



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

**INCERTEZA EN LA ESTIMACION DE LA RECUPERACION DE ESPUMA ( $R_f$ )  
EN CELDAS DE FLOTACION Y DESARROLLO DE ESTRATEGIAS PARA SU  
MEJOR EVALUACIÓN**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

**Jean Pierre Pinaud Lupano**

PROFESOR GUÍA:  
GONZALO MONTES ATENAS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
RODRIGO LADRÓN DE GUEVARA MARTÍNEZ  
CÉSAR ARREDONDO PEÑA

SANTIAGO DE CHILE  
2023

## Resumen

El trabajo realizado en este estudio está enmarcado en el estudio de la recuperación en la zona de espuma en flotación ( $R_f$ ), dado que esto no está muy estudiado y la información concerniente a estudios de espumas de 3 fases (sólido-líquido-gas) es escasa.

Dado lo anterior, el objetivo general de este estudio se centra en cuantificar y analizar el error asociado a metodologías de la literatura, así como también proponer un nuevo modelo de cálculo de recuperación en la zona de espuma.

Existen varios modelos matemáticos para modelar la espuma, están los que son cinéticos basados en pulpa, transferencia de masa entre las zonas de colección y espuma, técnicas de medición de  $R_f$ , procedimientos de flotación en columnas de laboratorio, procedimientos de flotación mecánica en laboratorio, procedimiento de flotación industrial y drifts en la zona de espuma.

Después se muestra la metodología en la cual se instruye el uso de herramientas como análisis error y normalización para generar los resultados necesarios para este estudio y sus objetivos.

En los resultados obtenidos, se obtiene que en la metodología de Seaman para el cálculo de la recuperación en la zona de espuma, la variable más influyente en el cálculo es el área transversal de la celda de flotación por tener mayor error asociado, mientras que su variable menos influyente es la carga de burbujas.

Por otro lado, los resultados obtenidos para la metodología de Seaman en el cálculo de la recuperación en la zona de espuma arrojan que esta metodología también tiene como variable más influyente al área transversal de la celda, en cambio, su variable menos influyente es la ley de partículas adheridas en la pulpa.

En lo que respecta a cuál metodología usada es mejor, la de Alexander es mejor en términos de menor error promedio asociado a cada variable. En cambio, Seaman es mejor en términos de aplicabilidad por la facilidad de obtener datos in-situ, lo que lo hace un el modelo más cercano a la realidad.

El modelo de recuperación en la zona de espuma propuesto está basado en ambas metodologías usadas.

Finalmente, se sugiere estudiar más cada metodología aplicada con bases de datos y pruebas a escala industrial. Y se sugiere validar o refutar los supuestos del modelo propuesto, así como terminar de definir matemáticamente algunos de sus parámetros.

## Abstract

The work carried out in this study is framed within the study of recovery in the froth zone in flotation ( $R_f$ ), as this is not extensively studied and information regarding three-phase foam studies (solid-liquid-gas) is scarce.

Given the above, the general objective of this study focuses on quantifying and analyzing the error associated with methodologies from the literature, as well as proposing a new calculation model for recovery in the froth zone.

There are several mathematical models for foam modeling, including kinetic models based on pulp, mass transfer between collection and froth zones,  $R_f$  measurement techniques, laboratory column flotation procedures, laboratory mechanical flotation procedures, industrial flotation procedures, and drifts in the froth zone.

Next, the methodology is presented, which instructs the use of tools such as error analysis and normalization to generate the necessary results for this study and its objectives.

In the obtained results, it is found that in the Seaman methodology for calculating recovery in the froth zone, the most influential variable in the calculation is the cross-sectional area of the flotation cell, as it has the highest associated error, while the least influential variable is the bubble load.

On the other hand, the results obtained for the Seaman methodology in calculating recovery in the froth zone indicate that the most influential variable in this methodology is also the cross-sectional area of the cell, while the least influential variable is the grade of particles adhered to the pulp.

Regarding which methodology used is better, Alexander's methodology is better in terms of lower average error associated with each variable. However, Seaman's methodology is better in terms of applicability due to the ease of obtaining in-situ data, which makes it the model closest to reality.

The proposed recovery model in the froth zone is based on both methodologies used.

Finally, it is suggested to further study each applied methodology with databases and industrial-scale tests. It is also suggested to validate or refute the assumptions of the proposed model, as well as to mathematically define some of its parameters.

*“Life doesn’t give us purpose. We give life purpose.”*

-Barry Allen

## **Agradecimientos**

En primer lugar, he de agradecer a mi madre Paola Virna Lupano Morgado, Ingeniera Civil Eléctrica de la Universidad de Chile, por su amor y apoyo incondicionales, así como también el entregarme diversas herramientas para la vida y para mis estudios.

A mi perrita Sumy, quién me acompañó en cada jornada de estudio en casa, su lealtad y cariño incondicionales; y por haber sido una gran guardiana.

A mi perro Domingo, quién siempre esta alerta y avisa cualquier evento extraño, así como también los trucos que realiza para demostrar y solicitar cariño.

A mi perrita Nina, quién le da caos y diversión a mi día a día con sus travesuras, y su amor y lealtad incondicional desde que fue adoptada.

A mis amigos del colegio que conservo hasta el día de hoy y siempre me han motivado e impulsado a ser mejor. Y a mis amigos de la universidad también les agradezco por todos los ratos de ocio, jornadas de estudio en la biblioteca y ayudarme cuando me costaba alguna materia.

A mis profesores de la universidad que me ayudaron y me motivaron a lo largo de la carrera. Al profesor Gonzalo Montes por sus ayudas como jefe docente cada vez que tuve algún problema, ayudarme a conseguir mi práctica profesional I y darme mi tema de memoria. Al profesor Leandro Voisin por ayudarme a conseguir mis prácticas profesionales II y III. Y al profesor Sebastián Troncoso, quien me motivó y apoyo para hacer mi intercambio estudiantil en la Universidad de McGill, en Montreal, Canadá.

## Tabla de Contenido

1. Capítulo 1: Introducción.....	1
1.1. Contexto.....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.2.1. Objetivos generales.....	2
1.2.2. Objetivos específicos.....	2
1.3. Alcances.....	3
1.4. Estructura del trabajo de memoria.....	3
2. Capítulo 2: Análisis crítico de la literatura.....	4
2.1. La importancia de la fase de espuma en flotación.....	4
2.2. La naturaleza del problema: Los métodos y modelos matemáticos.....	5
2.2.1. Modelos cinéticos basados en pulpa.....	5
2.2.2. Transferencia de masa entre las dos zonas de flotación: Introducción del rol de la fase de espuma.....	5
2.2.3. Técnicas de medición de $R_f$ .....	10
2.2.4. Procedimientos de flotación en columna de laboratorio.....	12
2.2.5. Procedimientos de flotación mecánica en laboratorio.....	17
2.2.6. Procedimiento de flotación industrial.....	18
2.2.7. Drifts en la zona de espuma.....	20
3. Capítulo 3: Metodología.....	23
4. Capítulo 4: Resultados y discusión.....	26
4.1. Resultados Seaman.....	26
4.1.1. Datos recabados y cálculo de $R_f$ de Seaman.....	26
4.1.2. Análisis de sensibilidad para $R_f$ de Seaman.....	26
4.1.3. Análisis de Error para $R_f$ de Seaman.....	30
4.2. Resultados Alexander.....	33

4.2.1.	Datos reunidos y cálculo de $R_f$ de Alexander.....	33
4.2.2.	Análisis de sensibilidad para $R_f$ de Alexander .....	34
4.2.3.	Análisis de Error para $R_f$ de Alexander .....	45
4.3.	Comparación entre modelos de $R_f$ .....	48
4.4.	Propuesta de nuevo modelo .....	50
5.	Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones.....	52
5.1.	Conclusiones .....	52
5.2.	Recomendaciones .....	53
6.	Capítulo 6: Bibliografía.....	54
	Anexos .....	59
	Anexo A: Resumen métodos para cálculo de recuperación fase de espuma.....	59
	Anexo B: Varianzas obtenidas .....	61

## Índice de Figuras

Figura 1: Separación del valioso y mezcla de partículas, de ganga en una celda de flotación (Vera, 2002).....	4
Figura 2: Los efectos de recirculación interna que resultan de la interacción de la zona de espuma y la zona de recolección en la flotación (según Wilson y Stratton-Crawley, 1991).	6
Figura 3: Modelos de cinética de flotación regidos por una jerarquía de tres niveles (Kapur y Mehrotra, 1991).....	7
Figura 4: Medición de la recuperación global de la columna (celda de flotación de laboratorio) a diferentes niveles de pulpa. $R_1 > R_2 > R_3 > R_4$ (según Yu y Finch, 1990).	13
Figura 5: Representación esquemática de una columna de flotación de laboratorio modificada (según Falutsu y Dobby, 1989a).....	14
Figura 6: Esquema de flujos de masa en una columna para el flujo en contracorriente y el flujo en cocorriente (según Contini et al., 1988).....	15
Figura 7: Descripción del modelo de dos fases de la flotación (según Feteris et al., 1987).	17
Figura 8: La constante de velocidad de la zona de flotación ( $k$ ) en función de la profundidad de la espuma (FD). $R_f$ en cada punto de datos se calcula según la Ecuación 15.....	18
Figura 9: Esquema de la sonda de velocidad superficial de gas ( $J_g$ ) (Savassi et al., 1997).	18
Figura 10: Esquema del analizador de arrastre (Savassi et al., 1997).....	18
Figura 11: Esquema del analizador de carga de burbujas (de Savassi et al., 1997).....	19
Figura 12: Concepto de tiempo de retención de espuma (FRT).....	21
Figura 13: Valores de $R_f$ en función del tiempo de retención de la espuma (FRT).....	21
Figura 14: Análisis de sensibilidad del $R_f$ de Seaman en función de $m_{tot}$ , en donde se observa una relación lineal directa entre la función y la variable analizada .....	26
Figura 15: Análisis de sensibilidad del $R_f$ de Seaman en función de $G$ , en donde se muestra una relación lineal directa entre la función y la variable analizada.....	27
Figura 16: Análisis de sensibilidad del $R_f$ de Seaman en función de $J_g$ , en donde se ve una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada .....	28
Figura 17: Análisis de sensibilidad del $R_f$ de Seaman en función de $A$ , en donde se presenta una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada .....	29
Figura 18: Análisis de sensibilidad del $R_f$ de Seaman en función de $BL$ , en donde se evidencia una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada ...	30

Figura 19: Errores parciales de cada variable del  $R_f$  de Seaman. En esta figura se ve que para los sets #2, #3 y promedio la variable de mayor error es A, mientras que para el set #1 es G..... 31

Figura 20: Error acumulado variables  $R_f$  de Seaman. Aquí se ve otra forma de representar cual variable tiene mayor error, la cual es A, por tener la mayor variación y pendiente al aumentar el error desde  $J_g$  hasta A en los sets #2, #3 y promedio, mientras que para el set #1 es G, ya que la mayor pendiente es al variar el error desde  $m_{tot}$  hasta G ..... 32

Figura 21: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $m_{tot}^{con}$ . Se observa una relación lineal directa entre la función y la variable analizada..... 34

Figura 22: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{tot}^{con}$ . Se ve una relación lineal directa entre la función y la variable analizada..... 35

Figura 23: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ent}^{con}$ . Se muestra una relación no lineal creciente entre la función y la variable analizada ..... 36

Figura 24: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de V. Se presenta una relación lineal directa entre la función y la variable analizada..... 37

Figura 25: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ad}^{pulp}$ . Se evidencia una relación lineal directa entre la función y la variable analizada..... 38

Figura 26: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ent}^{pulp}$ . Se observa una relación no lineal creciente entre la función y la variable analizada ..... 39

Figura 27: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ad}^{con}$ . Se observa un comportamiento parecido a una hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada ..... 40

Figura 28: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de A. Se ve una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada ..... 41

Figura 29: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $J_g$ . Se evidencia una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada ..... 42

Figura 30: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $m_{tot}^{pulp}$ . Se presenta una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada ..... 43

Figura 31: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{tot}^{pulp}$ . Se observa un comportamiento similar a una hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada ..... 44

Figura 32: Errores parciales de cada variable del $R_f$ de Alexander. En esta figura se ve que para los sets #1, #2 y promedio la variable de mayor error es A, mientras que para el set #3 es $G_{ad}^{con}$ .....	45
Figura 33: Error acumulado variables $R_f$ de Alexander. En esta figura también se observa otra forma de representar la variable con mayor error, la cual es A, por tener la mayor pendiente y variación al aumentar el error desde $G_{ad}^{con}$ hasta A en los sets #1, #2 y promedio, mientras que para el set #1 es $G_{ad}^{con}$ , ya que la mayor pendiente es al variar el error desde $G_{ent}^{pulp}$ hasta $G_{ad}^{con}$ .....	47
Figura 34: Comparación errores parciales de las variables promedio. Se observa que el $R_f$ de Alexander tiene menor error por variable, en comparación al $R_f$ de Seaman, exceptuando la variable A.....	48
Figura 35: Comparación errores acumulados de las variables promedio. Se ve que el $R_f$ de Alexander tiene menor error en todas las acumulaciones de errores hasta el 100% dado que tiene un error medio por variable de ~10%, en contraste al $R_f$ Seaman que tiene un error medio por variable de ~20% .....	49
Figura 36: Varianzas parciales variables $R_f$ de Seaman .....	61
Figura 37: Varianza acumulada variables $R_f$ de Seaman .....	62
Figura 38: Varianzas parciales variables $R_f$ de Alexander .....	62
Figura 39: Varianza acumulada variables $R_f$ de Alexander .....	63
Figura 40: Comparación varianzas parciales de las variables promedio .....	63
Figura 41: Comparación varianzas acumuladas de las variables promedio .....	64

## Índice de Tablas

Tabla 1: $R_f$ de Seaman calculados y los inputs usados.....	26
Tabla 2: $R_f$ de Alexander calculados y los inputs usados.....	33
Tabla 3: Resumen métodos para cálculo de recuperación fase de espuma .....	59

## Índice de Ecuaciones

Ecuación 1: Recuperación global en una celda de flotación .....	2
Ecuación 2: Cinética de remoción de partículas sólidas de una especie $i$ .....	5
Ecuación 3: Recuperación total en una celda de flotación en función de las recuperaciones de las zonas de colección y de espuma.....	6
Ecuación 4: Recuperación en la zona espuma en función de las tasas de transferencia (Kapur y Mehrotra, 1991).....	8
Ecuación 5: Recuperación total de una celda en función de términos cinéticos .....	8
Ecuación 6: Recuperación en la zona espuma en función de términos cinéticos.....	9
Ecuación 7: Recuperación en una celda de flotación cuyo sistema se describe como un flujo pistón (Finch y Dobby, 1990).....	9
Ecuación 8: Recuperación en la zona de espuma en una celda de flotación cuyo sistema se describe como un flujo pistón, en función de variables cinéticas (Finch y Dobby, 1990).....	9
Ecuación 9: Recuperación en la zona de espuma (Savassi, 1998) .....	10
Ecuación 10: Recuperación en la zona de espuma (Seaman, 2006).....	11
Ecuación 11: Recuperación en la zona de espuma (Alexander et al., 2003).....	12
Ecuación 12: Recuperación total en una celda de flotación operando a contracorriente (Contini et al., 1988).....	15
Ecuación 13: Recuperación total en una celda de flotación operando a cocorriente (Contini et al., 1988).....	16
Ecuación 14: Igualdad de recuperaciones bajo las condiciones establecidas por Contini et al. (1988).....	16
Ecuación 15: Recuperación en la fase de espuma (Feteris et al., 1987).....	17
Ecuación 16: Constante de velocidad global de flotación (Gorain et al., 1997) .....	20
Ecuación 17: Análisis de error en función de derivadas parciales y varianzas .....	23
Ecuación 18: Varianza total para la recuperación en la zona de espuma de Seaman (2006).....	23
Ecuación 19: Varianza total para la recuperación en la zona de espuma de Alexander et al. (2003) .....	24
Ecuación 20: Modelo de $R_f$ propuesto.....	50

# 1. Capítulo 1: Introducción

## 1.1. Contexto

El proceso de flotación es una operación minera de concentración de elementos de interés como el Cu, Mo, Au, Ag, entre otros. Este proceso busca separar el material económicamente rentable desde el mineral de ganga (material sin valor económico) tomando ventaja de diferencias en las propiedades fisicoquímicas, como la hidrofobicidad.

El proceso de flotación habitualmente se implementa utilizando celdas de flotación, en las cuales se hace pasar la pulpa mineral (mineral reducido a tamaño partícula y líquido) y se introduce gas simultáneamente con el fin de formar burbujas.

Las burbujas y el mineral particulado interactúan haciendo que el mineral se adhiera a las burbujas, lo que produce un acarreo del mineral a través de las burbujas verticalmente hacia arriba en la celda de flotación debido a fuerzas inerciales.

Para lograr la adhesión del mineral, este es previamente alterado selectivamente de acuerdo con los elementos de interés económico al mejorar las propiedades hidrofóbicas o hidrofílicas, según sea el caso, en las superficies de los minerales de interés y los minerales de ganga.

Al llegar las burbujas a la superficie de la fase de pulpa, las burbujas con partículas adheridas forman una segunda fase, denominada fase de espuma. Dicha fase es compleja tanto en su estructura como en su dinámica. La estructura tiene los componentes habitualmente observados en espumas (lamelas, bordes de Plateau y nodos) más la presencia de partículas sólidas que generan una complejidad extra. La dinámica de una espuma ha sido caracterizada y modelada usando el modelo viscoso de espuma que conecta la estructura definida en términos del tamaño de burbuja y la tensión superficial, con la velocidad del tren de burbujas.

A pesar de toda la información y los avances en el estudio del comportamiento de las espumas en 2 fases (líquido-gas), la información existente en relación a espumas de 3 fases (sólido-líquido-gas) y, consecuentemente, el conocimiento sobre cómo una espuma transporta material hidrofóbico en una celda de flotación es muy limitado.

Diferentes investigadores en el campo de la flotación de minerales han presentado modelos que intentan relacionar el comportamiento de la espuma con la recuperación del proceso, así como también el intentar relacionar las 3 fases sólido-líquido-gas. Uno de los modelos más aceptados tiene relación con la estimación de la recuperación global a partir de las recuperaciones de cada una de las fases (Ecuación 1).

$$R = \frac{R_c R_f}{R_c R_f + 1 - R_c}$$

### **Ecuación 1: Recuperación global en una celda de flotación**

Donde  $R_c$ ,  $R_f$  y  $R$  representan la recuperación en la zona de colección, la recuperación en la zona de espuma y la recuperación global, respectivamente. La recuperación global es comúnmente estimada experimentalmente mediante el análisis de leyes y la reconciliación entre ellas y la recuperación másica. Estudios experimentales también han permitido determinar la recuperación en la zona de colección mediante la extrapolación de la recuperación global, utilizando altura de espuma igual a cero. Sin embargo, la problemática encontrada en la literatura, y en la vida real, es que recuperación de la fase de espuma ha sido difícil de estimar.

Adicionalmente, es fácil ver que el modelo presentado en la Ecuación 1 se centra en el comportamiento de la recuperación en la zona de colección. Si la recuperación de la zona de colección es cercana a cero, la recuperación global también tiende a cero. Si dicha recuperación es muy alta (cercana al 100%), el modelo predice una recuperación muy alta independiente de la calidad y estabilidad de la fase de espuma sin considerar el movimiento de la fase de espuma y cómo dicho movimiento se traduce o no en recuperación global.

Dada la problemática presentada, el presente trabajo presenta un desarrollo que busca extender y encaminar el modelamiento de la recuperación en la espuma hacia un modelo más realista.

## **1.2. Objetivos**

### **1.2.1. Objetivos generales**

El objetivo de este trabajo es evaluar la incertidumbre en la estimación de la recuperación en la zona de espuma en celdas de flotación con diferentes técnicas reportadas en la literatura y, a partir de dicho análisis, desarrollar conceptualmente una estrategia para estimar la recuperación en la espuma en celdas de flotación.

### **1.2.2. Objetivos específicos**

Para lograr el objetivo general de este trabajo se presentan los siguientes objetivos secundarios:

- i. Estudiar la incerteza asociada a la estimación de la recuperación de la fase de espuma mediante los métodos presentados en la literatura científica disponible.
- ii. Determinar qué metodología presenta mejores resultados indicando los parámetros más relevantes que menos, y más, contribuyen al error, así como también indicar que técnicas se acercan más a la realidad.
- iii. En base a los resultados obtenidos, proponer un modelo de recuperación de espuma (conceptual y/o matemático) basado en una o más técnicas de las disponibles en la literatura, así como también intentar extender una técnica o una combinación de técnicas con el fin de modelar lo más cercano a la realidad la recuperación en la fase de espuma.

### **1.3. Alcances**

El presente trabajo sólo considera estudios a nivel de laboratorio y desarrollo teórico de estrategias de evaluación de eficiencia de espuma y no involucra trabajo a nivel de planta piloto o escala industrial.

Por otro lado, este trabajo no hace ningún análisis del impacto económico que implica cualquier mejora en el cálculo de la recuperación en la fase de espuma.

No se hacen pruebas ni verificaciones del modelo propuesto ni de sus supuestos, esto se deja como trabajo a futuro.

### **1.4. Estructura del trabajo de memoria**

En el Capítulo 1 se muestra la introducción la flotación y la problemática identificada, así como también están los objetivos de este trabajo y los alcances correspondientes.

En el Capítulo 2 hay un análisis crítico de la literatura en donde se entregan antecedentes de la flotación, la problemática a abordar en este trabajo, desde el punto de vista de la literatura, y una revisión bibliográfica completa de este trabajo.

En el Capítulo 3 se observa la metodología necesaria para replicar este trabajo paso a paso.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados enfocados la recuperación de la fase de espuma a través de distintos métodos y un análisis de sensibilidad de parámetros relevantes, además, dichos resultados se analizan y discuten en el mismo capítulo.

En el Capítulo 5 están las conclusiones y recomendaciones a futuro de este trabajo.

En el Capítulo 7 está la bibliografía asociada a este trabajo.

Finalmente, está el Capítulo 6 en donde se encuentran los Anexos.

## 2. Capítulo 2: Análisis crítico de la literatura

### 2.1. La importancia de la fase de espuma en flotación

La fase de espuma en la separación por flotación ejerce una gran influencia en la separación física de las partículas minerales (a través del movimiento de la espuma, la coalescencia de burbujas y la ruptura de burbujas) y en la capacidad de la celda de flotación (a través de la carga de burbujas). De hecho, es en la fase de espuma donde ocurren procesos esenciales de transporte de partículas hacia el canal de concentrado y drenaje para eliminar la ganga arrastrada (Moys, 1978; Laplante, 1980; Cutting et al., 1981; Meyer and Klimpel, 1982; Ross, 1987; Hall, 1996).

La función principal de la espuma en la superficie de la pulpa como medio de separación y concentración en la flotación se ilustra en la Figura 1. El material indeseado (partículas de mineral de ganga) y las partículas valiosas finas liberadas pueden estar en suspensión en la pulpa intersticial entre las burbujas (como resultado del proceso de arrastre). Esta fracción de partículas arrastradas puede ser drenada o transferida al concentrado de lavado.

El drenaje de la espuma para la eliminación de partículas arrastradas puede ser mejorado mediante el lavado de espuma, pero, esto también puede llevar a la pérdida de partículas con baja capacidad de flotación (por ejemplo, partículas gruesas y partículas de tamaño intermedio) (Bikerman et al., 1953; Prud'Homme and Warr, 1996). La capacidad de carga parece explicar algunas de las limitaciones de la carga de espuma en columnas de flotación de gran diámetro (Finch et al., 1995).

