Algunos resultados de derivabilidad para el Homeomorfismo de Lin

Tesis
Entregada a la
Universidad De Chile
En cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de

Magíster en ciencias matemáticas

Facultad de Ciencias

Por
David Ignacio Urrutia Vergara

Noviembre 2023

Director de Tesis:
Dr. Gonzalo Ricardo Robledo Veloso

Mi nombre es David Ignacio Urrutia Vergara, nací en la comuna de Santiago un día jueves 13 de noviembre de 1997 a la hora de almuerzo. Mis primeros años viví en la comuna de Cerro Navia, pero desde los 4 o 5 años de edad (ya ni me acuerdo), me fui con mis padres a la comuna de San Bernardo y actualmente sigo viviendo con mis padres en dicha comuna.

Desde chico que tuve muchísimo interés en la música y la academia, aprendí a tocar guitarra, estuve en coros de iglesia, tome clases de guitarra clásica, pasé al Heavy metal y toque mucho folclore latinoamericano, cosa me apasiona y todavía hago, como aficionado eso sí, me cuesta tener personalidad para ofrecerme en algún grupo, pero es una fantasía que espero cumplir en algún momento de mi vida.

Inicialmente mi aspiración era la de ser mecánico automotriz, incluso, entre en un liceo técnico para aprender acerca de autos, motores, etc, para posteriormente especializarme como ingeniero en el área. Sin embargo, eso cambió gracias a un profesor de matemáticas, el cual llegó con la idea de deducir la fórmula que soluciona una ecuación cuadrática en una clase cuando recién empezaba mi 2do medio (sí, la de $0 = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$). En ese momento no entendí los cálculos que habían detrás de esa simple deducción, pero empezó a motivarme el hecho de que la matemática tenía argumentos y razonamientos detrás de una ecuación, teorema o lo que fuese.

Terminando segundo medio, me cambié a un liceo científico humanista, participé en algunas olimpiadas, ferias científicas y artísticas (combinando mis dos pasiones: la matemática y la música), y finalmente logré entrar a la carrera de licenciatura en matemáticas de la universidad de Chile, en nuestra facultad, de ahí no paré y terminé la licenciatura el año 2020 e ingresé al magíster en plena pandemia, durante el 2021 y este trabajo es el fruto de todo el esfuerzo que empezó en plena pandemia y por una persona, cuya motivación para dedicarse a la matemática se originó solo viendo el cálculo de soluciones para la ecuación cuadrática.

Agradecimientos

Este trabajo no pudo ser posible sin la ayuda importantísima de mi tutor, el profesor Gonzalo Robledo Veloso, quien fuese mi profesor en una enormidad de cursos, incluyendo cursos de primera año de licenciatura, como los primeros cursos de posgrado. Ha sido un apoyo importantísimo en mi desarrollo académico y estoy profundamente agradecido por eso. Muchísimas gracias por todo!

También quiero dar constancia del gran apoyo que me han dado mis padres, David Arsenio Urrutia Inostroza y Sara Angélica Vergara San Martin, mi hermana Yasna Noemí Tassara Vergara, su pareja Apolinario Venegas y sus hijos, quienes me dieron la vida, comida, techo, abrigo y sobretodo, una formación valórica muy sólida y una educación de muchísima calidad. Les agradezco la vida entera y los amo muchísimo.

Tampoco quiero dejar fuera a mis amigos y compañeros de universidad, tales como Joaquín Oyarzún (Jojó), Alejandro Zamorano (El Jano/Ale), Javier Pavez (El Chabi), Rebeca Huerta, Tomas Caviedes (Tomby), Fernanda Torres, y en especial, a mi actual pareja, Elba Francesca Baina Geraldo, la autora de los dibujos de este trabajo. El apoyo que me dio Elba y toda su familia ha sido fundamental en toda esta etapa y no puedo expresar más que gratitud con ella, su familia y con todos los que mencioné previamente. Sé que quedarán muchísimos compañeros fuera de esta lista, pero a aquellas personas les doy gracias por el apoyo, soporte y ayuda que me han brindado, ¡son grosos!

Adicionalmente, quiero agradecer el apoyo que me han dado algunos académicos del departamento de matemáticas: El profesor Juan Carlos Pozo Vera, al profesor Álvaro Patricio Castañeda Gonzalez, el siempre carismático Antonio Francisco Behn Von Schmieden (de la Pontificia Universidad Católica de Chile), entre otros, por su apoyo, consejos y grandes aportes dentro de mi formación académica. Muchas gracias!

Por último y no menos importante, quiero expresar mi gratitud por el apoyo, consejo y muchísimas alegrías que me han dado mis amigos y conocidos que están fuera de la universidad, tales como mi ex-profesor de guitarra clásica, el profesor Juan González, mi eterna profesora de cuarto básico y la profesora que me incluyó en muchísimas agrupaciones de música folclórica, la señora Norma Fernández Manso, mis amigos Yanara Urrutia Navarro (Mi "Hermana", la Negra) y Bastian Mejías Gijón, gracias por todo su enorme amistad, les estaré eternamente agradecidos por todo.

Este trabajo fue financiado por el proyecto regular FONDECYT 1210733.

Notaciones Utilizadas

Hemos elegido las siguientes notaciones:

Notaciones generales

- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales.
- $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{R}^n$ denota el espacio euclidiano de dimensión n.
- Dado $n, m \in \mathbb{N}$, el conjunto $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ denota el anillo de matrices de n filas y m columnas con coeficientes reales.
- $GL_n(\mathbb{R})$ denota el anillo de matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales que son invertibles.
- $||\cdot||$ denotará (de acuerdo al contexto) la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ o la norma matricial en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inducida por la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ donde $n \in \mathbb{R}$.
- $|\cdot|$ es el valor absoluto en $\mathbb{R}$.
- Denotaremos por $\mathbb{N}_n$ al conjunto de los primeros n números naturales $\{1, \ldots, n\}$.

Espacios de funciones

Dados $k \in \mathbb{N}$ y un par de conjuntos no vacíos $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ con $m, n \in \mathbb{N}$:

- $\mathscr{C}(A, B)$ es el conjunto de las funciones continuas $f\colon A \to B$.
- $\mathscr{C}^k(A, B)$ es el conjunto de las funciones $f \in \mathscr{C}(A, B)$ que son k–veces derivables y sus derivadas son continuas.
- Dados dos $\mathbb{R}$-espacios normados $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F)$, el conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ corresponde a las funciones lineales continuas $T : E \to F$
- $\mathscr{C}^\infty(A, B)$ es el conjunto de las funciones $f \in \mathscr{C}(A, B)$ donde $f \in \mathscr{C}^k(A, B)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- La notación $u = o(v)$ corresponde a la notación $o-$minúscula de Landau en x_0, es decir,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$$

Índice general

Introducción

Dados dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordianarias, se dice que son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo que intercambia soluciones de un sistema en el otro (junto a propiedades adicionales). En el caso de sistemas no autónomos, los primeros resultados fueron obtenidos en los trabajos pioneros de K. Palmer y A. Reinfelds en la década de los 70's. Sin embargo, el estudio y búsqueda de condiciones que aseguren la diferenciabilidad de dicha equivalencia topológica son relativamente recientes y su alcance es aún preliminar.

Considerando lo anterior, el objetivo de esta tesis es el estudio de la derivabilidad de la equivalencia topológica entre dos ecuaciones diferenciales ordinarias no autónomas, es decir, buscaremos condiciones suficientes para que la familia de homeomorfismos asociados a la equivalencia topológica entre ciertas EDO's no autónomas sean difeomorfismos de clase $\mathscr{C}^k$ con $k \in \mathbb{N}$. La organización de esta tesis será la siguiente:

En el Capítulo 1 se revisitarán los diversos conceptos de equivalencia topológica establecidos en la literatura y los resultados de equivalencia topológica obtenidos en el marco no autónomo. Estos resultados presentan distintos métodos para obtener dichas equivalencias topológicas, y se describirán las dos más usuales en la literatura: *La equivalencia topológica por medio de funciones de Green*, y *la equivalencia topológica por medio de funciones Crossing Time*. Este último enfoque fue abordado por Kenneth Palmer en 1979 (ver [**34**]) y Faxing Lin en el año 2007 (ver [**27**]). Por último, y aún más importante, se planterará el objetivo de la tesis.

En el Capítulo 2, se hará un estudio profundo del trabajo de Faxing Lin, quien obtiene la equivalencia topológica por medio de la funcion Crossing Time. Para ello, se estudiarán las propiedades de derivabilidad sobre la anteriormente mencionada función Crossing Time y sobre las funciones asociadas a la equivalencia topológica asociadas a dicho resultado para que sean funciones de clase $\mathscr{C}^1$, por ende, se estudiarán condiciones suficientes para que cada homeomorfismo asociado a la equivalencia topológica de Lin via crossing times sea un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^1$ que preserve orientación.

En el Capítulo 3, se hará un trabajo similar para la misma familia de homeomorfismos estudiada en el Capítulo 2, sin embargo, se estudiarán las propiedades de derivabilidad de orden superior sobre la función Crossing Time y sobre las funciones asociadas a la equivalencia topológica asociadas a dicho resultado para que estas funciones sean de clase $\mathscr{C}^k$ con $k > 1$, por ende, se estudiarán condiciones suficientes para que la familia de homeomorfismos asociado a la equivalencia topológica de Lin via crossing times sea una familia de difeomorfismos de clase $\mathscr{C}^k$ que preserve orientación donde $k > 1$.

En el Capítulo 4, se estudiarán condiciones de derivabilidad sobre el homeomorfismo de Palmer por medio de la función Crossing Time. Para ello, se estudiarán las propiedades de derivabilidad sobre la anteriormente mencionada función Crossing Time y sobre las funciones asociadas a la equivalencia topológica para que sean de clase $\mathscr{C}^k$ con $k \geq 1$, lo cual ayudará a estudiar condiciones suficientes para que el homeomorfismo asociado a la función de Palmer via crossing times sea un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^k$ donde $k \in \mathbb{N}$.

Por último, queremos señalar que existe una prepublicación [**37**] que contiene los resultados principales de este trabajo.

Capítulo 1

El problema de la derivabilidad de equivalencias topológicas

La suavidad de equivalencias topológicas o conjugaciones topológicas es un tópico clásico en los sistemas dinámicos autónomos y remitimos al lector a [**32**] para una completa revisión del estado del arte en dicho tema. Sin embargo, en el caso no autónomo, este problema es considerablemente menos estudiado que en el caso autónomo y los primeros resultados se remontan a la década pasada, siguiendo un enfoque diferente. Este trabajo se enmarca dentro del caso no autónomo, ya que nuestro objetivo es estudiar condiciones suficientes que aseguren la diferenciabilidad de equivalencias topológicas entre ciertas familias de ecuaciones diferenciales ordinarias no autónomas

$$x' = \mathcal{F}(t,x) \quad \text{para cada } t \in J \tag{1.1}$$

y

$$y' = \mathcal{G}(t,y) \quad \text{para cada } t \in J, \tag{1.2}$$

donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo no acotado superiormente, mientras que las funciones $\mathcal{F}, \mathcal{G} \colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son tales que la existencia y unicidad de soluciones en J son aseguradas. Adicionalmente, las respectivas soluciones de (1.1) y (1.2) con condiciones iniciales x_0 e y_0 en $t = \tau \in J$ serán denotadas por $t \mapsto x(t,\tau,x_0)$ e $t \mapsto y(t,\tau,y_0)$.

Los sistemas anteriores son J–topológicamente equivalentes cuando existe una familia de homeomorfismos parametrizados por J donde las imágenes de las soluciones de un sistema son soluciones del otro sistema y viceversa. Esta propiedad se describe formalmente como sigue:

Definición 1.1. [**39**] *Los sistemas (1.1) y (1.2) son J–topológicamente equivalentes si existe una función $H \colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que:*

i) *Para cada $\tau \in J$ fijo, $x_0 \mapsto H_\tau(x_0) := H(\tau, x_0)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, cuya inversa es denotada por $y_0 \mapsto G_\tau(y_0) := G(\tau, y_0)$.*

ii) *Si $t \mapsto x(t,\tau,x_0)$ es una solución de (1.1), entonces, $t \mapsto H(t, x(t,\tau,x_0))$ es una solución de (1.2). Similarmente, si $t \mapsto y(t,\tau,y_0)$ es una solución de (1.2), entonces, $t \mapsto G(t, y(t,\tau,y_0))$ es una solución de (1.1).*

iii) *Para todo $\tau \in J$ fijo, se verifican los límites*

$$||H(\tau,x_0)|| \to +\infty \text{ y } ||G(\tau,y_0)|| \to +\infty \text{ as } ||x_0||, ||y_0|| \to +\infty.$$

Desafortunadamente, no existe una definición de equivalencia topológica que sea universalmente aceptada, esto se debe a que las propiedades (i) y (ii) de la Definición 1.1 son usuales en la literatura mientras que (iii) suele ser sustituida por otro tipo de propiedades, lo cual induce algunas ciertas variaciones de la definición anterior las cuales serán mencionadas en las próximas subsecciones. De igual forma, sugerimos las referencias [**34**, p.12], [**36**, p.357] y [**39**] para mayores detalles.

La tarea de determinar condiciones suficientes que aseguren la propiedad de equivalencia topológica y su diferenciabilidad es relativamente reciente para el caso no autónomo. Existen diversos métodos de construcción para el homeomorfismo establecido en la Definición 1.1 y la sección 1 describirá los dos principales: el uso de la función de Green y el empleo de las funciones Crossing Time. La sección 2 profundizará la descripción del método de los Crossing Times, el cual fue abordado por Kenneth J. Palmer y Faxing Lin en [**34**] y [**27**], respectivamente, quienes estudiaron ciertas familias de sistemas uniformemente asintóticamente estables (1.1)–(1.2) para concluir que éstas son $\mathbb{R}-$topológicamente equivalentes. Por último, la sección 3 describirá el problema de la derivabilidad de las equivalencias topológicas, así como el objetivo de la presente tesis.

Para terminar, es importante destacar que, de acuerdo a nuestra revisión del estado del arte, no existen resultados de suavidad para el enfoque de las funciones Crossing Times en el contexto no autónomo, lo cual constituye la principal novedad de este trabajo.

1. El problema de la equivalencia topológica

El *problema de la equivalencia topológica* puede ser entendido como la búsqueda de condiciones suficientes sobre los campos vectoriales $\mathcal{F}(t,\cdot)$ y $\mathcal{G}(t,\cdot)$ tales que (1.1) y (1.2) sean J–topológicamente equivalentes. Consideraremos dos enfoques destacados para abordar este problema: la **propuesta de la función de Green** y la **propuesta de los crossing times**. Sin embargo, es importante enfatizar que no son las únicas.

