



UNIVERSIDAD
DE CHILE

Fibrados asociados a cocientes suaves de variedades abelianas

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Gary Martínez Núñez

Marzo 2021

Director de Tesis: **Dr. Robert Auffarth**

Codirector de Tesis: **Dr. Giancarlo Lucchini Arteche**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
INFORME DE APROBACIÓN
TESIS MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Gary Martínez Núñez

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 9 de marzo de 2021.

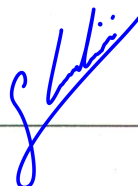
Director de Tesis

Dr. Robert Auffarth



Codirector de Tesis

Dr. Giancarlo Lucchini Arteché

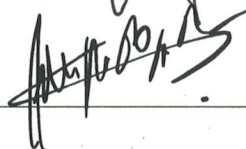


Comisión de Evaluación de la Tesis

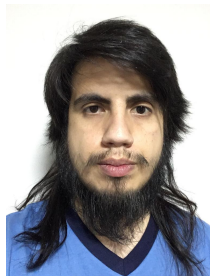
Dr. Sebastián Reyes Carocca



Dra. Anita Rojas Rodríguez



Biografía



En 2004 ingresé al Instituto Nacional Gral. José Miguel Carrera donde tuve mis primeros encuentros con las matemáticas participando en competencias escolares. Algunos años después, en 2011, comienzo mi primer año de Licenciatura en Ciencias con Mención en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. En un confuso salto mortal, un año más tarde, termino estudiando ingeniería en la misma casa de estudios, pasando incluso por un año de intercambio en la École Centrale Paris (hoy en día llamada Centrale Supélec). Al volver del intercambio, acepto el hecho de que volverme ingeniero no es lo que quería. En 2017 vuelvo a la Facultad de Ciencias para terminar la licenciatura. Finalmente, en 2019 entro al programa de Magister en la facultad de Ciencias de la Universidad de Chile.

Agradecimientos

Primero agradecer a mis padres por entender mi errático andar, a mis hermanos y familia por el apoyo, a mi pareja por los ánimos y a mis amigos por estar siempre dispuestos a una charla. A mis profesores quienes me recordaron nuestra cualidad humana.

Resumen

Dada una variedad abeliana A y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$, los automorfismos que fijan al 0 de A , tal que A/G es suave. Buscamos entender los cocientes A/G completando el trabajo hecho por Auffarth y Lucchini Arteche en [\[ALA19\]](#). En este artículo prueban que en caso de que A^G , el conjunto de los puntos fijos por la acción de G en A , sea finito los cocientes A/G son isomorfos a productos de espacios proyectivos. En caso contrario, si A^G no es finito, existe una fibración $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$, donde A_0 es la componente conexa neutra de A^G y P_G su complemento ortogonal con respecto a alguna polarización G -invariante, y cuyas fibras son isomorfas a P_G/G . Dado que P_G^G es finito, sabemos que las fibras son isomorfas a productos de espacios proyectivos. En este trabajo estudiaremos cómo son los cocientes suaves A/G en el caso de que A^G no sea finito obteniendo así una clasificación explícita si G tiene una representación irreducible en $T_0(P_G)$, que llamaremos caso irreducible, y una reducción del caso general al caso irreducible concluyendo así la clasificación.

Índice general

Índice general	v
1 Introducción	vi
1.1. Contexto	vi
1.2. Resultados principales	vii
1.3. Estructura de la tesis	x
2 Sobre subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$	xi
3 Grupo de automorfismos con representación irreducible	xxvi
3.1. Clasificación de los fibrados con (P_G, G) de tipo α	xvii
3.2. Clasificación de los fibrados con (P_G, G) de tipo β	xxi
3.3. Clasificación de los fibrados con (P_G, G) de tipo γ	xxiv
4 Caso general	xxvi
Bibliografía	xxxI

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Las variedades suaves aparecen a menudo en el estudio de la geometría algebraica, por lo que clasificarlas sería natural. En esta tesis nos concentraremos en aquellas que provienen del cociente de una variedad abeliana por la acción de un grupo finito que fije al 0 de la variedad. Recordemos que una variedad abeliana compleja, a la que nos referiremos simplemente como variedad abeliana, es un toro complejo tal que existe una inmersión¹ en algún espacio proyectivo. Históricamente los ejemplos más conocidos son las curvas elípticas, que son variedades abelianas de dimensión 1, y las jacobianas asociadas a una curva compleja, o una Superficie de Riemann.

Para precisar mejor el objeto de estudio de esta tesis, sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$, el grupo de automorfismos que fijan al 0 de A , tal que el cociente A/G sea suave.

En [ALA19], R. Auffarth y G. Lucchini Arteche prueban que, si $G \leq \text{Aut}_0(A)$ es finito, A/G puede ser vista como una fibración sobre otra variedad abeliana y caracterizan estas fibras. Es más, prueban que si A_0 es la componente conexa de A^G , los puntos fijos por la acción de G en A , que contiene al 0 y P_G la subvariedad complementaria dada por alguna polarización G -invariante, entonces existe una fibración $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$ cuyas fibras son isomorfas a P_G/G (Proposición 2.9 [ALA19]). Éstas son suaves si y sólo si A/G lo es.

El grupo G tiene una acción natural sobre P_G , que resulta ser la subvariedad abeliana de A más grande en donde G actúa con finitos puntos fijos. Entonces podemos ver a G como un subgrupo de $\text{Aut}_0(P_G)$. Cuando G tiene una representación irreducible en $T_0(P_G)$ y P_G/G es suave podemos decir que P_G/G es isomorfa a \mathbb{P}^n , por el resultado siguiente.

Teorema 1.1 (Teorema 1.1 [ALA19] - Teorema 1.1 [ALAQ19]). *Sea A una variedad abeliana y sea G un subgrupo finito no trivial de $\text{Aut}_0(A)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A/G es suave y G tiene una representación irreducible en $T_0(A)$.
2. A/G es isomorfo a \mathbb{P}^n .
3. Existe una curva elíptica E tal que $A \cong E^n$ y el par (A, G) satisface alguna de las siguientes afirmaciones:
 - a) $G \cong C^n \rtimes S_n$, donde C es un subgrupo cíclico no trivial de automorfismos E que fijan el origen de orden 2,3,4 ó 6. La acción de C^n es coordenada a coordenada y S_n las permuta.

¹Esta debe ser una función holomorfa.

b) $G \cong S_{n+1}$ y actúa en

$$A \cong \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\},$$

permutando las coordenadas.

c) A tiene dimensión 2, $E \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ y G es el subgrupo de 16 elementos de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & i+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

actuando sobre A de la forma obvia.

El grupo G no siempre tiene una representación irreducible en $T_0(P_G)$. Sin embargo, gracias al siguiente teorema (Teorema 2.7 de [ALA19]) podremos ver que la subvariedad P_G , el grupo G y las fibras P_G/G se descomponen de manera conveniente y nos permitirá relacionar el caso general con el caso cuando G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$.

Teorema 1.2. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\mathrm{Aut}_0(A)$. Supongamos que $\dim(A^G) = 0$ y A/G es suave. Entonces, existen subvariedades abelianas A_1, \dots, A_r de A y $G_i \leq \mathrm{Aut}_0(A_i)$ tales que $G \cong G_1 \times \dots \times G_r$, $A \cong A_1 \times \dots \times A_r$ y los pares (A_i, G_i) satisfacen las condiciones del Teorema [1.1]. Además,*

$$A/G \cong A_1/G_1 \times \dots \times A_r/G_r.$$

El cociente P_G/G es suave ya que A/G es suave y, como se prueba en el Capítulo [4] la dimensión de P_G^G es 0. Ahora, por el Teorema [1.2] existen $P_1, \dots, P_r \subset A$ subvariedades abelianas de A y $G_i \leq \mathrm{Aut}_0(P_i)$ subgrupos tales que $P_G \cong P_1 \times \dots \times P_r$, $G \cong G_1 \times \dots \times G_r$ y

$$P_G/G \cong P_1/G_1 \times \dots \times P_r/G_r.$$

Como cada uno de los pares (P_i, G_i) satisface las condiciones del Teorema [1.1] se tiene que P_G/G es un producto de espacios proyectivos

$$P_G/G \cong \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}.$$

De esta manera, R. Auffarth y G. Lucchini Arteche prueban que las variedades abelianas con cocientes suaves por subgrupos finitos del grupo de automorfismos que fijan al 0 pueden verse como fibraciones sobre otras variedades abelianas y cuyas fibras son isomorfas a productos de espacios proyectivos. Esta clasificación no está completa, pues no dice cómo se relacionan las fibras. Esta tesis completa este resultado.