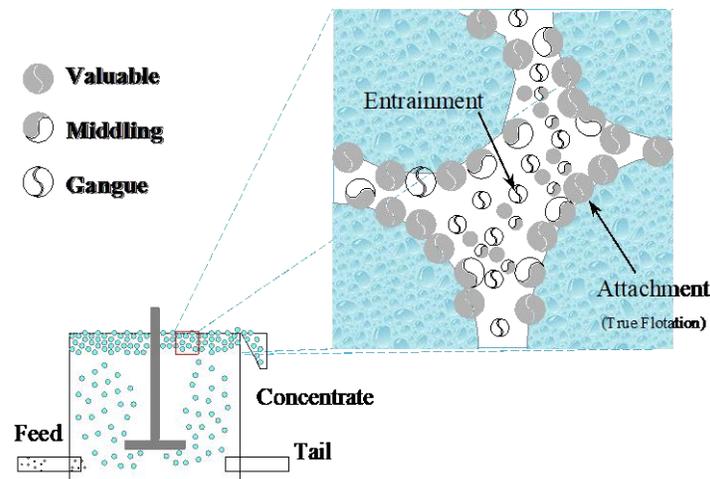


Figura 1: Separación del valioso y mezcla de partículas, de ganga en una celda de flotación (Vera, 2002)

En consecuencia, el propósito de modelar la fase de espuma, y en particular, la eficiencia de recuperación de la espuma ( $R_f$ ), es simular y diseñar circuitos de flotación, describir adecuadamente el rendimiento general de la flotación para diferentes escenarios, y escalar el rendimiento de la espuma desde la escala de laboratorio a escala industrial. Moys (1978) modeló una espuma de 3 fases como un reactor de flujo pistón a partir de mediciones de laboratorio de flotación discontinua (batch) en estado de equilibrio. Poco después, Laplante (1980) y Laplante et al. (1984) modelaron el efecto de la tasa de aireación en las tasas de transferencia de la espuma. Posteriormente, Ross y Van Deventer (1988) propusieron un modelo para el comportamiento de los minerales en la espuma que incorporaba la mayoría de los fenómenos identificados que ocurren en la espuma; en el cual se asume la separación selectiva y cinética de primer orden para ajustar el drenaje. Otro intento de modelar la fase de espuma fue realizado por Goodall y O'Connor (1990) en el cual se asume un reactor de flujo pistón con recirculación. Además, en el modelo se asigna un tiempo de residencia promedio a los sólidos en la espuma, en el cual se descubre que el tiempo de residencia está relacionado linealmente con la ley del concentrado producido. En el modelo también se observa que la coalescencia de burbujas aumenta con la altura de la fase de espuma. Todas estas contribuciones han ayudado a comprender e identificar los procesos y complejidades asociadas a las contribuciones en el estudio de la fase de espuma. Sin embargo, en todos estos estudios, el rendimiento de la zona de espuma (recuperación de la zona de espuma,  $R_f$ ) nunca se estima ni modela explícitamente. Además, la aplicabilidad de los modelos de espuma mencionados anteriormente está limitada a las condiciones en las que fueron desarrollados dichos modelos.

## **2.2. La naturaleza del problema: Los métodos y modelos matemáticos**

### **2.2.1. Modelos cinéticos basados en pulpa**

La mayoría de los modelos cinéticos propuestos se basan en la formación clásica de agregados burbuja-partícula mediante la intercepción de una partícula suspendida por la burbuja ascendente.

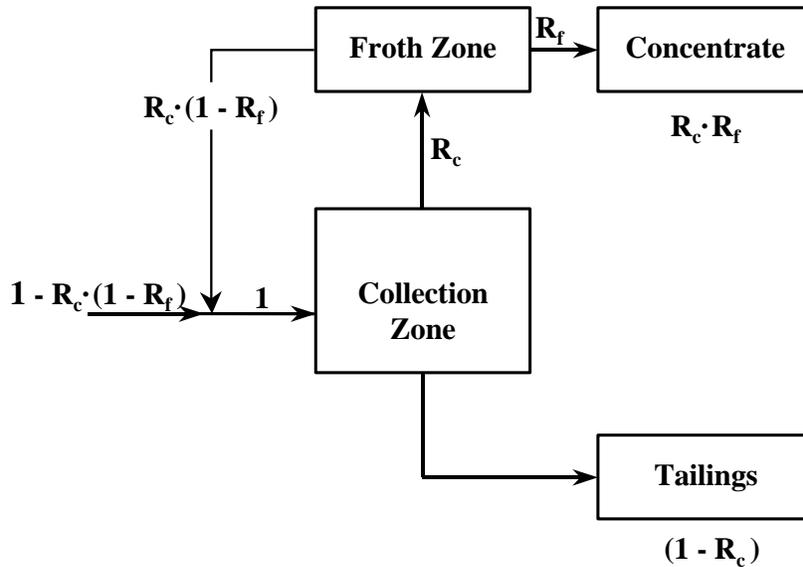
Para un proceso de primer orden, la velocidad de remoción de partículas sólidas de la especie  $i$  en una prueba de laboratorio tipo semi-batch (o semi-discontinua) se da por:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = -k_i * C_i(t)$$

**Ecuación 2:** Cinética de remoción de partículas sólidas de una especie  $i$

### **2.2.2. Transferencia de masa entre las dos zonas de flotación: Introducción del rol de la fase de espuma**

La transferencia de masa entre la zona de pulpa y la zona de espuma en una celda de flotación se muestra de manera diagramática en la Figura 2.



**Figura 2:** Los efectos de recirculación interna que resultan de la interacción de la zona de espuma y la zona de recolección en la flotación (según Wilson y Stratton-Crawley, 1991).

La recuperación global  $R$  debida únicamente a la flotación verdadera se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$R = \frac{R_c * R_f}{R_c * R_f + 1 - R_c}$$

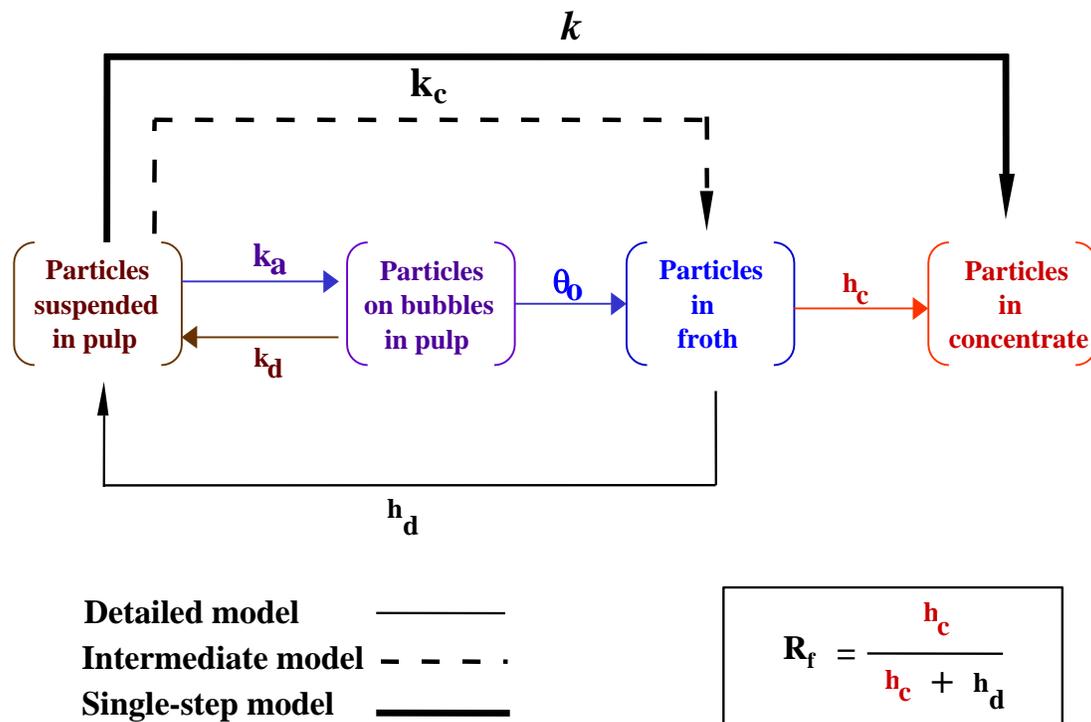
**Ecuación 3:** Recuperación total en una celda de flotación en función de las recuperaciones de las zonas de colección y de espuma.

Donde  $R$ ,  $R_f$  y  $R_c$  representan la recuperación global, la recuperación de la zona de espuma y la recuperación de la zona de recolección, respectivamente, considerando solo las partículas recolectadas a través la flotación verdadera (Dobby, 1984).

$R_c$  es una función de la constante de velocidad de la zona de colección  $K_c$ , el tiempo promedio de retención  $\tau_c$  y el grado de mezcla. La fracción de los sólidos que ingresan a la zona de espuma adheridos a las burbujas y que regresan de la espuma a la pulpa se le conoce como "drop-back", mientras que la recuperación de la zona de espuma ( $R_f$ ) es su complemento, que se define como la recuperación de las partículas del concentrado que ingresan a la zona de espuma desde la zona de colección adheridas a burbujas (Dobby, 1984).  $R_f$  también puede considerarse como la eficiencia de rendimiento de la zona de espuma, que se puede definir de manera independiente de cualquier régimen de mezcla de (Savassi et al., 1997).

Por otro lado, Kapur y Mehrotra (1991) desarrollaron un modelo donde la constante de velocidad se puede interpretar como un parámetro cinético agregado en un modelo de flotación multifásico bastante detallado. El tratamiento matemático incorpora explícitamente índices de estabilidad de la fase de burbujas y la fase de espuma. Esta descripción fenomenológica del proceso de flotación incluye, desde un punto de vista cinético, todos los pasos macroscópicos involucrados en la transferencia de material desde la pulpa a través de la espuma hasta el concentrado.

La Figura 3 muestra la estructura de la constante de velocidad de flotación. Este modelo multifásico se puede exponer en 3 niveles de sofisticación:



**Figura 3:** Modelos de cinética de flotación regidos por una jerarquía de tres niveles (Kapur y Mehrotra, 1991).

A continuación, se describen los 3 modelos de Kapur y Mehrotra (1991):

En primer lugar se encuentra el modelo detallado en el cual  $k_a$  es la tasa específica de adhesión de partículas de una especie mineral dada a burbujas de aire en la pulpa,  $k_d$  es la tasa específica de desprendimiento de partículas de las burbujas de regreso a la suspensión,  $\theta_0$  es la tasa específica de transferencia de la pulpa a la interfaz pulpa-espuma,  $h_d$  es la tasa específica de drenaje de partículas de la espuma de regreso a la pulpa, y  $h_c$  es la tasa específica de transferencia de partículas de la espuma al lavado de concentrado.

El segundo modelo es el modelo intermedio que comprende tres vías cinéticas, a saber, el transporte de sólidos de la pulpa a la espuma con una constante de tasa específica  $k_c$ , y (como antes) el drenaje de partículas de la espuma a la pulpa ( $h_d$ ) y la transferencia de la espuma al concentrado ( $h_c$ ).

$R_f$  también puede considerarse como la eficiencia de rendimiento de la zona de espuma, que puede definirse independientemente de cualquier régimen de mezcla.

En adición a lo anterior y tomando un punto de vista fenomenológico, la recuperación de la zona de espuma también se puede definir en términos de tasas de transferencia (espuma  $\rightarrow$  concentrado,  $h_c$ , y espuma  $\rightarrow$  pulpa,  $h_d$ , Figura 3), como se describe en la Ecuación 4.

$$R_f = \frac{h_c}{h_c + h_d}$$

**Ecuación 4:** Recuperación en la zona espuma en función de las tasas de transferencia (Kapur y Mehrotra, 1991)

Finalmente, el tercer modelo corresponde a un modelo de un solo paso que incorpora todas las vías cinéticas intermedias paralelas, secuenciales y reversas en una única constante aparente de tasa de flotación,  $k$ .

El modelo reconoce claramente que en un proceso de flotación existen dos zonas distintas: una pulpa y una espuma. Sin embargo, esta última aún no se tiene en cuenta. No obstante, se puede observar que los modelos basados en la espuma no incluyen el tiempo de manera independiente del régimen de mezcla. Este problema se ha abordado por separado.

La recuperación de la zona de espuma también se puede definir en términos cinéticos de acuerdo con los regímenes de agitación predominantes en la celda de flotación. Si el sistema de flotación está perfectamente mezclado, es decir, la recuperación de minerales se puede expresar como una función del tiempo medio de residencia ( $\tau$ ) de las partículas de la siguiente manera:

$$R = \frac{k\tau}{1 + k\tau}$$

**Ecuación 5:** Recuperación total de una celda en función de términos cinéticos

Entonces, asumiendo que la contribución del arrastre de ganga es despreciable, la recuperación de la zona de espuma ( $R_f$ ) es una función de la constante de tasa global ( $k$ ) y la constante de tasa de la zona de recolección ( $k_c$ ) (Ecuación 6):

$$R_f = \frac{k}{k_c}$$

**Ecuación 6:** Recuperación en la zona espuma en función de términos cinéticos

Por otro lado, si el sistema de flotación se describe mejor como un reactor de flujo pistón, y su recuperación como una función del tiempo de residencia ( $\tau$ ), se tiene la siguiente ecuación (Ecuación 7):

$$R = 1 - e^{-k*\tau}$$

**Ecuación 7:** Recuperación en una celda de flotación cuyo sistema se describe como un flujo pistón (Finch y Dobby, 1990)

Luego,  $R_f$  puede expresarse como una función de la constante de tasa global ( $k$ ), la constante de tasa de la zona de recolección ( $k_c$ ) y el tiempo de residencia ( $\tau$ ), como se muestra en la Ecuación 8 (Finch y Dobby, 1990):

$$R_f = \frac{e^{k*\tau} - 1}{e^{k_c*\tau} - 1}$$

**Ecuación 8:** Recuperación en la zona de espuma en una celda de flotación cuyo sistema se describe como un flujo pistón, en función de variables cinéticas (Finch y Dobby, 1990)

Esto debiese ser el valor de  $R_f$  en una operación de flotación semidiscontinua (semi-batch) en un laboratorio (tomando régimen de agitación de un flujo pistón).

Desafortunadamente, la determinación práctica de  $R_f$  ha resultado difícil. En la interfaz pulpa-espuma (zona de colección), el transporte de partículas ocurre en ambas direcciones, de manera dinámica. Gran parte del retorno de la espuma a la pulpa ocurre en los primeros centímetros de la zona de espuma, donde se produce una rápida desaceleración de la burbuja y la coalescencia inicial de burbujas (Falutsu y Dobby, 1989b; 1992). Se han realizado varios estudios de flotación en columnas para estimar la contribución de la espuma al rendimiento general de la flotación, ya que en una celda de flotación columnar es más fácil identificar las zonas de flotación que en una celda de flotación mecánica. Las técnicas para la estimación de la recuperación de la zona de espuma han incluido el cálculo hacia atrás de  $R_f$  a partir de mediciones de recuperación global a diferentes profundidades de espuma (Wilson y Stratton-Crawley, 1991); la solución de  $R_f$  que satisface las recuperaciones globales medidas de la operación en contracorriente y en el mismo sentido de corriente de la columna, nombrando a este último como cocorriente (Contini et al., 1988; Vera et al., 1998); y aislando físicamente la fase de espuma de la zona de recolección (Falutsu y Dobby, 1989b). Más recientemente, Savassi et al. (1997) desarrollan un método para la estimación directa de la recuperación de la espuma de partículas adheridas en celdas de flotación mecánicas de escala industrial, pero el método se limita solo a celdas de flotación rougher. Un método global para determinar  $R_f$  en todos los tipos de celdas mecánicas y de columna no se ha desarrollado aún.

### 2.2.3. Técnicas de medición de $R_f$

Se han completado varios estudios (Feteris et al., 1987; Contini et al., 1988; Falutsu y Dobby, 1989b; Yu y Finch, 1990; Savassi et al., 1997) con el objetivo de determinar la recuperación de la zona de espuma. En la actualidad, no existe un sensor que pueda proporcionar directamente una medición de la recuperación de la espuma al cambiar alguna propiedad física o química. Usando este enfoque, se puede afirmar que no existe una medición directa de la recuperación de la espuma y, en cualquier caso, se deben realizar uno o más cálculos para inferir el valor de  $R_f$ . Se han desarrollado medidas indirectas (Tabla 3).

Las diferentes técnicas de medición se pueden clasificar en tres grupos generales. En primer lugar, están las técnicas desarrolladas en columnas de laboratorio, en gran parte debido a la fácil identificación de las zonas de flotación. En segundo lugar, está la técnica mecánica desarrollada en laboratorio, lo cual se basa en la variación de la profundidad de la espuma, que generalmente se varía como consecuencia de la disminución del volumen de pulpa. Y, en tercer lugar, está la técnica de medición directa basada en la estimación de los flujos de masa justo debajo de la interfaz pulpa-espuma y en el concentrado. Esta última técnica se puede utilizar tanto en columnas como en situaciones a escala industrial con maquinaria mecánica.

Si bien los grupos establecidos son 3, el más utilizado actualmente en la industria actual es el tercer grupo, esto viene del modelo de Savassi (1998) en donde establece un modelo de recuperación en la espuma, el cual da pie a los modelos venideros, que se usa hasta el día de hoy en softwares de flotación como el JKSimFloat® dadas todas las variaciones que permite el modelo, esto último implica que hay mayor cantidad de errores, y, además, le permite modelar una mayor cantidad de escenarios. El modelo de Savassi (1998) viene dado por la siguiente ecuación:

$$R_f = \frac{G_{con}^{ent} * m_{con}^s * (1 - \frac{w_{con}^{ent}}{w_{con}^s})}{G_{ad} * BL * J_g * A}$$

**Ecuación 9:** Recuperación en la zona de espuma (Savassi, 1998)

En donde  $G_{con}^{ent}$  es la ley de los sólidos arrastrados en el concentrado,  $m_{con}^s$  es el flujo másico de los sólidos en el concentrado,  $w_{con}^{ent}$  es la concentración de sólidos arrastrados en el concentrado,  $w_{con}^s$  es la concentración de sólidos en el concentrado,  $G_{ad}$  es la ley de las partículas adheridas,  $BL$  es la carga de las burbujas,  $J_g$  es la velocidad superficial de gas y  $A$  es el área transversal de la celda a la altura de la interfaz de las zonas de colección y espuma.

Si bien el modelo de Savassi (1998) es el más utilizado en la industria, para este trabajo se consideran y utilizan otros 2 modelos que se originan a partir del modelo de Savassi (1998), los cuales son más simples de calcular y no requieren el uso de ciertos equipos que se enuncian más adelante en este trabajo.

El primer modelo por utilizar en este trabajo es el “Bubble Load Technique” de Seaman (2006), el cual necesita medir las siguientes variables:

- i. Velocidad superficial del gas ( $J_g$ ).
- ii. Área transversal de la celda de flotación. ( $A$ )
- iii. Evaluar el rendimiento metalúrgico a una profundidad de espuma constante y en un estado hidrodinámico constante de la pulpa.

En adición a lo anterior, Seaman (2006) considera los siguientes supuestos para su modelo:

- i. La velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) medida es equivalente en toda la superficie transversal de la celda de flotación. En otras palabras, el  $J_g$  local es representativo de lo que ocurre en toda la superficie de la celda.
- ii. No se hace ninguna suposición sobre la mezcla.

Considerando los supuestos planteados, Seaman (2006) plantea la siguiente ecuación para la recuperación en la zona de espuma:

$$R_f = \frac{m_{tot}^c * G}{J_g * A * (BL)}$$

**Ecuación 10:** Recuperación en la zona de espuma (Seaman, 2006)

En donde  $J_g$  es la velocidad superficial local del gas,  $A$  es el área transversal de la celda,  $(BL)$  es la medición local de la carga de burbujas,  $m_{tot}^c$  es el flujo de masa total en el concentrado y  $G$  es la ley de la muestra.

Por otro lado, el segundo modelo por utilizar en este trabajo corresponde a la metodología “Mass Balance Technique” (Alexander et al., 2003), en la cual se usan balances de masa para evaluar el numerador y el denominador de la recuperación en la zona de espuma. Dichos cálculos se basan principalmente en medidas directas enunciadas a continuación:

- i. Medir la velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) y la retención de aire ( $\epsilon_g$ ) en varias ubicaciones en la celda.
- ii. Tomar muestras de la alimentación, el concentrado, el relave, la retención de aire y la parte superior de la espuma utilizando equipos de muestreo apropiados.
- iii. Medir el peso de la pulpa, el peso de los sólidos y el porcentaje de sólidos, y analizar todas las muestras (por tamaño si es necesario).
- iv. Realizar un balance de masa en toda la celda y su error asociado.
- v. Realizar un balance de masa sobre el flujo de concentrado y su error correspondiente.

- vi. Realizar un balance de masa sobre la retención de aire y su error asociado.
- vii. Calcular el flujo de partículas adheridas que entran y salen de la espuma (la relación entre ellas se define como la recuperación de la espuma).

Y en lo que respecta a los supuestos utilizados, estos son:

- i. La ley de las partículas adheridas es equivalente a la ley de las partículas de la parte superior de la espuma.
- ii. La ley de las partículas arrastradas es equivalente a la ley de las colas.

Usando todo lo anterior, Alexander et al. (2003) plantean la siguiente ecuación para la recuperación en la zona de espuma:

$$R_f = \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}$$

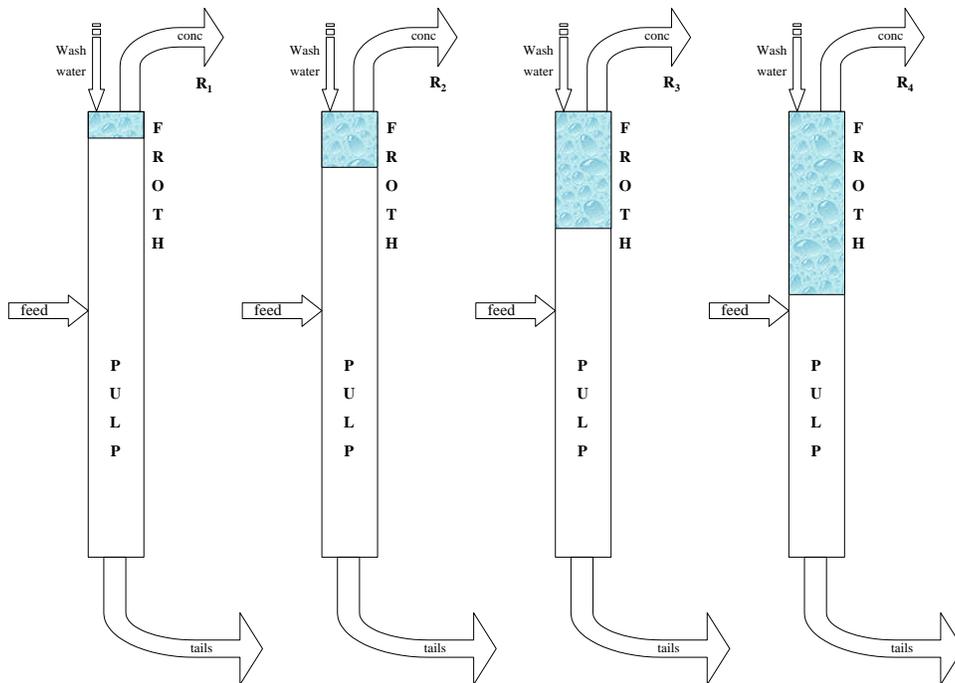
**Ecuación 11:** Recuperación en la zona de espuma (Alexander et al., 2003)

En donde el término  $m_{tot}^{con}$  es el flujo másico de partículas en el concentrado,  $G_{tot}^{con}$  es la ley del concentrado,  $G_{ent}^{con}$  es la ley de las partículas arrastradas en el concentrado,  $V$  es el volumen de aire,  $G_{ad}^{pulp}$  es la ley de las partículas adheridas en la pulpa,  $G_{ent}^{pulp}$  es la ley de las partículas arrastradas en la pulpa,  $G_{ad}^{con}$  es la ley partículas adheridas en el concentrado,  $A$  es el área abierta de la celda,  $J_g$  es la velocidad superficial de gas,  $m_{tot}^{pulp}$  es el flujo másico de partículas en la pulpa y  $G_{tot}^{pulp}$  es la ley en la pulpa.

