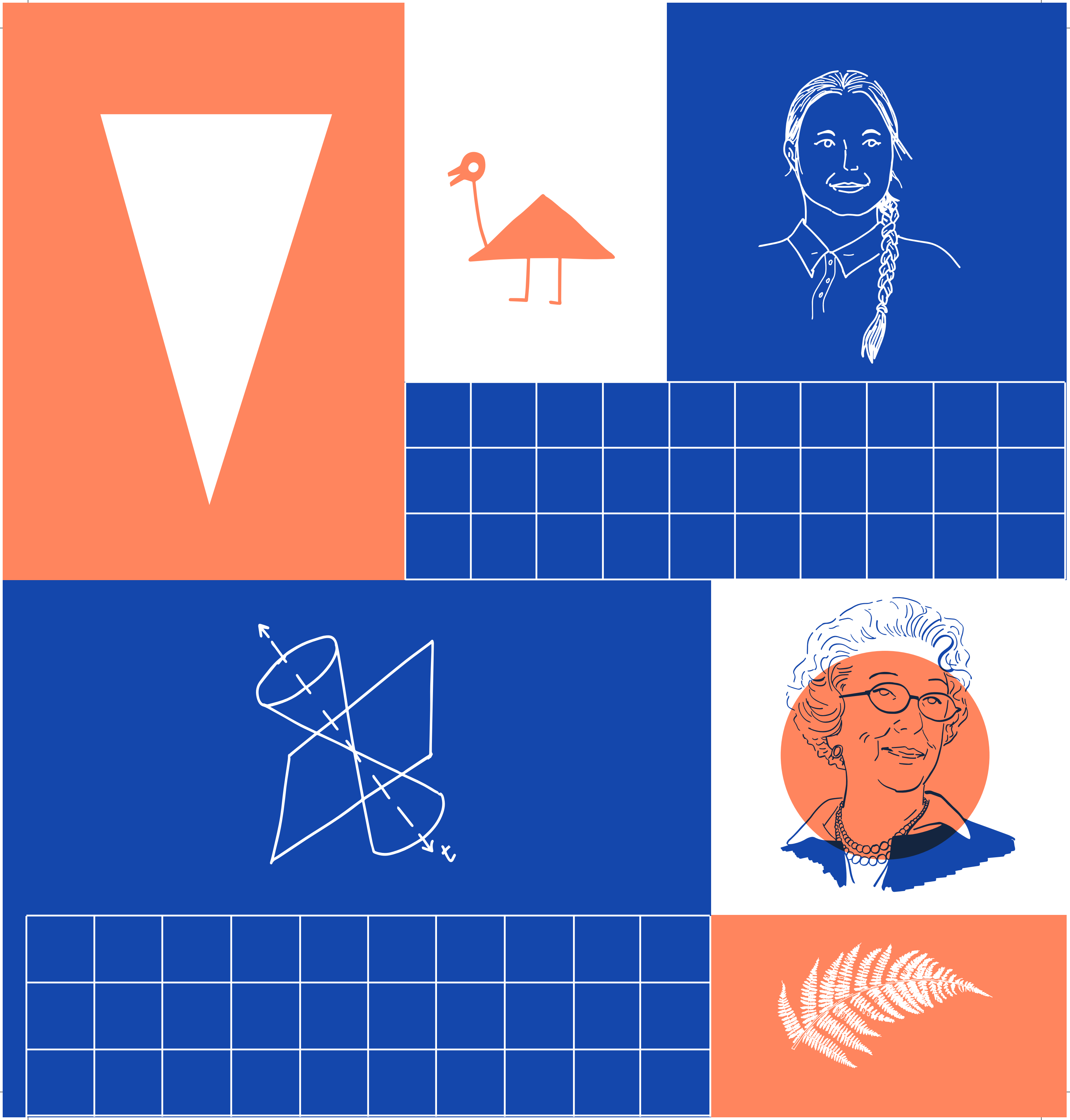

t

LA GRAN AVENTURA DEL CONOCIMIENTO

UN PASEO CON LAS MATEMÁTICAS EN CUATRO ESTACIONES

LA GRAN AVENTURA DEL CONOCIMIENTO

UN PASEO CON LAS MATEMÁTICAS EN CUATRO ESTACIONES

Leslie Jiménez Palma y
Constanza Rojas-Molina

MARZO

Matemáticas y arte

Desde pequeñas vemos las matemáticas como una materia donde si sabemos bien las fórmulas y la técnica para resolver problemas, entonces la comprendemos y nos va bien. Si no es así, en cambio, nos va mal. Es de esa manera: o bien o mal, correcto o incorrecto, 0 o 1, muy binaria y rígida. Por otro lado, el arte aparece como esa materia donde nos podemos expresar y ser libres, hay espacio para crear. Es como si la creatividad fuera un monopolio del arte y la técnica de la matemática. ¿Pero qué pasa si nos abrimos a la posibilidad de ver ambas disciplinas como un proceso creativo donde ciertamente necesitamos aprender alguna técnica para realizarla?[21].

La matemática y el arte conversan a través del proceso creativo y la técnica. La matemática y el arte parecen ser dos representaciones distintas del mismo universo.

21. "Mitos que rodean a las ciencias". Para ver el video ir a: https://www.facebook.com/CECREA/videos/1137978680003093


"Hay GEOMETRÍA en el zumbido de las cuerdas,
Hay MÚSICA en el espacio entre las esferas"
Pitágoras
370 - 495 a. C.
Filósofo griego
polvo
placas vibrando
Patrones producidos por vibraciones en "Acústica" de Ernst Chladni (1802)
Patrones de Chladni en el fondo de una guitarra y en un tambor
polvo + líquido
voz
Eidófono de Margaret Watts Hughes (1875)

1

GEOMETRÍA Y MÚSICA

Las vibraciones tienen su geometría (la música se puede ver)

Es probable que Pitágoras sea el matemático más famoso de la historia, pero no sucede lo mismo en la escuela pitagórica que él lideró desde sus inicios. Los integrantes de esa escuela eran estudiosas de distintas materias, entre ellas, las matemáticas. De hecho, fueron las primeras en relacionar música y matemáticas. Entre las cosas que observaron, está que distintas propiedades matemáticas se ven como una característica