1.2. Resultados principales

Consideremos el morfismo

$$\begin{aligned} A_0 \times P_G &\rightarrow A; \\ (a, b) &\mapsto a - b, \end{aligned} \tag{1.1}$$

que es una isogenia entre variedades abelianas de núcleo

$$\Delta := \{(a, a) \in A_0 \times P_G \mid a \in A_0 \cap P_G\}.$$

El subgrupo Δ actúa por traslación en $A_0 \times P_G$. El grupo G actúa por coordenadas sobre $A_0 \times P_G$ y conmuta con la acción de Δ pues este último actúa trasladando por elementos

G -invariantes. Luego, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 A_0 \times P_G & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A \\
 \downarrow /G & & \downarrow /G \\
 A_0 \times (P_G/G) & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A_0/(A_0 \cap P_G).
 \end{array} \tag{1.2}$$

En el cuadrado inferior la flecha $A_0 \times (P_G/G) \rightarrow A_0$ es una proyección en la primera coordenada y por tanto es una trivialización de la fibración $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$. La acción de Δ baja hacia $A_0 \times (P_G/G)$ y sobre A_0 sigue siendo por traslación. Así, para dar una clasificación completa de estos fibrados bastará con estudiar las acciones de Δ sobre P_G/G que son inducidas por las traslaciones por elementos de $A_0 \cap P_G$. En otras palabras, debemos estudiar el diagrama conmutativo en las fibras

$$\begin{array}{ccc}
 P_G & \xrightarrow{\quad t \quad} & P_G \\
 \downarrow G & & \downarrow G \\
 P_G/G & \xrightarrow{\quad t_G \quad} & P_G/G,
 \end{array} \tag{1.3}$$

donde t es alguna traslación por algún elemento no nulo de $A_0 \cap P_G$ y t_G el morfismo inducido en el cociente. Notemos que el $0 \in P_G$ no queda fijo por t y $\pi_G t(0) = t_G \pi_G(0) = t_G(0)$. Si t_G fuese la identidad, tendríamos $\pi_G t(0) = \pi_G(0)$. Sin embargo, $\pi_G(0)$ tiene como única preimagen al 0 y $t(0) \neq 0$. Esto nos dice que $A_0 \cap P_G$ actúa de manera fiel sobre P_G/G y en particular que si $A_0 \cap P_G \neq \{0\}$, entonces la fibración $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$ no es la trivial. Esto prueba el siguiente lema.

Lema 1.3. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Si A_0 es la parte conexa de A^G que contiene al 0 y P_G su complemento ortogonal, entonces la acción de $A_0 \cap P_G$ en P_G/G inducida por la acción de $A_0 \cap P_G$ en P_G es fiel.*

De esta manera, dar una clasificación de estos fibrados se traduce en estudiar las representaciones fieles de Δ en $\text{Aut}(P_G/G)$, donde P_G/G es un producto de espacios proyectivos.

Cuando G tiene una representación irreducible en $T_0(P_G)$ se obtiene el primer resultado de esta tesis.

Teorema 1.4. *Sea A una variedad abeliana de dimensión n y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Denotemos por A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G el complemento ortogonal de A_0 por una polarización G -invariante. Si G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$, entonces existe una trivialización*

$$\begin{array}{ccc}
 A_0 \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A_0/(A_0 \cap P_G),
 \end{array}$$

de la fibración $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$, con $\Delta \cong A_0 \cap P_G$, donde Δ actúa por traslación en A_0 y en las fibras como una de las siguientes:

1. $\Delta \cong \{0\}$ y por tanto actúa trivialmente.

2. $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y actúa con un generador $\delta : [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : -z_1 : \cdots : (-1)^n z_n]$.
3. $\Delta \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y actúa con un generador $\delta : [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \zeta_3 z_1 : \cdots : \zeta_3^n z_n]$, con ζ_3 una raíz cúbica primitiva de la unidad.
4. $\Delta \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ y existe un conjunto de generadores que actúan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\delta &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : -z_1 : \cdots : (-1)^n z_n], \\ \delta' &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_n : z_{n-1} : \cdots : z_1 : z_0].\end{aligned}$$

5. Δ es isomorfo a algún subgrupo de $(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^2$ y existe un conjunto de generadores que actúan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\delta &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \zeta_{n+1}^a z_1 : \cdots : \zeta_{n+1}^{an} z_n], \\ \delta' &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_{n+1-b} : \cdots : z_{n-1} : z_n : z_0 : \cdots : z_{n-b}],\end{aligned}$$

con a y b enteros positivos, $b|(n+1)$ y $a|b$, donde $z_{-1} := z_n$.

Cuando G no tiene una representación irreducible, por el Teorema [1.2](#) existen subvariedades abelianas P_1, \dots, P_r de P_G y subgrupos G_1, \dots, G_r que descomponen respectivamente a P_G y G en productos directos. En este caso la isogenia [\(1.1\)](#) toma la forma

$$\begin{aligned}A_0 \times P_1 \times \cdots \times P_r &\rightarrow A; \\ (a, b_1, \dots, b_r) &\mapsto a - (b_1 + \cdots + b_r),\end{aligned}$$

con núcleo Δ .

Sea $\mathcal{P}_i := \prod_{k \in \{1, \dots, r\} - \{i\}} P_k$. De esta forma obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}A_0 \times P_1 \times \cdots \times P_r & \xrightarrow{\Delta} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 \times P_i & \xrightarrow{\Delta_i} & B_i := A/\mathcal{P}_i,\end{array}$$

donde \mathcal{P}_i actúa en A trasladando por la suma de las coordenadas y con Δ_i el núcleo de la flecha inferior. Estos Δ_i , como se prueba en el Capítulo [4](#), son todos isomorfos a Δ y por tanto el morfismo inducido $A_0 \times P_i \rightarrow B_i$ es una isogenia. La acción de G_i en A es compatible con el cociente por \mathcal{P}_i y por tanto G_i actúa en B_i . Por la Proposición 2.9 de [\[ALA19\]](#), para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ existe una fibración $B_i/G_i \rightarrow B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_{G_i})$, donde $B_{i,0}$ es la componente conexa de B_i^G que contiene al 0 y P_{G_i} es su complemento ortogonal dado por una polarización G_i -invariante. El morfismo $A_0 \times P_i \rightarrow B_i$ induce un morfismo $A_0 \times (P_i/G_i) \rightarrow B_i/G_i$, que a su vez induce un morfismo $A_0 \rightarrow B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_{G_i})$. Luego, como P_i/G_i es suave y $P_i/G_i \cong \mathbb{P}^{n_i}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}A_0 \times P_i & \xrightarrow{/\Delta_i} & B_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 \times \mathbb{P}^{n_i} & \xrightarrow{/\Delta_i} & B_i/G_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{/\Delta} & B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_{G_i}),\end{array}$$

donde $B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_{G_i}) \cong A_0/\Delta$ y el cuadrado inferior es una trivialización de la fibración $B_i/G_i \rightarrow A_0/\Delta$. Todos los B_i/G_i son fibraciones sobre A_0/Δ y satisfacen las condiciones del Teorema [1.4](#). El segundo resultado de esta tesis afirma que la fibración $A/G \rightarrow A_0/\Delta$ es el producto fibrado sobre A_0/Δ de las fibraciones $B_i/G_i \rightarrow A_0/\Delta$, lo que concluye la clasificación.

Teorema 1.5. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Denotemos por A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G el complemento ortogonal de A_0 por una polarización G -invariante. Sea $\Delta := A_0 \cap P_G$. Existen pares $(B_1, G_1), \dots, (B_r, G_r)$ de variedades abelianas B_i y subgrupos G_i de $\text{Aut}_0(B_i)$ que satisfacen las hipótesis del Teorema [1.4](#) tales que*

$$A/G \cong B_1/G_1 \times_{A_0/\Delta} \cdots \times_{A_0/\Delta} B_r/G_r \quad \text{y} \quad G \cong G_1 \times \cdots \times G_r,$$

donde los morfismos $B_i/G_i \rightarrow A_0/\Delta$ corresponden a las fibraciones del Teorema [1.4](#).

1.3. Estructura de la tesis

En el Capítulo [2](#) se clasifican, módulo conjugación, algunos subgrupos finitos de $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$. Esto pues, como se mencionó, la clasificación de estos fibrados se reduce a estudiar las representaciones fieles de Δ en $\text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ que son inducidas por la acción de Δ en P_G como en el diagrama [1.3](#).

En el Capítulo [3](#) se prueba el Teorema [1.4](#), correspondiente al caso cuando G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$. En este capítulo, los pares (P_G, G) se clasifican en pares de tipo α , β y γ , que corresponden a los tres casos del Teorema [1.1](#) (cf. Definición [3.1](#)). En la Sección [3.1](#) se estudia el caso de tipo α y cuyo resultado principal abarca los puntos [2](#), [3](#) y [4](#) del Teorema [1.4](#). La Sección [3.2](#) se hace cargo de los pares de tipo β y cuyo resultado principal es el caso [5](#) del Teorema [1.4](#). Por último, en la Sección [3.3](#), se estudia el caso γ en el cual vemos que no hay otras maneras de pegar las fibras, pues éstas corresponden a las ya estudiadas en la Sección [3.1](#).

En el Capítulo [4](#) se prueba el Teorema [1.5](#).

Capítulo 2

Sobre subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$

La fibración $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$, dada por la Proposición 2.9 en [ALA19], tiene fibras isomorfas a P_G/G y es trivializada por el morfismo $A_0 \times (P_G/G) \rightarrow A_0$ como en el diagrama (1.2). Lo que se busca entender en este trabajo es cómo se relacionan las fibras; es decir, buscamos entender el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{t} & P_G \\ \downarrow /G & & \downarrow /G \\ P_G/G & \xrightarrow{t_G} & P_G/G, \end{array} \quad (2.1)$$

donde t es alguna traslación por algún elemento no nulo de $A_0 \cap P_G$ y t_G el morfismo inducido en el cociente. Por el Lema 1.3, la acción de Δ en P_G (que está dada por traslaciones por elementos de $A_0 \cap P_G$) baja de manera fiel a P_G/G y por ende, entender el diagrama (2.1) se traduce en entender las representaciones fieles de Δ en $\mathrm{Aut}(P_G/G)$ que provienen de las traslaciones en P_G . Por el Teorema 1.5 podemos reducirnos al caso en que G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$. En este caso, por el Teorema 1.1 se tiene que P_G/G es isomorfa a \mathbb{P}^n . De esta forma, el problema se reduce a estudiar las representaciones fieles de Δ en $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ que provienen de traslaciones en P_G como en el diagrama (2.1). Por lo tanto, estudiar ciertos subgrupos de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ es esencial para este trabajo.