#### **2.2.4. Procedimientos de flotación en columna de laboratorio**

##### *2.2.4.1. Variación de la Profundidad de la Espuma mediante el Cambio del Nivel de Pulpa*

Yu y Finch (1990) desarrollaron una técnica de flotación en columna de laboratorio para estimar la recuperación de la zona de espuma. El procedimiento consiste en medir la recuperación global de la flotación en columna a diferentes profundidades de espuma (es decir, variando el nivel de pulpa) utilizando una alta velocidad de flujo de agua de lavado para reducir el arrastre. La recuperación de la zona de colección se calcula extrapolando una profundidad de espuma que tiende a cero, como se muestra en la Figura 4.



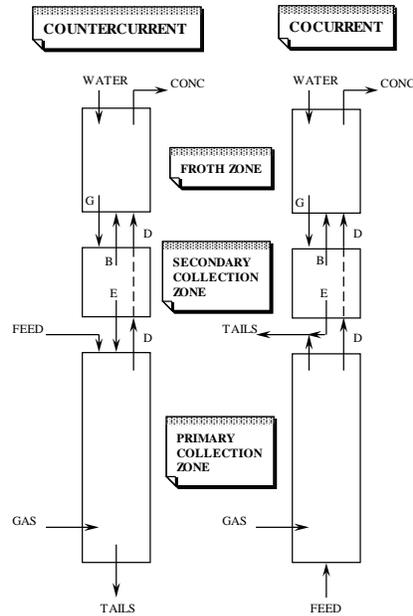
**Figura 4: Medición de la recuperación global de la columna (celda de flotación de laboratorio) a diferentes niveles de pulpa.  $R_1 > R_2 > R_3 > R_4$  (según Yu y Finch, 1990).**

Aunque este procedimiento fue uno de los primeros utilizados para estimar la recuperación de la zona de espuma ( $R_f$ ) y ha contribuido en gran medida a la comprensión de la fase de espuma, tiene la limitación de variar la profundidad de la espuma mediante el cambio del volumen de pulpa. La variación del volumen de la fase de pulpa tiene un efecto directo en la cinética del proceso, lo que afecta al rendimiento general de la flotación (Vera et al., 1998).

#### 2.2.4.2. *Aislamiento de la Fase de Espuma de la Fase de Pulpa*

Falutsu y Dobby (1989a) midieron la recuperación de la zona de espuma en una columna de flotación de laboratorio modificada (ver Figura 5). El aparato experimental aislaba la fase de espuma de manera similar a un tubo de Hallimond, de modo que el drop-back de la espuma podía medirse. Esto permitió la medición directa tanto de la recuperación en la zona de recolección como del drop-back de la espuma.





**Figura 6: Esquema de flujos de masa en una columna para el flujo en contracorriente y el flujo en cocorriente (según Contini et al., 1988).**

- i. la zona de colección primaria, desde el puerto superior de alimentación/colas hasta el difusor de gas,
- ii. la zona de colección secundaria, desde el puerto superior de alimentación/colas hasta la interfaz lodo-espuma, y
- iii. la zona de espuma.

La diferencia crítica entre los dos modos de operación es que las partículas que caen de la espuma en el modo de contracorriente se pierden inmediatamente en las colas, mientras que en el modo de cocorriente las partículas están sujetas a una posible recopilación.

Las ecuaciones de balance de masa en cada una de las tres zonas proporcionan expresiones para las recuperaciones totales de ambos modos de operación en función de las recuperaciones individuales de cada zona. La recuperación total en la operación de contracorriente en función de las recuperaciones de cada zona individual es:

$$R_{\text{Contracorriente}} = \frac{R_{C(\text{Contracorriente})} * R_f}{1 - (1 - R_f)(R_{C(\text{Contracorriente})} - R_{C(\text{Contracorriente})} * R_{S(\text{Contracorriente})} + R_{S(\text{Contracorriente})})}$$

**Ecuación 12:** Recuperación total en una celda de flotación operando a contracorriente (Contini et al., 1988)

Donde  $R_{C(\text{Contracorriente})}$  es la recuperación de la zona de recolección primaria, y  $R_{S(\text{Contracorriente})}$  es la recuperación de la zona de colección secundaria en una operación a contracorriente. De manera similar, la recuperación general en una operación en cocorriente puede expresarse de la siguiente manera:

$$R_{Cocorriente} = \frac{R_{C(Cocorriente)} * R_f}{1 - (1 - R_f)R_{S(Cocorriente)}}$$

**Ecuación 13:** Recuperación total en una celda de flotación operando a cocorriente (Contini et al., 1988)

Donde  $R_{C(Cocorriente)}$  es la recuperación de la zona de recolección primaria, y  $R_{S(Cocorriente)}$  es la recuperación de la zona de recolección secundaria en una operación en cocorriente.

Contini et al. (1988) establecieron que la retención de gas en el flujo en cocorriente es ligeramente menor que en el flujo en contracorriente. En términos de colisión partícula-burbuja, esta es la única diferencia entre los dos modos de operación. El rendimiento de la espuma se espera que sea similar tanto en la operación en contracorriente como en la operación en cocorriente, siempre y cuando:

- i. El contenido de sólidos de la espuma sea el mismo para ambos modos (estabilidad de la espuma), y
- ii. No ocurra una sobrecarga de la espuma.

Si se cumplen las condiciones (i) y (ii), entonces se cumple:

$$R_{f(Contracorriente)} = R_{f(Cocorriente)}$$

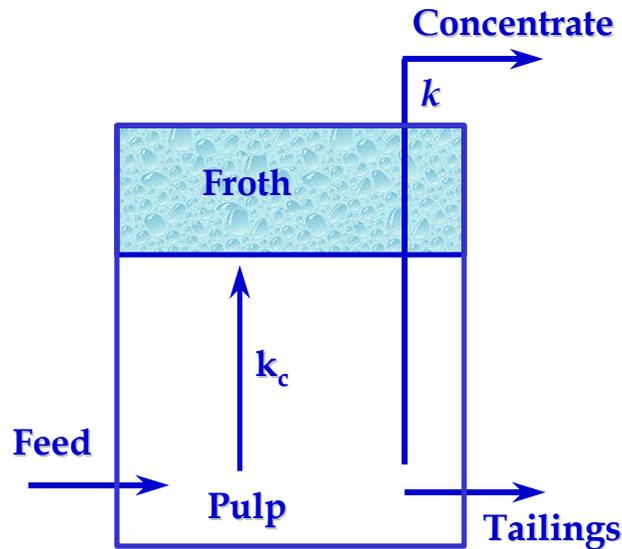
**Ecuación 14:** Igualdad de recuperaciones bajo las condiciones establecidas por Contini et al. (1988)

Estos supuestos permiten determinar la constante de velocidad cinética y la recuperación de la espuma a partir de experimentos en contracorriente y en cocorriente. Por último, es importante mencionar que hay dos suposiciones subyacentes asociadas con la metodología de Contini et al. (1988): (1) los eventos en la pulpa solo determinan la recuperación de la zona de pulpa, y (2) los eventos en la espuma solo determinan la recuperación de la zona de espuma. Estas suposiciones permiten estimar el rendimiento individual de cada zona de flotación.

### 2.2.5. Procedimientos de flotación mecánica en laboratorio

La Figura 7 muestra una versión simplificada del modelo de flotación de dos fases representado en la Figura 3. Las zonas de pulpa y espuma se muestran claramente.

La recolección de muestras a diferentes profundidades de la espuma proporciona el procedimiento para la determinación simultánea de  $R_f$  y  $k_c$ , según la metodología descrita por Feteris et al. (1987). Cabe destacar que la metodología descrita por Yu y Finch (1990) se basa en un enfoque similar.



**Figura 7:** Descripción del modelo de dos fases de la flotación (según Feteris et al., 1987).

La recuperación en la espuma se calcula a partir de la Ecuación 15 Ecuación 1:

$$R_f = \left\{ 1 - \frac{(FD)}{(FD)_{k=0}} \right\}$$

**Ecuación 15:** Recuperación en la fase de espuma (Feteris et al., 1987)

Donde  $FD$  es la profundidad en la espuma.

Al igual que con el método de Contini et al. (1988), hay dos suposiciones importantes involucradas en esta metodología: (1) que la transferencia de partículas desde la pulpa a la interfaz pulpa-espuma depende solo de los eventos que ocurren en la pulpa, y (2) que la transferencia de partículas desde la espuma al concentrado depende solo de los eventos que ocurren en la zona de la espuma.

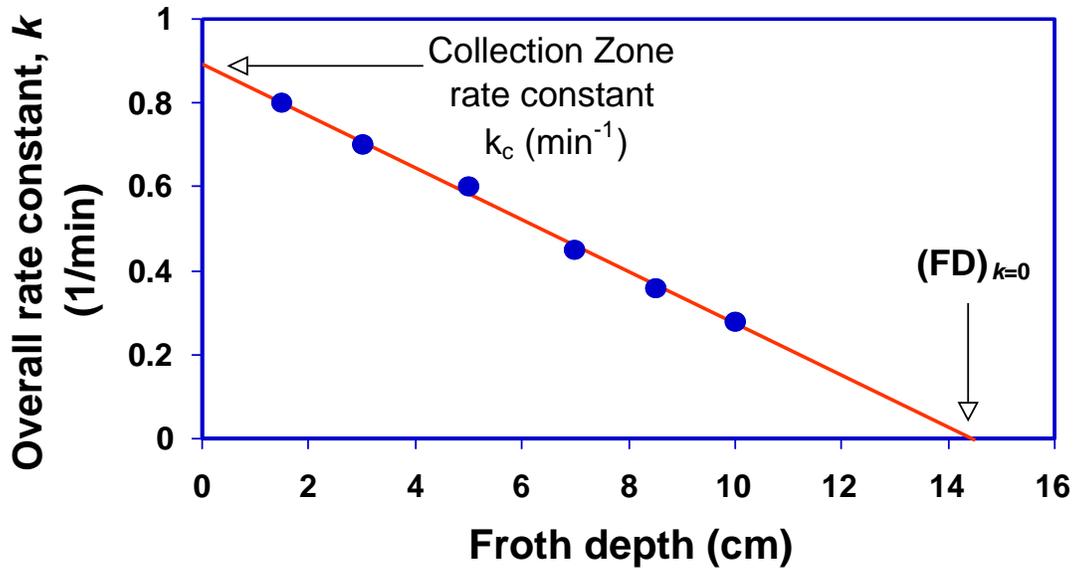


Figura 8: La constante de velocidad de la zona de flotación ( $k$ ) en función de la profundidad de la espuma ( $FD$ ).  $R_f$  en cada punto de datos se calcula según la Ecuación 15.

### 2.2.6. Procedimiento de flotación industrial

Se ha desarrollado un procedimiento para la estimación directa de la recuperación de la zona de espuma de partículas adheridas en celdas industriales por Savassi et al. (1997).

Este procedimiento requiere el uso de dispositivos especiales:

- 1) Una sonda de velocidad superficial del gas ( $J_g$ ) (Savassi et al., 1997) para medir la velocidad de flujo lineal vertical hacia arriba del aire en la pulpa (ver Figura 9). El tubo transparente  $T$  se llena con agua y se sumerge en la fase de pulpa de una celda de flotación. Luego se abre la válvula de pinza ( $P$ ), y  $J_g$  se mide como la tasa de desplazamiento del menisco aire-agua entre las dos marcas  $m1$  y  $m2$ .

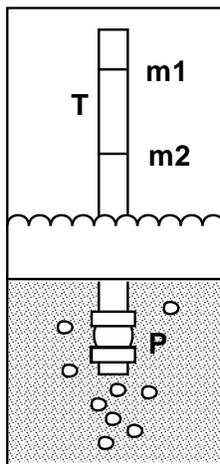


Figura 9: Esquema de la sonda de velocidad superficial de gas ( $J_g$ ) (Savassi et al., 1997).

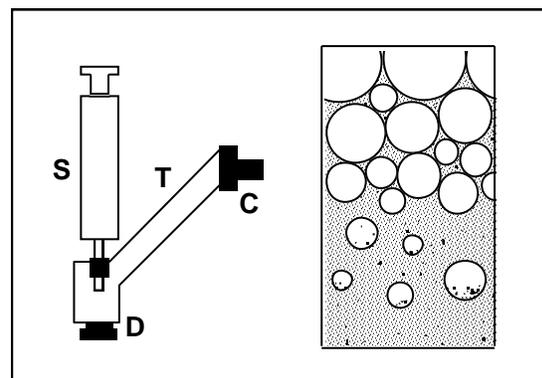
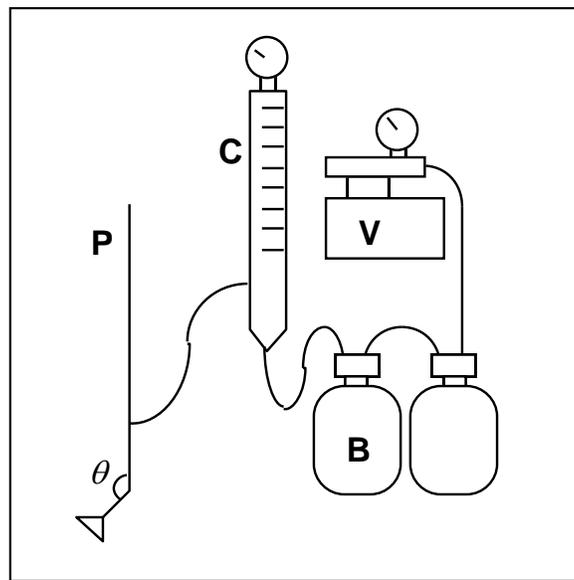


Figura 10: Esquema del analizador de arrastre (Savassi et al., 1997).

- 2) Analizador de arrastre, el cual consiste en una jeringa especialmente diseñada (S) conectada a un tubo inclinado (T) y un cilindro de aire comprimido (C), como se muestra en la Figura 10 (Savassi et al., 1997). Al tirar lentamente de la jeringa, es posible separar, a través del tubo inclinado, las partículas suspendidas en la pulpa de aquellas adheridas a las burbujas de aire. El método se basa en la suposición de que la ley en las partículas arrastradas en el concentrado es similar al de las partículas suspendidas justo debajo de la interfaz pulpa-espuma.
- 3) Analizador de carga de burbujas, que consta de una sonda de muestreo, un cilindro graduado para medir la retención de aire y una bomba de vacío que genera un vacío moderado (Savassi et al., 1997). La Figura 11 muestra el diseño general.



**Figura 11: Esquema del analizador de carga de burbujas (de Savassi et al., 1997).**

El principio de funcionamiento de este dispositivo (Figura 11) se basa en un sistema de toma de muestra en forma de embudo, que permite la obtención de muestras de la pulpa ubicada inmediatamente debajo de la interfaz pulpa/espuma de dos maneras diferentes (es decir, con el embudo en dos ángulos diferentes). Luego, la carga de burbujas en la pulpa puede ser calculada resolviendo las ecuaciones de conservación de masa.

El procedimiento para la estimación directa de  $R_f$  consta de los siguientes pasos (Savassi et al., 1997):

- Determinación del área de la sección transversal de la celda en la base de la zona de espuma.
- Selección de tres ubicaciones en el mismo plano a través de la celda, aproximadamente a 10 cm debajo de la interfaz pulpa/espuma.
- Estimación de  $J_g$  en estas tres ubicaciones.

- Recolección de muestras utilizando el analizador de carga de burbujas (dos formas diferentes de muestreo, utilizando los embudos).
- Recolección de muestras utilizando el analizador de arrastre.
- Recolección de muestras de concentrado y medición de la tasa de flujo de concentrado.
- Resolución de las ecuaciones de conservación de masa.

El grado de arrastre  $ENT_i$  también puede ser determinado mediante el uso de un trazador de ganga no flotable liberado en el mineral, o mediante la adición de alguna especie mineral no flotante adecuada.

El procedimiento de Savassi et al. (1997) permite la estimación de la recuperación en la zona de espuma bajo condiciones de operación a escala real. Sin embargo, se debe tener en cuenta que una de las limitaciones de este enfoque es la necesidad de tener una diferencia de ley entre las muestras recolectadas con el analizador de carga de burbujas y el analizador de arrastre. El propósito de poder medir  $R_f$  bajo una diferencia de ley apropiada está relacionado con el nivel de confianza de la estimación asociada con esta técnica experimental. Por lo tanto, el uso del procedimiento de Savassi et al. (1997) está limitado solo a la flotación rougher.

### 2.2.7. Drifts en la zona de espuma

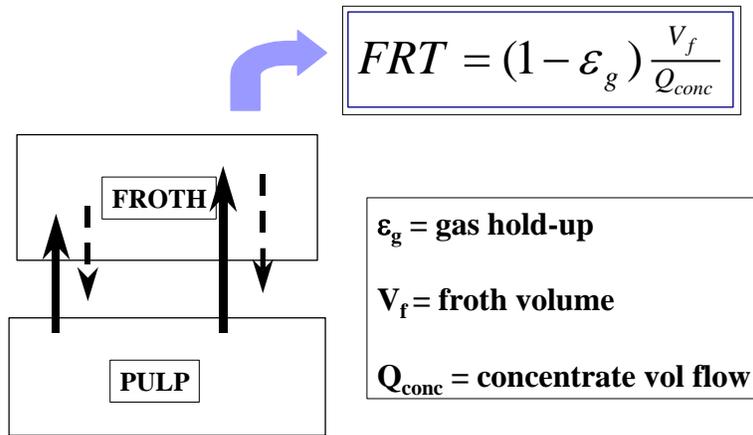
Gorain et al. (1997) han demostrado que existe una fuerte correlación entre la constante de velocidad global de flotación  $k$  y el flujo de área superficial de burbujas  $S_b$ .  $S_b$  se define como el área superficial total de burbujas que se mueven hacia arriba en una celda de flotación a través de un área de sección transversal de la celda por unidad de tiempo. La relación entre  $k$  y  $S_b$  en estudios industriales (asumiendo un régimen de mezcla perfecta) se describe actualmente de la siguiente manera (Ecuación 16):

$$k = P * S_b * R_f$$

**Ecuación 16:** Constante de velocidad global de flotación (Gorain et al., 1997)

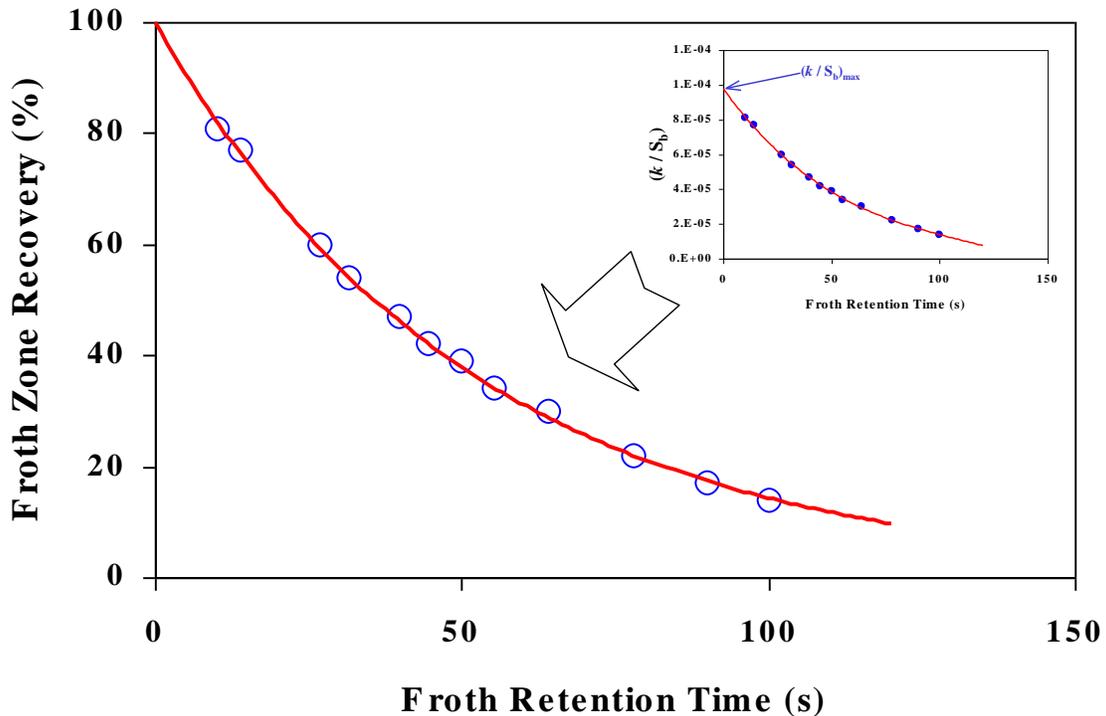
En donde  $P$  es un parámetro que representa la flotabilidad del mineral (probabilidad de captura de partículas) y  $R_f$  es la recuperación en la zona de espuma.

Estos investigadores utilizaron esta forma de ecuación cinética de describir el rendimiento de la flotación para derivar la recuperación en la zona de espuma. La metodología fue diseñada después de que Gorain et al. (1998) llevaran a cabo extensos estudios sobre el efecto del flujo de área superficial de burbujas ( $S_b$ ) en la cinética de la flotación. Estos estudios sugirieron que la relación lineal entre la constante de velocidad de flotación ( $k$ ) y  $S_b$  a veces se ve debilitada por los efectos de la profundidad de la espuma. Para tener en cuenta la variación de la profundidad de la espuma entre diferentes pruebas, se introdujo un parámetro de tiempo de retención (FRT) asociado con el volumen de la espuma ( $V_f$ ). Este parámetro se define en la Figura 12:



**Figura 12: Concepto de tiempo de retención de espuma (FRT)**

Al graficar la razón de  $k/S_b$  como función de FRT, se observó un decaimiento exponencial (ver inserción en la Figura 13). Luego, al extrapolar esta decadencia exponencial a FRT igual a cero, se encontró el valor de  $(k/S_b)_{max}$ . Este último representa el parámetro P descrito en la Ecuación 16: (cuando  $R_f = 1$  o 100%). Por lo tanto, los valores de drift- $R_f$  se obtuvieron dividiendo cada valor individual de  $k/S_b$ , que tiene un FRT > 0, por  $(k/S_b)_{max}$  (ver Figura 13).



**Figura 13: Valores de  $R_f$  en función del tiempo de retención de la espuma (FRT).**

El procedimiento de Gorain et al. (1997) parece proporcionar una estimación adecuada de la recuperación en la zona de espuma ( $R_f$ ). Sin embargo, es importante tener en cuenta que este enfoque asume que solo ocurre flotación verdadera, es decir, no se realiza una estimación del arrastre ni se utiliza agua de lavado para eliminar o minimizar la arrastre. Al mismo tiempo, la variación del volumen de espuma se logra mediante la disminución del volumen de la fase de pulpa, lo cual se cree que afecta la constante de velocidad de la zona de colección, por lo que los valores de  $R_f$  estimados con este enfoque pueden estar desplazados de los valores reales. Finalmente, se podría argumentar que el procedimiento de Gorain et al. (1997) agrupa demasiadas condiciones experimentales, lo que diluye los efectos y solo permite conclusiones muy generales.