musical; por ejemplo, notaron que cuerdas de distintos largos producen sonidos diferentes. Tomando ciertos largos de cuerda bien definidos fueron capaces de determinar las doce notas musicales occidentales, pero más aún, cuando esos largos cumplían cierta proporción, entonces las notas musicales estaban relacionadas, por lo que hoy en día conocemos como una octava o en una quinta, etcétera[22].

Pitágoras solía decir que "hay geometría en el tarareo de las cuerdas, hay música en el espacio entre las esferas", vinculando así lo visual y lo auditivo. ¿Es posible entonces ver la música?

Algo así fue lo que quiso mostrar el físico Ernst Chladni cuando le presentó su experimento a Napoleón Bonaparte en la Academia de Ciencias de París en 1808. Usando una placa metálica, arena sobre ella y las cuerdas de un violín, Chladni hizo vibrar la placa, mostrando que a medida que hacía variar la frecuencia de vibración entonces las figuras que formaban la arena en la placa iban cambiando. En frecuencias bien específicas, las figuras que se forman son las que se conocen como las figuras de Chladni[23]. Fue así como Napoleón comenzó su admiración por Chladni y ofreció un premio a la persona que pudiera describir matemáticamente su experimento. La matemática autodidacta Sophie Germain, quien años antes había comenzado a cartearse con los matemáticos más famosos de París en esa época, usando el seudónimo masculino de Monsieur Le Blanc, presentó la mejor explicación matemática y las ecuaciones que describen gran parte del experimento de Chladni, lo que

22. "Donald en la tierra mágica de las matemáticas". Ver en: https://youtu.be/5ytHHOzK2T8

23. "Placas de Chladni".
Para ver el video ir a: https://youtu.be/t-Bg8GiTW8M

la hizo merecedora del Premio de la Academia de Ciencias de París[24].

Chladni no fue el único en experimentar con estos fenómenos. Conocidos son los experimentos de la artista inglesa Margaret Watts-Hughes, quien a través de la vibración emitida por su canto descubrió que las semillas puestas sobre una tela formaban distintas figuras, las que ella llamó flores de voz.