Dado que \mathbb{C} es algebraicamente cerrado, y por tanto es su propia clausura separable, se tiene el siguiente resultado como caso particular de la Proposición 4.1 del artículo [Bea19] probado por A. Beauville.

Proposición 2.1. *Dos subgrupos finitos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ que son isomorfos son conjugados.*

Esta proposición tiene el siguiente corolario, el cual nos dice que los grupos que aparecen en el caso de tipo α de la Sección 3.1 son únicos salvo conjugación.

Corolario 2.2. *Todos los subgrupos cíclicos de orden n de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ son conjugados. También lo son los subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ isomorfos al grupo de Klein.*

La siguiente proposición y corolario son usados en la clasificación del caso tipo γ en la Sección 3.3 en donde sólo aparecen los grupos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Proposición 2.3. *Todos los subgrupos isomorfos al grupo de Klein en $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ son conjugados.*

Demostración. La función $\varphi : \mathrm{SL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ que asigna a cada elemento de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ su clase en $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ es sobreyectiva y tiene núcleo de orden 3. Todo subgrupo isomorfo al grupo

de Klein en $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ proviene de un subgrupo de orden 12 en $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, por el Teorema de Correspondencia de Noether. Sea $G < \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ de orden 12 tal que $\varphi(G) \cong K$, el grupo de Klein. Dado que tiene orden 12 podemos tomar $H < G$ un 2-Sylow. La intersección de H con $\ker(\varphi)$ es trivial, pues tienen órdenes coprimos, por lo que H se inyecta en $\varphi(G) \cong K$ y como tienen el mismo orden se tiene que son isomorfos. Luego, H es isomorfo al grupo de Klein. Esto prueba que todo subgrupo de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ isomorfo al grupo de Klein, viene de algún subgrupo de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ isomorfo al grupo de Klein.

De la teoría de representaciones, sabemos que toda representación de un grupo abeliano finito en $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ tiene una representación equivalente dada por matrices diagonales. Queremos las representaciones fieles de K en $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ que además están en $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$, por lo que nos bastará con encontrar las que tengan determinante 1.

Supongamos que $K = \langle a, b \mid a^2 = b^2, ab = ba \rangle$ y $\psi : K \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ es una representación fiel, que podemos considerar diagonal, y que la imagen de todos los elementos tienen determinante 1. Como $\psi(a)^2 = \mathrm{id}_3$ y $\psi(b)^2 = \mathrm{id}_3$, los elementos en la diagonal de $\psi(a)$ y $\psi(b)$ son raíces cuadradas de la unidad. Para que $\psi(a) \neq \mathrm{id}_3$, $\psi(b) \neq \mathrm{id}_3$ y los determinantes sean 1, en la diagonal deben haber exactamente dos -1 y un 1. Hay sólo tres matrices diagonales de orden 2 en $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Luego, salvo orden, hay una única representación diagonal de K

$$\psi(K) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

que satisface las condiciones. Ésta es la única clase de conjugación en $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. Por lo tanto, hay una única clase de conjugación en $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ para los subgrupos isomorfos al grupo de Klein. \square

De igual manera que en la demostración anterior, se prueba que toda representación fiel de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ viene de una representación en $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$. De la demostración anterior sabemos que sólo hay tres matrices diagonales de orden 2 en $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$ y son conjugadas. Por lo tanto, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.4. *Todos los elementos de orden 2 en $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ son conjugados.*

En la Sección [3.2](#) del capítulo siguiente aparece el grupo $(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^2$ y todos sus subgrupos. La siguiente proposición nos ayudará con este caso.

Para decir que dos elementos A y B en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tienen clases equivalentes en $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ usaremos la notación $A \equiv B$.

Proposición 2.5. *Sean $\phi, \psi \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ actuando en \mathbb{P}^{n-1} tales que*

- *tienen orden n y conmutan,*
- $|\mathrm{Fix}(\phi)| = |\mathrm{Fix}(\psi)| = n,$
- $\mathrm{Fix}(\phi) \cap \mathrm{Fix}(\psi) = \emptyset.$

Entonces, existe $\xi \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\xi\phi\xi^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_n^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \zeta_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad y \quad \xi\psi\xi^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Para probar esta proposición, primero probaremos el siguiente lema.

Lema 2.6. Sean

$$M \equiv \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_n \\ v_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad N \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

con $v_1 \cdots v_n = 1$, dos clases en $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$. Existe $D \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonal tal que $D^{-1}MD \equiv N$.

Demostración. Sea D la clase dada por la matriz diagonal

$$D \equiv \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_1 v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & v_1 v_2 \cdots v_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} D^{-1}ND &\equiv \begin{pmatrix} v_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (v_1 v_2)^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & (v_1 v_2 \cdots v_{n-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_1 v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & v_1 v_2 \cdots v_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} v_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (v_1 v_2)^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & (v_1 v_2 \cdots v_{n-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v_1 v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & v_1 v_2 \cdots v_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_n \\ v_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene del hecho que $(v_1 \cdots v_{n-1})^{-1} = v_n$. \square

Demostración de la Proposición 2.5. Sean $p_1, \dots, p_n \in \text{Fix}(\phi)$ y $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ levantamientos de los p_i . Sea Φ un levantamiento de ϕ a $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. Dado que ϕ tiene exactamente n puntos fijos, tenemos que Φ tiene n valores propios distintos. Esto pues si dos puntos compartiesen el mismo valor propio habría al menos un plano fijo por Φ y por tanto ϕ tendría infinitos puntos fijos. Los vectores v_1, \dots, v_n son una base de \mathbb{C}^n . Luego, salvo un cambio de base

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix},$$

donde los ϕ_i son los valores propios de Φ .

Probemos que ψ actúa en $\text{Fix}(\phi)$. Sea $p \in \text{Fix}(\phi)$. Como ψ y ϕ conmutan, se tiene que

$$\phi\psi(p) = \psi\phi(p) = \psi(p),$$

lo que implica que ψ actúa en $\text{Fix}(\phi)$. Esto nos permite ver a ψ como un elemento del grupo de permutaciones de $\text{Fix}(\phi)$. Supongamos que ψ no es un n -ciclo. Escribamos ψ como producto de ciclos disjuntos y sean σ y τ dos tales ciclos (posiblemente de largo 1). Sean $p_{a_1}, \dots, p_{a_m}, p_{b_1}, \dots, p_{b_l} \in \text{Fix}(\phi)$ tales que

$$\psi(p_{a_i}) = \sigma(p_{a_i}) = \begin{cases} p_{a_{i+1}} & \text{si } 1 \leq i \leq m-1, \\ p_{a_1} & \text{si } i = m, \end{cases}$$

y

$$\psi(p_{b_i}) = \tau(p_{b_i}) = \begin{cases} p_{b_{i+1}} & \text{si } 1 \leq i \leq l-1, \\ p_{b_1} & \text{si } i = l. \end{cases}$$

Sea $\Psi \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un levantamiento de ψ en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Las matrices Φ y Ψ no necesariamente conmutan. Para ciertos $\psi_{a_1}, \dots, \psi_{a_m}, \psi_{b_1}, \dots, \psi_{b_l} \in \mathbb{C}^*$,

$$\Psi(v_{a_i}) = \begin{cases} \psi_{a_i} v_{a_{i+1}} & \text{si } 1 \leq i \leq m-1, \\ \psi_{a_m} v_{a_1} & \text{si } i = m, \end{cases}$$

y

$$\Psi(v_{b_i}) = \begin{cases} \psi_{b_i} v_{b_{i+1}} & \text{si } 1 \leq i \leq l-1, \\ \psi_{b_l} v_{b_1} & \text{si } i = l. \end{cases}$$

Sea $\Sigma \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un levantamiento de σ y $T \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un levantamiento de τ . Como σ y τ son también elementos de $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$, podemos suponer que $\det(\Sigma) = \det(T) = 1$ y por tanto $\psi_{a_1} \cdots \psi_{a_m} = 1$ y $\psi_{b_1} \cdots \psi_{b_l} = 1$. Ahora, definamos

$$v_a := v_{a_1} + \psi_{a_1} v_{a_2} + \psi_{a_1} \psi_{a_2} v_{a_3} + \cdots + \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_{m-1}} v_{a_m},$$

y

$$v_b := v_{b_1} + \psi_{b_1} v_{b_2} + \psi_{b_1} \psi_{b_2} v_{b_3} + \cdots + \psi_{b_1} \cdots \psi_{b_{l-1}} v_{b_l}.$$

Estos vectores son linealmente independientes, pues pertenecen a dos subespacios con intersección trivial y ninguno de ellos es nulo. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} \Psi(v_a) &= \Psi(v_{a_1} + \psi_{a_1} v_{a_2} + \psi_{a_1} \psi_{a_2} v_{a_3} + \cdots + \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_{m-1}} v_{a_m}) \\ &= \Psi(v_{a_1}) + \psi_{a_1} \Psi(v_{a_2}) + \psi_{a_1} \psi_{a_2} \Psi(v_{a_3}) + \cdots + \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_{m-1}} \Psi(v_{a_m}) \\ &= \psi_{a_1} v_{a_2} + \psi_{a_1} \psi_{a_2} v_{a_3} + \cdots + \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_{m-1}} v_{a_m} + \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_m} v_{a_1} \\ &= v_a + \psi_{a_1} \cdots \psi_{a_m} v_{a_1} = v_a, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi(v_b) &= \Psi(v_{b_1} + \psi_{b_1} v_{b_2} + \psi_{b_1} \psi_{b_2} v_{b_3} + \cdots + \psi_{b_1} \cdots \psi_{b_{l-1}} v_{b_l}) \\ &= \Psi(v_{b_1}) + \psi_{b_1} \Psi(v_{b_2}) + \psi_{b_1} \psi_{b_2} \Psi(v_{b_3}) + \cdots + \psi_{b_1} \cdots \psi_{b_{l-1}} \Psi(v_{b_l}) \\ &= \psi_{b_1} v_{b_2} + \psi_{b_1} \psi_{b_2} v_{b_3} + \cdots + \psi_{b_1} \cdots \psi_{b_{l-1}} v_{b_l} + \psi_{b_1} \cdots \psi_{b_l} v_{b_1} \\ &= v_b + \psi_{b_1} \cdots \psi_{b_l} v_{b_1} = v_b, \end{aligned}$$

es decir, son puntos fijos de Ψ . Entonces, las proyecciones de v_a y v_b en \mathbb{P}^{n-1} , que son distintas, son puntos fijos de ψ y tienen el mismo valor propio. Esto es una contradicción, pues como

tiene exactamente n puntos fijos, cualquier levantamiento tiene n valores propios distintos. Esto implica que ψ es un n -ciclo y por tanto, salvo reordenar la base $\{v_1, \dots, v_n\}$, se tiene que