### 3. Capítulo 3: Metodología

A continuación, se presenta el paso a paso a seguir para obtener los resultados:

1. Utilizar datos disponibles desde la industria y/o literatura asociados a flotación, con los cuales se calculan los  $R_f$  según las metodologías de Seaman y Alexander.
2. Calcular el promedio tanto de las variables asociadas a la metodología de Seaman, como de las variables afiliadas a la metodología de Alexander.
3. Calcular el  $R_f$  de cada metodología utilizando las variables promedio calculadas.
4. Realizar un análisis de sensibilidad a la Ecuación 10 y a la Ecuación 11 utilizando datos reunidos.
5. El análisis de sensibilidad se hace fijando todas las variables exceptuando una, la cual se deja como variable independiente.
6. Graficar los análisis de sensibilidad dejando fuera aquellos  $R_f$  que no tengan sentido físico, como los  $R_f$  mayores a 100% y los  $R_f$  menores a 0%
7. Calcular las varianzas de todas las variables de la metodología de Seaman.
8. Repetir el paso anterior (el 6), para las variables de la metodología de Alexander.
9. Posterior al análisis de sensibilidad, y utilizando las varianzas obtenidas, se calcula la fórmula de análisis de error para cada metodología utilizando la siguiente ecuación (Ecuación 17):

$$\sigma_{total} = \sum \sigma_i * \left(\frac{\partial X}{\partial Y_i}\right)^2$$

**Ecuación 17:** Análisis de error en función de derivadas parciales y varianzas

En donde  $\sigma_{total}$  es la varianza total, es decir, es la suma de las varianzas parciales de cada variable  $Y_i$ ;  $\sigma_i$  es la varianza de la variable  $i$ ,  $\frac{\partial X}{\partial Y_i}$  es la derivada parcial de la función  $X$  con respecto a la variable  $Y_i$ , mientras que  $(\sigma_i * \left(\frac{\partial X}{\partial Y_i}\right)^2)$  es la varianza parcial de la variable  $Y_i$ .

10. Utilizando la Ecuación 17 sobre la Ecuación 10 se obtiene la siguiente ecuación (Ecuación 18):

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} = & \sigma_{\dot{m}_{tot}} \left( \frac{G}{J_g * A * (BL)} \right)^2 + \sigma_G \left( \frac{\dot{m}_{tot}}{J_g * A * (BL)} \right)^2 + \sigma_{J_g} \left( -\frac{\dot{m}_{tot} * G}{J_g^2 * A * (BL)} \right)^2 \\ & + \sigma_A \left( -\frac{\dot{m}_{tot} * G}{J_g * A^2 * (BL)} \right)^2 + \sigma_{(BL)} \left( -\frac{\dot{m}_{tot} * G}{J_g * A * (BL)^2} \right)^2 \end{aligned}$$

**Ecuación 18:** Varianza total para la recuperación en la zona de espuma de Seaman (2006)

11. Luego, se utiliza la Ecuación 17 sobre la Ecuación 11 y se obtiene la siguiente ecuación (Ecuación 19):

$$\begin{aligned}
\sigma_{tot} = & \\
& \sigma_{m_{tot}^{con}} \left( \frac{(G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{G_{tot}^{con}} \left( \frac{m_{tot}^{con} * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{G_{ent}^{con}} \left( \frac{m_{tot}^{con} * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} * \frac{G_{tot}^{con} - G_{ad}^{con}}{(G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con})^2} \right)^2 \\
& + \sigma_V \left( \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{G_{ad}^{pulp}} \left( \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{G_{ent}^{pulp}} \left( \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp}} * \frac{G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp}}{(G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})^2} \right)^2 \\
& + \sigma_{G_{ad}^{con}} \left( - \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con})^2 * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_A \left( - \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con})^2 * A^2 * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{J_g} \left( - \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * (J_g)^2 * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{m_{tot}^{pulp}} \left( - \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * (m_{tot}^{pulp})^2 * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})} \right)^2 \\
& + \sigma_{G_{tot}^{pulp}} \left( - \frac{m_{tot}^{con} * (G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}) * V * (G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{3.6 * (G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}) * A * J_g * 1000 * m_{tot}^{pulp} * (G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})^2} \right)^2
\end{aligned}$$

**Ecuación 19:** Varianza total para la recuperación en la zona de espuma de Alexander et al. (2003)

12. Calcular la varianza parcial de cada variable de cada metodología utilizando la Ecuación 18 y la Ecuación 19.
13. Calcular la varianza acumulada y la total (esta última corresponde a la suma total de las varianzas parciales de todas las variables) de cada variable para ambas metodologías utilizando la Ecuación 18 y la Ecuación 19.

14. Calcular el error parcial asociado a cada variable, tanto para la metodología de Seaman como la metodología de Alexander, mediante normalización con respecto a la varianza total.
15. Calcular los errores acumulado y total (este último corresponde a la suma total de los errores parciales de todas las variables) asociado a cada set datos para cada metodología.
16. Comparar los errores parciales de cada variable, y calcular los errores totales para cada metodología.
17. Utilizando los resultados previos se deben proponer extensiones de los modelos, creación de un modelo nuevo y/o cambios en los modelos; estos pueden ser matemáticos y/o conceptuales.

## 4. Capítulo 4: Resultados y discusión

### 4.1. Resultados Seaman

#### 4.1.1. Datos recabados y cálculo de $R_f$ de Seaman

Tabla 1:  $R_f$  de Seaman calculados y los inputs usados

Variable	Set de datos #1	Set de datos #2	Set de datos #3	Promedio
$m_{tot}$ [g/S]	360.00	300.00	230.00	296.67
G [%]	20.00	30.00	35.00	28.33
J <sub>g</sub> [cm/s]	1.50	1.20	1.00	1.23
A [cm <sup>2</sup> ]	13,000.00	10,000.00	6,000.00	9,666.67
BL [g/L]	4.10.E-02	5.00.E-02	5.50.E-02	4.87.E-02
$R_f$ (Seaman) [%]	9.01	15.00	24.39	14.49

En la

Tabla 1 están los datos utilizados para calcular tres  $R_f$  de Seaman diferentes utilizando la Ecuación 10, para 3 sets de datos diferentes; en adición a lo anterior, está el  $R_f$  de Seaman calculado utilizando el promedio de las variables. Lo  $R_f$  calculados tienen un rango de ~15%, un mínimo de ~9% y un máximo de ~24%.

#### 4.1.2. Análisis de sensibilidad para $R_f$ de Seaman

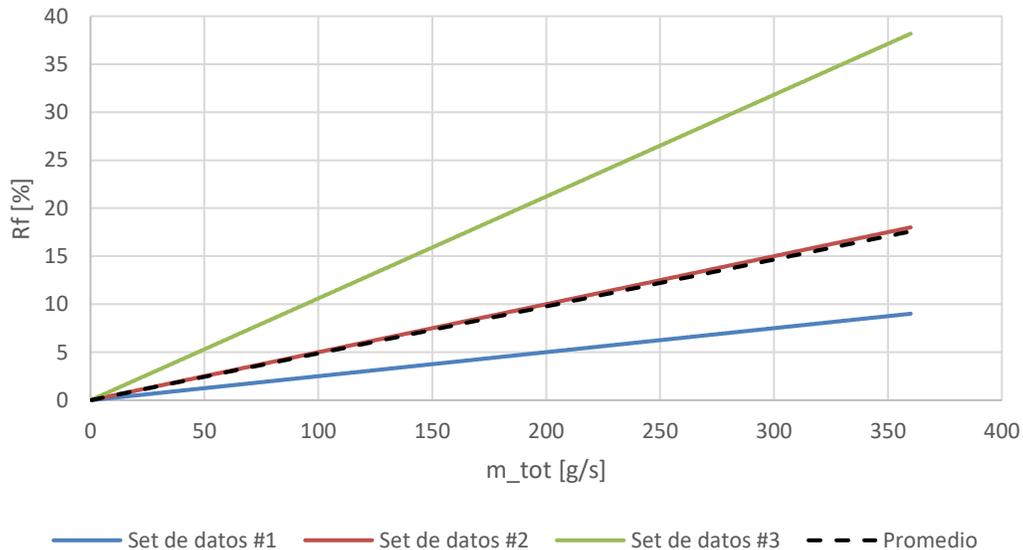
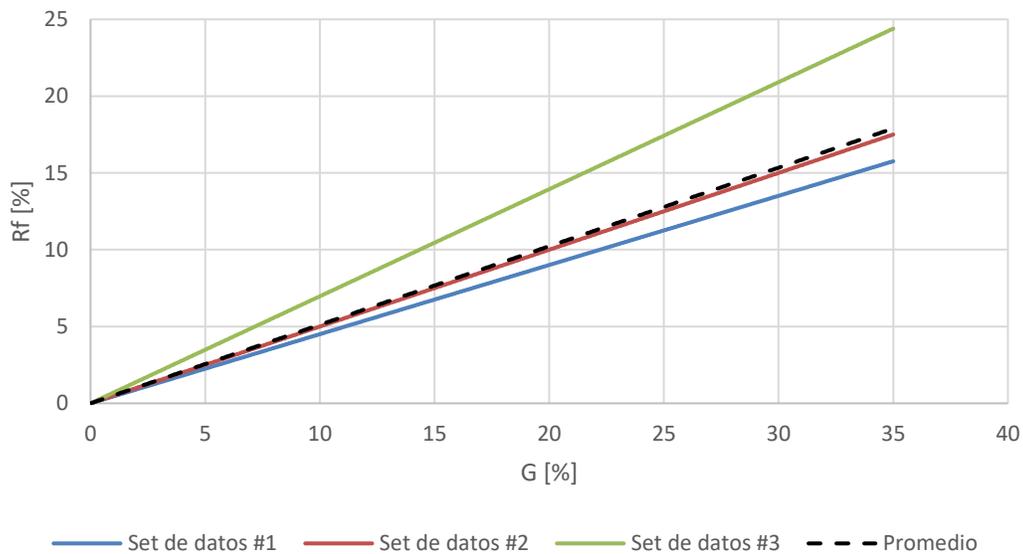


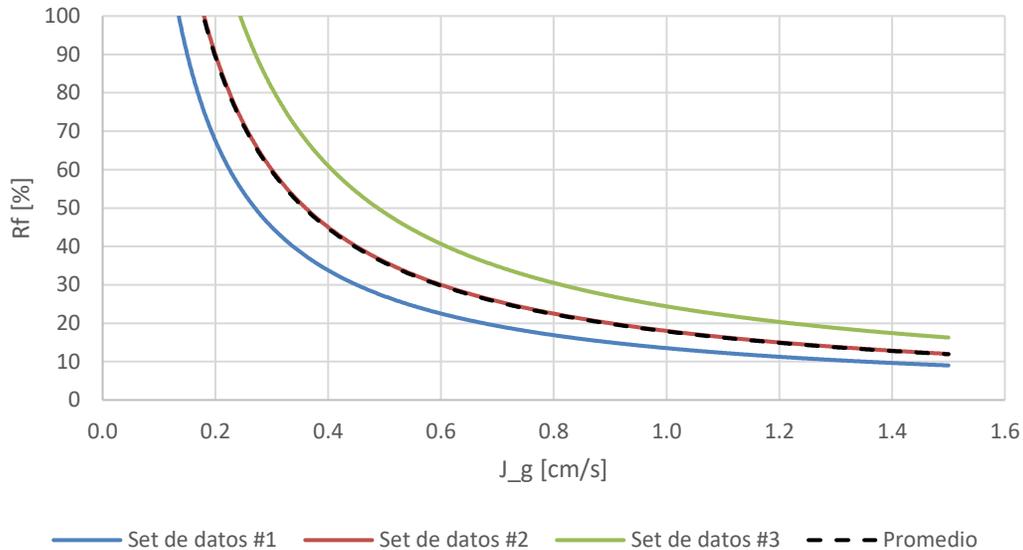
Figura 14: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Seaman en función de  $m_{tot}$ , en donde se observa una relación lineal directa entre la función y la variable analizada

La Figura 14 muestra un comportamiento lineal directo de  $R_f$  en función de  $\dot{m}_{tot}$ . En adición a lo anterior, el análisis de sensibilidad de  $\dot{m}_{tot}$  convierte la Ecuación 10 en una ecuación lineal de la forma  $R_f = \dot{m}_{tot} * C_1$ , en donde  $C_1$  es una constante que engloba las demás variables. Por otro lado, el hecho que las rectas diverjan lo suficiente unas de otras, implica que  $C_1$  influye más en el crecimiento del valor de  $R_f$  que la variable  $\dot{m}_{tot}$  misma. Por último, se debe mencionar que los máximos alcanzados para los sets de datos son ~38%, ~18%, ~18% y ~10% para los sets #3, #2, promedio y #1 respectivamente.



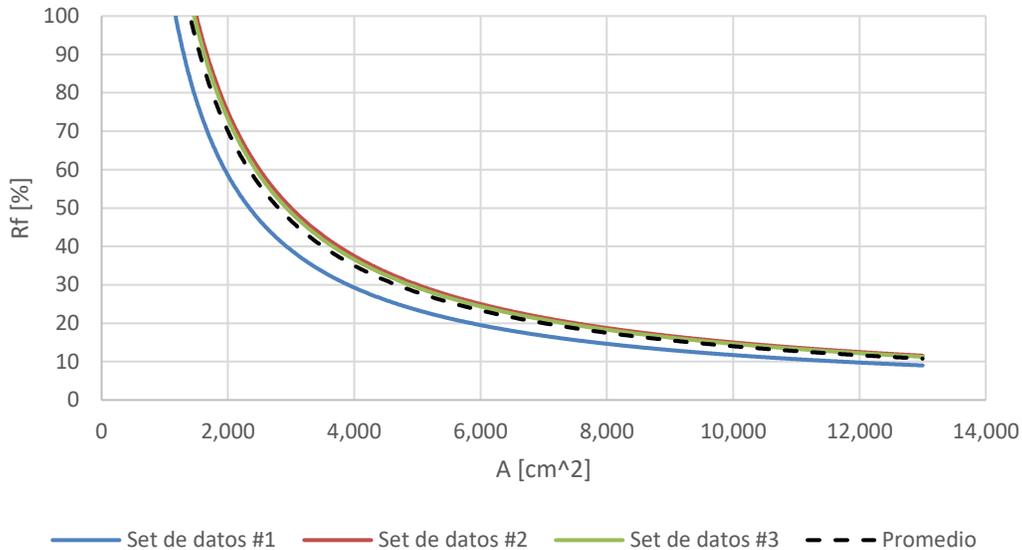
**Figura 15: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Seaman en función de  $G$ , en donde se muestra una relación lineal directa entre la función y la variable analizada**

El gráfico de la Figura 15 presenta un comportamiento lineal directo de  $R_f$  en función de  $G$ . Además, el análisis de sensibilidad de  $G$  transforma la Ecuación 10 en una ecuación lineal de la forma  $R_f = \dot{m}_{tot} * C_2$ , en donde  $C_2$  es una constante que agrupa las otras variables. En cuanto a la divergencia de las rectas, es similar a lo descrito para la variable  $\dot{m}_{tot}$ , pero, la constante  $C_2$  influye menos que  $C_1$  en el caso del análisis de sensibilidad de  $\dot{m}_{tot}$ . Finalmente, los sets #1, #2, promedio y #3 alcanzan máximos de  $R_f$  iguales a ~16%, ~18%, ~18% y ~24%, correlativamente.



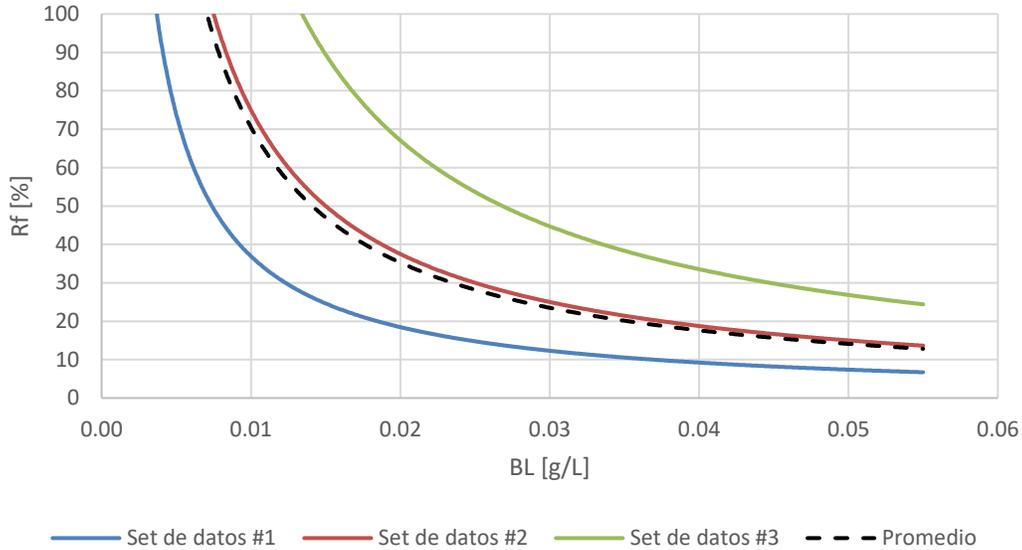
**Figura 16: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Seaman en función de  $J_g$ , en donde se ve una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

En la Figura 16 se ve el comportamiento de hipérbolas decrecientes de  $R_f$  en función de  $J_g$  para todos los sets de datos. Asimismo, el análisis de sensibilidad de  $J_g$  transforma la Ecuación 10 en una función de la forma  $R_f = C_3 * \left(\frac{1}{J_g}\right)$ , en donde  $C_3$  es una constante que agrupa las otras variables. En cuanto a la separación entre las curvas, se puede decir que  $C_3$  tienen más relevancia que  $J_g$  en el rango de  $J_g$  entre 0.2 a 1.0 [cm/s] aproximadamente, en cambio, al revisar fuera del rango de  $J_g$  mencionado,  $R_f$  tiende a valores mayores a 100% cuando  $J_g$  es menor a 0.2 [cm/s]), lo que no tiene sentido físico. Por otro lado,  $R_f$  tiene una asíntota de  $\sim 12\%$ , cuando  $J_g$  es mayor a 1.0 [cm/s].



**Figura 17: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Seaman en función de  $A$ , en donde se presenta una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

La gráfica de la Figura 17 evidencia un comportamiento de hipérbola decreciente de  $R_f$  en función de  $A$ . El análisis de sensibilidad de  $A$  también transforma la Ecuación 10 en una función de la forma  $R_f = C_4 * \left(\frac{1}{J_g}\right)$ , en donde  $C_4$  es la constante que congrega las otras variables. Estas hipérbolas no presentan un notorio espaciado entre ellas, en comparación a las curvas de la Figura 16, lo que quiere decir que  $A$  es una variable de mayor peso que las otras variables englobadas en la constante  $C_4$ . En lo que respecta a la pérdida de sentido físico de  $R_f$ , esto ocurre cuando  $A$  toma valores menores o iguales a 1,000 [cm<sup>2</sup>]. En otro punto, la asíntota de  $R_f$  en función de  $A$  para todos los sets es ~10%.



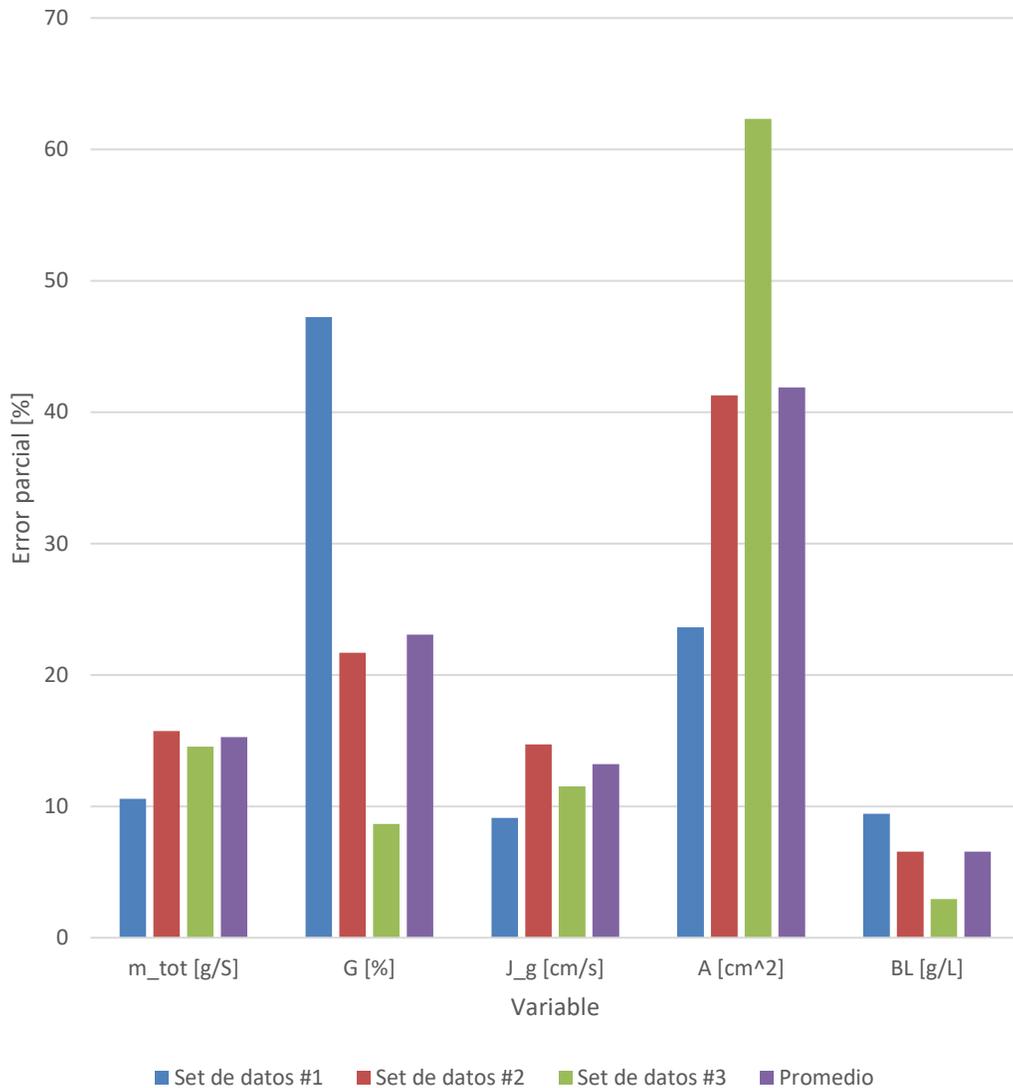
**Figura 18: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Seaman en función de  $BL$ , en donde se evidencia una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

Finalmente, en la Figura 18 está el último análisis de sensibilidad, el cual muestra un comportamiento de hipérbola decreciente de  $R_f$  en función de  $BL$ . El análisis de sensibilidad de  $BL$  cambia la Ecuación 10 a una función de la forma  $R_f = C_5 * (\frac{1}{J_g})$ , en donde  $C_5$  es la constante que reúne las otras variables dentro de sí misma. Estas hipérbolas presentan un gran espaciado entre ellas, en comparación a las hipérbolas de la Figura 16, lo que quiere decir que  $BL$  es una variable de menor peso que las otras variables agrupadas dentro de  $C_5$ . El caso en que  $R_f$  ya no tiene sentido físico al momento que  $BL$  toma valores menores o iguales a  $\sim 0.005$ ,  $\sim 0.008$ ,  $\sim 0.013$  y  $\sim 0.008$  [g/L] para los sets #1, #2, #3 y Promedio respectivamente. Pasando a otro punto, el valor de la asíntota cuando  $R_f$  está solo en función de  $BL$  es a  $\sim 6\%$ ,  $\sim 12\%$ ,  $\sim 24\%$  y  $\sim 12\%$  para los sets #1, #2 #3 y Promedio correspondientemente.