Es así como podemos decir que la música se puede ver y además no de cualquier forma, sino que respetando las reglas de la geometría: proporciones, simetrías, etcétera[25].

Después de leer esto, una pregunta natural sería: Y al revés, ¿se puede escuchar la forma de un tambor? Este es el título de un artículo de 1966 del matemático Mark Kac, donde se planteó el problema de determinar la superficie que genera el sonido sabiendo solo las notas musicales que produce. O dicho de otra forma, ¿pueden dos tambores diferentes producir los mismos sonidos? El trabajo de Kac originó una línea de investigación en matemáticas que sigue siendo activa hasta hoy.

24. Pódcast *Con la suma de todas la fuerzas*. "De colores y voces, como a tu tío reconoces". Escuchar en: https://anchor.fm/sumafuerzas/episodes/De-colores-y-voces--cmo-a-tu-to-reconoces-ekm3u4
25. *Ibídem.*

2
LA RAZÓN ÁUREA

Tugar, tugar, salir a buscar... La naturaleza está llena de matemáticas y **φ** (pronunciada Fí) es el número que nos muestra esta conexión todo el tiempo. Está dado por una razón llamada razón áurea, conocida también como número de oro o proporción áurea y se puede encontrar en todo el universo; desde las espirales de las galaxias hasta las del girasol y la espiral de una concha marina Nautilus, hay algunos mitos donde también se puede encontrar este número en la naturaleza, aunque parece estar en más lugares de los que realmente han sido probados que está[26].

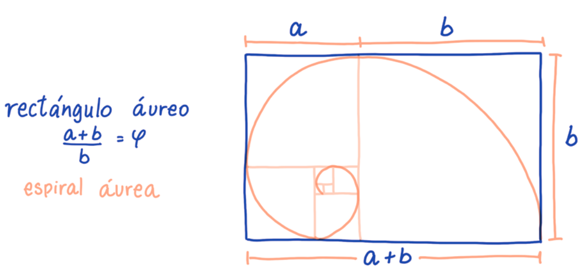
Es un número muy especial porque es irracional, así como Pi, es decir, no es posible escribirlo como una fracción de dos números enteros. Tiene infinitos decimales que no satisfacen ningún patrón de repetición, sus primeras cifras están dadas por $\varphi = 1,6180339887498...$ y satisface la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ (es decir, al reemplazar x por φ tenemos que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$). Esto último

26. "Myth of Maths". Para leer el artículo ir a: https://plus.maths.org/content/myths-maths-golden-ratio, https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_05_07.html


Es hermosa
Aparece en la naturaleza como solución a un problema de optimización
LA RAZÓN ÁUREA
φ
(Fí)
otros nombres:
Proporción áurea
razón dorada
divina proporción
Solución de la ecuación
$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$
a b
a
a+b
$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$
"el más IRRACIONAL de todos los números IRRACIONALES"
Naturaleza
"¡Me encanta la OPTIMIZACIÓN!"
= belleza

dice que el número tiene la propiedad de ser un número algebraico, porque es solución de una ecuación como la de arriba. Debido a un gran teorema del área de cuerpos en matemáticas, que relaciona geometría con álgebra, es un número que se puede construir usando regla y compás.

Desde la construcción con regla y compás, el número φ se conecta con el arte del pintor y grabador alemán del Renacimiento, Alberto Durero (1471-1528), quien en 1525 escribió *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas.* En esta obra, Durero muestra cómo trazar con regla y compás algunas espirales y entre ellas una que pasará a la historia con su nombre: la espiral de Durero[27], la cual construye justamente siguiendo el patrón de los rectángulos áureos (rectángulos cuyos lados guardan la proporción áurea), cuyos lados son los términos de la sucesión de Fibonacci.



Conocemos, en efecto, varias representaciones distintas del número φ. Una distinta a las anteriores es la dada por $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y también es el valor del límite de los cocientes de los términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci. Es decir, las divisiones de los siguientes números van acercándose al 1,61803 a medida que tomamos más divisiones:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}$$

Estos valores dan 1, 2, 1.5, 1.66..., 1.6, 1.625, 1.615..., 1.619...