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} 0 & \psi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \psi_n \\ \psi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix}.$$

Por el Lema [2.6](#), salvo cambio de base por una matriz diagonal, se tiene que

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Psi \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\phi_1 = 1$. Finalmente, como ψ y ψ conmutan se tiene que

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{n-1} \\ \phi_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $\phi_2 = \lambda$, $1 = \lambda\phi_n$ y $\phi_i = \lambda\phi_{i-1}$ para $i \in \{3, \dots, n\}$. Lo que implica que $\phi_i = \lambda^{i-1}$ y como todos los ϕ_i son diferentes, se tiene que λ es una raíz primitiva n -ésima de la unidad. Esto prueba el resultado. \square

Capítulo 3

Clasificación de fibrados que provienen de un grupo de automorfismos con representación irreducible

Durante todo este capítulo A es una variedad abeliana, G es un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave, A_0 es la parte conexa de A^G que contiene al 0 y P_G es el complemento ortogonal de A_0 con respecto a una polarización G -invariante de A . En este capítulo supondremos que G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$, luego por el Teorema [1.1](#) sabemos que $P_G/G \cong \mathbb{P}^n$. El grupo Δ actúa sobre $A_0 \times P_G$ trasladando por coordenadas. La traslación es por elementos de $A_0 \cap P_G$, los cuales son G -invariantes, por lo que la acción baja al cociente y obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A_0 \times P_G & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A \\
 \downarrow / G & & \downarrow / G \\
 A_0 \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A_0 / (A_0 \cap P_G),
 \end{array}$$

donde el morfismo horizontal superior es la isogénia [1.1](#) y Δ su núcleo. Por el Lema [1.3](#) sabemos que la acción inducida de Δ sobre \mathbb{P}^n es fiel. La acción de Δ sobre $A_0 \times \mathbb{P}^n$ es por traslaciones en la primera coordenada y por automorfismos de \mathbb{P}^n en la segunda. Estudiar la relación entre las fibras corresponde a estudiar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 P_G & \xrightarrow{\quad t \quad} & P_G \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad t_G \quad} & \mathbb{P}^n,
 \end{array}$$

donde t es una traslación por algún elemento de $A_0 \cap P_G$ y t_G es la función de transición inducida sobre las fibras que hace conmutar al diagrama. La subvariedad P_G y el grupo G , en el contexto del Teorema [1.1](#) están clasificados como pares (P_G, G) . Estos serán separados en pares de tipo α , β y γ según la siguiente definición y tratados de manera independiente en cada una de las secciones de este capítulo.

Definición 3.1. Sean P_G y G como en el Teorema 1.1. Los pares (P_G, G) que cumplen las condiciones de a) los llamaremos *de tipo α* , a los que cumplen las de b) los llamaremos *de tipo β* y a los pares como en c) del Teorema 1.1 los llamaremos *de tipo γ* .

3.1. Clasificación de los fibrados con (P_G, G) de tipo α

Si el par (P_G, G) es de tipo α , la variedad abeliana P_G es isomorfa al autoproducto de una curva elíptica E y G es isomorfo a $C^n \rtimes S_n$, con $n = \dim(P_G)$ y C un subgrupo de $\text{Aut}(E)$. La acción de C^n es coordenada a coordenada y S_n las permuta.

Bajo las condiciones anteriores se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Denotemos por A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G el complemento ortogonal de A_0 por una polarización G -invariante. Si G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$ y el par (P_G, G) es de tipo α , entonces existe una trivialización*

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A_0 / (A_0 \cap P_G), \end{array}$$

de la fibrición $A/G \rightarrow A_0 / (A_0 \cap P_G)$, con $\Delta \cong A_0 \cap P_G$, donde Δ actúa por traslación en A_0 y en las fibras como una de las siguientes

1. $\Delta \cong \{0\}$ y por tanto actúa trivialmente.
2. $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y actúa con un generador $\delta : [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : -z_1 : \cdots : (-1)^n z_n]$.
3. $\Delta \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y actúa con un generador $\delta : [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \zeta_3 z_1 : \cdots : \zeta_3^n z_n]$.
4. $\Delta \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ y existe un conjunto de generadores que actúan de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \delta &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : -z_1 : \cdots : (-1)^n z_n], \\ \delta' &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_n : z_{n-1} : \cdots : z_1 : z_0]. \end{aligned}$$

Sea $P_G \cong E^n$, para alguna curva elíptica E , y $G \cong C^n \rtimes S_n$ con C un subgrupo de $\text{Aut}(E)$ y por tanto un grupo cíclico de orden 2, 3, 4 ó 6. El conjunto de puntos fijos de P_G por la acción de G es

$$P_G^G \cong \{(x, \dots, x) \in E^n \mid x \in E^C\} \cong E^C.$$

Sea Δ isomorfo a algún subgrupo de P_G^G distinto del trivial. Recordemos que se quiere estudiar cuáles son las funciones de transición entre las fibras; es decir, estudiar la flecha inferior en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{t} & P_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{t_G} & \mathbb{P}^n, \end{array}$$

donde t es una traslación inducida por algún elemento de Δ y t_G es la función de transición inducida por t sobre las fibras y que hace que el diagrama commute. La función $P_G \rightarrow \mathbb{P}^n$ se puede descomponer como

$$P_G \xrightarrow{\quad / C^n \quad} (\mathbb{P}^1)^n \xrightarrow{\quad / S_n \quad} \mathbb{P}^n,$$

donde la función $(\mathbb{P}^1)^n \mapsto \mathbb{P}^n$ está dada por

$$g : (\mathbb{P}^1)^n \mapsto \mathbb{P}^n \\ ([x_1 : y_1], \dots, [x_n : y_n]) \rightarrow [Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i,$$

con $Y = y_1 \cdots y_n$, $Y_i = Y/y_i$, $p_0 \equiv 1$ y

$$p_i(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k_1 < \dots < k_i} z_{k_1} \cdots z_{k_i}.$$

Dado que la acción de Δ en \mathbb{P}^n es fiel tenemos que también lo es la acción inducida en $(\mathbb{P}^1)^n$. Esto reduce el problema a estudiar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^1)^n & \xrightarrow{\bar{t}} & (\mathbb{P}^1)^n \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{t_G} & \mathbb{P}^n, \end{array}$$

donde \bar{t} es la función inducida por t sobre $(\mathbb{P}^1)^n$. La función t traslada por el mismo elemento cada coordenada y por tanto \bar{t} se puede ver como un elemento de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ actuando de manera diagonal en $(\mathbb{P}^1)^n$. Dado que la acción de Δ es fiel en \mathbb{P}^1 se sigue que Δ es isomorfo a algún subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = \text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Si C es de orden 2, entonces $P_G^C \cong E[2]$ y $E[2] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Luego, Δ puede tener orden 2 ó 4. Cuando Δ es de orden 2, por la Proposición [2.2](#) salvo un cambio de base se tiene que

$$\Delta \cong \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

en $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Sea \bar{t} la traslación que no corresponde a $(0, \dots, 0) \in \Delta$. Buscamos $t_G \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$ tal que $t_G g = g \bar{t}$. Entonces,

$$\begin{aligned} t_G \circ g([x_1 : y_1], \dots, [x_n : y_n]) &= g \circ \bar{t}([x_1 : y_1], \dots, [x_n : y_n]) \\ t_G([Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i) &= g([-x_1 : y_1], \dots, [-x_n : y_n]) \\ t_G([Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i) &= [Y^{n-i} p_i(-x_1 Y_1, \dots, -x_n Y_n)]_i \\ t_G([Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i) &= [(-1)^i Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $t_G : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ está dado por $[z_0 : \dots : z_n] \rightarrow [z_0 : -z_1 : \dots : (-1)^n z_n]$. Luego, si Δ es de orden 2 se tiene que

$$\Delta \cong \langle \delta : [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \rightarrow [z_0 : -z_1 : \dots : (-1)^n z_n] \rangle.$$

Esto corresponde al punto [2](#) de la Proposición [3.1](#).

