

# Análisis de series temporales asociadas a estrellas pulsantes mediante grafos de visibilidad

Tesis  
entregada a la  
Universidad de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos  
para optar al grado de  
Magíster en Ciencias Físicas  
Facultad de Ciencias

por

**Nayade Elizabeth Garcés Harbst**

Octubre, 2021

Director de Tesis: **Dr. Víctor Muñoz Gálvez**

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a:

- Mis padres, Héctor y Náyade, quienes me han amado de mil maneras, apoyándome con paciencia en mis locas ideas, tales como estudiar Física.
  
- Mi hermano Alonso, a quien admiro y ha sido una constante inspiración para mí en perseverancia y disciplina.
  
- Mi esposo Ignacio, quien desde el principio me animó a estudiar Física y con su tierno amor ha sido mi soporte durante esta larga carrera.
  
- Mi director de tesis, Víctor, quien desde la primera clase que tomé con él me inspiró a disfrutar el camino de la Ciencia.
  
- A Dios, por darnos la oportunidad y la tarea de escudriñar su preciosa e impresionate Creación.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Beca Profesor Auxiliar del Departamento de Física y FONDECYT, proyecto No. 1201967 (Víctor Muñoz).

# Índice

<b>1. Breve introducción a las Redes Complejas</b>	<b>2</b>
1.1. Algunas propiedades de las Redes Complejas . . . . .	4
1.2. Algunos modelos de Redes Complejas . . . . .	5
1.2.1. Redes regulares . . . . .	5
1.2.2. Redes aleatorias o de Erdős y Rényi (ER) . . . . .	6
1.2.3. Redes de mundo pequeño o de Watts y Strogatz (WS) . . . . .	8
1.2.4. Redes libres de escala . . . . .	10
<b>2. Grafos de visibilidad</b>	<b>14</b>
2.1. Grafos de visibilidad normal . . . . .	15
2.2. Grafos de visibilidad horizontal . . . . .	19
<b>3. Estrellas variables</b>	<b>24</b>
<b>4. Análisis de estrellas variables pulsantes mediante (H)VG</b>	<b>34</b>
4.1. Curvas de luz . . . . .	34
4.2. Resultados . . . . .	39
4.2.1. Curvas completas . . . . .	39
4.2.2. Grafos de visibilidad a partir de las ventanas de observación de las curvas de luz . . . . .	56

	1
4.2.3. Curvas de luz faseadas . . . . .	59
4.3. Diferencias entre los tres tipos de grafos . . . . .	72
<b>5. Análisis de series sinusoidales artificiales mediante (H)VG</b>	<b>81</b>
5.1. Series sinusoidales de distintas longitudes . . . . .	82
5.2. Series sinusoidales contaminadas con ruido . . . . .	91
5.2.1. Series sinusoidales con ruido gaussiano . . . . .	91
5.2.2. Series sinusoidales con ruido caótico . . . . .	94
5.3. Series sinusoidales con brechas . . . . .	99
5.4. Conclusiones . . . . .	104
5.5. Trabajo futuro . . . . .	112
<b>A.</b>	<b>114</b>
A.1. Estudio de <i>glitches</i> en púlsares mediante (H)VG . . . . .	114
A.1.1. <i>Glitches</i> en púlsares . . . . .	115
A.1.2. Resultados . . . . .	116
A.2. Estudio de estrellas binarias eclipsantes mediante (H)VG . . . . .	124
A.3. Relación del exponente $\gamma$ con el periodo y la amplitud de las curvas de luz . . . . .	126

# Capítulo 1

## Breve introducción a las Redes Complejas

*“Me refiero a la búsqueda del conocimiento y la belleza, en cierto sentido, por sí mismos, pero de un modo que no excluya hacerlo en honor de Dios. Existe en la mente humana apetito por estas cosas, y Dios no crea el apetito en vano. Por lo tanto, podemos perseguir el conocimiento en sí, y la belleza en sí, con la segura confianza de que, al hacerlo, o avanzamos nosotros mismos hacia Dios o indirectamente ayudamos a otros a hacerlo.”*

C. S. Lewis

“¡Qué chico es el mundo!” es una versión popular de la frase “*el mundo es un pañuelo*” que hemos escuchado —o usado nosotros mismos— en situaciones en las que descubrimos que una persona sin relación o conocimiento aparente de otra, en realidad sí tiene relación con ella, y por tanto, nos hace parecer que todos los seres humanos están mucho más cerca el uno del otro de lo que creíamos. Aunque rara vez ocurre con la sabiduría popular, esta frase resulta ser cierta y tiene su origen en un área del estudio matemático conocida como Teoría de Grafos.

El concepto de grafo nació con el famoso matemático Leonhard Euler quien, además de aportar en diversas áreas de la matemática, física y astronomía, en 1753 propuso una solución para el problema de los siete puentes de Königsberg. Este era un pueblo prusiano que en la actualidad recibe el nombre de Kaliningrado y que era atravesado por el Río Pregel. Para unir al pueblo existían siete puentes distribuidos

por los diversos brazos del río. El problema propuesto consistía en responder si se podía trazar un camino continuo por la ciudad de Königsberg cruzando tan solo una vez por cada puente. La respuesta de Euler fue tajante: era imposible. ¿Cómo lo resolvió? Su demostración consistió en representar cada zona de la ciudad que estaba dividida por el río como un punto, mientras que los puentes son las conexiones entre estos vértices [1] como se muestra en la Fig. 1.1. Esta exitosa idea de resolver un problema llevándolo a un nivel de abstracción tal de convertirlo en un conjunto de puntos unidos por aristas, sorprendió por su creatividad y simpleza. Su idea abrió la puerta para que otros consideraran resolver otro tipo de problemas a través de este método.

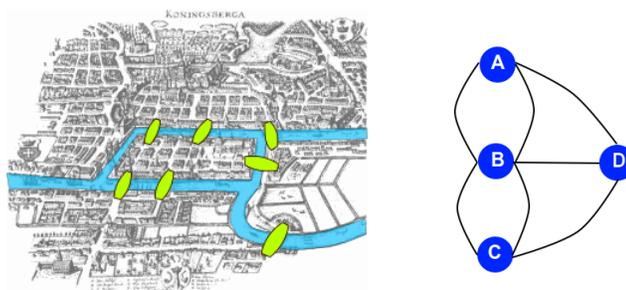


Figura 1.1: Dibujo del pueblo de Königsberg y sus siete puentes (izquierda)<sup>2</sup> y su abstracción a grafos, donde cada nodo corresponde a una de las zonas del pueblo separadas por el río Pregel y donde las aristas corresponden a los puentes que unen esas zonas (derecha).

Esta área matemática comenzó a crecer debido a las diversas aplicaciones que se iban descubriendo, ya que los grafos o redes tienen propiedades escondidas en su construcción que limitan o amplían nuestra habilidad de hacer cosas con ellas.

<sup>2</sup>*Fuente:* Por Bogdan Giușcă-Public domain (PD), basado en la imagen CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=112920>

## 1.1. Algunas propiedades de las Redes Complejas

A partir de describir un sistema como un grafo, se puede pensar en distintas maneras de caracterizarlo. Definiendo una cantidad o métrica muy sencilla como el número de conexiones promedio de cada red podríamos obtener información sobre la estructura de una red. El número de conexiones de un nodo se denomina *grado*, por lo que el **grado promedio** se define como

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_i^N k_i, \quad (1.1)$$

donde  $k_i$  es el grado del nodo  $i$ . Pensemos, por ejemplo, en dos redes complejas con  $N$  nodos cada una. Si tienen un grado promedio distinto entre ellas, podemos saber que son redes topológicamente distintas, a pesar de tener la misma cantidad de nodos.

Ahora, podríamos pensar en la red de nuestros amigos. Quizá estaríamos interesados en saber cuáles de nuestros amigos son amigos entre sí. Teniendo esta idea en mente se puede definir el **coeficiente de agrupamiento o *clustering*** como

$$C_i = 2 \frac{\lambda(i)_G}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1.2)$$

donde  $\lambda(i)_G$  es el número de triángulos que contienen al nodo  $i$ . Por tanto, si un nodo tiene un coeficiente de agrupamiento igual a la unidad quiere decir que todos sus vecinos están unidos entre sí. Por supuesto, si calculamos el coeficiente de agrupamiento de la red, es decir, promedio, podemos tener otra pista acerca de la red.

Se define también la **distancia promedio** de una red como el promedio de las distancias más cortas  $d$  entre dos nodos  $n_i$  y  $n_j$  de la red, es decir,

$$\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1 \neq i}^N d(n_i, n_j). \quad (1.3)$$

Se puede hablar de otra métrica global o métrica que mide una característica universal de red como lo es el **cociente de transitividad** del grafo. Este se define como

$$T = \frac{\lambda_G}{\nu_G}, \quad (1.4)$$

donde  $\lambda_G$  es el número total de triángulos de la red, y  $\nu_G$  el número de tripletes totales (subgrafos con tres nodos y dos aristas).

Finalmente, una de las métricas que ha mostrado extraer mucha información relevante acerca de los grafos es la llamada **distribución de grado**  $P(k)$  [2–5], que es la probabilidad de encontrar un nodo con grado  $k$  en la red. Por supuesto, se han definido muchas otras propiedades que caracterizan a las redes en otros ámbitos, pero aquí hemos mostrado las más comunes.

Para entender mejor qué información podemos obtener con estas métricas, se mostrarán en la siguiente sección algunos modelos de redes específicos junto a sus propias características.

## 1.2. Algunos modelos de Redes Complejas

### 1.2.1. Redes regulares

A medida que se van analizando las propiedades y las características de las redes, se pueden ir definiendo algunos modelos generales de estas. Quizá la red más básica que podemos imaginar es una red que se parece mucho a una cuadrícula, es decir una red que tiene una estructura muy marcada y regular. Este es el tipo más simple porque la gran mayoría de sus nodos tienen exactamente las mismas características.

En una red regular el grado promedio está dado por

$$\langle k \rangle = k_0, \quad (1.5)$$

donde  $k_0$  es una constante.

En la Fig. 1.2 se puede ver un grafo regular de 10 nodos, donde cada uno posee 4 conexiones.

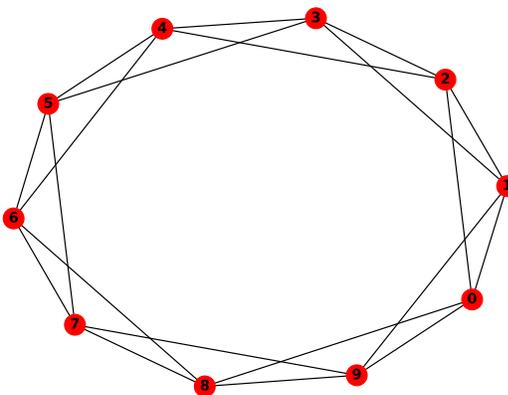


Figura 1.2: Grafo regular compuesto por 10 nodos y  $k = 4$ .

Como todos los nodos tienen la misma cantidad de conexiones, en muchos casos las redes regulares tienen un coeficiente de agrupamiento muy cercano al máximo, es decir, a la unidad. De la misma manera, tienen un camino medio muy pequeño y una distribución de grado  $P(k)$  muy característica ya que correspondería a un solo punto y no a una curva.

### 1.2.2. Redes aleatorias o de Erdős y Rényi (ER)

Doscientos seis años después de la solución de Euler, en 1959, dos matemáticos, Paul Erdős y Alfréd Rényi, proponen el primer método para construir el modelo de red más sencilla que se pueda pensar y diferente a una red regular: una red compleja aleatoria [6]. Consistía en tomar una cierta cantidad de nodos y conexiones y repartirlas azarosamente entre las parejas de vértices. Más detalladamente, se toman  $N$  nodos desconectados y  $L$  conexiones a repartir, luego al azar se van tomando distintos pares de entre los  $N$  nodos iniciales (no se permite una doble conexión

entre un par) hasta agotarse las  $L$  conexiones. Se puede ver un ejemplo de este tipo de red en la Fig. 1.3.

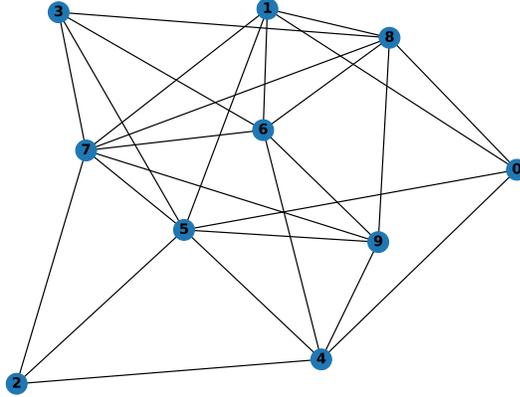


Figura 1.3: Grafo de ER compuesto de 10 nodos.

Tomemos el ejemplo de una fiesta en la cual nadie se conoce, los asistentes son los nodos y las relaciones hechas entre ellos, las conexiones. Si graficamos el número de nuevas amistades en función de los asistentes, según el modelo de redes ER, en el límite en que el número de asistentes y amistades es grande, obtendríamos una distribución gaussiana:

$$P(k) = \exp(-\langle k \rangle) \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (1.6)$$

Entre otras propiedades importantes de las redes aleatorias se tiene que la distancia promedio es

$$\ell \sim \frac{\ln N}{\ln \langle N \rangle} \quad (1.7)$$

y el coeficiente de agrupamiento es

$$C_i = \frac{\langle k \rangle}{N}. \quad (1.8)$$

### 1.2.3. Redes de mundo pequeño o de Watts y Strogatz (WS)

Ya que se tenía una robusta noción de cómo eran y qué propiedades tenían las redes aleatorias, la suposición lógica de muchos científicos fue pensar que si tomamos redes desde la misma naturaleza, entonces nos encontraríamos generalmente con estas redes de Erdős y Renyi (ER). Pero un escritor húngaro había teorizado en 1930 —no sabemos bien con qué base— que si tomamos la red formada por las personas y sus conocidos, encontraríamos que la red parece estar mucho más agrupada de lo que estaría si fuera una red aleatoria. Por supuesto, esto llamó mucho la atención y décadas más tarde se hicieron algunos experimentos para comprobar esta teoría. Uno de los más conocidos fue el experimento de Milgram o *experimento de los seis grados de separación* [7], luego del cual se corroboró que la distancia promedio entre dos personas cualesquiera era de aproximadamente seis personas intermediarias. Considerando que la población mundial es del orden de los siete mil millones, pensar que estamos separados de cualquier ser humano por solo seis pasos es notable y dio origen a la frase con la que abrimos este capítulo, además de designar a un nuevo tipo de Redes Complejas, llamadas de *mundo pequeño*.

Quienes propusieron la primera manera de construir redes de mundo pequeño fueron otros dos científicos, un sociólogo y un matemático. Duncan Watts y Steven Strogatz se dedicaron a analizar las redes ER y regulares y concluyeron que si tomaban una red regular y cambiaban unas pocas conexiones entonces se obtenía una red con propiedades muy distintas a las originales pero que no alcanzaban a ser aleatorias [8–10]. En la Fig. 1.4 se puede ver una red de mundo pequeño con 10 nodos.

El proceso para construir una red de WS es el siguiente: se inicia con una red regular, en donde cada nodo está unido a sus  $k = 2m$  vecinos, donde  $m$  son sus

vecinos consecutivos. Luego, se va tomando cada par de nodos, en donde se tendrá una probabilidad  $p$  de “recablear” esa conexión.

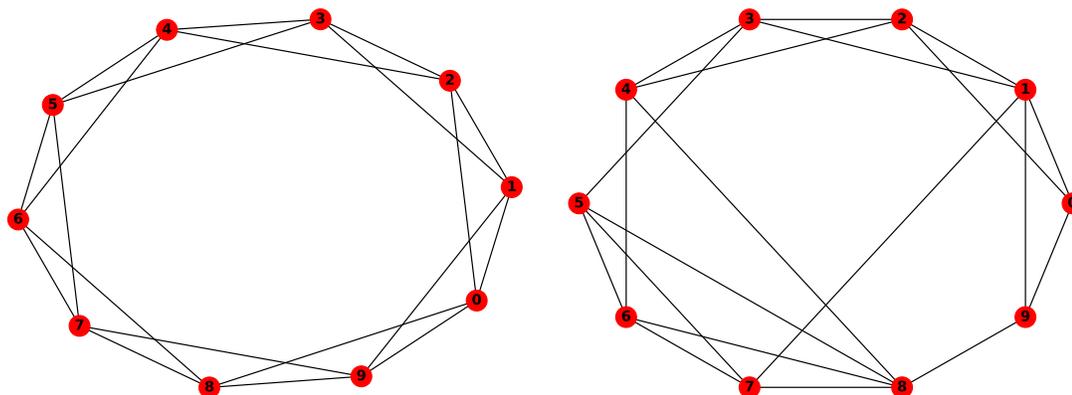


Figura 1.4: Grafo obtenido a través del modelo de Watts y Strogatz. Se parte con una red regular de 10 nodos unidos a sus 4 nodos vecinos (izquierda) y donde se “recablean” las conexiones con una probabilidad  $p = 0.3$ .

Las principales diferencias entre estas redes resultantes y las aleatorias son que presentan una distancia media relativamente pequeña y un coeficiente de agrupamiento grande. Esto quiere decir que, a pesar de que la red pueda tener un alto número de nodos, se puede llegar de un vértice a otro cualquiera mediante menos nodos intermedios que en las redes aleatorias.

Esta idea, propuesta en 1998, llevó a muchos investigadores a tomar distintas redes a partir de procesos naturales o sociales, llegando a encontrarse en gran parte de los casos con redes de mundo pequeño. Ya se dijo que el ejemplo clásico de una red de este tipo es la misma sociedad, es decir, la red donde los nodos son las personas y estas están conectadas entre sí si es que se conocen.

Además, aunque se esperaba que las redes WS tuvieran una distribución de grado poissoniana (como las redes aleatorias), se ha encontrado que también pueden tener una distribución de grado exponencial [11–13].

### 1.2.4. Redes libres de escala

Todas las redes que hemos visto hasta ahora comparten una característica y es que son homogéneas. En otras palabras, todos los nodos son relativamente equivalentes desde el punto de vista de las conexiones que poseen. Si bien en las redes aleatorias o de pequeño mundo no todos los nodos tienen exactamente el mismo grado, podríamos pensar en una red con una distribución de nodos distinta.

Las redes que hemos mencionado hasta ahora poseen una distribución de grado uniforme o que corresponde a una delta, pero curiosamente en la Naturaleza no encontramos demasiadas de estas redes. Se ha estudiado que la distribución de grado que más aparece en las redes reales es una ley de potencia.

Este nuevo tipo de grafos se conoce como redes libres de escala y debido a sus características topológicas tienen una distribución de grado de ley de potencia, es decir, de la forma

$$P(k) = Ak^{-\gamma}, \quad (1.9)$$

donde  $\gamma$  es el exponente de la distribución de grado.

En 1999 otra dupla científica, esta vez conformada por dos físicos, propone un modelo para construir redes aleatorias libres de escala. Albert-László Barabási y Réka Albert idean un mecanismo que se conoce popularmente como *preferential attachment* (conexión preferencial) en donde ciertos nodos tienen más probabilidad de tener conexiones y por lo tanto, la red poseerá los característicos *hubs* [8]. Los *hubs* son nodos en la red que tienen muchas conexiones, y por ende, están conectados a gran parte de los nodos de la red. En la Fig. 1.5 se observa un grafo construido a partir del método de Barabási y Albert con 10 nodos y una conexión preferencial particular  $m$ , esto quiere decir que cada nodo se conectará con cierta probabilidad

dada a  $m$  nodos.

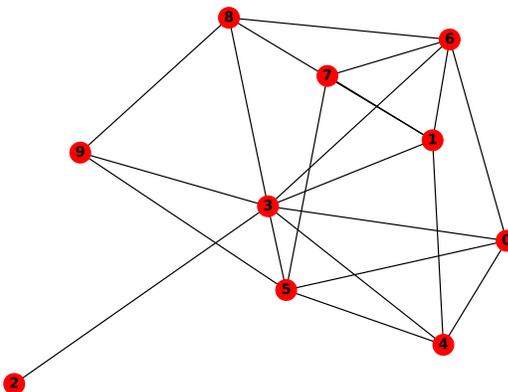


Figura 1.5: Grafo de BA con 10 nodos y una conexión preferencial de  $m = 3$ . El nodo 3 corresponde al *hub* de la red, teniendo 8 conexiones.

Notablemente, se ha descubierto que las redes libres de escala son una norma en los sistemas reales y no una excepción [14–18], por lo cual se han ido proponiendo cada vez más modelos de construcción de estas redes para poder explicar completamente este fenómeno.

Las redes libres de escala tienen además la característica de ser muy robustas. Esto quiere decir que si eliminamos gran parte de sus nodos, entonces la red seguirá conservando su topología general. Sin embargo, a la vez que es muy robusta, es también muy vulnerable al ataque de sus *hubs*, es decir, si se quita un *hub* de la red esta perderá la mayoría de sus conexiones y características originales, generándose una red bastante distinta.

En 2001 se publicó un análisis que mostraba que la red de contactos sexuales era una red libre de escala [19] basado en un estudio sueco de 1996. Estos resultados son muy útiles para buscar estrategias que combatan, por ejemplo, las enfermedades venéreas de manera que se ataquen sus *hubs* y no se pierda tiempo atacando cada vector.

Además, existen algunas referencias que relacionan la libertad de escala de una red con la fractalidad [20], de manera que si tenemos una red compleja fractal, tendría la misma distribución de grado.

Hemos notado que según las características de la red los nodos que la conforman pueden tener distinta importancia, por ejemplo en el caso de las redes libres de escala se puede considerar que los *hubs* son justamente los más importantes en el grafo. Pero se podría pensar en distintas maneras de darle importancia a los nodos. De hecho, muchas de las métricas miden de alguna manera la importancia de los nodos de distinta manera, pero podríamos pensar también en una red donde un nodo tenga más peso que otro simplemente asignándole un valor numérico mayor.

De la misma manera, hemos considerado que las conexiones entre los nodos son bidireccionales, pero es posible pensar en grafos en donde las conexiones vayan solo en una dirección. Por ejemplo, se puede ir desde el nodo  $A$  hasta el  $B$ , pero no del  $B$  al  $A$ . Sin embargo, como en este trabajo se tratará solo con conexiones bidireccionales y nodos equivalentes, no se profundizará más en este tema [21–23].

La teoría de grafos abre una nueva manera de estudiar los problemas observando la topología de las redes que se pueden construir a partir de diversos sistemas complejos. Nos dice que siempre existe un camino entre dos nodos si todos los nodos tienen al menos una conexión, lo cual nos va acercando a comprender la afirmación del principio.

Aunque este método de estudio surgió de una idea matemática simple que no tenía demasiadas pretensiones prácticas, la idea que subyace al trabajar con Redes Complejas es que la Naturaleza y el mundo en sí mismo es un sistema altamente complejo, en donde cada parte corresponde a un sistema de elementos interconectados entre ellos de alguna manera.

Las Redes Complejas están aún en etapa de desarrollo y hay algunos (como siempre sucede con las nuevas ideas) que no confían demasiado en la utilidad que podrían aportar. Sin embargo, no se debe olvidar que el conocimiento está compuesto por muchas capas, y lo que no podamos comprender con una, podremos quizá hacerlo con otra. El área de las redes es una capa más que ha aportado mucho a la discusión del conocimiento en muchas áreas [13, 15, 24–29] y que podría darnos el camino para responder grandes preguntas. Por eso, en este trabajo se pretende hacer uso de ellas en un área de la Física que pocos han explorado aún.

## Capítulo 2

# Grafos de visibilidad

*“Si un hombre careciera de una concepción del orden normal de la naturaleza, ciertamente no podría percibir desviaciones en relación con ese orden, tal como quien desconoce la métrica de un poema no capta las variaciones introducidas en ella por el poeta. Nada es maravilloso, salvo lo anómalo, y nada es anormal mientras no hemos asimilado la norma.”*

C. S. Lewis

Uno de los componentes básicos en el estudio de las ciencias naturales son las series temporales. Podemos considerar casi cualquier variable que pueda ser medida a través del tiempo. Pensemos por ejemplo, en la cantidad de lluvia que cae en un año, cuánto crece la población de conejos por mes o cuántos electrones pasan por un cable en un segundo. Parece ser una de las maneras más intuitivas de estudiar la naturaleza.

Existen diversas maneras de estudiar las series temporales y generalmente se usan herramientas estadísticas para poder obtener información de ellas. Pero sabiendo que, según la sección anterior, las redes complejas son una novedosa manera de estudiar un sistema, podríamos preguntarnos: ¿cómo obtener información desde las series temporales mediante las redes complejas? O dicho de otra forma, ¿cómo armamos una red compleja a partir de una serie temporal?, ¿cómo definimos nuestros nodos y sus conexiones? Estas son preguntas que se han intentado responder con distintas propuestas, además de ¿qué información podríamos obtener de abordar un problema

con esta estrategia?

Una de las ideas que se ha planteado es la de tomar las series temporales y dividir-las en subseries que corresponderán a distintos tipos de grafos. Se estudia la cantidad de subgrafos o propiedades locales de las redes construidas a partir de series con distintas dinámicas, y se observa una caracterización para series caóticas, hipercaóticas, y distintos tipos de ruido [30]. Para el caso de series temporales pseudoperiódicas se ha ideado considerar un ciclo de una serie como un nodo [31].

## 2.1. Grafos de visibilidad normal

Entre estas distintas ideas sobre cómo mapear una serie temporal a un grafo, en el 2008 Lucas Lacasa propuso el llamado *Visibility Graph* (VG) [2], que ha tenido alta aceptación, se han hecho numerosos estudios en diversas áreas de la ciencia usando este método [26, 32] y en el cual nos enfocaremos en este capítulo.

El algoritmo de visibilidad es una manera geométrica de construir las redes a partir de una serie temporal. Cada punto en la serie temporal corresponderá a un nodo y se establece el criterio de conexión a través de la “visibilidad” entre ellos, dicho de otra forma, a qué otros nodos ve un nodo particular si mira hacia atrás y hacia adelante en el tiempo. Para poder trabajar con este método, lo primero que debe hacerse es convertir cada punto de la serie en una barra, tal como muestra la Fig. 2.1. De una manera formal, se dice que dos valores arbitrarios del sistema  $(t_a, x_a)$  y  $(t_b, x_b)$  poseen visibilidad, y consecuentemente, son dos nodos conectados, si todos los otros datos  $(t_c, x_c)$  entre ellos cumplen con

$$x_c < x_a + (x_b - x_a) \frac{t_c - t_a}{t_b - t_a}. \quad (2.1)$$

Se pueden extraer de la relación que los grafos creados son siempre [2]:

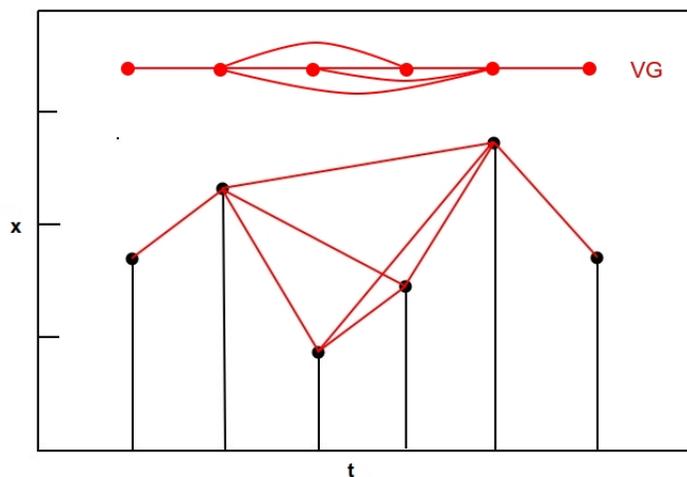


Figura 2.1: Ejemplo de una serie temporal genérica, donde el eje horizontal representa el tiempo y el vertical, alguna medida. Las líneas de visibilidad están dibujadas en rojo, al igual que el grafo resultante.

- Conectados: Cada nodo ve al menos a sus vecinos más cercanos (izquierdos y derechos).
- No dirigidos: de la manera en la que se contruye no hay una dirección de visibilidad privilegiada
- Invariantes bajo transformaciones afines de la serie temporal: el grafo se mantiene invariante a reescalamientos de los ejes  $y$  o  $x$ , y bajo traslaciones verticales y horizontales (ver figura 2.2).

Es fácil notar que series temporales periódicas se mapean a grafos regulares como muestra la Fig. 2.3, y como se verá más adelante ciertas características globales de las series pueden ser extraídas usando los grafos de visibilidad. Una gran cantidad de trabajos [2,32–35] ha permitido demostrar que la investigación de una red construida con VG a partir de una serie temporal puede extraer información no trivial de la serie misma. Por ejemplo, en la Fig. 2.4 se observa que la distribución de grado para

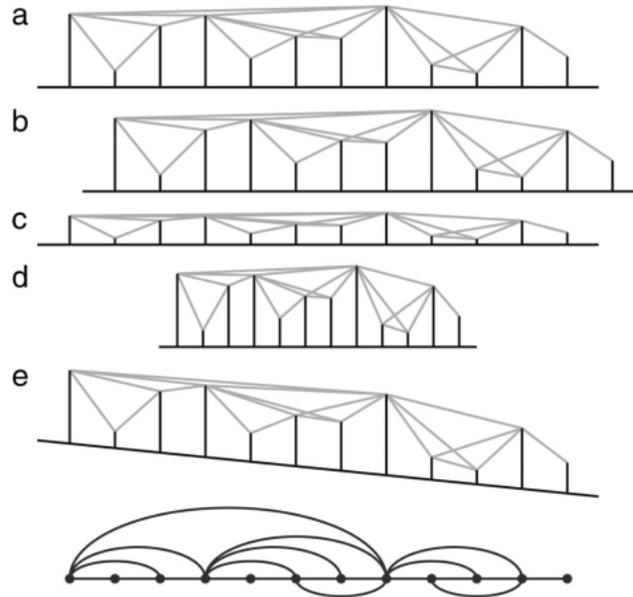


Figura 2.2: Ejemplo de la invarianza ante ciertas transformaciones del grafo de visibilidad. (a) Serie original transformada en VG. (b) Traslación de los datos. (c) Reescalamiento de eje vertical. (d) Reescalamiento del eje horizontal. (e) Adición de una tendencia lineal a los datos. En todos los casos, el grafo resultante es el mismo. Tomada de [2].

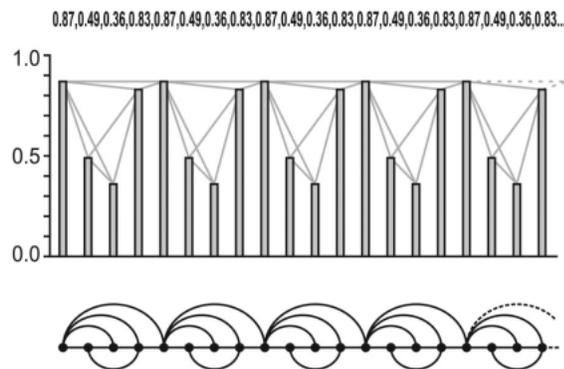


Figura 2.3: Grafo de visibilidad para una serie temporal periódica. Los números que se muestran arriba hacen referencia a que es una serie temporal periódica y abajo se muestra el grafo que se construye a partir de esta serie con el método de visibilidad. Tomada de [2].

una serie aleatoria uniforme es exponencial.

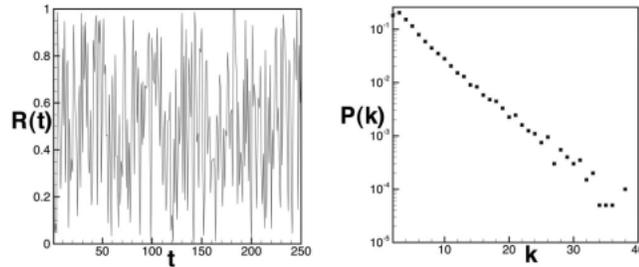


Figura 2.4: Distribución de grado para una red hecha con VG de una serie aleatoria uniforme (entre 0 y 1). Tomada de [2].

Por otra parte, también se ha observado [2] que el VG es capaz de distinguir entre algunos tipos de series fractales, en donde la distribución de grado corresponde a una ley de potencia  $P(k) \sim k^{-\alpha}$ , como muestra la Fig. 2.5.

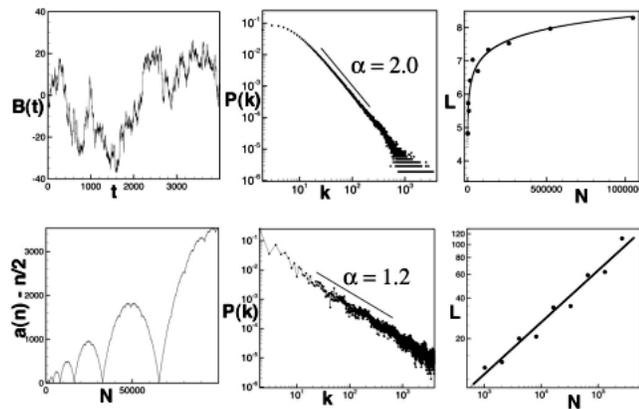


Figura 2.5: En la esquina superior izquierda se observa una serie temporal relacionada con el movimiento browniano y abajo una serie fractal. A la derecha de cada serie le siguen su distribución de grado y su camino libre medio  $L$ , respectivamente. Tomada de [2].

En resumen, el VG está pensado para estudiar propiedades estructurales de las series (periodicidad, fractalidad, etc.) y fue propuesto originalmente como un método para construir grafos no dirigidos. Sin embargo, se pueden construir fácilmente

redes dirigidas o con peso haciendo solo pequeñas modificaciones en el algoritmo de construcción y que, en algunos casos, presentan mejoras de los resultados obtenidos por los grafos más básicos. Por ejemplo, si bien la definición original no considera la direccionalidad de la visibilidad, se podría pensar también en grafos dirigidos, donde la visibilidad puede darse solo hacia el futuro (adelante en el tiempo) o solo hacia el pasado (atrás en el tiempo).

Una variante de este método que ha logrado resultados particularmente interesantes la analizaremos en la sección que sigue.

## 2.2. Grafos de visibilidad horizontal

Una de las principales opciones al Grafo de Visibilidad original es el Grafo de Visibilidad Horizontal (*Horizontal Visibility Graph (HVG)*), que como lo dice su nombre, sigue las mismas reglas de construcción del grafo de visibilidad normal, pero esta vez las “líneas de visibilidad” solo pueden ser horizontales. Según este método, la visibilidad no se contruye de nodo a nodo, sino que desde un nodo hacia la abscisa del siguiente nodo, como muestra la Fig. 2.6.

Podemos notar de la Fig. 2.6 que el HVG tenderá a tener menos conexiones totales en la red que el VG, debido a que la visibilidad tiene más restricciones. Eso significa que tiene menos estadística que el grafo de visibilidad normal y eso podría ser una desventaja. A pesar de eso, ha sido un método que ha dado muy buenos resultados en diversos trabajos, como veremos a continuación.

Una de las características más interesantes que tiene el HVG es que, debido a su simplicidad, los resultados de algunas métricas para series completamente descorrelacionadas se pueden calcular analíticamente.

Por ejemplo, se ha mostrado [36] que para una serie temporal descorrelacionada,

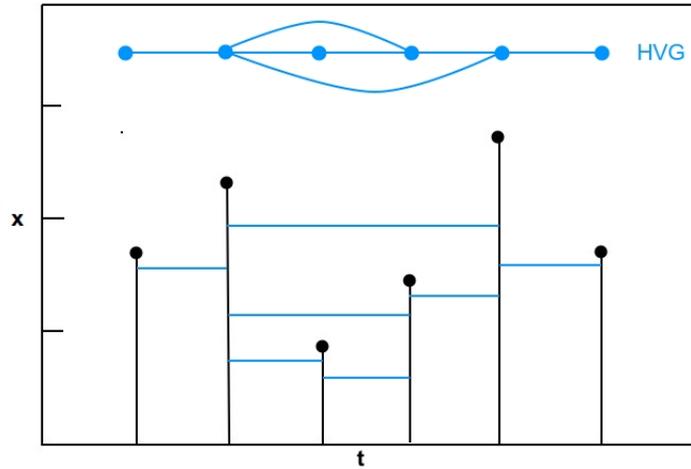


Figura 2.6: Ejemplo de cómo se construye un grafo de visibilidad horizontal (HVG) de una serie temporal genérica. Las líneas de visibilidad están dibujadas en azul y van de barra a barra asociadas a los nodos. El grafo resultante se muestra sobre la serie.

caótica o estocástica correlacionada [36] el HVG es una red de pequeño mundo con grado promedio  $\langle k \rangle = 4$  y distribución de grado

$$P(k) \sim \exp(-\lambda k), \quad (2.2)$$

donde  $\lambda$  es una constante positiva. En la Fig. 2.7 se puede ver la distribución de grado para tres series aleatorias distintas.

Por lo tanto, una red hecha a partir del HVG tendrá un grado promedio acotado entre

$$2 \leq \langle k \rangle < 4. \quad (2.3)$$

Actualmente existe una discusión acerca de si se puede determinar un  $\lambda$  crítico que discrimine entre series deterministas y estocásticas. En 2010 se propuso que  $\lambda = \ln \frac{3}{2}$  era la constante crítica [36], sin embargo, esto se ha puesto en duda luego de un estudio de diversas series mediante HVG [37].

También se han hecho estudios intentando detectar la periodicidad de series usando el HVG [38]. Para series periódicas el grado promedio se puede calcular analíticamente [36] como

$$\langle k \rangle = 4 \left( 1 - \frac{1}{2T} \right), \quad (2.4)$$

donde  $T$  corresponde al periodo de la serie.

Es importante tener en cuenta el número de datos que tienen las series usadas. En la mayoría de los estudios se usan series del orden de  $\sim 10^6$  datos. Sin embargo, podemos encontrarnos con series mucho más pequeñas que desearíamos estudiar mediante este método. Se ha mostrado que esta es una situación de la que hay que tener cuidado, ya que cuando las series son muy pequeñas, los efectos de borde son muy grandes y afectan bastante las métricas [39]. En el Cap. 5 se mostrarán cálculos propios interesantes con respecto a esto.

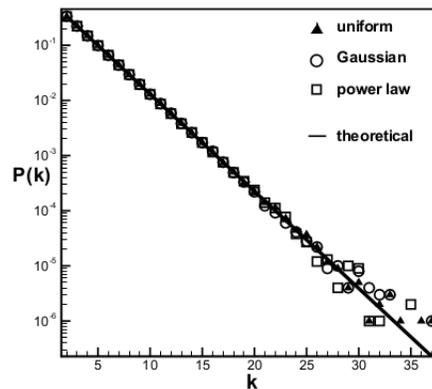


Figura 2.7: Distribución de grado para series aleatorias con distintas distribuciones. Los triángulos corresponden a una serie con distribución uniforme, los círculos, a una distribución gaussiana y los cuadrados, a una distribución de ley de potencia. Tomada de [36].

Si bien en el capítulo anterior abordamos algunas métricas que pueden calcularse a partir de las redes complejas, hay algunas otras métricas que se han definido exclusivamente para HVG, y más específicamente para la versión dirigida de este. Es

el caso, por ejemplo, de la divergencia de Kullback-Leibler (KLD por su nombre en inglés). Esta métrica nos da una medida de la reversibilidad de la serie y por tanto, de la información que contiene la serie temporal.

