B.32})$$

Consideraremos sólo $t > 0$, ya que para $t < 0$ esta integral se convierte en la integral para los positrones, la cual resolveremos más adelante. Inmediatamente notamos que $S_{1e}(\gamma) > 0$. Debemos enfocarnos en los casos en que se cumple la condición (B.28), que para los electrones son los casos

$$R - S_{2e}(\gamma) < 0 \quad \text{y} \quad R + S_{1e}(\gamma) > 0, \quad (\text{B.33})$$

ó

$$R - S_{2e}(\gamma) > 0 \quad \text{y} \quad R + S_{1e}(\gamma) < 0. \quad (\text{B.34})$$

La segunda condición implica que $\sqrt{1 - \gamma^{-2}} < -\sqrt{1 - \gamma^{-2}}$, lo que es imposible, así que debemos enfocarnos en la primera. La primera condición se puede escribir

como

$$-S_{1e}(\gamma) < R < S_{2e}(\gamma), \quad (\text{B.35})$$

es decir, debemos fijarnos que R esté dentro del intervalo de integración. En la Fig. B.1 podemos ver el comportamiento de las funciones $-S_{1e}(\gamma)$ y $S_{2e}(\gamma)$ en función de γ , para $t > 1$ [Fig. B.1(a)] y $t < 1$ [Fig. B.1(b)].

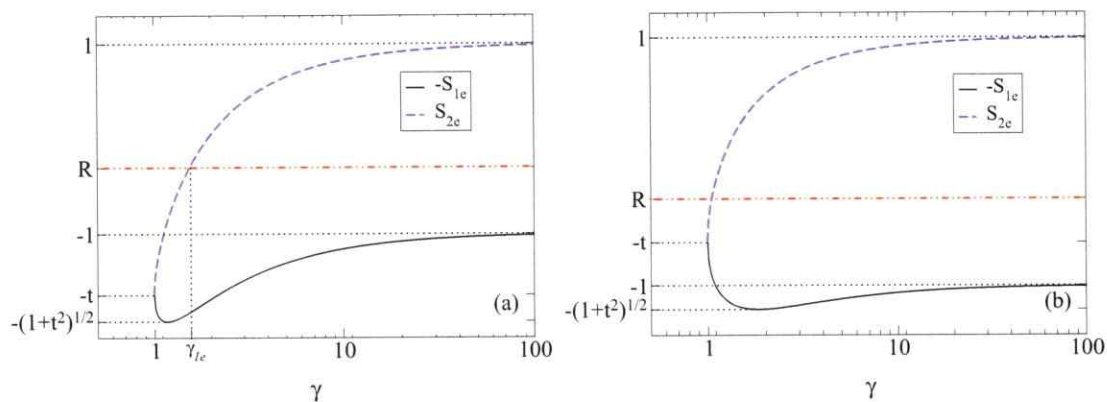


Figura B.1: Funciones $-S_{1e}(\gamma)$ y $S_{2e}(\gamma)$, para: (a) $t > 1$; (b) $t < 1$. Línea continua (negra): función $-S_{1e}$. Línea segmentada (azul): función S_{2e} . La línea punteada y segmentada (roja) representa un valor particular para R .

De la Fig. B.1 notamos que se debe buscar el intervalo de γ para el cual se cumpla la condición (B.35). Por ejemplo, para $-1 < R < 1$ y $t > 1$ [Fig. B.1(a)], sólo para $\gamma \geq \gamma_{1e}$ se cumple la condición (B.35), es decir, R estará dentro del intervalo $[-S_{1e}, S_{2e}]$ sólo para valores de γ mayores que γ_{1e} , que es solución de $R = S_{2e}(\gamma)$. En cambio, si $-t < R < -1$, γ estará acotado por dos valores, el límite inferior proveniente de la solución $R = S_{2e}(\gamma)$ y el superior de $R = -S_{1e}(\gamma)$. Por último, para $-\sqrt{1+t^2} < R < -t$ los límites de γ vendrán dados por las dos soluciones de $R = -S_{1e}(\gamma)$.