1.1. La equivalencia topológica vía función de Green. El problema de la equivalencia topológica es estudiada para el caso particular de los sistemas (1.1)–(1.2), descritos por el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x \quad \text{para todo } t \in J, \tag{1.3}$$

y una familia de perturbaciones cuasilineales:

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y) \quad \text{para todo } t \in J, \tag{1.4}$$

es decir, $\mathcal{F}(t,x) = A(t)x$ y $\mathcal{G}(t,y) = A(t)y + f(t,y)$ con $J = \mathbb{R}$ o $J = [0,+\infty)$.

Una hipótesis crucial de esta propuesta es que el sistema lineal (1.3) tenga una propiedad de *dicotomía* en J, la cual se define a continuación:

Definición 1.2. *El sistema (1.3) tiene una dicotomía en J si se satisface la existencia de un proyector $t \mapsto P(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, constantes positivas K,α y dos funciones $h,\mu\colon J \to [1,+\infty)$ continuas, crecientes y no acotadas, verificando $\mu = o(h^{\alpha})$ tales que cualquier matriz fundamental $t \mapsto \Phi(t)$ de (1.3) verifique las siguientes propiedades*

$$P(t)\Phi(t,s) = \Phi(t,s)P(s) \quad \text{para cualquier } t,s \in J$$

y

$$\begin{cases} ||\Phi(t,s)P(s)|| & \leq & K\mu(|s|)\left(\frac{h(t)}{h(s)}\right)^{-\alpha} & \text{para todo } t \geq s \text{ con } t,s \in J \\ \\ ||\Phi(t,s)Q(s)|| & \leq & K\mu(|s|)\left(\frac{h(s)}{h(t)}\right)^{-\alpha} & \text{para todo } s \geq t \text{ con } t,s \in J, \end{cases}$$

donde $\Phi(t,s) := \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ y $Q(t) = I - P(t)$.

La siguiente tabla describe algunos casos particulares de la propiedad de dicotomía para el sistema lineal (1.3):

Nombre	$h(t)$	$\mu(\|t\|)$	Referencia
Exponencial Uniforme	e^t	1	[**12, 24, 28**]
Exponencial No Uniforme	e^t	$e^{\varepsilon\|t\|}$ con $0 \leq \varepsilon < \alpha$	[**3, 10**]
Polinomial	t	1	[**14**]
$h-$Dicotomía	genérica	1	[**31, 35**]

Por otro lado, sugerimos al lector revisar la Tabla 1 de [**42**] y las referencias en su interior para un mayor detalle.

Con la finalidad de contextualizar la propiedad de dicotomía, es importante notar que toda solución no trivial $t \mapsto x(t,\tau,x_0) = \Phi(t,\tau)x_0$ de (1.3) puede ser escrita como sigue

$$x(t,\tau,x_0) = \underbrace{\Phi(t,\tau)P(\tau)x_0}_{=x^+(t,\tau,x_0)} + \underbrace{\Phi(t,\tau)Q(\tau)x_0}_{=x^-(t,\tau,x_0)}. \tag{1.5}$$

Un ejercicio sencillo, pero técnico, consiste en verificar que las funciones descritas arriba, a saber, $t \mapsto x^+(t,\tau,x_0) := x^+(t)$ y $t \mapsto x^-(t,\tau,x_0) := x^-(t)$, satisfacen las siguientes estimaciones para $t \geq \tau$:

$$||x^+(t)|| \leq K||P(\tau)x_0||\mu(|\tau|)\left(\frac{h(t)}{h(\tau)}\right)^{-\alpha} \quad \text{y} \quad \left(\frac{h(t)}{h(\tau)}\right)^{\alpha}\frac{||Q(\tau)x_0||}{K\mu(|t|)} \leq ||x^-(t)||.$$

Usando las propiedades de $\mu(\cdot)$, $h(\cdot)$ y $\alpha > 0$ previamente mencionadas, se puede deducir fácilmente que

$$\lim_{t\to+\infty}|x^+(t)| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to+\infty}|x^-(t)| = +\infty.$$

Es decir, $t \mapsto x^+(t)$ es una *contracción* en tiempo futuro mientras que $t \mapsto x^-(t)$ es una *expansión* en el futuro. Por lo tanto, la descomposición descrita en (1.5) tiene un comportamiento asintótico *dicotómico*, lo cual motiva el uso del nombre dicotomía para describir la propiedad de la definición previamente establecida y la tabla anterior describe algunas contracciones y expansiones específicas.

La función de Green asociada a la propiedad de dicotomía previamente mencionada es

$$\mathcal{G}(t,s) = \begin{cases} \Phi(t,s)P(s) & \text{si} \quad t \geq s \\ -\Phi(t,s)Q(s) & \text{si} \quad t < s, \end{cases}$$

y permite una construcción explícita de los homeomorfismos H_t y sus inversas G_t mencionadas en la Definición 1.1.

El primer homeomorfismo vía función de Green fue establecido por K.J. Palmer [**33**], el cual se construyó bajo la hipótesis de que (1.3) tiene una dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$, la función f es uniformemente acotada en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $x \mapsto f(t,x)$ es uniformemente Lipschitz para todo $t \in \mathbb{R}$. La variante de equivalencia topológica que define Palmer es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.3. [**33**, p.754] *Se dice que los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (1.1) y (1.2) son* ***topológicamente equivalentes*** *en* $\mathbb{R}$ *si se verifica la existencia de una función* $H\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *que satisface las siguientes condiciones:*

(a) *La función* $(t,x) \mapsto x - H(t,x)$ *es acotada en* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

(b) *Para todo* $t \in \mathbb{R}$ *fijo,* $H_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definida por* $H_t(x) = H(t,x)$ *es un homeomorfismo.*
(c) *La función* $G \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, definida por* $G(t,x) := (H_t)^{-1}(x)$ *satisface la propiedad (a),*
(d) *Se satisface que* $t \mapsto H(t,x(t))$ *es una solución de (1.2) cuando* $t \mapsto x(t)$ *es solución de (1.1).*
(e) *Si* $t \mapsto y(t)$ *es solución de (1.2), entonces* $t \mapsto G(t,y(t))$ *es una solución de (1.1).*

La equivalencia topológica entre (1.1) y (1.2) se denota como (1.1)∼(1.2) y la función H *se llama función de equivalencia topológica.*

Como se mencionó al principio del capítulo, la definición de equivalencia topológica no es universalmente aceptada en la literatura y la Definición 1.3 es un ejemplo de ello, en efecto, la propiedad (i) de la Definición 1.1 se ve reflejada en la propiedad (b) de la Definición 1.3. Por otro lado, las propiedades (d) y (e) de la Definición 1.3 coinciden con la propiedad (ii) de la Definición 1.1. Sin embargo, la propiedad (iii) de la Definición 1.1 es sustituida por las propiedades (a) y (c) en la Definición 1.3.

El resultado de [**33**] se describe como sigue:

Proposición 1.1. [**33**, p.754] *Suponga que los sistemas (1.3)–(1.4) son tales que* $A \colon \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es continua y acotada en* $\mathbb{R}$ *y* $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es una función que satisface las siguiente propiedades:*

i) *Existe* $L > 0$ *tal que* $||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.
ii) *Existe* $\mu > 0$ *tal que* $||f(t,x)|| \leq \mu$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$.

Si el sistema lineal (1.3) tiene una dicotomía exponencial en $\mathbb{R}$ *y sus constantes* K *y* α *satisfacen*

$$L < \frac{K}{4\alpha},$$

entonces los sistemas (1.3) y (1.4) son topológicamente equivalentes según la Definición 1.3.

La primera mejora del resultado de Palmer fue hecho por J. Shi and K. Xiong en [**39**], quienes demostraron que $\xi \mapsto H_t(\xi)$ y $\xi \mapsto G_t(\xi)$ son uniformemente continuas respecto a t sin requerir hipótesis adicionales.

A partir los resultados obtenidos en [**33, 39**], ha surgido una vasta y creciente literatura dedicada al problema de equivalencia topológica basada en la función de Green. En general, el problema suele ser abordado considerando dicotomías más generales que la exponencial, pero es necesario imponer hipótesis más restrictivas sobre la perturbación no lineal f. En este contexto, se destaca el trabajo realizado por Luis Barreira y Claudia Valls [**2**], quienes consideran la hipótesis de que (1.3) posee una dicotomía exponencial no uniforme en $\mathbb{R}$, es decir, $h(t) = e^t$ y $\mu(|t|) = e^{\varepsilon|t|}$. Otro ejemplo destacado es el trabajo realizado por Liangping Jiang en [**23**] el cual considera una dicotomía exponencial generalizada en $\mathbb{R}$, es decir, $h(t) = e^{\int_0^t a(r)\,dr}$ con $t \mapsto a(t)$ continua y no negativa en $\mathbb{R}$ la cual verifica los límites

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{\tau}^{t} a(r)\,dr = \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{\tau} a(r)\,dr = +\infty \quad \text{para cada } \tau \in \mathbb{R},$$

y $\mu(t) = \alpha = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por último destacamos el amplio y enciclopédico trabajo de generalización llevado a cabo por A. Reinfelds y D. Steinberga en [**36**].

2. La equivalencia topológica via crossing time.

De acuerdo a nuestra revisión del estado del arte, este enfoque del problema ha sido desarrollado por Kenneth J. Palmer en [**34**] y posteriormente por Faxing Lin en [**27**]. En estos dos trabajos se plantean condiciones necesarias para que los sistemas (1.1) y (1.2) verifiquen las siguientes propiedades:

(CT1) El origen es un equilibrio de los sistemas (1.1) y (1.2), es decir,

$$\mathcal{G}(t,0) = \mathcal{F}(t,0) = 0 \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

(CT2) Existe $L > 0$ tal que

$$||\mathcal{F}(t,x_1) - \mathcal{F}(t,x_2)|| \leq L||x_1 - x_2|| \quad \text{y} \quad ||\mathcal{G}(t,x_1) - \mathcal{G}(t,x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||,$$

para cada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y cada $t \in \mathbb{R}$. Es decir, tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{G}$ son Lipschitzianas en la segunda coordenada con la misma constante de Lipschitz para todo $t \in \mathbb{R}$.

(CT3) El origen es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable y los sistemas (1.1) y (1.2) tienen asociados una misma función de Lyapunov $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

La propiedad **(CT3)** amerita un comentario: como el origen es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable de ambos sistemas, la definición formal de estabilidad uniforme asintótica, descrita en [**20**, Sec.4.5], establece que para toda solución $t \mapsto x(t,t_0,x_0)$ ya sea de (1.1) o de (1.2), existe una cota funcional del tipo

$$||x(t,t_0,x_0)|| \leq \beta(||x_0||, t - t_0) \quad \text{para todo } t \geq t_0, \tag{1.6}$$

donde $\beta\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función de tipo $\mathcal{KL}$, es decir, a) $v \mapsto \beta(u,v)$ es continua, no creciente y verifica $\lim\limits_{v \to +\infty} \beta(u,v) = 0$ para todo $u \geq 0$, b) $u \mapsto \beta(u,v)$ es continua, no decreciente y verifica $\beta(0,v) = 0$ para todo $v \geq 0$. Para mas detalles sobre estas funciones, referimos al lector a [**20**, Sec.4.4] y [**21**].

Por otro lado, los resultados conversos de estabilidad uniforme asintótica [**20**, Th.4.9] y [**38**, Ch.1] indican que la desigualdad (1.6) implica la existencia de funciones de Lyapunov asociadas a los sistemas respectivos. En ese contexto, **(CT3)** es una condición muy fuerte, ya que exige que las funciones de Lyapunov antes mencionadas deben ser las mismas.

Considerando estas condiciones, Palmer en [**34**] y Lin en [**27**] demuestran que los sistemas (1.1) y (1.2) son topológicamente equivalentes por medio de las funciones H y G definidas por

$$H(\tau,\xi) = \begin{cases} y(\tau, T(\tau,\xi), x(T(x,\tau),\tau,\xi)) & \xi \neq 0 \\ 0 & \xi = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

y

$$G(\tau,\xi) = \begin{cases} x(\tau, S(\tau,\xi), y(S(x,\tau),\tau,\xi)) & \xi \neq 0 \\ 0 & \xi = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

donde para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $S = S(\tau,\xi)$ y $T = T(\tau,\xi)$ son los únicos tiempos tales que las soluciones de (1.1) y (1.2) verifican

$$V(T, x(T,\tau,\xi)) = V(S, y(S,\tau,\xi)) = 1,$$

y estos tiempos T y S se denominan como **Tiempos de Cruce** o **Crossing times**.

Es importante enfatizar que la literatura dedicada a los homeomorfismos construídos gracias a los crossing times es considerablemente menor en comparación a los homeomorfismos que usaron la función de Green. Esto se debe a que la equivalencia topológica via funciones de Green es un tópico interesante en sí mismo mientras que el problema de la equivalencia topológica obtenida por los crossing times ha sido usada como una herramienta técnica para resultados más generales. Por ejemplo, Palmer [**34**] usa la propuesta de los crossing time para relacionar la equivalencia topológica con la propiedad de dicotomía exponencial, mientras que Faxing Lin [**27**] utiliza este resultado para obtener resultados de equivalencia topológica en una familia más general de sistemas que pueden ser reducidas a ecuaciones más simples. En la siguientes subsecciones entraremos en un mayor detalle de como se aborda la propuesta de los crossing times.