Se dice que un proceso estacionario  $X(t)$  es estadísticamente reversible en el tiempo si para cada  $N$ , las series  $X(t_1), \dots, X(t_N)$  y  $X(t_N), \dots, X(t_1)$  tienen la misma distribución de probabilidad [40].

Como dijimos previamente, esta métrica está definida para HVG direccionados, por lo que definimos  $P(k_{out})$  como la distribución de grado de los nodos que tienen una conexión dirigida hacia otro nodo y  $P(k_{in})$  como la distribución de grado de los nodos que tienen una conexión dirigida hacia ellos mismos. La KLD se define [41] como

$$D(P(k_{out})||P(k_{in})) = \sum P(k_{out}) \log \frac{P(k_{out})}{P(k_{in})}. \quad (2.5)$$

Notemos que siempre  $D \geq 0$ , y que  $D = 0$  solo si las distribuciones son iguales. En [41], se muestra que  $D$  es una buena medida de la diferencia entre dos distribuciones y, por lo tanto, para el caso del HVG, de la irreversibilidad de la serie de tiempo.

Habría que notar también que  $D = 0$  también si  $P(k_{out}) = 0$ , pero que eso no es un caso interesante para redes reales.

Un ejemplo de una serie irreversible es el mapa logístico

$$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t), \quad (2.6)$$

y un ejemplo de una serie reversible podría ser el mapa del gato de Arnold

$$x_{t+1} = x_t + y_t \quad (\text{mód } 1), \quad (2.7)$$

$$y_{t+1} = x_t + 2y_t \quad (\text{mód } 1). \quad (2.8)$$

Este es un ejemplo de un mapa caótico conservativo que tiene dos exponentes de Lyapunov que coinciden en magnitud, lo que implica que la cantidad de información

creada al hacerse el proceso adelante en el tiempo es la misma que la creada al hacerse hacia atrás, por lo tanto el proceso es reversible.

Usando esta definición se han hecho estudios de diversos sistemas. Suyal *et al.* [21] hicieron un estudio del viento solar usando los datos de ACE y de Helios recopilados durante el ciclo solar 23 (1998–2012) y 21 (1975–1983). Analizaron el viento solar en distintas fases de este ciclo y encontraron una clara relación entre el número de manchas solares y la KLD.

# Capítulo 3

## Estrellas variables

*“Una vez más, ¿qué clase de universo pedimos? Si fuera suficientemente pequeño para ser acogedor, no sería lo bastante grande para tener un carácter sublime. Si su inmensidad permite expandir nuestros pulmones espirituales, también tiene el poder de desconcertarnos. En cualquier mundo imaginable, estaremos también limitados o aterrorizados. Prefiero el terror.”*

C. S. Lewis

Quizás los objetos más observados y admirados en la historia de la humanidad han sido las estrellas.

Desde tiempos muy anteriores a Galileo o Kepler, existían pueblos y hombres que, entre sus distintas ocupaciones, estudiaban el cielo (las estrellas y sus movimientos) y sabían, aproximadamente, qué acontecimientos astronómicos ocurrirían en el futuro. El vasto cielo y sus miles de millones de estrellas son capaces de capturar la atención y de producir sensaciones en el ser humano, el único ser que las espía continuamente.

Las estrellas son esferas de plasma. Su energía para brillar por años y años no la obtienen desde la simple combustión de su materia, sino de reacciones nucleares que, debido a las condiciones de presión y temperatura que se dan en el núcleo, producen toneladas de energía en forma de radiación.

Dentro de los billones de estrellas que hay en los cielos, podemos encontrarlas en diferentes tamaños, temperaturas, masas y edades, aunque la vida de una estrella está, en realidad, directamente relacionada con la cantidad de masa que esta

contenga. Cuando en una galaxia se comienza a juntar el polvo estelar por efectos gravitatorios, este se va aglomerando y por ende, atrae más polvo, llegando un momento en que este conglomerado de materia estelar da inicio a la vida de una estrella. Si la masa que se logró unir es muy pequeña, no se pueden dar las condiciones necesarias para que ocurran reacciones nucleares. Estos cuerpos tienen más masa que los planetas grandes, pero menos masa que las estrellas más pequeñas, y se conocen como enanas marrón o café. Si bien su nombre nos podría hacer pensar que son estrellas, técnicamente no lo son, de hecho, no brillan. Como estos cuerpos son fríos en comparación con las estrellas, pueden vivir muchísimo más tiempo que ellas.

Por otra parte, si este conglomerado de materia tiene una masa ligeramente superior a la necesaria para que en este cuerpo ocurra la nucleosíntesis, entonces ha nacido una estrella de baja masa. Las estrellas poco masivas tienen también una larga vida (pero más corta que la de las enanas café) debido a que consumen tranquilamente su hidrógeno, convirtiéndolo solamente en helio porque sus condiciones no le permiten llegar a consumir el helio y transformarlo en algo más. Finalmente, si se logra agrupar una gran cantidad de polvo estelar en alguna galaxia, se da nacimiento a una estrella masiva (o supermasiva), que a diferencia de lo que muchos creen, viven mucho menos que estrellas de baja masa. Esta situación se debe a que “queman” el hidrógeno con más rapidez, consumiéndolo todo en mucho menos tiempo que las estrellas pequeñas.

La muerte de las estrellas, al igual que su vida, se da en relación a su masa. Las estrellas de baja masa, consumirán muy lentamente su hidrógeno, enfriándose paulatinamente y llegando a convertirse en última instancia en una enana marrón. Si la estrella es un poco más masiva (más de  $8 M_{\odot}$ ) terminará de consumir su combustible y eventualmente la presión de radiación de la estrella no podrá hacer el contrapeso

a la fuerza de gravedad, haciendo que colapse sobre sí misma y produciendo una explosión llamada supernova.

En esta explosión se eyectan todas las capas externas de la estrella [42], quedando como remanente de esa explosión una estrella muy inferior en tamaño a la original, pero muy densa, conocida como estrella de neutrones. Asimismo, si la estrella que está por morir es muy masiva (más de 25 masas solares) entonces el remanente será un agujero negro [43].

## Estrellas variables

Podríamos entonces concluir que las estrellas nacen, se desarrollan y mueren. En este proceso evolutivo las estrellas cambian, sus características no se mantienen siempre iguales. Por ejemplo, si consideramos nuestra propia estrella, el Sol, sabemos que está aproximadamente en la mitad de su vida, y que en millones de años más se convertirá en una supergigante roja. Esto quiere decir que el Sol tendrá un tamaño mucho mayor (tal que la vida en la Tierra será imposible) y con ello, su luminosidad también aumentará. Luego, muy lentamente, se enfriará. Todos estos procesos implican un cambio en la luminosidad de las estrellas a lo largo de su vida, sin embargo, para poder observar esos cambios necesitaríamos vivir millones o miles de millones de años, que es la escala de tiempo en la que ocurren estas variaciones. Así que si bien todas las estrellas pasarán por distintos estados y por ende, emitirán una cantidad distinta de radiación en cada etapa, a ojos humanos, que viven menos de un siglo para poder observarlas, el brillo de las estrellas es prácticamente constante.

No obstante, existen estrellas que cambian su luminosidad de manera regular en un rango de tiempo en que podemos notarlo. Se tienen algunas evidencias de que los egipcios fueron los primeros en observar una estrella que parecía cambiar su brillo

periódicamente en solamente horas [44]. Esta estrella recibe el nombre de Algol (que significa “el monstruo” o “el demonio”) y se encuentra en la constelación de Perseo. En 1667 el astrónomo Geminiano Montanari observó y registró nuevamente esta estrella, sin embargo, no fue hasta casi cien años después que el joven astrónomo amateur, John Goodricke notó que esta variación del brillo era periódica e incluso propuso una explicación a ella, diciendo que otro cuerpo menos luminoso que el que se observaba primordialmente, orbitaba la estrella interponiéndose en algunos momentos y causando esta disminución de su brillo. Fue en 1881 que se demostró que efectivamente Algol era un sistema de múltiples cuerpos, y que la variabilidad de la luminosidad se explicaba correctamente como lo había dicho Goodricke.

A partir de aquí, lentamente cada vez más astrónomos registraban estrellas que variaban su luminosidad. A estas estrellas que cambian su brillo, ya sea regular o irregularmente, pero en una escala que podemos notar, se les llama *estrellas variables*.

Si bien tal vez desde la Tierra simplemente observamos cómo el brillo de una estrella aumenta (o disminuye), las razones por las que una estrella podría variar en luminosidad pueden ser diversas y no se puede suponer que sea debido a un solo factor. A medida que se han ido sumando estrellas variables a los catálogos, se han estudiado y se han clasificado en distintos grupos. La distinción más grande que se puede hacer de estos cuerpos, es en base a si su cambio de luminosidad se produce por mecanismos o fenómenos producidos en la misma estrella o si al contrario, la estrella permanece constante pero es su entorno lo que cambia o produce que nosotros veamos un cambio aparente en la estrella.

Las *variables extrínsecas* deben su nombre a que las razones por las cuales observamos que su brillo cambia es justamente extrínseco. Una nube de polvo cósmico

podría interponerse entre el camino que sigue la luz de la estrella a nuestros ojos, y esto haría variar la luminosidad que observamos. Otro motivo podría ser lo que aquí en la Tierra conocemos como eclipses. Si mientras estamos observando una estrella que contiene un sistema planetario, se atraviesa uno de los planetas, podremos observar una pequeña baja del brillo observado. En contraparte a esta situación, también podríamos observar que el brillo aumenta, y esto significaría que estamos en presencia de un sistema binario (dos estrellas girando la una alrededor de la otra). Tal como John Goodricke intuyó, la estrella Algol caería dentro de esta categoría, ya que es parte del grupo que se conoce como *variables eclipsantes* [45].

En contraste a lo anterior, las estrellas *variables intrínsecas* cambian su brillo debido a fenómenos que ocurren en ellas mismas. Esto podría ser mucho más difícil de estudiar ya que no podemos mirar directamente dentro del interior de ellas y observar qué está pasando. Sin embargo, a lo largo de los años y gracias a la labor de astrónomos y científicos que han aportado a entender los procesos estelares, se han logrado clasificar en grupos según su mecanismo de variabilidad. Dentro de algunos de los fenómenos que inciden en la variabilidad estelar, tenemos la rotación, la formación de llamaradas o manchas (directamente ligadas con la rotación, por cierto) en las superficies estelares y la pulsación [46]. También podríamos encontrar estrellas en donde la variabilidad ocurre debido a más de uno de estos factores [47]. En particular, el último fenómeno mencionado, la pulsación estelar, es el más común. Las estrellas pulsantes forman el grupo más numeroso de estrellas variables y, como nuestra investigación se enfocará en ellas, hablaremos un poco más específicamente de ellas.

## Estrellas pulsantes

David Fabricius, un pastor luterano y astrónomo, fue el primero en reportar este fenómeno en 1596. Durante meses observó la estrella *o Ceti* y notó cómo paulatinamente esta cambiaba de brillo, incluso llegando en un momento a desaparecer ante su vista para luego reaparecer, seguir aumentando su brillo y volver a su estado original. Luego de que otros astrónomos hicieran el descubrimiento independiente del cambio de brillo de esta estrella, en 1662 el astrónomo polaco Johannes Hevelius reportó esta estrella en uno de sus escritos, llamándola *Mira*, que significa maravillosa. Unos años más tarde se logró establecer su periodo de oscilación luminosa en once meses. Aunque pasó mucho tiempo para que se descubriera que su variación de brillo era debido a la pulsación, hoy esta estrella es el prototipo de las estrellas variables pulsantes de largo periodo, Mira.

Como lo dice su nombre, las estrellas pulsantes presentan pulsaciones en el interior que pueden entenderse como ondas de presión (ondas de sonido) viajando a través de la estrella. En la actualidad sabemos que debido a estas pulsaciones, las estrellas varían su brillo, sin embargo, no fue fácil que los astrónomos se convencieran de esto. La mayoría de ellos creía que la variabilidad se daba por ser estrellas binarias, y aunque previamente un astrónomo había mencionado la posibilidad de variabilidad por pulsación, no se le puso mucha atención. Fue Harlow Shapley quien propuso que las variaciones de luminosidad se producían por pulsaciones radiales como si la estrella respirara, haciéndose más (o menos) brillante en el proceso. Finalmente, cuatro años más tarde de la explicación de Shapley, Sir Arthur Eddington propuso soporte teórico que corroboraba esta explicación.

Ahora sabemos que si bien las pulsaciones podrían darse de manera radial, es decir, que las ondas recorran la estrella desde su centro hacia fuera y viceversa,

también encontramos estrellas que pulsan en modos no radiales, e incluso, en ambos. Al año 2005 ya se habían descubierto casi cuarenta mil estrellas pulsantes.

Uno de los grupos de estrellas pulsantes más conocido son las llamadas Cefeidas.

Después de dos siglos de la observación de Mira, en 1784 Goodricke notó que la estrella  $\delta$  Cephei variaba con un periodo de 5 días, 8 horas y 48 minutos. Lamentablemente este descubrimiento le costó su vida: en esas frías noches de observación astronómica cogió una pulmonía y falleció a los 21 años. Quizá la curva de luz de  $\delta$  Cephei no es tan espectacular como la de Mira, pero llegó a convertir a la estrella en el prototipo de las Cefeidas clásicas, que son de vital relevancia en astronomía. Las Cefeidas son estrellas supergigantes de casi cincuenta veces la masa del Sol y un periodo de pulsación entre uno y cincuenta días. La cualidad por la que son más conocidas es debido a que presentan una relación periodo-luminosidad. Esta propiedad de las Cefeidas fue descubierta por Henrietta Leavitt en 1908 [48] al graficar su magnitud aparente en función de su periodo y notando una estrecha correlación. Esto quiere decir que al conocer su periodo y calculando su luminosidad (haciendo una respectiva calibración), podríamos saber a qué distancia se encuentra la estrella, de manera que también podemos saber a qué distancia se encuentra el cúmulo o galaxia que la contiene. Además, al ser de un gran tamaño se pueden ver desde muy lejos. Por todo lo dicho anteriormente se han vuelto herramientas muy importantes en astronomía, recibiendo el nombre de *Standard Candles*.

Como dijimos previamente, podemos encontrar numerosos grupos y tipos de estrellas pulsantes.

Otro grupo conocido y muy útil por presentar también la relación periodo-luminosidad, son las RR Lyrae. El prototipo de estas estrellas también fue descubierto en 1901 por una mujer (ambas trabajaban para el astrónomo Edward Pickering y

ellas eran sus “computadoras”), Williamina Fleming [49]. Estas estrellas son famosas por tener una curva de luz muy peculiar, conocida como “dientes de sierra”. Aunque existen otras clasificaciones de las RR Lyrae según los modos de pulsación, e incluso podemos encontrar un tipo específico de RR Lyrae que tienen una curva de luz muy sinusoidal.

Las estrellas Cefeidas clásicas y RR Lyrae son estrellas pulsantes que pulsan de manera radial, aunque pueden hacerlo en más de un modo. Todos estos grupos de estrellas pulsantes presentan curvas de luz que son, a grandes rasgos, bien entendidas. Por otra parte, tenemos grupos de estrellas pulsantes que lo hacen solo de forma no radial, como las  $\beta$  Cephei,  $\gamma$  Doradus, GW Virginis, ZZ Ceti, entre otras. Y finalmente, podemos encontrar muchos tipos de estrellas en donde se presentan oscilaciones de tipo radial y no radial, afectando así el brillo y velocidad radial de la estrella, como es el caso de las  $\delta$  Scuti.

Las  $\delta$  Scuti son llamadas también cefeidas enanas por tener una masa considerablemente menor que las cefeidas clásicas (alrededor de dos masas solares). También se les puede encontrar referidas en algunos textos [50] como cefeidas de periodo ultra corto, ya que sus oscilaciones suelen ocurrir en tiempos menores que un día. Aunque también pueden ser utilizadas como *standard candles*, las  $\delta$  Scuti presentan una curva de luz que es mucho más compleja de entender debido a su pulsación híbrida [51], haciendo que no siempre sea posible calcular su periodo de variación con exactitud. Si bien sus periodicidades se pueden conocer cada vez mejor, los modos de pulsación aún son muy difíciles de dilucidar. Conocer su mecanismo de pulsación es una tarea en la que se sigue trabajando, y se pretende aportar a esa discusión con este trabajo.

## Estrellas de neutrones y púlsares

En 1967, Jocelyn Bell, una estudiante de doctorado registró una señal de radio que parecía tener un periodo demasiado corto para tratarse de cualquier objeto estelar conocido [52]. Debido a la alta regularidad del pulso que se detectaba, a ella y su equipo incluso se les pasó por la mente que podría tratarse de una civilización extraterrestre. No fue hasta que se encontró un segundo objeto celeste que emitía una señal de este tipo, que se descartó esa opción. Estos objetos que Bell había descubierto se conocen como púlsares, y aunque los primeros que se descubrieron emitían pulsos en ondas de radio, se han encontrado púlsares que emiten pulsos en luz visible, rayos gamma y X [53].

Los púlsares son estrellas de neutrones que, como se dijo en la Sec. 3, forman parte de la última etapa de evolución estelar. Cuando el núcleo de la estrella que está muriendo colapsa, se alcanzan muy altas temperaturas y donde los electrones y protones, mediante captura electrónica, dan lugar a neutrones y emisión de neutrinos. Lo único que impide que la estrella efectivamente colapse, es la presión de degeneración de los neutrones, por lo que estas estrellas tienen una densidad altísima.

Las estrellas de neutrones también pueden presentar pulsaciones, que podrían ser radiales o no radiales. Algunas veces se encuentran estrellas de neutrones rotando rápidamente, generando campos magnéticos extremos y estos a su vez hacen que la estrella emita *jets* de radiación. Si los *jets* no coinciden con el eje del campo magnético, entonces se produce una nutación de este. Cuando el *jet* cruza nuestra línea de visión, es decir llega a la Tierra, vemos un pulso. Estos son los pulsos que observó Jocelyn Bell en 1967, que en su caso correspondían a pulsos de ondas de radio.

Los púlsares más comunes tienen un periodo de  $P \sim 0.01 - 8s$ , en contraparte,

los púlsares más viejos son muy rápidos y se conocen como *millisecond pulsars*.

Si bien una de las propiedades que caracteriza a estas estrellas de neutrones es que sus pulsos de radiación son altamente precisos, se han descubierto algunos púlsares que presentan eventos raros en donde la frecuencia de rotación es brevemente alterada. Este salto en la frecuencia se conoce como *glitch*, y a pesar de que se han propuesto las pulsaciones radiales (o no radiales) como posible explicación a estos eventos, aún no se ha podido corroborar. En este trabajo se pretende aportar a esa discusión, utilizando el mismo método descrito en el Cap. 2.

# Capítulo 4

## Análisis de estrellas variables pulsantes mediante (H)VG

*“La esencia de la naturaleza en sí misma nos evade. Lo que de ella nos parece evidente con una percepción ingenua, resulta ser lo más fantasmal.”*

C. S. Lewis

### 4.1. Curvas de luz

En Astronomía se denomina *curva de luz* simplemente a un gráfico que muestra la magnitud aparente o luminosidad de una estrella en función del tiempo, que generalmente está expresado en días julianos (o en alguna de sus variaciones, como los días julianos heliocéntricos). Como se mencionó en el Cap. 3, las estrellas variables presentan curvas de luz en las que esa variación de luminosidad se puede observar en un tiempo relativamente pequeño.

En 2018 se publicó un artículo [54] en el cual se mostraban los resultados de analizar las curvas de luz de 6 estrellas  $\delta$  Scuti con métodos de análisis fractal. Los resultados no fueron concluyentes y sabiendo que el método de grafos de visibilidad es capaz de distinguir series de tiempo fractales nos inspiramos en analizar otras 6 estrellas  $\delta$  Scuti con el fin de encontrar esa huella de fractalidad. Sin embargo, al

obtener los primeros resultados decidimos hacer el mismo análisis con otros tipos de estrellas pulsantes para tener con qué comparar los resultados. Dicho esto, para este trabajo, se tomarán los datos de 48 estrellas pulsantes del catálogo producido por el Optical Gravitational Lensing Experiment (OGLE-III) [55–57] entre las que se encontrarán Cefeidas clásicas, RR Lyrae y  $\delta$  Scuti. Todas estas estrellas pertenecen a la constelación de la Gran Nube de Magallanes, una de las tres zonas que ofrece el catálogo y que nosotros escogimos como la constelación de donde obtendremos nuestra muestra. La mayoría de las estrellas variables pulsantes que se escogieron presentan periodos que se relacionan con el modo fundamental de pulsación radial (Cefeidas F), pero se escogieron algunas estrellas que lo hacían en el primer (Cefeidas 1O, RR Lyrae RRab) y segundo sobretono (RR Lyrae RRc) y ambos a la vez (Cefeidas 1O/2O y RR Lyrae RRd) también, además de las estrellas  $\delta$  Scuti que tienen modos radiales y no radiales. De estos siete subtipos de estrellas variables pulsantes se escogieron las primeras estrellas que presentaba el catálogo para una zona dada por una ascensión recta, una declinación y un radio de barrido específico.

Vale la pena mencionar que el catálogo OGLE-III es un repositorio de datos obtenidos del Observatorio Las Campanas ubicado en el norte de nuestro país. Recordemos que si bien todas pertenecen al tipo de variable pulsante, las Cefeidas clásicas y RR Lyrae pulsan de manera solamente radial, mientras las  $\delta$  Scuti lo hacen de manera híbrida, es decir presentan pulsaciones radiales y no radiales. Se escogieron estas estrellas por orden ascendente de su ascensión recta según el catálogo como una muestra del grupo al que pertenecen. Además, en el caso de las estrellas  $\delta$  Scuti se escogieron deliberadamente algunas estrellas que en el catálogo estaba marcadas como “uncertain” para observar si el método (H)VG permite determinar alguna diferencia con sus análogas certeramente catalogadas. Se listan las estrellas escogidas

en la Tabla 4.1.

El catálogo de OGLE-III nos da la posibilidad de trabajar con datos de luminosidad en la banda V (visible) o I (infrarroja). Debido a que la cantidad de datos en la banda I es mayor que en la banda V utilizaremos la primera para asegurarnos de tener una mejor estadística. Se considera trabajar con los datos de la banda V en el futuro.

Como se puede observar en la Tabla 4.1 los archivos obtenidos del catálogo de OGLE-III de las curvas de luz en la banda infrarroja tienen alrededor de 850 datos cada una. Sin embargo, las estrellas  $\delta$  Scuti y algunas otras pocas estrellas, tienen curvas con 1200 datos aproximadamente. Debido a que no sabemos explícitamente cómo afecta la cantidad de datos de la serie temporal en las distintas métricas, se ha decidido truncar las curvas de luz de estas estrellas en 850 datos. Para un análisis más completo, se han calculado todas las métricas de los grafos construidos usando las curvas de luz originales al igual que las cortadas. Los resultados de estas últimas aparecerán en los gráficos con el símbolo de una cruz en vez de un punto.

También es importante mencionar que todos los grafos hechos con el método de visibilidad fueron hechos a partir de tomar la serie temporal y transformar la magnitud I en  $21 - I$  debido a que una magnitud I más pequeña significa una luminosidad más alta, por lo tanto, se hizo una transformación afín en el eje  $y$  de manera que se buscó la cota superior de la magnitud y resultó que  $I = 21$  cubre todas las magnitudes de las curvas usadas.

En la Fig. 4.1 se observa la curva de luz de la estrella OGLE-LMC-DSCT-1402. Se debe notar que como estamos usando datos reales las mediciones de la magnitud tienen error, sin embargo, para poder convertir las series a redes complejas tendremos que ignorar por ahora esos errores. Esperamos en un futuro poder trabajar con algún

Estrella	$P_1$ (d)	$P_2$ (d)	Modo	Número de puntos
OGLE-LMC-DSCT-1402	0.066595049		Single	1015
OGLE-LMC-DSCT-1417	0.134203370		Single	1015
OGLE-LMC-DSCT-1463	0.109205921		Single	1062
OGLE-LMC-DSCT-1475	0.078958472		Single	1067
OGLE-LMC-DSCT-1478	0.099254286		Single	1063
OGLE-LMC-DSCT-1507	0.078819742		Single	1061
OGLE-LMC-CEP-1753	2.5745626		F	1201
OGLE-LMC-CEP-1780	3.8186769		F	883
OGLE-LMC-CEP-1791	3.6612191		F	882
OGLE-LMC-CEP-1794	4.3328495		F	885
OGLE-LMC-CEP-1802	6.0134457		F	883
OGLE-LMC-CEP-1857	4.8203638		F	866
OGLE-LMC-CEP-1769	2.0801626		1O	852
OGLE-LMC-CEP-1838	1.6431880		1O	890
OGLE-LMC-CEP-1839	0.3415128		1O	886
OGLE-LMC-CEP-1860	2.0013048		1O	819
OGLE-LMC-CEP-1867	3.9414981		1O	795
OGLE-LMC-CEP-1868	3.6616334		1O	880
OGLE-LMC-CEP-1708	0.2419824	0.1942195	1O/2O	799
OGLE-LMC-CEP-1710	0.8885263	0.7167444	1O/2O	839
OGLE-LMC-CEP-1734	0.5901103	0.4745227	1O/2O	894
OGLE-LMC-CEP-1823	0.7833440	0.6311927	1O/2O	884
OGLE-LMC-CEP-1869	0.2930049	0.2350355	1O/2O	884
OGLE-LMC-CEP-1934	1.2950682	1.0367763	1O/2O	894
OGLE-LMC-RRLYR-12906	0.4684054		RRab	884
OGLE-LMC-RRLYR-12932	0.7102158		RRab	882
OGLE-LMC-RRLYR-12994	0.6875818		RRab	882
OGLE-LMC-RRLYR-13000	0.5694727		RRab	885
OGLE-LMC-RRLYR-13030	0.5246726		RRab	883
OGLE-LMC-RRLYR-13125	0.8967681		RRab	1194
OGLE-LMC-RRLYR-12737	0.3445523		RRc	769
OGLE-LMC-RRLYR-12756	0.3383183		RRc	797
OGLE-LMC-RRLYR-12762	0.3452761		RRc	801
OGLE-LMC-RRLYR-13096	0.3194882		RRc	1249
OGLE-LMC-RRLYR-13148	0.3106766		RRc	825
OGLE-LMC-RRLYR-13185	0.3049260		RRc	1302
OGLE-LMC-RRLYR-13369	0.3603041	0.4839633	RRd	875
OGLE-LMC-RRLYR-13783	0.3501258	0.4711385	RRd	879
OGLE-LMC-RRLYR-13960	0.3463834	0.4661516	RRd	881
OGLE-LMC-RRLYR-14015	0.3528262	0.4745833	RRd	880
OGLE-LMC-RRLYR-14162	0.3611600	0.4853301	RRd	745
OGLE-LMC-RRLYR-14519	0.3457231	0.4652083	RRd	879

Tabla 4.1: Estrellas del catálogo OGLE-III seleccionadas para este estudio: estrellas  $\delta$  Scuti (DSCT), Cefeidas (CEP), and RR Lyrae (RRLYR). El modo de pulsación puede ser “Single” (si no es posible determinar con certeza el modo [57]), “F” (osciladores en el modo fundamental), “1O” (osciladores en el primer sobretono) o “1O/2O” (osciladores dobles que pulsan en el primer y segundo sobretono). Para las estrellas RR Lyrae, el modo de pulsación está dado por su tipo: las RRab son osciladores en el modo fundamental, las RRc son osciladores en el primer sobretono y las RRd son osciladores dobles, que pulsan en el primer y segundo sobretono.

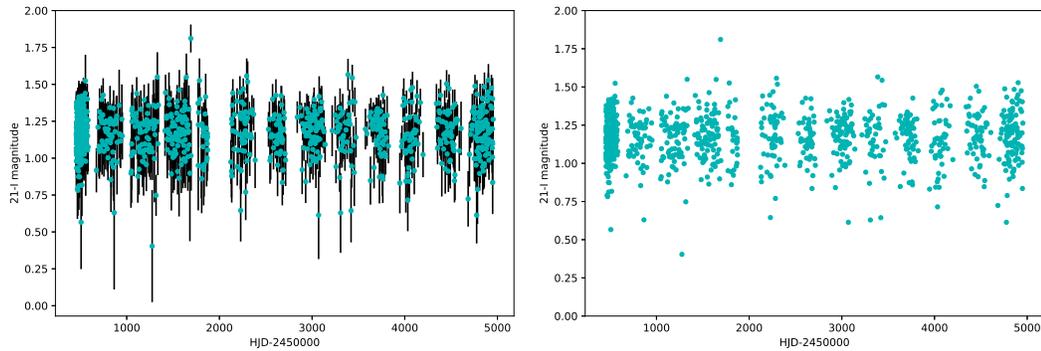


Figura 4.1: Curva de luz de la estrella  $\delta$  Scuti OGLE-LMC-DSCT-1402. (a) Se observa la curva de luz completa junto con sus errores. (b) Curva de luz sin los errores para poder convertirla en una red compleja. En vez de la magnitud I, se grafica la cantidad “21-I”.

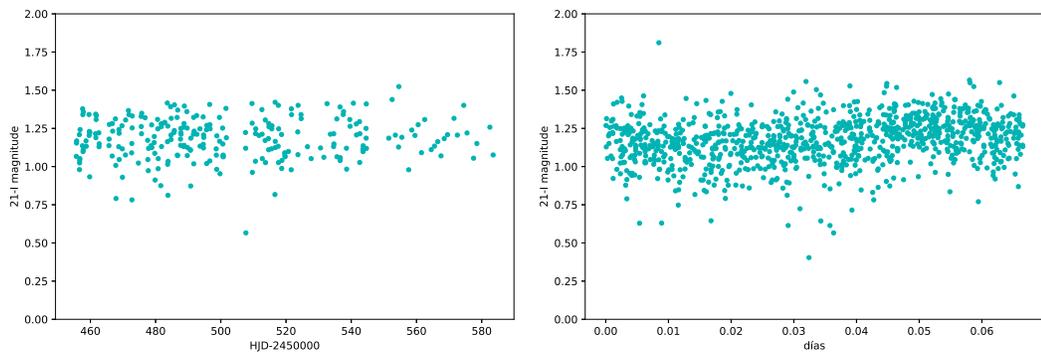


Figura 4.2: Curva de luz de la estrella  $\delta$  Scuti OGLE-LMC-DSCT-1402. (a) Se observa la primera ventana de observación de la estrella; (b) muestra la curva de luz faseada con su periodo.

método de redes complejas que considere los errores.

Una de las cosas que puede notarse de inmediato es que no es una serie temporal equiespaciada. Aun más, presenta saltos de datos cada cierta cantidad de días que no son menores.

Rara vez se pueden obtener curvas de luz que estén equiespaciadas temporalmente. Eso se debe a que si estamos observando desde la Tierra, tenemos muchas condiciones que afectan la observación. Probablemente no podremos mirar la estrella

durante el día, por lo que se presentarán brechas con frecuencias de un día; si nuestra observación depende de alguna condición lunar nuestras brechas serán mensuales; o si nuestra observación depende de alguna condición estacional tendremos brechas de un año aproximadamente; además, otros obstáculos podrían presentarse, como agendas del telescopio o problemas con el mismo.

Si se observan las curvas de luz que aquí se muestran se tiene en todos los casos un tipo de brecha anual, lo que quiere decir que carecemos de los datos de luminosidad de cada estrella en esos periodos. Estas brechas, han sido históricamente un problema para los astrónomos y hay que ser muy cuidadosos al trabajar con las curvas de luz, porque por ejemplo, si estamos tratando de calcular el periodo de pulsación de una estrella, podrían aparecer frecuencias espúreas en los cálculos solo por la existencia de estas brechas observacionales.

Para poder convertir estas series temporales de la magnitud aparente de una estrella en grafos de visibilidad surge la obvia pregunta: ¿qué hacemos con las brechas? Si por un lado se decide construir los grafos considerando la existencia de las brechas o si por el otro, decidimos eliminarlos y unir todos los datos, en cualquiera de los casos le estamos dando información incompleta a la red, y no tenemos un criterio a priori para decidir cuál alternativa es mejor. Por esta razón, se ha decidido construir los grafos de visibilidad (normal y horizontal) de estas curvas de luz de tres maneras distintas, las cuales se verán en las respectivas secciones siguientes.

## **4.2. Resultados**

### **4.2.1. Curvas completas**

La primera decisión que se tomará con respecto a las brechas es dejarlas como están y construir los grafos de visibilidad a partir de las curvas de luz completas.

Recordemos que el VG es sensible a la separación de los datos en el eje horizontal, es decir, obtendremos grafos distintos a partir de una serie equiespaciada y una no equiespaciada que tengan los mismos valores de  $y$  para cada dato. Por otra parte, el HVG es completamente insensible al espaciado entre los datos en el eje  $x$ , por lo que para este tipo de grafo tomar la curva completa sería equivalente a tomar cada ventana de observación y pegarla una junto a la otra; el grafo resultante sería el mismo. Por supuesto, ninguno de los grafos obtenidos tendrá toda la información que necesitamos. Por un lado, el VG verá los vacíos de datos y tendremos un grafo que contendrá esa información de los vacíos. Asimismo, el HVG se construirá a partir de una serie que no es la real, ya que verá la serie cortada como si estuvieran todos los datos juntos, como si fuera otra serie temporal. Como ambos modos de construir los grafos tienen sus propias ventajas y desventajas, esperamos que el hecho de construir ambos grafos nos dé más luz al respecto.

A partir de las redes construidas mediante el método (H)VG usando las curvas de luz completas, se calculan algunas métricas de estos grafos: el número de conexiones totales de la red  $m$ , el grado promedio  $\langle k \rangle$ , el coeficiente de agrupamiento  $C$ , el cociente de transitividad  $T$  y la distribución de grado  $P(k)$ .

En la Fig. 4.3 se puede ver la relación entre el número de conexiones y el grado promedio de las redes hechas a partir de las curvas de luz completas y también para una red aleatoria de 850 nodos, se puede observar que las estrellas más cercanas al comportamiento de una red aleatoria son las  $\delta$  Scuti, cuyas series fueron truncadas. Para las figuras se usaron distintos colores para referirse a cada tipo de estrella: Cian, delta Scuti (puntos más pequeños corresponden a los archivos originales de 1200 datos); magenta, Cefeidas que pulsan en el modo fundamental; naranja, Cefeidas que pulsan en el primer sobretono; rojo, Cefeidas que pulsan en el segundo sobretono;

verde, RR Lyrae RRab; amarillo, RR Lyrae RRc y azul, RR Lyrae RRd. Esta paleta de colores se usará de esta manera durante todo el capítulo.

En las siguientes figuras se intentará observar algún tipo de agrupamiento entre las estrellas pulsantes que pertenecen al mismo tipo para saber si alguna de las métricas que estudiamos es capaz de discriminar entre ellas.

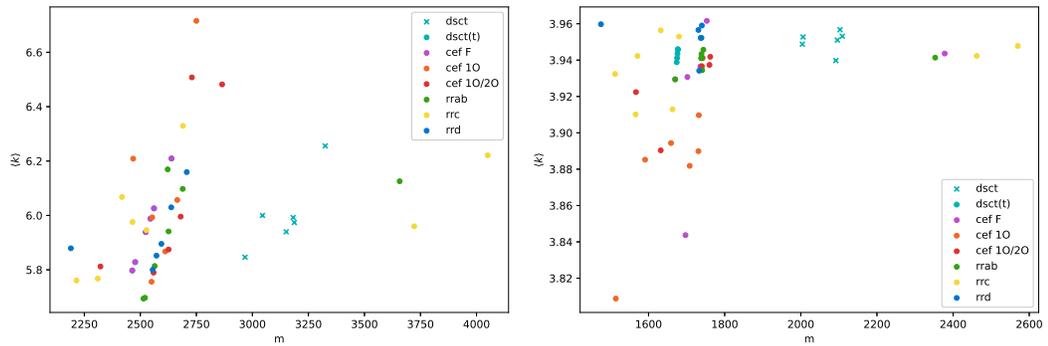


Figura 4.3: Se muestra la relación entre número de conexiones totales y grado promedio de la red para (a) VG y (b) para HVG. Cada color corresponde a un tipo distinto de estrella.

Como se dijo previamente, el número de conexiones totales  $k$  de los grafos será mayor cuando hablamos de grafos normales, debido a que estos siempre generarán más conexiones que un grafo horizontal si los construimos a partir de la misma serie. En cuanto al grado promedio de una red ( $\langle k \rangle$ ) hablamos del promedio de conexiones por nodo de una red, que por lo dicho anteriormente, también tenderá a ser menor en los grafos horizontales, tal como se observa al comparar las Figs. 4.3 (a) y (b).

Observando la figura 4.3 se puede notar que, siendo consistente con la Ec. 2.3, las  $\delta$  Scuti se muestran agrupadas en un valor muy cercano a 4, aun para los archivos cortados. Estas aparecen agrupadas en un rango muy pequeño, situación que se podría justificar con la complejidad que presentan las curvas de luz de estas estrellas. Al parecer esta métrica es capaz de captar esa complejidad y ese “desorden” en las

curvas de luz, ya que todas las estrellas de este tipo presentan un grado promedio muy cercano a 4. Sabiendo que estas curvas de luz son más complicadas, no se debe olvidar que estas curvas están “contaminadas” con saltos de datos y por supuesto, con ruido instrumental, por lo que las curvas parecen mucho más aleatorias de lo que realmente son.

También se puede notar que las estrellas RR Lyrae RRd (puntos azules) muestran cierto agrupamiento para grafos HVG y que además también se encuentran en un rango muy cercano a 4, lo cual tiene sentido considerando que este tipo de estrellas también tienen curvas de luz relativamente desordenadas porque son estrellas pulsantes que pulsan en dos modos simultáneamente.

Para el caso del VG se puede ver que existe una gran dispersión de todos los puntos y no se observa ningún agrupamiento particular entre grupos de estrellas, lo cual nos muestra que para efectos de analizar el grado de ordenamiento de las curvas de luz, el HVG parece ser la herramienta que responde mejor a ese estudio. De hecho, es interesante notar también que para las estrellas que presentan el grado promedio más pequeño se observan dos que se destacan sobre las demás, correspondiendo a una estrella Cefeida que pulsa en el modo fundamental (punto morado en la coordenada (1710,3.84)) y a una que pulsa en el primer sobretono (punto naranja en la coordenada (1514,3.81)). Esto se condice con el hecho de que deberían ser las estrellas que presentan curvas más similares a las sinusoidales. Sin embargo, al mirar las estrellas del mismo grupo se observa que presentan una gran dispersión de sus puntos.

En la Fig. 4.4 se graficará el coeficiente de agrupamiento en función del número de conexiones totales y en la Fig. 4.5, el cociente de transitividad en función de las conexiones totales.

El número de conexiones depende directamente del número de datos que contenga la serie. Tal como se puede observar en las Figs. 4.3, 4.4 y 4.5 las redes hechas con las curvas no truncadas de las estrellas  $\delta$  Scuti tienen más conexiones en ambos grafos. Por tanto, no nos dice demasiado acerca de la topología de la red, sin embargo, puede servir de igual manera para caracterizar ciertas propiedades generales de las curvas de luz de las distintas estrellas.