Para $t < 1$, Fig. B.1(b), debemos realizar el mismo procedimiento, analizando todos

los casos que se muestran en la figura. De esta manera, identificando todos los casos para los cuales $\lim_{I \rightarrow 0^{\pm}} \Re X_j < 0$, podemos encontrar una expresión general para la integral $J_{L,e}$. Así la continuación analítica para los electrones será

$$J_{L,e}(\gamma) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R - S_{2e})^2 + I^2}{(R + S_{1e})^2 + I^2} \right] + i \left[\arctan \left(\frac{S_{2e} - R}{I} \right) + \arctan \left(\frac{S_{1e} + R}{I} \right) + \theta_e \right], \quad (\text{B.36})$$

con

$$\theta_e = \begin{cases} 0 & , R \leq -\sqrt{1+t^2}, \\ \pi\sigma\Theta(\gamma - \gamma_{1e})\Theta(\gamma_{2e} - \gamma) & , -\sqrt{1+t^2} < R < -1, \\ \pi\sigma\Theta(\gamma - \gamma_{1e}) & , -1 < R < 1, \\ 0 & , R \geq 1, \end{cases}$$

donde Θ es la función de Heaviside,

$$\gamma_{1e} = \frac{Rt + \sqrt{t^2 + 1 - R^2}}{1 - R^2},$$

$$\gamma_{2e} = \frac{Rt - \sqrt{t^2 + 1 - R^2}}{1 - R^2},$$

y

$$\sigma = \begin{cases} 2 & , I < 0, \\ 1 & , I = 0, \\ 0 & , I > 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y analítica en todo el plano complejo, por lo que hemos omitido el superíndice + de $J_{L,e}$.

B.2.2. Caso positrones $J_{L,p}$

La Ec. (B.26) para el caso de los positrones es

$$J_{L,p}^+ = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R - S_{2p})^2 + I^2}{(R + S_{1p})^2 + I^2} \right] + i \left[\arctan \left(\frac{S_{2p} - R}{I} \right) + \arctan \left(\frac{S_{1p} + R}{I} \right) \right], \quad (\text{B.37})$$

donde

$$S_{1p}(\gamma) = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} - \frac{t}{\gamma}, \quad (\text{B.38})$$

$$S_{2p}(\gamma) = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} + \frac{t}{\gamma}. \quad (\text{B.39})$$

Como en el caso anterior, consideraremos sólo $t > 0$. La condición (B.28), produce para los positrones los casos

$$R - S_{2p}(\gamma) < 0 \quad \text{y} \quad R + S_{1p}(\gamma) > 0, \quad (\text{B.40})$$

ó

$$R - S_{2p}(\gamma) > 0 \quad \text{y} \quad R + S_{1p}(\gamma) < 0. \quad (\text{B.41})$$

Al igual que en la Sec. B.2.1, la segunda condición no se satisface para ningún valor de γ y t . La primera condición se puede escribir como

$$-S_{1p}(\gamma) < R < S_{2p}(\gamma), \quad (\text{B.42})$$

En la Fig. B.2 podemos ver el comportamiento de las funciones $-S_{1p}$ y S_{2p} en función de γ , para $t > 1$ [Fig. B.2(a)] y $t < 1$ [Fig. B.2(b)].

Al igual que en el caso de los electrones, estudiamos cada uno de los casos que se muestran en la Fig. B.2, por lo que podemos llegar a la integral

$$J_{L;p}(\gamma) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(R - S_{2p})^2 + I^2}{(R + S_{1p})^2 + I^2} \right] + i \left[\arctan \left(\frac{S_{2p} - R}{I} \right) + \arctan \left(\frac{S_{1p} + R}{I} \right) + \theta_p \right], \quad (\text{B.43})$$