2.1. El trabajo de K.J. Palmer (1979). En el trabajo [**34**] de Kenneth J. Palmer, el problema de equivalencia topológica es considerada para los sistemas (1.1)-(1.2), donde las funciones $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{G}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfacen las siguientes propiedades:

(P1) El origen es un equilibrio de los sistemas (1.1) y (1.2), es decir,
$$\mathcal{F}(t,0)=\mathcal{G}(t,0)=0 \quad \text{para todo } t\in\mathbb{R},$$

(P2) Existe $L>0$ tal que, para cualquier $t\in\mathbb{R}$ y cualesquiera $x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$,
$$||\mathcal{F}(t,x)-\mathcal{F}(t,\tilde{x})||\leq L||x-\tilde{x}|| \quad \text{and} \quad ||\mathcal{G}(t,x)-\mathcal{G}(t,\tilde{x})||\leq L||x-\tilde{x}||.$$

(P3) Existe una función continua $V\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y constantes positivas C_1, C_2 y β tales que
$$C_2||x||^\beta \leq V(t,x)\leq C_1||x||^\beta \quad \text{para todo } t\in\mathbb{R} \text{ y } x\in\mathbb{R}^n.$$

(P4) Existe $\eta>0$ tal que cualquier solución $t\mapsto\phi(t)$ ya sea de (1.1) o de (1.2) verifica
$$DV_-(t,\phi(t)) := \liminf_{h\to 0^+}\frac{V(t,\phi(t))-V(t-h,\phi(t-h))}{h}\leq -\eta||\phi(t)||^\beta.$$

Las propiedades **(P3)** y **(P4)** son consistentes con **(CT3)**, pues, definen a V como una función de Lyapunov para los sistemas (1.1) y (1.2). Más aún, las propiedades **(P3)** y **(P4)** implican que origen es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable de (1.1) y (1.2), cuyo resultado se enuncia a continuación:

LEMA 1.1. *Si existe una función $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que verifica las hipótesis* ***(P3)*** *y además, existen constantes $\beta, \eta, > 0$ tales que cualquier solución $t \mapsto \phi(t)$ del sistema (1.1) verifica la propiedad*

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{V(t,\phi(t)) - V(t-h,\phi(t-h))}{h} \leq -\eta||\phi(t)||^{\beta}.$$

entonces, para cualquier solución $t \mapsto x(t)$ de (1.1) se verifica

$$V(t,x(t)) \leq V(s,x(s))e^{-\frac{\eta}{C_1}(t-s)} \quad \textit{para cada } t \geq s. \tag{1.9}$$

En particular, se tiene que $t \mapsto V(t,x(t))$ es estrictamente decreciente y se verifican los siguientes límites

$$\lim_{t\to+\infty} V(t,x(t)) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to-\infty} V(t,x(t)) = +\infty.$$

Más aún, si $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función que verifica las hipótesis ***(P3)*** *y* ***(P4)****, cualquier solución $t \mapsto x(t)$ de (1.1) o de (1.2) verifica la desigualdad (1.9), que $t \mapsto V(t,x(t))$ es estrictamente decreciente y los límites descritos arriba.*

DEMOSTRACIÓN. Revisar la sección 1 del Apéndice B para un breve bosquejo de la demostración. □

OBSERVACIÓN 1.1. *Notemos que si $t \mapsto \gamma(t)$ es solución de (1.1) o de (1.2), se verifica que $t \mapsto V(t,\gamma(t))$ es inyectiva, en efecto, si $t \neq s$, entonces, al suponer que $t < s$, se tiene que $V(s,\gamma(s)) < V(t,\gamma(t))$ por ser $t \mapsto V(t,\gamma(t))$ decreciente. Análogamente, si se verifica $s < t$, se satisface que $V(t,\gamma(t)) < V(s,\gamma(s))$. Entonces, $V(t,\gamma(t)) \neq V(s,\gamma(s))$ cuando $t \neq s$.*

Con esto, ya tenemos las herramientas necesarias para enunciar el resultado obtenido por Kenneth J. Palmer:

LEMA 1.2. [**34**, Lema, p.11] *Suponga que $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son continuas verificando* **(P1)–(P4)***, entonces, tenemos que los sistemas (1.1) y (1.2) son $\mathbb{R}-$topológicamente equivalentes según la Definición 1.1 con H y G definidas en las ecuaciones (1.7) y (1.8).*

Más aún, las funciones H y G satisfacen las siguientes propiedades:

(i) *Para todo $t \in \mathbb{R}$, se verifican las estimaciones*

$$||H(t,x)|| \leq C_2^{-\frac{1}{\beta}} C_1^{\frac{\eta}{LC_1\beta^2}} ||x||^{\frac{\eta}{LC_1\beta}} \quad \textit{si} \quad ||x|| \leq C_1^{-\frac{1}{\beta}}$$

y

$$||H(t,x)|| \geq C_1^{-\frac{1}{\beta}} C_2^{\frac{\eta}{LC_1\beta^2}} ||x||^{\frac{\eta}{LC_1\beta}} \quad \textit{si} \quad ||x|| \geq C_2^{-\frac{1}{\beta}},$$

donde C_1 y C_2 están establecidas en **(P3)***.*

(ii) *La función $G : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $G(t,x) = H_t^{-1}(x)$ verifica (i).*

DEMOSTRACIÓN. Revisar la sección 2 del Apéndice B para leer un pequeño bosquejo de la demostración. □

2.2. El trabajo de Faxing Lin (2007). En [**27**], Lin obtiene un resultado de equivalencia topológica entre el sistema lineal autónomo

$$\dot{y} = -\frac{\delta}{2}Iy, \tag{1.10}$$

y el sistema cuasilineal

$$\dot{x} = C(t)x + B(t)x + g(t,x) \tag{1.11}$$

donde $\delta > 0$ e $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la identidad, mientras que $C, B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ son funciones continuas que verifican las siguientes propiedades:

(L1) Las funciones $t \mapsto B(t)$ y $t \mapsto C(t)$ son acotadas. En particular, $t \mapsto C(t)$ es diagonal, es decir, C es de la forma $C(t) = \operatorname{diag}\{C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, se verifican las estimaciones:

$$C_i(t) \leq -\delta \quad \text{y} \quad ||B(t)|| < \frac{\delta}{4} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, i \in \{1,\dots,n\}. \tag{1.12}$$

(L2) La función $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $g(t,0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y satisface la propiedad

$$||g(t,x_1) - g(t,x_2)|| \leq \frac{\delta}{4}||x_1 - x_2|| \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Notemos que estas propiedades implican **(CT1)**–**(CT3)**. Sin embargo, mientras que **(CT1)** y **(CT2)** se obtienen de manera directa de **(L1)** y **(L2)**, la propiedad **(CT3)** se obtiene gracias al siguiente resultado, el cual está basado en una lectura cuidadosa de [**27**, Prop.7, p.41] y nos permite deducir que los sistemas (1.10) y (1.11) tienen la misma función de Lyapunov, a saber, $(t,x) \mapsto V(t,x) := ||x||^2$.

Proposición 1.2. *Sea $C : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función definida por*

$$C(t) = \operatorname{diag}\{C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)\},$$

donde cada $t \mapsto C_i(t)$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$. Sea $B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función continua en $\mathbb{R}$. Supongamos que las funciones B y C verifican las condiciones descritas en **(L1)** *mientras que $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verifica la propiedad* **(L2)** *entonces, dado $\xi \neq 0$, la única solución $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ de (1.11) que verifica $x(\tau,\tau,\xi) = \xi$ satisface la desigualdad*

$$||x(t,\tau,\xi)||^2 \leq ||x(s,\tau,\xi)||^2 \exp(-\delta(t-s)), \quad (t \geq s). \tag{1.14}$$

Lo cual implica que $t \mapsto ||x(t,\tau,\xi)||^2$ es estrictamente decreciente y tiende a cero cuando $t \to +\infty$ y además diverge cuando $t \to -\infty$.

Demostración. Sean $\mathcal{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\mathcal{F}(t,\xi) = C(t)\xi + B(t)\xi + g(t,\xi),$$

donde $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la identidad mientras que $C, B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ son matrices acotadas que verifican la propiedad **(L1)** mientras que g verifica **(L2)**. De este modo, se tiene que

$$\mathcal{F}(t,0) = C(t)0 + B(t)0 + g(t,0) = 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Si definimos $L = \frac{\delta}{2} + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} ||C(t)||$, se verifica

$$||\mathcal{F}(t,\xi_1) - \mathcal{F}(t,\xi_2)|| \leq L||\xi_1 - \xi_2||$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, al calcular la derivada de $t \mapsto ||x(t,\tau,\xi)||^2$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(||x(t,\tau,\xi)||^2) &= \frac{d}{dt}(x^T(t,\tau,\xi)\cdot x(t,\tau,\xi)) \\
&= 2x^T(t,\tau,\xi)C(t)x(t,\tau,\xi) + x^T(t,\tau,\xi)(B^T(t)+B(t))x(t,\tau,\xi) \\
&\quad + g^T(t,x(t,\tau,\xi))\cdot x(t,\tau,\xi) + x^T(t,\tau,\xi)\cdot g(t,x(t,\tau,\xi)) \\
&\leq -2\delta||x^T(t,\tau,\xi)||^2 + \frac{\delta}{2}||x^T(t,\tau,\xi)||^2 + \frac{\delta}{2}||x(t,\tau,\xi)||^2 \\
&= -\delta||x(t,\tau,\xi)||^2,
\end{aligned}$$

donde se usa que $||B(t)|| = ||B^T(t)||$ pues se está trabajando con la norma euclidiana. Por otro lado, la última estimación se debe a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, por (1.11) y (1.12). Entonces, resumiendo todo lo anterior:

$$\frac{d(||x(t,\tau,\xi)||^2)}{dt} \leq -\delta||x(t,\tau,\xi)||^2. \tag{1.15}$$

Luego, se verifican las hipótesis del Lema 1.1 lo cual implica lo siguiente

$$||x(t,\tau,\xi)||^2 \quad \leq \quad ||x(s,\tau,\xi)||^2 \exp(-\delta(t-s)) \quad \text{para } s \leq t,$$

y así hemos demostrado la desigualdad (1.14). Más aún, tenemos que $t \mapsto ||x(t,\tau,\xi)||^2$ es decreciente y verifica los límites

$$\lim_{t\to+\infty} ||x(t,\tau,\xi)||^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to-\infty} ||x(t,\tau,\xi)||^2 = +\infty,$$

concluyendo la demostración. □

Observación 1.2. *Gracias a la Proposición 1.2, se afirma que para cualquier* $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$*, la función* $t \mapsto ||x(t,\tau,\xi)||^2$ *es inyectiva en* $\mathbb{R}$*, en efecto, supongamos que* $t, s \in \mathbb{R}$ *tales que* $t > s$*. Se verifica que* $\exp(-\delta(t-s)) < 1$ *y por ende*

$$||x(t,\tau,\xi)||^2 \leq ||x(s,\tau,\xi)||^2 \exp(-\delta(t-s)) < ||x(s,\tau,\xi)||^2,$$

y un argumento análogo a este, uno obtiene que

$$||x(s,\tau,\xi)||^2 < ||x(t,\tau,\xi)||^2 \quad \text{para cualquier } t, s \in \mathbb{R} \text{ tal que } t < s,$$

es decir, se verifica que $||x(t,\tau,\xi)||^2 \neq ||x(s,\tau,\xi)||^2$ *y se concluye que la función* $t \mapsto ||x(t,\tau,\xi)||^2$ *es inyectiva en* $\mathbb{R}$.

Observación 1.3. *Notemos que en el cálculo de la derivada de* $t \mapsto ||x(t,\tau,\xi)||^2$*, obtenemos la siguiente estimación:*

$$\frac{d(||x(t,\tau,\xi)||^2)}{dt} \leq -\delta||x(t,\tau,\xi)||^2,$$

la cual será una herramienta crucial en los capítulos 2 y 3 de este trabajo.

De la observación 1.3, notemos que el trabajo realizado por Lin para los sistemas (1.11) y (1.10) puede verse como ejemplo de lo realizado por Palmer en [**34**] con (1.1) y (1.2), en efecto, las funciones $\mathcal{F}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{G}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\mathcal{F}(t,x) = C(t)x + B(t)x + g(t,x) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}(t,y) = -\frac{\delta}{2}Iy$$

satisfacen las siguientes propiedades:

• Tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{G}$ satisfacen

$$\mathcal{F}(t,0) = \mathcal{G}(t,0) = 0 \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

por ende, la propiedad **(P1)** se verifica inmediatamente.

• Sean $M = \sup_{t\in\mathbb{R}} ||C(t)||$ y $L_0 = M + \frac{\delta}{2}$.

$$||\mathcal{F}(t,\xi_1) - \mathcal{F}(t,\xi_2)|| \leq L_0||\xi_1 - \xi_2|| \quad \text{y} \quad ||\mathcal{G}(t,\xi_1) - \mathcal{G}(t,\xi_2)|| \leq L_0||\xi_1 - \xi_2||$$

para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Lo cual implica que la propiedad **(P2)** también se cumple con $L = L_0$.

• La función $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $V(t,\xi) = ||\xi||^2$ verifica trivialmente la propiedad **(P3)** al considerar $C_1 = C_2 = 1$ y $\beta = 2$.

• Por último, la observación 1.3 junto con el hecho de que cualquier solución $t \mapsto y(t,\tau,\xi)$ de (1.10) satisface

$$y(t,\tau,\xi) = e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)}\xi,$$

implican la propiedad **(P4)** considerando $\eta = \delta > 0$. Las cuales son consistentes con las propiedades **(CT1)**–**(CT3)** detalladas al inicio de esta sección.

Como hemos dicho, si bien el trabajo de F. Lin solo es un caso particular de lo considerado por K.J. Palmer, debemos destacar en que consiste un caso explícito donde ambos sistemas tienen la misma función de Lyapunov.

Ahora, consideraremos la definición de equivalencia topológica considerada por Lin:

Definición 1.4 (Equivalencia Topológica). [**26**, Def. 1] *Se dice que los sistemas (1.1) y (1.2) son* ***topológicamente equivalentes*** *si se verifica la existencia una función $H \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes condiciones:*

(ET1) *$H(t,x) \to H(t,x_0)$ cuando $x \to x_0$ y $||H(t,x)|| \to +\infty$ si $||x|| \to +\infty$ uniformemente con respecto a t,*
(ET2) *$H_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $H_t(x) = H(t,x)$ es un homeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$ fijo,*
(ET3) *$G \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $G(t,x) := H_t^{-1}(x)$ satisface* **(ET1)***,*
(ET4) *La función $t \mapsto H(t,x(t))$ es una solución de (1.2) cuando $t \mapsto x(t)$ es solución de (1.1) y por último,*
(ET5) *La función $t \mapsto G(t,y(t))$ es una solución de (1.1) cuando $t \mapsto y(t)$ es solución de (1.2).*

La equivalencia topológica entre (1.1) y (1.2) se denota como (1.1)∼(1.2) y la función H se llama función de equivalencia topológica.

Similarmente a la Definición 1.3, la definición precedente tiene ciertas similitudes y diferencias con la Definición 1.1, en efecto, la propiedad (i) de la definición 1.1 es consistente con la propiedad **(ET2)** de la Definición 1.4. Por otro lado, las propiedades **(ET4)** y **(ET5)** de la Definición 1.4 coinciden con la propiedad (ii) de la Definición 1.1. Sin embargo, la propiedad (iii) de la Definición 1.1 se reemplaza por las propiedades **(ET1)** y **(ET3)** en la Definición 1.4.

Para finalizar esta sección, enunciaremos una reformulación del resultado de Lin obtenido en el Lema 1 de [**27**].