En las Figs. 4.6 y 4.7 se grafica el coeficiente de agrupamiento y el cociente de transitividad en función del grado promedio, respectivamente. En estas figuras se observa también un cierto rango de agrupación para los valores de las métricas de las estrellas  $\delta$  Scuti, de hecho, se observa que para las series truncadas y originales los valores de las métricas no varían demasiado. Entendemos que estas métricas logran capturar la topología de las redes a pesar de tener una cantidad distinta de datos.

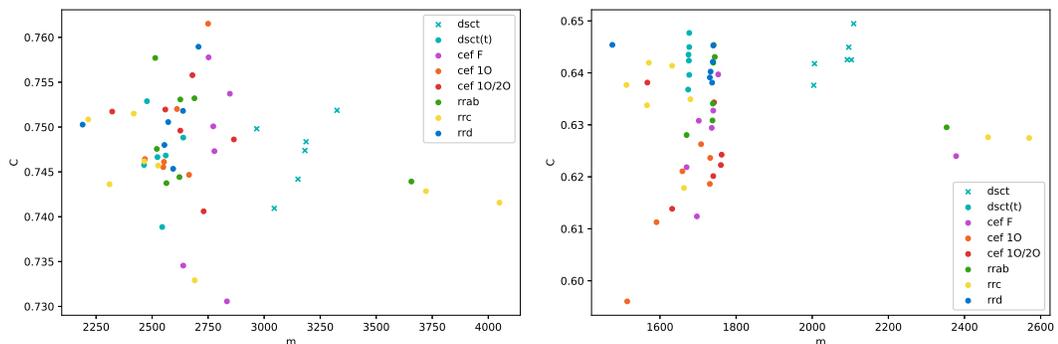


Figura 4.4: Se muestra la relación entre número de conexiones totales y coeficiente de agrupamiento de la red. Cada color corresponde a un tipo distinto de estrella, de acuerdo a la convención usada.

Finalmente se calcula la distribución de grado para cada red. Como se ha mencionado en los capítulos anteriores la distribución de grado tiene una importancia notable, ya que a través de ella se pueden distinguir ciertas características específicas de las series temporales. Una muy importante es el hecho de que el grafo horizontal

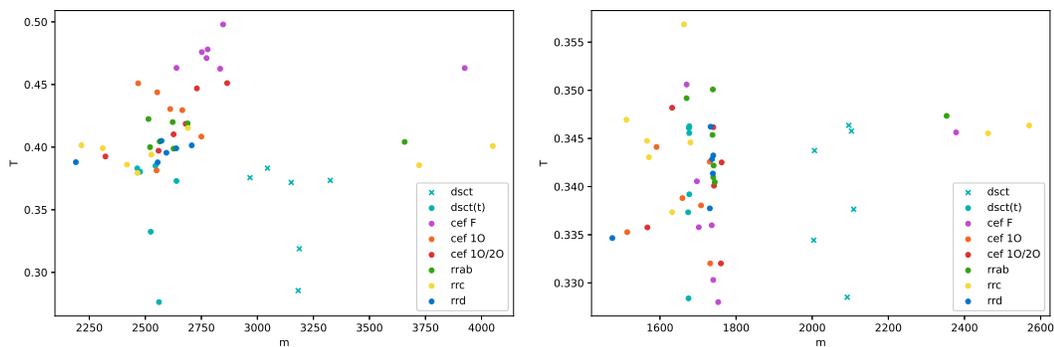


Figura 4.5: Se muestra la relación entre número de conexiones totales y cociente de transitividad de la red.

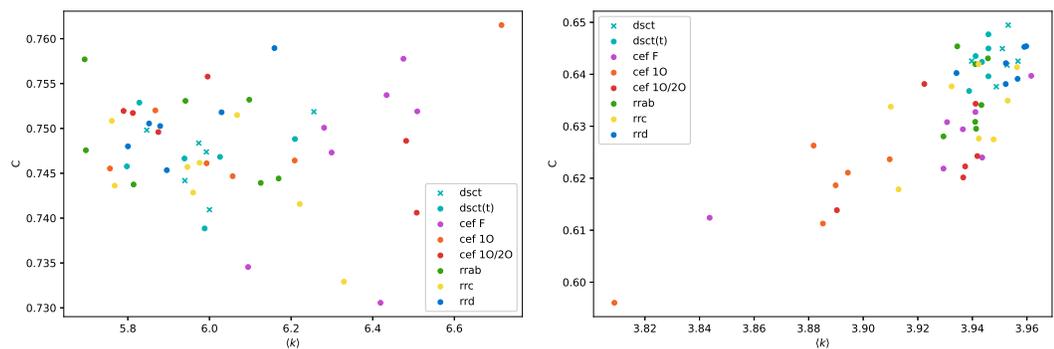


Figura 4.6: Se muestra la relación entre grado promedio y coeficiente de agrupamiento de la red.

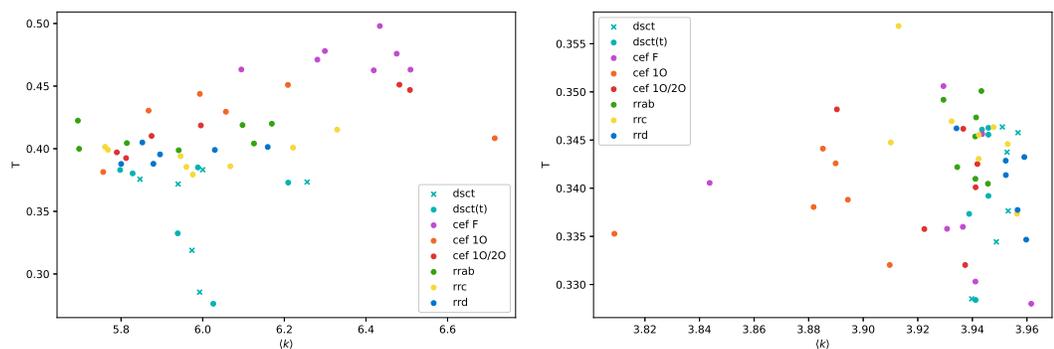


Figura 4.7: Se muestra la relación entre grado promedio y cociente de transitividad de la red.

puede distinguir series que tienen una distribución de grado libre de escala (leyes de potencia) y por ende, son series que tienen características específicas. Estas podrían ser series aleatorias (independiente de la distribución que tengan) o fractales. Más adelante mencionaremos algunos puntos sobre si las curvas de luz podrían corresponder a series fractales o no.

Al observar (ver Figs. 4.8–4.24) las distribuciones de grado de todas las estrellas (para ambos tipos de grafos) se puede advertir claramente una tendencia universal. Para los grafos horizontales se obtiene una distribución de grado exponencial, por lo que todas estas figuras se grafican en escala semilogarítmica con su ajuste correspondiente. Este comportamiento puede asociarse a series aleatorias de distinto tipo, sin embargo sabemos que estas curvas de luz presentan un comportamiento periódico, por lo que es probable que el nivel de contaminación con ruido de estas series sea demasiado alto para el HVG.

Por otro lado, si se observan las distribuciones de grado obtenidas por grafos de visibilidad normales vemos un comportamiento de ley de potencia, lo cual está relacionado con la fractalidad de la red [2] y podría también, por lo tanto, estar relacionado de alguna manera con la presencia de caos en la serie, pero esto es algo que quedará como trabajo futuro. El comportamiento universal de sus distribuciones de grado podrá ser corroborado en las Secciones 4.2.2 y 4.2.3, al calcular la distribución de grado de los grafos hechos a partir de las ventanas de observación y las curvas faseadas, ya que en esos casos no se podrá argumentar que los saltos en las mediciones produjeron ruido en la serie.

Para cada tipo de estrella, se muestran primero (ver Figs. 4.8, 4.9, 4.12, 4.13, 4.15, 4.17, 4.19, 4.21 y 4.23) las figuras de su distribución de grado para una sola estrella correspondiente al grupo de manera que se pueda observar el comportamiento

individual de un solo grafo. A continuación, se muestran (ver Figs. 4.10, 4.11, 4.14, 4.16, 4.18, 4.20, 4.22 y 4.24) las figuras de la distribución de grado para el grupo completo de estrellas.

Para el caso de las  $\delta$  Scuti –grupo al cual se le truncaron los últimos datos de la serie (Fig. 4.11)– y para la Cefeida OGLE-III-LMC-CEP-1753 (Fig. 4.13) –serie que también se truncó por su cantidad de datos– se puede ver que, a pesar de tener unos 200 datos menos, el exponente del ajuste exponencial (HVG) y de ley de potencia (VG) se mantiene casi en el mismo valor.

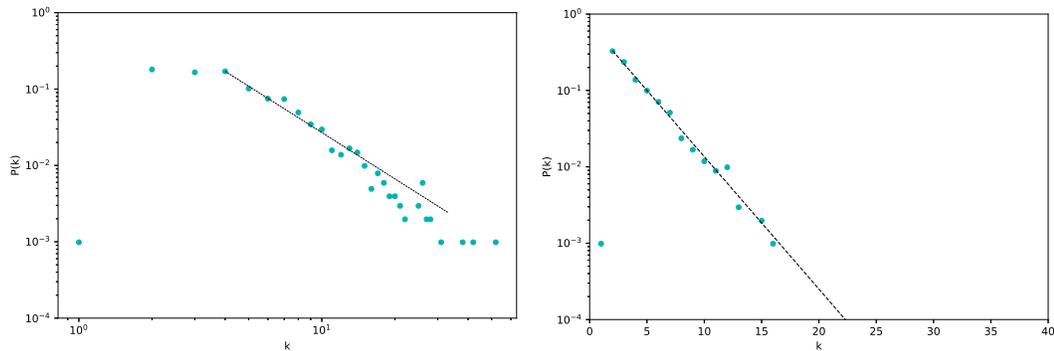


Figura 4.8: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella  $\delta$  Scuti 1402 con la curva original (no cortada). Para la red hecha con el grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia. Al hacer el ajuste se tiene que  $\gamma = 2.02$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.399$ .

Es importante decir que se esperaría que la distribución de grado de las estrellas RR Lyrae RRc fuera la más distinta a las demás, debido a que estas estrellas presentan una curva de luz que parecer ser muy sinusoidal en comparación a las otras que, aunque son periódicas, tienen una forma más parecida a lo que se denomina “dientes de sierra”. Sin embargo, es interesante notar que no parece haber mucha diferencia entre este tipo de estrellas RR Lyrae y las demás.

La comparación entre los exponentes de las distribuciones de grado se puede

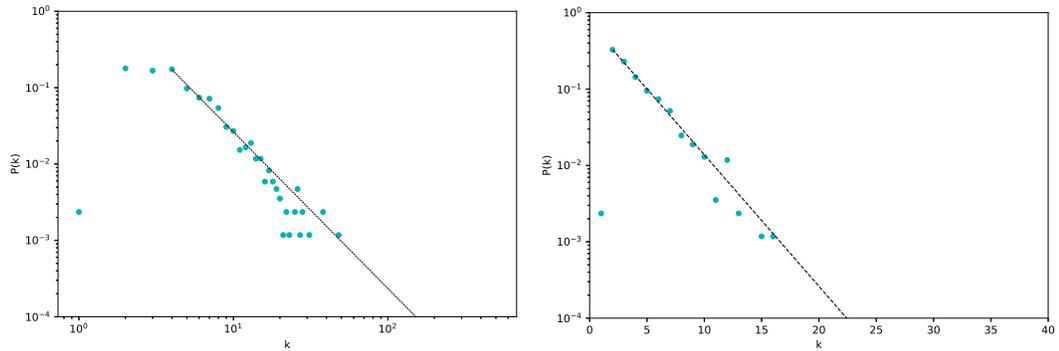


Figura 4.9: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella  $\delta$  Scuti 1402 con la curva cortada. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.05$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.397$ .

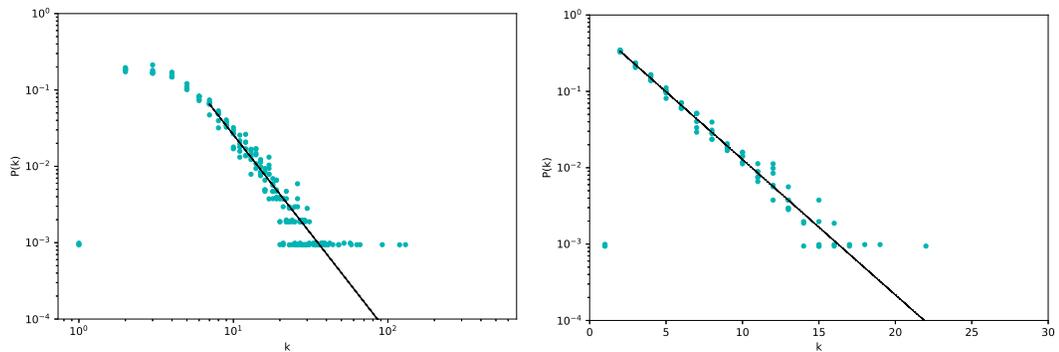


Figura 4.10: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas  $\delta$  Scuti (archivos originales). Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.59$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.408$ .

observar en la Tabla 4.2.

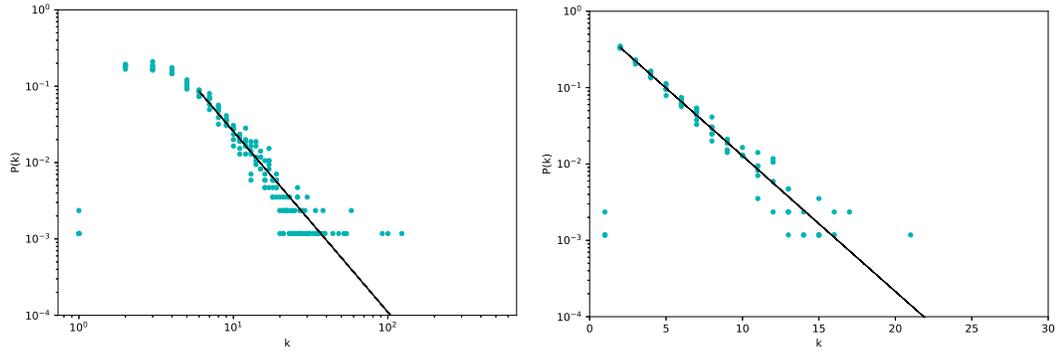


Figura 4.11: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas  $\delta$  Scuti usando sus archivos de datos truncados en 850 datos. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.37$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.409$ .

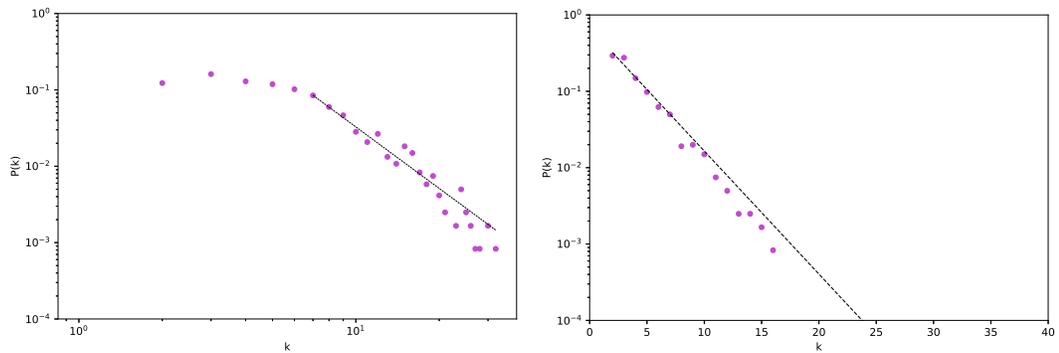


Figura 4.12: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella Cefeida (modo F) 1753 con la curva original. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.67$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.371$ .

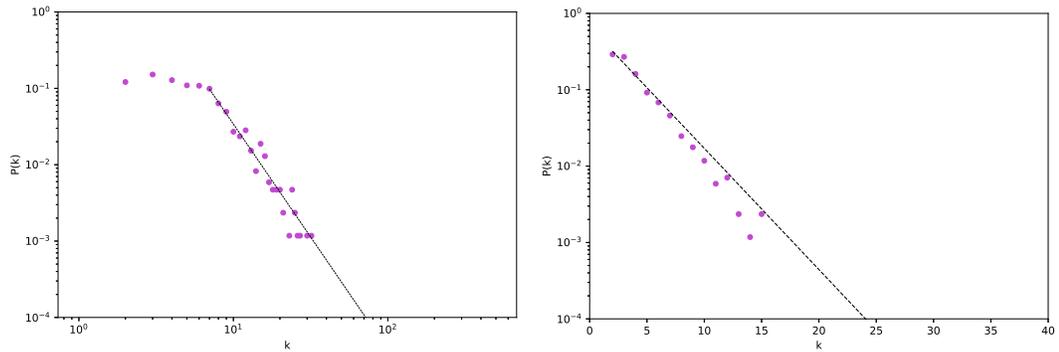


Figura 4.13: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella Cefeida (modo F) 1753 con la curva truncada. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.96$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.366$ .

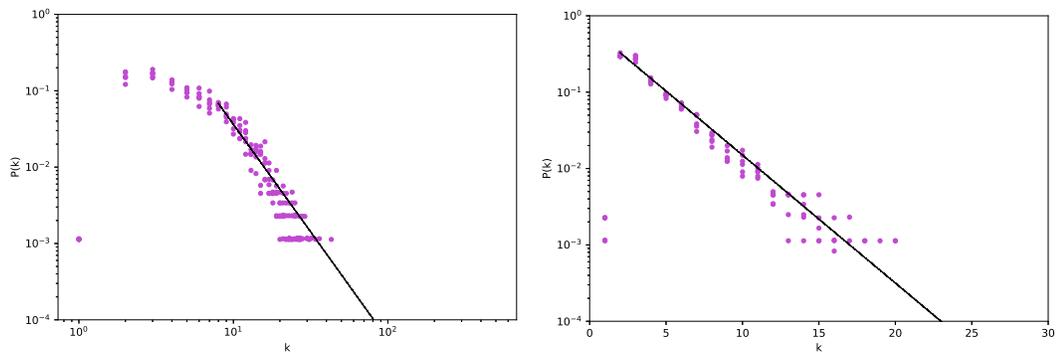


Figura 4.14: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas Cefeidas que pulsán en el modo fundamental. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.82$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.386$ .

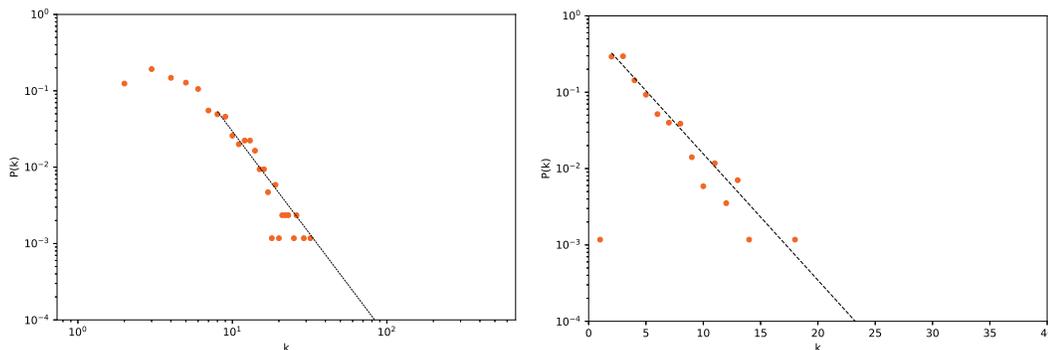


Figura 4.15: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella Cefeida (primer sobretono) 1769 con la curva cortada. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.68$ . El ajuste lineal del grafo horizontal muestra un exponente  $\gamma = 0.381$ .

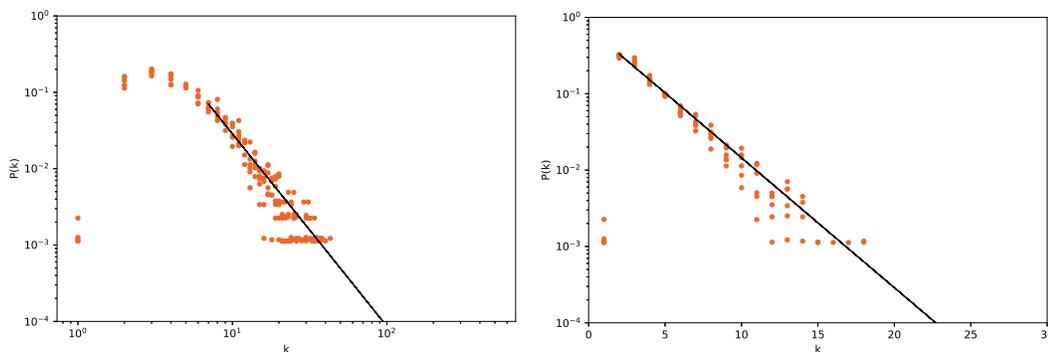


Figura 4.16: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas Cefeidas que pulsan en el primero sobretono. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.51$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.392$ .

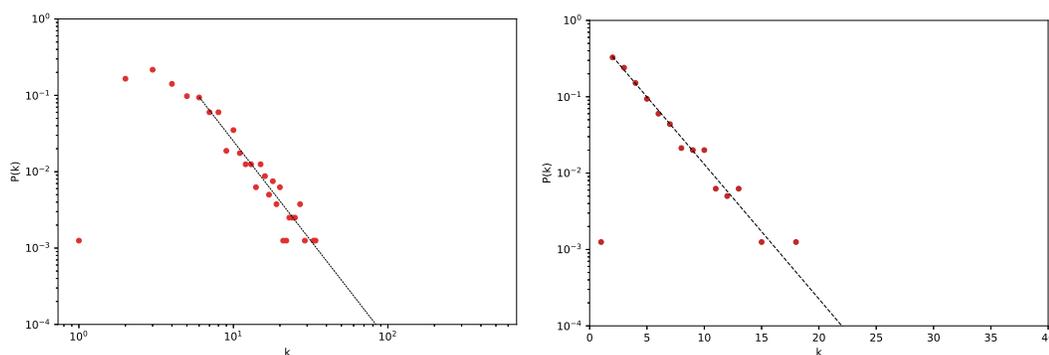


Figura 4.17: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella Cefeida (primer y segundo sobretono) 1708. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.60$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.406$ .

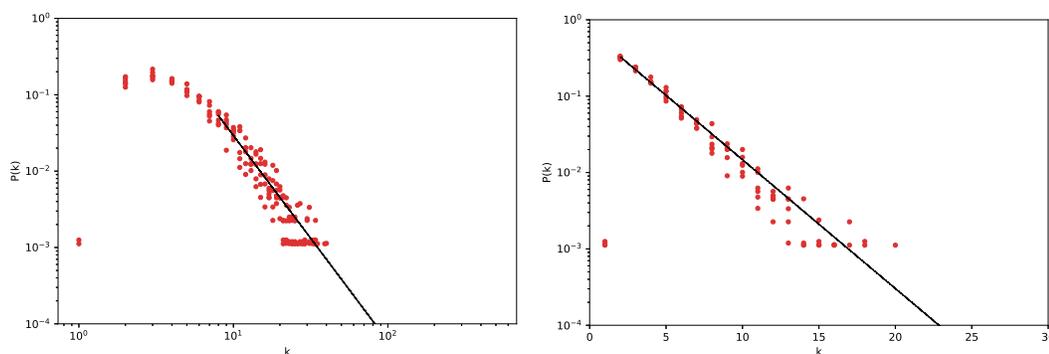


Figura 4.18: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas Cefeidas que pulsan en dos modos (10/20). Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.69$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.388$ .

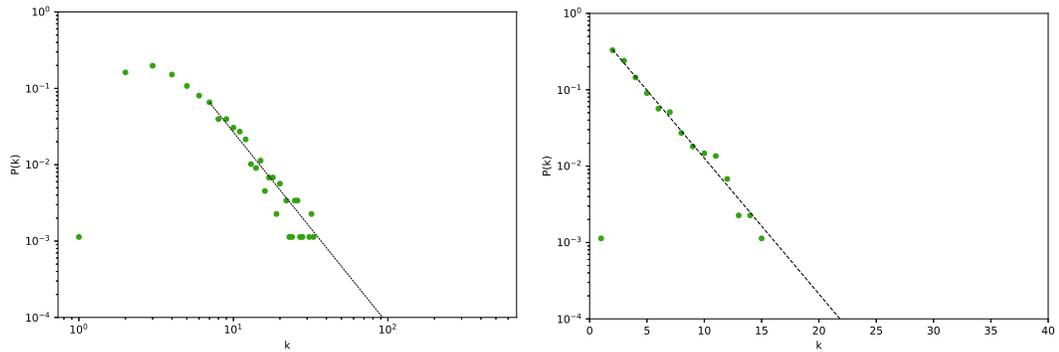


Figura 4.19: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella RR Lyrae RRab 12906. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.51$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.409$ .

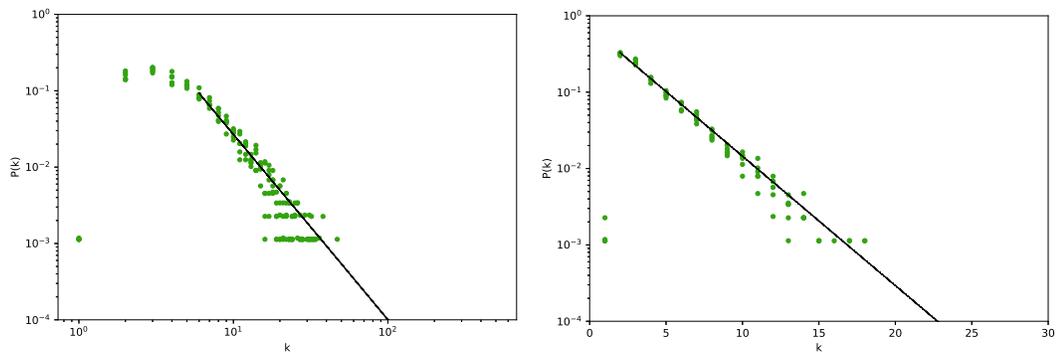


Figura 4.20: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas RR Lyrae RRab. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.43$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.390$ .

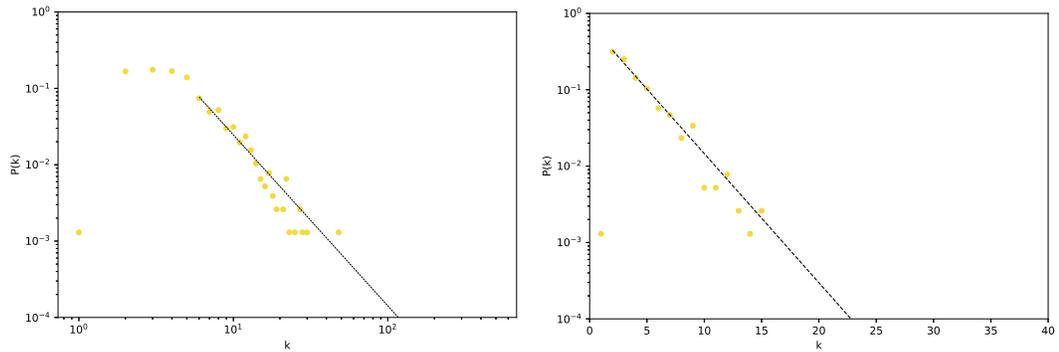


Figura 4.21: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella RR Lyrae RRc 12737. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.24$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.389$ .

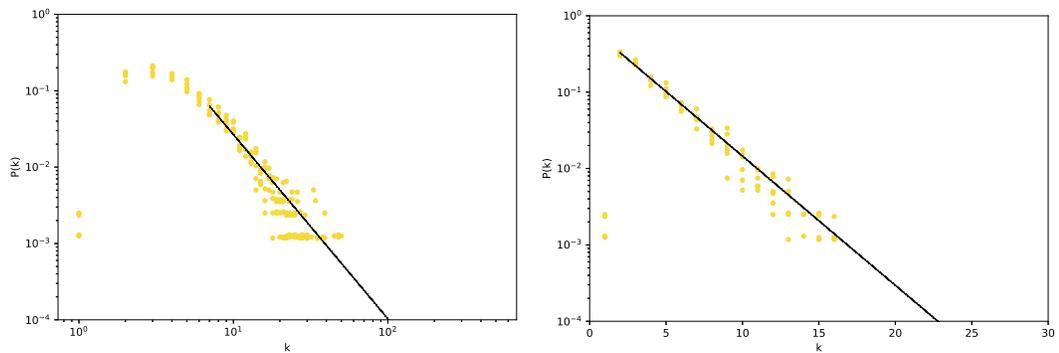


Figura 4.22: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas RR Lyrae RRc. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.41$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.390$ .

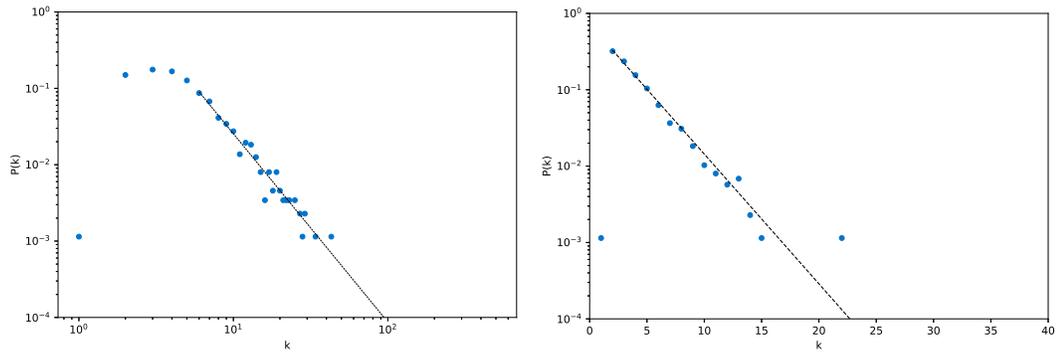


Figura 4.23: Aquí se muestra la distribución de grado para la estrella RR Lyrae RRd 13369. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.47$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.391$ .

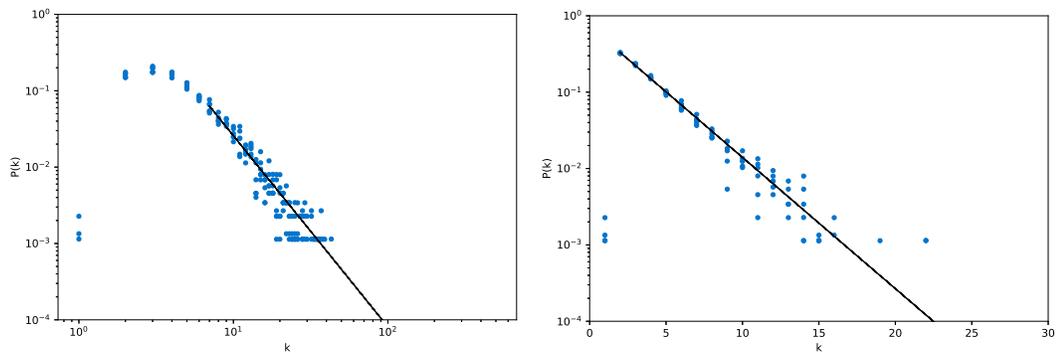


Figura 4.24: Aquí se muestra la distribución de grado para el conjunto de estrellas RR Lyrae RRd. Para el grafo hecho con grafo normal (izquierda) se ve una distribución de grado de ley de potencia con exponente  $\gamma = 2.50$ . El ajuste lineal del grafo horizontal (derecha) muestra un exponente  $\gamma = 0.396$ .

Tipo de estrella	$\gamma_{\text{HVG}}$	$\gamma_{\text{VG}}$
$\delta$ Scuti	$0.408 \pm 0.003$	$2.59 \pm 0.02$
$\delta$ Scuti (t)	$0.409 \pm 0.003$	$2.37 \pm 0.01$
Cefeidas F	$0.386 \pm 0.007$	$2.82 \pm 0.02$
Cefeidas 1O	$0.392 \pm 0.005$	$2.52 \pm 0.02$
Cefeidas 1O/2O	$0.388 \pm 0.003$	$2.69 \pm 0.02$
RR Lyrae RRab	$0.390 \pm 0.004$	$2.43 \pm 0.01$
RR Lyrae RRc	$0.390 \pm 0.004$	$2.41 \pm 0.02$
RR Lyrae RRd	$0.396 \pm 0.002$	$2.50 \pm 0.02$

Tabla 4.2: Exponentes para el grado de distribución, donde  $\gamma_{\text{HVG}}$  es el exponente de un ajuste exponencial para la distribución de grado HVG y  $\gamma_{\text{VG}}$  para un ajuste de ley de potencia para la distribución de grado VG.

### 4.2.2. Grafos de visibilidad a partir de las ventanas de observación de las curvas de luz

Luego de analizar las curvas de luz de manera completa, la segunda decisión que se tomará al respecto de cómo construir los grafos será la de tomar una ventana de observación de una curva de luz y construir los grafos a partir de esos datos. Esto se hará para cada ventana de observación de cada curva, por lo que se obtendrán varios grafos a partir de una sola curva de luz de una estrella. Para la mayor parte de las estrellas se tienen 11 ventanas de observación, excepto para las  $\delta$  Scuti, para las cuales se tenían 13, pero al truncar las series también quedaron con 11 ventanas. A cada grafo se le calcularán las distintas métricas ya mencionadas y luego se calculará un promedio de estas métricas según el número de ventanas de observación que tenga la serie. La ventaja que tiene esta manera de construir los grafos es el hecho de que no le añadimos información errónea al incluirle los saltos de datos y por ende, se esperaría que las métricas fueran resultados más fieles que lo que sería tener la curva completa sin saltos. Sin embargo, como ya se había mencionado, los grafos construidos a partir de series pequeñas (menos de 500 datos aproximadamente) deben ser analizados con mucho cuidado debido a los efectos de borde: mientras más cercano esté un nodo a los bordes menos conexiones tendrá. Justamente las ventanas de observación corresponden a series que tienen en promedio unos doscientos datos, por lo que hay que ser muy cuidadosos al momento de analizar.

En las siguientes figuras (4.25–4.30) se observan las mismas métricas calculadas en la sección anterior, pero esta vez para los promedios obtenidos desde las redes hechas por cada ventana de observación. Es curioso el hecho de que parece haber un par de estrellas en las Fig. 4.25, 4.26, 4.27 que salen del promedio en donde se encuentran las demás. Esto también sucedía con algunas estrellas en los resultados

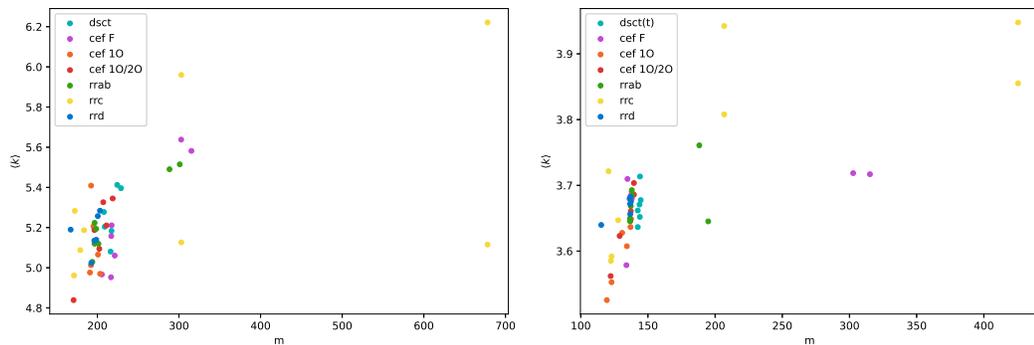


Figura 4.25: Se grafica el promedio del grado promedio en función del promedio de las conexiones totales de cada red hecha a partir de una ventana de observación para VG (izquierda) y HVG (derecha).

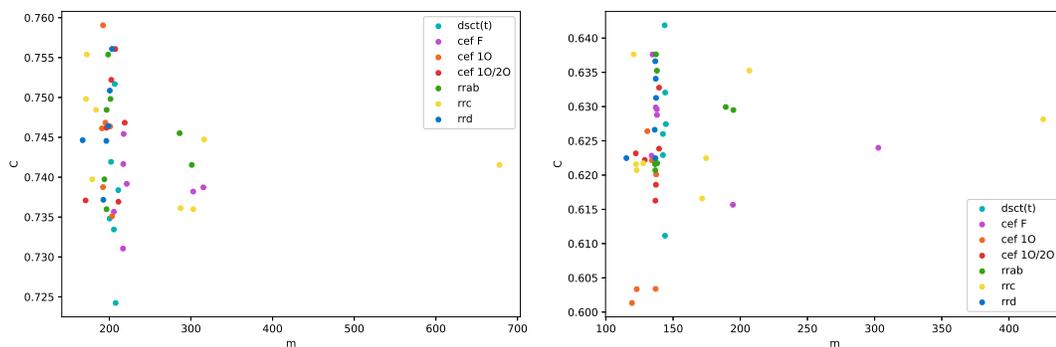


Figura 4.26: Se grafica el promedio del coeficiente de agrupamiento en función del promedio de las conexiones totales de cada red hecha a partir de una ventana de observación para VG (izquierda) y HVG (derecha).

de las curvas completas (ver Figs. 4.3, 4.4 y 4.5).

Se puede notar que en las figuras de las métricas promedio hay algunas estrellas que salen de la media. Esto se produce porque, como se ve en la Tabla 4.1, hay algunas estrellas que tienen más datos que el promedio, pero la ventana de observación que tiene mucho más datos que las demás es la primera, por tanto, al truncar las series el promedio se eleva en relación a las demás estrellas.

Como se dijo, la distribución de grado es una métrica que se ha estudiado bastante, siendo capaz de distinguir huellas del proceso que originó la serie temporal. En las

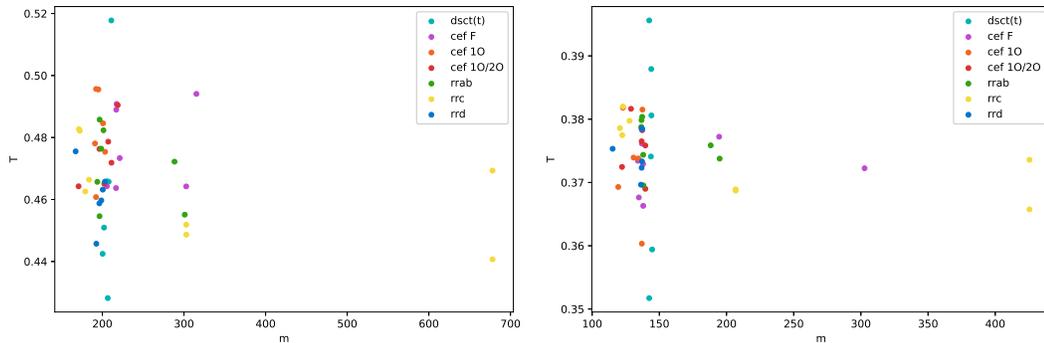


Figura 4.27: Se grafica el promedio del cociente de transitividad en función del promedio de las conexiones totales de cada red hecha a partir de una ventana de observación para VG (izquierda) y HVG (derecha).