Supongamos que Δ es de orden 4 y por tanto isomorfo al grupo de Klein. Por la Proposición [2.2](#) como Δ actúa fielmente, salvo cambio de base podemos considerar

$$\Delta \cong \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sean $\bar{t}, \bar{u} : P_G \rightarrow P_G$ dos traslaciones por elementos de Δ tal que $\langle t, u \rangle \cong \Delta$. Sin pérdida de generalidad, podemos asignar

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo hecho anteriormente, sabemos que $t_G : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ está dado por

$$[z_0 : \cdots : z_n] \rightarrow [z_0 : -z_1 : \cdots : (-1)^n z_n].$$

Así, sólo necesitamos determinar $u_G : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $u_G g = g u$. Para facilitar los cálculos usaremos los puntos de la forma $([x_1 : 1], \dots, [x_n : 1]) \in (\mathbb{P}^1)^n$ tal que x_i son todos distintos a 0. De esta manera, si $X = x_1 \cdots x_n$ y $X_i = X/x_i$,

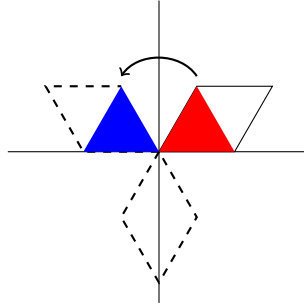
$$\begin{aligned} u_G \circ g([x_1 : 1], \dots, [x_n : 1]) &= g \circ u([x_1 : 1], \dots, [x_n : 1]) \\ u_G([p_i(x_1, \dots, x_n)]_i) &= g([1 : x_1], \dots, [1 : x_n]) \\ u_G([p_i(x_1, \dots, x_n)]_i) &= ([X^{n-i} p_i(X_1, \dots, X_n)]_i) \\ u_G([p_i(x_1, \dots, x_n)]_i) &= ([X^{n-i} X^{n-1} p_{n-i}(1/X_1, \dots, 1/X_n)]_i) \\ u_G([p_i(x_1, \dots, x_n)]_i) &= ([X^{n-1} p_{n-i}(x_1, \dots, x_n)]_i) \\ u_G([p_i(x_1, \dots, x_n)]_i) &= ([p_{n-i}(x_1, \dots, x_n)]_i). \end{aligned}$$

Así, se tiene que $u_G : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ está dada por $[z_0 : \cdots : z_n] \rightarrow [z_n : z_{n-1} : \cdots : z_1 : z_0]$. Finalmente, salvo cambio de base, la acción de Δ en \mathbb{P}^n cumple

$$\Delta \cong \langle \delta : [z_0 : \cdots : z_n] \rightarrow [z_0 : -z_1 : \cdots : (-1)^n z_n], \delta' : [z_0 : \cdots : z_n] \rightarrow [z_n : z_{n-1} : \cdots : z_1 : z_0] \rangle.$$

Esto corresponde al punto [4](#) de la Proposición [3.1](#).

Consideremos el caso cuando C es de orden 3. En este caso la curva elíptica es la curva elíptica con acción de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (Capítulo II, Ejercicio 11 [Deb99](#)). La figura siguiente representa la acción de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sobre la curva elíptica vista en \mathbb{C} .



En la curva elíptica, los puntos del triángulo azul son los del triángulo rojo rotado en $2\pi/3$. Todos los puntos se mueven salvo el centro del triángulo. Lo mismo pasa con el superior. Esto nos dice que los únicos puntos fijos por C , cuando es de orden 3, son los centros de los triángulos y que en la curva elíptica cumple que uno es el doble del otro. De esta forma, se concluye que $E^C \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y por tanto $\Delta \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. La acción de Δ en P_G baja de manera fiel hacia $(\mathbb{P}^1)^n$, por el Lema [1.3](#). La Proposición [2.2](#) nos dice que salvo cambio de base, podemos considerar

$$\Delta \cong \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sea t una traslación inducida por algún elemento no nulo de Δ y $\bar{t} : (\mathbb{P}^1)^n \rightarrow (\mathbb{P}^1)^n$ el morfismo inducido por t . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que a \bar{t} se le asigna

$$\begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, basta determinar t_G . Sea $([x_i : y_i]_i) \in (\mathbb{P}^1)^n$,

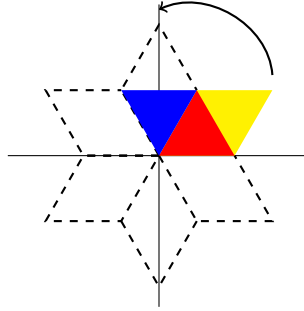
$$\begin{aligned} t_G \circ g([x_i : y_i]_i) &= g \circ \bar{t}([x_i : y_i]_i) \\ t_G([Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i) &= g([\zeta_3 x_i : y_i]_i) \\ t_G([Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i) &= [Y^{n-i} p_i(\zeta_3 x_1 Y_1, \dots, \zeta_3 x_n Y_n)]_i \\ t_G([Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i) &= [\zeta_3^i Y^{n-i} p_i(x_1 Y_1, \dots, x_n Y_n)]_i \end{aligned}$$

Esto es para todo punto en $(\mathbb{P}^1)^n$, y como $g : (\mathbb{P}^1)^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ es una sobreyección, se tiene que $t_G : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ está dada por $[z_0 : \dots : z_n] \rightarrow [z_0 : \zeta_3 z_1 : \dots : \zeta_3^n z_n]$. Así,

$$\Delta \cong \langle \delta : [z_0 : \dots : z_n] \rightarrow [z_0 : \zeta_3 z_1 : \dots : \zeta_3^n z_n] \rangle.$$

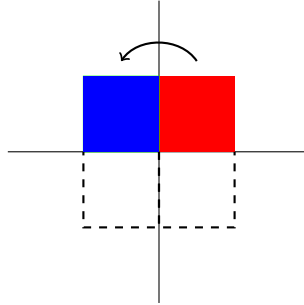
Esto corresponde al punto [3](#) de la Proposición [3.1](#).

En la siguiente figura se muestra la acción por un elemento de orden 6 en la curva elíptica con acción de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$



El triángulo azul corresponde al rojo rotado en $\pi/3$ en \mathbb{C} y en la curva elíptica corresponde al triángulo amarillo. Esto prueba que esta curva elíptica no tiene puntos fijos por la acción de C de orden 6 y por consecuencia $\Delta \cong \{\text{id}\}$. Por lo que en este caso, la trivialización $A_0 \times \mathbb{P}^n \rightarrow A/G$ es un isomorfismo, entonces $A/G \rightarrow A_0/(A_0 \cap P_G)$ es el fibrado trivial. Este resultado está considerado en el punto [1](#) de la Proposición [3.1](#).

Supongamos que C es de orden 4. La curva elíptica con acción de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (Capítulo II, Ejercicio 11 [Deb99](#)) se puede ver en la siguiente figura



El cuadrado azul corresponde a una rotación en $\pi/2$ del cuadrado rojo, por lo que los únicos puntos fijos por la rotación son el centro del cuadrado y el vértice en el origen. El centro del cuadrado es un elemento de orden 2 en la curva elíptica. Luego, si Δ es no trivial se sigue que $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Esto ya fue estudiado más arriba.

Esta serie de resultados prueban la Proposición [3.1](#), que corresponde a los puntos [1](#), [2](#), [3](#) y [4](#) del Teorema [1.4](#).

3.2. Clasificación de los fibrados con (P_G, G) de tipo β

Los pares (P_G, G) de tipo β están compuestos por la variedad abeliana P_G isomorfa a

$$\{(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 0\},$$

y el grupo G de automorfismos de P_G isomorfo a S_{n+1} . Aquí, S_{n+1} actúa permutando las coordenadas. Los puntos fijos en P_G por la acción de G son de la forma

$$P_G^G = \{(x, \dots, x) \in E^{n+1} \mid x \in E[n+1]\}.$$

En este caso, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Denotemos por A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G el complemento ortogonal de A_0 por una polarización G -invariante. Si G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$ y el par (P_G, G) es de tipo β , entonces existe una trivialización*

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A_0 / (A_0 \cap P_G), \end{array}$$

de la fibración $A/G \rightarrow A_0 / (A_0 \cap P_G)$, con $\Delta \cong A_0 \cap P_G$, donde Δ actúa por traslación en A_0 . Existe un conjunto de generadores tal que Δ actúa de la siguiente manera en las fibras

$$\begin{aligned} \delta : [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto [z_0 : \zeta_{n+1}^a z_1 : \dots : \zeta_{n+1}^{an} z_n], \\ \delta' : [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto [z_{n+1-b} : \dots : z_{n-1} : z_n : z_0 : \dots : z_{n-b}], \end{aligned}$$

con a y b enteros positivos, $b|(n+1)$ y $a|b$, donde $z_{-1} = z_n$.

Primero, tratemos de entender el morfismo $P_G \rightarrow \mathbb{P}^n$. Al cocientar P_G por G , lo que hacemos es identificar a un punto $(x_0, \dots, x_n) \in P_G$ con todas sus permutaciones. Esto es equivalente a hablar del divisor $[x_0] + \dots + [x_n]$ de E . Todos los divisores D de E que provienen de algún punto en P_G son de grado $n+1$, efectivos y $A(D) = 0$, donde

$$\begin{aligned} A : \text{Div}(E) &\rightarrow E; \\ \sum n_p [p] &\mapsto \sum n_p p, \end{aligned}$$

es la función de Abel-Jacobi. Además, si un divisor D de E es de grado $n+1$, efectivo y $A(D) = 0$, entonces corresponde a un punto en P_G . Así, podemos identificar a P_G/G con $\{D \in \text{Div}(E) \mid \deg(D) = n+1, A(D) = 0 \text{ y } D \geq 0\}$ y ver la proyección $P_G \rightarrow P_G/G$ como la función

$$\begin{aligned} \{(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 0\} &\rightarrow \{D \in \text{Div}(E) \mid \deg(D) = n+1, A(D) = 0 \text{ y } D \geq 0\} \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto [x_0] + \dots + [x_n]. \end{aligned}$$

Como consecuencia del Teorema de Abel-Jacobi (Capítulo VI, Sección 2 de [Mir95](#)) en una curva elíptica, se tiene que dos divisores efectivos son linealmente equivalentes si y sólo si tienen el mismo grado y la misma imagen bajo la función de Abel-Jacobi. Luego, para todo $\overline{D} \in \text{Div}(E)$ tal que $\deg(\overline{D}) = n+1$, efectivo y $A(\overline{D}) = 0$ se tiene

$$\{D \in \text{Div}(E) \mid \deg(D) = n+1, A(D) = 0 \text{ y } D \geq 0\} = \{D \in \text{Div}(E) \mid D \sim \overline{D} \text{ y } D \geq 0\},$$

por lo que podemos identificar a P_G/G con $\{D \in \text{Div}(E) \mid D \sim \overline{D} \text{ y } D \geq 0\}$, que es el sistema lineal asociado a \overline{D} y que denotaremos por $|\overline{D}|$. Esta identificación es independiente del representante escogido y en lo que sigue haremos el estudio sobre $|(n+1)[0]|$, el sistema lineal asociado a $(n+1)[0] := [0] + \dots + [0]$.