Muchas otras están en la naturaleza exactamente relacionadas con la sucesión de Fibonacci. También hay representaciones creadas por la humanidad que guardan la proporción áurea. Varias pueden ser vistas en obras de arquitectura, como en las caracolas y espirales de la Sagrada Familia de Gaudí en Barcelona, en algunas de las obras del arquitecto suizo-francés Charles-Édouard Jeanneret-Gris, más conocido como Le Corbusier, quien desarrolló un sistema de proporciones llamado Modulor en el que la proporción de altura estaba basada en esta teoría. El edificio de la sede de la ONU en Nueva York guarda estas proporciones, y la primera bandera de Chile guardaba increíblemente esta proporción a través del rectángulo áureo[28].

27. https://www.dim.uchile.cl/~simetria/matematico/nodo231.html

28. http://images.math.cnrs.fr/Una-bandera-aurea-perdida-en-la-historia.html?lang=fr

3
MATEMÁTICAS Y CREATIVIDAD

Hacerse preguntas y no solo resolver problemas[29]

¡No toda la matemática está hecha! Eso puede ser difícil de imaginar porque en la experiencia de muchas personas está la idea de que todas las matemáticas ya las inventaron los griegos y ahora solo queda aprenderlas, resolviendo problemas de rutina con la fórmula correcta. Esto está bastante alejado de cómo las personas que se dedican a hacer matemáticas de manera profesional las describirían. Por ejemplo, la matemática Maryam Mirzakhani, ganadora de la Medalla Fields 2014, siempre quiso ser escritora, pero cuando se dio cuenta de que las matemáticas le proponían problemas desafiantes a resolver cambió de idea. En sus palabras: "Es divertido (resolver problemas), es como resolver un rompecabezas o conectar los puntos en un caso de detectives. Sentí que esto era algo que podía hacer, y yo quería seguir este camino". Pero… ¿cómo se va creando matemática nueva?

Un primer paso para comenzar a hacer matemáticas es hacerse preguntas. Aquí no necesitamos ser profesionales para hacer o hacernos preguntas, pero lo que sí necesitamos es que en las clases de matemáticas haya espacio para ellas. Esas preguntas que nos hagamos pueden ser para comprender bien una idea o concepto, o para ir más allá de él. Por ejemplo, sabemos que el número entero que sigue después del 2 es el 3, el que sigue después del 4 es el 5, después del 6 está el 7, y así sucesivamente. Una pregunta que nos podríamos realizar es: ¿Será cierto que el entero siguiente a un número par es siempre un entero impar? La respuesta es sí, y para que esto sea un resultado matemático necesitamos darle una estructura, representar con símbolos y demostrarlo[30]. De hecho, quedaría escrito en castellano como teorema de la siguiente forma: "El sucesor de cualquier número entero par es un entero impar". Pero bueno, esa no es la única pregunta que podríamos hacer, y eso es lo bonito, porque a cada persona se le podría ocurrir una pregunta

29. Con la suma de todas las fuerzas conversa con CECREA del Ministerio de las Artes, la Cultura y el Patrimonio, "Derribando mitos que rodean a las ciencias". https://m.facebook.com/sumafuerzas/videos/derribando-mitos-que-rondan-a-las-ciencias/142624651249201/