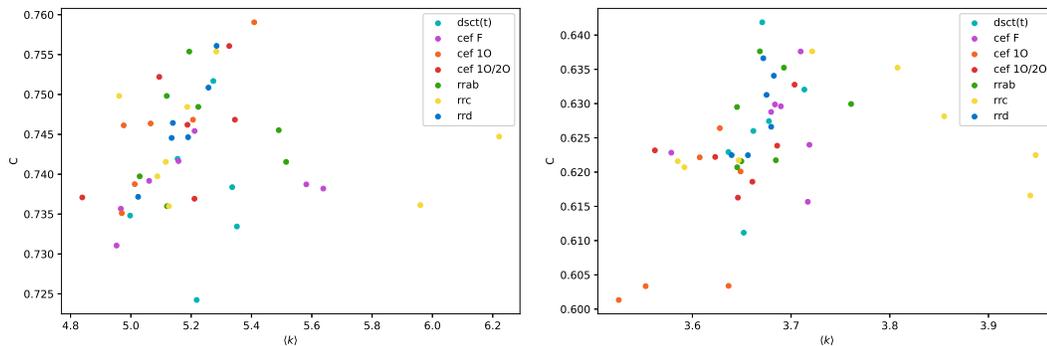


Figura 4.28: Se grafica el promedio del coeficiente de agrupamiento en función del promedio del grado promedio de cada red hecha a partir de una ventana de observación para VG (izquierda) y HVG (derecha).

figuras a continuación (ver Figs. 4.31–4.37) se pueden observar las distribuciones de grado promediadas en los tramos de observación de cada curva de luz, y se separaron según el tipo de estrella.

Se puede observar que para todas las estrellas al calcular la distribución de grado se obtiene la misma estructura que se obtuvo para las curvas de luz completas. Las redes hechas a partir de grafos de visibilidad normal muestran una tendencia de ley de potencia, mientras las hechas con grafos horizontales, una tendencia exponencial, donde los exponentes del ajuste se pueden observar en la Tabla 4.3, notando que

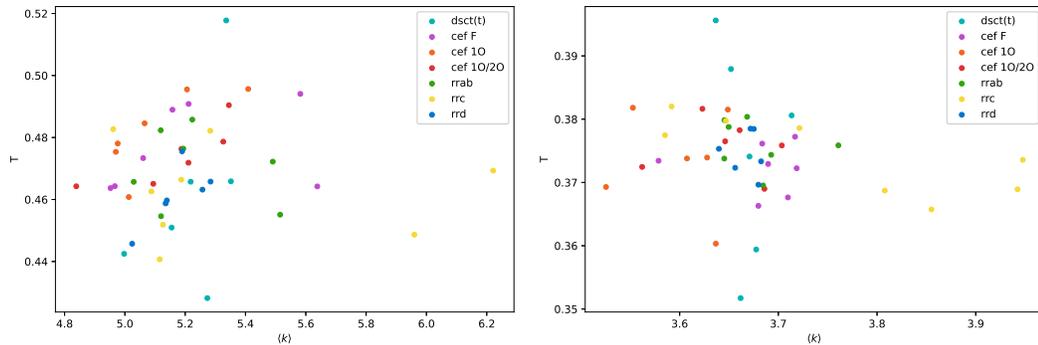


Figura 4.29: Se grafica el promedio del cociente de transitividad en función del promedio del grado promedio de cada red hecha a partir de una ventana de observación para VG (izquierda) y HVG (derecha).

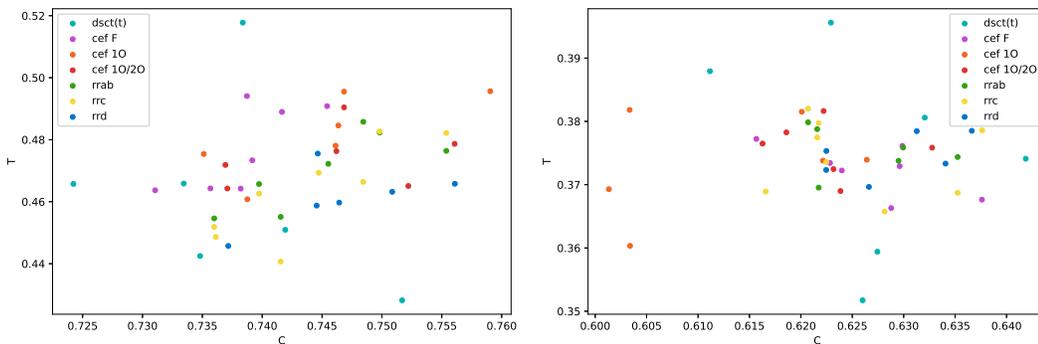


Figura 4.30: Se grafica el promedio del cociente de transitividad en función del coeficiente de agrupamiento promedio de cada red hecha a partir de una ventana de observación para VG (izquierda) y HVG (derecha).

son muy similares a los obtenidos con las curvas completas en la Tabla 4.2. Este resultado es notable ya que no hay que olvidar que las curvas de luz que usamos en la subsección anterior carecían de gran cantidad de datos en algunos tramos y aun así se obtuvo un resultado muy similar.

### 4.2.3. Curvas de luz faseadas

Finalmente, la última decisión que se tomará con respecto a cómo construir los grafos de visibilidad corresponderá a tomar la curva de luz completa y crear otra

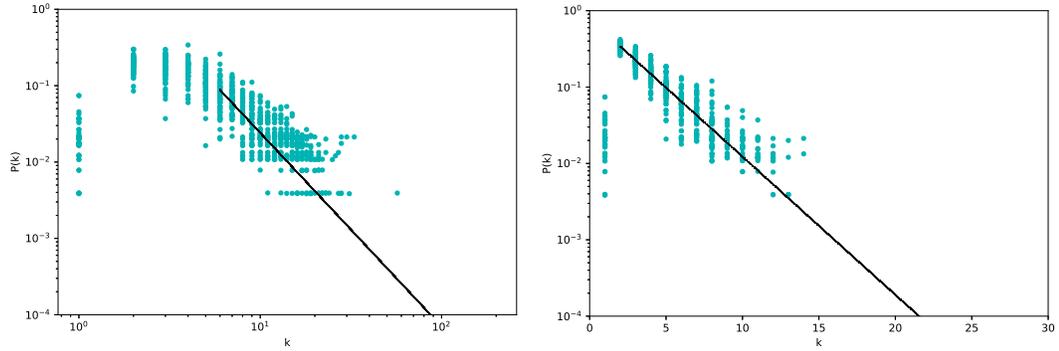


Figura 4.31: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las  $\delta$  Scuti, cuyas series fueron truncadas.

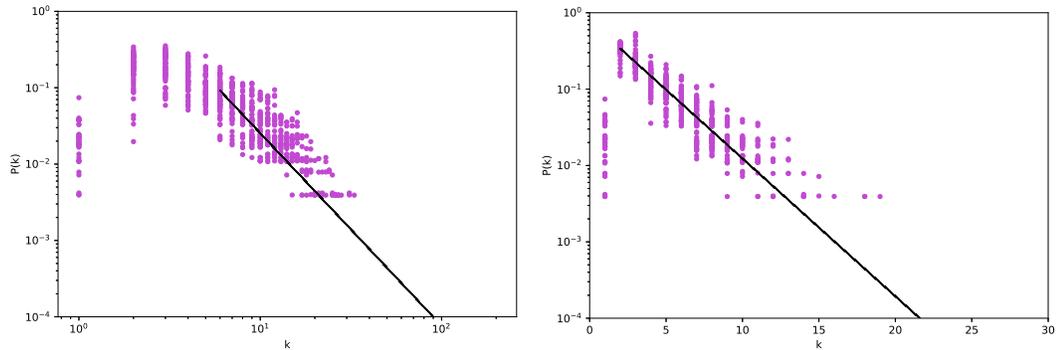


Figura 4.32: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las Cefeidas que pulsan en el modo fundamental.

Tipo de estrella	$\gamma_{\text{HVG}}$	$\gamma_{\text{VG}}$
$\delta$ Scuti (t)	$0.416 \pm 0.004$	$2.53 \pm 0.02$
Cefeidas F	$0.415 \pm 0.005$	$2.52 \pm 0.02$
Cefeidas 1O	$0.418 \pm 0.005$	$2.54 \pm 0.02$
Cefeidas 1O/2O	$0.420 \pm 0.004$	$2.47 \pm 0.02$
RR Lyrae RRab	$0.408 \pm 0.004$	$2.61 \pm 0.02$
RR Lyrae RRc	$0.407 \pm 0.004$	$2.46 \pm 0.02$
RR Lyrae RRd	$0.415 \pm 0.004$	$2.44 \pm 0.02$

Tabla 4.3: Misma tabla que Tabla 4.2, pero para redes hechas de las ventanas de observación.

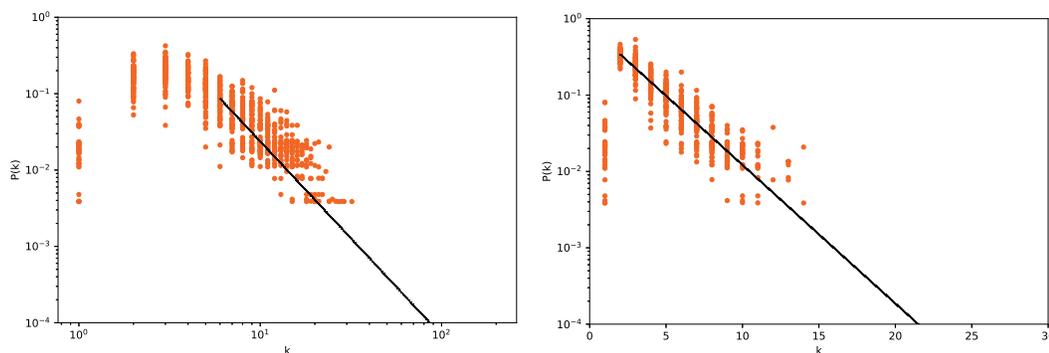


Figura 4.33: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las Cefeidas que pulsan en el primer sobretono.

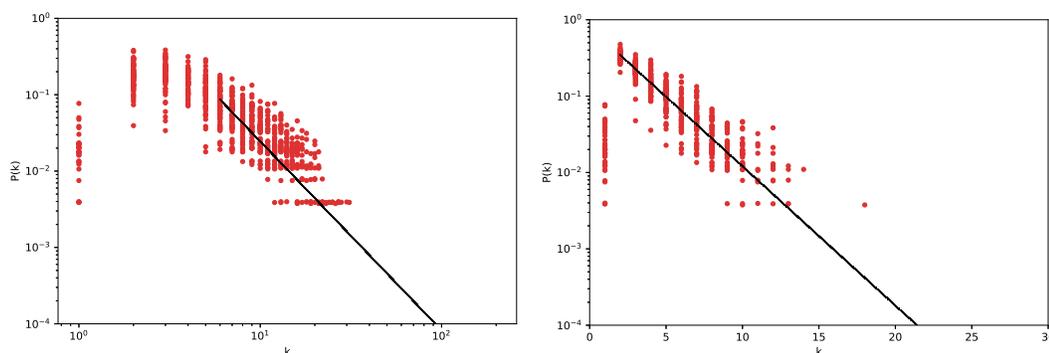


Figura 4.34: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las Cefeidas que pulsan en el primer y segundo sobretono.

curva de luz donde todos los puntos queden dentro de una escala de tiempo igual al periodo de pulsación de la estrella. Este periodo fue tomado del mismo catálogo OGLE-III.

Es interesante notar que cuando tomamos curvas faseadas estamos cambiando drásticamente la geometría de la curva analizada, tal como vemos en las Fig. 4.2 (derecha). Recordemos que al tomar curvas completas o incluso al tomar las curvas de luz solo de tramos de observación estamos, en teoría, viendo una oscilación regular de los puntos a través del tiempo. Sin embargo, cuando analizamos una curva de luz

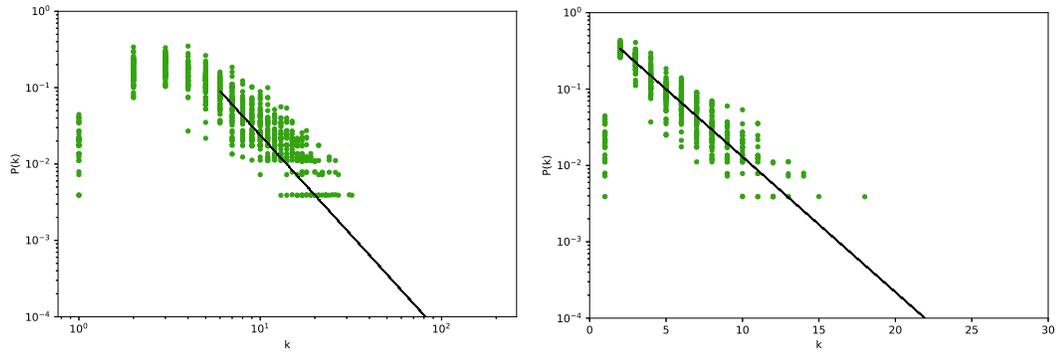


Figura 4.35: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las RR Lyrae RRab.

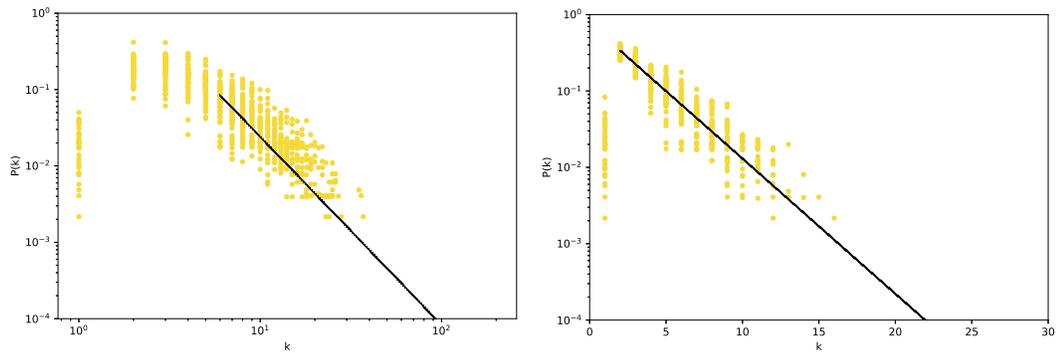


Figura 4.36: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las RR Lyrae RRc.

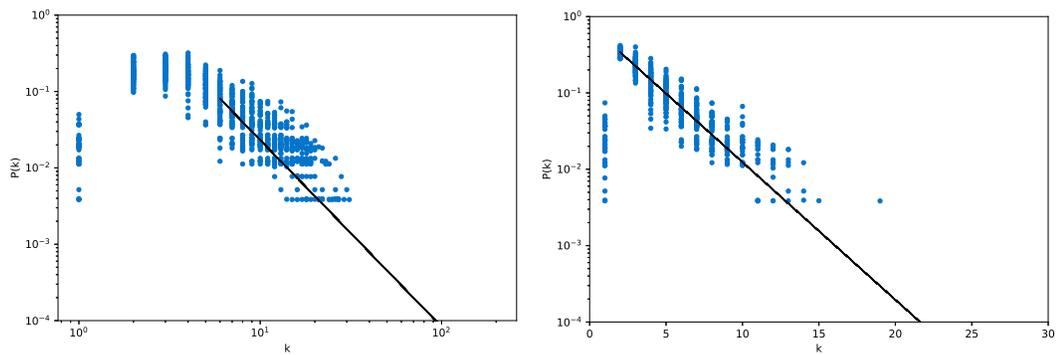


Figura 4.37: Distribución de grado de los grafos VG (izquierda) y HVG (derecha) hechos a partir de las ventanas de observación de las RR Lyrae RRd.

solo dentro de su periodo, el patrón no se vuelve nunca a repetir. Al analizar las curvas de luz de esta manera veremos si el grafo de visibilidad es capaz de extraer la misma información, independiente de cómo se dispongan los puntos en el plano.

En las figuras a continuación (ver Figs. 4.40 a 4.61) se muestran los resultados obtenidos para curvas de luz faseadas. También se puede ver que para la mayoría de las figuras se ve alguna desviación de la media de las estrellas Cefeidas (ver puntos lilas, naranjos y rojos). En la Fig. 4.43 se puede observar que los tres tipos de Cefeidas quedan fuera del resto del grupo para ambos grafos. Asimismo, en la Fig. 4.41 también son las Cefeidas quienes salen de la media, en especial las que pulsan en el modo fundamental.

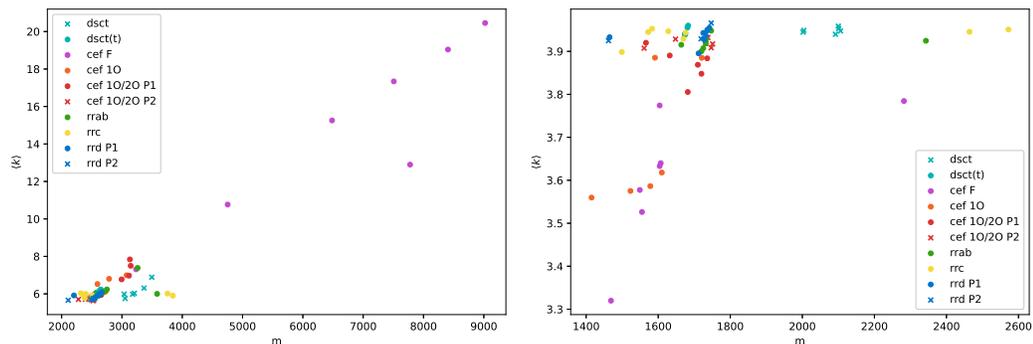


Figura 4.38: Grado promedio en función del número de conexiones de las redes hechas a partir de las curvas faseadas.

Finalmente, al igual que en las subsecciones anteriores, se calcula la distribución de grado para los grafos hechos a partir de estas series temporales, correspondientes a las curvas de luz pero solo dentro del rango de su periodo, es decir, faseadas. Hay que tener en cuenta que dentro de las estrellas estudiadas en esta investigación hay dos tipos de ellas que pulsan con dos periodos simultáneamente, estas son las estrellas Cefeidas 10/20 (graficadas generalmente en rojo) y las RR Lyrae RRd (graficadas generalmente en azul). Debido a esto, se ha hecho un grafo por cada curva faseada

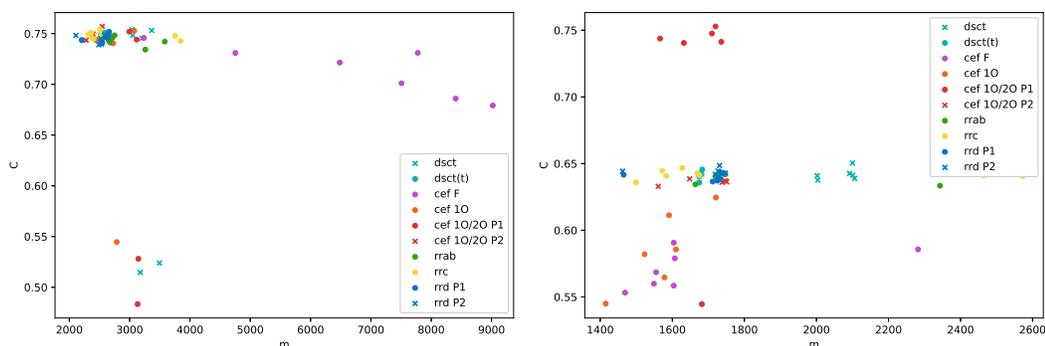


Figura 4.39: Coeficiente de agrupamiento en función de las conexiones totales de las redes hechas a partir de las curvas faseadas.

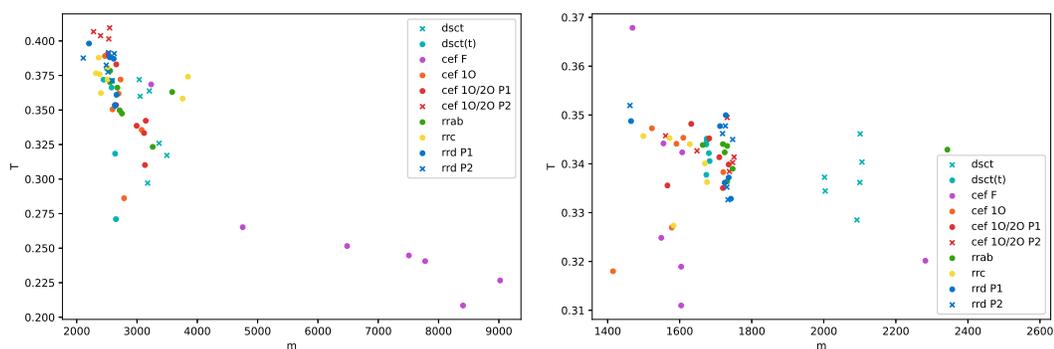


Figura 4.40: Cociente de transitividad en función de las conexiones totales de las redes hechas a partir de las curvas faseadas.

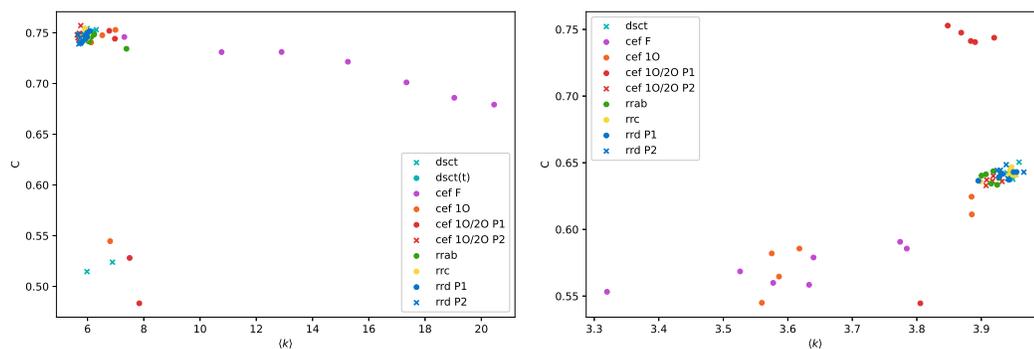


Figura 4.41: Se grafica el coeficiente de agrupamiento en función del grado promedio de las redes hechas a partir de las curvas faseadas.

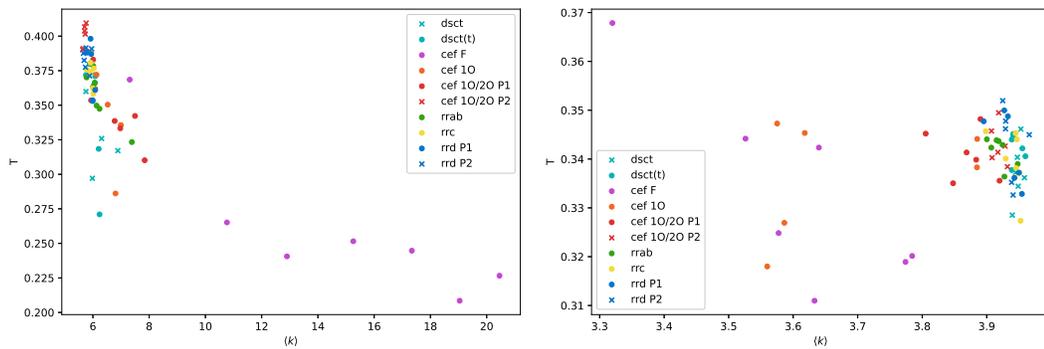


Figura 4.42: Cociente de transitividad en función del grado promedio de las redes hechas a partir de las curvas faseadas.

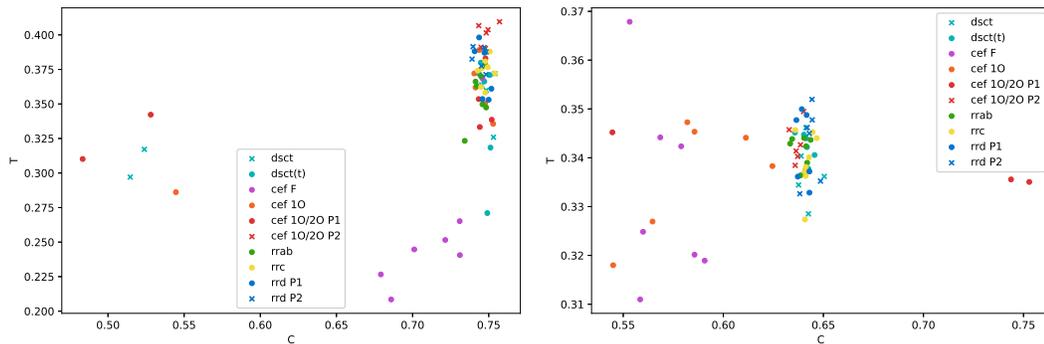


Figura 4.43: Coeficiente de agrupamiento en función del cociente de transitividad de las redes hechas a partir de las curvas faseadas.

con cada periodo, por lo tanto para estas estrellas habrá el doble de resultados en esta sección.

Se mostrarán las figuras correspondientes a una sola estrella del tipo (ver Figs. 4.44, 4.46, 4.48, 4.50, 4.54, 4.56, 4.58 y 4.60) y luego a todo el conjunto por cada estrella (ver Figs. 4.45, 4.47, 4.49, 4.51, 4.53, 4.55, 4.57, 4.59 y 4.61).

A continuación, en las Figs. 4.47, 4.49 y 4.51, se muestra la distribución de grado para las Cefeidas que pulsan en el modo fundamental, luego en el primer sobretono y finalmente en el primer y segundo sobretono simultáneamente.

Finalmente se puede observar la distribución de grado para las estrellas RR Lyrae

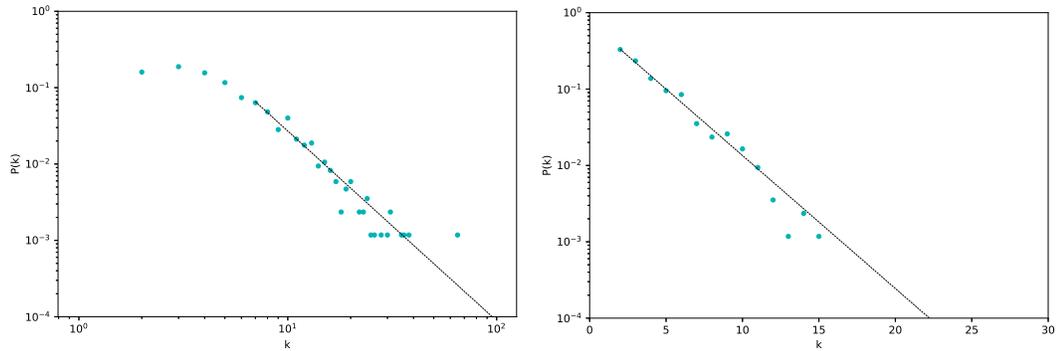


Figura 4.44: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-DSCT-1402 faseada.

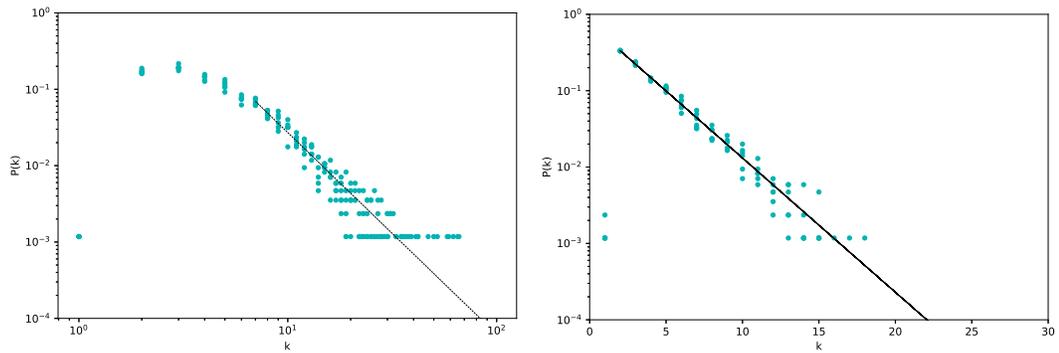


Figura 4.45: Distribución de grado para las estrellas  $\delta$  Scuti faseadas.

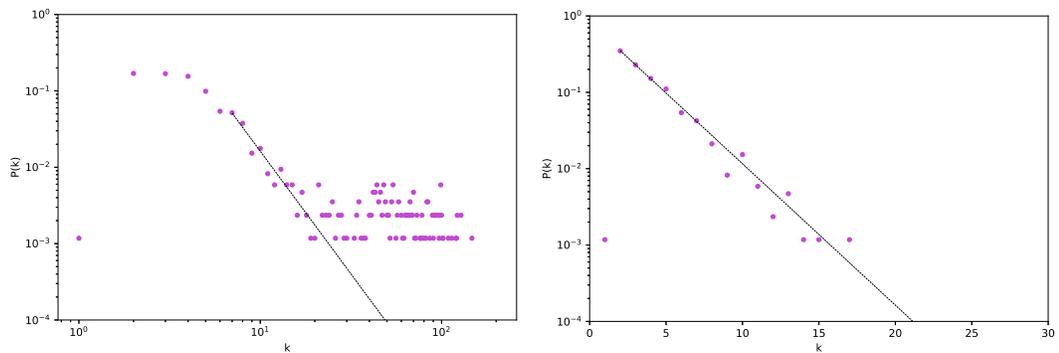


Figura 4.46: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-CEP-1753 faseada.

del tipo RRab, RRc y RRd en las Figs. 4.55, 4.57 y 4.59.

La Tabla 4.4 muestra la comparación de los exponentes obtenidos al calcular la distribución de grado para todas las estrellas en ambos grafos tipos de grafos para

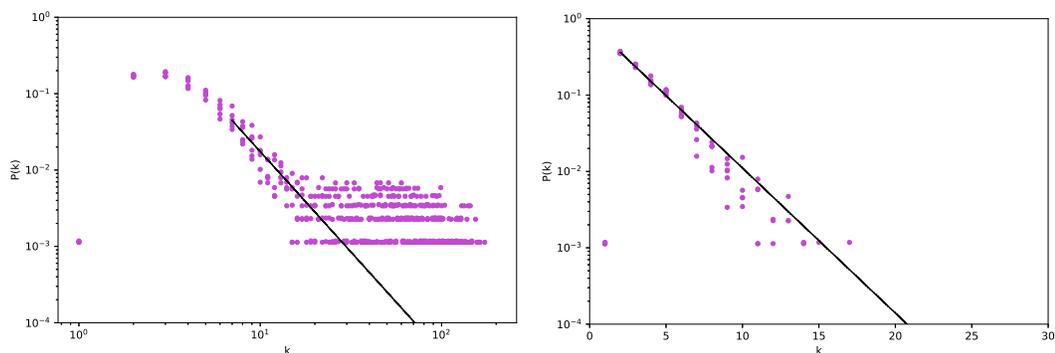


Figura 4.47: Distribución de grado para las estrellas Cefeidas (F) faseadas.

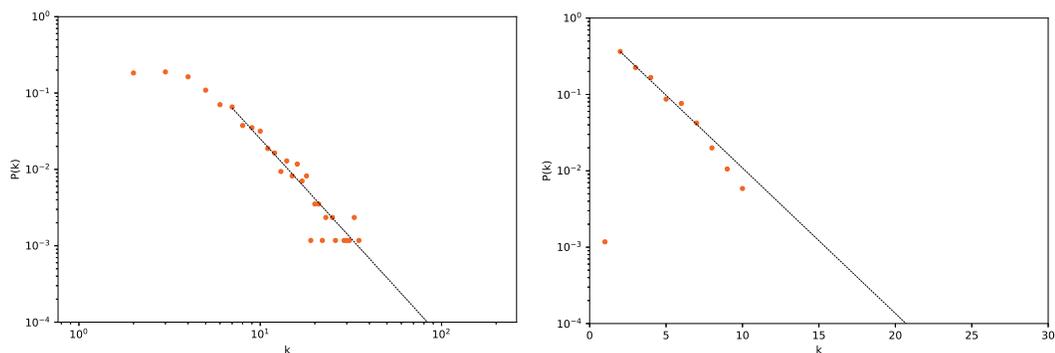


Figura 4.48: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-CEP-1769 faseada.

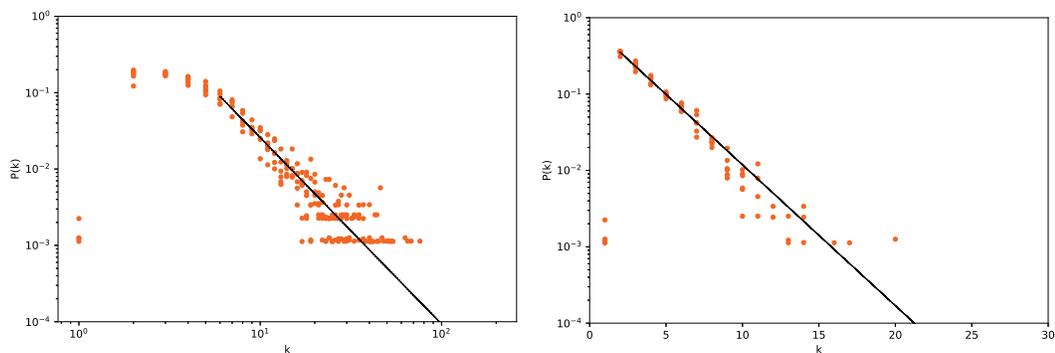


Figura 4.49: Distribución de grado para las estrellas Cefeidas (10) faseadas.

las curvas faseadas. Es claro el carácter universal de la distribución de grado para todas las maneras de construir los grafos a partir de las curvas, por lo tanto, podemos concluir que es un resultado robusto que nos habla de la naturaleza estructural de

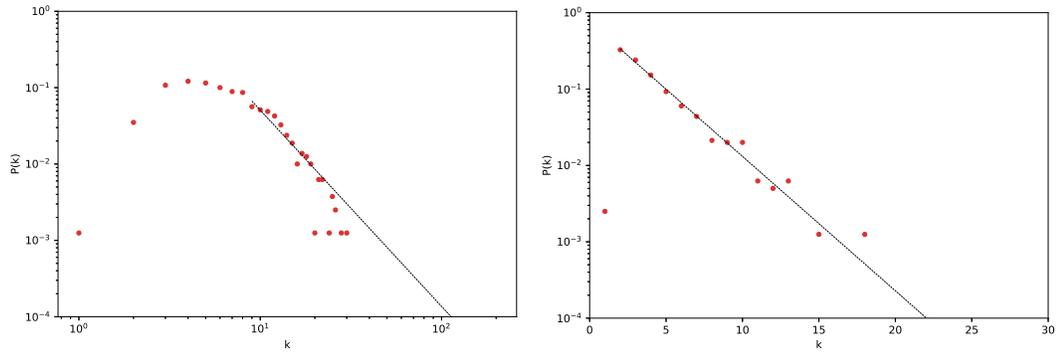


Figura 4.50: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-CEP-1708 faseada con el periodo  $P_1$ .

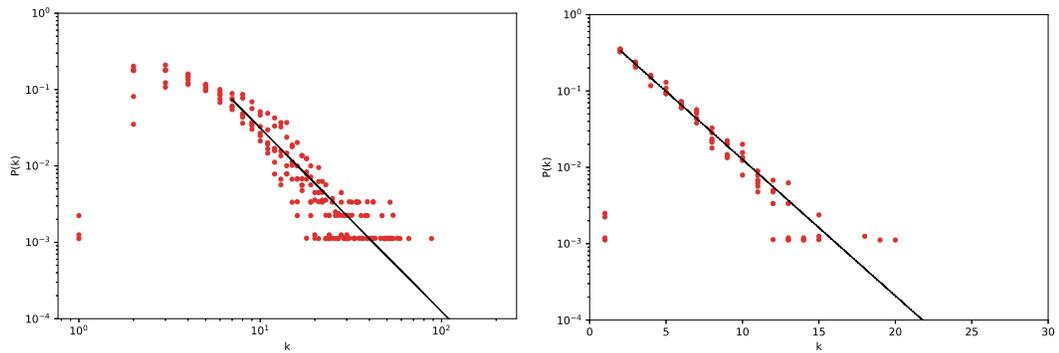


Figura 4.51: Distribución de grado para las estrellas Cefeidas (10/20) faseadas con su periodo  $P_1$ .

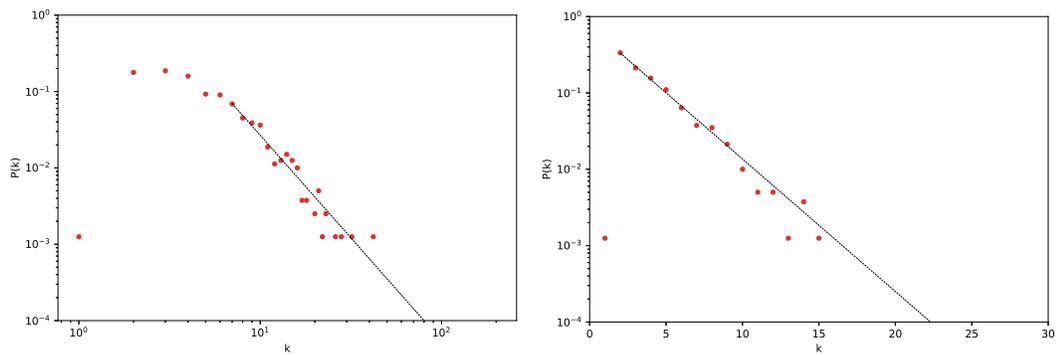


Figura 4.52: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-CEP-1708 faseada con su periodo  $P_2$ .

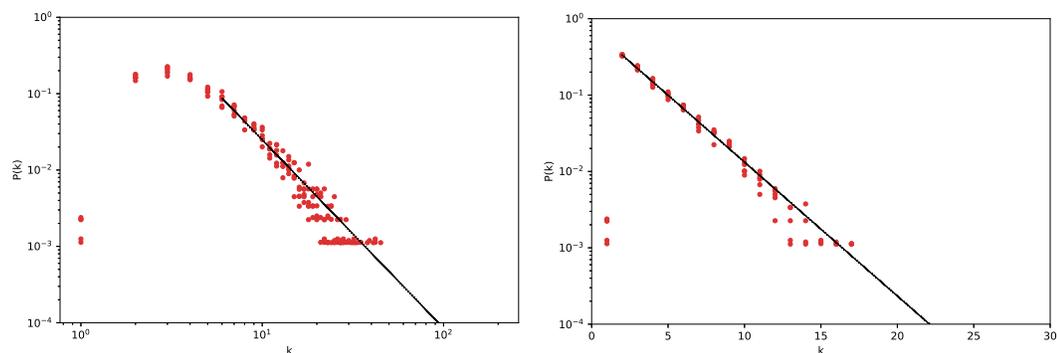


Figura 4.53: Distribución de grado para las estrellas Cefeidas (10/20) faseadas con su periodo  $P_2$ .

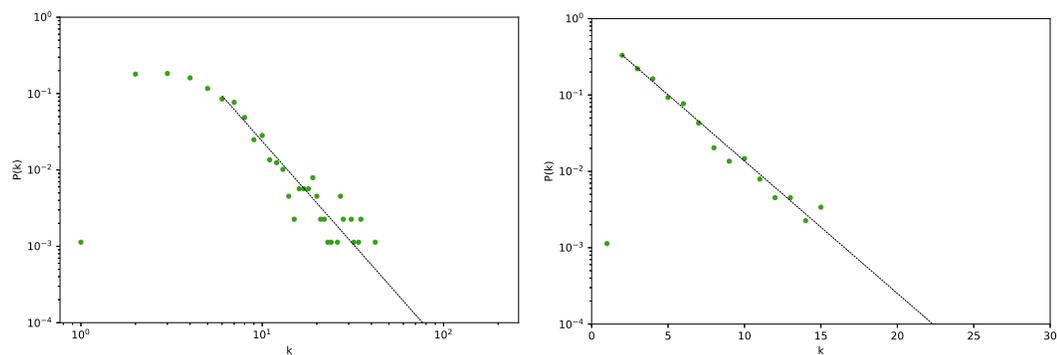


Figura 4.54: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-12906 faseada.