El sistema lineal $|(n+1)[0]|$ es isomorfo a $\mathbb{P}L((n+1)[0])$, donde

$$L((n+1)[0]) = \{f \in \mathcal{M}(E) \mid \text{div}(f) + (n+1)[0] \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Por el Teorema de Riemann-Roch (Capítulo II, Sección 3 de [Deb99](#)), el \mathbb{C} -espacio vectorial $L((n+1)[0])$ es de dimensión $n+1$ y por tanto $\mathbb{P}L((n+1)[0]) \cong \mathbb{P}^n$. De esta manera, podemos identificar a P_G/G con \mathbb{P}^n , pues

$$\mathbb{P}L((n+1)[0]) \cong |(n+1)[0]| = \{D \in \text{Div}(E) \mid \text{deg}(D) = n+1, A(D) = 0 \text{ y } D \geq 0\}.$$

Luego, se tiene una función $P_G \rightarrow \mathbb{P}^n \cong P_G/G$ dada por

$$\begin{aligned} P_G &\rightarrow |(n+1)[0]|; \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto [x_0] + \dots + [x_n]. \end{aligned}$$

Los elementos fijos de P_G por la acción de G son de la forma $(x, \dots, x) \in E^{n+1}$ tal que $x \in E[n+1]$, y por tanto $P_G^G \cong (\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^2$.

Sean $(x, \dots, x), (y, \dots, y) \in P_G^G$ elementos generadores y denotemos por t y u las traslaciones correspondientes a (x, \dots, x) e (y, \dots, y) , respectivamente, en P_G . Sean t_G y u_G los morfismos inducidos sobre las fibras por t y u .

Lema 3.3. *Sean $(x, \dots, x), (y, \dots, y) \in P_G^G$ elementos generadores de P_G^G . Sean t y u las traslaciones por (x, \dots, x) e (y, \dots, y) , respectivamente, cuyos morfismos inducidos al cociente P_G/G son t_G y u_G . Luego, existen $x_t, y_u \in E$ tales que*

$$\text{Fix}(t_G) = \{[x_t + my] + [x_t + my + x] + \dots + [x_t + my + nx] \mid m \in \{0, \dots, n\}\}$$

y

$$\text{Fix}(u_G) = \{[y_u + mx] + [y_u + mx + y] + \dots + [y_u + mx + ny] \mid m \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Además, $\text{Fix}(t_G) \cap \text{Fix}(u_G) = \emptyset$.

Demostración. La imagen de un punto de P_G en $|(n+1)[0]|$ queda fijo por t_G si y sólo si $t(x_0, \dots, x_n) = (x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ para algún $\sigma \in S_{n+1}$. Supongamos que $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$ con σ_1 ciclo no trivial y σ_2 disjunto a σ_1 . Luego, tenemos las relaciones $x_{\sigma_1^i(k)} + x = x_{\sigma_1^{i+1}(k)}$ para $i \in \{0, \dots, \text{ord}(\sigma_1) - 1\}$ y donde k es el inicio del ciclo de σ_1 . Esto implica que $\text{ord}(\sigma_1)x = 0$ y por tanto $\text{ord}(x) \mid \text{ord}(\sigma_1)$. Como x tiene orden $n+1$, esto implica que $\sigma = \sigma_1$. En este caso, $x_{\sigma^i(0)} = x_0 + ix$ y por tanto

$$0 = \sum_{i=0}^n x_{\sigma^i(0)} = \sum_{i=0}^n (x_0 + ix) = (n+1)x_0 + \frac{n(n+1)}{2}x.$$

Esta ecuación en la variable x_0 tiene solución en una curva elíptica y dos soluciones difieren en un elemento de $(n+1)$ -torsión de la curva elíptica, por lo que hay exactamente $(n+1)^2$ soluciones diferentes. Sea x_t una solución de la ecuación anterior. Los divisores

$$D_m := [x_t + my] + [x_t + my + x] + \dots + [x_t + my + nx],$$

con $m \in \{0, \dots, n\}$, son puntos fijos por la acción de t_G y son todos diferentes ya que si $D_m = D_{\tilde{m}}$, entonces existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tal que

$$x_t + \tilde{m}y = x_t + my + kx,$$

y por tanto $kx + (m - \tilde{m})y = 0$. Dado que x e y generan toda la $(n+1)$ -torsión de E , se sigue que $k = 0$ y $m = \tilde{m}$. Sea x' otra solución de la ecuación y sea $D = [x'] + [x' + x] + \cdots + [x' + nx]$ un divisor asociado a esta solución. Como dos soluciones difieren en un elemento de $(n+1)$ -torsión, existen $m, k \in \{0, \dots, n\}$ tales que $x' = x_t + my + kx$ y por tanto

$$\begin{aligned} D &= [x'] + [x' + x] + \cdots + [x' + nx] \\ &= [x_t + my + kx] + [x_t + my + (k+1)x] + \cdots + [x_t + my + (k+n)x] \\ &= [x_t + my] + [x_t + my + x] + \cdots + [x_t + my + nx] = D_m. \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene porque la función $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ dada por $\bar{j} \mapsto \overline{j+k}$ es una biyección y $\text{Div}(E)$ es un grupo abeliano con la suma. Luego, el conjunto de los elementos fijo por t_G es finito y

$$\text{Fix}(t_G) = \{[x_t + my] + [x_t + my + x] + \cdots + [x_t + my + nx] \mid m \in \{0, \dots, n\}\}.$$

La demostración es análoga para $\text{Fix}(u_G)$.

Supongamos que $\text{Fix}(t_G) \cap \text{Fix}(u_G) \neq \emptyset$. Existe $m \in \{0, \dots, n\}$ tal que $[x_t + my] + [x_t + my + x] + \cdots + [x_t + my + nx] \in \text{Fix}(u_G)$, lo que implica que $u(x_t + my, x_t + my + x, \dots, x_t + my + nx)$ es una permutación de $(x_t + my, x_t + my + x, \dots, x_t + my + nx)$ y por tanto existe $k \in \{0, \dots, n\}$ tal que $x_t + my = x_t + (m+1)y + kx$. Esto ocurre, sólo si $y + kx = 0$, lo que es un absurdo ya que x e y son generadores. Luego, $\text{Fix}(t_G) \cap \text{Fix}(u_G) = \emptyset$. □

Recordemos que queremos determinar todas las trivializaciones de la forma

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{/\Delta} & A/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{/\Delta} & A_0/(A_0 \cap P_G), \end{array}$$

con $\Delta \cong A_0 \cap P_G$, donde $A_0 \cap P_G \subset P_G^G$. Esto dependerá de que tanto intersekte la variedad A_0 a P_G . Supondremos que $A_0 \cap P_G = P_G^G$. Esto nos permite estudiar el grupo abstracto Δ como $\langle t_G, u_G \rangle$, pues por el Lema 1.3, $\langle t_G, u_G \rangle \cong P_G^G$. Los morfismos t_G, u_G son automorfismos del sistema lineal $|(n+1)[0]|$ al que identificamos con \mathbb{P}^n y por tanto podemos verlos como elementos de $\text{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ que conmutan. Por el Lema 3.3 tenemos que $|\text{Fix}(t_G)| = n+1$, $|\text{Fix}(u_G)| = n+1$ y $\text{Fix}(t_G) \cap \text{Fix}(u_G) = \emptyset$. Luego, por la Proposición 2.5, se tiene que salvo cambio de base

$$\phi_{t_G} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{n+1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \zeta_{n+1}^n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi_{u_G} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto Δ , salvo cambio de base, es generado por los automorfismos

$$\begin{aligned} \delta &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \zeta_{n+1} z_1 : \cdots : \zeta_{n+1}^n z_n], \\ \delta' &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_n : z_0 : z_1 : \cdots : z_{n-1}]. \end{aligned}$$

Observación 3.1. Esta representación no depende de los generadores escogidos para $\langle t_G, u_G \rangle$, pues si tomamos otro par de generadores t'_G y u'_G el desarrollo es exactamente el mismo.

Consideremos que Δ es isomorfo a un subgrupo propio de P_G^G , el que se identifica con $(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^2$. Todos los subgrupo de $(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^2$ son de la forma $\langle t_G^a, u_G^b \rangle$ en alguna $(\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})$ -base y para algunos $a, b \in \mathbb{Z}$. Así, si Δ es isomorfo a algún subgrupo propio de P_G^G la acción de Δ en P_G/G es generada por

$$\begin{aligned}\delta &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_0 : \zeta_{n+1}^a z_1 : \cdots : \zeta_{n+1}^{an} z_n], \\ \delta' &: [z_0 : \cdots : z_n] \mapsto [z_{n+1-b} : \cdots : z_{n-1} : z_n : z_0 : \cdots : z_{n-b}].\end{aligned}$$

Esto nos permite probar la Proposición [3.2](#), que corresponde al caso [5](#) del Teorema [1.4](#).