PROPOSICIÓN 1.3. *Si los sistemas (1.10)–(1.11) verifican las propiedades* **(L1)** *y* **(L2)**, *entonces, (1.10)–(1.11) son $\mathbb{R}$–topológicamente equivalentes con H y G definidos por:*

$$H(\tau,\xi_0)=\begin{cases} x(T(\tau,\xi_0),\tau,\xi_0)e^{-\frac{\delta}{2}(\tau-T(\tau,\xi_0))} & \xi_0\neq 0\\ 0 & \xi_0=0,\end{cases} \tag{1.16}$$

y

$$G(\tau,\xi_0)=\begin{cases} x(\tau,S(\tau,\xi_0),e^{-\frac{\delta}{2}(S(\tau,\xi_0)-\tau)}\xi_0) & \xi_0\neq 0\\ 0 & \xi_0=0,\end{cases} \tag{1.17}$$

donde $T:=T(\tau,\xi_0)$ y $S:=S(\tau,\xi_0)$ son los únicos tiempos tales que las normas euclideanas de sus soluciones verifican

$$||x(T,\tau,x_0)||^2=||y(S,\tau,y_0)||^2=1. \tag{1.18}$$

DEMOSTRACIÓN. Revisar la sección 3 del Apéndice B. □

OBSERVACIÓN 1.4. *Si $x_0,y_0\neq 0$, la identidad $y(t,t_0,y_0)=e^{-\frac{\delta}{2}(t-t_0)}y_0$ implica que $H(\tau,x_0)$ y $G(\tau,y_0)$ tengan la siguiente caracterización alternativa:*

$$H(\tau,x_0)=y(\tau,T(\tau,x_0),x(T(\tau,x_0),\tau,x_0))$$

y

$$G(\tau,y_0)=x(\tau,S(\tau,y_0),y(S(\tau,y_0),\tau,y_0))$$

los cuales coinciden con (1.7)–(1.8) y también implican las identidades

$$y(T(\tau,x_0),\tau,H(\tau,x_0))=x(T(\tau,x_0),\tau,x_0)$$

y

$$x(S(\tau,y_0),\tau,G(\tau,y_0))=y(S(\tau,y_0),\tau,y_0).$$

Las figuras 1, 2 y 3 permitirán ilustrar la construcción los homeomorfismos H y G. En efecto, si consideramos una condición inicial ξ en el exterior de la esfera unitaria, la Figura 1 ilustra las soluciones de $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ (izquierda) y $t\mapsto y(t,\tau,\xi)$, la cuales convergen asintóticamente al origen e intersectan a la esfera unitaria en los tiempos $T(\tau,\xi)$ y $S(\tau,\xi)$ respectivamente. Es decir

$$||x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2=1 \quad \text{y} \quad ||y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2=1$$

La Figura 2 considera la función identidad $Id\colon S^{n-1}\to S^{n-1}$ aplicada al vector $x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)$. Luego, se grafica la solución $t\mapsto y(t,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))$ de la ecuación diferencial (1.10) con condición inicial $x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)$ en $t=T(\tau,\xi)$ y se grafica su evolución (en tiempo reverso) en el intervalo $[\tau,T(\tau,\xi)]$. En particular, se tiene que $y(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))$, lo cual corresponde a $H(\tau,\xi)$.

Finalmente, la Figura 3 representa una construcción análoga para la función $G(\tau,\xi)$.

OBSERVACIÓN 1.5. *H no es un homeomorfismo porque, dado que la dimensión del dominio no coincide con la del codominio, H no puede ser biyectiva. Sin embargo, podemos construir una familia de homeomorfismos a partir de dicha función fijando variable temporal. Es decir, recordemos que para cada $\tau\in\mathbb{R}$ fijo, la función $H_\tau:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definida por $H_\tau(\xi)=H(\tau,\xi)$ es un homeomorfismo. Ésto motiva la siguiente definición:*

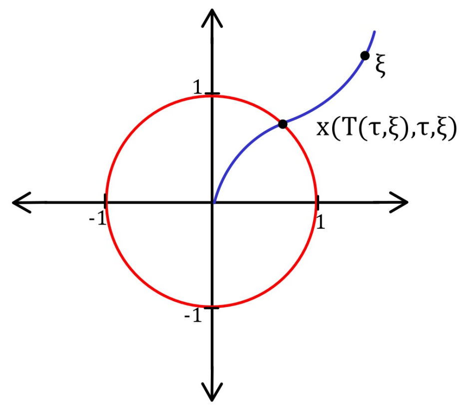

FIGURA 1. Izq: Comportamiendo del Crossing time T asociado a (1.11). Der.: Comportamiendo del Crossing time S asociado a (1.10)

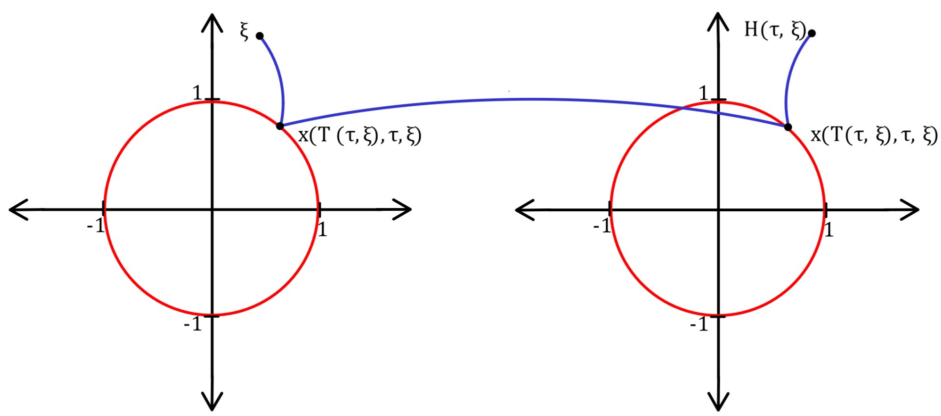

FIGURA 2. La línea azul describe el comportamiento de $(\tau, \xi) \mapsto H(\tau, \xi)$, tal que $(\tau, \xi) \mapsto x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)$ y posteriormente la multiplica por la exponencial descrita en la función H.

DEFINICIÓN 1.5. *Para $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, consideremos $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ la solución de (1.11) con condición inicial ξ en tiempo $t = \tau$. La función $H_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$H_\tau(\xi) = H(\tau, \xi) = \begin{cases} e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)} x(T(\tau, \xi), \tau, \xi) & \text{para } \xi \neq 0 \\ \\ 0 & \text{para } \xi = 0, \end{cases}$$

se conoce como el ***Homeomorfismo de Lin.***

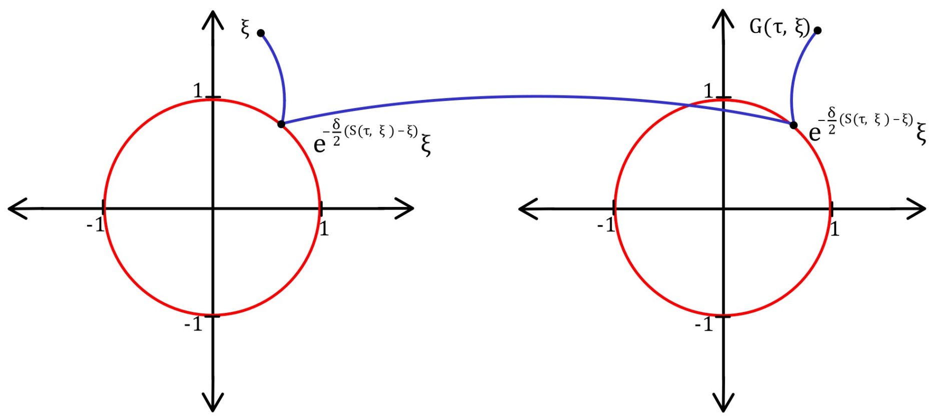

FIGURA 3. Esta figura es idéntica a la anterior, pero con la función $(\tau,\xi)\mapsto G(\tau,\xi)$.

3. La equivalencia topológica, sus propiedades de suavidad y la novedad de este trabajo

Mientras que el problema de equivalencia topológica empezó a desarrollarse en la década de 1970 en el marco no autónomo, el estudio de las propiedades de derivabilidad sobre las funciones H_t y G_t de la Definición 1.1 se inició en la decada de 2010 y en consecuencia, es considerablemente menos estudiado.

De acuerdo a nuestra revisión bibliográfica, los primeros resultados de suavidad sobre las funciones H_t y G_t son basadas en la función de Green, las cuales se han obtenido en el caso contractivo en [**6, 7, 8, 9**] y también han sido usadas para el caso contractivo/expansivo en [**19**] bajo hipótesis fuertes sobre la perturbación cuasilineal. En este marco, es importante subrayar que recientemente se han obtenido resultados menos restrictivos en el caso contractivo/expansivo por Cuong *et al.* y Dragicevic *et al.* donde ambos casos se inspiraron en las ideas abordadas por Stenberg considerando condiciones de resonancias en términos del espectro asociado a la dicotomía exponencial [**13**] y a la dicotomía exponencial no uniforme [**15, 16**]. En este contexto, también destacamos las notables contribuciones realizadas por Backes & Dragicevic en [**1**], Barreira & Valls en [**4**] y Lu *et al.* en [**29**].

Sorprendentemente y hasta lo que se sabe, no hay estudios de propiedades de suavidad para los homeomorfismos H_t y G_t que consideren la propuesta de los crossing time y este trabajo puede ser visto como una contribución en este tema.

Capítulo 2

Diferenciabilidad del Homeomorfismo de Lin y su inversa

Como se vio en el capítulo anterior, se define la función Crossing Time para el sistema (1.11) como una función $T : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, la cual verifica la igualdad

$$||x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2 = 1 \quad \text{para todo } (\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

La estabilidad asintótica uniforme de (1.11), descrita en la Proposición 1.2, jugará un rol clave en la demostración de la existencia y unicidad de $T(\tau,\xi)$.

En la primera parte de este capítulo, se demostrará la anteriormente mencionada existencia y unicidad de la función crossing time con mayores detalles, cuya estrategia de demostración será aplicar la estabilidad asintótica uniforme de (1.11) combinada con el Teorema de los valores intermedios [**41**, Teo 1, Cap 7].

En la segunda parte de este capítulo, demostraremos que la función H, descrita en la ecuación (1.16), es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n)$. Para ello, demostraremos que la función crossing time es derivable en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Adicionalmente, utilizaremos éste y otros resultados con el objetivo de demostrar que la función H es continuamente diferenciable, lo cual implicará que cada homeomorfismo de Lin $H_\tau = H(\tau,\cdot)$ definido en (1.16) también sea continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sin embargo, esto requerirá agregar hipótesis adicionales de regularidad sobre el sistema (1.11).

1. La función Crossing Time del sistema no lineal y sus propiedades

1.1. Existencia y unicidad de la Función Crossing Time. En primer lugar, demostraremos el siguiente resultado técnico

LEMA 2.1. *Dados $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}$ y una solución $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ del sistema (1.11). Entonces, existe un único $T(\tau,\xi) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$||x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2 = 1. \tag{2.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para demostrar la existencia de la función T, tendremos que verificar que $T : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ está bien definida, es decir, para cada $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ exista un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = T(\tau,\xi)$ que también satisfaga

$$||x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2 = 1.$$

Existencia de T. *Para cada $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = T(\tau,\xi)$.*

Dados $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, por la Proposición 1.2 del capítulo anterior, se verifican los comportamientos asintóticos

$$\lim_{t \to +\infty} ||x(t, \tau, \xi)||^2 = 0 \tag{2.2}$$

y

$$\lim_{t \to -\infty} ||x(t, \tau, \xi)||^2 = +\infty. \tag{2.3}$$

Entonces, al escoger $\varepsilon = 1$, la definición de límite establece la existencia de reales positivos $T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon) > 0$ tales que

$$||x(t, \tau, \xi)||^2 < 1 \quad \text{para todo } t \geq T_1(\varepsilon) \quad \text{por (2.2) y}$$

$$||x(t, \tau, \xi)||^2 > 1 \quad \text{para todo } t \leq -T_2(\varepsilon) \quad \text{por (2.3).}$$

De este modo, podemos definir el intervalo $I = [-T_2(\varepsilon), T_1(\varepsilon)]$ y la función

$$\begin{array}{rcl} \phi(\tau, \xi, \cdot) : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi(\tau, \xi, t) := ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1. \end{array}$$

Como $t \mapsto \phi(\tau, \xi, t)$ es continua en $\mathbb{R}$, se tiene que $t \mapsto \phi(\tau, \xi, t)$ es continua en I. Además, se verifican las desigualdades:

$$\phi(\tau, \xi, T_1(\varepsilon)) < 0 \quad \text{y} \quad \phi(\tau, \xi, -T_2(\varepsilon)) > 0,$$

entonces, dado que I es compacto, el Teorema de los valores intermedios [**41**, Teo 1, Cap 7] implica la existencia de $T(\tau, \xi) \in I$ tal que

$$\phi(\tau, \xi, T(\tau, \xi)) = 0,$$

es decir, existe $T(\tau, \xi) \in I \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1,$$

y, como (τ, ξ) es arbitrario, hemos demostrado la existencia de $T(\tau, \xi) \in \mathbb{R}$ que verifica (2.1) para todo $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Unicidad del crossing time. Sea $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y $\mathcal{T}(\tau, \xi)$ otro número real que verifique

$$||x(\mathcal{T}(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1 \quad \text{para todo } (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Entonces, se tiene que

$$||x(\mathcal{T}(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1 = ||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 \quad \text{para todo } (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

y la inyectividad de $t \mapsto ||x(t, \tau, \xi)||^2$, descrita en la Observación 1.2, implica que $\mathcal{T}(\tau, \xi) = T(\tau, \xi)$ para todo $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Luego, se tiene que el número $T(\tau, \xi)$ es único para cada (τ, ξ) y con ello se demuestra la existencia y unicidad del Crossing Time T. $\square$

OBSERVACIÓN 2.1. *Si $\tau \in \mathbb{R}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la solución $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ del sistema no lineal (1.11) verifica los límites (2.2)–(2.3), de modo que la función $t \mapsto \phi(\tau, \xi, t)$ verifica el comportamiento asintótico*

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(\tau, \xi, t) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to -\infty} \phi(\tau, \xi, t) = +\infty.$$

Por otro lado, recordemos que se consideró intervalo $I = [-T_2(\varepsilon), T_1(\varepsilon)]$. En caso de que $t \geq T_1$, se tiene que

$$\phi(\tau, \xi, t) = ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1 < 0,$$

mientras que $t \leq -T_2$ implica

$$\phi(\tau, \xi, t) = ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1 > 0,$$

de modo que siempre se tiene que $\phi(\tau, \xi, t) < 0$ para todo $t \geq T_1$ y $\phi(\tau, \xi, t) > 0$ para todo $t \leq -T_2$.