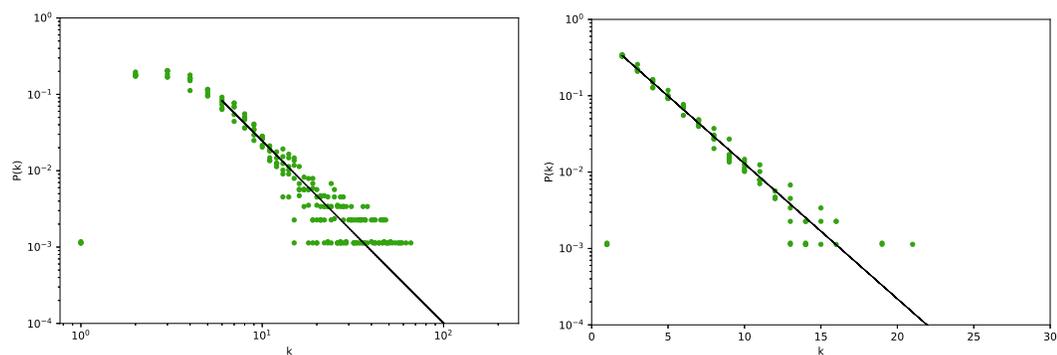


Figura 4.55: Distribución de grado para las estrellas RR Lyrae RRab faseadas.

estas series, que por una parte podemos entender como series periódicas con un alto nivel de ruido, el cual aún no podemos entender completamente, ya que en vista de

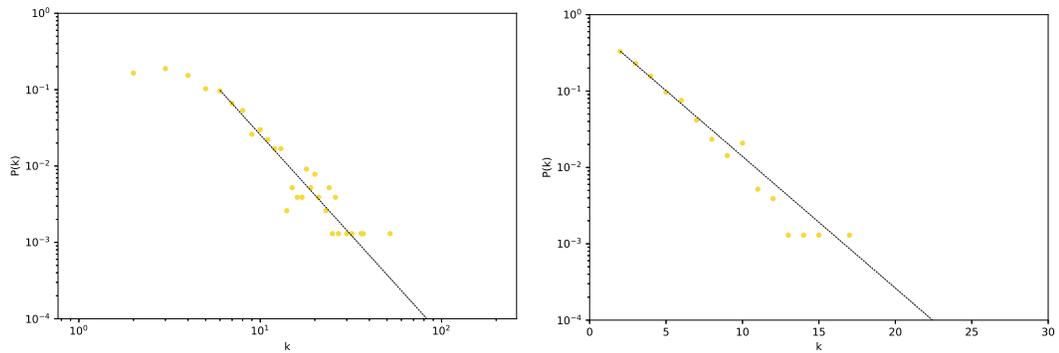


Figura 4.56: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-12737 faseada.

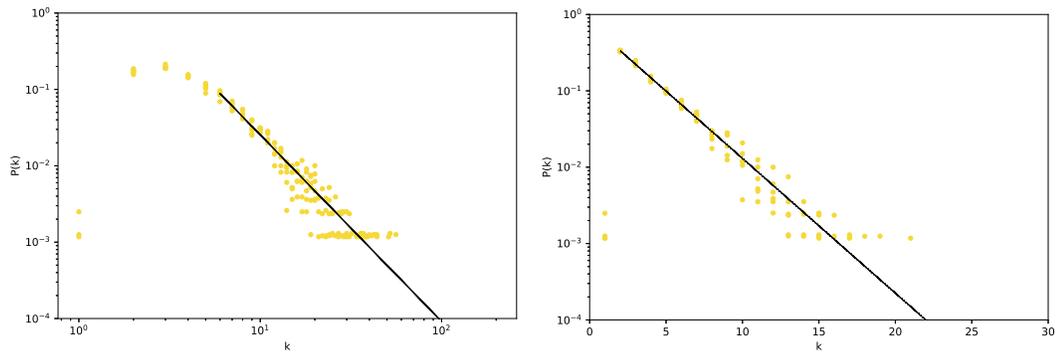


Figura 4.57: Distribución de grado para estrellas RR Lyrae RRc faseadas.

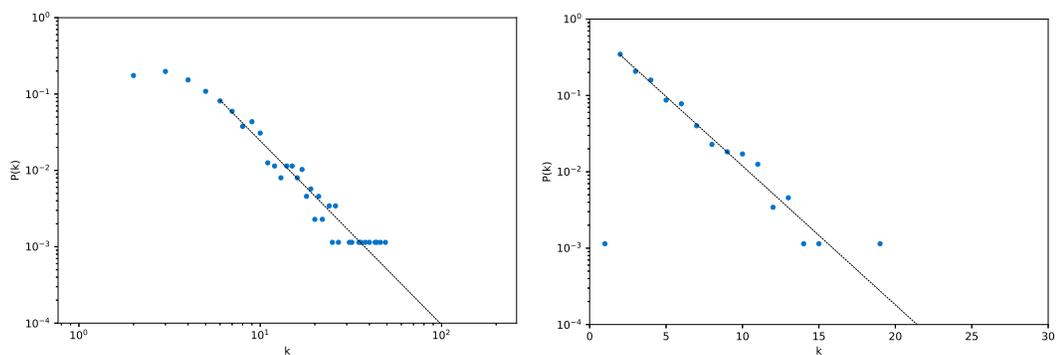


Figura 4.58: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13369 faseada con su periodo  $P_1$ .

los resultados obtenidos (particularmente si se observan las distribuciones de grado (ver Figs. 4.44 a 4.61)) con los grafos de visibilidad normal, podría tratarse de ruido

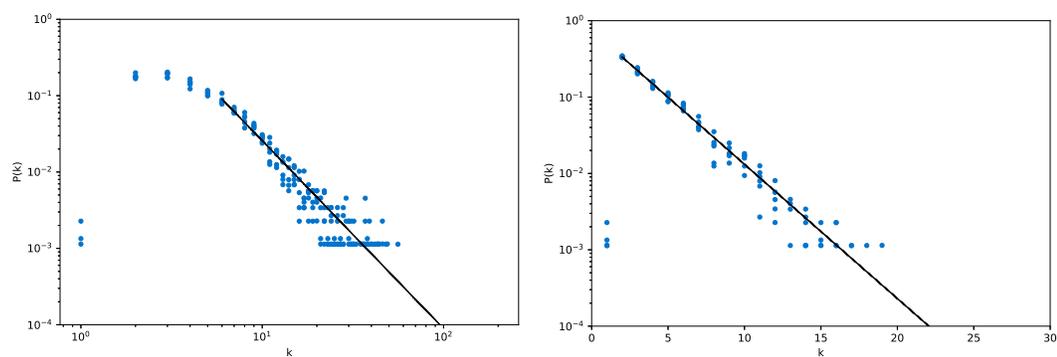


Figura 4.59: Distribución de grado para estrellas RR Lyrae faseadas con su periodo  $P_1$ .

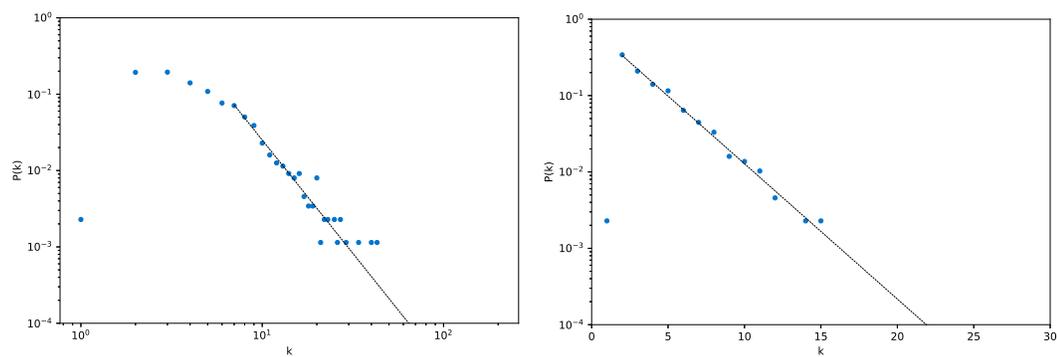


Figura 4.60: Distribución de grado para la estrella OGLE-LMC-RRLYR-13369 faseada con su período  $P_2$ .

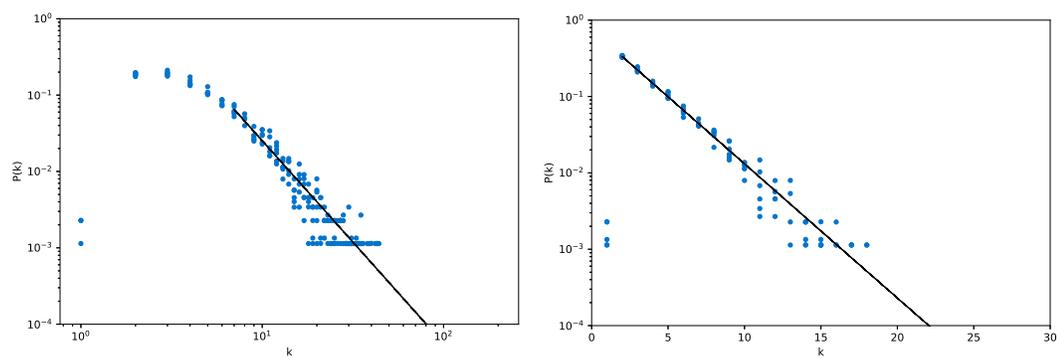


Figura 4.61: Distribución de grado para estrellas RR Lyrae RRd faseadas con su periodo  $P_2$ .

fractal.

Tipo de estrella	$\gamma_{\text{HVG}}$	$\gamma_{\text{VG}}$
$\delta$ Scuti	$0.411 \pm 0.004$	$2.44 \pm 0.04$
$\delta$ Scuti (t)	$0.405 \pm 0.003$	$2.64 \pm 0.03$
Cefeidas F	$0.437 \pm 0.005$	$2.63 \pm 0.06$
Cefeidas 1O	$0.425 \pm 0.006$	$2.44 \pm 0.02$
Cefeidas 1O/2O ( $P_1$ )	$0.411 \pm 0.004$	$2.40 \pm 0.04$
Cefeidas 1O/2O ( $P_2$ )	$0.404 \pm 0.003$	$2.46 \pm 0.02$
RR Lyrae RRab	$0.408 \pm 0.004$	$2.38 \pm 0.02$
RR Lyrae RRc	$0.406 \pm 0.003$	$2.44 \pm 0.02$
RR Lyrae RRd ( $P_1$ )	$0.405 \pm 0.004$	$2.46 \pm 0.02$
RR Lyrae RRd ( $P_2$ )	$0.405 \pm 0.003$	$2.65 \pm 0.03$

Tabla 4.4: Exponentes para el grado de distribución, donde  $\gamma_{\text{HVG}}$  es el exponente de un ajuste exponencial para la distribución de grado HVG y  $\gamma_{\text{VG}}$  para un ajuste de ley de potencia para la distribución de grado VG.

### 4.3. Diferencias entre los tres tipos de grafos

Luego de calcular todas las métricas para los distintos tipos de grafos, puede verse en casi todas las figuras a continuación (ver Figs. 4.62 a 4.67), que si graficamos juntas las métricas obtenidas para los tres tipos de grafos, es claro que los resultados obtenidos mediante las curvas completas y las curvas faseadas son muy parecidos entre sí, sin embargo, esto no ocurre para los resultados a partir de las ventanas de observación. Aquí hemos usado el promedio de cada resultado según el método usado. Para las figuras recién mencionadas se utilizará un (1) para hacer referencia a los resultados obtenidos desde las curvas completas, un (2) para los promedios de las ventanas de observación y un (3) para las series faseadas.

Una posible explicación para esto es que las ventanas contienen, en promedio, entre 80 y 300 datos. En relación a los análisis hechos previamente no sólo en esta investigación, sino también en otros estudios, corresponden a series muy pequeñas

que podrían tener muchos efectos de borde. Por otra parte, es curioso que las curvas completas tengan resultados tan parecidos a los obtenidos por las faseadas, considerando que su estructura es muy diferente y que las curvas completas contienen información inexacta debido a las brechas.

Por último, se hace una comparación de los exponentes  $\gamma$ , obtenidos de la distribución de grado  $P(k)$ , para las tres formas de construir grafos de visibilidad (ver Fig. 4.68). Se puede observar que hay ciertas características que podrían utilizarse como una futura manera de distinguir ciertas estrellas pulsantes. Por ejemplo, se nota que las estrellas Cefeidas que pulsan en el modo fundamental (Ceff) tienen un rango de dispersión muy amplio, más grande que todas las demás. También puede verse que para el grafo horizontal, los  $\gamma$  obtenidos desde las curvas completas tienden a mantenerse más bajo que los demás, mientras que para el grafo normal no se ve ningún orden claro.

Debido a que estamos usando un método relativamente nuevo para analizar este tipo de datos, es posible que estemos frente a un análisis que deba hacerse a la luz de los tres métodos y que esta figura nos esté dando pistas de ello.

Los resultados mostrados en este capítulo han quedado plasmados en una publicación recientemente aceptada [58].

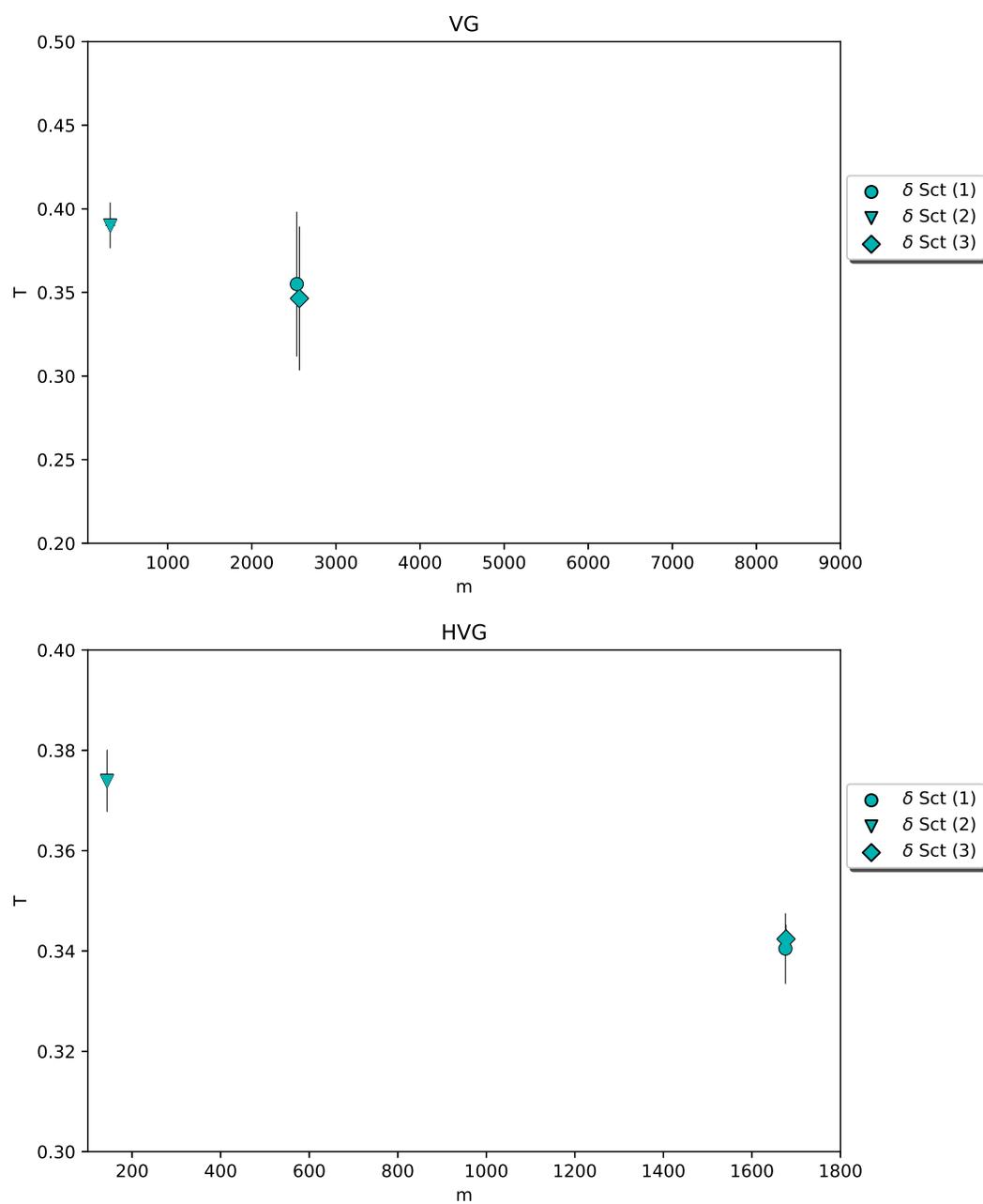


Figura 4.62: Número de conexiones en función del cociente de transitividad de las redes hechas a partir de las curvas completas (círculos), las ventanas de observación (triángulos) y las curvas faseadas (rombos) para las estrellas  $\delta$  Scuti.

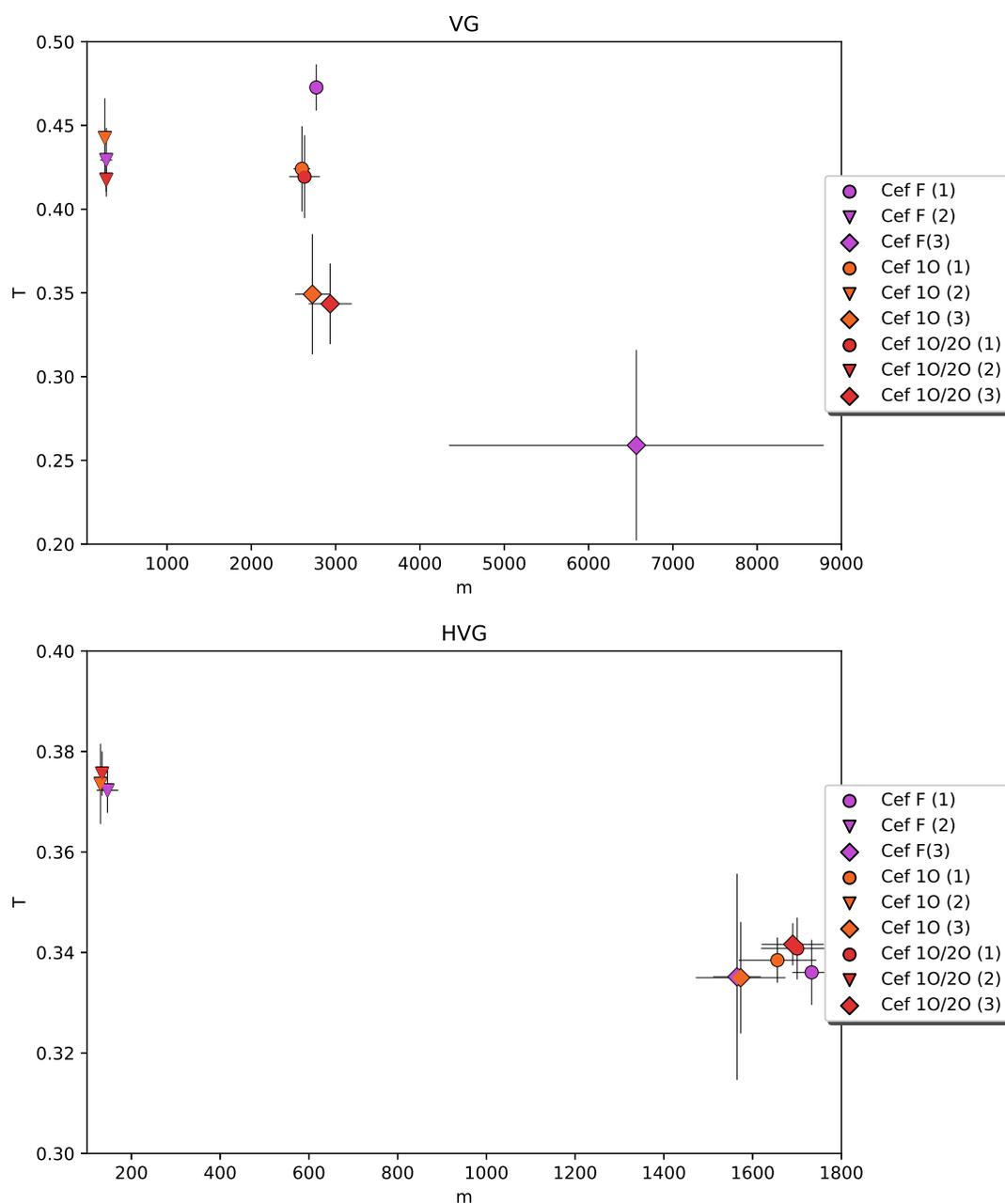


Figura 4.63: Número de conexiones en función del cociente de transitividad de las redes hechas a partir de las curvas completas (círculos), las ventanas de observación (triángulos) y las curvas faseadas (rombos) para los tres tipos de estrellas Cefeidas.

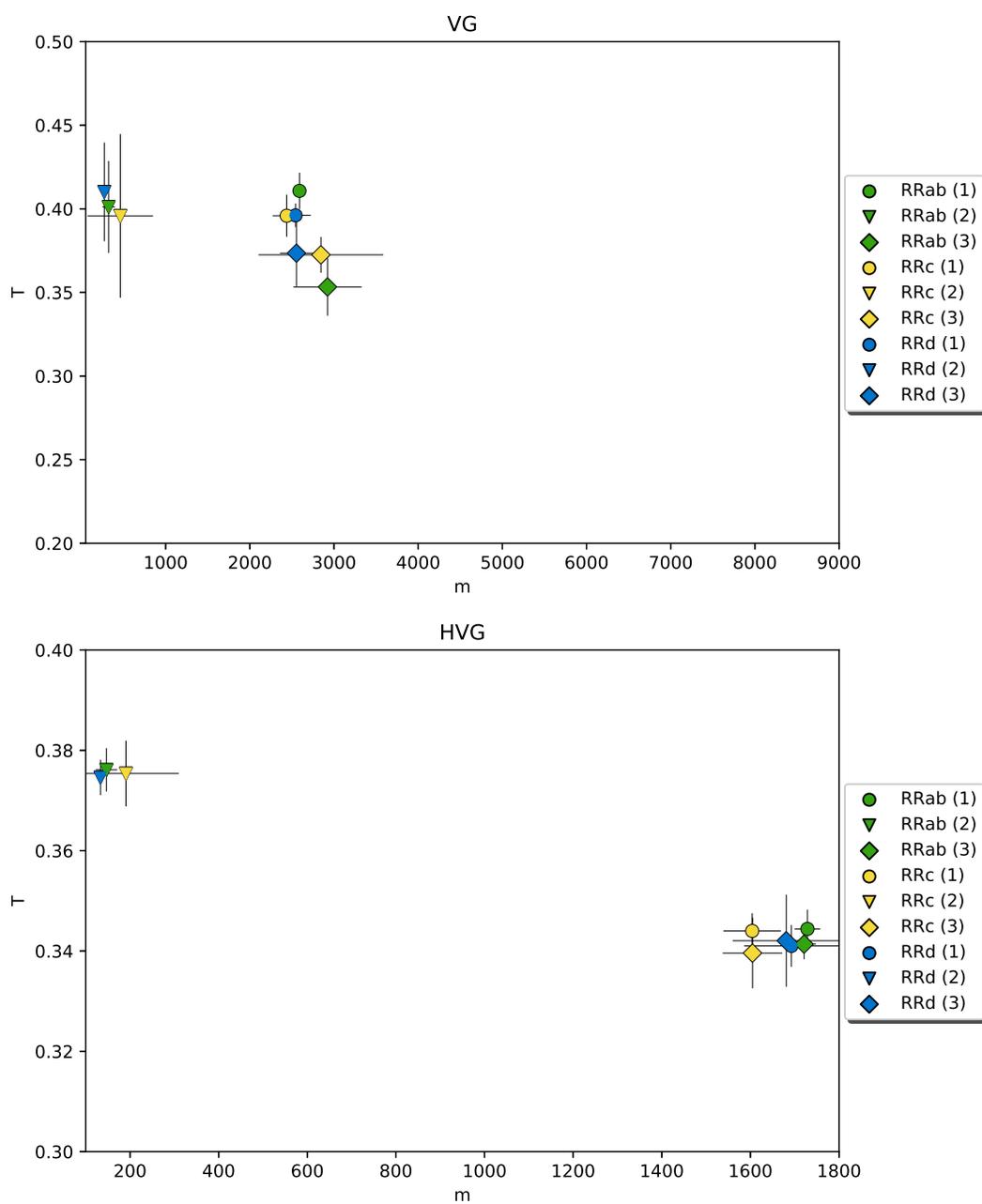


Figura 4.64: Número de conexiones en función del cociente de transitividad de las redes hechas a partir de las curvas completas (círculos), las ventanas de observación (triángulos) y las curvas faseadas (rombos) para los tres tipos de estrellas RR Lyrae.

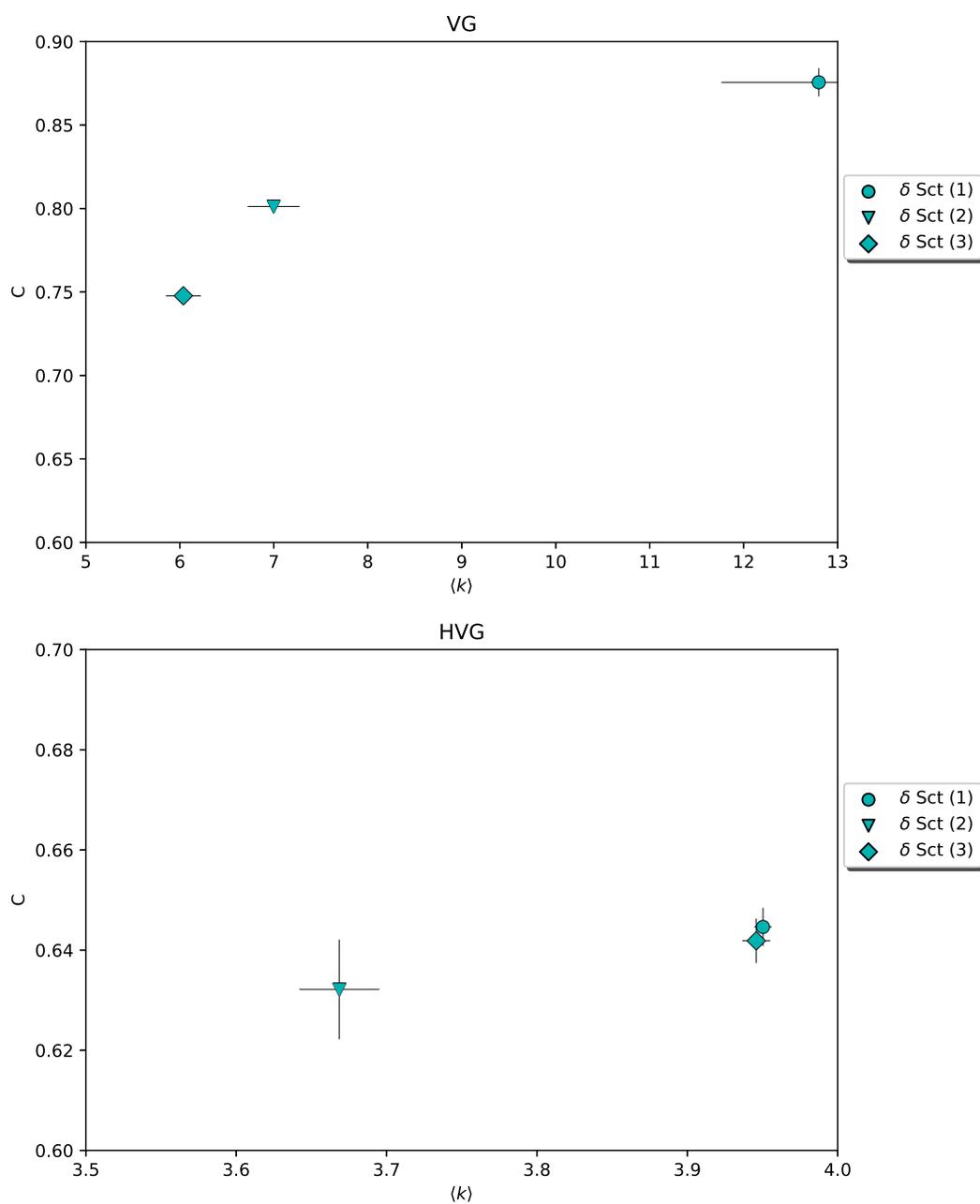


Figura 4.65: Grado promedio en función del coeficiente de agrupamiento de las redes hechas a partir de las curvas completas (círculos), las ventanas de observación (triángulos) y las curvas faseadas (rombos) para las estrellas  $\delta$  Scuti.

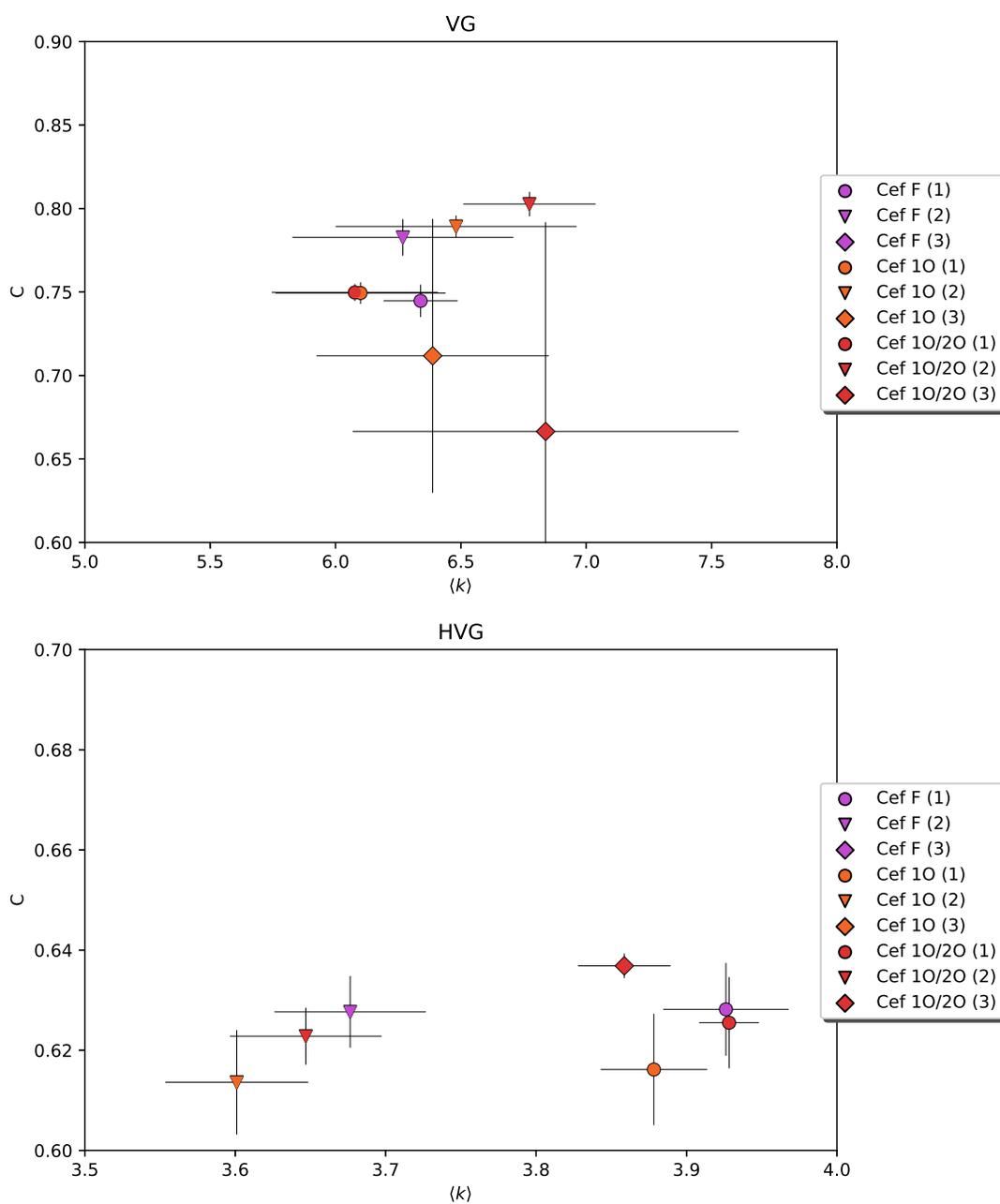


Figura 4.66: Grado promedio en función del coeficiente de agrupamiento de las redes hechas a partir de las curvas completas (círculos), las ventanas de observación (triángulos) y las curvas faseadas (rombos) para los tres tipos de estrellas Cefeidas.

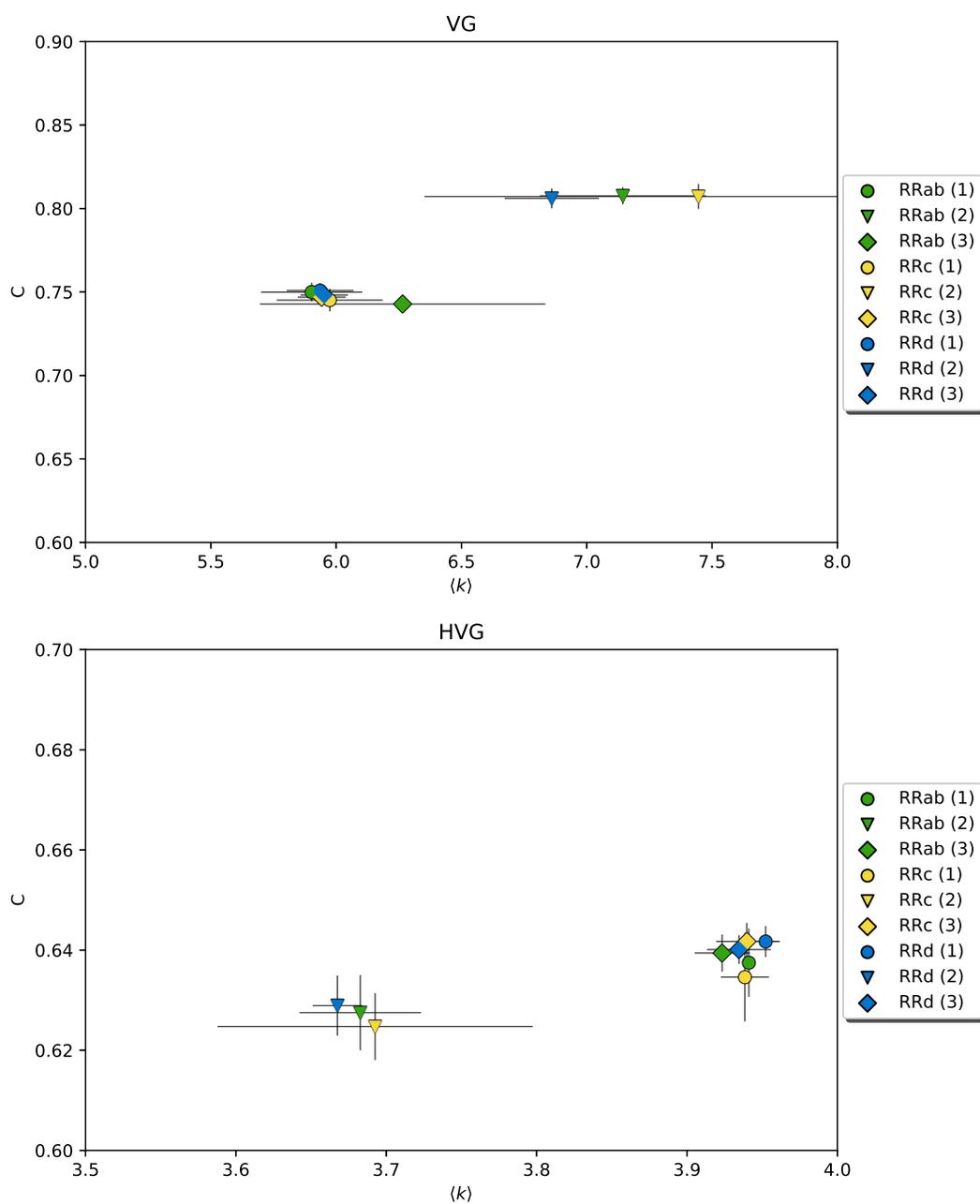


Figura 4.67: Grado promedio en función del coeficiente de agrupamiento de las redes hechas a partir de las curvas completas (círculos), las ventanas de observación (triángulos) y las curvas faseadas (rombos) para los tres tipos de estrellas RR Lyrae.

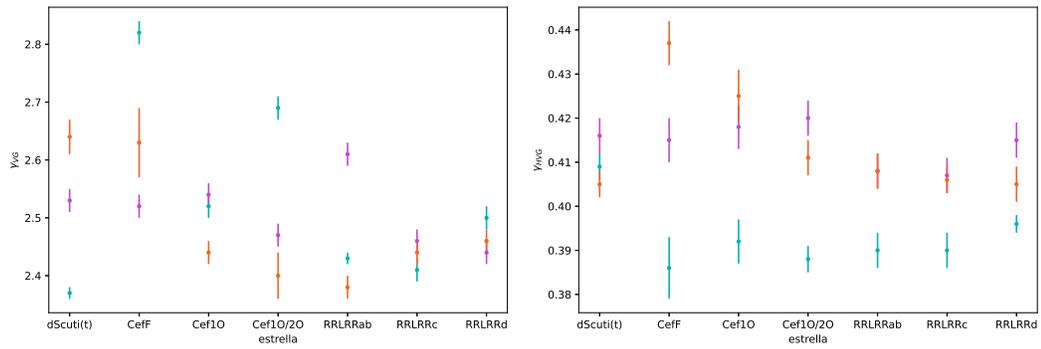


Figura 4.68: Exponente  $\gamma_{VG}$  obtenidos para la distribución de grado de los grafos normales (izquierda) y de los  $\gamma_{HVG}$  para los grafos horizontales (derecha). El color cian corresponde a los grafos hechos con la curva completa, el morado, para los promedios de las ventanas de observación y el naranja, para las curvas faseadas con el periodo  $P_1$ .

## Capítulo 5

# Análisis de series sinusoidales artificiales mediante (H)VG

*“Ningún hombre que valore la originalidad será jamás original. Pero intenten decir la verdad tal como la ven, intenten hacer el más mínimo trabajo tan bien como pueda hacerse por amor al trabajo, y lo que los hombres llaman originalidad vendrá sin buscarlo.”*

C. S. Lewis

Habiendo definido el concepto de grafo de visibilidad y entendiendo que lo que hace este método es convertir una serie temporal en una red compleja, proponemos ciertos tipos de series artificiales que nos podrían ayudar a comprender mejor los resultados que obtuvimos para estrellas variables en el Cap.4. De manera que, en base a los resultados obtenidos y a los obstáculos con los que nos encontramos en el camino de estudiar las curvas de luz, estudiaremos el comportamiento de series periódicas artificiales simples, tales como una serie sinusoidal.