con

$$\theta_p = \begin{cases} 0 & , \quad R \leq -1, \\ \pi\sigma\Theta(\gamma - \gamma_{1p}) & , \quad -1 < R \leq 1, \\ \pi\sigma\Theta(\gamma - \gamma_{1p})\Theta(\gamma_{2p} - \gamma) & , \quad -1 < R < \sqrt{1 + t^2}, \\ 0 & , \quad R \geq \sqrt{1 + t^2}, \end{cases}$$

donde Θ es la función de Heaviside,

$$\gamma_{1p} = \frac{-Rt + \sqrt{t^2 + 1 - R^2}}{1 - R^2},$$

$$\gamma_{2p} = \frac{-Rt - \sqrt{t^2 + 1 - R^2}}{1 - R^2},$$

y

$$\sigma = \begin{cases} 2 & , I < 0, \\ 1 & , I = 0, \\ 0 & , I > 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y analítica en todo el plano complejo.

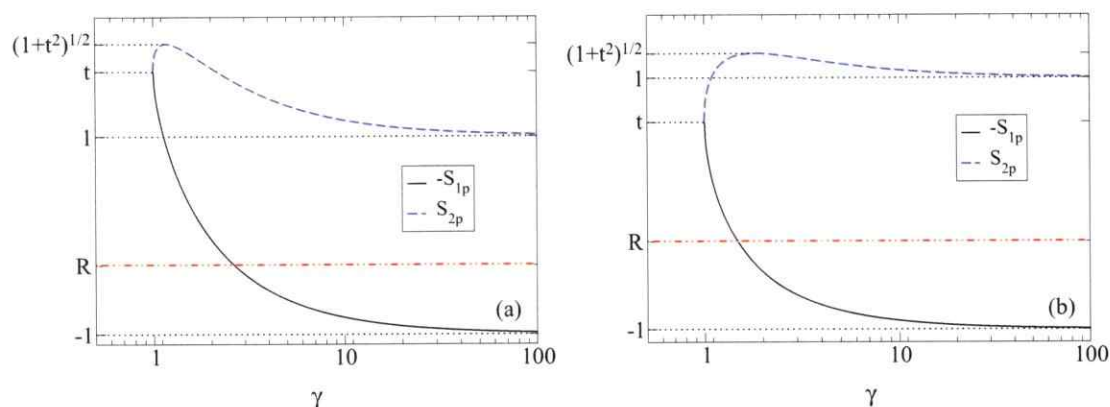


Figura B.2: Funciones $-S_{1p}(\gamma)$ y $S_{2p}(\gamma)$, para: (a) $t > 1$; (b) $t < 1$. Línea continua (negra): función $-S_{1p}$. Línea segmentada (azul): función S_{2p} . La línea punteada y segmentada (roja) representa un valor particular para R .

B.3. Análisis numérico

Utilizando las expresiones (B.36) y (B.43), derivadas en la sección anterior, la relación de dispersión (B.18) puede ser escrita de la forma

$$\begin{aligned}
\Lambda_L = & 1 - \frac{1}{z^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \mu}{c^2 k^2} \\
& + \frac{\omega_{pe}^2 \mu^2}{4K_2(\mu)} \frac{1}{c^2 k^2 z} \left\{ \int_1^\infty d\gamma e^{-\mu\gamma} [(1-z^2)\gamma^2 - 2zt\gamma - (1+t^2)] J_{L,e}(\gamma) \right. \\
& \left. + \int_1^\infty d\gamma e^{-\mu\gamma} [(1-z^2)\gamma^2 + 2zt\gamma - (1+t^2)] J_{L,p}(\gamma) \right\} = 0, \quad (\text{B.44})
\end{aligned}$$

la cual es válida para todo el plano complejo.

En la Fig. B.3 vemos la relación de dispersión dada por la Ec. (B.44), usando la normalización $x = \omega/\Omega_c$ e $y = ck/\Omega_c$, para $\mu = 10$ y $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$. La Fig. B.3(a) muestra la parte real de la relación de dispersión, en ella identificamos las ramas electromagnética y de Alfvén. Esta figura es bastante similar a la obtenida mediante la teoría de fluidos. La Fig. B.3(b) muestra la parte imaginaria de la relación de dispersión, para la rama de Alfvén. En ella vemos que los modos en la rama de Alfvén con número de onda mayor a $y \approx 0.5$, están amortiguados. Este resultado es consistente con lo que observamos en el Cap. 6, utilizando una simulación de partículas, donde vimos que la rama de Alfvén desaparece para grandes valores del número de onda.