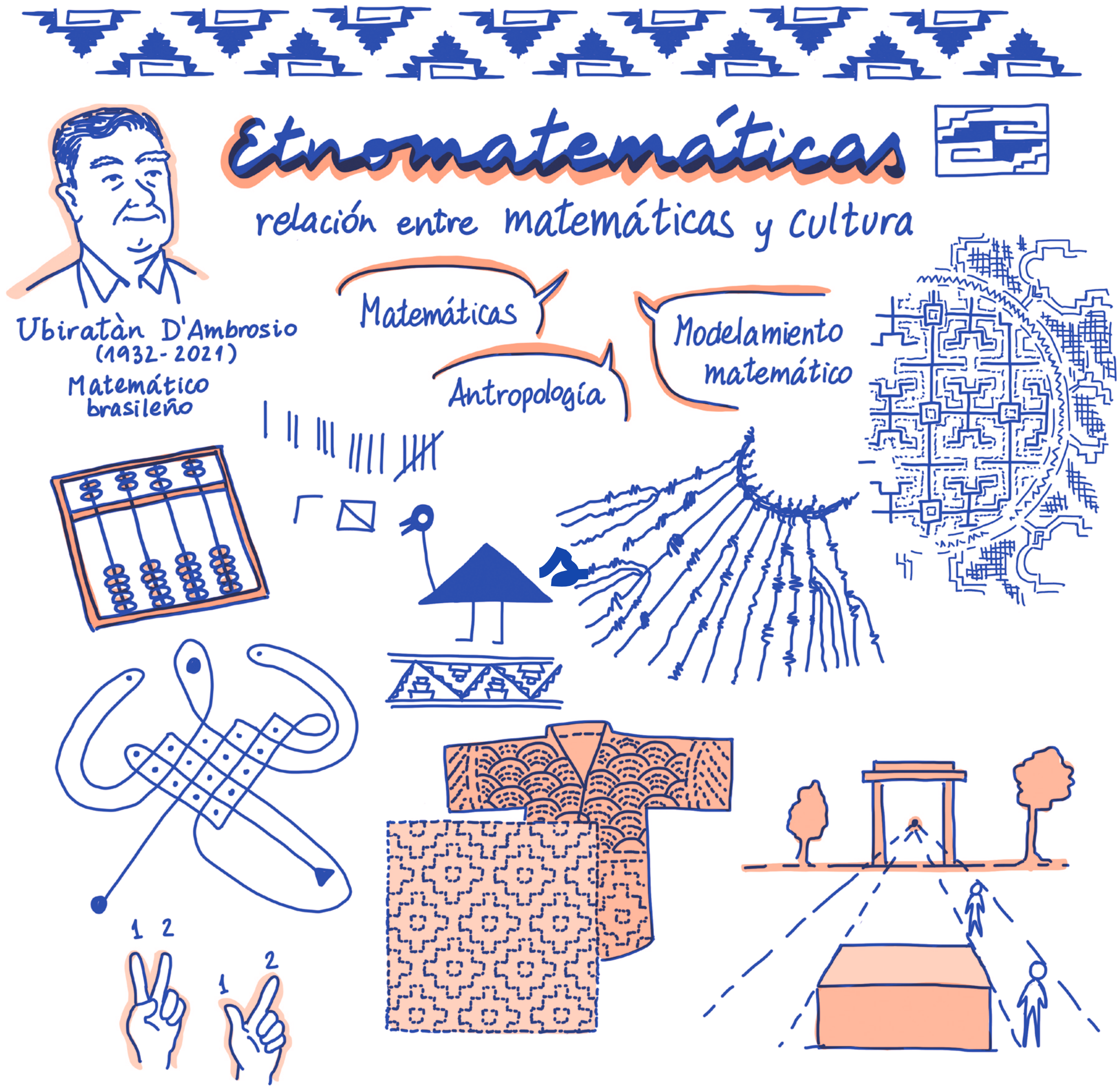
30. La definición de número par dice que es todo número entero que se escribe como múltiplo de 2. Usando esto, **2n** simboliza un número entero par y **2n**+1 un impar, para todo n entero, entonces el sucesor de un entero par siempre se escribirá como el número par **+1**, así quedará de la forma descrita para un impar. Hay varias formas de probar esto de todas maneras.

distinta a partir de esa observación. Entonces, cuando nos atrevemos y tenemos espacio para hacernos preguntas, tenemos el potencial de ser personas creativas.

En la historia de las matemáticas, un hecho que sorprendió mucho a Pitágoras fue el descubrimiento del número $\sqrt{2}$, el cual apareció como la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Este número es probablemente el primer irracional que se descubrió y para Pitágoras fue muy difícil de aceptar, ya que creía que los números racionales podían describir toda la geometría del mundo. Fue Hípaso de Metaponto, un integrante de la escuela pitagórica, quien demostró que este número no se puede escribir como una fracción, por lo tanto no es racional. De esta manera fue como se probó la existencia de números de una naturaleza distinta a la ya conocida, y esto sí que fue creativo para la época. ¿Cuántas preguntas se tuvieron que hacer Pitágoras, Hípaso y las personas integrantes de la escuela? ¡Muchas! Y no solo eso, además tuvieron que ser capaces de permitirse ir más allá de lo conocido.