La idea es poder estudiar las principales características que podrían hacer cambiar una serie sinusoidal como brechas, contaminación o distinto número de datos de manera que los resultados arrojen luz acerca de lo que se encontró en el capítulo previo. Se mostrarán los resultados de convertir y calcular las mismas métricas obtenidas en el Cap. 4 a partir de series de 1000 datos correspondientes a:

- sinusoidales de distintas longitudes
- sinusoidales contaminadas con ruido
- sinusoidales con brechas

## 5.1. Series sinusoidales de distintas longitudes

Una de las características básicas que nos encontramos al estudiar curvas de luz es que no todos los sets de datos contienen la misma cantidad de ellos, de hecho, es importante recordar que en el estudio previo de estrellas variables los archivos se ajustaron a una cantidad promedio de datos de manera que no hubiera una diferencia mayor que 200 datos entre las series. En esta sección analizaremos cómo se ven afectadas las métricas de las redes según el número de datos y por ende, de nodos de la red. ¿Será capaz el (H)VG de capturar la esencia de las series temporales aun teniendo pocos nodos?.

Para comenzar, tomaremos una serie a partir de la función  $\sin(nx)$  que será de una longitud de 1000 datos (puntos azules en las Figs. 5.2 a la 5.5), comenzando con  $x = 0$  y sumando en cada paso  $\Delta = 0.01$ . Para evitar prejuiciar los resultados según el periodo de la serie, tomaremos series con  $n = [1, 100]$ . Para poder analizar la robustez del método de visibilidad ante la longitud de las series se utilizarán seis series más obtenidas del truncamiento de la serie original: 800 (puntos celestes), 600 (puntos verdes), 400 (puntos amarillos), 200 (puntos naranjos), 50 (puntos rojos), 25 (puntos rosados) y 10 (puntos morados) datos. Esto nos permitirá estudiar el efecto de la cantidad de datos en los valores de las métricas de los grafos, considerando que en los estudios previos que se han hecho de estos grafos, generalmente se han usado series de  $10^6$  datos aproximadamente [2, 38, 39].

En la Fig. 5.2 se puede ver el número de conexiones de los grafos en función del  $n$  de la función sinusoidal. Se puede apreciar que para los grafos horizontales el número de conexiones es considerablemente menor que en los grafos normales. Esto es así por definición, los grafos normales siempre tendrán más conexiones que los horizontales porque las líneas de visión de estos últimos sólo pueden tener ángulo cero. Otra diferencia entre ambos grafos tiene que ver con la forma de las curvas de conexiones totales. Para los grafos normales se puede ver que las curvas tienden a decaer, es decir, el número de conexiones totales va decayendo a medida que aumenta la frecuencia. Este hecho puede explicarse al considerar que el grafo normal puede ver todos los nodos sin importar lo lejos que estén, sin embargo, a medida que aumenta la frecuencia, cada nodo ve menos nodos ya que las partes creciente y decreciente de la curva sinusoidal contienen menos puntos (ver Fig. 5.1). Al mismo tiempo, como un nodo es capaz de mirar suficientemente lejos como para ver los extremos parece tener sentido que a medida que el número de nodos decrece las conexiones bajen drásticamente. Esto último no sucede de la misma manera para el método del grafo horizontal, ya que un nodo no puede ver mucho más allá de él mismo, así que no nota tanto el cambio de número de datos.

Se debe observar que la escala del gráfico para ambos tipos de grafos es bastante distinta, por lo que la forma de las curvas del HVG y del VG se ven todas como una línea recta. Para el caso del VG la forma que adoptan los puntos tiene que ver con que mientras más cerrada sea la concavidad de la curva, menos conexiones tendrán los nodos. En contraparte, esta situación no genera muchas diferencias en el HVG, ya que a pesar de que un nodo podrá ver menos nodos, no disminuye tan drásticamente esta cantidad.

Por último, se puede ver que independiente del número de datos que contenga

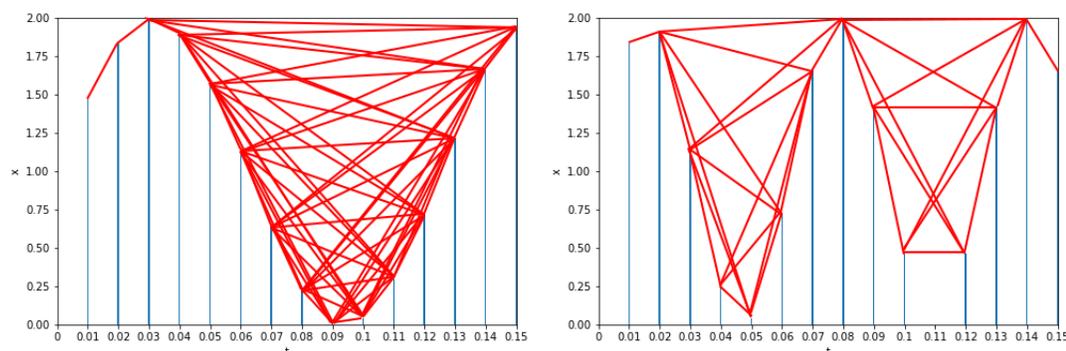


Figura 5.1: Se muestra la diferencia en el número de conexiones totales al aumentar la frecuencia de la serie. A la izquierda vemos la serie sinusoidal correspondiente a  $n = 50$  y a la derecha,  $n = 100$ .

la serie se mantiene la forma de la curva de las conexiones para ambos grafos. Es obvio que la relación entre cantidad de datos y cantidad de conexiones es directa, pero es interesante notar que la forma de las curvas se mantiene bastante similar. Sin embargo, para las series de 50, 25 y 10 datos no es posible observar claramente la forma de la curva, ya que tienen muy pocas conexiones y en la escala de los demás resultados parece una línea recta.

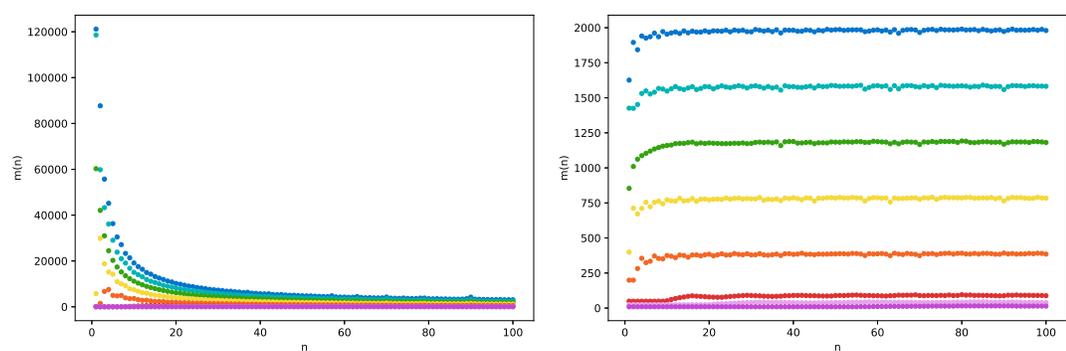


Figura 5.2: Número de conexiones totales en función de  $n$  para los grafos (izquierda) normales y (derecha) horizontales hechos a partir de las series temporales artificiales. Los archivos de datos contienen 1000 (azules), 800 (celestes), 600 (verdes), 400 (amarillos), 200 (naranjos), 50 (rojos), 25 (rosados) y 10 (morados) datos.

En la Fig. 5.3 se puede ver el grado promedio de los grafos en función de  $n$ . La

forma de la Fig. 5.2 tiende a conservarse para los archivos más largos. Nuevamente se puede apreciar que para los archivos de 50, 25 y 10 datos se obtienen curvas que se diferencian bastante de las demás, en donde se ve que pierden la forma “original” a medida que se trunca más la serie. Esto nos puede dar luces de que los grafos de visibilidad tienen un cierto límite de datos para las series de manera que se pueda extraer información certera, pero a la vez que las series pueden ser bastante más pequeñas que aquellas con las que originalmente se introdujeron los métodos del (H)VG [2, 36] y así proporcionar buenos resultados.

Se debe aclarar que para las series más pequeñas y de las frecuencias más bajas, lo que se tiene es una red en forma de cadena, por lo que es natural que los valores del grado promedio caigan en rangos entre 0 y 2.

También es importante recordar que para los grafos horizontales existe una cota superior para el grado promedio que es 4 [36]. Consistentemente, se puede ver que después de  $n \sim 5$  los valores se acercan mucho a esta cota. Esto debe llevarnos a concluir que para series temporales largas un grado promedio cercano a 4 no quiere decir necesariamente que estemos en presencia de una serie aleatoria.

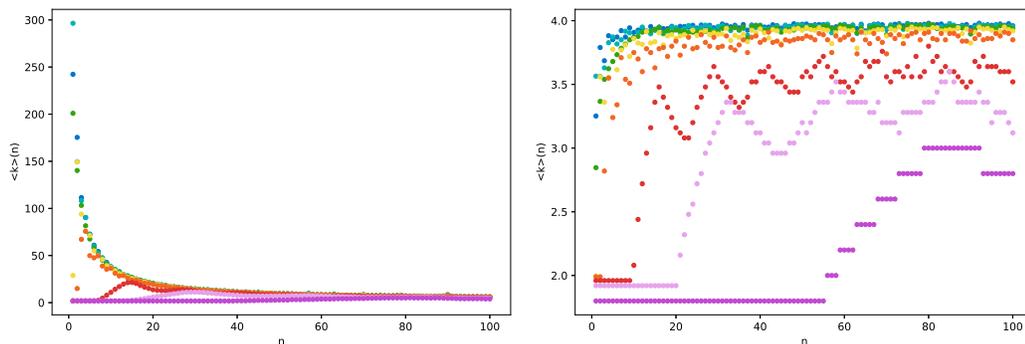


Figura 5.3: Grado promedio en función de  $n$  para los grafos (izquierda) normales y (derecha) horizontales hechos a partir de las series temporales artificiales. Los archivos de datos contienen 1000 (azules), 800 (celestes), 600 (verdes), 400 (amarillos), 200 (naranjos), 50 (rojos), 25 (rosados) y 10 (morados) datos.

En la Fig. 5.4 se muestran los resultados para el coeficiente de agrupamiento. Es interesante notar que, a diferencia de lo que sucede con las figuras anteriores, el coeficiente de agrupamiento se comporta de manera bastante similar para ambos tipos de grafos, VG y HVG, aunque los valores para el caso de HVG son levemente inferiores. Es claro que para el caso del HVG los resultados obtenidos para el coeficiente de agrupamiento se relacionan directamente con los resultados del grado promedio (Fig. 5.3).

Se confirma el hecho de que las series con 50, 25 y 10 datos se diferencian bastante de las demás, lo cual nos indica que los grafos de visibilidad necesitan series de al menos  $\sim 200$  datos. Aunque las series de 25 y 50 datos llegan a alcanzar algunos valores similares a los de las series más largas, en la mayoría de los casos no sigue la misma forma de la curva, sino que presentan una forma con máximos y mínimos.

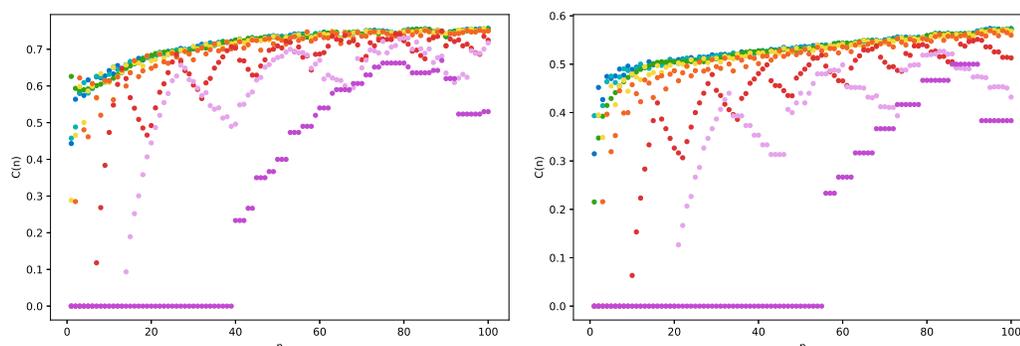


Figura 5.4: Coeficiente de agrupamiento en función de la frecuencia de la función de los grafos (izquierda) normales y (derecha) horizontales hechos a partir de las series temporales artificiales. Los archivos de datos contienen 1000 (azules), 800 (celestes), 600 (verdes), 400 (amarillos), 200 (naranjos), 50 (rojos), 25 (rosados) y 10 (morados) datos.

En el caso del cociente de transitividad (Fig. 5.5) los resultados parecen ser levemente más robustos, respecto a la cantidad de datos de la serie, que para los anteriores, ya que como se puede ver, la curva para 50 puntos todavía es bastante

similar a las demás. Sin embargo, sigue habiendo una distinción clara entre las tres series con menos datos y las otras. Las curvas para esta métrica toman una forma curiosa, en particular para el VG en donde, a partir de un  $n$  cercano a 30, comienzan a aparecer algunos puntos mínimos que salen bastante de la tendencia que lleva el resto de puntos.

Recordemos que, como se explicó en el Cap. 1, el cociente de transitividad tiene que ver con tasa entre la cantidad de triángulos y tripletes de la red, por lo que de la Fig. 5.5 podemos deducir que la cantidad de tripletes va aumentando levemente en relación a los triángulos a medida que se aumenta la frecuencia de la función. La razón de que en las Figs. 5.3, 5.4 y 5.5 presenten valores casi nulos para las series de 10 datos tiene que ver con que la red que se obtiene es una cadena, donde cada nodo está conectado al anterior y al siguiente, excepto en los bordes.

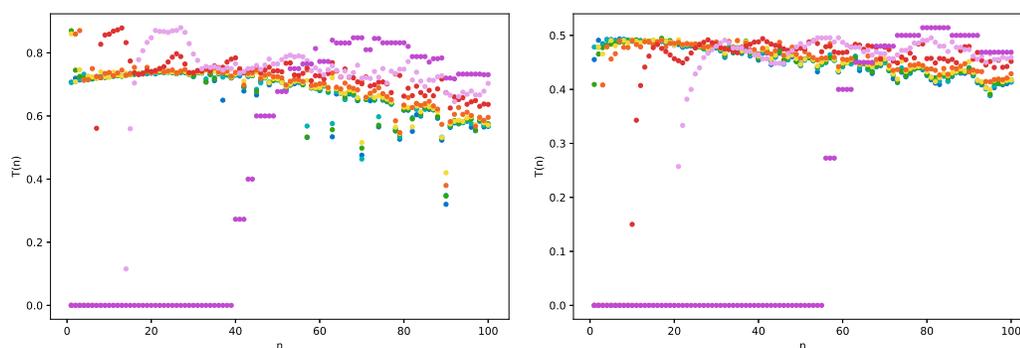


Figura 5.5: Cociente de transitividad en función de la frecuencia de la función de los grafos (izquierda) normales y (derecha) horizontales hechos a partir de las series temporales artificiales. Los archivos de datos contienen 1000 (azules), 800 (celestes), 600 (verdes), 400 (amarillos), 200 (naranjos), 50 (rojos), 25 (rosados) y 10 (morados) datos.

Finalmente, una de las métricas que nos revela bastante de la topología general de los grafos es la distribución de grado  $P(k)$ . En la Fig. 5.6 se muestra la distribución de grado para algunas funciones sinusoidales con distinta frecuencia, con series de

1000 datos. Se puede ver que la distribución de grado para ambos grafos presenta una forma muy característica, con unos pocos picos marcados. En el caso de los resultados a partir del grafo horizontal los picos incluso aparecen en el mismo  $k$  para los distintos  $n$ , sin embargo, podríamos distinguir el tipo de curva según la altura en el mismo  $k$ . Ocurre de manera distinta con los resultados del grafo normal, donde se puede ver que a pesar de que las curvas presentan la misma forma general, cada una presenta un pico en un  $k$  distinto para cada  $n$ , lo cual nos puede hacer pensar que mirar la distribución de grado de un grafo normal para series sinusoidales nos puede decir algo sobre la frecuencia de la función.

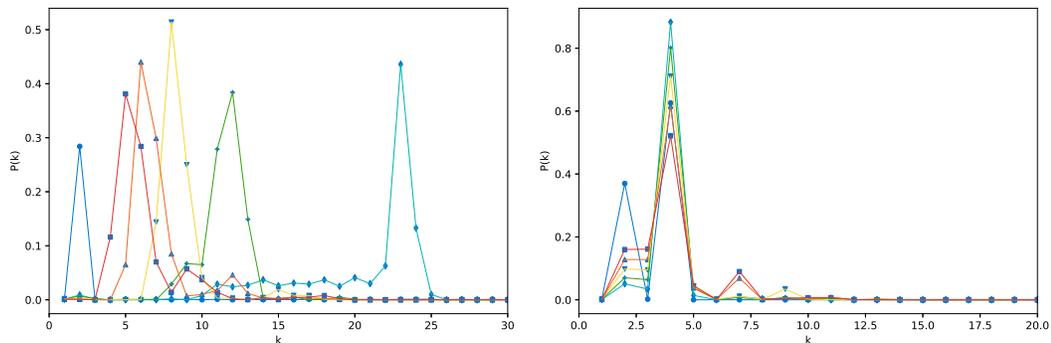


Figura 5.6: Distribución de grado de los grafos normal (izquierda) y horizontal (derecha) hechos a partir de las series de 1000 datos correspondiente a la frecuencia fundamental (círculos), frecuencia con  $n = 20$  (diamantes),  $n = 40$  (cruces),  $n = 60$  (triángulos invertidos),  $n = 80$  (triángulos) y  $n = 100$  (cuadrados).

Ahora, graficaremos la misma Fig. 5.6 pero esta vez en escala logarítmica (para VG) y semilogarítmica (HVG), obteniendo la Fig. 5.7. Se hizo con el propósito de poder comparar con las Figs. 5.14, 5.15 y 5.16. Se puede ver claramente una diferencia en la forma de la distribución de grado. Para las series sinusoidales puras (sin contaminación de ruido) se obtienen siempre distribuciones de grado con varios máximos muy marcados aun si aumentamos la frecuencia de la función. Esto es una característica muy particular de este tipo de series, ya que veremos más adelante

que esos máximos desaparecen rápidamente con una baja cantidad de ruido y la distribución de grado comienza a parecer libre de escala.

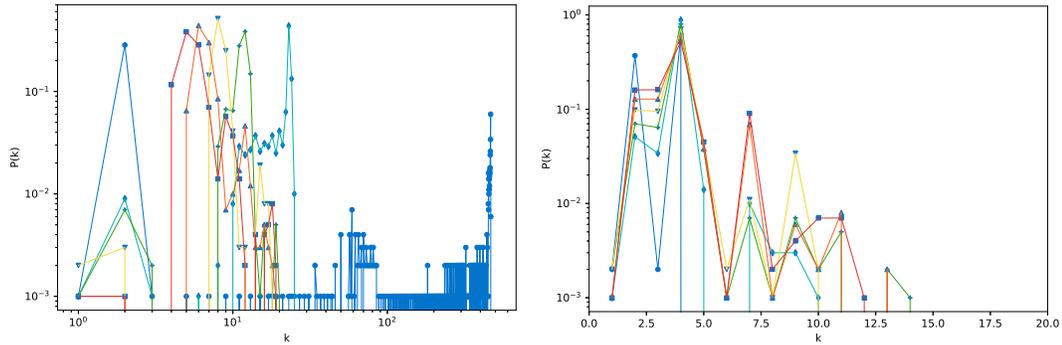


Figura 5.7: Distribución de grado de los grafos normal en log-log (izquierda) y horizontal en semilog (derecha) hechos a partir de las series de 1000 datos correspondientes a la frecuencia fundamental (círculos), frecuencia con  $n = 20$  (diamantes),  $n = 40$  (cruces),  $n = 60$  (triángulos invertidos),  $n = 80$  (triángulos) y  $n = 100$  (cuadrados).

Para poder analizar qué efecto tiene la cantidad de datos de las series sobre la distribución de grado se analiza esta métrica para las series de distinto largo pero que corresponden a la frecuencia fundamental (Fig. 5.8) de la función y a la frecuencia correspondiente con  $n = 100$  (Fig. 5.9). Para el primer caso, se ve que ambos grafos mantienen la forma de la curva de la distribución de grado, de hecho, los picos se mantienen en los mismos valores de  $k$  pero cambian su altura en relación a los otros. Mientras menos datos se tengan el pico será más alto pero se mantiene en el mismo valor de  $k$ , esto es probablemente porque al tener menos datos la cantidad de conexiones promedio se tiende a mantener estable para la mayoría de los nodos.

De la misma manera, si miramos la Fig. 5.9, vemos que los picos se mantienen en el mismo valor de  $k$  pero varía su altura al cambiar el número de datos. A diferencia de la figura anterior, en esta se puede distinguir que las series de 10 y 25 datos no concuerdan tan fielmente con la forma como las demás, pero aún conservan su estructura general.

Estos resultados nos hablan acerca de la robustez de la distribución de grado como métrica ante series temporales de distintos largos. El grafo es capaz de extraer la información acerca de la forma sinusoidal de la serie y de sus distintas frecuencias. Sin embargo, a la luz de estos resultados podemos concluir que trabajar con series de menos de 100 datos podría llevar a resultados mucho más difíciles de interpretar.

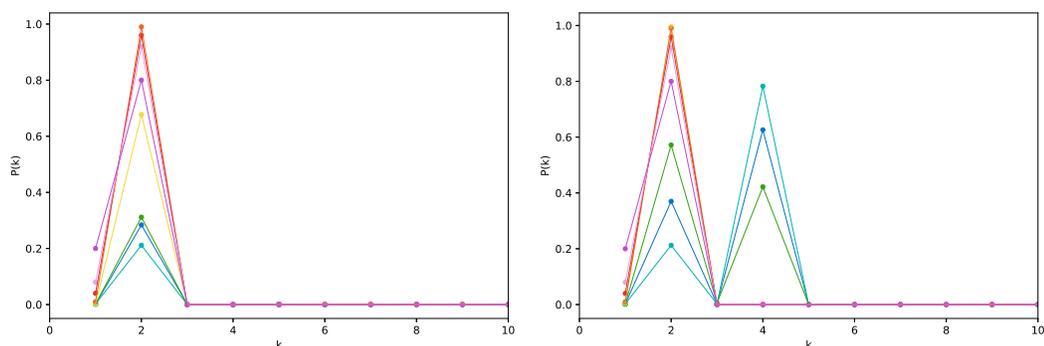


Figura 5.8: Distribución de grado de los grafos normal (izquierda) y horizontal (derecha) hechos a partir de las series con la función en la frecuencia fundamental para distintos largos de los archivos: 1000 datos (azul), 800 (celeste), 600 (verde), 400 (amarillo), 200 (naranja), 50 (rojo), 25 (rosado) y 10 (morado) datos.

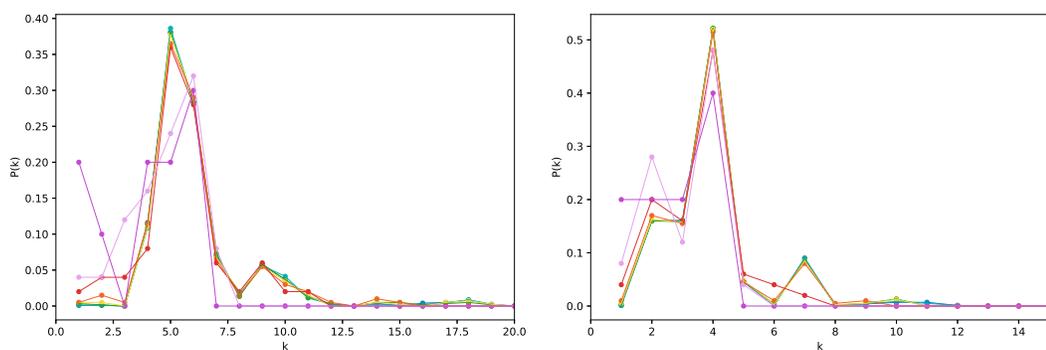


Figura 5.9: Distribución de grado de los grafos normal (izquierda) y horizontal (derecha) hechos a partir de las series con la función en la frecuencia correspondiente con  $n = 100$  para distintos largos de los archivos: 1000 datos (azul), 800 (celeste), 600 (verde), 400 (amarillo), 200 (naranja), 50 (rojo), 25 (rosado) y 10 (morado) datos.

## 5.2. Series sinusoidales contaminadas con ruido

En esta sección se mostrarán los valores obtenidos para las mismas métricas que en la sección anterior pero usando series contaminadas con algún tipo de ruido. Se genera una serie temporal de ruido gaussiano  $U(t)$  y se varía la cantidad de ruido mediante un factor  $\lambda$  de manera que la serie resultante será

$$X(t) = \sin(nt)(1 - \lambda) + U(t)\lambda, \quad (5.1)$$

por lo tanto  $\lambda = 0$  corresponderá a la serie sinusoidal pura y  $\lambda = 1$ , a la serie de ruido. Se utilizarán dos tipos de ruido: gaussiano y caótico.

### 5.2.1. Series sinusoidales con ruido gaussiano

Comenzaremos por analizar los resultados obtenidos a partir de series sinusoidales contaminadas con ruido gaussiano y se calcularán las mismas métricas usadas anteriormente para estudiar el comportamiento.

Utilizaremos series en sus distintas frecuencias para ver cómo se afectan con el ruido. En la Fig. 5.10 se muestra el número de conexiones en función del parámetro  $\lambda$  y se puede observar que a medida que la cantidad de ruido sube, las curvas toman una forma muy similar a la de las series que se les aumenta la frecuencia (Fig. 5.2). Esto se traduce en que el número de conexiones disminuye a medida que el ruido aumenta para el caso de los grafos normales y el número de conexiones aumenta junto con el ruido en el caso de los grafos horizontales. Notamos que es un efecto muy marcado para frecuencias muy bajas (ver la curva cian en la Fig. 5.10).

Idéntica situación ocurre si graficamos el grado promedio en función del parámetro  $\lambda$ , donde vemos en la Fig. 5.11 que nuevamente las frecuencias muy bajas son altamente sensibles al ruido.

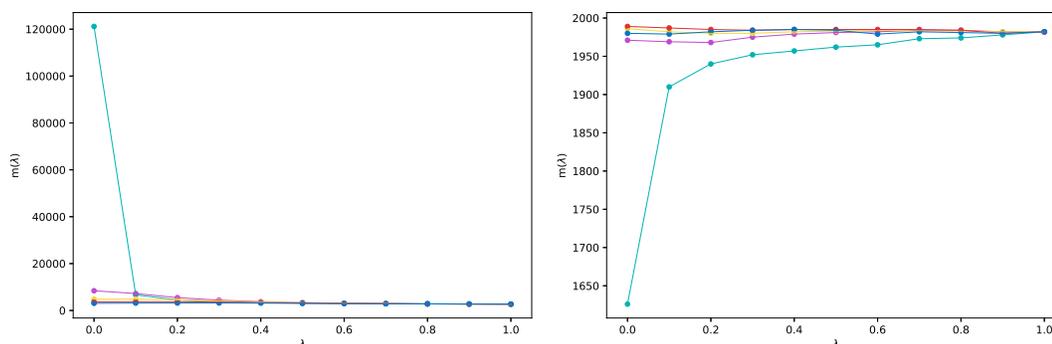


Figura 5.10: Número de conexiones en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul).

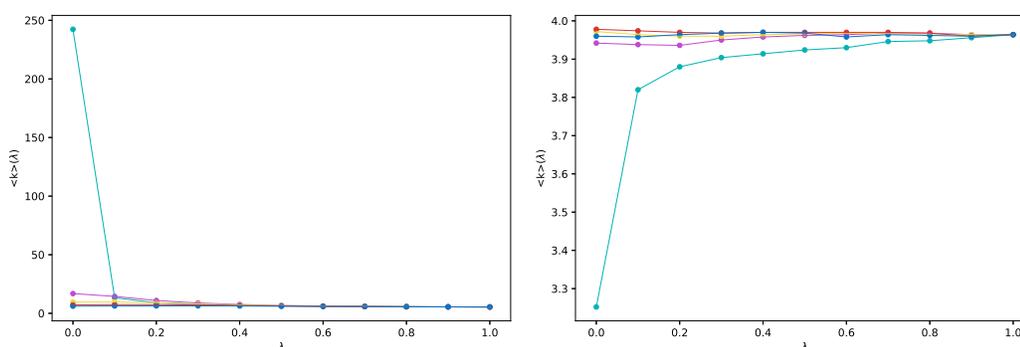


Figura 5.11: Grado promedio en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul).

En la Fig. 5.12 se puede ver el coeficiente de agrupamiento en función del parámetro  $\lambda$  y queda de manifiesto, en el caso de los grafos horizontales, que al introducir ruido en una serie sinusoidal el coeficiente de agrupamiento toma valores bastante más altos (comparar con la Fig. 5.4 para grafos horizontales).

Se puede observar que el cociente de transitividad (Fig. 5.13) en función del parámetro  $\lambda$  tiene una forma de la curva distinta a lo que ocurre cuando va aumentando la frecuencia de la función que genera la serie sinusoidal, es decir, el ruido le afecta de una manera distinta. De hecho, se puede ver que al aumentar la frecuencia

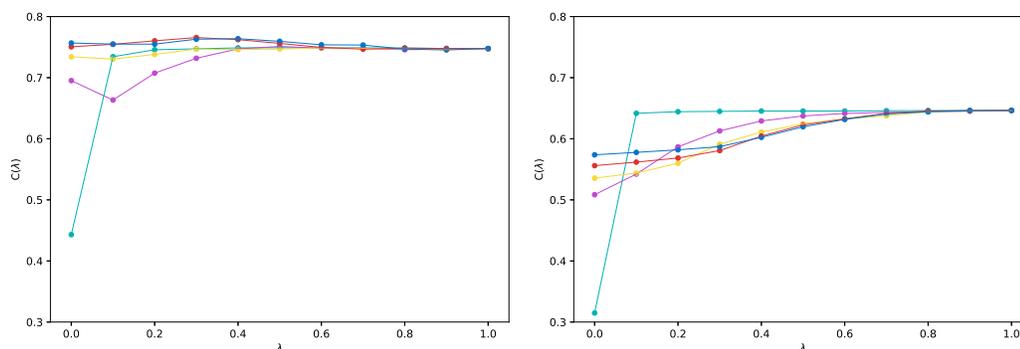


Figura 5.12: Coeficiente de agrupamiento en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul).

de la función el cociente de transitividad aumenta levemente y luego disminuye levemente para ambos tipos de grafos (ver Fig. 5.5), mientras que al agregar ruido el cociente  $T$  disminuye de manera mucho más clara para el VG y de manera similar para el HVG.

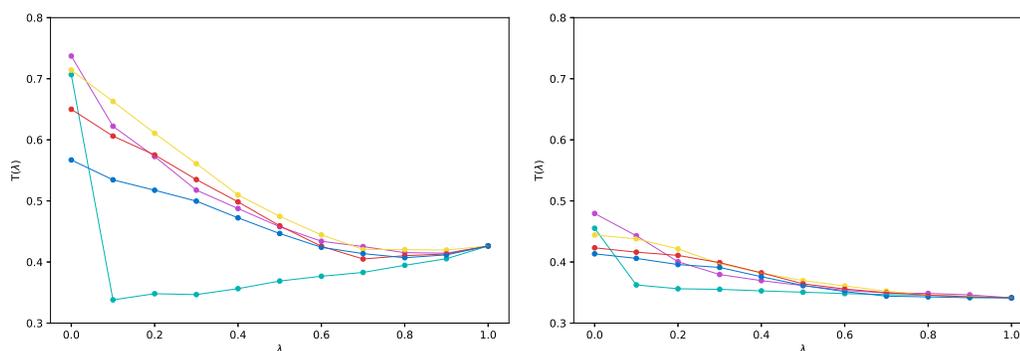


Figura 5.13: Cociente de transitividad en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul).

Por último, se muestra la distribución de grado para series en tres frecuencias ( $n = 1$  (Fig. 5.14),  $n = 50$  (Fig. 5.15) y  $n = 100$  (Fig. 5.16)) en donde se varía también el parámetro  $\lambda$ . Se puede apreciar que al agregar una muy leve cantidad de

ruido los grafos pasan a tener una distribución de grado exponencial (para grafos horizontales) y de ley de potencia (para grafos normales) a pesar de que los grafos a partir de las series sinusoidales puras tienen un distribución de grado de picos marcados.

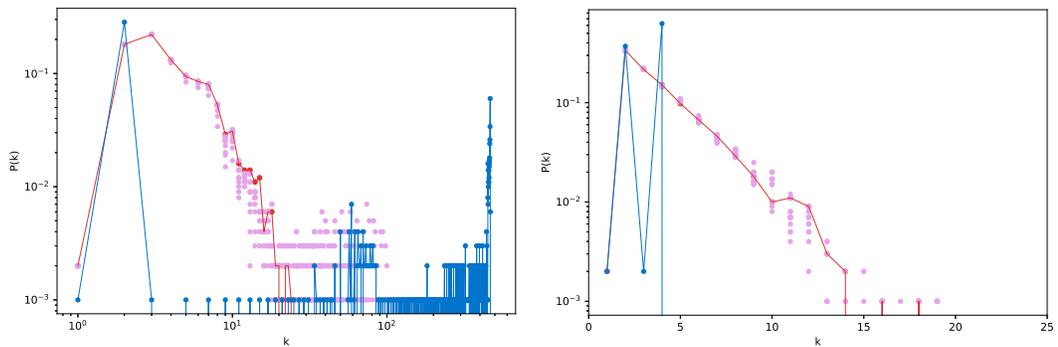


Figura 5.14: Los valores en rojo corresponden a la serie de ruido uniforme ( $\lambda = 1$ ), los valores en azul, a la serie sinusoidal (con  $n = 1$ ) pura ( $\lambda = 0$ ) y los valores en rosado, a las series contaminadas con ruido en diferentes grados ( $\lambda = [0.1, 0.9]$ ).

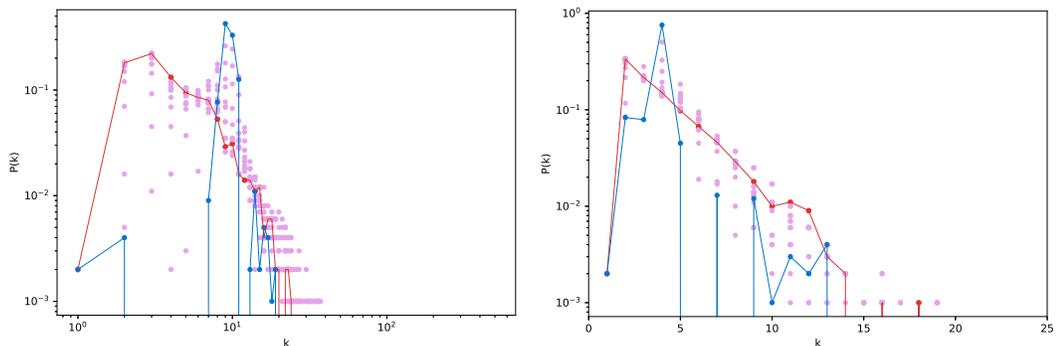


Figura 5.15: Los valores en rojo corresponden a la serie de ruido uniforme ( $\lambda = 1$ ), los valores en azul, a la serie sinusoidal (con  $n = 50$ ) pura ( $\lambda = 0$ ) y los valores en rosado, a las series contaminadas con ruido en diferentes grados ( $\lambda = [0.1, 0.9]$ ).

### 5.2.2. Series sinusoidales con ruido caótico

En esta sección se muestran los resultados obtenidos a partir de contaminar las series originales con ruido caótico. Se obtiene una serie de tiempo desde el mapa

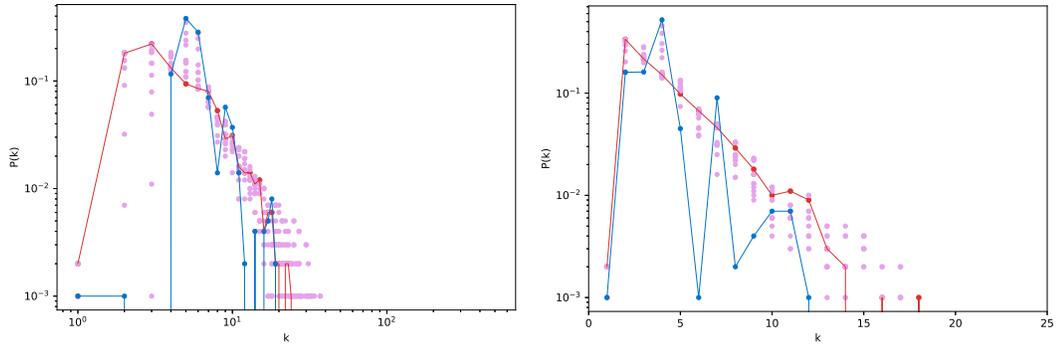


Figura 5.16: Los valores en rojo corresponden a la serie de ruido uniforme ( $\lambda = 1$ ), los valores en azul, a la serie sinusoidal (con  $n = 100$ ) pura ( $\lambda = 0$ ) y los valores en rosado, a las series contaminadas con ruido en diferentes grados ( $\lambda = [0.1, 0.9]$ ).

logístico, que tiene la forma de

$$x_{n+1} = Ax_n(1 + x_n) \quad (5.2)$$

con constantes  $A = 3.7$  y una semilla  $x_0 = 0.34$ . Luego, al igual que en el caso anterior de series contaminadas con ruido gaussiano (ver sección 5.2.1), se obtiene una serie temporal que varía con el parámetro  $\lambda$ , tal que

$$X(t) = \sin(nt)(1 - \lambda) + L(t)\lambda. \quad (5.3)$$

Luego se calculan las métricas usadas anteriormente para observar cómo se comportan en función del grado de contaminación con ruido. En la Fig. 5.17 se muestra el número de conexiones totales de las redes en función del parámetro lambda y se puede observar que las series con frecuencias más bajas (en particular, en el modo fundamental) tienen un comportamiento que se diferencia bastante del resto. Además de esto, en este caso el comportamiento general para el número de conexiones es similar en ambos tipos de grafos. En los dos casos se puede ver que  $m$  tiende a disminuir a medida que se aumenta el parámetro lambda.

En la Fig. 5.18 volvemos a ver el mismo comportamiento anterior.

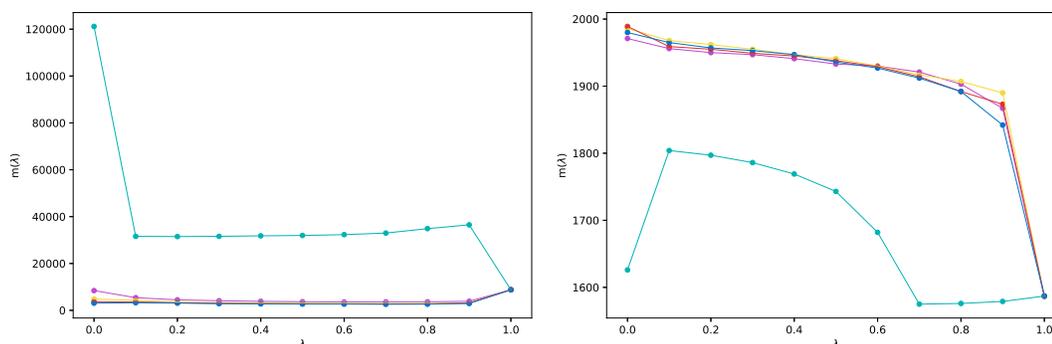


Figura 5.17: Número de conexiones en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul).