OBSERVACIÓN 2.2. *A partir de la Proposición 1.2, observamos que para cada $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ se verifica:*

i) *Si $||\xi|| > 1$, entonces $T(\tau, \xi) > \tau$,*
ii) *Si $||\xi|| < 1$, entonces $T(\tau, \xi) < \tau$,*
iii) *Si $||\xi|| = 1$, entonces $T(\tau, \xi) = \tau$.*

OBSERVACIÓN 2.3. *Para terminar, cabe mencionar que la demostración de la existencia y unicidad del crossing time T requirió considerar la familia de funciones auxiliares*

$$\begin{array}{rcl} \phi(\tau, \xi, \cdot) : I(\tau, \xi) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi(\tau, \xi, t) = ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1 \end{array}$$

donde $I(\tau, \xi) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo compacto que depende de $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Entonces, podemos hacer una extensión de ϕ considerando la función

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\tau, \xi, t) & \longmapsto & \phi(\tau, \xi, t) = ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1, \end{array}$$

y tener en cuenta dos propiedades:

- *Para todo $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y todo $\tau_0 \in \mathbb{R}$ se verifica*
$$\psi(\tau_0, \xi_0, \cdot)|_{I(\tau_0, \xi_0)} = \phi(\tau_0, \xi_0, \cdot).$$
- *Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y todo $\tau \in \mathbb{R}$ se verifica que*
$$\psi(\tau, \xi, T(\tau, \xi)) = 0.$$

La función ψ jugará un rol crucial en la sección siguiente. En efecto, buscaremos condiciones suficientes para que ψ sea derivable en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y, por ende, para demostrar que $\xi \mapsto T(\tau, \xi)$ lo es en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bajo las condiciones obtenidas para ψ.

1.2. Diferenciabilidad del Crossing Time del sistema no lineal. Consideremos la solución $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ del sistema (1.11). Dicha función también puede ser vista como:

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, \tau, \xi) & \longmapsto & x(t, \tau, \xi). \end{array}$$

En el Lema 2.1, se demostró la existencia y unicidad de la función Crossing Time $T : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, la cual satisface la propiedad

$$||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1 \quad \text{para todo } (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}.$$

El siguiente resultado proporciona condiciones suficientes que aseguran la derivabilidad de la función crossing time:

Teorema 2.1 (Derivabilidad de la función crossing time). *Consideremos el sistema no lineal (1.11), el cual verifica las condiciones (1.12) y (1.13) y sea T la función Crossing Time asociada a (1.11).*

Supongamos que g, $(t,\xi)\mapsto B(t)\xi$ y $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi$ son funciones de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, entonces, para cualquier $\xi_0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y todo $\tau_0\in\mathbb{R}$ existen subconjuntos abiertos $U\subseteq\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ y $V\subseteq\mathbb{R}$ tales que:

(i) $(\tau_0,\xi_0)\in U$,
(ii) $T(\tau,\xi)\in V$ *para todo* $(\tau,\xi)\in U$,
(iii) $T\in\mathscr{C}^1(U,V)$.

En particular, se verifica que $T\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$.

Más aún, si definimos $\mathcal{F}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ por $\mathcal{F}(\tau,\xi)=C(t)\xi+B(t)\xi+g(t,\xi)$ y $\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi}$ es la derivada parcial de T respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi}=-\frac{D_\xi x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)\,x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\mathcal{F}(\tau,x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))\cdot x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}. \tag{2.4}$$

La demostración de este Teorema será una aplicación de dos resultados distinguidos: el *Teorema de la función implícita* y la propiedad de *derivabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales con respecto a las condiciones iniciales*, los cuales están enunciados en el Apéndice A sin demostración. Este último resultado asumirá hipótesis adicionales sobre el sistema (1.11).

Recordemos que nuestro interés viene dado por el estudio de condiciones de derivabilidad para la función Crossing Time T asociada al sistema (1.11), es decir, estamos estudiando condiciones para la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt}=C(t)x+B(t)x+g(t,x)$$

donde $C,B:\mathbb{R}\to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifican (1.12) y $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ verifica (1.13).

Con el fin de aplicar los resultados de derivabilidad de soluciones con respecto a las condiciones iniciales (ver la Proposición A.5) a la solución $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ del sistema (1.11), usaremos las siguientes notaciones: consideraremos $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tal que la solución $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ de (1.11) es una función vectorial de la forma

$$x(t,\tau,\xi)=(x_1(t,\tau,\xi),x_2(t,\tau,\xi),\ldots,x_n(t,\tau,\xi))\in\mathbb{R}^n,$$

por otro lado, $\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial\xi}$ será la derivada parcial de $(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)$ respecto a la condición inicial $\xi\in\mathbb{R}^n$, esto es,

$$\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial\xi}=\left\{\frac{\partial x_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\right\}_{i,j=1}^n\in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

además, $\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial t}=\frac{dx(t,\tau,\xi)}{dt}\in\mathbb{R}^n$ y $\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$ será la derivada parcial de la solución $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ respecto al tiempo inicial.

A partir del Teorema de la derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales (ver Proposición A.5 del Apéndice A) y de algunos resultados clásicos del cálculo vectorial, obtendremos resultados que serán de utilidad para demostrar la derivabilidad de la función crossing time T, enunciado en el Teorema 2.1:

LEMA 2.2. *En el sistema no lineal (1.11), supongamos que la función* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua y que se verifican las propiedades (1.12) y (1.13).*

Si $(t, \xi) \mapsto B(t)\xi$, $(t, \xi) \mapsto C(t)\xi$ *y* $(\tau, \xi) \mapsto g(\tau, \xi)$ *son funciones de clase* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$*, entonces, la solución* $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ *del sistema no lineal (1.11) es de clase* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Por último, tenemos que $(t, \tau, \xi) \mapsto \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *es solución del problema de valores iniciales matricial*

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}(t, x(t, \tau, \xi))}{\partial x} X \quad \text{y} \quad X(\tau) = I. \tag{2.5}$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\mathcal{F}(t, \xi) = C(t)\xi + B(t)\xi + g(t, \xi) \tag{2.6}$$

donde $C : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ cumplen con las condiciones descritas en (1.12) y (1.13), es decir, C satisface la identidad

$$C(t) = \text{diag}\{C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)\}$$

siendo $C_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y acotadas que satisfacen $C_i(t) \leq -\delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mientras que $B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una función continua en $\mathbb{R}$ que verifica

$$||B(t)|| \leq \frac{\delta}{4} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

por otro lado, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua que verifica $g(t, 0) \equiv 0$ e $y \mapsto g(t, \xi)$ es lipschiztiana, cuya constante de Lipschitz es $\delta/4$. Lo cual implica que si $t \in \mathbb{R}$ y $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, entonces,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}(t, \xi_1) - \mathcal{F}(t, \xi_2)|| &\leq ||C(t)||\,||\xi_1 - \xi_2|| + ||B(t)||\,||\xi_1 - \xi_2|| + \tfrac{\delta}{4}||\xi_1 - \xi_2|| \\ &\leq \left(M + \frac{\delta}{2}\right) ||\xi_1 - \xi_2||, \end{aligned}$$

siendo $M = \sup\{||C(t)|| \colon t \in \mathbb{R}\}$. De modo que en virtud de la Proposición A.1 del Apéndice A (en este caso, considerando $J = \mathbb{R}$), para cada $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se verifica que el intervalo maximal de existencia de $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ es $\mathbb{R}$.

Como tenemos $(t, \xi) \mapsto C(t)\xi$, $(t, \xi) \mapsto B(t)\xi$ y $(t, \xi) \mapsto g(t, \xi)$ son de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, entonces, se verifica que $\mathcal{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ por ser suma de funciones de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ésto tiene una serie de implicancias importantes:

Por la Proposición A.5, a saber, el Teorema de derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales, la función $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ es de clase $\mathscr{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ donde

$$D = \{(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{2+n} \colon a(\tau, \xi) < t < b(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\},$$

donde cada $]a(\tau, \xi), b(\tau, \xi)[\subseteq \mathbb{R}$ corresponde al intervalo maximal de existencia de $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$, pero como se mencionó al principio de la demostración, se verifica $]a(\tau, \xi), b(\tau, \xi)[= \mathbb{R}$ para cada $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y se concluye que $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, es decir, hemos demostrado que $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Además, si $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz identidad de orden n, la Proposición A.5 garantiza que la función $(t, \tau, \xi) \mapsto \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sea solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} &= \dfrac{\partial \mathcal{F}(t, x(t,\tau,\xi))}{\partial x} X \\ \\ X(\tau) &= I, \end{cases}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Usando la regla de la cadena[1] junto al Lema 2.2 que acabamos de demostrar, obtendremos un resultado técnico necesario para determinar la derivabilidad de la función ψ definida en la Observación 2.3. Recordemos la construcción de dicha función:

Dada la solución $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ de la ecuación no lineal (1.11), la función ψ viene definida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ (\tau, \xi, t) & \longmapsto & ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1. \end{array}$$

Al igual que antes, denotaremos por $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ como la derivada parcial de ψ respecto a $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dado que ψ es una función escalar, sabemos que $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \in \mathbb{R}^n$. Como es habitual, denotaremos por $\frac{\partial \psi}{\partial t} \in \mathbb{R}$ a la derivada parcial de ψ respecto a t y $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \in \mathbb{R}$ es la derivada parcial de ψ respecto a τ.

Por último, de aquí en lo que resta de capítulo, asumiremos que $\mathcal{F}$ es la función $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida previamente en la ecuación (2.6), es decir,

$$\mathcal{F}(t,\xi) = C(t)\xi + B(t)\xi + g(t,\xi)$$

y el siguiente resultado describe las propiedades de derivabilidad de la función ψ:

COROLARIO 2.1. *Bajo las hipótesis del Lema 2.2, la función $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\psi(\tau,\xi,t) = ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1,$$

es de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Además, la función $(\tau,\xi,t) \mapsto \frac{\partial \psi(\tau,\xi,t)}{\partial \xi} \in \mathbb{R}^n$ verifica

$$\frac{\partial \psi(\tau,\xi,t)}{\partial \xi} = 2\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi} x(t,\tau,\xi), \tag{2.7}$$

mientras que la función $(\tau,\xi,t) \mapsto \frac{\partial \psi(\tau,\xi,t)}{\partial t} \in \mathbb{R}$ verifica

$$\frac{\partial \psi(\tau,\xi,t)}{\partial t} = 2\left[C(t)x(t,\tau,\xi) + B(t)x(t,\tau,\xi) + g(t,x(t,\tau,\xi))\right] \cdot x(t,\tau,\xi), \tag{2.8}$$

donde $\cdot$ denota el producto interno euclideano de $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN. Como $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, y las funciones $(t,\xi) \mapsto C(t)\xi$ y $(t,\xi) \mapsto B(t)\xi$ son de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, el Lema 2.2 nos dice que la solución $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ de (1.11), al ser vista como una función $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$, es de clase $\mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Sea $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(\xi) = ||\xi||^2 - 1.$$

[1] En este trabajo, usaremos el Teorema [**30**, Teo 11, Cap 2] como referencia.

Entonces, notemos que

$$\psi(\tau,\xi,t) = ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1 = v(x(t,\tau,\xi)).$$

Usando lo anterior, aplicaremos la regla de la cadena. Para ello, basta verificar que $v \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, sin embargo, si $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$, se sigue que

$$v(\xi) = ||\xi||^2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - 1$$

lo cual corresponde a un polinomio cuadrático de n variables, lo cual implica que $v \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, y en particular, v es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Entonces, $\psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Para terminar, calculemos las derivadas parciales $\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ y $\frac{\partial\psi}{\partial t}$. Para ello, veamos que para todo $j \in \{1,\dots,n\}$ se verifica la identidad:

$$\frac{\partial\psi(\tau,\xi,t)}{\partial\xi_j} = \frac{\partial}{\partial\xi_j}[||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1] = 2\sum_{i=1}^{n} x_i(t,\tau,\xi)\frac{\partial x_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_j},$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial\psi(\tau,\xi,t)}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\psi(\tau,\xi,t)}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial\psi(\tau,\xi,t)}{\partial\xi_n}\right) = 2\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial\xi}x(t,\tau,\xi)$$

y se verifica (2.7).

Por último, al calcular $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(\tau,\xi,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1] = 2\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial t}\cdot x(t,\tau,\xi)\\ &= 2\{C(t)x(t,\tau,\xi) + B(t)x(t,\tau,\xi) + g(t,x(t,\tau,\xi))\}\cdot x(t,\tau,\xi),\end{aligned}$$

verificándose (2.8) y se concluye la demostración. □

Ahora contamos con todas las herramientas para llevar a cabo la demostración del Teorema 2.1.

1.3. Demostración del Teorema 2.1. La demostración de la derivabilidad de la función Crossing Time será una aplicación del Teorema de la Función Implícita (Proposición A.4) y será subdividida en pasos para corroborar las hipótesis de dicha Proposición.

Paso 1. Preliminares:

Dados $(\tau_0,\xi_0) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, necesitamos definir tres espacios de Banach X,Y,Z y un subconjunto abierto $\mathcal{O}$ en $X\times Y$ tales que $(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0)) \in \mathcal{O}$, además de requerir de una función $f:\mathcal{O}\to Z$ de clase $\mathscr{C}^1(\mathcal{O},Z)$ que satisface $f(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0)) = 0_Z$.

Los espacios de Banach serán $X := (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \sqrt{|\cdot|^2 + ||\cdot||^2})$ e $Y = Z = (\mathbb{R},|\cdot|)$, siendo $||\cdot||$ la norma euclideana de $\mathbb{R}^n$ y $|\cdot|$ el valor absoluto.

Paso 2. Construcción del abierto $\mathcal{O}$ y la función f:

Como $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\mathcal{O} := \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} = X\times Y$.

Sea $x:\mathbb{R}^{2+n}\to\mathbb{R}$ la solución de (1.11), es decir, para cada $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ la función $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ es solución del sistema (1.11). Finalmente, definimos la función $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ como $f(\tau,\xi,t) = ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1$.

Recordemos que $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\psi(\tau, \xi, t) := ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1,$$

entonces, por la definición de ψ y f, se verifica que $\psi|_{\mathcal{O}} = f$.

Paso 3. $f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$*:*

Como $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, y las funciones $(t, \xi) \mapsto B(t)\xi$ y $(t, \xi) \mapsto C(t)\xi$ son de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, el Corolario 2.1 garantiza que $\psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ entonces, $f = \psi|_{\mathcal{O}} \in \mathscr{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$.