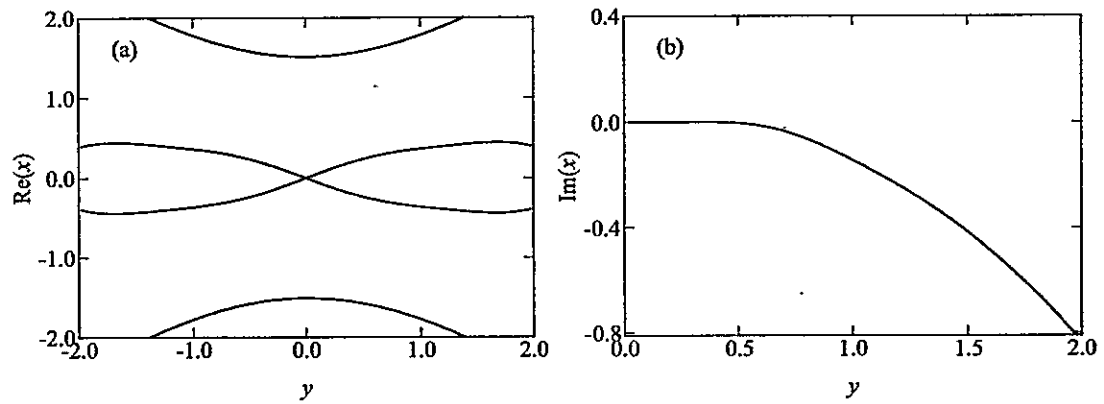


Figura B.3: Relación de dispersión (B.44). (a) $\text{Re}(x) = \text{Re}(\omega)/\Omega_c$ vs. $y = ck/\Omega_c$. (b) $\text{Im}(x) = \text{Im}(\omega)/\Omega_c$ vs. $y = ck/\Omega_c$, para la rama de Alfvén. Ambos gráficos para $\mu = 10$ y $\omega_{pe}/\Omega_c = 1$.

Referencias

- [1] I. Langmuir, Proc. Nat. Acad. Sci. **14**, 627 (1928).
- [2] H. M. Mott-Smith, Nature **233**, 219 (1971).
- [3] K. Nishikawa y M. Wakatani, *Plasma Physics. Basic Theory with Fusion Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1994), vol. 8 de *Atoms and Plasmas*, cap. 8, segunda ed.
- [4] A. Dinklage, T. Klinger, G. Marx y L. Schweikhard, editores, *Plasma Physics: Confinement, Transport and Collective Effects*, vol. 670 de *Lecture Notes in Physics* (Springer, Berlin, 2005).
- [5] R. N. Manchester y J. H. Taylor, *Pulsars* (W. H. Freeman, San Francisco, 1977).
- [6] P. A. Sturrock, Astrophys. J. **164**, 529 (1971).
- [7] M. F. Curtis, *The Theory of Neutron Stars Magnetospheres* (University of Chicago Press, Chicago, 1991).
- [8] Y. N. Istomin y D. N. Sobyenin, Astron. Lett. **33**, 660 (2007).
- [9] S. J. Hardy y M. H. Thoma, Phys. Rev. D **63**, 025014 (2000).