Es interesante notar que, si comparamos las figuras de conexiones totales (grado promedio) en función de lambda obtenidas para series con ruido gaussiano (Figs. 5.10 y 5.11) y series con ruido caótico (Figs. 5.17 y 5.18), la forma general es distinta. Esto nos puede indicar que estas métricas son capaces de distinguir el tipo de ruido que se le está agregando. Sin embargo, no vemos esa clara distinción en el coeficiente de agrupamiento (comparar Figs. 5.12 con 5.19) ni el cociente de transitividad (comparar Figs. 5.13 con 5.20), es decir, estas métricas no parecen distinguir tan claramente los grafos hechos a partir de series contaminadas con ruido gaussiano o caótico.

Finalmente se muestran de nuevo las distribuciones de grado para las series de frecuencias con  $n = 1$  (Fig. 5.21),  $n = 50$  (Fig. 5.22) y  $n = 100$  (Fig. 5.23), pero esta vez contaminadas con ruido caótico. Se ve claramente que al límite de ruido máximo no se tiene una estructura definida de las distribuciones, pero la forma de la curva es distinta a la obtenida con ruido uniforme (Figs. 5.14, 5.15, 5.16). De la misma manera, los resultados de las series contaminadas con distintas proporciones de ruido son distintos a los obtenidos en la subsección anterior. Es decir, se puede

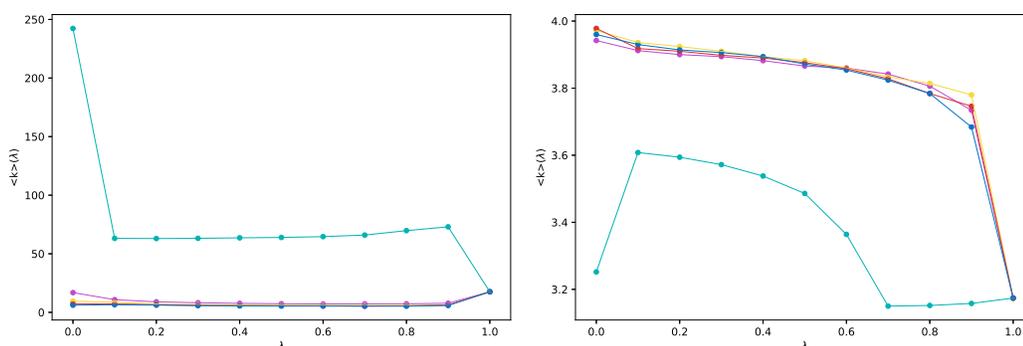


Figura 5.18: Grado promedio en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul).

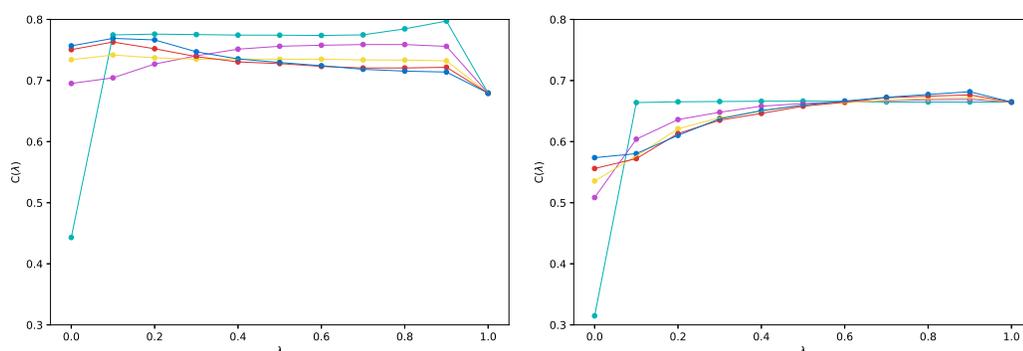


Figura 5.19: Coeficiente de agrupamiento en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales (en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul)) contaminadas con ruido caótico.

comprobar que los grafos de visibilidad distinguen los tipos de ruido.

Estas figuras se muestran en log o semilog para observar si existe algún tipo de linealidad en los resultados (como ocurría con los resultados para ruido uniforme). Puede observarse que a las series contaminadas con ruido caótico no se les puede hacer un ajuste lineal preciso, sin embargo, tienen una distribución de grado muy distinta a la que se obtenía con series sinusoidales puras (ver Figs. 5.8 y 5.9). Esto nos puede dar más pruebas acerca de que el (H)VG es útil para determinar el tipo de ruido con el cual están contaminadas las curvas de luz del capítulo 4. En esa dirección sería útil

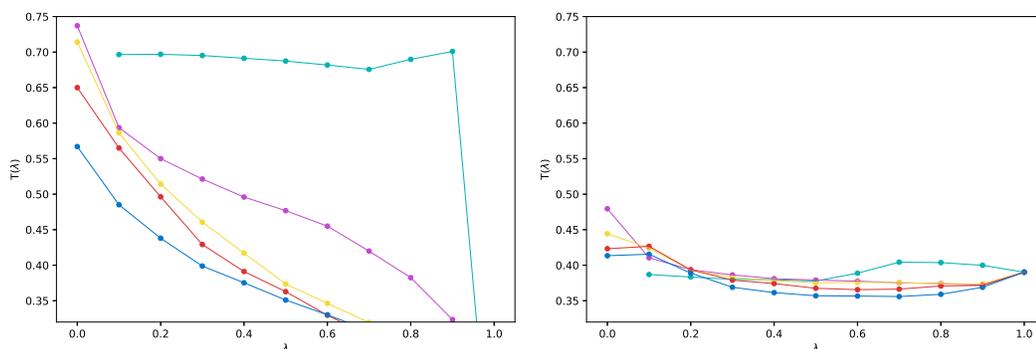


Figura 5.20: Cociente de transitividad en función del parámetro  $\lambda$ . Se utilizan series sinusoidales (en 5 frecuencias distintas: fundamental (cian),  $n = 25$  (morado),  $n = 50$  (amarillo),  $n = 75$  (rojo) y  $n = 100$  (azul)) contaminadas con ruido caótico.

a futuro poder analizar cómo se ven las distribuciones de grado de series sinusoidales contaminadas con distintos tipos de ruido caótico para observar si la forma de las curvas de las distribuciones se puede distinguir claramente de las contaminadas con ruido uniforme.

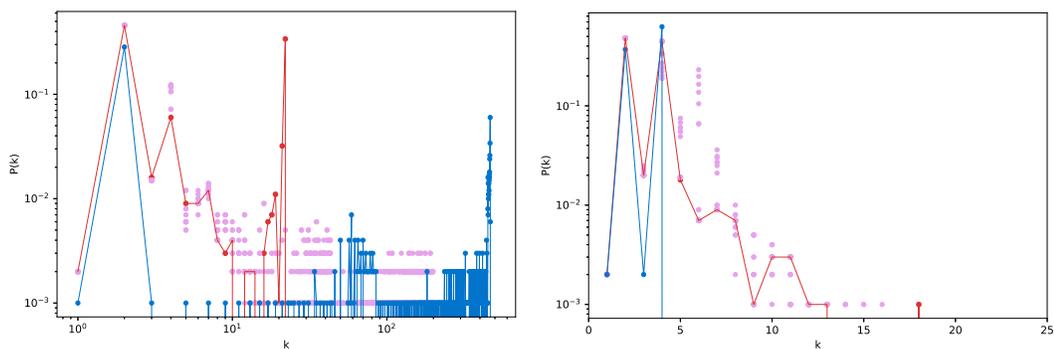


Figura 5.21: Los valores en rojo corresponden a la serie de ruido caótico, los valores en azul, a la serie sinusoidal pura y los valores en rosado, a las series contaminadas con ruido en diferentes grados.

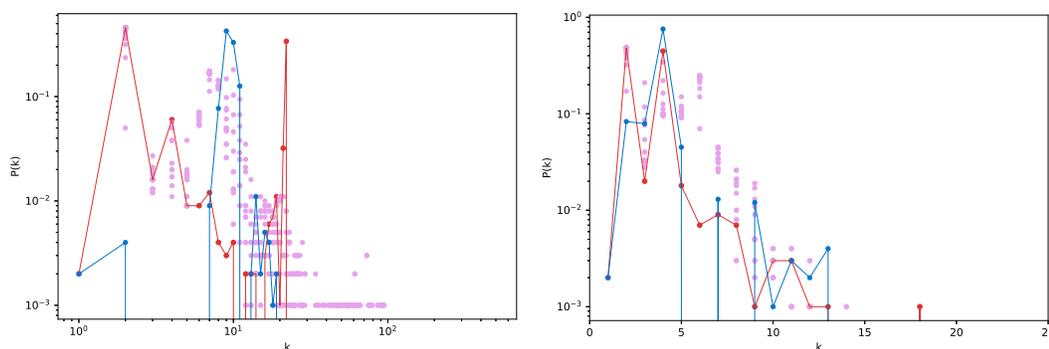


Figura 5.22: Los valores en rojo corresponden a la serie de ruido caótico, los valores en azul, a la serie sinusoidal (con  $n = 50$ ) pura y los valores en rosado, a las series contaminadas con ruido en diferentes grados.

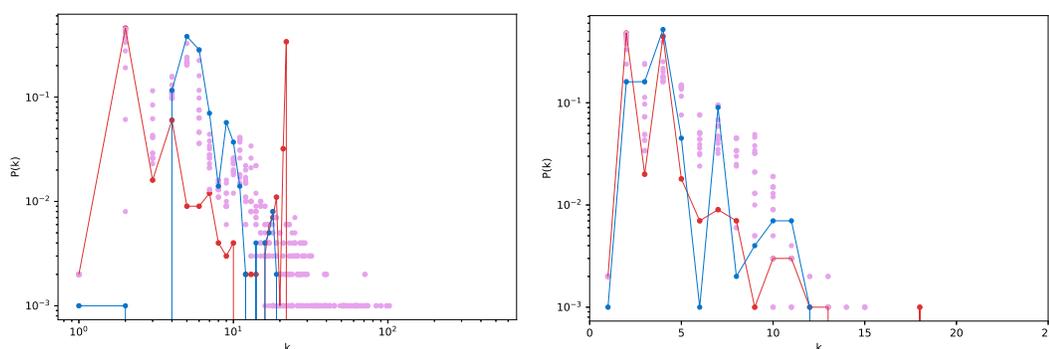


Figura 5.23: Los valores en rojo corresponden a la serie de ruido caótico, los valores en azul, a la serie sinusoidal (con  $n = 100$ ) pura y los valores en rosado, a las series contaminadas con ruido en diferentes grados.

### 5.3. Series sinusoidales con brechas

Una característica muy observada en el estudio de las ciencias naturales son los gaps o saltos observacionales. Esto quiere decir que cuando hacemos la medición de algún parámetro a lo largo de cierta cantidad de tiempo, ocurren situaciones entre medio que imposibilitan la toma continua de los mismos. Por ejemplo, en el caso de las curvas de luz de las estrellas, los telescopios que están en la Tierra van girando junto con ésta debido a la rotación terrestre. Esto hace que durante cierta

cantidad de días la estrella que se está observando (o cierta parte del cielo) quede completamente escondida de la visión del lente. A esto debemos añadirle el hecho de las complicaciones climáticas y técnicas que el propio equipo podría tener. Finalmente se traduce en que todas las curvas de luz obtenidas de telescopios están “cortadas” o mejor dicho, no son continuas.

Por esta razón, se generaron series sinusoidales artificiales que presentaran saltos de datos de manera que se pudieran observar y comparar los resultados con los de las series completas. La idea es ver qué tan robusto es el método de grafos de visibilidad frente a la ausencia de datos en la serie. Se generaron series con distintas brechas (como se puede ver en la Figs. 5.24 y 5.25 de 50 datos cada 200, 50 datos cada 450, 100 datos cada 200 y 20 datos cada 200).

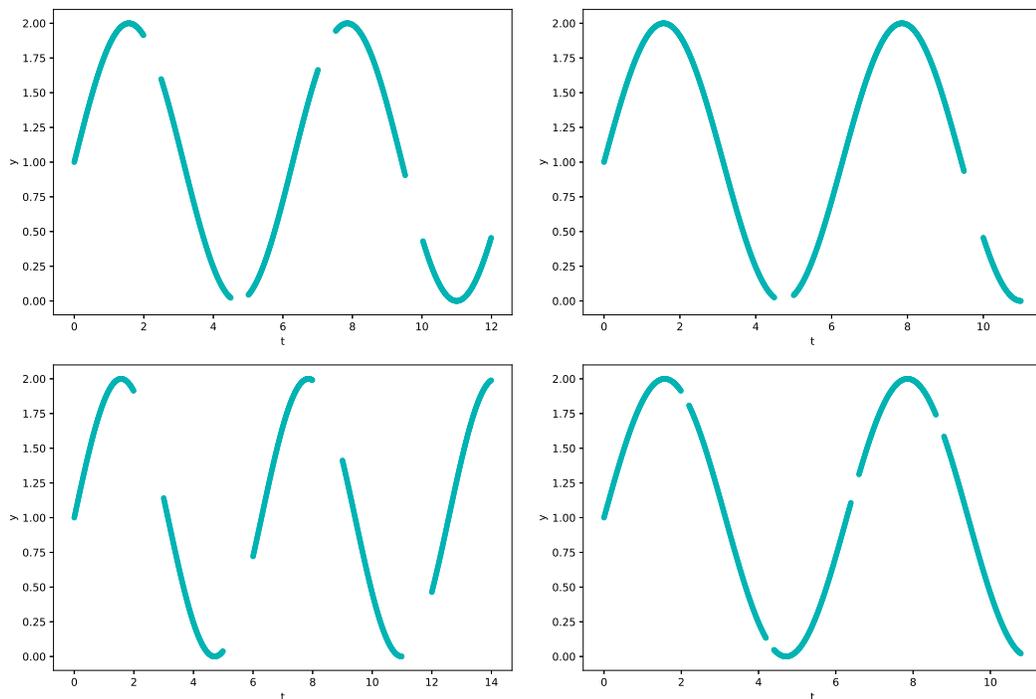


Figura 5.24: Serie a partir de la función con  $n = 1$ . La primera manera de generar brechas es de 50 datos cada 200 (izquierda, arriba), 50 datos cada 450 (derecha, arriba), 100 datos cada 200 (izquierda, abajo) y 20 datos cada 200 (derecha, abajo).

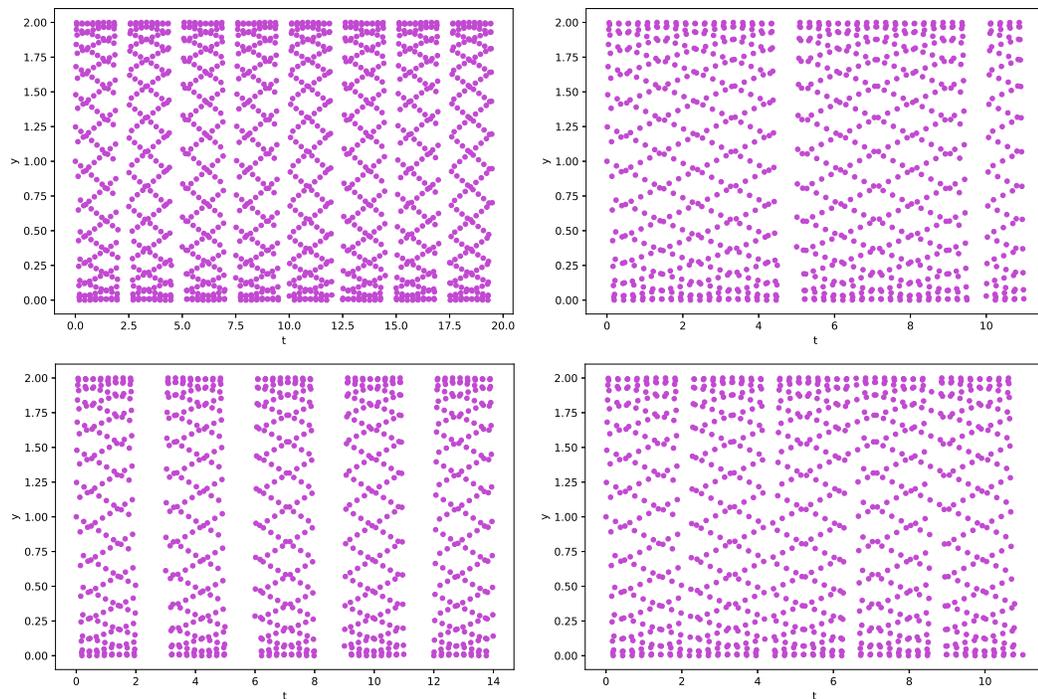


Figura 5.25: Serie a partir de la función con  $n = 25$ . La primera manera de generar brechas es de 50 datos cada 200 (izquierda, arriba), 50 datos cada 450 (derecha, arriba), 100 datos cada 200 (izquierda, abajo) y 20 datos cada 200 (derecha, abajo).

En la Fig. 5.26 se ve el número de conexiones en función de la frecuencia para la misma serie original pero con saltos de distinto número de datos. Se ve que para el VG las conexiones bajan al aumentar la frecuencia y para el HVG es justamente al revés. La serie que más se diferencia de las demás es la que tiene 200 datos continuos y luego un salto de 50 datos, pero sigue el mismo patrón de las demás. Similar situación ocurre al graficar el grado promedio en función de la frecuencia (ver Fig. 5.27), aunque ahora el comportamiento es casi idéntico para todas las series con brechas.

Cuando graficamos el coeficiente de agrupamiento en función de la frecuencia para las distintas series con brechas (ver Fig. 5.28) vemos que para ambos casos, VG y HVG, esta métrica aumenta a medida que aumenta la frecuencia, alcanzando un

valor mayor para series analizadas con VG. Para el caso del cociente de transitividad (Fig. 5.29) se ve que en ambos casos tiende a permanecer en un valor constante a medida que aumenta la frecuencia, aunque es un efecto más marcado en el caso del VG.

Es interesante que para todas las series con saltos se obtienen resultados muy similares a los obtenidos con las series originales, de modo que el método es robusto ante este tipo de característica. Los resultados que aparecen en morado en las Figs. 5.26, 5.27, 5.28 y 5.29 corresponden a la serie con brechas más grandes (100 datos cada 200) y puede notarse que con ella se obtienen, en general, los resultados más distintos a los demás pero sólo para frecuencias menores ya que a medida que la frecuencia comienza a aumentar los resultados se parecen cada vez más entre ellos. Esto tiene que ver con que la información que se pierde cuando aumentamos la frecuencia es cada vez menor, ya que quitamos una parte de la curva que se repite perfectamente varias veces, sin embargo, cuando tenemos frecuencias menores, las brechas pueden quitar la información de gran parte de la curva.

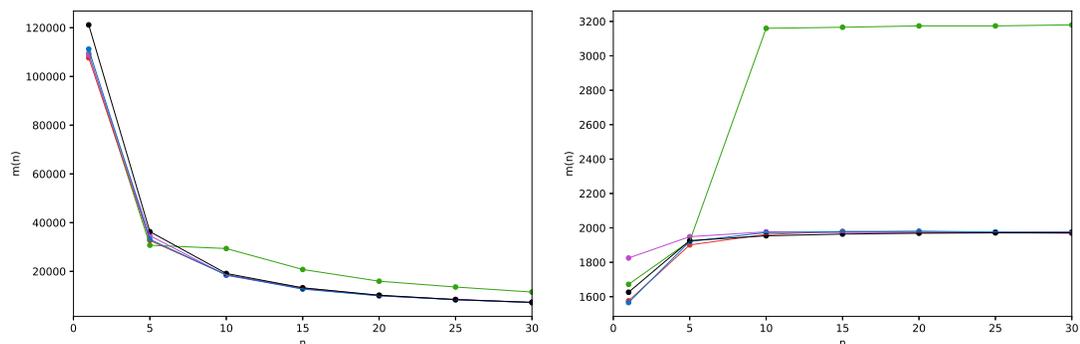


Figura 5.26: Número de conexiones en función de la frecuencia de la función que genera la serie. Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

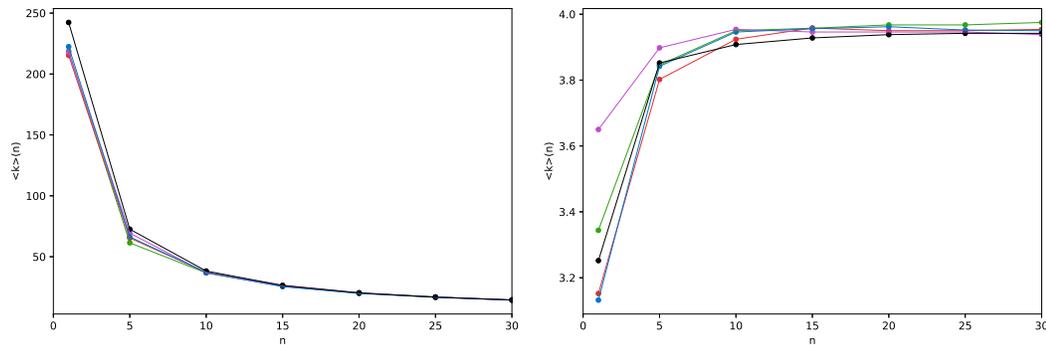


Figura 5.27: Grado promedio en función de la frecuencia de la función que genera la serie. Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

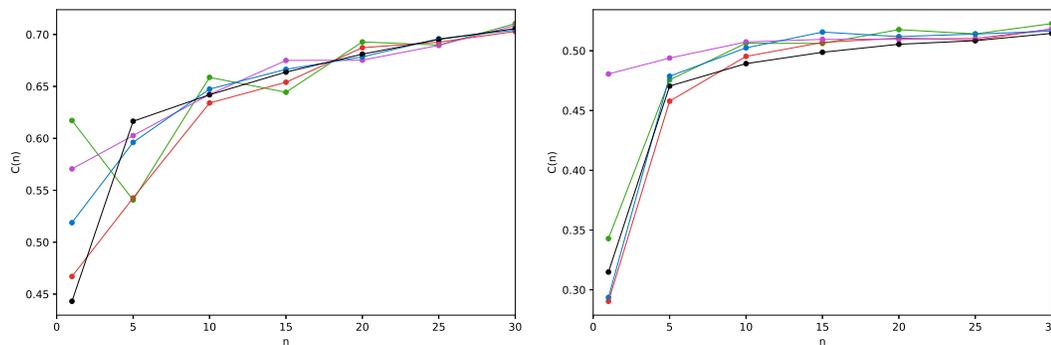


Figura 5.28: Coeficiente de agrupamiento en función de la frecuencia de la función que genera la serie. Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

Para el caso de la distribución de grado se muestran los resultados (ver Figs. 5.30, 5.31 y 5.32) para tres frecuencias distintas:  $n = 1, 5, 30$ . Se observa que para el caso de los resultados obtenidos (Fig. 5.30) a partir de la serie con  $n = 1$  y saltos de datos más grandes muestra una notable diferencia con las series con saltos menores. Sin embargo, esta situación no se repite para el caso de las frecuencias con  $n = 5$  y  $n = 30$ , como se puede ver en las Figs. 5.31 y 5.32.

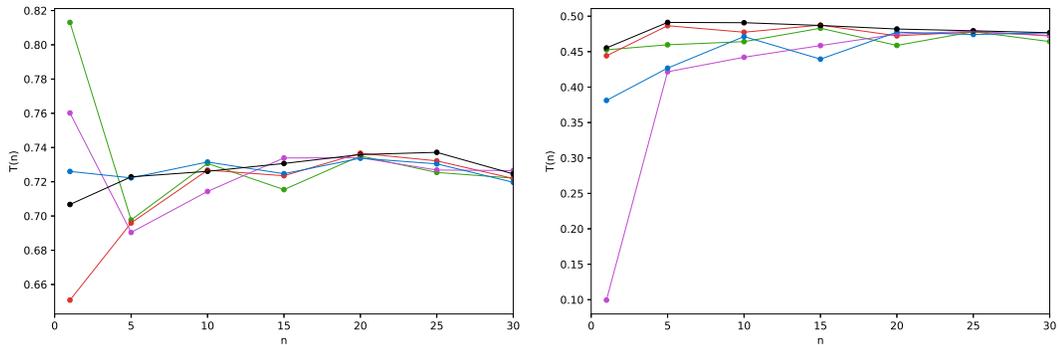


Figura 5.29: Cociente de transitividad en función de la frecuencia de la función que genera la serie. Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

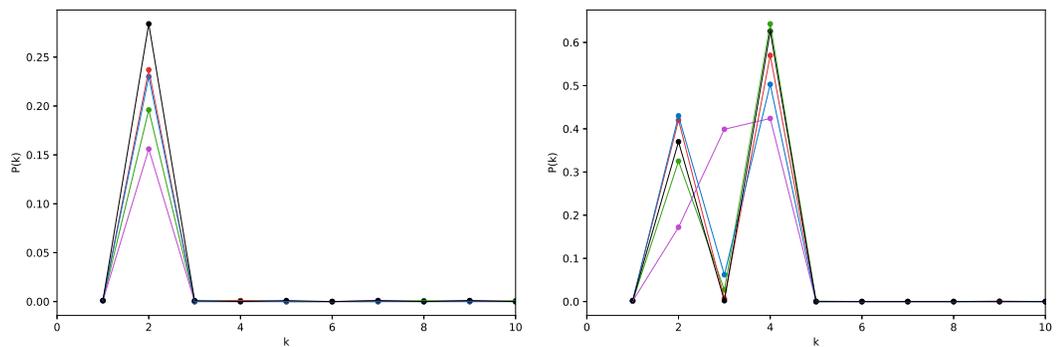


Figura 5.30: Distribución de grado para grafos hechos a partir de series sinusoidales en su frecuencia fundamental. Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

## 5.4. Conclusiones

Hemos estudiado y analizado los resultados obtenidos de los grafos hechos a partir de series temporales con el método de visibilidad normal y horizontal, con el propósito de aportar a la discusión sobre la utilidad de este método propuesto en el año 2008 [2]. Se pudo observar que el método es capaz de distinguir entre ruido

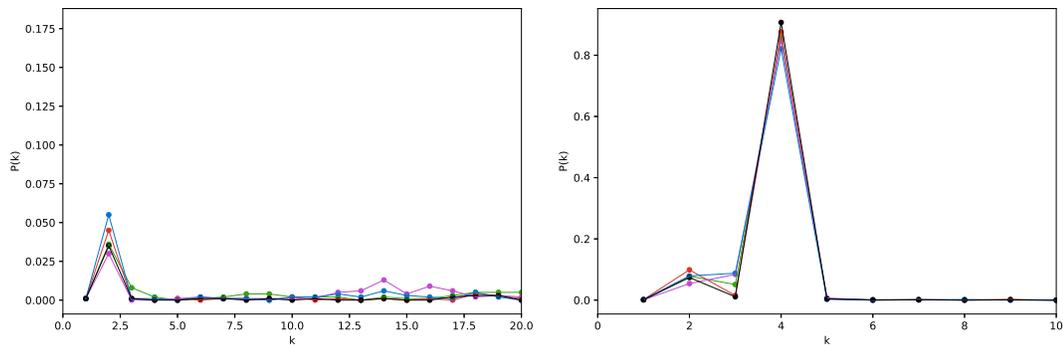


Figura 5.31: Distribución de grado para grafos hechos a partir de series sinusoidales en su frecuencia con  $n = 5$ . Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

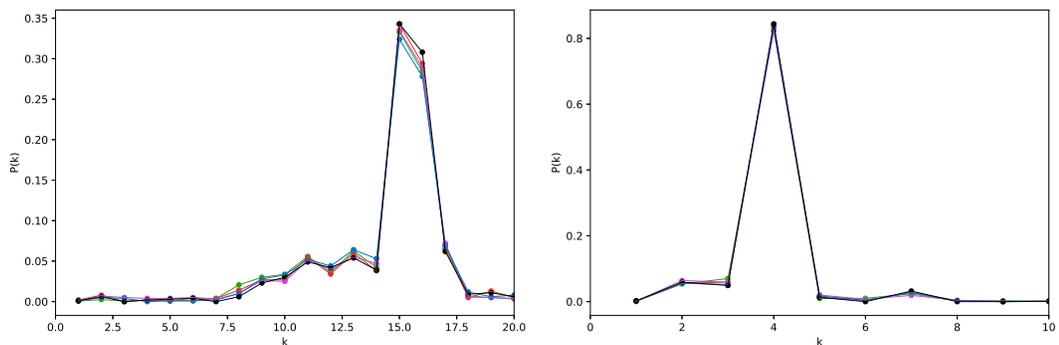


Figura 5.32: Distribución de grado para grafos hechos a partir de series sinusoidales en su frecuencia con  $n = 30$ . Se muestran los resultados para la serie original (en negro), con un salto de 50 cada 200 datos (en verde), con un salto de 50 cada 450 datos (en rojo), con un salto de 100 cada 200 datos (en morado) y con un salto de 20 cada 200 datos (en azul).

caótico o aleatorio uniforme, tal como han mostrado los estudios previos [3]. Esto es de enorme utilidad para poder distinguir si una serie está contaminada con distinto tipo de ruido.

Por otra parte, es de gran utilidad notar que los resultados son altamente robustos ante los saltos que pueda presentar una serie, considerando que en la mayoría de

los casos en que se extraen series temporales directamente desde la naturaleza no se obtienen series completamente continuas. Por lo tanto, el método es una buena manera de aportar información a la investigación de ciertos procesos, como por ejemplo el estudio de fuentes de interés astrofísico, que no siempre están en el campo visual de los instrumentos de observación.

Por último, se debe recordar que este método es de muy bajo costo computacional, por lo que, aunque podría no entregar resultados completamente exactos, sí es muy útil para entregar un acercamiento rápido de la investigación.

# Conclusiones finales

*“Somos poetas inveterados. Cuando una cantidad es muy grande, dejamos de considerarla cantidad. Nuestra imaginación despierta. En vez de mera cantidad, vemos calidad: lo sublime. De lo contrario, la grandeza puramente aritmética de la galaxia no sería más impresionante que los números de una guía de teléfonos. De alguna manera el mismo universo material recibe de nosotros mismos el poder para intimidarnos. Para una mente sin nuestras emociones y energías imaginativas, el argumento del tamaño sería insignificante. Los hombres miran el cielo estrellado con reverencia; a los monos no les ocurre lo mismo.”*

C. S. Lewis

Debido a que las estrellas  $\delta$  Scuti son estrellas pulsantes que presentan una curva de luz aún no muy bien comprendida en términos de que no se conocen completamente los procesos físicos que están detrás de sus pulsaciones, el objetivo de este trabajo era, en principio, observar si encontrábamos alguna huella de fractalidad en las curvas de luz de las estrellas Delta Scuti.

Luego, el estudio fue derivando en objetivos más específicos, como saber si podíamos encontrar alguna discriminación entre las estrellas  $\delta$  Scuti y el resto de estrellas pulsantes usando el método de los grafos de visibilidad. Esto nos llevó a un objetivo todavía más ambicioso: discriminar entre los distintos tipos de estrellas pulsantes usando un método novedoso, donde el análisis de las curvas de luz de las estrellas es completamente geométrico.

Hemos aprendido que los grafos son una manera de solucionar un problema o de analizar un sistema mediante la simplificación de este. Abstraemos el problema a una figura compuesta por nodos y conexiones. No importa qué tan complicado sea el

problema, con un poco (quizá bastante) de paciencia y creatividad siempre podemos encontrar una manera de transformarlo en un grafo.

Existen distintos tipos de grafos y se han propuesto algunas maneras de construir cada uno de ellos. Asimismo, cada tipo de red presenta distintas características que pueden ser cuantificadas mediante métricas, como el grado promedio, el coeficiente de agrupamiento, el cociente de transitividad, la distribución de grado y muchas más. Cada una de estas métricas nos habla de la topología de las redes y nos permiten ir extrayendo la información que no es trivial de observar.

Se pueden construir redes a partir de cualquier sistema, dependiendo de qué consideremos nodos y conexiones de la red. Pero vimos que, a pesar de que una de las herramientas que más se usan en la investigación científica son las series temporales, no es tan sencillo pensar en cómo construir un grafo a partir de ellas. Y aunque se han propuesto otros métodos, nos parece que uno que está tomando fuerza y que vale la pena probar para analizar este tipo de datos, son los grafos de visibilidad.

Los grafos de visibilidad son un método geométrico para construir redes a partir de series temporales, donde las conexiones se dan por la visibilidad que hay de un nodo a otro, ya sea de manera oblicua o completamente horizontal. En este trabajo utilizamos los grafos de visibilidad normales y horizontales para estudiar curvas de luz de estrellas variables pulsantes y poder aportar al entidimiento de estos cuerpos mediante un método nuevo.

Notamos que al trabajar con curvas de luz como series de tiempo, estas series no son equiespaciadas, de hecho, presentan grandes brechas entre ciertos rangos de días. Para enfrentar este obstáculo y sabiendo que el VG es sensible a la distancia entre los datos, mientras el HVG no, decidimos analizar las series mediante grafos de visibilidad pero de tres maneras distintas: usando las curvas completas, las ventanas

de observación (entre brechas) y las curvas de luz faseadas.

Al usar las curvas completas y mirar las distintas métricas, vemos que es difícil decir si existe algún tipo de discriminación entre tipos de estrellas. Lo que en general puede verse, es que las estrellas pulsantes  $\delta$  Scuti tienden a presentar más rasgos de una serie aleatoria que las otras estrellas. Por otra parte, si miramos las distribuciones de grado para ambos tipos de grafos, notamos un comportamiento que se repite para las curvas de luz de los distintos tipos de estrellas: los VG presentan una distribución de grado de la forma de una ley de potencia y los HVG, exponencial. Nuevamente las  $\delta$  Scuti vuelven a sobresalir, siendo las que presentan el exponente  $\gamma$  más bajo (para VG) y más alto (para HVG).

A pesar de que los resultados para las ventanas de observación son similares a los obtenidos con las curvas completas, ya no notamos que las estrellas  $\delta$  Scuti sobresalgan, de hecho parecen estar bastante dentro del promedio general. Finalmente para las curvas faseadas, la distribución de grado vuelve a mostrar a las  $\delta$  Scuti cerca de los extremos inferiores (HVG) y superiores (VG) para el exponente  $\gamma$ .

Al hacer la comparación entre los resultados obtenidos con las tres maneras distintas de hacer los (H)VG podemos concluir que las métricas como el número de conexiones totales, el grado promedio, el coeficiente de agrupamiento o el cociente de transitividad no son capaces de mostrar claramente ninguna distinción entre los distintos grupos de estrellas, excepto porque creemos que el cociente de transitividad tiene posibilidades de ser una métrica que discrimine entre tipos de estrellas. Sin embargo, parece ser que la distribución de grado sí nos muestra una diferencia de las  $\delta$  Scuti con los demás mediante el exponente  $\gamma$ . Esto podría deberse a que estas estrellas son distintas de las otras utilizadas en su forma de pulsar, haciéndolo mediante modos radiales y no radiales.

Además, de los tres métodos, los resultados que son más similares entre sí son los obtenidos mediante las curvas completas y las curvas faseadas, habiendo notables diferencias con los resultados de las ventanas de observación. Esto se debe probablemente a la baja cantidad de datos con los que se formaron las redes de cada ventana y eso introdujo mucho error.

Tampoco notamos ninguna diferencia entre estrellas  $\delta$  Scuti marcadas en el catálogo como inciertas y las demás.

Todo esto nos lleva a concluir que el método del grafo de visibilidad es un buen método para analizar a grandes rasgos las propiedades de las series temporales, pero no a distinguir pequeños detalles entre ellas, ya que al utilizar siete grupos distintos de estrellas podemos ver un comportamiento universal para todas sus métricas en general, en particular para la distribución de grado. Esto nos lleva a pensar que los grafos de visibilidad no pueden distinguir entre distintos tipos de estrellas pulsantes, pero tal vez sí entre otros grupos de estrellas variables.

Por supuesto, no deja de ser interesante el hecho de que para los VG todas las curvas de luz muestren un comportamiento de su distribución de ley de potencia, ya que como hemos dicho, esto podría tener que ver con una serie temporal fractal, donde las curvas de luz de las estrellas pulsantes se puedan descomponer, por ejemplo, como una serie sinusoidal más ruido fractal. La misma pista nos puede estar dando el resultado universal obtenido desde los HVG, ya que como se ha mencionado, la distribución de grado de forma exponencial podría tener que ver con una serie caótica o aleatoria, pero ya sabemos que estas series no son aleatorias, así que podríamos estar en presencia de algún tipo de caos (o fractalidad) dentro de las curvas de luz de las estrellas pulsantes.

A la luz de los resultados obtenidos con las curvas de luz de las estrellas pulsan-

tes, estudiamos series artificiales sinusoidales de distintas frecuencias y longitudes, de manera de poder entender mejor cómo afectan estas características al (H)VG. Observamos que todas las métricas observadas en este caso, dependen en algún grado de la frecuencia y cantidad de datos de las series, en particular el número de conexiones. Aunque métricas como el coeficiente de agrupamiento o el cociente de transitividad parecen no ser demasiado sensibles a la cantidad de datos de la serie, podemos concluir que las series con menos datos, es decir, aquellas que contenían 50, 25 y 10 datos no son capaces de expresar el mismo comportamiento que las otras. Este resultado valida nuestro estudio hecho con estrellas, ya que las ventanas de observación más pequeñas que se usaron tenían del orden de 100 datos.

Vimos que cuando las series son puras (sin contaminación de ruido ni brechas) aun con distintas longitudes, los (H)VG tienen una distribución de grado muy particular, con picos muy marcados. Esto se mantiene en gran parte incluso para las series con menos datos, lo cual muestra la robustez de esta métrica ante la longitud de la serie.

Cuando analizamos series sinusoidales contaminadas con ruido gaussiano y caótico, notamos que algunas métricas son menos sensibles a esa contaminación que otras. Por ejemplo, el número de conexiones parece no cambiar demasiado al añadir ruido en comparación a lo que sucedía cuando cambiábamos el número de datos de la serie. Sin embargo, para el caso de la distribución de grado pudimos notar una alta sensibilidad a ambos tipos de ruido, cambiando drásticamente su forma aun con cantidades muy pequeñas de él. Esto vuelve a reforzar la idea de que los resultados obtenidos para la distribución de grado de las estrellas nos podrían estar dando pistas de algún tipo de ruido caótico o fractal.

Finalmente, cuando analizamos los resultados de las series sinusoidales con distintos tipos de brechas notamos una gran robustez en gran parte de las métricas,

siendo muy poco sensibles a los saltos de datos que pudiera contener la serie. Esto nos muestra que nuestra intuición acerca de haber construido los grafos de las estrellas usando las curvas de luz completas fue una buena idea, y probablemente los resultados obtenidos con esas series son más certeros que los obtenidos con las ventanas de observación debido a su poca cantidad de datos.