3.3. Clasificación de los fibrados con (P_G, G) de tipo γ

Aquí la variedad P_G es isomorfa a E^2 , con E la curva elíptica $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$, y G es el grupo generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Este caso se reduce a lo estudiado en la Sección [3.1](#) y se obtiene el siguiente resultado

Proposición 3.4. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Denotemos por A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G el complemento ortogonal de A_0 por una polarización G -invariante. Si G tiene representación irreducible en $T_0(P_G)$ y el par (P_G, G) es de tipo γ , entonces existe una trivialización*

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A_0 / (A_0 \cap P_G), \end{array}$$

de la fibración $A/G \rightarrow A_0 / (A_0 \cap P_G)$, con $\Delta \cong A_0 \cap P_G$, donde Δ actúa por traslación en A_0 y en las fibras como una de las siguientes

1. $\Delta \cong \{0\}$ y por tanto actúa trivialmente.
2. $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y actúa con un generador $\delta : [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : -z_1 : z_2]$.
3. $\Delta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y existe un conjunto de generadores que actúan de la manera siguiente

$$\begin{aligned}\delta &: [z_0 : z_1 : z_n] \mapsto [z_0 : -z_1 : z_2], \\ \delta' &: [z_0 : z_1 : z_n] \mapsto [z_2 : z_1 : z_0].\end{aligned}$$

En este caso, la curva elíptica es $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ y

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Los puntos fijos por la acción de G son los puntos de la forma $(a+bi, c+di) \in E^2$ que responden al sistema

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} &\equiv_{\mathbb{Z}[i]} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} &\equiv_{\mathbb{Z}[i]} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} &\equiv_{\mathbb{Z}[i]} \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix},\end{aligned}$$

del cual se desprenden las siguientes relaciones en la curva elíptica

$$i(c + di) \equiv c + di \quad \text{y} \quad -i(a + bi) + (i - 1)(c + di) \equiv a + bi.$$

De la primera se sigue que $(i - 1)(c + di) \equiv 0 \in E$ y por tanto $-i(a + bi) \equiv a + bi$. Luego, $(c + d) + (d - c)i \equiv (a - b) + (a + b)i \equiv 0 \in E$. Esto implica que $a + b, a - b, c + d, d - c \in \mathbb{Z}$ y por tanto $2a, 2b, 2c, 2d \in \mathbb{Z}$. Entonces, $a, b, c, d \in \left\{0, \pm \frac{1}{2}\right\}$, es decir,

$$P_G^G \subset \left\langle \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \right\rangle.$$

Como los generadores son soluciones del sistema, se sigue que la contención es una igualdad y por tanto P_G^G es isomorfo al grupo de Klein. Si Δ es isomorfo a algún subgrupo no trivial de P_G^G entonces Δ es de orden 2 o de orden 4. Por el Lema [1.3](#) sabemos que la acción de Δ baja de manera fiel hacia \mathbb{P}^2 . Del Corolario [2.4](#), tenemos que los subgrupos de orden 2 en $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ son todos conjugados y por la Proposición [2.3](#) los subgrupos isomorfos al grupo de Klein también son únicos salvo conjugación. Estos corresponden a los puntos [2](#) y [4](#) de la Proposición [3.1](#) cuando $n = 2$. Por lo que tenemos la Proposición [3.4](#) que corresponde a los puntos [1](#), [2](#) y [3](#) del Teorema [1.4](#) y no agrega nuevos casos a la clasificación.

Capítulo 4

Reducción al caso irreducible

En el capítulo anterior estudiamos cómo se pegan las fibras cuando el grupo de automorfismos tiene una representación irreducible en $T_0(P_G)$. Ahora, consideraremos el caso general.

Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Sea A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G su complemento ortogonal generada por alguna polarización G -invariante.

Lema 4.1. *La dimensión de P_G^G es 0.*

Demostración. Sea P_0 la subvariedad de P_G que corresponde a la componente conexa de P_G^G que contiene al 0. Como esta subvariedad es G -invariante, tenemos que $P_0 \subset A_0$ y por tanto P_0 está contenida en $A_0 \cap P_G$ que tiene dimensión 0. Si $\dim(P_G^G)$ fuese mayor que 0, entonces P_0 tendría dimensión positiva, pero está contenida en $A_0 \cap P_G$ que tiene dimensión 0. Luego, $\dim(P_G^G) = 0$. \square

El Lema 4.1 nos permite descomponer la variedad abeliana P_G con respecto a G mediante el Teorema 1.2. Así, existen $P_1, \dots, P_r \subset P_G$ subvariedades abelianas y subgrupos G_1, \dots, G_r de $\text{Aut}_0(A)$ tales que $P_G \cong P_1 \times \dots \times P_r$, $G \cong G_1 \times \dots \times G_r$ y

$$P_G/G \cong P_1/G_1 \times \dots \times P_r/G_r.$$

Además, el grupo G_i tiene representación irreducible en $T_0(P_i)$ y, por el Teorema 1.1, $P_i/G_i \cong \mathbb{P}^{n_i}$. De esta forma tenemos la isogenia

$$\begin{aligned} A_0 \times P_1 \times \dots \times P_r &\rightarrow A; \\ (a, b_1, \dots, b_r) &\mapsto a - (b_1 + \dots + b_r), \end{aligned}$$

de núcleo Δ . Fijemos una inclusión $\iota : \Delta \rightarrow A_0$ dada por $(a, b_1, \dots, b_r) \mapsto a$ y denotemos por Δ_0 a la imagen $\iota(\Delta)$. Este morfismo está bien definido y es una inclusión, pues para cada $a \in A_0 \cap P_G$ hay únicos $b_i \in P_i$ tales que $a = b_1 + \dots + b_r$. También se tiene que $\Delta_0 = A_0 \cap P_G$.

La fibración $A/G \rightarrow A_0/\Delta_0$ es trivializada de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times P_1 \times \dots \times P_r & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A \\ \downarrow / G & & \downarrow / G \\ A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r} & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\quad / \Delta_0 \quad} & A_0/\Delta_0. \end{array}$$

El objetivo es entender la flecha $A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r} \rightarrow A/G$ para probar el segundo resultado de esta tesis, que corresponde al Teorema [1.5](#).

Teorema 4.2. *Sea A una variedad abeliana y G un subgrupo finito de $\text{Aut}_0(A)$ tal que A/G es suave. Denotemos por A_0 la componente conexa de A^G que contiene al 0 y P_G el complemento ortogonal de A_0 por una polarización G -invariante. Sea $\Delta_0 := A_0 \cap P_G$. Existen pares (B_i, G_i) con $i \in \{1, \dots, r\}$ de variedades abelianas B_i y subgrupos $G_i \leq \text{Aut}_0(B_i)$ que satisfacen las hipótesis del Teorema [1.4](#) tales que*

$$A/G \cong B_1/G_1 \times_{A_0/\Delta_0} \cdots \times_{A_0/\Delta_0} B_r/G_r \quad y \quad G \cong G_1 \times \cdots \times G_r,$$

donde los morfismos $B_i/G_i \rightarrow A_0/\Delta_0$ corresponden a las fibriciones dadas por el Teorema [1.5](#).

Sea $\mathcal{P}_i := \prod_{k \in \{1, \dots, r\} - \{i\}} P_k$, que puede ser vista como una subvariedad de P_G y por tanto de A . La variedad abeliana \mathcal{P}_i actúa por traslación sobre A y con esto podemos definir $B_i := A/\mathcal{P}_i$. También se tiene que \mathcal{P}_i actúa trasladando por coordenadas en $A_0 \times P_1 \times \cdots \times P_r$. Esta acción es compatible con la acción de Δ . Por tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times P_1 \times \cdots \times P_r & \xrightarrow{\quad / \Delta \quad} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 \times P_i & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & B_i. \end{array}$$

Denotemos por Δ_i al núcleo del morfismo $A_0 \times P_i \rightarrow B_i$. Notemos que

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \{(a, b_i) \in A_0 \times P_i \mid a - b_i \in \mathcal{P}_i\} \\ &= \{(a, b_i) \in A_0 \times P_i \mid \text{existe } b \in \mathcal{P}_i \text{ con } a = b_i + b\} \\ &\cong \{(a, b_1, \dots, b_r) \in A_0 \times P_1 \times \cdots \times P_r \mid a = b_1 + \cdots + b_r\} \\ &\cong \Delta, \end{aligned}$$

donde el primer isomorfismo viene del hecho que para cada $a \in A_0 \cap P_G$ existen únicos $b_i \in P_i$ tales que $a = b_1 + \cdots + b_r$. De esta forma, la variedad abeliana $A_0 \times P_i$ es isógena a B_i . Además, P_i se inyecta en B_i ya que el único elemento que comparte con \mathcal{P}_i es el 0. El grupo G_i actúa de manera no trivial en B_i y por la Proposición 2.9 de [\[ALA19\]](#) existe una fibrición $B_i/G_i \rightarrow B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_{G_i})$, donde $B_{i,0}$ es la parte conexa de $B_i^{G_i}$ que contiene al 0 y P_{G_i} es su complemento ortogonal con respecto a alguna polarización G_i -invariante. Podemos notar que la imagen de $A_0 \times \{0\}$ en B_i está contenida en $B_{i,0}$, y de hecho la imagen es toda la componente $B_{i,0}$, lo que da un morfismo sobreyectivo $A_0 \rightarrow B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_{G_i})$. Como P_i se inyecta en B_i , la dimensión de P_i es la misma que la de P_{G_i} y son conexas, resulta que son isomorfas. Así, $P_{G_i}/G_i \cong P_i/G_i \cong \mathbb{P}^{n_i}$ es suave y por tanto, nuevamente por la Proposición 2.9 de [\[ALA19\]](#), se tiene que el cociente B_i/G_i es suave. De esta manera se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_0 \times P_i & \xrightarrow{\quad / \Delta_i \quad} & B_i \\ \downarrow / G_i & & \downarrow / G_i \\ A_0 \times \mathbb{P}^{n_i} & \xrightarrow{\quad / \Delta_i \quad} & B_i/G_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_i), \end{array} \tag{4.1}$$

donde todas las flechas del diagrama son sobreyectivas. El morfismo $A_0 \rightarrow B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_i)$ tiene por núcleo a Δ_0 . En efecto, sea $f : A_0 \times P_i \rightarrow B_i$ y $a \in A_0$ tal que tiene imagen nula en

$B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_i)$. Entonces, $f(a, 0) \in B_{i,0} \cap P_i$. Luego, existe un único $(0, -b_i) \in \{0\} \times P_i$ tal que $f(0, -b_i) = f(a, 0)$ y por tanto $f(a, b_i) = 0$. Esto implica que $(a, b_i) \in \Delta_i$ y por tanto $a \in \Delta_0$. Así,

$$B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_i) \cong A_0/\Delta_0,$$

por lo que podemos ver a cada B_i/G_i como una fibración sobre A_0/Δ_0 .