Cada análisis de sensibilidad realizado para el  $R_f$  de Seaman permite tener una primera aproximación de cuanto influye cada variable en el cálculo de  $R_f$ , pero, no son suficientes para cuantificar con precisión cuanto influye cada variable efectivamente. El análisis de error de la siguiente sección permite aclarar y/o reforzar lo ya dicho en esta sección, así como también se muestra cual variable es la más influyente (con mayor error asociado) y cuál es la menos influyente (con menor error asociado).

#### 4.1.3. Análisis de Error para $R_f$ de Seaman

Las varianzas calculadas son resultados intermedios que aún no permiten comparar entre sets de datos de la misma metodología ni entre metodologías diferentes, por lo que las varianzas obtenidas se muestran en la Figura 36 y la Figura 37 en Anexos.



**Figura 19: Errores parciales de cada variable del  $R_f$  de Seaman. En esta figura se ve que para los sets #2, #3 y promedio la variable de mayor error es A, mientras que para el set #1 es G**

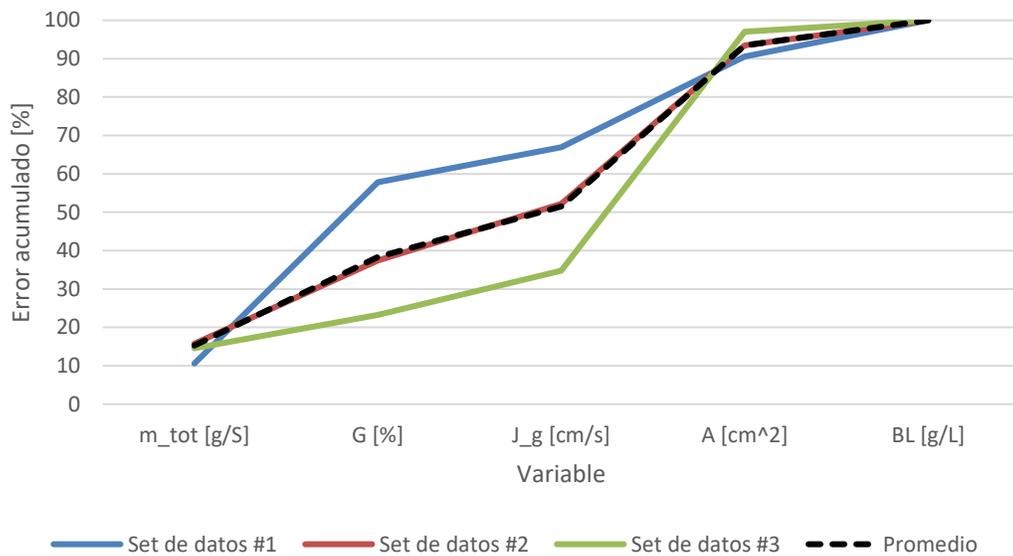
En la Figura 19 están graficados los errores de cada variable para cada set. En donde se toman los errores calculados con el promedio de cada variable para definir genéricamente que variable tiene más error, y, por ende, es la más influyente en el cálculo de  $R_f$ . Entonces, usando la serie “Promedio” en color morado, las variables y sus errores en orden ascendente son:

- 1) BL: ~7%
- 2) Jg: ~13%
- 3)  $\dot{m}_{tot}$ : ~15%
- 4) G: ~23%

5) A: ~42%

El listado previo y la Figura 19 dicen que la variable que más aporta al cálculo de  $R_f$  es A con el mayor error, de ~42%. En cambio, la variable BL es la menos influyente con un error de ~7%.

En adición a lo anterior, el set de datos #1 presenta un comportamiento diferente, en el cual su variable de mayor error es G y la de menor error es  $J_g$ . Por otro lado, los errores de las variables de los sets #2 y #3 tienen un comportamiento similar al descrito para los errores calculados con el promedio de cada variable.



**Figura 20: Error acumulado variables  $R_f$  de Seaman. Aquí se ve otra forma de representar cual variable tiene mayor error, la cual es A, por tener la mayor variación y pendiente al aumentar el error desde  $J_g$  hasta A en los sets #2, #3 y promedio, mientras que para el set #1 es G, ya que la mayor pendiente es al variar el error desde  $m_{tot}$  hasta G**

La Figura 20 es otra forma de representar los errores mostrados en la Figura 19; por lo que la Figura 20 muestra como es el error acumulado hasta llegar al 100% en cada set. En este caso, las pendientes más pronunciadas, de mayor valor positivo, representan cuanto cambia el error, por ejemplo, la pendiente entre las variables  $J_g$  y A del set #3 muestra un gran cambio en el error al pasar de  $J_g$  a A, implicando que A es la variable de mayor error para el set #3.

## 4.2. Resultados Alexander

### 4.2.1. Datos reunidos y cálculo de $R_f$ de Alexander

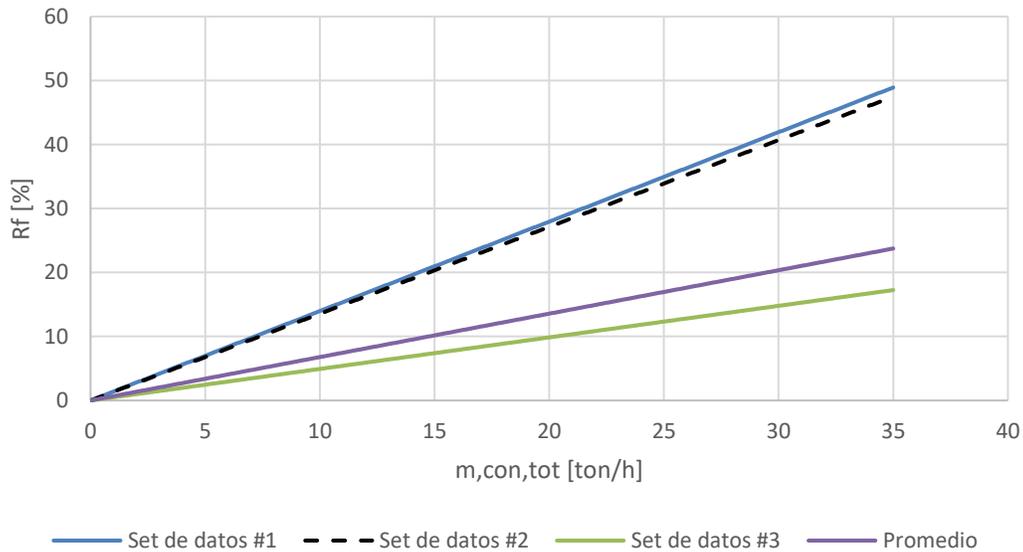
Tabla 2:  $R_f$  de Alexander calculados y los inputs usados

Variable	Set de datos #1	Set de datos #2	Set de datos #3	Promedio
m,con,tot [ton/h]	20.00	27.00	35.00	27.33
G,con,tot [%]	34.00	30.00	22.00	28.67
G,con,ent [%]	7.00	10.00	13.00	10.00
V [ml]	3.00	4.00	6.00	4.33
G,pulp,ad [%]	93.00	90.00	80.00	87.67
G,pulp,ent [%]	14.00	10.00	4.00	9.33
G,con,ad [%]	24.00	20.00	16.00	20.00
A [m <sup>2</sup> ]	0.01	0.01	0.04	0.02
J_g [cm/s]	1.00	1.40	2.00	1.47
m,pulp,tot [ton/h]	37.40	46.80	50.70	44.97
G,pulp,tot [%]	34.00	30.00	23.00	29.00
$R_f$ (Alexander) [%]	27.96	36.63	17.26	18.55

#### En la

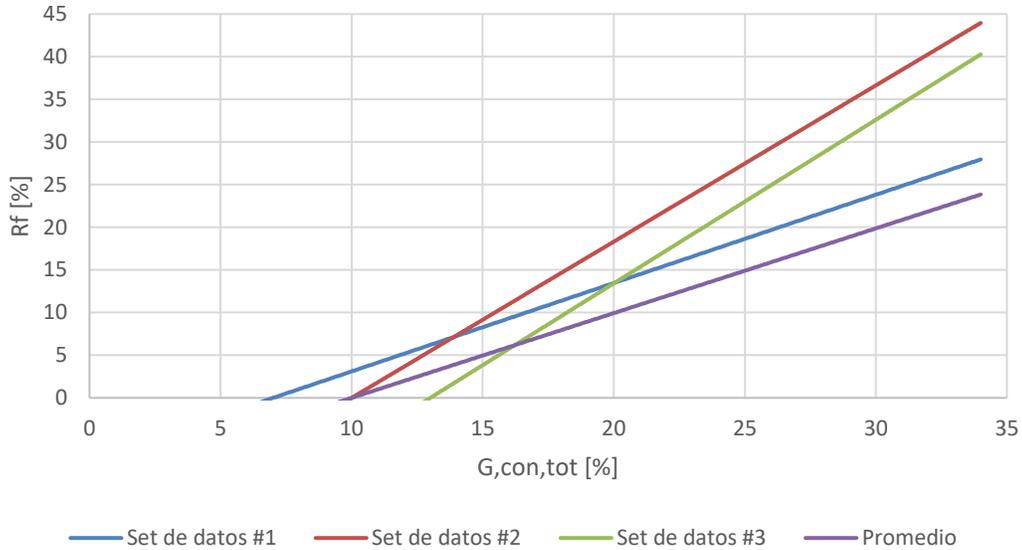
Tabla 2 están los datos utilizados en el cálculo de los  $R_f$  de Alexander para 3 sets de datos diferentes utilizando la Ecuación 11; además, está el  $R_f$  de Alexander calculado utilizando la media de cada una de las variables que componen el  $R_f$  de Alexander. Estos  $R_f$  calculados tienen un rango de ~20%, un mínimo de ~17% y un máximo de ~37%.

#### 4.2.2. Análisis de sensibilidad para $R_f$ de Alexander



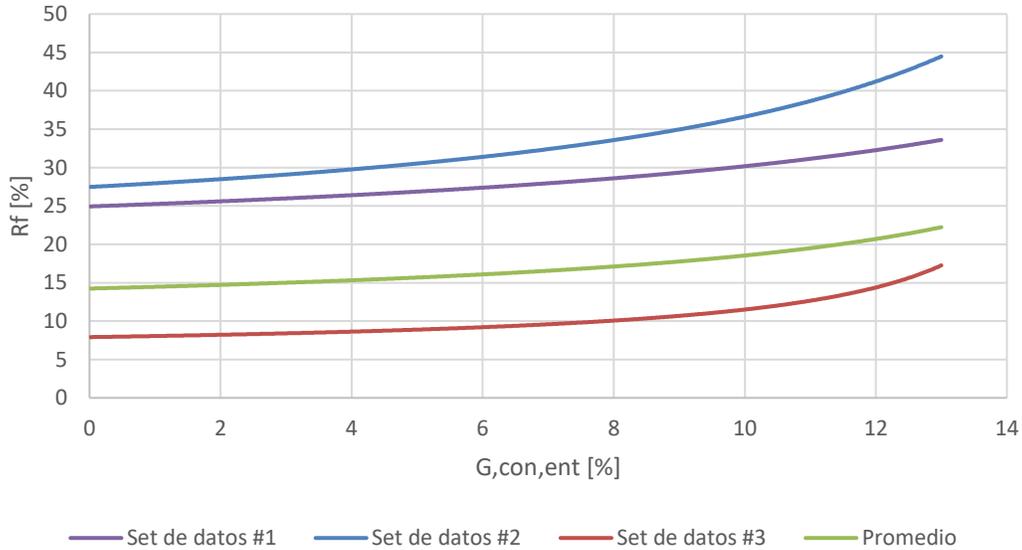
**Figura 21: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $m_{tot}^{con}$ . Se observa una relación lineal directa entre la función y la variable analizada**

En la Figura 21 se muestra un comportamiento lineal directo de  $R_f$  en función de  $m_{tot}^{con}$ . Además, el análisis de sensibilidad de  $m_{tot}^{con}$  convierte la Ecuación 11 en una ecuación lineal de la forma  $R_f = m_{tot}^{con} * C_6$ , en donde  $C_6$  es una constante que engloba las demás variables. Por otro lado, el hecho que las rectas se bifurquen apreciablemente unas de otras, implica que  $C_6$  influye más en el valor de  $R_f$  que la variable  $m_{tot}^{con}$ . Finalmente, se debe recalcar que los máximos alcanzados para los sets de datos son ~48% para el set #1, ~48% para el set #2, ~24% para el set Promedio y ~18% para el set #3.



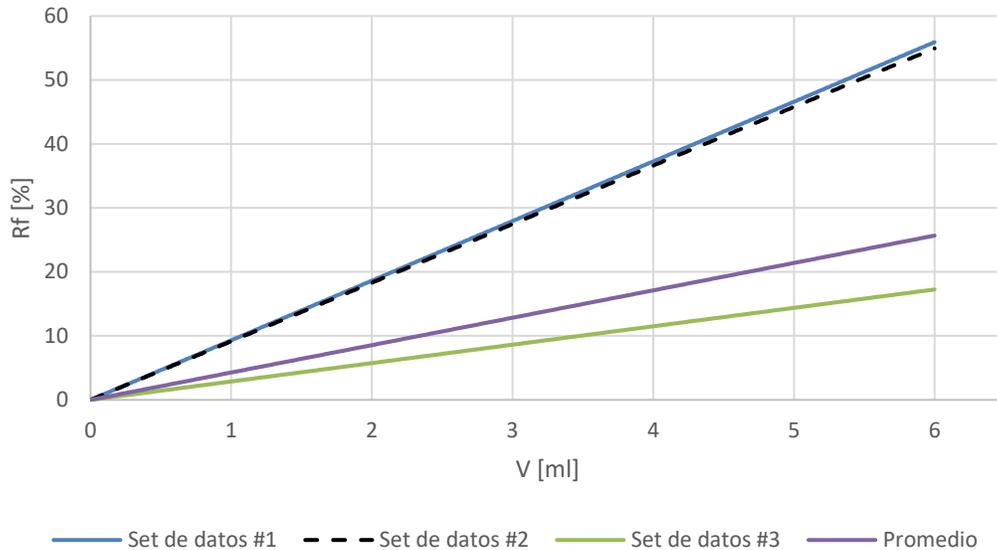
**Figura 22: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{tot}^{con}$ . Se ve una relación lineal directa entre la función y la variable analizada**

En la Figura 22 se ve un comportamiento lineal directo de  $R_f$  en función de  $G_{tot}^{con}$ . Además, el análisis de sensibilidad de  $G_{tot}^{con}$  transforma la Ecuación 11 en una ecuación lineal de la forma  $R_f = \frac{(G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con})}{(G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con})} * C_7$ , en donde  $C_7$  es una constante que agrupa las demás variables, sin considerar las variables  $G_{ent}^{con}$  y  $G_{ad}^{con}$ . En adición a lo anterior, el hecho que las rectas se aparten lo suficiente unas de otras, implica que  $C_7$ ,  $G_{ent}^{con}$  y  $G_{ad}^{con}$  influyen más en el valor de  $R_f$  que la variable  $G_{tot}^{con}$ . No olvidar que la intersección entre las rectas no tiene algún significado físico. Por último, los máximos alcanzados para cada set de datos son ~28% para el set #1, ~44% para el set #2, ~40% para el set #3 y ~24% para el set Promedio.



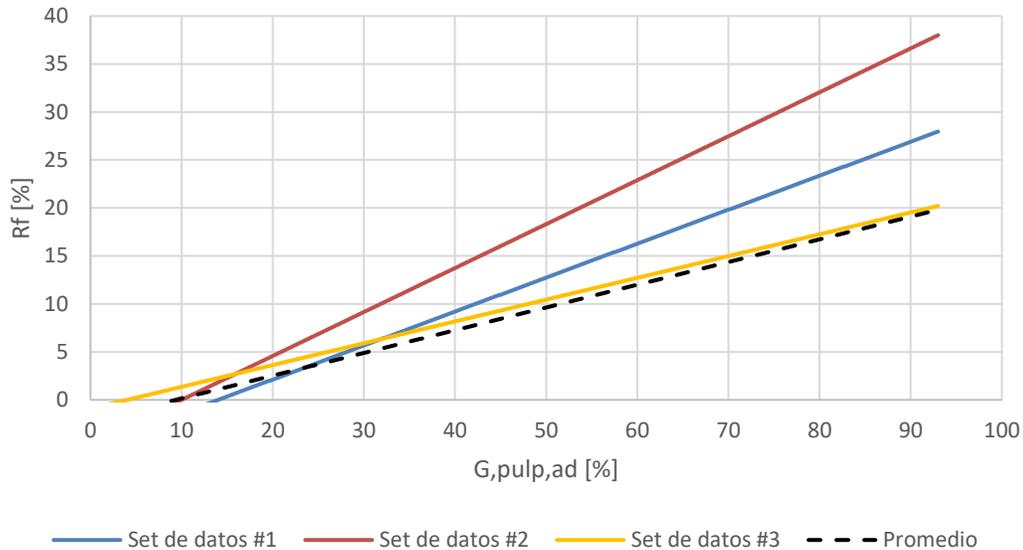
**Figura 23: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ent}^{con}$ . Se muestra una relación no lineal creciente entre la función y la variable analizada**

La Figura 23 presenta un comportamiento no lineal directo de  $R_f$  en función de  $G_{ent}^{con}$ . Adicionalmente, el análisis de sensibilidad de  $G_{ent}^{con}$  cambia la Ecuación 11 en una ecuación no lineal de la forma  $R_f = C_8 * \frac{(G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con})}{(G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con})}$ , en donde  $C_8$  es una constante que agrupa las demás variables sin considerar  $G_{tot}^{con}$  ni  $G_{ad}^{con}$ . Lo anterior tiene como consecuencia que  $R_f$  tenga una forma similar a una función exponencial. Además, las curvas están bastante separadas entre sí, y consecuentemente  $C_8$ ,  $G_{tot}^{con}$  y  $G_{ad}^{con}$  influyen más en el valor de  $R_f$  que la variable  $G_{ent}^{con}$ . Finalmente, los mayores valores  $R_f$  alcanzados para cada set de datos son ~34% para el set #1, ~45% para el set #2, ~17% para el set #3 y ~23% para el set Promedio.



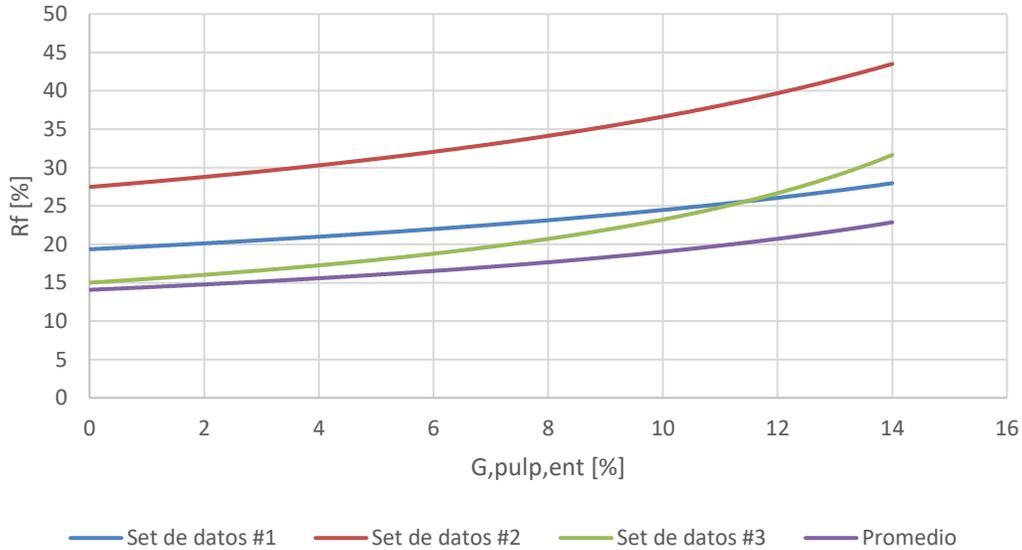
**Figura 24: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $V$ . Se presenta una relación lineal directa entre la función y la variable analizada**

En la Figura 24 se observa que  $R_f$  en función de  $V$  se parece una función lineal directa. Adicionalmente, el análisis de sensibilidad de  $V$  cambia la Ecuación 11 en una ecuación lineal de la forma  $R_f = C_9 * V$ , en donde  $C_9$  es una constante que agrupa a las otras variables. Además, las rectas tienen un espaciado notorio entre ellas, consecuentemente,  $C_9$  influye más en el valor de  $R_f$  que la variable  $V$ . Terminando el análisis de esta figura, los máximos obtenidos para  $R_f$  en cada set de datos son ~55% para el set #1, ~26% para el set #2, ~18% para el set #3 y ~55% para el set Promedio.



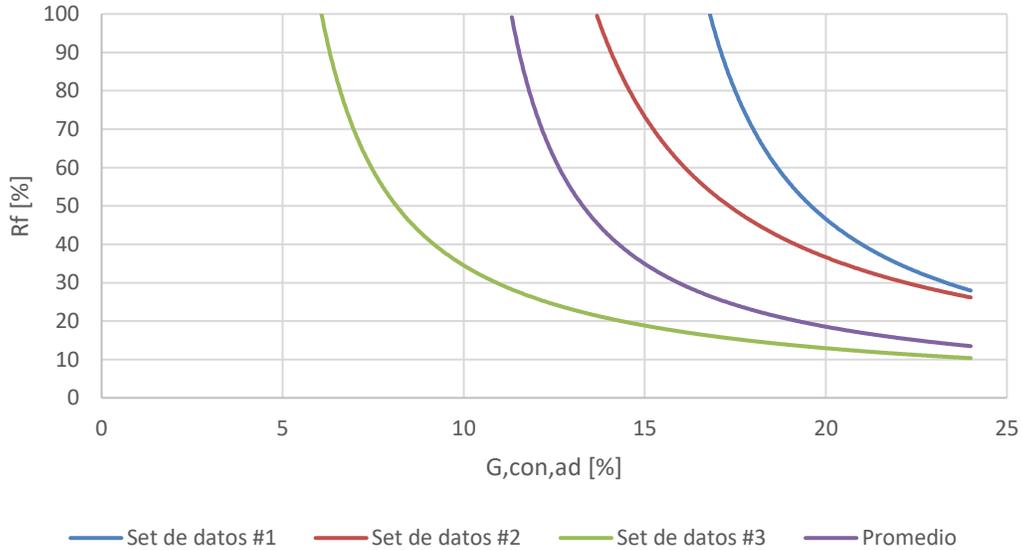
**Figura 25: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ad}^{pulp}$ . Se evidencia una relación lineal directa entre la función y la variable analizada**

El gráfico de la Figura 25 presenta un  $R_f$  en función de  $G_{ad}^{pulp}$ , en donde dicho  $R_f$  es similar a una función lineal directa. Luego, el análisis de sensibilidad de  $G_{ad}^{pulp}$  hace que la Ecuación 11 tome la forma de una ecuación lineal de la forma  $R_f = C_{10} * \frac{(G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{(G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}$ , en donde  $C_{10}$  es una constante que agrupa a las otras variables, exceptuando  $G_{ent}^{pulp}$  y  $G_{tot}^{pulp}$ . Adicionalmente, las rectas tienen harta área entre ellas, entonces,  $C_{10}$ ,  $G_{ent}^{pulp}$  y  $G_{tot}^{pulp}$  influyen más en el valor de  $R_f$  que la variable  $G_{ad}^{pulp}$ . Hay que recordar que aquí se repite el hecho de que una intersección de curvas no tiene sentido físico alguno. En último lugar, los máximos obtenidos para  $R_f$  en cada set de datos son ~38% para el set #1, ~28% para el set #2; y ~20% tanto para el set #3 como para el set Promedio.