Paso 4. Existe $(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) \in \mathcal{O}$ *tal que* $f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) = 0$*:*

Recordemos que T verifica la identidad

$$||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1 \quad \text{para todo } y \neq 0 \text{ y todo } \tau \in \mathbb{R},$$

en particular, como $\xi_0 \neq 0$, se tiene que $(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) \in \mathcal{O}$ con la identidad

$$f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) = \underbrace{||x(T(\tau_0, \xi_0), \tau_0, y_0)||^2}_{=1} - 1 = 0. \tag{2.9}$$

Paso 5. $Df_T(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))$ *es invertible y su inversa pertenece a* $\mathcal{L}(Z, Y)$*:*

Por construcción, se tiene que $\psi(\tau, \xi, t) \in \mathbb{R}$ para todo $(\tau, \xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, lo cual implica que $f(\tau, \xi, t) \in \mathbb{R}$ para todo $(\tau, \xi, t) \in \mathcal{O}$ y por ende, $\frac{\partial f(\tau, \xi, t)}{\partial t} \in \mathbb{R}$, entonces, nos basta probar que $\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial T} \neq 0$ para verificar que este último sea invertible.

Para verificar dicha invertibilidad, recordemos que $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definida en (2.6) donde C, B y g verifican las propiedades (1.12) y (1.13), además de la condición $g(t, 0) = 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces, observemos que la desigualdad (1.15) combinada con $||x(T(\tau_0, \xi_0), \tau_0, \xi_0)||^2 = 1$ nos dice que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}\left\{||x(T(\tau_0, \xi_0), \tau_0, \xi_0)||^2 - 1\right\} \\ &\leq -\delta \underbrace{||x(T(\tau_0, \xi_0), \tau_0, \xi_0)||^2}_{=1} = -\delta < 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

lo cual se reduce a que $\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial T} < 0$, es decir, al ver $\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial T}$ como una matriz cuadrada de orden 1, tenemos que esta última es una matriz invertible. Para finalizar, si definimos $\mathcal{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{Q}z = \left(\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t}\right)^{-1} z$, tenemos que $\mathcal{Q}$ es un operador lineal sobre un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión 1 y por tanto, un operador lineal acotado, es decir, $\left(\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t}\right)^{-1} = \mathcal{Q} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(Z, Y)$.

Paso 6. Fin de la demostración:

El Teorema de la Función Implícita (ver Proposición A.4) asegura la existencia de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ con $(\tau, \xi) \in U$, un subconjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ y una función $s : U \to V$ tales que

(i) $(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) \in U \times V$.
(ii) $U \times V \subseteq \mathcal{O}$ y por ende $U \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
(iii) $s \in \mathscr{C}^1(U, V)$ y $\psi(\tau, \xi, s(\tau, \xi)) = 0$ para todo $(\tau, \xi) \in U$.

(iv) Para cada $(\tau, \xi) \in U$ se tiene que $\frac{\partial \psi(\tau,\xi,s(\tau,\xi))}{\partial t}$ es invertible y además, $\left(\frac{\partial \psi(\tau,\xi,s(\tau,\xi))}{\partial t}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$.

(v) $s(\tau_0, \xi_0) = T(\tau_0, \xi_0)$.

Demostraremos que $T(\tau, \xi) = s(\tau, \xi)$ para todo $(\tau, \xi) \in U$, en efecto, por el Lema 2.1 se tiene que la función $(\tau, \xi) \mapsto T(\tau, \xi)$ verifica $||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1$, sin embargo,

$$\psi(\tau, \xi, s(\tau, \xi)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad ||x(s(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1 = ||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2,$$

entonces, la unicidad de $T(\tau, \xi)$ descrita en el Lema 2.1 implica que $s(\tau, \xi) = T(\tau, \xi)$ para todo $(\tau, \xi) \in U$. Ésto implica que la función Crossing Time $(\tau, \xi) \mapsto T(\tau, \xi)$ verifica las siguientes condiciones:

a.- $T \in \mathscr{C}^1(U, V)$, pues, $s \in \mathscr{C}^1(U, V)$ y $T|_U = s$ y en particular, las derivadas parciales de T existen y son continuas en (τ_0, ξ_0).

b.- Si $\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi}$ es la matriz jacobiana de T, para todo $(\tau, \xi) \in U$ se verifica la igualdad $\frac{\partial s(\tau,\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi}$.

Lo anterior es válido para todo $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Por lo tanto, se tiene que $(\tau, \xi) \mapsto T(\tau, \xi)$ es continuamente diferenciable en cada $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, lo que equivale a $T \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n)$.

Para finalizar, si $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\tau, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{\partial s(\tau, \xi)}{\partial \xi} = -\left(\frac{\partial \psi(\tau, \xi, s(\tau, \xi))}{\partial s}\right)^{-1} \frac{\partial \psi(\tau, \xi, s(\tau, \xi))}{\partial \xi} \\
&= -\left(\frac{\partial \psi(\tau, \xi, T(\tau, \xi))}{\partial T}\right)^{-1} \frac{\partial \psi(\tau, \xi, T(\tau, \xi))}{\partial \xi} \\
&= -\frac{D_\xi x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)\, x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)}{\mathcal{F}(T(\tau, \xi), x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)) \cdot x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)}
\end{aligned}$$

verificándose (2.4) y con ésto se demuestra el Teorema 2.1. □

2. La derivada del Homeomorfismo de Lin.

Dada la función Crossing Time $(\tau, \xi) \mapsto T(\tau, \xi)$ y la solución $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ del sistema (1.11), recordemos que para cada τ fijo, el homeomorfismo de Lin se definió en (1.16) como sigue:

$$\begin{aligned}
H_\tau : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
\xi &\longmapsto H_\tau(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)} x(T(\tau, \xi), \tau, \xi) & \xi \neq 0 \\ 0 & \xi = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos en la subsección anterior nos permitirán estudiar la derivabilidad de $\xi \mapsto H_\tau(\xi)$ para todo τ fijo.

Teorema 2.2. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, la función de Lin definida en (1.16) verifica* $H \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. *En particular, el Homeomorfismo de Lin satisface* $H_\tau \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *para cada* $\tau \in \mathbb{R}$.

Más aún, si $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *y* $T := T(\tau, \xi)$, *la derivada de* H *satisface*

$$\frac{\partial H(\tau,\xi)}{\partial \xi} = e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \left[\frac{\delta}{2} \mathcal{R}(\tau,\xi) + \mathcal{V}(\tau,\xi) + \frac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial \xi} \right] \tag{2.11}$$

donde $(\tau,\xi) \mapsto \mathcal{R}_{i,j}(\tau,\xi)$ *y* $(\tau,\xi) \mapsto \mathcal{V}_{i,j}(\tau,\xi)$ *son las respectivas entradas de las matrices* $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{V}$, *las cuales están definidas por*

$$\mathcal{R}_{i,j}(\tau,\xi) = \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} x_i(T,\tau,\xi) \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_{i,j}(\tau,\xi) = \frac{\partial x_i(T,\tau,y)}{\partial t} \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j}.$$

Demostración. Por un lado, el Teorema 2.1 establece que el Crossing Time T es una función de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$, el cual verifica (2.4). Además, las hipótesis del Teorema 2.1 coinciden con las del Lema 2.2, el cual afirma que $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{2+n}, \mathbb{R}^n)$.

Luego, al considerar $\Upsilon : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ y $\Psi : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^{2+n}$ definidas por $\Upsilon(\tau,\xi) := e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)}$ y $\Psi(\tau,\xi) := (T(\tau,\xi),\tau,\xi)$, tenemos que $\Upsilon \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$ mientras que $\Psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^{2+n})$.

Luego, para cualquier $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ se tiene que

$$H(\tau,\xi) = e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)} x(T(\tau,\xi),\tau,\xi) = \Upsilon(\tau,\xi) x(\Psi(\tau,\xi)),$$

es decir, la función de Lin puede ser vista como un producto de composiciones de funciones en $\mathscr{C}^1$, lo cual implica que H sea de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y al fijar $\tau \in \mathbb{R}$, se tiene que $H_\tau \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Para corroborar la identidad (2.11), veamos las derivadas parciales de las coordenadas $i-$ésimas de H: Definamos $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y consideremos la notación:

$$H(\tau,\xi) = (H_1(\tau,\xi), \ldots, H_n(\tau,\xi)) \quad \text{y} \quad x(t,\tau,\xi) := (x_1(t,\tau,\xi), \ldots, x_n(t,\tau,\xi)),$$

lo cual implica que $H_i(\tau,\xi) = e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)} x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi)$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

De este modo, al usar $T = T(\tau,\xi)$ y considerar $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, la regla de la cadena [**30**, Teo 11, Cap.2] implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)} x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi) \right] \\
&= e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \frac{\delta}{2} x_i(T,\tau,\xi) \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \\
&\quad + e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \left\{ \frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial T} \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} + \frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \xi_j} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial \xi_\ell} \frac{\partial \xi_\ell}{\xi_j} \right\} \\
&= e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \left\{ \frac{\delta}{2} x_i(T,\tau,\xi) \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} + \frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial T} \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} + \frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \right\} \\
&= e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \left\{ \frac{\delta}{2} \mathcal{R}_{i,j}(\tau,\xi) + \mathcal{V}_{i,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \right\}.
\end{aligned}$$

Por último, al considerar $T = T(\tau, \xi)$ nuevamente, se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\tau,\xi)}{\partial \xi} &= \left\{ \frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \right\}_{i,j=1}^{n} \\ &= \frac{\delta}{2} e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \left\{ \frac{\delta}{2} \mathcal{R}_{i,j}(\tau,\xi) + \mathcal{V}_{i,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \right\}_{i,j=1}^{n} \\ &= e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)} \left[\frac{\delta}{2} \mathcal{R}(\tau,\xi) + \mathcal{V}(\tau,\xi) + \frac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial \xi} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica la identidad (2.11) y termina la demostración. □

Hemos demostrado que, bajo ciertas condiciones de derivabilidad sobre $\mathcal{F}$, la función de Lin verifica $H \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, por ende, cada Homeomorfismo de Lin H_τ es una función de clase $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en sí mismo.

En lo que queda de capítulo, estudiaremos condiciones de derivabilidad sobre los sistemas (1.10) y (1.11) para que cada homeomorfismo H_τ sea un difeomorfismo que preserva orientación. Con este fin, un primer paso será la búsqueda de condiciones sobre el sistema lineal (1.10) para que el Crossing Time S sea de clase $\mathscr{C}^1$ y, luego, estudiaremos propiedades de derivabilidad sobre los sistemas (1.10)–(1.11) para obtener propiedades de derivabilidad para la función inversa del Homeomorfimo de Lin H_τ^{-1}. Por último, buscaremos condiciones suficientes para obtener la preservación de orientación de H_τ.

3. La función Crossing Time del sistema lineal y sus propiedades

3.1. Existencia y unicidad de la función Crossing Time del sistema lineal. Recordemos que si $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces, $t \mapsto y(t, \tau, \xi)$ corresponde a la única solución del sistema diagonal lineal autónomo (1.10).

El siguiente resultado consistirá en verificar la existencia y unicidad de una función $S : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$||y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2 = 1 \quad \text{para cualquier } (\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

LEMA 2.3. *Sea $t \mapsto y(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^n$ la solución del sistema lineal (1.10). Entonces, existe una única función $S : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$||y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2 = 1 \quad \text{para todo } (\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Más aún, para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y todo $\tau \in \mathbb{R}$ se verifica

$$S(\tau,\xi) = S(\tau,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \frac{1}{\delta} \ln \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right) + \tau. \tag{2.12}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración constará en recuperar las hipótesis del Lema 2.1 construyendo funciones C, B y g adecuadas para la construcción de la función crossing time S.

Sea I la matriz identidad de orden n y definamos $C_0 : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ por

$$C_0(t) := -\delta I.$$

Entonces, C_0 es constante, por lo tanto, es continua y acotada en $\mathbb{R}$. Además, se tiene que

$$C_0(t) = \operatorname{diag}\{C_1(t), C_2, \ldots, C_n(t)\},$$

donde $t \mapsto C_i(t) = -\delta$ para todo $i \in \{1, \ldots n\}$. Por último, se tiene que

$$C_i(t) \leq -\delta \quad \text{para todo } (t, i) \in \mathbb{R} \times \{1, \ldots, n\}.$$

También consideraremos la función constante $B_0 \colon \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$, definida por

$$B_0(t) = \frac{\delta}{4} I \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

la cual es continua en $\mathbb{R}$ y verifica trivialmente que:

$$||B_0(t)|| \leq \frac{\delta}{4}.$$

Sea $g_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $g_0(t, \xi) = \frac{\delta}{4} I\xi$ para todo $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces, g es una función continua en $\mathbb{R}$, la cual verifica $g(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$||g_0(t, \xi_1) - g_0(t, \xi_2)|| = \left|\left|\frac{\delta}{4} I(\xi_1 - \xi_2)\right|\right| \leq \frac{\delta}{4} ||\xi_1 - \xi_2||.$$

Luego, el sistema (1.10) puede ser visto con una estructura similar a la ecuación (1.11), es decir,

$$y' = -\frac{\delta}{2} Iy = C_0(t)y + B_0(t)y + g_0(t, y),$$

y por ende, se verifican las hipótesis del Lema 2.1, el cual afirma que si $t \mapsto y(t, \tau, \xi)$ es solución del sistema (1.10), entonces, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y cada $\tau \in \mathbb{R}$ existe un único $S(\tau, \xi)$ tal que

$$||y(S(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 = 1.$$

Para verificar la identidad (2.12), notemos que toda solución $t \mapsto y(t, \tau, \xi)$ de (1.10) es de la forma

$$y(t, \tau, \xi) = e^{-\frac{\delta}{2}(t-\tau)} \xi,$$

entonces,

$$||y(t, \tau, \xi)||^2 = e^{-\delta(t-\tau)} ||\xi||^2$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
& 1 = ||y(S(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2 &=& \; e^{-\delta(S(\tau,\xi)-\tau)} ||\xi||^2 \\
\iff & e^{\delta(S(\tau,\xi)-\tau)} &=& \; ||\xi||^2 \\
\iff & \delta(S(\tau, \xi) - \tau) &=& \; \ln(||\xi||^2) \\
\iff & S(\tau, \xi) &=& \; \frac{1}{\delta} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) + \tau,
\end{aligned}$$

lo cual prueba (2.12) y con ésto se concluye la demostración. □

El Lema 2.3 garantiza la existencia de la función Crossing Time del sistema (1.10), la cual corresponde a $S : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ que verifica (2.1), por ende, para cada $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$ y todo $\tau \in \mathbb{R}$ se verifica

$$S(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{\delta} \ln \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right) + \tau,$$

Esta expresión explícita para el Crossing S es una valiosa herramienta para estudiar su derivabilidad.

Lema 2.4. *La función Crossing Time S del sistema (1.10) verifica la propiedad $S \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$ y sus derivadas parciales con respecto a $\xi \in \mathbb{R}^n$, se describen como sigue:*

$$\frac{\partial S(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{\partial \xi} = \left(\frac{2\xi_1}{\delta ||\xi||^2}, \ldots, \frac{2\xi_n}{\delta ||\xi||^2} \right) = \frac{2\xi}{\delta ||\xi||^2} \tag{2.13}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y cada $\tau \in \mathbb{R}$.