- [10] C. S. Reynolds, A. C. Fabian, A. Celottid y M. J. Rees, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283**, 873 (1996).
- [11] T. Piran, *Phys. Rep.* **314**, 575 (199).
- [12] T. Piran, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1143 (2004).
- [13] G. W. Gibbons, S. Hawking y S. T. C. Siklos, editores, *The Very Early Universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [14] T. Tajima y T. Taniuti, *Phys. Rev. A* **42**, 3587 (1990).
- [15] H. Lesch y M. Pohl, *Astron. Astrophys.* **254**, 29 (1992).
- [16] G. Björnsson, M. A. Abramowicz, X. Chen y J.-P. Lasota, *Astrophys. J.* **467**, 99 (1996).
- [17] E. P. T. Liang, *Astrophys. J.* **234**, 1105 (1979).
- [18] T. R. White y A. P. Lightman, *Astrophys. J.* **340**, 1024 (1989).
- [19] E. Churazov, R. Sunyaev, S. Sazonov, M. Revnivtsev y D. Varshalovich, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **357**, 1377 (2005).
- [20] Q. Luo, D. B. Melrose y D. Fussell, *Phys. Rev. E* **66**, 026405 (2002).
- [21] S. Iwamoto y F. Takahara, *Astrophys. J.* **565**, 163 (2002).
- [22] J. F. C. Wardle, D. C. Homan, R. Ojha y D. H. Roberts, *Nature* **395**, 457 (1998).
- [23] D. B. Blaschke, A. V. Prozorkevich, C. D. Roberts, S. M. Schmidt y S. A. Smolyansky, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 140402 (2006).

- [24] H. Chen, S. C. Wilks, J. D. Bonlie, E. P. Liang, J. Myatt, D. F. Price, D. D. Meyerhofer y P. Beiersdorfer, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 105001 (2009).
- [25] G. P. Zank y R. G. Greaves, *Phys. Rev. E* **51**, 6079 (1995).
- [26] P. Helander y D. J. Ward, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 135004 (2003).
- [27] P. Goldreich y W. H. Julian, *Astrophys. J.* **157**, 869 (1969).
- [28] A. N. Timokhin y J. Arons, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **429**, 20 (2013).
- [29] A. K. Harding, *Astrophys. J.* **300**, 167 (1986).
- [30] A. A. da Costa, D. A. Diver y G. A. Stewart, *Astron. Astrophys.* **366**, 129 (2001).
- [31] A. Barnes y J. V. Hollweg, *J. Geophys. Res.* **79**, 2302 (1974).
- [32] L. Gomberoff, F. T. Gratton y G. Gnani, *J. Geophys. Res.* **99**, 14717 (1994).
- [33] V. I. Berezhiani y S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1110 (1994).
- [34] V. I. Berezhiani y S. M. Mahajan, *Phys. Rev. E* **52**, 1968 (1995).
- [35] F. A. Asenjo, V. Muñoz, J. A. Valdivia y T. Hada, *Phys. Plasmas* **16**, 122108 (2009).
- [36] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Rev. E* **57**, 994 (1998).
- [37] S. Matsukiyo y T. Hada, *Phys. Rev. E* **67**, 046406 (2003).
- [38] S. Matsukiyo y T. Hada, *Astrophys. J.* **692**, 1004 (2009).
- [39] R. Svensson, *Astrophys. J.* **258**, 335 (1982).

- [40] J. T. Gosling, R. M. Skoug, D. J. McComas y C. W. Smith, *J. Geophys. Res.* **110**, A01107 (2005).
- [41] T. D. Phan, J. T. Gosling, M. S. Davis, R. M. Skoug, M. O. Ieroset, R. P. Lin, R. P. Lepping, D. J. McComas, C. W. Smith, H. Reme y A. Balogh, *Nature* **439**, 175 (2006).
- [42] A. C.-L. Chian y P. R. Muñoz, *Astrophys. J. Lett.* **733**, L34 (2011).
- [43] C. H. Jaroschek, R. A. Treumann, H. Lesch y M. Scholer, *Phys. Plasmas* **11**, 1151 (2004).
- [44] M. Swisdak, Y.-H. Liu y J. F. Drake, *Astrophys. J.* **680**, 999 (2008).
- [45] S. Zenitani y M. Hoshino, *Astrophys. J.* **677**, 530 (2008).
- [46] N. Bessho y A. Bhattacharjee, *Astrophys. J.* **750**, 129 (2012).
- [47] B. Cerutti, G. R. Werner, D. A. Uzdensky y M. C. Begelman, *Astrophys. J. Lett.* **754**, L33 (2012).
- [48] J. Arons, *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 1419 (2008).
- [49] M. Kino, N. Kawakatu y F. Takahara, *Astrophys. J.* **751**, 101 (2012).
- [50] G. Weidenspointner, G. Skinner, P. Jean, J. Knödlseider, P. von Ballmoos, G. Bignami, R. Diehl, A. W. Strong, B. Cordier, S. Schanne y C. Winkler, *Nature* **451**, 159 (2008).
- [51] T. S. Pedersen, J. R. Danielson, C. Hugenschmidt, G. Marx, X. Sarasola, F. Schauer, L. Schweikhard, C. M. Surko y E. Winkler, *New J. Phys.* **14**, 035010 (2012).