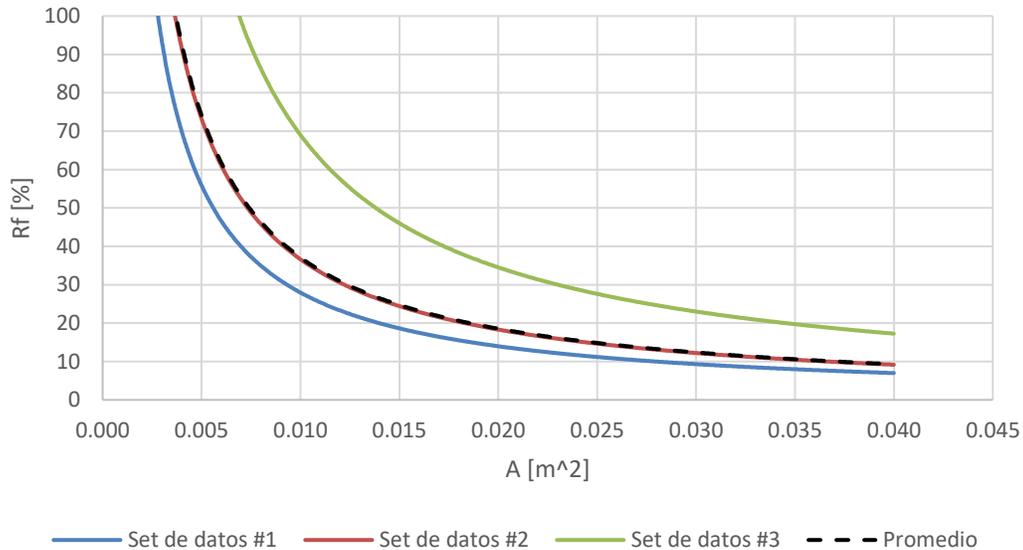
**Figura 26: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ent}^{pulp}$ . Se observa una relación no lineal creciente entre la función y la variable analizada**

La Figura 26 presenta un comportamiento no lineal directo de  $R_f$  en función de  $G_{ent}^{pulp}$ . Adicionalmente, el análisis de sensibilidad de  $G_{ent}^{con}$  cambia la Ecuación 11 en una ecuación no lineal de la forma  $R_f = C_{11} * \frac{(G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}{(G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp})}$ , en donde  $C_{11}$  es una constante que agrupa las demás variables, sin considerar la variable  $G_{tot}^{pulp}$  ni la variable  $G_{ad}^{pulp}$ . La forma descrita anteriormente implica que  $R_f$  tiene una forma similar a una función exponencial cuando solo es función de  $G_{ent}^{pulp}$ . Además, las curvas están evidentemente separadas entre sí, entonces,  $C_{11}$ ,  $G_{tot}^{pulp}$  y  $G_{ad}^{pulp}$  influyen más en el valor de  $R_f$  que la variable  $G_{ent}^{pulp}$ . Por último, los mayores valores  $R_f$  alcanzados para cada set de datos son ~28% para el set #1, ~44% para el set #2, ~32% para el set #3 y ~23% para el set Promedio.



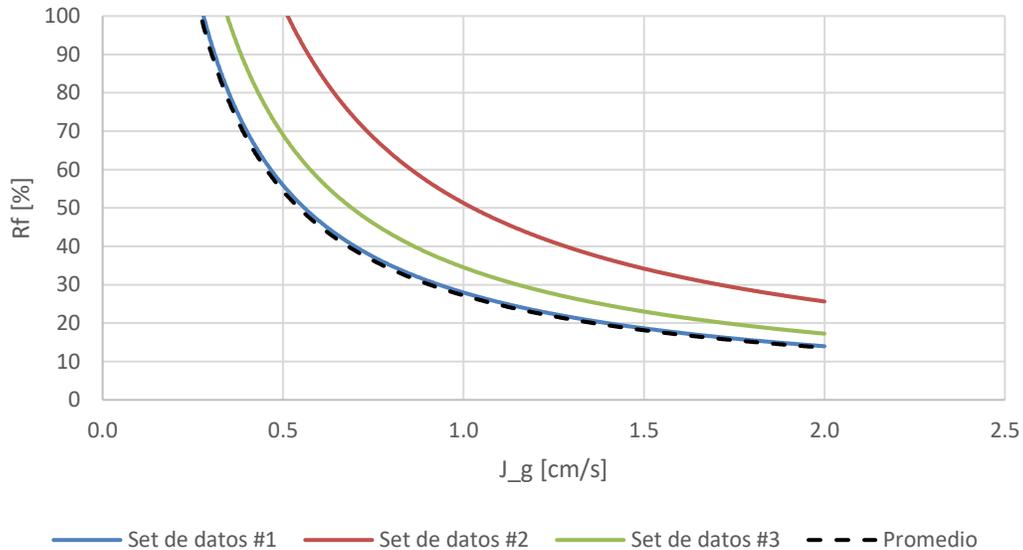
**Figura 27: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{ad}^{con}$ . Se observa un comportamiento parecido a una hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

En la Figura 27 está graficado el análisis de sensibilidad de  $R_f$  en función de  $G_{ad}^{con}$ , el cual muestra un comportamiento similar a una hipérbola decreciente de  $R_f$  en función de  $G_{ad}^{con}$ . El análisis de sensibilidad de  $G_{ad}^{con}$  cambia la Ecuación 11 a una función de la forma  $R_f = C_{12} * \left( \frac{G_{tot}^{con} - G_{ent}^{con}}{G_{ad}^{con} - G_{ent}^{con}} \right)$ , en donde  $C_{12}$  es la constante que reúne las otras variables dentro de sí misma, pero, no considera la variable  $G_{ent}^{con}$  ni la variable  $G_{tot}^{con}$ . Luego, dado el espaciado entre las hipérbolas, se puede decir que  $C_{12}$ ,  $G_{ent}^{con}$  y  $G_{tot}^{con}$  influyen más en el cálculo de  $R_f$ . Después, se tiene que  $R_f$  deja de tener sentido físico cuando el valor de  $G_{ad}^{con}$  baja de ~12% para el set #1, ~14% para el set #2, ~6% para el set #3 y ~11% para el set promedio. Por último, las asíntotas de  $R_f$  para cada set son: ~25% para los sets #1 y #2, ~10% para el set #3 y ~12% para el set promedio.



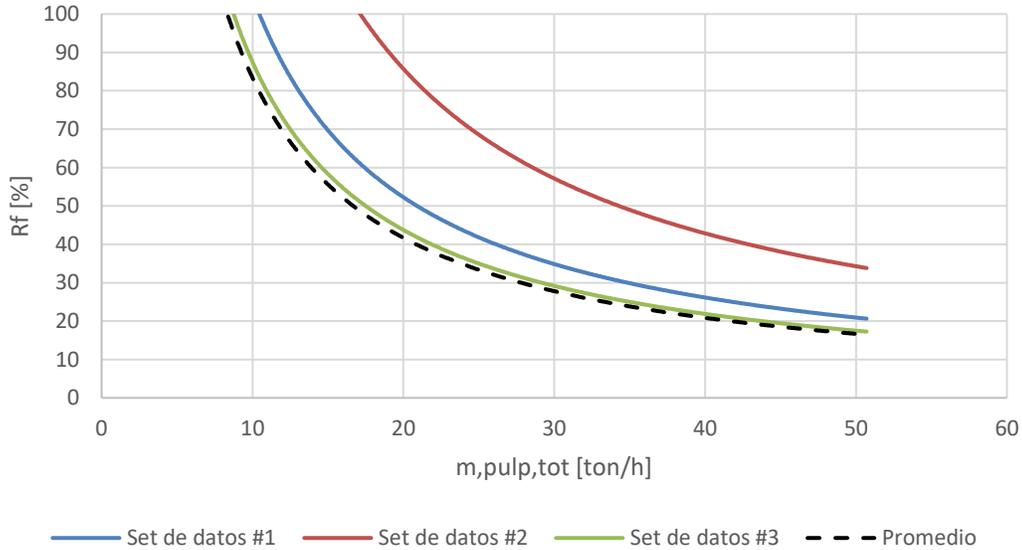
**Figura 28: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de A. Se ve una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

En el gráfico mostrado en la Figura 28 está el análisis de sensibilidad de  $R_f$  en función de A, dicho gráfico presenta un comportamiento de hipérbola decreciente para  $R_f$  en función de A. El análisis de sensibilidad de A cambia la Ecuación 11 a una función de la forma  $R_f = C_{13} * \frac{1}{A}$ , en donde  $C_{13}$  es la constante que agrupa las demás variables. Posteriormente, dado el espaciado entre las hipérbolas, se puede decir que  $C_{13}$  influye más en el valor de  $R_f$  que A. Luego, se tiene que  $R_f$  deja de tener sentido físico cuando el valor de A es menor a  $\sim 0.003 \text{ [m}^2\text{]}$  para los sets #1, #2 y Promedio, en cambio, para el set #3 A debe ser menor a  $0.006 \text{ [m}^2\text{]}$ . Finalmente, las asíntotas de  $R_f$  de los sets #1, #2 y Promedio es  $\sim 10\%$ , mientras que para el set #3 la asíntota de  $R_f$  es  $\sim 17\%$ .



**Figura 29: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $J_g$ . Se evidencia una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

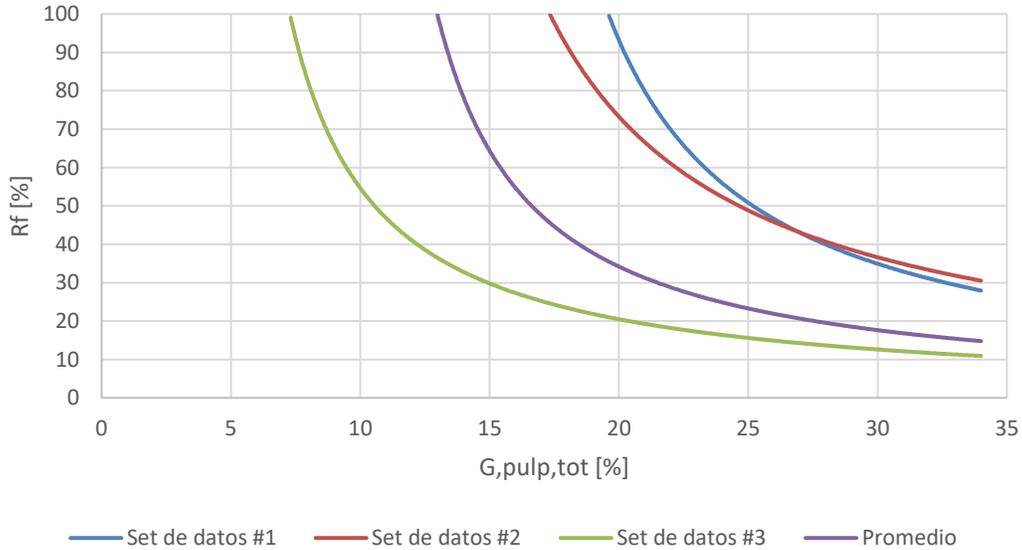
La Figura 29 presenta gráficamente el análisis de sensibilidad de  $R_f$  en función de  $J_g$ , en donde se presenta un comportamiento de hipérbola decreciente para  $R_f$  en función de  $A$ . El análisis de sensibilidad de  $A$  transforma la Ecuación 11 a una función de la forma  $R_f = C_{14} * \frac{1}{J_g}$ , en donde  $C_{14}$  es la constante que agrupa las demás variables. Posteriormente, dado el espaciado entre las hipérbolas, se puede decir que  $C_{14}$  influye más en el valor de  $R_f$  que  $A$ . En adición a lo anterior, se tiene que  $R_f$  deja de tener sentido físico cuando el valor de  $J_g$  es menor a  $\sim 0.2$  [cm/s] para los sets #1 y Promedio, menor a  $\sim 0.3$  [cm/s] para el set #3 y menor a  $\sim 0.5$  [cm/s] para el set #2. En último lugar están las asíntotas de  $R_f$ , los sets #1 y promedio tienen una asíntota de  $\sim 12\%$ , el set #2 tienen una asíntota de  $\sim 25\%$  y el set #3 tiene una asíntota de  $\sim 17\%$ .



**Figura 30: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $m_{tot}^{pulp}$ . Se presenta una relación de hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

En la Figura 30Figura 28 se observa el análisis de sensibilidad de  $R_f$  graficado en función de  $m_{tot}^{pulp}$ , en la cual vuelve a aparecer un comportamiento de hipérbola decreciente para  $R_f$  en función de A. El análisis de sensibilidad de A transforma la Ecuación 11 a una función de la forma  $R_f = C_{15} * \frac{1}{m_{tot}^{pulp}}$ , en donde  $C_{15}$  es la constante que agrupa las demás variables.

Luego, dado el espaciado entre las hipérbolas, se puede decir que  $C_{15}$  influye lo suficiente en el valor de  $R_f$  como para opacar a la variable A. Además, se tiene que  $R_f$  deja de tener sentido físico cuando el valor de  $m_{tot}^{pulp}$  es menor a  $\sim 10$  [ton/h] para el set #1, menor a  $\sim 17$  [ton/h] para el set #2 y menor a  $\sim 8$  [ton/h] para los sets #3 y Promedio. Por último, las asintotas de  $R_f$  para los sets #1, #2, #3 y Promedio son  $\sim 20$  %,  $\sim 30$  %,  $\sim 17$  % y  $\sim 17$  %, respectivamente



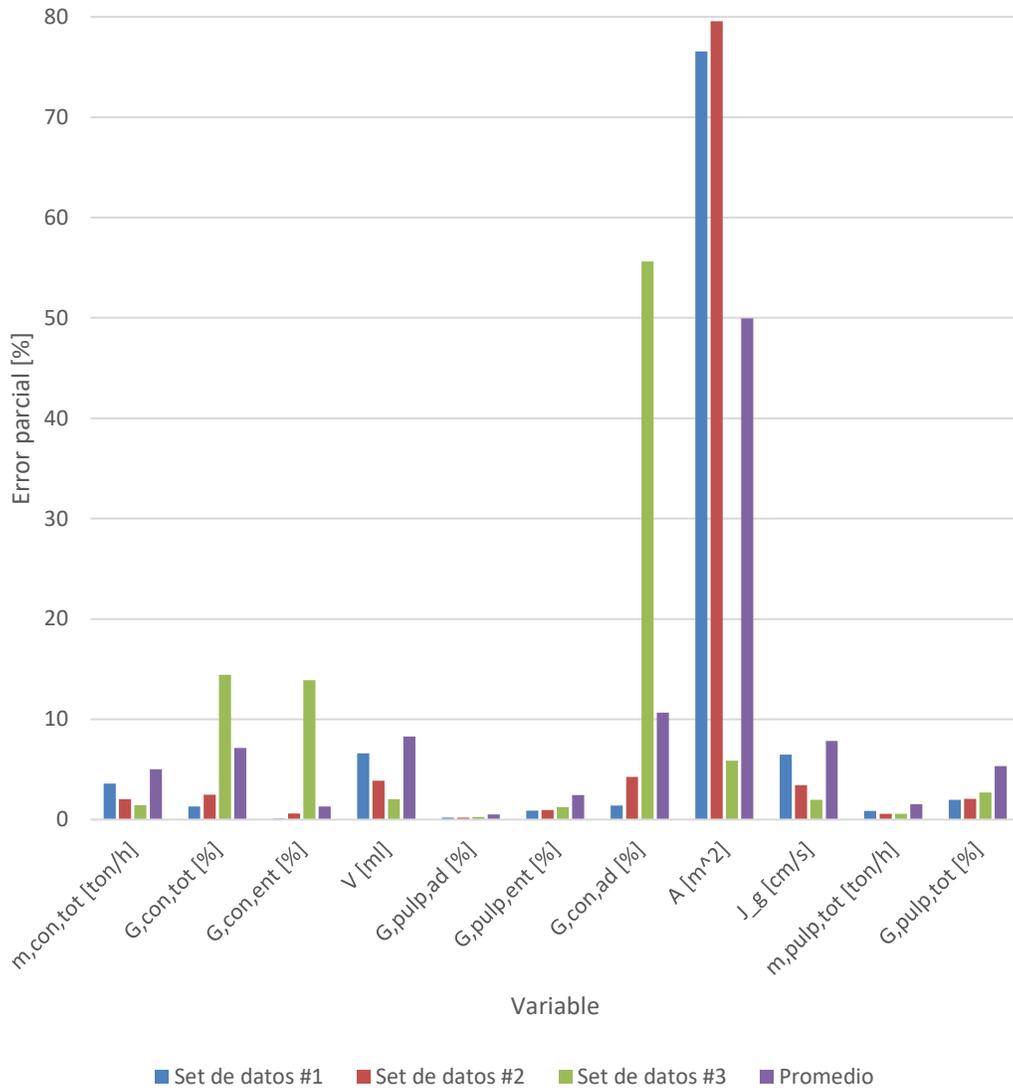
**Figura 31: Análisis de sensibilidad del  $R_f$  de Alexander en función de  $G_{tot}^{pulp}$ . Se observa un comportamiento similar a una hipérbola decreciente entre la función y la variable analizada**

En la Figura 31 se muestra el análisis de sensibilidad graficado para  $R_f$  en función de  $G_{tot}^{pulp}$ , el cual repite el comportamiento parecido a una hipérbola decreciente de  $R_f$  en función de  $G_{tot}^{pulp}$  de los casos anteriores de hipérbolas. El análisis de sensibilidad de  $G_{tot}^{pulp}$  cambia la Ecuación 11 a una función de la forma  $R_f = C_{16} * \left( \frac{G_{ad}^{pulp} - G_{ent}^{pulp}}{G_{tot}^{pulp} - G_{ent}^{pulp}} \right)$ , en donde  $C_{16}$  es la constante que casi todas las otras variables ya que las variables que no consideran son  $G_{ent}^{pulp}$  y  $G_{ad}^{pulp}$ . En lo que respecta a la separación de las curvas, se puede decir que  $C_{16}$ ,  $G_{ent}^{pulp}$  y  $G_{ad}^{pulp}$  influyen más en el cálculo de  $R_f$ . posteriormente, el sentido físico de  $R_f$  se pierde al momento en que  $G_{tot}^{pulp}$  pasa a ser menor a ~19% para el set #1, ~17% para el set #2, ~7% para el set #3 y ~13% para el set promedio. Finalmente, las asíntotas de  $R_f$  de cada set son: ~30% para los sets #1 y #2, ~10% para el set #3 y ~15% para el set promedio.

Análogo a lo ocurrido con los análisis de sensibilidad para el  $R_f$  de Seaman, los análisis de sensibilidad para el  $R_f$  de Alexander no son suficientes ni precisos para determinar cuánto aporta cada variable al cálculo de  $R_f$ . Dado lo anterior, los análisis de error de la siguiente sección permiten dilucidar esta incógnita.

### 4.2.3. Análisis de Error para $R_f$ de Alexander

Similar al análisis de error de Seaman, las varianzas calculadas son resultados intermedios que no permiten realizar comparaciones, por lo que las varianzas obtenidas para el  $R_f$  de Alexander se muestran en la Figura 38 y la Figura 39 en Anexos.



**Figura 32: Errores parciales de cada variable del  $R_f$  de Alexander. En esta figura se ve que para los sets #1, #2 y promedio la variable de mayor error es A, mientras que para el set #3 es  $G_{ad}^{con}$**

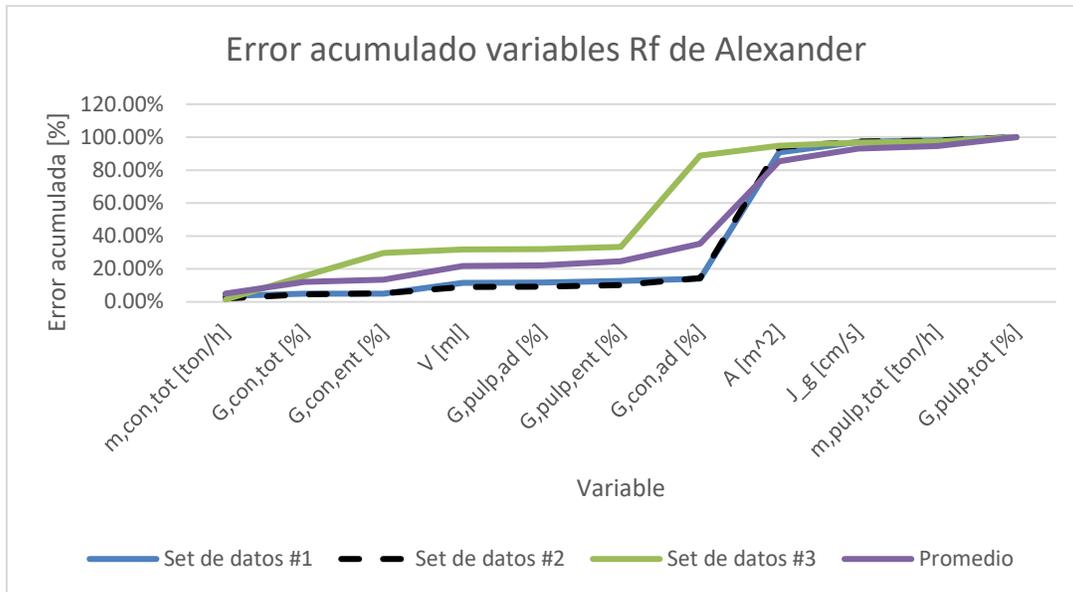
La Figura 32 presenta en forma de gráfico los errores asociados a cada variable de cada set. Análogo al análisis de error de Seaman, se usan los errores calculados con el promedio de cada variable para definir que variable tiene más error, es decir, es aquella variable que tiene mayor impacto en el valor de  $R_f$ . Entonces, usando la serie “Promedio” en color morado, las variables y sus errores en orden ascendente son:

- 1)  $G_{ad}^{pulp}$ : ~0.5%

- 2)  $G_{ent}^{con}$ : ~1%
- 3)  $m_{tot}^{pulp}$ : ~2%
- 4)  $G_{ent}^{pulp}$ : ~2.5%
- 5)  $m_{tot}^{con}$ : ~5%
- 6)  $G_{tot}^{pulp}$ : ~6%
- 7)  $G_{tot}^{con}$ : ~7%
- 8)  $J_g$ : ~8%
- 9)  $V$ : ~8%
- 10)  $G_{ad}^{con}$ : ~11%
- 11)  $A$ : ~50%:

La Figura 32 y la lista anterior muestran que la variable que más aporta al cálculo de  $R_f$  es  $A$  con el mayor error, de ~50%. En contraste, la variable  $G_{ad}^{pulp}$  es la menos influyente con un error de ~0.5%.

Por otro lado, el set de datos #3 presenta un comportamiento diferente al promedio, en el cual su variable de mayor error es  $G_{ad}^{con}$ , pero, mantiene la de menor error, la cual es  $G_{ad}^{pulp}$ . Por otro lado, los errores de las variables de los sets #1 y #2 tienen un comportamiento cercano al descrito para los errores calculados con el promedio de cada variable.