La flexibilidad, la curiosidad y conocer algo del objeto a estudiar son ingredientes importantes para desarrollar la creatividad y que también se relacionan con el hacer matemáticas. En efecto, miles de años más tarde del desarrollo matemático de la Antigua Grecia, la comunidad matemática tuvo que aceptar que la geometría euclidiana (que había postulado Euclides) no era la única geometría que existía, y que además el quinto postulado de Euclides no era satisfecho por varias de esas nuevas geometrías. Fueron esos resultados los que permitieron darle fundamento matemático a la teoría de la relatividad de Einstein. Así, sin todo ese trabajo matemático (y científico en diversas áreas) anterior, el cual se realizó a través de un proceso creativo que involucró a muchas personas, no tendríamos esos grandes resultados que nos fascinan como humanidad. Asimismo, como distintas culturas señalan que lo fundamental es el camino y no el destino, lo más importante para crear matemáticas —y lo que lleva más tiempo— es el proceso con todo lo que conlleva y no el resultado.


Las matemáticas
y la CREATIVIDAD
PROCESO CREATIVO
SOLITARIO o EN COLABORACIÓN
Hacer matemáticas es CREAR IDEAS NUEVAS
EXPERIMENTACIÓN
OBSERVACIÓN
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO
CAJA DE HERRAMIENTAS
necesita
CURIOSIDAD
IMAGINACIÓN
par, impar, par, impar,..
hacerse PREGUNTAS
2 3 4 5 6 7 ...
FLEXIBILIDAD

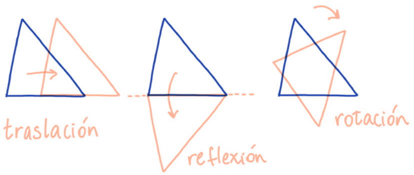

Etnomatemáticas
relación entre matemáticas y cultura
Ubiratàn D'Ambrosio
(1932-2021)
Matemático brasileño
Matemáticas
Antropología
Modelamiento matemático
1 2
1 2

4

ETNOMATEMÁTICAS
(Matemáticas y cultura)

Todas las personas hacemos matemáticas, muchas veces sin darnos cuenta siquiera, “sin querer queriendo”. Estas son las matemáticas que se encargan de estudiar las *etnomatemáticas*, aquellas realizadas por etnias, comunidades y grupos de personas organizadas en torno a prácticas matemáticas o resolución de problemas matemáticos que les rodean como tales. Por ejemplo, en problemas sobre cómo organizar un sistema de riego para cosechar vegetales; o bien, avances matemáticos para decidir cómo contar semillas, granos, frutas; o bien, avances dados a través de su cultura o arte. Las *etnomatemáticas* relacionan matemáticas y cultura.

Grandes teoremas o conceptos matemáticos han sido comprendidos perfectamente por distintas culturas mucho antes de haber sido demostrados. Es así como comienza la historia matemática del Palacio de La Alhambra, ubicado en Granada, España. Cuando dibujamos un objeto cualquiera en una hoja de papel, por ejemplo un triángulo, nos queda dibujado en el plano de la hoja, y si la hoja es cuadriculada es fácil ponerle coordenada al triángulo. Podemos hacer tres movimientos base del triángulo si ponemos la condición de no cambiar las dimensiones del triángulo: traslación, reflexión o rotación. Esos movimientos se llaman isometrías del triángulo en el plano y cuando consideramos todas las posibles combinaciones de estos tres movimientos base obtenemos muchísimas posibilidades más; aplicando estos movimientos al triángulo inicial vamos llenando el plano con triángulos rotados, reflejados, etcétera.



isometrías del triángulo en el plano

Si agrupamos estos movimientos siguiendo ciertas reglas de la teoría de grupos, entonces el número de agrupaciones posibles es solo diecisiete. Eso lo sabían muy bien los árabes islámicos en el año 1200 aproximadamente. Pero no fue hasta el 1700 cuando el matemático Fedorov lo probó con todas las reglas de la matemática. En efecto, en los noventa recién se demostró que en el Palacio de La Alhambra efectivamente están los diecisiete grupos en distintos mosaicos y amurallados, usando diferentes patrones geométricos dados por combinaciones de los movimientos base con distintas figuras. Estos son conocidos como grupos cristalográficos.