- [52] A. C.-L. Chian y C. F. Kennel, *Astrophys. Space Sci.* **97**, 9 (1983).
- [53] M. Y. Yu, P. K. Shukla y L. Stenflo, *Astrophys. J.* **309**, L63 (1986).
- [54] F. B. Rizzato, R. S. Schneider y D. Dillenburger, *Phys. Lett. A* **133**, 59 (1988).
- [55] R. E. Kates y D. J. Kaup, *J. Plasma Phys.* **41**, 507 (1989).
- [56] F. T. Gratton, G. Gnani, R. M. O. Galvão y L. Gomberoff, *Phys. Rev. E* **55**, 3381 (1997).
- [57] F. A. Asenjo, F. Borotto, A. C.-L. Chian, V. Muñoz, J. A. Valdivia y E. Rempel, *Phys. Rev. E* **85**, 046406 (2012).
- [58] A. V. Borovsky, A. L. Galkin, V. V. Korobkin y O. B. Shiryaev, *Phys. Rev. E* **59**, 2253 (1999).
- [59] D. Umstadter, *J. Phys. D* **36**, R151 (2003).
- [60] F. Xiao, H. He, Q. Zhou, H. Zheng y S. Wang, *J. Geophys. Res.* **111**, A11201 (2006).
- [61] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, vol. 6 de *Course of Theoretical Physics* (Pergamon Press, Bristol, 1959).
- [62] F. A. Asenjo, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E* **81**, 056405 (2010).
- [63] S. M. Mahajan, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 035001 (2003).
- [64] R. T. Gangadhara, V. Krishan y P. K. Shukla, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **262**, 151 (1993).
- [65] L. Gomberoff, V. Muñoz y R. M. O. Galvão, *Phys. Rev. E* **56**, 4581 (1997).

- [66] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **7**, 4916 (2000).
- [67] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **5**, 3171 (1998).
- [68] R. A. López, F. A. Asenjo, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *Phys. Plasmas* **19**, 082104 (2012).
- [69] M. Longtin y B. U. Ö. Sonnerup, *J. Geophys. Res.* **91**, 6816 (1986).
- [70] H. K. Wong y M. L. Goldstein, *J. Geophys. Res.* **91**, 5617 (1986).
- [71] R. A. López, F. A. Asenjo, V. Muñoz, A. C.-L. Chian y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E* **88**, 023105 (2013).
- [72] A. B. Mikhailovskii, O. G. Onishchenko y E. G. Tatarinov, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **27**, 527 (1985).
- [73] S. I. Popel, S. V. Vladimirov y P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **2**, 716 (1995).
- [74] W. F. El-Taibany y A. A. Mamun, *Phys. Rev. E* **85**, 026406 (2012).
- [75] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects* (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [76] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (Springer, 2005).
- [77] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Plenum Press, New York, 1990).
- [78] K. Nishikawa y C. S. Liu, en *Advances in Plasma Physics*, editado por A. Simon y W. B. Thompson (Wiley, New York, 1976), vol. 6, cap. 2, págs. 3–81.