Demostración. Notemos que ésto es sólo una consecuencia del Teorema 2.1, pues, recordemos que $y' = -\frac{\delta}{2} I y$ podía ser vista como una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\delta}{2} I y = C_0(t) y + B_0(t) y + g_0(t, y)$$

donde C_0, B_0 y g_0 son como en la demostración del Lema 2.3, las cuales son todas lineales en ξ y constantes en t, lo cual implica que $(t, \xi) \mapsto C_0(t)\xi$, $(t, \xi) \mapsto B_0(t)\xi$ y $(t, \xi) \mapsto g(t, \xi)$ son todas de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Por ende, se tiene la propiedad $S \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$.

Para demostrar (2.13), consideremos $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \neq 0$ y denotemos por $\frac{\partial S}{\partial \xi_i} \in \mathbb{R}$ la derivada parcial de S respecto a la $i-$ésima coordenada de ξ. Se tiene que

$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{1}{\delta} \ln \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right) + \tau \right) = \frac{2}{\delta} \frac{\xi_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)} = \frac{2}{\delta} \frac{\xi_i}{||\xi||^2},$$

entonces,

$$\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial S(\tau, \xi)}{\partial \xi_n} \right) = \left(\frac{2}{\delta} \frac{\xi_1}{||\xi||^2}, \ldots, \frac{2}{\delta} \frac{\xi_n}{||\xi||^2} \right) = \frac{2}{\delta} \frac{\xi}{||\xi||^2},$$

verificándose así (2.13), lo cual concluye la demostración. □

4. La inversa del Homeomorfismo de Lin y su diferenciabilidad

Primero que todo, recordemos que la función Crossing Time $(\tau, \xi) \mapsto S(\tau, \xi)$ verifica la identidad

$$||\xi||^2 \exp\left(-\delta(S(\tau, \xi) - \tau)\right) = 1 \quad \text{para todo } (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

siendo $t \mapsto y(t, \tau, \xi) = \exp\left(-\frac{\delta}{2}(t - \tau)\right) I \xi \in \mathbb{R}^n$ la única solución de (1.10) que verifica $y(\tau, \tau, \xi) = \xi$. Entonces, para cada $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ se tiene que

$$y(S(\tau, \xi), \tau, \xi) = \exp\left(-\frac{\delta}{2}(S(\tau, \xi) - \tau) \right) I \xi = \frac{\xi}{||\xi||}.$$

Además, si $\xi \neq 0$, la identidad anterior junto con (1.17) implican lo siguiente:

$$G(\tau,\xi) = x\left(\tau, S(\tau,\xi), \xi \exp\left(-\frac{\delta}{2}(S(\tau,\xi)-\tau)\right)\right) = x\left(\tau, \frac{1}{\delta}\ln(||\xi||^2)+\tau, \frac{\xi}{||\xi||}\right),$$

y que para cada $\tau \in \mathbb{R}$, la función inversa de H_τ está definida por $H_\tau^{-1} = G(\tau,\cdot)$.

Esta identidad nos será de gran ayuda para demostrar el siguiente resultado, el cual establece que –bajo las condiciones del Teorema 2.1– se tiene que cada homeomorfirmo H_τ^{-1} es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Teorema 2.3. *Sea $\mathcal{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido en (2.6) donde C y B son funciones matriciales que verifican (1.12), mientras que la perturbación $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verifica $g(t,0)=0$ para todo t y (1.13). Sea también $G : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por $G(\tau,\xi) = H_\tau^{-1}(\xi)$.*

Si $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi$, $(t,\xi)\mapsto B(t)\xi$ y g son de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, entonces, $G \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$.

Más aún, si $\frac{\partial G}{\partial \xi} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ corresponde a la matriz jacobiana de $G = H_\tau^{-1}$ en la coordenada ξ, se tiene que

(2.14)

$$\frac{\partial G(\tau,\xi)}{\partial \xi} = \frac{2}{\delta}\left\{\frac{\partial x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \tau}\frac{\xi_j}{||\xi||^2}\right\}_{i,j=1}^{n} + \frac{\partial x\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial z}.$$

En particular, para cada $\tau\in\mathbb{R}$ fijo, se tiene que $H_\tau^{-1} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Recordemos las siguientes propiedades:

- Las hipótesis (1.12),(1.13) y el hecho de que $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi$, $(t,\xi)\mapsto B(t)\xi$ y g son de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ son las mismas hipótesis del Lema 2.2, entonces, la solución $t\mapsto x(t,\tau,\xi)\in\mathbb{R}^n$, vista como función $(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)$, es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, es decir, $x\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$.
- También tenemos que $\xi\mapsto\frac{\xi}{||\xi||}$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n)$.
- Gracias al Lema 2.4, se obtiene que la función Crossing Time S es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

Lo anterior implica que la función $\Psi : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to\mathbb{R}^{2+n}$ definida por

$$\Psi(\tau,\xi) = \left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)$$

es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^{n+1})$ en virtud de [**30**, Teo 9, Cap 2]. Por ende, se verifica que la igualdad

$$G(\tau,\xi) = x\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right) = x(\Psi(\tau,\xi)),$$

es decir, G es una composición de funciones de clase $\mathscr{C}^1$, entonces, G es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, o equivalentemente, se verifica la propiedad $G\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Por último, recordemos que al fijar $\tau\in\mathbb{R}$, se tiene que $H_\tau^{-1} = G(\tau,\cdot)$ lo cual implica que $H_\tau^{-1}\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ para cada $\tau\in\mathbb{R}$ fijo.

Sea $\frac{\partial G}{\partial \xi}\in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ la matriz jacobiana de G en la coordenada ξ. Recordemos que $\frac{\partial G}{\partial \xi} = \left\{\frac{\partial G_j}{\partial \xi_i}\right\}_{j,i=1}^{n}$ donde $\frac{\partial G_i}{\partial \xi_j}$ es la derivada parcial de G_i en la coordenada ξ_j.

Luego, al calcular $\frac{\partial G_i}{\partial \xi_j}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)\right\} \\
&= \frac{\partial x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial t}\frac{\partial \tau}{\partial \xi_j} + \frac{\partial x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \tau}\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{\frac{\xi_k}{||\xi||}\right\} \\
&= \frac{2}{\delta}\frac{\partial x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \tau}\frac{\xi_j}{||\xi||^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{\frac{\xi_k}{||z||}\right\},
\end{aligned}$$

donde usamos (2.13). Entonces, si $S := S(\tau,\xi)$, al calcular la matriz $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(\tau,\xi)}{\partial \xi} &= \left\{\frac{\partial G_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_j}\right\}_{i,j=1}^{n} \\
&= \frac{2}{\delta}\left\{\frac{\partial x_i\left(\tau, S, \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial S}\frac{\xi_j}{||\xi||^2}\right\}_{i,j=1}^{n} + \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i\left(\tau, S, \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{\frac{\xi_k}{||\xi||}\right\}\right\}_{i,j=1}^{n} \\
&= \frac{2}{\delta}\left\{\frac{\partial x_i\left(\tau, S, \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \tau}\frac{\xi_j}{||\xi||^2}\right\}_{i,j=1}^{n} + \frac{\partial x\left(\tau, S, \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

por ende, se verifica (2.14). Con ello, probamos lo que se deseaba. □

Teorema 2.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ fijo, se verifica que el homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.*

Más aún, la derivada de H_τ satisface la identidad

$$\frac{\partial H_\tau(\xi)}{\partial \xi} = e^{\frac{\delta}{2}(T-\tau)}\left\{\frac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial \xi} + \mathcal{V}(\tau,\xi) + \frac{\delta}{2}\mathcal{R}(\tau,\xi)\right\}, \tag{2.15}$$

mientras que la derivada de H_τ^{-1} verifica

$$\frac{\partial H_\tau^{-1}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{2}{\delta}\left[\frac{\partial y_i\left(\tau, S, \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial S}\frac{\xi_j}{||\xi||^2}\right]_{i,j=1}^{n} + \frac{\partial x\left(\tau, S, \frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{\xi}{||\xi||}\right)}{\partial \xi}, \tag{2.16}$$

siendo $T := T(\tau,\xi)$, $S := S(\tau,\xi)$ mientras que $\mathcal{R}, \mathcal{V} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ son funciones matriciales cuyas entradas vienen definidas por

$$\mathcal{V}_{i,j}(\tau,\xi) = \frac{\partial x_i(T,\tau,y)}{\partial T}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{i,j}(\tau,\xi) = \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j}x_i(T,\tau,\xi).$$

Demostración. Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, tenemos que el homeomorfismo de Lin H_τ es de clase $\mathscr{C}^1$ en virtud del Teorema 2.2. Por otro lado, el Teorema 2.3 establece que $H^{-1} = G_\tau$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ lo cual implica que el homeomorismo de Lin H_τ sea, de hecho, un difeomorfismo para cada $\tau \in \mathbb{R}$ fijo.

Por otro lado, como $H_\tau = H(\tau, \cdot)$, la identidad (2.11) implica la identidad (2.15). Análogamente, la identidad $H_\tau^{-1} = G(\tau, \cdot)$ combinada con (2.14) implican la identidad (2.16), lo cual concluye la demostración ☐

5. Preservación de orientación del Homeomorfismo de Lin.

Supongamos que las ecuaciones (1.11) y (1.10) verifican las propiedades **(L1)** y **(L2)** donde $t \mapsto y(t, \tau, \xi)$ y $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ son las respectivas soluciones de (1.10) y (1.11) con condicion inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$ en $t = \tau$. Recordemos que si se verifican las condiciones

- ⋆ $(\tau, \xi) \mapsto C(\tau)\xi$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,
- ⋆ $(\tau, \xi) \mapsto B(\tau)\xi$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,
- ⋆ $(\tau, \xi) \mapsto g(\tau, \xi)$ es de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,

entonces, el Teorema 2.4 establece que el Homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo para cada $\tau \in \mathbb{R}$ fijo. De este modo, el objetivo de la última sección de este capítulo es demostrar que tal H_τ es un difeomorfismo que preserva orientación. Sorprendentemente, este resultado se demostrará sin requerir de hipótesis adicionales sobre los sistemas (1.10) y (1.11):

Teorema 2.5. *Bajo las condiciones del Teorema 2.1, entonces, el homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en si mismo que preserva orientación, es decir, se tiene que* $\det\left(\frac{\partial H_\tau}{\partial \xi}\right) > 0$ *en* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demostración. Fijemos $\tau \in \mathbb{R}$. Primero, por el Teorema 2.4, tenemos que el homeomorfismo de Lin H_τ es en realidad un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en si mismo. En particular, H_τ es una función biyectiva donde su inversa es G_τ, es decir,

$$G_\tau(H_\tau(\xi)) = \xi,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Entonces, al aplicar la regla de la cadena, se verifica

$$D_H G_\tau(H_\tau(\xi))\, D_\xi H_\tau(\xi) = I \implies 1 = \det D_H G_\tau(H_\tau(\xi)) \det D_\xi H_\xi(\xi),$$

lo cual implica que $\det D_\xi H_\tau(\xi) \neq 0$ para cualquier $\xi \neq 0$. Por ende, sólo bastará demostrar que $\det D_\xi H_\tau(\xi) > 0$ para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Para probar esta propiedad, consideremos la función $\mathcal{J} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $\mathcal{J}(\xi) = \det D_\xi H_\tau(\xi)$. Primeramente, la Proposición A.9 nos dice que $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua mientras que $D_\xi H_\tau : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to GL_n(\mathbb{R})$ es continua, pues, la función $H_\tau \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Entonces, $\mathcal{J}$ es una composición de las siguientes funciones continuas:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{D_\xi H_\tau(\cdot)} & GL_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \xi & \longmapsto & D_\xi H_\tau(\xi) & \longmapsto & \det D_\xi H_\tau(\xi) = \mathcal{J}(\xi), \end{array}$$

Por ende, $\mathcal{J}$ es una función continua en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

En el caso $n = 1$, se tiene que el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es disconexo, mientras que para $n \geq 2$, el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es conexo. De este modo, analizaremos dos casos: cuando $n = 1$ y cuando $n \geq 2$.

Caso $n = 1$: Notemos que

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[,$$

lo cual equivale a decir que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es la unión entre dos componentes conexas las cuales son $\mathcal{C}^- :=]-\infty, 0[$ y $\mathcal{C}^+ :=]0, +\infty[$.

Como $\mathcal{J}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene que $\mathcal{J}(\mathcal{C}^-)$ y $\mathcal{J}(\mathcal{C}^+)$ son conjuntos conexos, entonces, se tiene que

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}^\pm) \subseteq]0, +\infty[\quad \text{o bien} \quad \mathcal{J}(\mathcal{C}^\pm) \subseteq]-\infty, 0[.$$

De este modo, basta considerar $\xi_- \in \mathcal{C}^-$ y $\xi_+ \in \mathcal{C}^+$ tales que

$$\mathcal{J}(\xi_-) > 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{J}(\xi_+) > 0$$

lo cual implicaría la propiedad $\mathcal{J}(\mathcal{C}^\pm) \subseteq]0, +\infty[$.

Para empezar, consideremos $\xi_- = -1 \in \mathcal{C}^-$. Se tiene que $|\xi_-| = 1$, y por ende

$$|x(\tau, \tau, \xi_-)|^2 = |\xi_-|^2 = 1 = |x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)|^2,$$

luego, la unicidad de T descrita en el Lema 2.1 conlleva a que $T(\tau, \xi_-) = \tau$.

Por otro lado, el Lema 2.2 afirma que $t \mapsto D_\xi x(t, \tau, \xi)$ es solución de la ecuación variacional

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}(t, x(t, \tau, \xi))}{\partial x} X \quad \text{con} \quad X(\tau) = 1,$$

por ende, la identidad (2.4) del Teorema 2.1 combinada con $|\xi_-| = 1$ implican que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\tau, \xi_-)}{\partial \xi} &= -\frac{D_\xi x(T(\tau, \xi_-, \tau, \xi_-)\, x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)}{\mathcal{F}(\tau, x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)) \cdot x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)} \\
&= -\frac{D_\xi x(\tau, \tau, \xi_-)\, x(\tau, \tau, \xi_-)}{\mathcal{F}(\tau, x(\tau, \tau, \xi_-)) \cdot x(\tau, \tau, \xi_-)} = -\frac{\xi_-}{\mathcal{F}(\tau, \xi_-) \cdot \xi_-} = -\frac{1}{\mathcal{F}(\tau, -1)}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a que $D_\xi(\tau, \tau, \xi_-) = 1$. En resumen, se tiene que $T(\tau, \xi_-) = \frac{-1}{\mathcal{F}(\tau, \xi_-)}$.