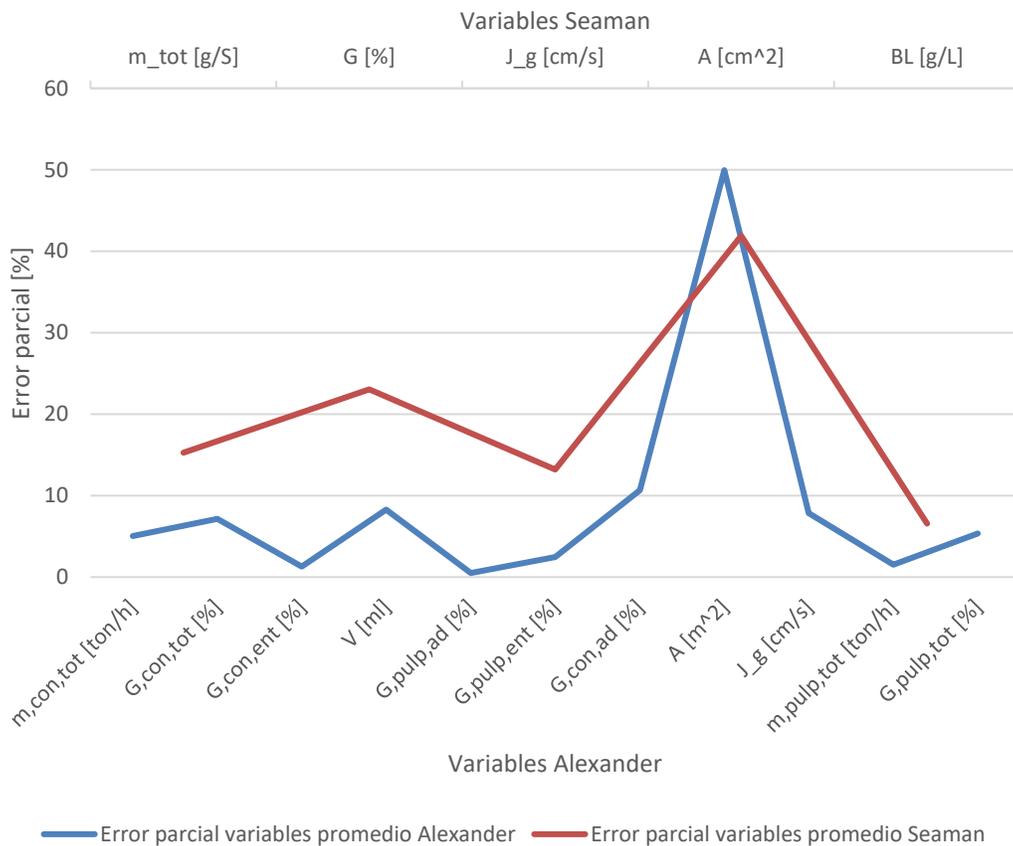


**Figura 33: Error acumulado variables  $R_f$  de Alexander. En esta figura también se observa otra forma de representar la variable con mayor error, la cual es A, por tener la mayor pendiente y variación al aumentar el error desde  $G_{ad}^{con}$  hasta A en los sets #1, #2 y promedio, mientras que para el set #1 es  $G_{ad}^{con}$ , ya que la mayor pendiente es al variar el error desde  $G_{ent}^{pulp}$  hasta  $G_{ad}^{con}$**

Al igual que la Figura 20 de Seaman, la Figura 33 es una forma diferente de mostrar los errores de la Figura 32; en donde la Figura 32 presenta como es el error acumulado hasta llegar al 100% en cada set. Se repite el caso mostrado en los resultados para Seaman, en donde las pendientes más pronunciadas representan cuanto cambia el error, por ejemplo, la pendiente entre las variables  $G_{ad}^{con}$  y A de los sets #1, #2 y Promedio muestran un gran cambio en el error al pasar de  $G_{ad}^{con}$  a A, implicando que A es la variable de mayor error para los sets mencionados.

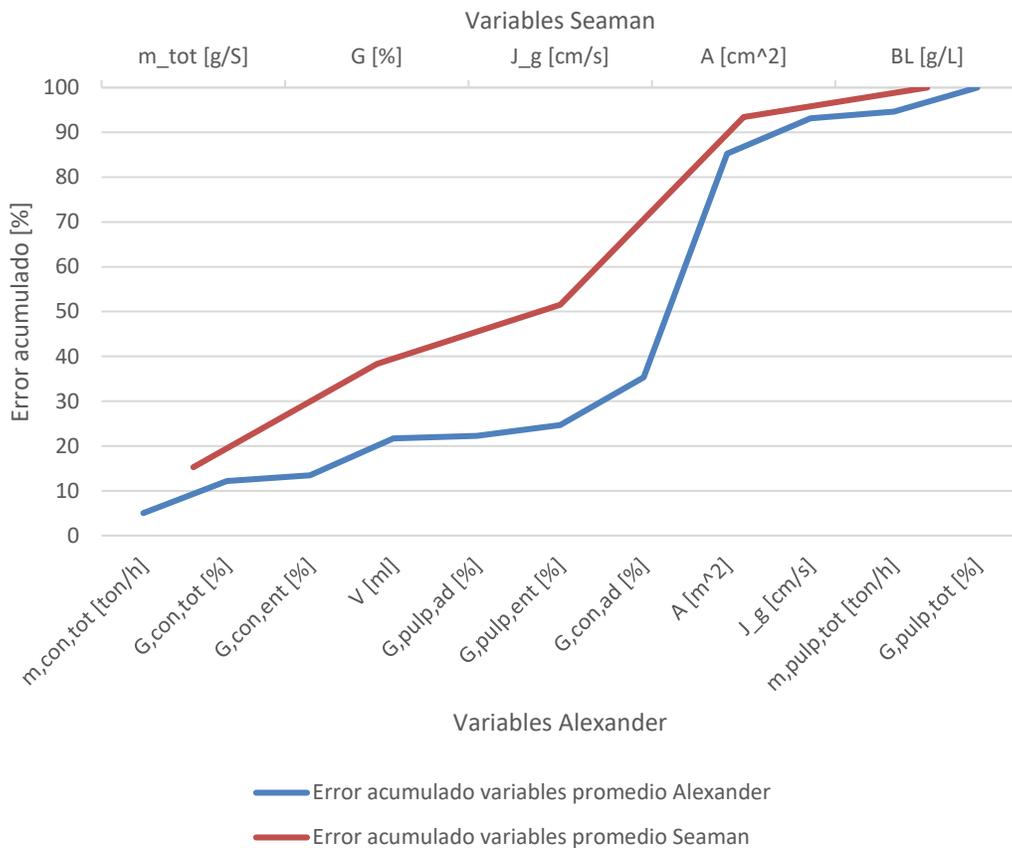
### 4.3. Comparación entre modelos de $R_f$

Si bien están los resultados que comparan las varianzas entre ambas metodologías (Figura 40 y Figura 41 en Anexos), estas metodologías no son comparables entre sí usando las varianzas, ya que estas son menos para el caso de Seaman y Alexander considera diferentes variables. Por otro lado, la Figura 41 muestra que la varianza total de Alexander es mayor que la de Seaman, pero, este resultado no sirve para decir cuanto aporta cada variable a cada metodología ni sirve para decir cual método es mejor.



**Figura 34: Comparación errores parciales de las variables promedio. Se observa que el  $R_f$  de Alexander tiene menor error por variable, en comparación al  $R_f$  de Seaman, exceptuando la variable A**

En la Figura 34 se ve como casi todas las variables de Alexander tienen menos error que las variables de Seaman, la única excepción es A de Alexander que tiene más error que cualquier variable tanto de Alexander como de Seaman.



**Figura 35: Comparación errores acumulados de las variables promedio. Se ve que el R<sub>f</sub> de Alexander tiene menor error en todas las acumulaciones de errores hasta el 100% dado que tiene un error medio por variable de ~10%, en contraste al R<sub>f</sub> Seaman que tiene un error medio por variable de ~20%**

La Figura 37 muestra el error acumulado de cada modelo de R<sub>f</sub>, en donde se observa como el R<sub>f</sub> de Alexander siempre tiene menos error que el R<sub>f</sub> de Seaman, esto se debe a que el R<sub>f</sub> de Alexander reparte el 100% del error entre 11 variables, mientras que el R<sub>f</sub> de Seaman lo reparte entre 5 variables. Tomando el caso en que todas las variables tuviesen el mismo error, las variables de Alexander tienen un error de ~9.1%, mientras que las variables de Seaman tienen un error del 20%, este caso muestra a grandes rasgos lo dicho previamente, que el R<sub>f</sub> de Alexander tiene menos error asociado a cada variable dada la mayor cantidad de variables.

Dados los resultados de esta sección, el R<sub>f</sub> de Alexander es mejor que el de Seaman, ya que tiene menos error por variable, aun así, el R<sub>f</sub> de Seaman es más fácil de aplicar dado que necesita menos parámetros, por lo que el R<sub>f</sub> de Seaman es mejor en aplicabilidad y es más cercano a la realidad, dado que sus parámetros son más fáciles de medir in-situ.

#### 4.4. Propuesta de nuevo modelo

En primer lugar, se debe redefinir  $R_f$  a un concepto más simple, entonces,  $R_f$  debe ser la recuperación del elemento de interés que logra ser flotado y llega a la fase de concentrado, considerando la cinética de química de la flotación. En términos más simples, lo anterior se refiere al material que es efectivamente recolectado y logra llegar al concentrado.

Luego, basado en la literatura, se proponen los siguientes supuestos para el modelo:

- 1) Solo el material cuyo tamaño sea menor o igual al  $P_{80}$  de la pulpa proveniente de molienda puede flotar.
- 2) Dentro del material que puede flotar, este debe poseer una liberación mayor o igual al 50% para el elemento de interés.
- 3) Solo es aplicable a celdas de flotación Rougher y Scavenger.
- 4) Mientras más pequeñas las burbujas del proceso, más arrastre hay; dado que mientras más pequeñas las burbujas hay más nodos y bordes de Plateau.
- 5) La flotación debe ser a contracorriente.

$$R_f = \frac{\dot{m}_c * G_c * V}{\dot{m}_p * G_p * (P + F) * T * A * J_b}$$

**Ecuación 20: Modelo de  $R_f$  propuesto**

En la Ecuación 20 está el modelo propuesto de  $R_f$ , en donde sus variables son:

- $\dot{m}_c$ : es el flujo masico de concentrado.
- $G_c$ : Es la ley de la especie de interés en el concentrado.
- $V$ : Es el volumen de muestra de concentrado.
- $\dot{m}_p$ : es el flujo masico de concentrado de pulpa.
- $G_p$ : Es la ley de la especie de interés en la pulpa.
- $P$ : es la probabilidad de adherencia de las partículas, depende los reactivos utilizados y  $P_{80}$  de la pulpa de molienda.
- $F$ : es el factor de arrastre, este depende del tamaño de burbuja y la probabilidad de arrastrar partículas de elementos no deseados.
- $T$ : El tiempo de residencia de las partículas desde que entran a la celda hasta que salen en el concentrado.
- $A$ : El área transversal de la celda
- $J_b$ : Es la velocidad de ascensión promedio de la espuma.

En adición a lo anterior, la ponderación  $\dot{m}_c * G_c$  representa la masa del elemento de interés que sale en el concentrado;  $\dot{m}_p * G_p * (P + F)$  es la masa disponible para flotar; y, el término  $\frac{V}{T * A * J_b}$  captura la cinética química de la flotación, así como también considera aspectos técnicos del proceso de flotación.

El modelo de  $R_f$  propuesto está basado en los modelos de Seaman y Alexander, pero también considera una parte del modelo de traspaso de Kapur y Mehrotra (1991), en donde para estos últimos la consideración realizada es aquella del traspaso de partículas de pulpa a la zona de colección. Además, el modelo es una especulación de lo que podría ser un modelo más cercano a la realidad de  $R_f$ , pero, este modelo aún debe ser ajustado experimentalmente y probado a escala industrial posteriormente, así como también se deben validar los supuestos propuestos. Luego, los parámetros P y F son aquellos totalmente nuevos (con respecto a los otros modelos de la literatura) y falta definir matemáticamente cada uno, así como también refinarlos mediante experiencias empíricas. Por otro lado, no está definido cuanto es V en proporción a su flujo másico asociado  $\dot{m}_c$ , es decir, el tamaño de la muestra. Finalmente, no se puede decir aún si este modelo tiene más o menos error que los modelos de Seaman y Alexander, así como también podría incluir algún factor de ajuste similar al 3.6 en el  $R_f$  de Alexander.

## 5. Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones.

### 5.1. Conclusiones

Las conclusiones más relevantes de este trabajo son las siguientes:

- En lo que respecta a los objetivos específicos establecidos, estos fueron cumplidos a cabalidad dados los resultados obtenidos y los análisis realizados.
- Si bien hay muchos estudios para sistemas de espumas de 2 fases, los sistemas de espumas de 3 fases tienen escasa información en comparación, por lo que se puede decir que es un campo relativamente inexplorado que requiere más estudios. Dado lo anterior, los estudios relacionados con  $R_f$  son aún más escasos.
- La importancia de la espuma radica en que es un medio de transporte, concentración y separación de partículas.
- Los distintos análisis de sensibilidad realizados no fueron suficientes para discernir que variable influye más en el valor de  $R_f$  para cada metodología.
- Las varianzas obtenidas para cada metodología no son comparables entre sí dada la diferencia en la cantidad de parámetros de entrada entre Seaman y Alexander, además, cada varianza no es comparable con las otras sin ser normalizadas primero.
- El área transversal de la celda ( $A$ ) fue la variable más influyente en el valor de  $R_f$  tanto de Seaman como de Alexander, con errores de ~42% y ~50% respectivamente.
- La ley de partículas adheridas en la pulpa ( $G_{ad}^{pulp}$ ) es la variable menos influyente en el valor de  $R_f$  de Alexander con un error de ~0.5%.
- En cambio, la variable menos influyente en el cálculo de  $R_f$  de Seaman es la carga de burbujas (BL) con un error de ~7%.
- El  $R_f$  de Alexander es mejor que el  $R_f$  de Seaman en términos de error promedio por variable, en donde el error promedio por variable de Alexander es ~9.1% y el de Seaman es 20%.
- En cambio, el  $R_f$  de Seaman es mejor que el  $R_f$  de Alexander en aplicabilidad, dado que los parámetros de Seaman son más fáciles de medir in-situ, lo que implica que el  $R_f$  de Seaman es, además, más cercano a la realidad que el  $R_f$  de Alexander.
- El modelo propuesto está incompleto dado que le falta validar, o refutar, sus supuestos, así como también le falta definir matemáticamente las variables P y F. Si bien el modelo propuesto se basa en los modelos de Seaman y Alexander, los cuales están basados a su vez en el Savassi, el modelo intenta incluir la cinética química de una forma similar lo planteado por Kapur y Mehrotra (1991).
- El modelo propuesto abarca las variables más relevantes de modelos previos, pero también abarca aquellas que son más fáciles de medir in-situ o a través de ensayos de laboratorio.

## 5.2. Recomendaciones

Finalmente, las recomendaciones son:

- Escalar y probar las metodologías a nivel industrial.
- Estudiar el impacto económico de  $R_f$ , calculándolo mediante las metodologías de Seaman y Alexander.
- Utilizar más sets datos para calcular los  $R_f$  de Seaman y Alexander, idealmente utilizar una base de datos ara mayor representatividad.
- Validar o refutar los supuestos del modelo de  $R_f$  propuesto mediante experimentación e investigación.
- En el caso en que los supuestos sean correctos, definir matemáticamente las variables P y F mediante ajustes y datos obtenidos de laboratorios.

## 6. Capítulo 6: Bibliografía

1. Ahmed, N. and Jameson, G. J. (1985). "The Effect of Bubble Size on the Rate of Flotation of Fine Particles." International Journal of Mineral Processing **14**: 195-215.
2. Arbiter, N. and Harris, C. C. (1962). "Flotation Kinetics." in Froth Flotation - 50th Anniversary Volume, Fuerstenau, D. W., Berkeley - California - USA, The American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, Inc. Chapter 8, 215-246.
3. Bevington, P. R. and Robinson, D. K. (1992). "Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences". Second Edition, New York. Chapter 3, 38-44.
4. Bikerman, J. J. (1973). Foams. New York, Springer-Verlag
5. Bikerman, J. J., Perri, J. M., Booth, R. B. and Currie, C. C. (1953). Foams: Theory and Industrial Applications. New York, Reinhold Publishing Corporation
6. Bisshop, J. P. and White, M. E. (1976). "Study of particle entrainment in flotation froths." Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy (Sect. C: Mineral Process. Extr. Metall.) **85**(December): C191-C194.
7. Booth, R. B. (1953). "Froth Flotation." in Foams: Theory and Industrial Applications. Bikerman, J. J. New York, Reinhold Publishing Corporation. Chapter 13, 243-281.
8. Cilliers, J. J., Asplin, R. A. and Woodburn, E. T. (1998). "Kinetic Flotation Modelling Using Froth Imaging Data." in Frothing in Flotation II. Laskowski, J. S. and Woodburn, E. T. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. Chapter 10, 309-335.
9. Contini, N. J., Wilson, S. W. and Dobby, G. S. (1988). "Measurement of Rate Data in Flotation Columns." in Column '88, Sastry, K. V. S., Littleton - USA, AIME. January, Chapter 15, 81-89.
10. Crozier, R. D. and Klimpel, R. R. (1989). "Frothers: Plant Practice." Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review **5**: 257-279.
11. Cutting, G. W. (1989). "Effect of Froth Structure and Mobility on Plant Performance." Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review **5**(1-4): 169-201.
12. Cutting, G. W., Barber, S. P. and Newton, S. (1986). "Effects of Froth Structure and Mobility on the Performance and Simulation of Continuously Operated Flotation Cells." International Journal of Mineral Processing **16**: 43-61.
13. Cutting, G. W., Watson, D., Whitehead, A. and Barber, S. P. (1981). "Froth Structure in Continuous Flotation Cells: Relation to the Prediction of Plant Performance from Laboratory Data using Process Models." International Journal of Mineral Processing **7**: 347-369.
14. Darcovich, K. (1995). "A hydrodynamic simulation of mineral flotation. Part I: The numerical model." Powder Technology **83**: 211-224.
15. Dobby, G. S. (1984). A Fundamental Flotation Model and Flotation Column Scale-Up. Department of Mining and Metallurgical Engineering. PhD thesis, McGill University, Montreal: 259.
16. Engelbrecht, J. A. and Woodburn, E. T. (1975). "The Effect of Froth Height, Aeration Rate and Gas Precipitation on Flotation." Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy **76**(October): 125-132.
17. Falutsu, M. (1991). Column Flotation Froth Studies. Department of Metallurgy and Materials Science. PhD thesis, University of Toronto, Toronto, Canada: 249.
18. Falutsu, M. and Dobby, G. S. (1989a). "Direct Measurement of Froth Drop Back and Collection Zone Recovery in a Laboratory Flotation Column." Minerals Engineering **2**(3): 377-386.
19. Falutsu, M. and Dobby, G. S. (1989b). "Direct Measurement of Froth Zone Performance in a Laboratory Flotation Column." in Processing of Complex Ores, Proceedings of an International Symposium, Dobby, G. S. and Rao, R. S., Halifax, Nova Scotia - Canada, Pergamon Press. 20-24 August, 335-348.

20. Falutsu, M. and Dobby, G. S. (1992). "Froth Performance in Commercial Sized Flotation Columns." Minerals Engineering **5**(10-12): 1207-1223.
21. Feteris, S. M., Frew, J. A. and Jowett, A. (1987). "Modelling the Effect of Froth Depth in Flotation." International Journal of Mineral Processing **20**: 121-135.
22. Finch, J. A. and Dobby, G. S. (1990). Column Flotation. Oxford, Pergamon Press 180, First.
23. Finch, J. A., Uribe-Salas, A. and Xu, M. (1995). "Column Flotation." in Flotation Science and Engineering. Matis, K. A. New York, Marcel Dekker, Inc. Chapter 11, 291-330.
24. Finch, J. A., Yianatos, J. and Dobby, G. (1989). "Column Froths." Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review **5**(1-4): 281-305.
25. Goodall, C. M. and O'Connor, C. T. (1990). "Residence time distribution studies of the solid and liquid phases in a laboratory column flotation cell." in SME Annual Meeting, Salt Lake City, Utah, USA.
26. Goodall, C. M. and O'Connor, C. T. (1991). "Residence time distribution studies in a flotation column. Part 1: the modelling of residence time distributions in a laboratory column flotation cell." International Journal of Mineral Processing **31**: 97-113.
27. Gorain, B. K., Franzidis, J. P. and Manlapig, E. V. (1997). "Studies on Impeller Type, Impeller Speed and Air Flow Rate in an Industrial Scale Flotation Cell. Part 4: Effect of Bubble Surface Area Flux on Flotation Performance." Minerals Engineering **10**(4): 367-379.
28. Gorain, B. K., Harris, M. C., Franzidis, J.-P. and Manlapig, E. V. (1998). "The Effect of Froth Residence Time on the Kinetics of Flotation." Minerals Engineering **11**(7): 627-638.
29. Gourram-Badri, F., Conil, P. and Morizot, G. (1997). "Measurements of Selectivity due to Coalescence Between Two Mineralised Bubbles and Characterisation of MIBC Action on Froth Flotation." International Journal of Mineral Processing **51**: 197-208.
30. Hall, S. (1996). "Froth flotation - the importance of the froth." Mining Magazine (July): 16-17.
31. Hanumanth, G. S. and Williams, D. J. A. (1990). "An Experimental Study of the Effects of Froth Height on Flotation of China Clay." Powder Technology **60**: 131-144.
32. Heiskanen, K. (1993). "Particle Classification". First Edition, Chapman & Hall, London.
33. Hemmings, C. E. (1981). "On the significance of flotation froth liquid lamella thickness." Trans. Inst. Min. Metall. (Sect. C: Mineral Process. Extr. Metall.) **90**: C96-C102.
34. Holtham, P. N. and Cheng, T. (1991). "Study of Probability of Detachment of Particles from Bubbles in Flotation." Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy. Section C: Mineral Processing and Extractive Metallurgy **100**(September - December): C147-C153.
35. Huls, B. J., Lachance, C. D. and Dobby, G. S. (1989). "Gas rate and froth depth effects on performance of a Cu-Ni separation flotation column." in Processing of Complex Ores, Dobby, G. S. and Rao, S. R., Halifax - Canada, Pergamon Press. 20-24 August, 311-323.
36. Kapur, P. C. and Mehrotra, S. P. (1991). "Identification of Feed and Simulation of Industrial Flotation Circuits." International Journal of Mineral Processing **31**: 11-35.
37. Langberg, D. E. and Jameson, G. J. (1992). "The Coexistence of the Froth and Liquid Phases in a Flotation Column." Chemical Engineering Science **47**(17/18): 4345-4355.
38. Laplante, A. R. (1980). The Effect of Air Flow Rate on the Kinetics of Flotation. Department of Metallurgy and Materials Science. PhD thesis, University of Toronto, Toronto - Canada: 357.