Hasta este punto, sólo hemos construido las variedades B_i del Teorema 1.5. Los morfismos $A \rightarrow B_i$ inducen morfismos $A/G \rightarrow B_i/G$. Por el Teorema 1.2, el grupo G_j actúa trivialmente sobre B_i cuando $j \neq i$. Esto nos permite ver a G_i como un subgrupo de $\text{Aut}_0(B_i)$ y además $B_i/G = B_i/G_i$. El cociente B_i/G_i es suave pues tiene fibras isomorfas a \mathbb{P}^{n_i} , por lo que los pares (B_i, G_i) son como en el Teorema 1.4. De esta forma tenemos el siguiente diagrama conmutativo dado por los morfismos $A/G \rightarrow B_i/G_i$ y los isomorfismos verticales dados por el diagrama 4.1

$$\begin{array}{ccccc}
 (A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r})/\Delta & \xrightarrow{\quad} & (A_0 \times \mathbb{P}^{n_r})/\Delta_r & & \\
 \cong \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & (A_0 \times \mathbb{P}^{n_i})/\Delta_i & \xrightarrow{\quad} & A_0/\Delta_0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \text{id} \\
 A/G & \xrightarrow{\quad} & (A_0 \times \mathbb{P}^{n_1})/\Delta_1 & \xrightarrow{\quad} & A_0/\Delta_0 \\
 & \searrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & B_1/G_1 & \xrightarrow{\quad} & A_0/\Delta_0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & B_i/G_i & \xrightarrow{\quad} & A_0/\Delta_0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & B_r/G_r & \xrightarrow{\quad} & A_0/\Delta_0
 \end{array}$$

Por lo tanto, para probar que el diagrama de abajo es un producto fibrado bastará con probar que el de arriba es un producto fibrado. Sea Z una variedad con morfismos $q_i : Z \rightarrow (A_0 \times \mathbb{P}^{n_i})/\Delta_i$ tales que el siguiente diagrama conmuta para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{q_j} & (A_0 \times \mathbb{P}^{n_j})/\Delta_j \\
 \Psi \searrow & & \downarrow \varphi_j \\
 (A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r})/\Delta & \xrightarrow{p_j} & (A_0 \times \mathbb{P}^{n_j})/\Delta_j \\
 q_i \searrow & & \downarrow \varphi_j \\
 (A_0 \times \mathbb{P}^{n_i})/\Delta_i & \xrightarrow{\varphi_i} & A_0/\Delta_0
 \end{array} \tag{4.2}$$

Primero veamos la existencia del morfismo Ψ . Sea $z \in Z$ y $q_i(z) = [(x_i, \alpha_i)]_{\Delta_i}$ con $\alpha_i \in \mathbb{P}^{n_i}$, donde $[(x_i, \alpha_i)]_{\Delta_i}$ denota la clase de (x_i, α_i) módulo Δ_i . Dado que para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$

$$\varphi_i q_i(z) = \varphi_j q_j(z),$$

se tiene que para todo $i \in \{2, \dots, r\}$

$$\varphi_1 q_1(z) = \varphi_1([(x_1, \alpha_1)]_{\Delta_1}) = [x_1]_{\Delta_0} = [x_i]_{\Delta_0} = \varphi_i([(x_i, \alpha_i)]_{\Delta_i}) = \varphi_i q_i(z).$$

Esto implica que existe $a_i \in \Delta_0$ tal que $a_i * x_1 = x_i$. Como $a_i \in \Delta_0 = A_0 \cap P_G$, existe un único $b_{ii} \in P_i$ tal que $(a_i, b_{ii}) \in \Delta_i$. Luego, existe $\alpha'_i \in \mathbb{P}^{n_i}$ tal que $(a_i, b_{ii}) * [(x_1, \alpha'_i)]_{\Delta_i} = [(x_i, \alpha_i)]_{\Delta_i}$. De esta forma, se tiene que para todo $i \in \{2, \dots, r\}$

$$q_i(z) = [(x_1, \alpha'_i)]_{\Delta_i}.$$

Esto nos permite definir el morfismo $\Psi : Z \rightarrow (A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r})/\Delta$ dado por

$$z \mapsto [(x_1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r)]_{\Delta},$$

donde $\alpha_1 = \alpha'_1$ y que satisface la conmutatividad del diagrama 4.2 para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Veamos que este morfismo es el único con tal propiedad. Sea $\bar{\Psi} : Z \rightarrow (A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r})/\Delta$ otro morfismo que hace que el diagrama 4.2 conmute para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Sea $z \in Z$ y $\bar{\Psi}(z) = [(x, \beta_1, \dots, \beta_r)]_\Delta$ para algún $(x, \beta_1, \dots, \beta_r) \in A_0 \times \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_r}$. Entonces,

$$p_i \circ \bar{\Psi}(z) = p_i([(x, \beta_1, \dots, \beta_r)]_\Delta) = [(x, \beta_i)]_{\Delta_i} = [(x_1, \alpha'_i)]_{\Delta_i} = q_i(z),$$

pues $p_i \circ \bar{\Psi} = q_i$. Esto implica que existe $(a_i, b_i) \in \Delta_i$ tal que $(a_i, b_i) * (x_1, \alpha'_i) = (x, \beta_i)$. Como la acción de los Δ_i en la primera coordenada es por traslación, se tiene que para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ se cumple que $x = x_1 + a_i$ y por tanto existe $a \in A_0 \cap P_G$ tal que $a = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Luego, como la descomposición de a en P_G es única, $a = b_1 + \dots + b_r$. Así, se tiene que

$$(a, b_1, \dots, b_r) * (x_1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r) = (x, \beta_1, \dots, \beta_r),$$

lo que implica que $[(x_1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r)]_\Delta = [(x, \beta_1, \dots, \beta_r)]_\Delta$, y por tanto se tiene la unicidad

$$\Psi(z) = [(x_1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r)]_\Delta = [(x, \beta_1, \dots, \beta_r)]_\Delta = \bar{\Psi}(z).$$

Esto implica que existe un único morfismo $\Psi : Z \rightarrow A/G$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i, j \in \{1, \dots, r\}$:

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & \Psi & & q_j & \\ & \searrow & & & \\ & & A/G & \xrightarrow{p_j} & B_j/G_j \\ & \searrow & \downarrow p_i & & \downarrow \varphi_j \\ & & B_i/G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & A_0/\Delta_0 \end{array}$$

Esto prueba que

$$A/G \cong B_1/G_1 \times_{A_0/\Delta_0} \dots \times_{A_0/\Delta_0} B_r/G_r,$$

con los pares (B_i, G_i) como en el Teorema 1.4. Dado que $A/\Delta_0 \cong A/\Delta$, finalmente se tiene el Teorema 4.2.

Observación 4.1. La trivialización $A_0 \times \mathbb{P}^{n_i} \rightarrow A_0$ sobre $B_i/G_i \rightarrow A_0/\Delta_0$ dada por el diagrama 4.1 no corresponde a la del Teorema 1.4. Tal trivialización corresponde a la del cuadrado conmutativo de la derecha en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} A_0 \times \mathbb{P}^{n_i} & \longrightarrow & B_{i,0} \times \mathbb{P}^{n_i} & \longrightarrow & B_i/G_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_0 & \longrightarrow & B_{i,0} & \longrightarrow & B_{i,0}/(B_{i,0} \cap P_i) \cong A_0/\Delta_0 \end{array}$$

Financiamiento

Esta tesis fue parcialmente financiada por La Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile en los años 2019 y 2020, correspondiente a becas de reducción de arancel. Además, con aportes de manutención por los proyectos FONDECYT 11180965 adjudicado al Dr. Robert Auffarth y FONDECYT 11170016 adjudicado al Dr. Giancarlo Lucchini Arteché.

Bibliografía

- [ALA19] R. Auffarth and G. Lucchini Arteche. Smooth quotients of abelian varieties by finite groups. Aceptado en *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*. arXiv: 1801.00028, 2019.
- [ALAQ19] R. Auffarth, G. Lucchini Arteche, and P. Quezada. Smooth quotients of abelian surfaces by finite groups. arXiv: 1809.05405, 2019.
- [Bea19] Arnaud Beauville. Finite subgroups of $\mathrm{PGL}(2,k)$. arXiv: 0909.3942, 2019.
- [Deb99] Olivier Debarre. *Tores et variétés abéliennes complexes*, volume 6 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris; EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.