- [79] A. Ebaid y S. M. Khaled, *J. Comput. Applied Math.* **235**, 1984 (2011).
- [80] A. J. Klimas, *J. Comput. Phys.* **68**, 202 (1987).
- [81] A. J. Klimas y W. M. Farrell, *J. Comput. Phys.* **110**, 150 (1994).
- [82] C. K. Birdsall y A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (Taylor and Francis, New York, 2005).
- [83] R. W. Hockney y J. W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles* (Bristol: Hilger, 1988).
- [84] T. Terasawa, M. Hoshino, J.-I. Sakai y T. Hada, *J. Geophys. Res.* **91**, 4171 (1986).
- [85] J. A. Araneda, A. F. Viñas y H. F. Astudillo, *J. Geophys. Res.* **107**, SSH 8 (2002).
- [86] L. Ofman, A.-F. Viñas y P. S. Moya, *Ann. Geophys.* **29**, 1071 (2011).
- [87] M. Domínguez, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *Phys. Rev. E* **85**, 056416 (2012).
- [88] R. A. López, A. F. Viñas, V. Muñoz y J. A. Valdivia, *Particle-in-cell simulations for parametric decays of a circularly polarized Alfvén wave in relativistic thermal electron-positron plasmas*, submitted to *Phys. Plasmas*.
- [89] P. L. Pritchett, *Space Sci. Rev.* **42**, 17 (1985).
- [90] H. Matsumoto y Y. Omura, *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software* (Terra Scientific, Tokyo, 1993).
- [91] H. Usui y Y. Omura, editores, *Advanced Methods for Space Simulations* (Terra Scientific, Tokyo, 2007).

- [92] P. Hut, J. Makino y S. McMillan, *Astrophys. J.* **443**, L93 (1995).
- [93] J. M. Dawson, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 403 (1983).
- [94] B. Marder, *J. Comput. Phys.* **68**, 48 (1987).
- [95] A. B. Langdon, *Comput. Phys. Commun.* **70**, 447 (1992).
- [96] P. L. Pritchett, en *Space Plasma Simulation*, editado por J. Büchner, M. Scholer, y C. T. Dum (Springer Berlin Heidelberg, 2003), vol. 615 de *Lecture Notes in Physics*, págs. 1–24.
- [97] F. Jüttner, *Annalen der Physik* **339**, 856 (1911).
- [98] J. A. Araneda, H. Astudillo y E. Marsch, *Space Sci. Rev.* **172**, 361 (2012).
- [99] V. Muñoz, T. Hada y S. Matsukiyo, *Earth, Planets and Space* **58**, 1213 (2006).
- [100] B. Buti, V. Jayanti, A. F. Viñas, S. Ghosh, M. L. Goldstein, D. A. Roberts, G. S. Lakhina y B. T. Tsurutani, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 2377 (1998).
- [101] Y. Nariyuki y T. Hada, *Nonlinear Proc. Geophys.* **13**, 425 (2006).
- [102] B. Buti, M. Velli, P. Liewer, B. Goldstein y T. Hada, *Phys. Plasmas* **7**, 3998 (2000).
- [103] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **9**, 2534 (2002).
- [104] V. Muñoz y L. Gomberoff, *Phys. Plasmas* **9**, 4415 (2002).
- [105] R. Schlickeiser, *Astron. Astrophys.* **294**, 615 (1995).
- [106] R. Schlickeiser y M. Kneller, *J. Plasma Phys.* **57**, 709 (1997).

- [107] Y. Liu y S. Q. Liu, *Contrib. Plasma Phys.* **51**, 698 (2011).
- [108] M. Lazar y R. Schlickeiser, *Can. J. Phys.* **81**, 1377 (2003).
- [109] M. Lazar y R. Schlickeiser, *New J. Phys.* **8**, 66 (2006).
- [110] V. Muñoz, *Phys. Plasmas* **11**, 3497 (2004).
- [111] M. Lontano, S. V. Bulanov, J. Koga, M. Passoni y T. Tajima, *Phys. Plasmas* **9**, 2562 (2002).
- [112] T. Felten, R. Schlickeiser, P. H. Yoon y M. Lazar, *Phys. Plasmas* **20**, 052113 (2013).