39. Laplante, A. R., Kaya, M. and Smith, H. W. (1989). "The Effect of Froth on Flotation Kinetics - A Mass Transfer Approach." Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review **5**(1-4): 147-168.
40. Laplante, A. R., Smith, H. W. and Toguri, J. M. (1984). "The effect of air flow rate on the kinetics of flotation. Part 3: Selectivity." International Journal of Mineral Processing **13**: 285-295.
41. Laskowski, J. S. (1992). "An Introduction: Physicochemical Methods of Separation." in Colloid Chemistry in Mineral Processing. Laskowski, J. S. and Ralston, J. Amsterdam, Elsevier. **12** Chapter 7, 225-241.
42. Laskowski, J. S. (1998). "Frothers and Frothing." in Frothing in Flotation II. Laskowski, J. S. and Woodburn, E. T. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. Chapter 1, 1-49.
43. Malysa, K. (1998). "Water Contents and Distribution in Flotation Froths." in Frothing in Flotation II. Laskowski, J. S. and Woodburn, E. T. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. Chapter 3, 81-108.
44. Manev, E. and Pugh, R. J. (1993). "Frother/collector interactions in thin froth films and flotation." Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects **70**: 289-295.
45. Matis, K. A. and Zouboulis, A. I. (1995). "An Overview of the Process." in Flotation Science and Engineering. Matis, K. A. New York, Marcel Dekker, Inc. Chapter 1, 1-44.
46. Meyer, W. C. and Klimpel, R. R. (1982). "Rate Limitations in Froth Flotation." Transactions, Society of Mining Engineers of AIME **274**: 1852-1858.
47. Moys, M. H. (1978). "A Study of a Plug-Flow Model for Flotation Froth Behaviour." International Journal of Mineral Processing **5**: 21-38.
48. Moys, M. H. (1989). "Mass Transport in Flotation Froths." Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review **5**(1-4): 203-228.
49. Murphy, D. G., Woodburn, E. T. and Cilliers, J. J. (1998). "Modelling of Froth Dynamics with Implications for Feed-Back Control." in Frothing in Flotation II. Laskowski, J. S. and Woodburn, E. T. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. Chapter 7, 205-244.
50. Napier-Munn, T. J. (2009). "An Introduction to Comparative Statistics and Experimental Design for Minerals Engineers". Course Note – 2<sup>nd</sup> Edition, Version 6.3, JKTech – JKMRRC Technology Transfer, The University of Queensland.
51. Neethling, S. J. and Cilliers, J. J. (1998). "A visual kinematic model of flowing foams incorporating coalescence." Powder Technology **101**: 249-256.
52. Neethling, S. J. and Cilliers, J. J. (2001). "Simulation of the Effect of Froth Washing on Flotation Performance." Minerals Engineering : .
53. Neethling, S. J., Cilliers, J. J. and Woodburn, E. T. (2000). "Prediction of the water distribution in a flowing foam." Chemical Engineering Science **55**: 4021-4028.
54. Prud'Homme, R. K. and Warr, G. G. (1996). "Foams in Mineral Flotation and Separation Processes." in Foams - Theory, Measurements, and Applications. Prud'Homme, R. K. and Khan, S. A. New York, Marcel Dekker, Inc. **57** Chapter 13, 511-553.
55. Ross, V. E. (1987). Mass Transport in Flotation Froths. PhD thesis, University of Stellenbosch, South Africa: 431+.
56. Ross, V. E. (1998). "Mechanisms Operating in Flotation Froths." in Frothing in Flotation II. Laskowski, J. S. and Woodburn, E. T. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. Chapter 4, 109-144.
57. Savassi, O. N. (1998). Direct Estimation of the Degree of Entrainment and Froth Recovery of Attached Particles in Industrial Flotation Cells. Department of Mining,

- Minerals and Materials Engineering, JKMRRC. PhD thesis, University of Queensland, Brisbane: 393.
58. Savassi, O. N., Alexander, D. J., Johnson, N. W., Franzidis, J. P. and Manlapig, E. V. (1997). "Measurement of Froth Recovery of Attached Particles in Industrial Flotation Cells." in Sixth Mill Operators' Conference, Lauder, D., Madang, Papua New Guinea. 6-8 October, 149-155.
  59. Smith, P. G. and Warren, L. J. (1989). "Entrainment of Particles into Flotation Froths." Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review **5**(1-4): 123-145.
  60. Sztatkowski, M. (1988). "A Model of Flotation Selectivity." International Journal of Mineral Processing **23**: 25-31.
  61. Tarjan, G. (1986). Mineral Processing 2. thesis, Akademiai Kiado, Budapest: 262.
  62. Teague, A. J. (1998). The Flotation Behaviour of Free and Refractory Gold. Department of Chemical and Metallurgical Engineering. PhD thesis, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne: .
  63. Tucker, J. P., Deglon, D. A., Franzidis, J.-P., Harris, M. C. and O'Connor, C. (1994). "An Evaluation of a Direct Method of Bubble Size Distribution Measurement in a Laboratory Batch Flotation Cell." Minerals Engineering **7**(5/6): 667-680.
  64. Vera, M. A. (1995). The Determination of the Collection Zone Rate Constant and Froth Zone Recovery by Column Flotation. Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, Department of Mining and Metallurgical Engineering. Master of Engineering Science (Research) thesis, The University of Queensland, Brisbane: 259.
  65. Vera, M. A. (1998). Methodology for Froth Zone Recovery ( $R_f$ ) Determination. Manual Report, Number, November 1998, Brisbane, JKMRRC-The University of Queensland.
  66. Vera, M. A., Franzidis, J.-P. and Manlapig, E. V. (1998). "Simultaneous Determination of Collection Zone Rate Constant and Froth Zone Recovery Factor." in Frothing in Flotation II. Laskowski, J. S. and Woodburn, E. T. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers. Chapter 6, 177-204.
  67. Wills, B. A. (1992). Mineral Processing Technology. Oxford, Pergamon Press 855, Fifth Edition.
  68. Wilson, S. W. and Stratton-Crawley, R. (1991). "Design of Production Scale Flotation Columns Using a First Order Kinetic Model." in Column '91, Proceedings of an International Conference on Column Flotation, Agar, G. E. Huls, B. J. and Hyma, D. B., Sudbury, Ontario - Canada. 2-6 June, 165-179.
  69. Woodburn, E. T., Austin, L. G. and Stockton, J. B. (1994). "A Froth Based Flotation Kinetic Model." Chemical Engineering Research and Design, Transactions of the Institution of Chemical Engineers, Part A **72**(March): 211-226.
  70. Yianatos, J. B., Finch, J. A. and Laplante, A. R. (1986). "Holdup Profile and Bubble Size Distribution of Flotation Column Froths." Canadian Metallurgical Quarterly **25**(1): 23-29.
  71. Yianatos, J. B., Finch, J. A. and Laplante, A. R. (1987). "Cleaning Action in Column Flotation Froths." Trans. IMM Section C **96**: C199-C205.
  72. Yianatos, J. B., Finch, J. A. and Laplante, A. R. (1988). "Selectivity in column flotation froths." International Journal of Mineral Processing **15**: 279-292.
  73. Yoon, R. H., Luttrell, G. T. A., Adel, G. T. and Mankosa, M. J. (1989). "Recent Advances In Fine Coal Flotation." in Advances In Coal And Mineral Processing Using Flotation, Chander, S. and Klimpel, R. R., Palm Coast, Florida, USA, Society For Mining, Metallurgy, And Exploration, Inc. 3-8 December, Chapter 23, 211-218.

74. Yu, S. and Finch, J. A. (1990). "Technical Note: Froth Zone Recovery in a Flotation Column." Canadian Metallurgical Quarterly **29**(3): 237-238.
75. Seaman, D. R. (2006). *Selective Transport of Attached Particles Across the Froth Phase*.
76. Alexander, D. M., Franzidis, J., & Manlapig, E. (2003). Froth recovery measurement in plant scale flotation cells. *Minerals Engineering*, *16*(11), 1197–1203.

## Anexos

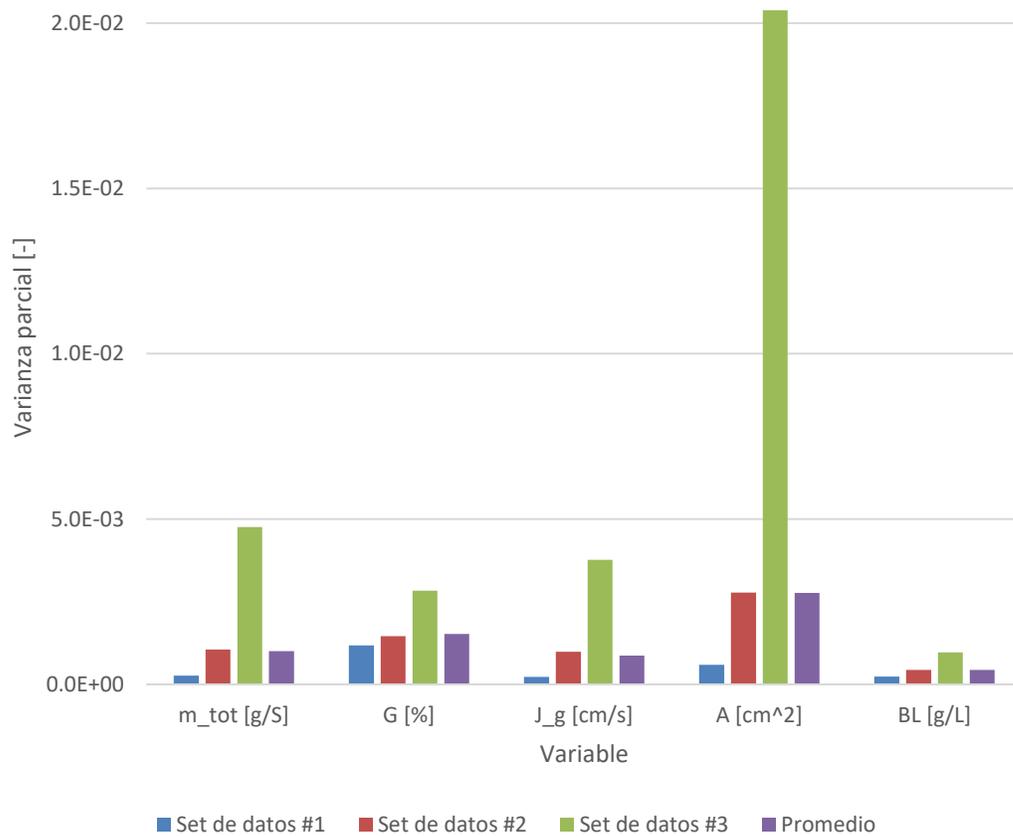
### Anexo A: Resumen métodos para cálculo de recuperación fase de espuma

**Tabla 3:** Resumen métodos para cálculo de recuperación fase de espuma

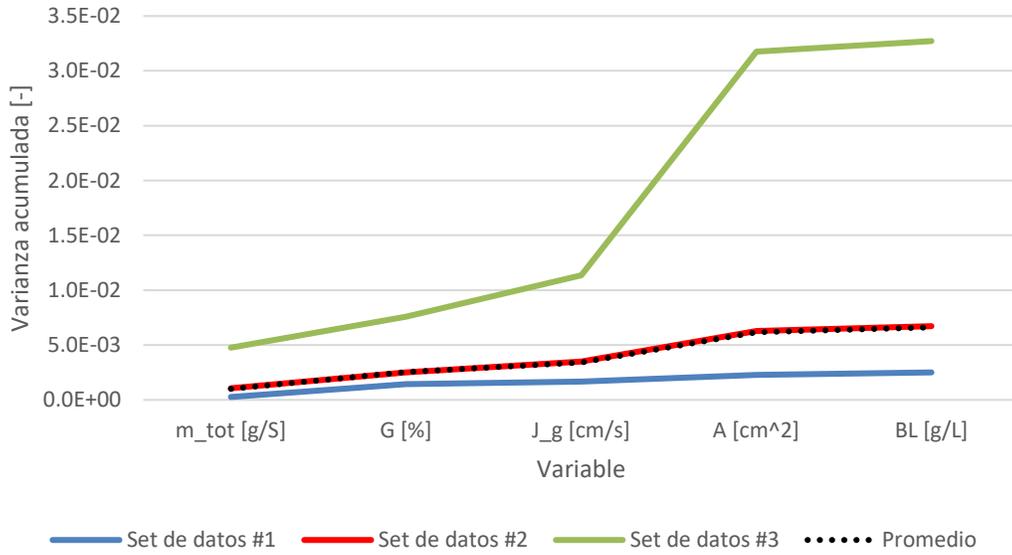
Método	Escala	Operación	Tipo de reactor	Información de entrada	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 3
<b>Cambio profundidad de la espuma</b>	Laboratorio	Continuo	Columnar	Altura espuma (varios niveles), F, C.	Cálculo de recuperaciones ( $R_i$ ).	Cálculo de $R_f$ .		
<b>Omitir la interfase pulpa espuma en el reactor</b>	Laboratorio	Continuo	Columnar	F, C, Drop-back.	Cálculo de $R_f$ .			
<b>Operación en cocorriente y contracorriente</b>	Laboratorio	Continuo	Columnar	F (2 posiciones), C.	Cálculo de recuperaciones (R).	Cálculo de $R_f$ .		
<b>Cambiando profundidades de la espuma</b>	Laboratorio	Semi-batch (Semi-discontinuo)	Celdas agitadas	Altura espuma (varios niveles), F, C.	Cálculo de recuperaciones ( $R_i$ )	Cálculo de constantes de velocidad (k).	Extrapolación de $k_c$ .	Cálculo de $R_f$ .
<b>Estimación del balance de masa</b>	Planta Industrial	Continuo	Celdas agitadas	Muestreo de la concentración de minerales en la interfaz pulpa-espuma ( $C_i$ ).	Cálculo de p y q (Raíces de una ecuación diferencial homogénea).	Cálculo de E.	Cálculo de $R_f$ .	
<b>Drifts en zona de espuma (Gorain)</b>	Planta Piloto	Continuo y Semi-batch (Semi-discontinuo)	$Q_g$ , tamaño medio de burbuja, diámetro del área de la superficie transversal de la celda (varios niveles de $Q_g$ ).	Cálculo de recuperaciones ( $R_i$ ) y $S_b$ .	Cálculo de constantes de velocidad (k).	Extrapolación de $(k/S_b)_{max}$ .	Cálculo de $R_f$ .	
<b>Mediciones de</b>	Planta Piloto	Continuo	Celdas agitadas	Medición de la ley	Cálculo de	Computation of	Cálculo de $R_f$ .	

Método	Escala	Operación	Tipo de reactor	Información de entrada	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 3
<b>carga de burbujas (Savassi)</b>	y Planta Industrial			de la muestra en diferentes ángulos con la técnica del embudo.	partículas adheridas en la pulpa	bubble load in the pulp and of attached particles in the concentrate.		
<b>Mediciones de carga de burbujas (Seaman)</b>	Planta Piloto y Planta Industrial	Continuo	Celdas agitadas	Muestreo (m, V, tiempo), C, c.	Cálculo de carga de burbujas	Computation of $R_f$ .		
<b>Balance de masa (Alexander)</b>	Planta Industrial	Continuo	Celdas agitadas	Medición de $J_g$ , retención de gas, muestra de pulpa, F, C, c, T.	Cálculo de masa adherida en el concentrado y pulpa	Computation of $R_f$ .		

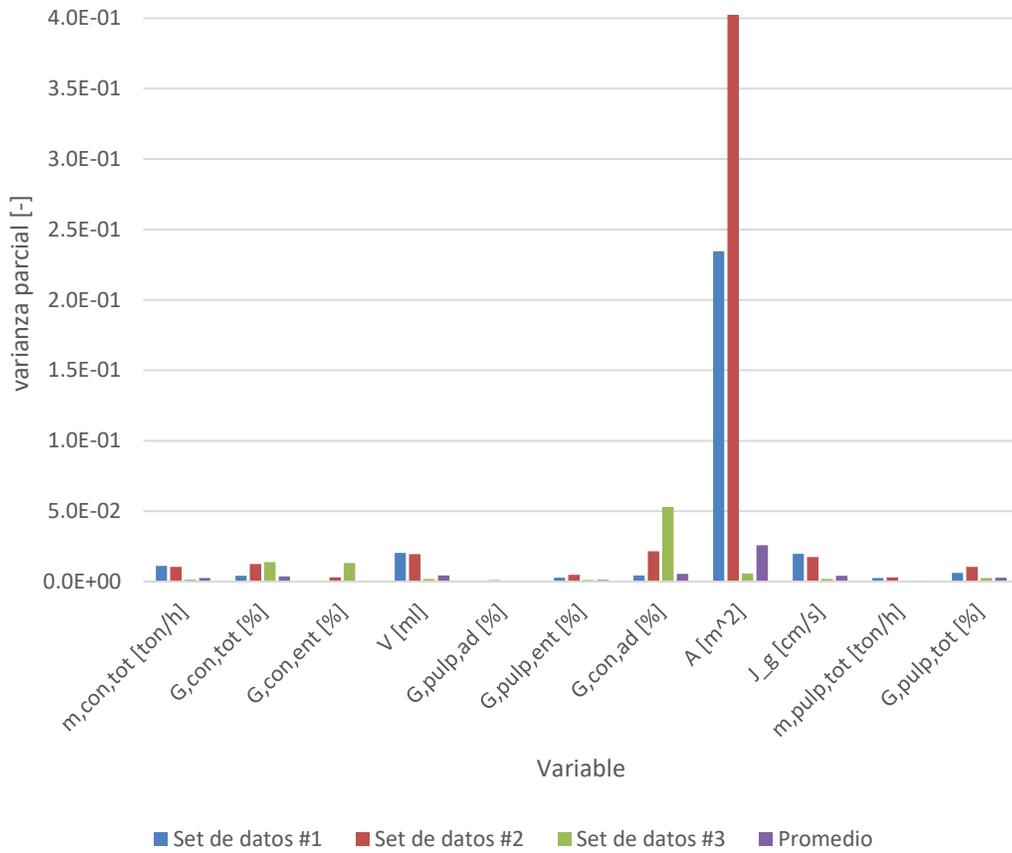
## Anexo B: Varianzas obtenidas



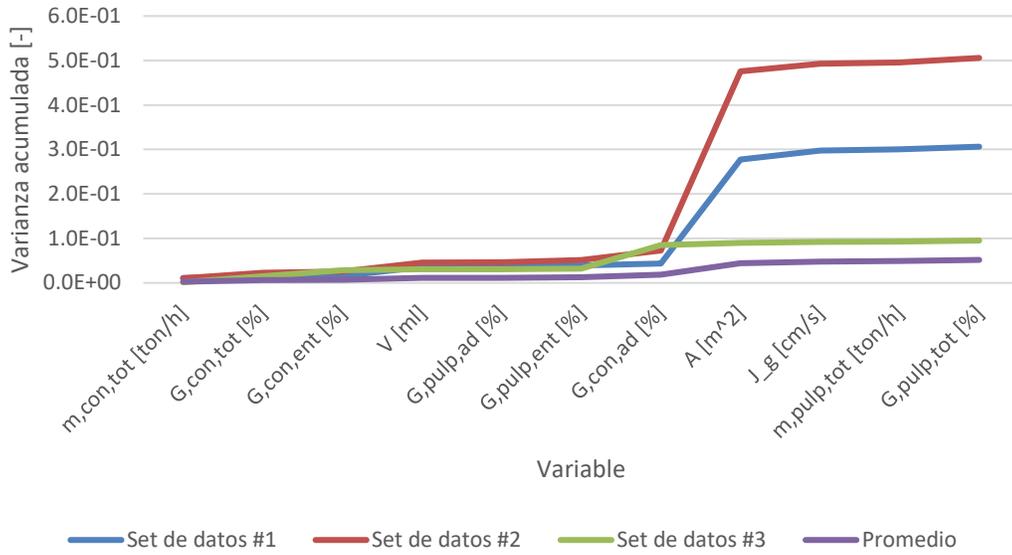
**Figura 36: Varianzas parciales variables  $R_f$  de Seaman**



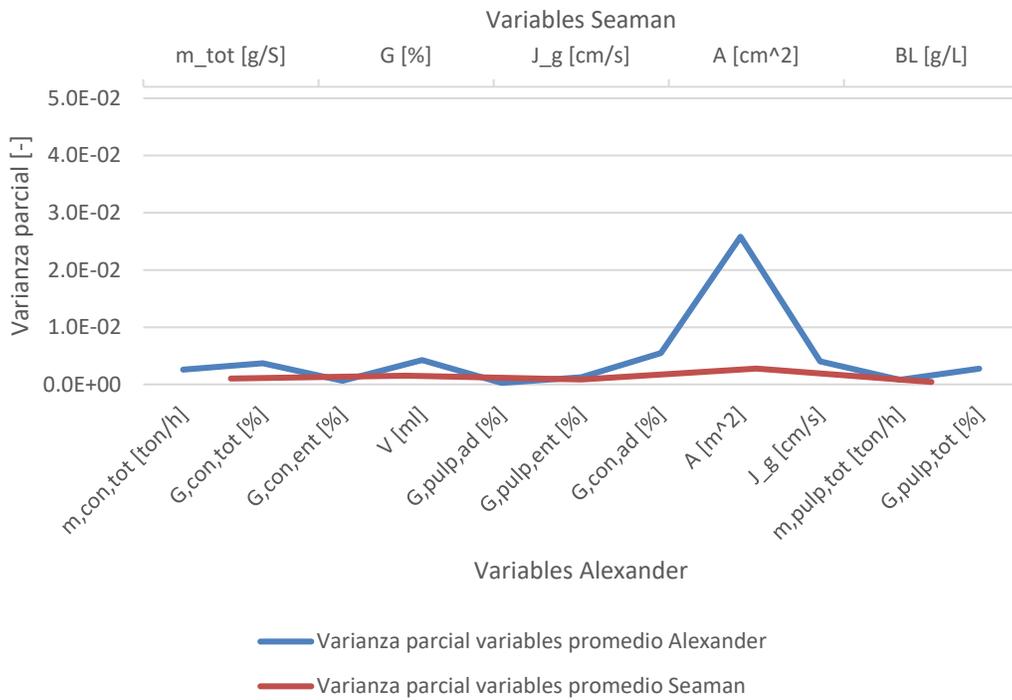
**Figura 37: Varianza acumulada variables R<sub>f</sub> de Seaman**



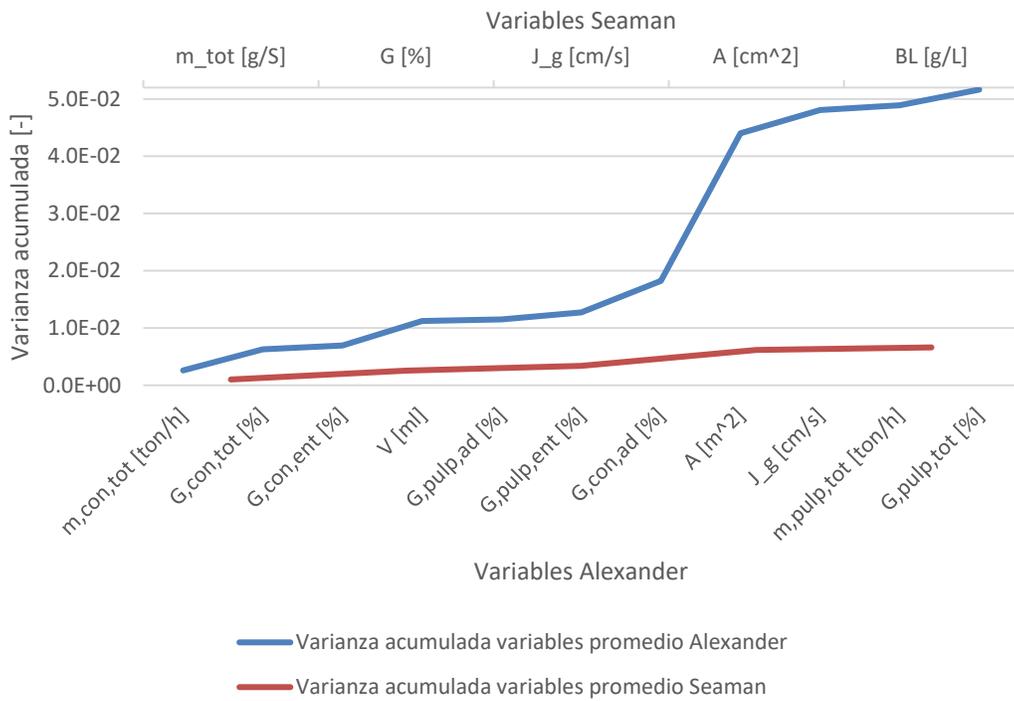
**Figura 38: Varianzas parciales variables R<sub>f</sub> de Alexander**



**Figura 39: Varianza acumulada variables R<sub>f</sub> de Alexander**



**Figura 40: Comparación varianzas parciales de las variables promedio**



**Figura 41: Comparación varianzas acumuladas de las variables promedio**