Esto quiere decir que los grafos de visibilidad aplicados a las curvas de luz son una herramienta útil para su análisis y que no nos debe detener el hecho de que presenten brechas, ruido o tengan distintas longitudes, solo debemos ser precavidos con las métricas correspondientes.

## 5.5. Trabajo futuro

Después de este trabajo han quedado pendientes muchas ideas por realizar. Queremos responder a la pregunta de si es posible distinguir el tipo de ruido que contienen las curvas de luz.

Poder aplicar este análisis a otro tipo de estrellas variables que no sean pulsantes es un objetivo en la mira, ya que tal como vimos, el grupo de estrellas que usamos fue bastante específico, pero quizá utilizando grupos de estrellas con más diferencias entre sí nos podría dar más pistas de la utilidad de los grafos de visibilidad sobre este tipo de datos.

Esperamos a futuro poder comprender exactamente cuáles son las mejores métricas a calcular para las curvas de luz, cuáles nos dan información valiosa; lo cual implica calcular métricas nuevas a los grafos ya construidos.

Esperamos haber incluido una herramienta novedosa en un área de la ciencia que aún no incorpora las redes complejas a su desarrollo y que pueda aportar al entendimiento de las estrellas y en general, del Universo que nos rodea mediante

otro punto de vista.

# Apéndice A

## A.1. Estudio de *glitches* en púlsares mediante (H)VG

En el año 1967 Jocelyn Bell, una estudiante de doctorado en astronomía bajo la dirección de su tutor de tesis, Anthony Hewish, informó la detección de una señal curiosa. Se habían pasado casi un mes tratando de entender una fuente de ondas de radio que no parecía corresponder a nada conocido y tenía la particularidad de ser muy exacta en su periodicidad. Las observaciones mostraban que la cantidad de masa que contenía aquel cuerpo era demasiado alta para ser una estrella, considerando su reducido tamaño. Por estas razones, se llegó a creer que se podría tratar de una señal extraterrestre, a la que de hecho denominaron *Little Green Men (LGM)* (Hombrecitos verdes).

Sin embargo, un mes después, Bell se encontró con otra señal del mismo tipo, pero esta parecía venir de otro lugar completamente distinto, por lo que la hipótesis extraterrestre se cayó y comenzó a tomar fuerza la idea de que se trataba de algún cuerpo celeste no descubierto aún. En efecto, se siguieron encontrando decenas de estos cuerpos, que en realidad se trataban de un tipo de objeto teorizado en 1934 por dos astrónomos, Walter Baade y Fritz Zwicky, llamado *estrella de neutrones*.

Las estrellas de neutrones son, en simples palabras, la etapa final de una estrella

masiva. Luego de haber consumido su combustible, las estrellas masivas colapsan sobre sí mismas provocando una supernova, un estallido que remueve todas las capas externas de la estrella, dejando solamente su núcleo. Pueden contener tanta masa como el Sol, pero en un radio de unos cuantos kilómetros, haciendo que sean de los objetos más densos del Universo. Lo único que detiene a las estrellas de neutrones de colapsar sobre sí mismas por los efectos gravitacionales es la presión de degeneración de los neutrones.

Estas curiosas estrellas tienen además la característica de rotar muy rápido y de poseer campos magnéticos de alta intensidad. Estos últimos generan energéticos chorros de radiación que se emiten en dirección de sus polos magnéticos. Sin embargo, debido a que el eje de rotación y el eje magnético no coinciden exactamente, el chorro de radiación es emitido en varias direcciones, dibujando un cono. Esta situación hace que en algunas ocasiones esa radiación emitida por las estrellas de neutrones pase por la Tierra y los astrónomos puedan detectarla. A esas estrellas se les conoce como *púlsares*, ya que desde nuestro punto de observación las vemos como estrellas que emiten pulsos.

Estos pulsos pueden ser emitidos en distintas longitudes de onda. Los que fueron detectados en primera instancia por Jocelyn Bell fueron pulsos de ondas de radio, pero podríamos encontrarnos con otro tipo de radiación, y tal como se dijo al comienzo, tienen la notable característica de tener un periodo muy preciso, usualmente entre 0.01 y 8 segundos.

### **A.1.1. *Glitches* en púlsares**

Esta precisión en los pulsos que emiten los púlsares es una característica universal, inherente a todas las estrellas de neutrones, por lo que cuando se observa un leve

cambio en su frecuencia es un evento digno de registrar. Estos eventos efectivamente ocurren y se conocen como *glitches*.

Los *glitches* se han registrado en varios púlsares, pero son poco frecuentes, pudiendo existir púlsares que presentan uno solo a lo largo de varios años. Estos eventos ocurren sin previo aviso, es decir, no se observa ningún comportamiento particular antes de uno.

Se han propuesto muchos modelos para explicar la existencia de los *glitches*. En primera instancia se postuló la idea de terremotos estelares, pero pronto los astrónomos se dieron cuenta de que esta hipótesis no explicaba la frecuencia de ciertos *glitches* en algunos púlsares. Hoy en día se siguen proponiendo distintos modelos, pero en general se entienden como el resultado de las complejas interacciones entre los componentes superfluidos y el resto de la estrella.

En este trabajo proponemos un estudio de las series temporales correspondientes a estos eventos, es decir, se toman las series de tiempo de los *glitches* observados en 7 púlsares (ver Tabla A.1) y se analizan mediante el método de los grafos de visibilidad o *visibility graph*. El objetivo de este análisis es aportar a la comprensión de estos eventos desde una perspectiva distinta, transformando estas series en redes complejas que puedan ser analizadas como tales.

Calculamos algunas métricas que nos pueden dar información acerca de la topología de estas redes y así, de las series de *glitches*, de manera que podamos analizar si existe alguna correlación en el tiempo.

### A.1.2. Resultados

Por simplicidad, desde aquí en adelante llamaremos a los púlsares analizados aquí por letra y sus cuatro primeros números o su nombre vulgar (en el caso del PSR

Tabla A.1: Púlsares usados en este trabajo y la cantidad de *glitches* observados en cada uno.

Púlsar	Número de <i>glitches</i>
PSR B1737-30	35
PSR B1758-23	13
PSR B0531+21 (o “del Cangrejo”)	22
PSR B0833-45 (o “Vela”)	20
PSR J0631+1036	15
PSR J1341	23
PSR J0537-6910	45

B0531+21 y PSR B0833-45). Para poder comparar resultados, se han utilizado dos maneras de construir los grafos de visibilidad: normal y horizontal. Es decir, para cada una de las series de *glitches* correspondiente a cada púlsar se construyen dos grafos, obteniéndose un total de 14 grafos.

Al aplicar el método de *visibility graph* a estas series lo hacemos de una manera distinta a la aplicada a las estrellas variables pulsantes durante este trabajo. Recordemos que los grafos obtenidos de las estrellas pulsantes eran hechos a partir de las curvas de luz de las estrellas, es decir, a partir de los puntos que describen la luminosidad de la estrella a través del tiempo. En el caso de los púlsares, lo que hacemos es tomar la serie de *glitches* observados en el púlsar, esto significa que es una serie compuesta por eventos particulares en el tiempo.

Por esta razón, las series de tiempo de estas estrellas tienen un bajo número de datos y se obtienen grafos pequeños, por ejemplo, como el que se observa en la Fig. A.1. Recordemos que, tal como se indicó en el Capítulo 2, debido a su construcción, el grafo horizontal siempre tiene menor número de conexiones totales que el grafo normal hecho desde la misma serie.

En la Fig. A.2 se pueden observar el número de conexiones por nodo de cada grafo, donde se puede ver que el número de conexiones se distribuye levemente de

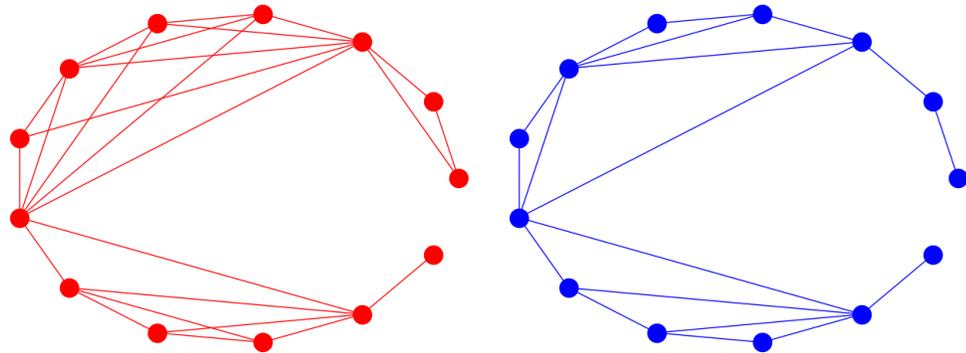


Figura A.1: Grafos construidos a partir del método de visibilidad a partir de la serie de *glitches* observados en el púlsar PSR B1758. En rojo se muestra el grafo de visibilidad normal y en azul, el grafo de visibilidad horizontal.

manera más homogénea para los grafos horizontales, pero para ambos grafos se observa que los púlsares del Cangrejo, J1737 y J0537 son los que muestran picos más pronunciados.

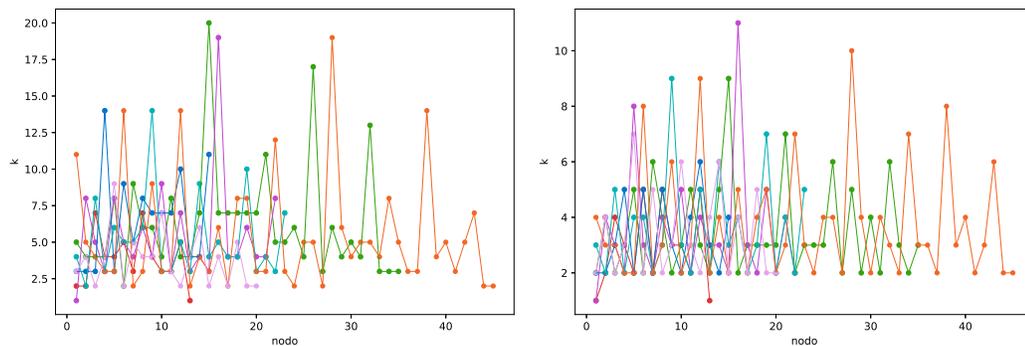


Figura A.2: Conexiones por nodo de los grafos hechos a partir de los glitches. El color verde corresponde a la serie de *glitches* del púlsar PSR B1737, el rojo al PSR B1758, el morado al púlsar del Cangrejo, el azul al PSR J0631, el cian al PSR J1341, el naranja al PSR J0537 y el rosado al púlsar Vela.

Calculamos también el coeficiente de agrupamiento por nodo de cada serie de *glitches*, como se muestra en la Fig. A.3. Las redes hechas con VG y HVG parecen tener un comportamiento muy similar con respecto a esta métrica. Debido a que el

VG produce siempre más conexiones que el HVG, es natural pensar que el coeficiente de agrupamiento tenderá a ser mayor que en el HVG y eso es lo que se puede apreciar.

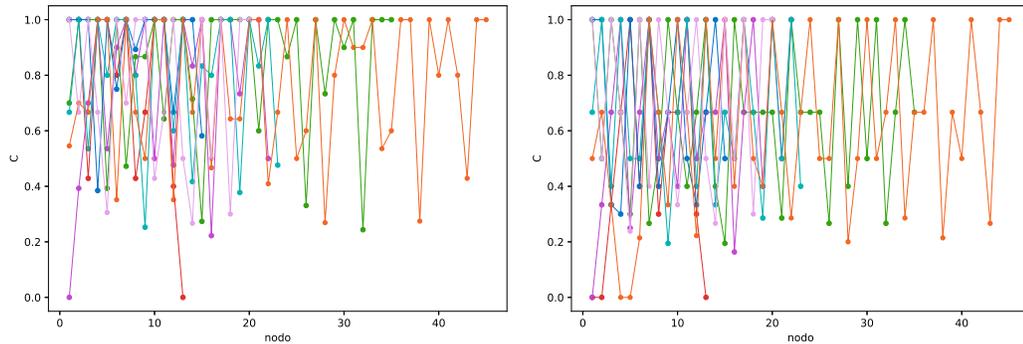


Figura A.3: Coeficiente de agrupamiento en función de los nodos de los grafos hechos a partir de los glitches. El color verde corresponde a la serie de *glitches* del púlsar PSR B1737, el rojo al PSR B1758, el morado al púlsar del Cangrejo, el azul al PSR J0631, el cian al PSR J1341, el naranja al PSR J0537 y el rosado al púlsar Vela.

También calculamos la distribución de grado de los grafos hechos a partir de los *glitches* y se observan los resultados de esta métrica en la Fig. A.4. De la distribución de grado obtenida para ambos tipos de grafos se puede desprender que se asemejan a distribuciones de redes aleatorias (ver Figs. 2.4 y 2.7), sin embargo, debido a la poca cantidad de nodos de cada red la forma de las distribuciones de grado particulares no quedan tan claras. No obstante, al sobreponerlas todas se ve una tendencia a un comportamiento más o menos universal en las series de tiempo examinadas.

Considerando que la cantidad de datos es muy poca, lo que impide tener una estadística adecuada para sacar conclusiones, decidimos trabajar los resultados de una forma distinta, repitiendo los cálculos con réplicas aleatorias obtenidas a partir de la serie de tiempo respectiva. Específicamente, tomamos las series de los *glitches* y se les hizo un reordenamiento aleatorio de los eventos. Por cada nueva serie desordenada se construye un grafo (normal y horizontal) y se calculan las distintas métricas ya

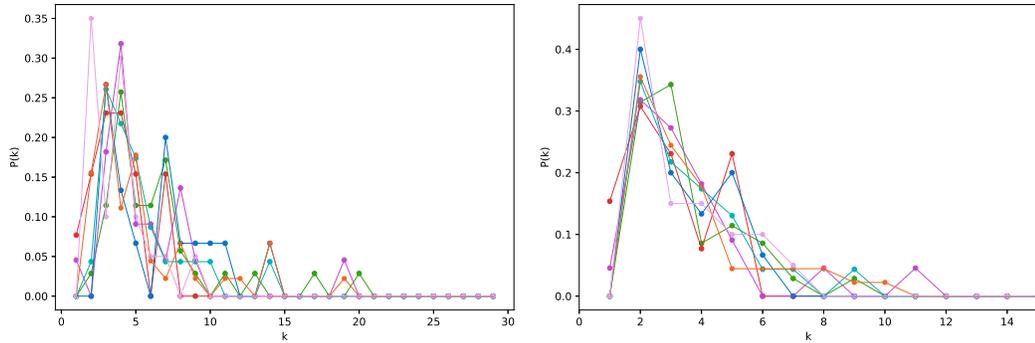


Figura A.4: Distribución de grado de los grafos hechos a partir de los glitches. El color verde corresponde a la serie de *glitches* del púlsar PSR B1737, el rojo al PSR B1758, el morado al púlsar del Cangrejo, el azul al PSR J0631, el cian al PSR J1341, el naranja al PSR J0537 y el rosado al púlsar Vela.

mostradas. Este proceso se repite 50000 veces por cada métrica. La idea de este procedimiento es luego comparar el rango de resultados obtenidos con las iteraciones con los resultados obtenidos por medio de las series originales, y observar si estos se encuentran dentro de este rango o no, de manera de poder identificar si hay alguna correlación temporal en la serie de tiempo o si, por el contrario, la serie de *glitches* se puede atribuir a un proceso puramente aleatorio.

En la Fig. A.5 se observan los resultados que se obtienen para el número de conexiones, para cada púlsar analizado. En azul se muestra el promedio obtenido sobre todas las muestras desordenadas, la desviación estándar, y en rojo el valor obtenido a partir de la serie observada. Se observa que tanto para el grafo normal como para el horizontal, la secuencia observada de glitches del púlsar PSR J0537 sale del rango promedio. Luego, para los grafos normales se puede ver que el púlsar del Cangrejo y el PSR J0631 también quedan fuera, pero esos resultados no se repiten para los grafos horizontales, donde los valores que quedan fuera del rango promedio corresponden al PSR J1341 y al PSR J0537.

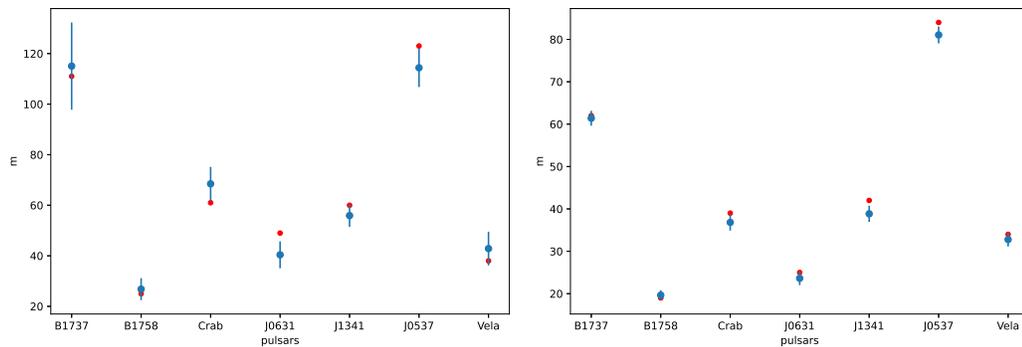


Figura A.5: En color azul se muestra el rango de valores para el número de conexiones totales de las redes hechas a partir de hacer una mezcla aleatoria de los eventos temporales. En rojo se muestra el valor obtenido a partir de la red de los eventos originales de cada púlsar.

Luego, en la Fig. A.6 se grafica el valor del grado promedio para cada púlsar estudiado. Se vuelven a observar algunas estrellas que tienen valores fuera del rango promedio, como en el caso de los grafos normales el púlsar del Cangrejo, el PSR J0631 y el J0537, y en el caso de los grafos horizontales corresponden al del Cangrejo, al PSR J1341 y nuevamente al PSR J0537.

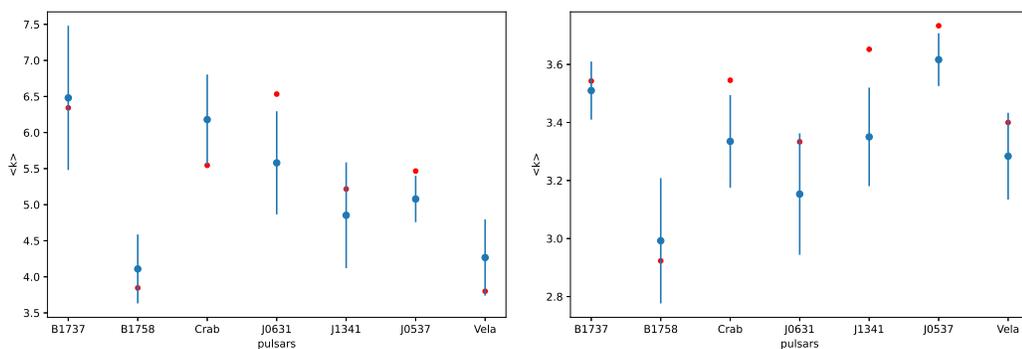


Figura A.6: En color azul se muestra el rango de valores para el grado promedio de las redes hechas a partir de hacer una mezcla aleatoria de los eventos temporales. En rojo se muestra el valor obtenido a partir de la red de los eventos originales de cada púlsar.

Se puede observar en las Figs. A.5 y A.6 que para el VG (izquierda), los púlsares del Cangrejo, PSR J0631 y PSR J0537 salen de la media. Lo mismo vuelve a ocurrir para el púlsar del Cangrejo el PSR J0537 y ahora para el PSR J1341, en el caso de HVG (derecha).

En la Fig. A.7 se grafica el coeficiente de agrupamiento para cada púlsar. Se observa que los que salen de la media para el VG (izquierda) son los púlsares del Cangrejo, PSR B1737 y PSR J0631. Para el caso del HVG (derecha) se puede ver el púlsar del Cangrejo, PSR B1758, PSR J0631 PSR J1341 y el púlsar Vela.

Finalmente, en la Fig. A.8, donde se grafica el cociente de transitividad por cada púlsar, para el VG (izquierda) dos púlsares salen de los promedios: el púlsar del Cangrejo y el PSR J0631. Asimismo, para el HVG se repite el púlsar del Cangrejo, pero aparece afuera el PSR J5037.

El púlsar que claramente sale en general del promedio es el púlsar del Cangrejo, siguiéndole después el PSR J0537 y PSR J0631. No deja de ser curioso que para el caso del VG, el PSR J0537 queda escondido justamente detrás del promedio de valores obtenidos.

Se podría pensar que los púlsares que salen de la media son aquellos que tienen mayor cantidad de datos, sin embargo, no parece haber una relación. Aunque el PSR J0537 es el que presenta más nodos en la red (45), el PSR J0631 es uno de los que tiene menos (15) y el púlsar del Cangrejo tiene 22 nodos. Por otra parte, existen evidencias con respecto a que el PSR J5037 es especial [59], ya que presenta una gran actividad de *glitches* de relativa alta intensidad, presentando además una correlación entre el tamaño del *glitch* y el tiempo en que ocurre otro evento. Podríamos especular que en los otros púlsares que manifestaron un comportamiento fuera de la media también existe algún tipo de correlación, pero se requieren estudios adicionales para precisar

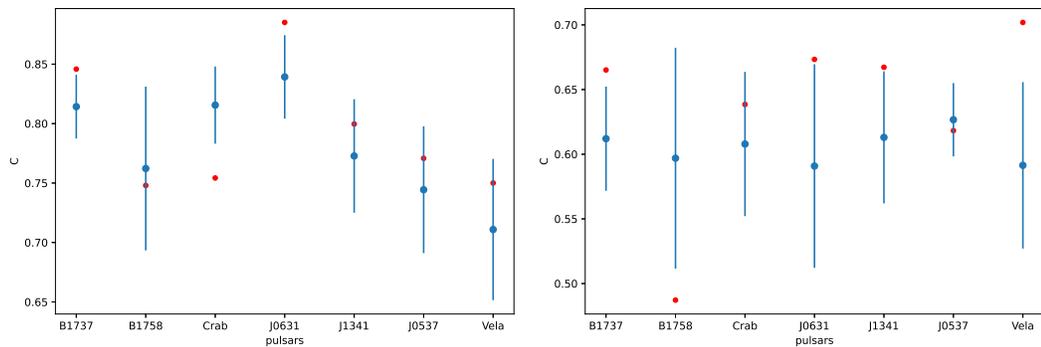


Figura A.7: En color azul se muestra el rango de valores para el coeficiente de agrupamiento de las redes hechas a partir de hacer una mezcla aleatoria de los eventos temporales. En rojo se muestra el valor obtenido a partir de la red de los eventos originales de cada púlsar.

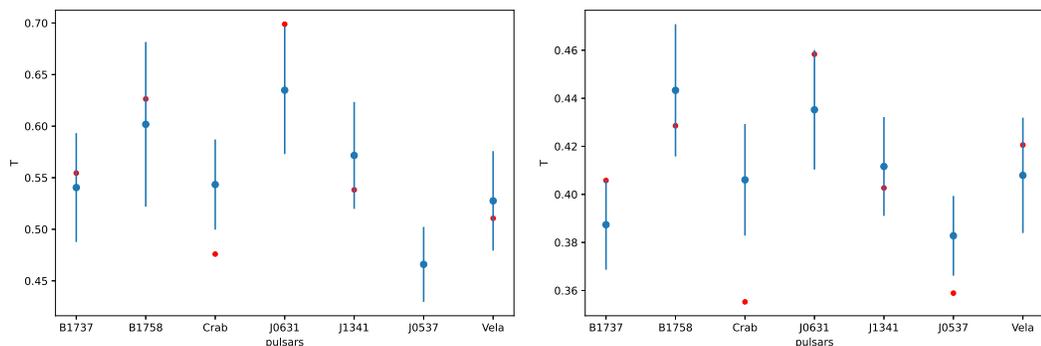


Figura A.8: En color azul se muestra el rango de valores para el cociente de transitividad de las redes hechas a partir de hacer una mezcla aleatoria de los eventos temporales. En rojo se muestra el valor obtenido a partir de la red de los eventos originales de cada púlsar.

esta afirmación.

Se puede ver que al usar ambos métodos de visibilidad (normal y horizontal) no se obtienen resultados que puedan distinguirse entre sí, probablemente debido a la cantidad de nodos que tiene cada red, de manera que los grafos formados son bastante similares entre ellos, independiente del método que se haya usado para construirlo.

Como trabajo futuro esperamos poder calcular otras métricas además de las ya presentadas, incluyendo una medida de la irreversibilidad de las series como podría ser la divergencia de Kullback-Leibler (KLD) o proponiendo alguna otra medida de entropía de las series. También esperamos poder trabajar con una serie temporal en donde se consideren *glitches* más pequeños, de manera de poder tener series más amplias y con más información. Por supuesto, también esperamos buscar métricas que nos ayuden a entender por qué los púlsares que salen de la media en las figuras mostradas, lo hacen.

## A.2. Estudio de estrellas binarias eclipsantes mediante (H)VG

Un comentario que podría surgir de haber leído el Cap. 4 es que se ha hecho un análisis de un grupo de estrellas variables muy acotado: estrellas variables pulsantes. Si bien dentro de este grupo podemos encontrar muchos tipos distintos de estrellas pulsantes, es razonable pensar que podríamos buscar otro tipo de estrellas variables para comparar sus resultados con los obtenidos anteriormente. ¿Puede el método de grafos de visibilidad distinguir entre estrellas variables pulsantes y otro tipo? Es una pregunta que queda abierta para profundizar en el futuro, pero aquí presentamos algunos resultados de trabajar con estrellas variables eclipsantes tipo Algol, las que se detallan a continuación:

- 185725+4042.9
  
- 185528+4713.7

- 185211+4748.3
  
- 184844+4342.4
  
- 184747+4343.7
  
- 184321+4734.7

En la Fig. A.9 se puede observar la distribución de grado de las curvas de luz de seis estrellas binarias eclipsantes, obtenidas también desde el catálogo de Kepler, donde cada una se graficó en un color distinto.

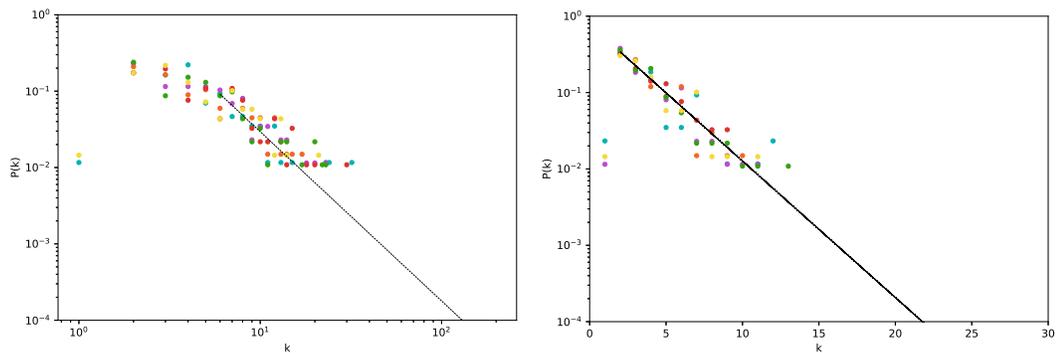


Figura A.9: Distribución de grado para redes hechas con VG (izquierda) graficado en escala logarítmica con un ajuste de ley de potencia y exponente  $\gamma_{VG} = 2.21$ . Para las redes hechas con HVG (derecha) se muestra en escala semilogarítmica con un ajuste exponencial y exponente  $\gamma_{HVG} = 0.411$ .

De acuerdo a estos resultados obtenidos, notamos que si bien  $\gamma_{HVG}$  es muy similar a los obtenidos con las estrellas pulsantes, no sucede lo mismo con  $\gamma_{VG}$ , donde

resulta tener un valor bastante más bajo que las demás, de hecho, es el más bajo de todos. Este resultado nos da una pista acerca de que este método podría ser capaz de distinguir distintos tipos de estrellas variables. Sin embargo, tal como se ha mencionado antes, es de suma importancia considerar el ruido que contienen estas curvas de luz, ya que como hemos visto en el Capítulo ??, los grafos de visibilidad son muy sensibles a una poca cantidad de ruido.

Se espera en un futuro haber comprendido más cómo afecta el ruido a los grafos de visibilidad y de esta manera, aportar a la distinción de distintas estrellas mediante este método.

### **A.3. Relación del exponente $\gamma$ con el periodo y la amplitud de las curvas de luz**

Debido a que en el Capítulo 4 se calcularon los exponentes  $\gamma$  al ajustar la distribución de grado, se hizo una comparación de este parámetro en relación a dos características físicas de las estrellas, el periodo y la amplitud de la pulsación. Se tomaron los promedios de estas variables según cada grupo de estrellas y los resultados se muestran en las figuras A.10 y A.11. El exponente  $\gamma$  se calcula para el promedio de los grupos de estrellas según como se hayan construido los grafos: serie completa (1), ventanas de observación (2) y series faseadas (3).

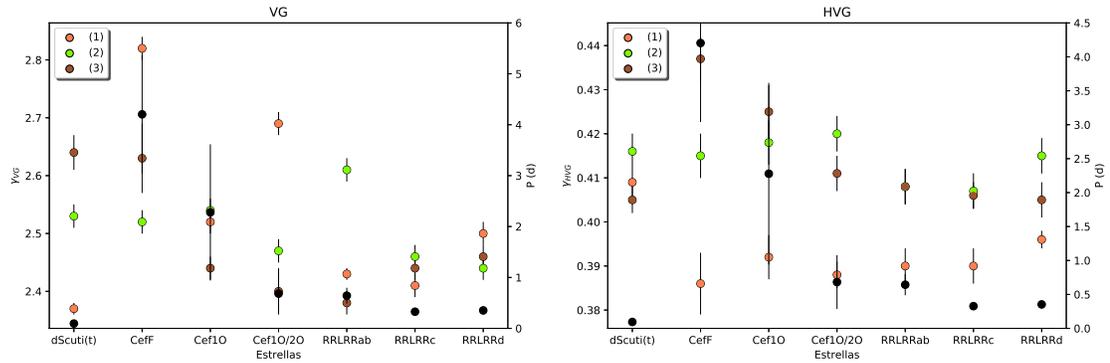


Figura A.10: Promedio del exponente  $\gamma$  para cada grupo de estrellas (eje de la izquierda) en relación al promedio de los periodos de pulsación de cada grupo (eje de la izquierda). El color naranja corresponde a las series completas, el verde, a las ventanas de observación y el café, a las curvas faseadas. Para el eje derecho el color negro corresponde al periodo promedio del grupo de estrellas.

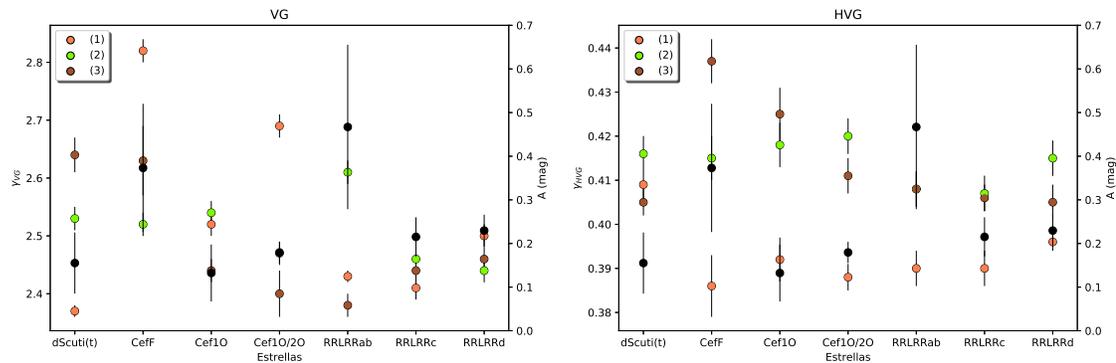


Figura A.11: Promedio del exponente  $\gamma$  para cada grupo de estrellas (eje de la izquierda) en relación al promedio de las amplitudes de pulsación de cada grupo (eje de la izquierda). El color naranja corresponde a las series completas, el verde, a las ventanas de observación y el café, a las curvas faseadas. Para el eje derecho el color negro corresponde a la amplitud promedio del grupo de estrellas.

# Referencias

- [1] L. Euler, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8 págs. 128–140 (1736).
- [2] L. Lacasa, B. Luque, F. Ballesteros, J. Luque y J. C. Nuno, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **105**, 4972 (2008).
- [3] L. Lacasa y R. Toral, *Physical Review E* **82**, 036120 (2010).
- [4] W.-J. Xie, R.-Q. Han, Z.-Q. Jiang, L. Wei y W.-X. Zhou, *Europhysics Letters* **119**, 48008 (2017).
- [5] X.-H. Ni, Z.-Q. Jiang y W.-X. Zhou, *Physics Letters A* **373**, 3822 (2009).
- [6] P. Erdős y A. Rényi, *Publicationes Mathematicae* **6**, 290 (1959).
- [7] S. Milgram, *Psychology Today* **2**, 60 (1967).
- [8] A. L. Barabási y R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [9] D. J. Watts, *Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness*, Vol. 36 (Princeton university press, 2004).
- [10] D. J. Watts y S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).
- [11] M. E. Newman, *Journal of Statistical Physics* **101**, 819 (2000).

- [12] M. E. Newman, C. Moore y D. J. Watts, *Physical Review Letters* **84**, 3201 (2000).
- [13] M. Boots y A. Sasaki, *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences* **266**, 1933 (1999).
- [14] Z. Toroczkai y K. E. Bassler, *Nature* **428**, 716 (2004).
- [15] L. Telesca y M. Lovallo, *Europhysics Letters* **97**, 50002 (2012).
- [16] J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertész y A.-L. Barabási, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **104**, 7332 (2007).
- [17] A. Clauset, C. R. Shalizi y M. E. J. Newman, *SIAM Review* **51**, 661 (2009).
- [18] A. Barabási y Z. Oltvai, *Nat Rev Genet* **5**, 101 (2004).
- [19] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley y Y. Aberg, *Nature* **411**, 907 (2001).
- [20] Y. Zou, R. Donner, N. Marwan, M. Small y J. Kurths, *Nonlinear Processes in Geophysics* **21**, 1113 (2014).
- [21] V. Suyal, A. Prasad y H. P. Singh, *Solar Physics* **289**, 379 (2013).
- [22] M. Elliott y B. Golub, *Journal of Political Economy* **127**, 730 (2019).
- [23] S. Jain y S. Krishna, *Computer Physics Communications* **121-122**, 116 (1999).
- [24] A. Barabási, G. Menichetti y J. Loscalzo, *Nature Food* **1**, 33 (2019).
- [25] R. Albert y A.-L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).

- [26] J. Elsner, T. Jagger y E. A. Fogarty, *Geophysical Research Letters* **36**, L16702 (2009).
- [27] J. Donges, Y. Zou y N. e. a. Marwan, *The European Physical Journal Special Topics* **174**, 157 (2009).
- [28] M. E. Newman, *Proceedings of the national academy of sciences* **98**, 404 (2001).
- [29] S. Redner, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* **4**, 131 (1998).
- [30] X. Xu, J. Zhang y M. Small, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **105**, 19601 (2009).
- [31] J. Zhang y M. Small, *Physical Review Letters* **96**, 238701 (2006).
- [32] A. C. Braga, L. G. Alves, L. S. Costa, A. Ribeiro, M. Jesus, A. A. Tateishi y H. V. Ribeiro, *Physica A* **444**, 1003 (2015).
- [33] P.-F. Dai, X. Xiong y W.-X. Zhou, *Physica A* **531**, 121748 (2019).
- [34] D. Tsiotas y L. Magafas, *Physics* **2**, 325 (06 2020).
- [35] S. Kundu, A. Opris, Y. Yukutake y T. Hatano, *Frontiers in Physics* pág. 656310 (2021).
- [36] B. Luque, L. Lacasa, F. Ballesteros y J. Luque, *Physical Review E* **80**, 046103 (2009).
- [37] M. G. Ravetti, L. C. Carpi, B. A. Gonçalves, A. C. Frery y O. A. Rosso, *PLOS ONE* **9**, 1 (2014).

- [38] A. M. Núñez, L. Lacasa, E. Valero, J. P. Gómez y B. Luque, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **22**, 1250160 (2012).
- [39] R. Donner y J. Donges, *Acta Geophysica* **60(3)**, 589 (2012).
- [40] G. Weiss, *Journal of Applied Probability* **12**, 831 (1975).
- [41] L. Lacasa, A. M. Núñez, E. Roldán, J. M. Parrondo y B. Luque, *The European Physical Journal B* **85**, 217 (2012).
- [42] H. A. Bethe, *Reviews of Modern Physics* **62**, 801 (1990).
- [43] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Cambridge University Press, 2019).
- [44] S. Porceddu, L. Jetsu, T. Markkanen y J. Toivari-Viitala, *Cambridge Archaeological Journal* **18**, 327 (2008).
- [45] L. Eyer y N. Mowlavi, *Journal of Physics: Conference Series* **118**, 012010 (2008).
- [46] H. A. Smith y M. Catelan, *Classification of Variable Stars* (John Wiley & Sons, Ltd, 2015), Cap. 3, págs. 29–52.
- [47] N. N. Samus, E. V. Kazarovets, O. V. Durlevich, N. N. Kireeva y E. N. Pastukhova, *Astronomy Reports* **61(1)**, 296 (2017).
- [48] H. S. Leavitt, *Annals of Harvard College Observatory* **60**, 87 (1908).
- [49] E. C. Pickering, H. R. Colson, W. P. Fleming y L. D. Wells, *Astrophysical Journal* **13**, 226 (1901).
- [50] M. Breger, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **91**, 5 (1979).

- [51] M. Breger, *Space Science Reviews* **27**, 361 (1980).
- [52] A. R. Hewish, S. J. Bell, J. Pilkington, P. Scott y R. Collins, *Nature* **217**, 709 (1968).
- [53] A. Abdo, M. Ackermann, w. Atwood, L. Baldini, J. Ballet, G. Barbiellini, M. Baring, D. Bastieri, B. Baughman, K. Bechtol, R. Bellazzini, B. Berenji, R. Blandford, E. Bloom, G. Bogaert, E. Bonamente, A. Borgland, J. Bregeon, A. Brez y M. Ziegler, *Science* **322**, 1218 (2008).
- [54] S. de Franciscis, J. Pascual-Granado, J. C. Suárez, A. G. Hernández y R. Garrido, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **481**, 4637 (2018).
- [55] I. Soszynski, R. Poleski, A. Udalski, M. Szymanski, M. Kubiak, G. Pietrzynski, L. Wyrzykowski, O. Szewczyk y K. Ulaczyk, *Acta Astronomica* **58**, 163 (2008).
- [56] I. Soszynski, A. Udalski, M. Szymanski, M. Kubiak, G. Pietrzynski, L. Wyrzykowski, O. Szewczyk, K. Ulaczyk y R. Poleski, *Acta Astronomica* **59**, 1 (2009).
- [57] R. Poleski, I. Soszyński, A. Udalski, M. Szymański, M. Kubiak, G. Pietrzyński, L. Wyrzykowski, O. Szewczyk y K. Ulaczyk, *Acta Astronomica* **60**, 1 (2010).
- [58] V. Muñoz y N. E. Garcés, *PLOS ONE* **16**, e0259735 (2021).
- [59] D. Antonopoulou, C. Espinoza, L. Kuiper y N. Andersson, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **473**, 1644 (2018).