Otra historia bien interesante es la que hay detrás del concepto de perspectiva (de un punto de fuga), el cual se comenzó a usar en grandes obras de arte del Renacimiento. Por ejemplo, se utilizó en distintas pinturas para poner objetos en primer plano y segundo plano, dando profundidad a la obra; en las artes escénicas para decidir cómo ubicar las butacas en los teatros y lograr que la mayor cantidad de público viera la obra, etcétera. Las y los artistas sabían muy bien cómo dar perspectiva a sus obras, pero en matemáticas aún no se usaba el concepto. Años después, se definió de manera precisa este concepto y tiene relación con la geometría proyectiva.

Además, hace unas décadas que se reconocen las matemáticas creadas por la gente/pueblos como una disciplina de estudio en la educación matemática. Hay muchas personas que han basado su carrera de investigación en esta área y que han estudiado los avances matemáticos de la cultura ancestral china o la árabe en distintas disciplinas; en Latinoamérica, las matemáticas de los incas, los mayas, pueblo mapuche, diaguitas, las matemáticas de las tejedoras. Desde la Asociación Peruana de Educación Matemática (APINEMA[31]), se han realizado distintas investigaciones y comunicaciones (charlas, publicaciones) sobre el sistema de conteo del pueblo Inca a través de los *quipus matemáticos*, en quechua nudos matemáticos (sistema de escritura numérica basado en una cuerda horizontal con varias cuerdas colgantes con nudos marcados de arriba y abajo para marcar unidades, decenas, centenas y así sucesivamente), y *yupanas*, que se deriva del quechua *yupay* y significa "para contar", un artefacto para hacer cálculos más rápido en forma de tablero con cinco filas y cuatro columnas con una cantidad fija de orificios marcados por columnas para indicar distintas cantidades numéricas[32]. Estos son sistemas de numeración que los incas usaban para hacer aritmética y cálculos en las yupanas necesarios para organizar el imperio, así que sus matemáticas fueron bastante avanzadas y quedaron registradas en los quipus.

También se han realizado estudios de las matemáticas de pueblos originarios que viven o vivieron en la zona que ocupa hoy nuestro país, Chile. La matemática Mariela Carvacho, autora del capítulo "Descubriendo los secretos de las vasijas diaguitas" del libro *Situaciones de mode-*

31. Canal YouTube APINEMA: https://www.youtube.com/@apinema1796/videos
32. "¿Cómo los incas usaban la yupana para realizar cálculos?". Para ver el video ir al enlace: https://youtu.be/HPhky_1dCFc

lación educativa, cuenta que estudia los diseños de las vasijas diaguitas desde un punto de vista matemático, en particular geométrico. El pueblo diaguita habitó el noroeste de Argentina y Norte Chico de Chile teniendo su propia cultura, y los diseños de sus vasijas llaman la atención por sus colores y regularidades. El objetivo de la profesora es explorar los motivos diaguitas para que sus estudiantes identifiquen las figuras (unidades mínimas) mediante las cuales es posible generar el diseño aplicando transformaciones isométricas (que son las que preservan medida)[33].

Las *etnomatemáticas* formalizan la idea con la que comenzamos este capítulo, la cual remite a que todas las personas como parte de una comunidad podemos hacer matemáticas, e incluso practicarlas está dentro de nuestra cultura, solo que a veces no lo sabemos. Así como pintar, tocar un instrumento, escuchar nuestra canción favorita, hacer un mosaico árabe o diaguita como el descrito antes es hacer geometría y por ende matemáticas.

¿Nos atrevemos?

33. Más información sobre el libro *Situaciones de modelación educativa*, en: https://www.umce.cl/index.php/fac-ciencias/dpto-matematica/item/3563-libro-matematica-umce