Luego, al calcular explícitamente $\frac{\partial H(\tau, \xi_-)}{\partial \xi}$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(\tau, \xi_-)}{\partial \xi} &= \frac{\delta}{2} e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau, \xi_-) - \tau)} \frac{\partial T(\tau, \xi_-)}{\partial \xi} x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-) \\
&\quad + e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau, \xi_-) - \tau)} \left\{ \frac{\partial x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)}{\partial T} \frac{\partial T(\tau, \xi_-)}{\partial \xi} + \frac{\partial x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)}{\partial \xi} \right\} \\
&= \frac{\partial T(\tau, \xi_-)}{\partial \xi} \left\{ \frac{\delta}{2} x(\tau, \tau, \xi_-) + \mathcal{F}(t, x(T(\tau, \xi_-), \tau, \xi_-)) \right\} + \frac{\partial x(\tau, \tau, \xi_-)}{\partial \xi} \\
&= \frac{\partial T(\tau, \xi_-)}{\partial \xi} \left\{ \frac{\delta}{2} x(\tau, \tau, \xi_-) + \mathcal{F}(\tau, \xi_-) \right\} + \frac{\partial x(\tau, \tau, \xi_-)}{\partial \xi} \\
&= -\frac{1}{\mathcal{F}(\tau, -1)} \left\{ -\frac{\delta}{2} + \mathcal{F}(\tau, -1) \right\} + 1 = \frac{\delta}{2\mathcal{F}(\tau, -1)}.
\end{aligned}$$

Además, recordemos que $\mathcal{F}(t,\xi) = C(t)\xi + B(t)\xi + g(t,\xi)$ con

- $C(t) \leq -\delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
- $|B(t)| \leq \frac{\delta}{4}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$,
- $g(t,0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y
- $|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leq \frac{\delta}{4}|x_1 - x_2|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

De este modo, al considerar $t = \tau$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$, se tiene que

$$\delta \leq -C(t), \quad -\frac{\delta}{4} \leq -B(t) \quad \text{y} \quad |g(\tau,-1)| = |g(\tau,-1) - g(\tau,0)| \leq \frac{\delta}{4}|-1-0| = \frac{\delta}{4},$$

lo cual implica que $|g(\tau,-1)| \leq \frac{\delta}{4}$, o equivalentemente,

$$-\frac{\delta}{4} \leq g(\tau,-1) \leq \frac{\delta}{4},$$

en particular, $-\frac{\delta}{4} \leq g(\tau,-1)$ y obtenemos

$$\mathcal{F}(\tau,-1) = -C(t) - B(t) + g(\tau,-1) \geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} > 0,$$

luego, se sigue que

$$\mathcal{J}(\xi_-) = \det\left(\frac{H_\tau(\xi_-)}{\partial\xi}\right) = \frac{H_\tau(\xi_-)}{\partial\xi} = \frac{\delta}{2\mathcal{F}(\tau,-1)} > 0.$$

Lo cual prueba que existe $\xi_- \in \mathcal{C}^-$ tal que $\mathcal{J}(\xi_-) > 0$, es decir, $\mathcal{J}(\mathcal{C}^-) \subseteq]0,+\infty[$ lo cual implica que $\det\left(\frac{H_\tau(\xi)}{\partial\xi}\right) > 0$ para todo $\xi \in \mathcal{C}^-$.

Similarmente para $\mathcal{C}^+$, consideremos $\xi_+ = 1$, el cual verifica $|\xi_+| = 1$, lo cual implica

$$|x(\tau,\tau,\xi_+)|^2 = |\xi_+|^2 = 1 = |x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+)|^2.$$

Entonces, el Lema 2.1 describe que $T(\tau,\xi_+)$ es único, lo cual implica $T(\tau,\xi_+) = \tau$.

Por otro lado, la identidad (2.4) combinado con $|\xi_+| = 1$ implican que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\tau,\xi_+)}{\partial\xi} &= -\frac{D_\xi x(T(\tau,\xi_+,\tau,\xi_+)\, x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+)}{\mathcal{F}(\tau, x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+)) \cdot x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+)} \\
&= -\frac{D_\xi x(\tau,\tau,\xi_+)\, x(\tau,\tau,\xi_+)}{\mathcal{F}(\tau,x(\tau,\tau,\xi_+)) \cdot x(\tau,\tau,\xi_+)} = -\frac{\xi_+}{\mathcal{F}(\tau,\xi_+)\cdot\xi_+} = -\frac{1}{\mathcal{F}(\tau,1)}
\end{aligned}$$

y por ende, se tiene que $\frac{\partial T(\tau,\xi_+)}{\partial\xi} = \frac{-1}{\mathcal{F}(\tau,\xi_+)}$.

De este modo, al evaluar $\frac{\partial H_\tau}{\partial \xi}$ en ξ_+, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(\tau,\xi_+)}{\partial \xi} &= \frac{\delta}{2} e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi_+)-\tau)} \frac{\partial T(\tau,\xi_+)}{\partial \xi} x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+) \\
&\quad + e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi_+)-\tau)} \left\{ \frac{\partial x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+)}{\partial T} \frac{\partial T(\tau,\xi_+)}{\partial \xi} + \frac{\partial x(T(\tau,\xi_+),\tau,\xi_+)}{\partial \xi} \right\} \\
&= \frac{\partial T(\tau,\xi_+)}{\partial \xi} \left\{ \frac{\delta}{2} x(\tau,\tau,\xi_+) + \mathcal{F}(\tau, x(\tau,\tau,\xi_+)) \right\} + \frac{\partial x(\tau,\tau,\xi_+)}{\partial \xi} \\
&= \frac{\partial T(\tau,\xi_+)}{\partial \xi} \left\{ \frac{\delta}{2} x(\tau,\tau,\xi_+) + \mathcal{F}(\tau,\xi_+) \right\} + \frac{\partial x(\tau,\tau,\xi_+)}{\partial \xi} \\
&= -\frac{1}{\mathcal{F}(\tau,1)} \left\{ \frac{\delta}{2} + \mathcal{F}(\tau,1) \right\} + 1 = \frac{-\delta}{2\mathcal{F}(\tau,1)}.
\end{aligned}$$

Más aún, recordemos que la Observación 1.3 implica la siguiente estimación:

$$2\mathcal{F}(t, x(t,\tau,\xi_+))x(t,\tau,\xi_+) = \frac{d}{dt}[x(t,\tau,\xi_+)|^2 \leq -\delta x^2(t,\tau,\xi_+),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, si $t = \tau$, se tiene que

$$\mathcal{F}(\tau,1) = \mathcal{F}(\tau, x(\tau,\tau,1))x(\tau,\tau,1) \leq -\frac{\delta}{2} x^2(\tau,\tau,1) = -\frac{\delta}{2} < 0,$$

lo cual implica que

$$\mathcal{J}(\xi_+) = \det \left(\frac{\partial H_\tau(\xi_+)}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial H_\tau(\xi_+)}{\partial \xi} = \frac{-\delta}{2\mathcal{F}(\tau,1)} > 0.$$

Por lo tanto, existe $\xi_+ \in \mathcal{C}^+$ tal que $\mathcal{J}(\xi_+) > 0$, es decir, $\mathcal{J}(\mathcal{C}^+) \subseteq]0,+\infty[$ lo cual implica que $\det \left(\frac{H_\tau(\xi)}{\partial \xi} \right) > 0$ para todo $\xi \in \mathcal{C}^+$.

Luego, si $n = 1$, se concluye que $\det \left(\frac{H_\tau(\xi)}{\partial \xi} \right) > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, lo que equivale a que el Homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que preserva orientación para todo $\tau \in \mathbb{R}$ y cuando $n = 1$.

Caso $n \geq 2$:

Dado que $n \geq 2$, tenemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}^n$. Esta afirmación combinada con la continuidad de $\mathcal{J}$ implica que $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ lo cual implica que

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subseteq]-\infty, 0[, \quad \text{o bien,} \quad \mathcal{J}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subseteq]0, +\infty[$$

pero no puede pasar que $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ esté en ambos conjuntos a la vez.

Entonces, como en el caso $n = 1$, para poder demostrar que $\det D_\xi H_\tau(\xi) > 0$ para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tenemos que mostrar que $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subseteq]0, +\infty[$. Gracias al párrafo anterior, solamente tenemos que demostrar la existencia de $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\det D_\xi H_\tau(\xi) > 0$.

Para ello, consideremos $\xi = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se tiene que $||\xi|| = 1$, y por ende

$$||x(\tau,\tau,\xi)||^2 = ||\xi||^2 = 1 = ||x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2,$$

lo cual implica que $T(\tau,\xi) = \tau$ gracias a la unicidad de T.

Del Lema 2.2, $(t,\tau,\xi)\mapsto D_\xi x(t,\tau,\xi)$ es solución de la ecuación variacional

$$\frac{dY}{dt}=D_x\mathcal{F}(t,x(t,\tau,\xi))Y \quad \text{con} \quad Y(\tau)=I,$$

entonces, la identidad (2.4) combinada con $||\xi||=1$ implican que

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi} &= -\frac{D_\xi x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)\,x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\mathcal{F}(\tau,x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))\cdot x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}\\ &= -\frac{D_\xi x(\tau,\tau,\xi)\,x(\tau,\tau,\xi)}{\mathcal{F}(\tau,x(\tau,\tau,\xi))\cdot x(\tau,\tau,\xi)}=-\frac{\xi}{\mathcal{F}(\tau,\xi)\cdot\xi}.\end{aligned}$$

De la misma ecuación variacional descrita anteriormente, tenemos la identidad $D_\xi(\tau,\tau,\xi)=I$, lo cual implica que $\frac{\partial x_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\xi_j}=\delta_{i,j}$ siendo $\delta_{i,j}$ la función delta de Kronecker.

Luego, (2.15) junto con $x(\tau,\tau,\xi)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ implican que

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial\xi_j} &= \frac{\delta}{2}e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi_j}x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi)\\ &\quad +e^{\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)}\left\{\frac{\partial x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial T}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi_j}+\frac{\partial x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\right\}\\ &= \frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\left\{\frac{\delta}{2}x_i(\tau,\tau,\xi)+\frac{\partial x_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial T}\right\}+\frac{\partial x_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\\ &= -\frac{\xi_j}{\mathcal{F}(\tau,\xi)\cdot\xi}\left\{\frac{\delta}{2}\xi_i+\mathcal{F}_i(\tau,\xi)\right\}+\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Para entender mejor el término $\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial\xi_j}$, tendremos que estudiar cuatro casos posibles para $i,j\in\{1,\dots,n\}$:

(i) $j=1$ pero $i\neq 1$
(ii) $i\neq j$ pero $j\neq 1$
(iii) $i=j=1$
(iv) $i=j$ pero $j,i\neq 1$.

Para el caso (i), notemos que $\xi_j=1$, $\xi_i=0$ y $\delta_{i,j}=0$, luego

$$\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial\xi}=\frac{-\xi_j}{\mathcal{F}(\tau,\xi)\cdot\xi}\left\{\frac{\delta\xi_i}{2}+\mathcal{F}_i(\tau,\xi)\right\}+\delta_{i,j}=\frac{-\mathcal{F}_i(\tau,\xi)}{\mathcal{F}_1(\tau,\xi)}.$$

Para el segundo caso, se tiene que $\xi_j=0$ y $\delta_{i,j}=0$, por ende

$$\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial\xi}=\frac{-\xi_j}{\mathcal{F}(\tau,\xi)\cdot\xi}\left\{\frac{\delta\xi_i}{2}+\mathcal{F}_i(\tau,\xi)\right\}+\delta_{i,j}=0+0=0.$$

Si suponemos que se verifica el tercer caso, se cumple $\xi_i=\xi_j=\delta_{i,j}=1$, lo cual implica

$$\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial\xi}=\frac{-1}{\mathcal{F}_1(\tau,\xi)}\left\{\frac{\delta}{2}+\mathcal{F}_1(\tau,\xi)\right\}+1=\frac{-\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)}-1+1=\frac{-\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)}.$$

Por último, si suponemos que se cumple el caso (iv), $\xi_i = \xi_j = 0$ y $\delta_{i,j} = 1$, lo cual implica que

$$\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial \xi} = \frac{-\xi_j}{\mathcal{F}(\tau,\xi)\cdot\xi}\left\{\frac{\delta\xi_i}{2} + \mathcal{F}_i(\tau,\xi)\right\} + \delta_{i,j} = 1,$$

por usar que $\xi = (1,0,0\ldots,0) = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, se verifica

$$\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} = \begin{cases} -\dfrac{\mathcal{F}_i(\tau,\xi)}{\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & j = 1 \neq i, \\ 0 & j \neq i, j \neq 1, \\ -\dfrac{\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & i = j = 1 \\ 1 & i = j, i \neq 1, \end{cases}$$

de este modo,

$$\frac{\partial H_\tau(\xi)}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} -\frac{\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\mathcal{F}_2(\tau,\xi)}{\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\mathcal{F}_3(\tau,\xi)}{\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\mathcal{F}_n(\tau,\xi)}{\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $D_\xi H_\tau(\xi)$ es una matriz triangular inferior, cuyos elementos diagonales $\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_i}$ verifican

$$\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_i} = \begin{cases} -\frac{\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} & i = 1, \\ 1 & i \neq 1, \end{cases}$$

lo que conlleva a que det $\frac{\partial H_\tau(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)}$.

Ahora, recordemos que la Observación 1.3 establece la siguiente estimación

$$2\mathcal{F}(t,x(t,\tau,\xi))\cdot x(t,\tau,\xi) = 2x'(t,\tau,\xi)\cdot x(t,\tau,\xi) = \frac{d}{dt}(||x(t,\tau,\xi)||^2) \leq -\delta||x(t,\tau,\xi)||^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual implica que

$$\mathcal{F}(t,x(t,\tau,\xi))\cdot x(t,\tau,\xi) \leq -\frac{\delta}{2}||x(t,\tau,\xi)||^2,$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$. De este modo, recordemos que $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$ implica la identidad $\tau = T(\tau, \xi)$, lo cual a su vez implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\tau, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i(\tau, \xi)\xi_i = \mathcal{F}(\tau, \xi) \cdot \xi \\ &= \mathcal{F}(T(\tau, \xi), x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)) \cdot x(T(\tau, \xi), \tau, \xi) \\ &\leq -\frac{\delta}{2} \underbrace{||x(T(\tau, \xi), \tau, \xi)||^2}_{=1} = -\frac{\delta}{2} < 0 \end{aligned}$$

entonces, se tiene que $\mathcal{F}_1(\tau, \xi) < 0$ y en consecuencia, $\det D_\xi H_\tau(\xi) = -\frac{\delta}{2\mathcal{F}_1(\tau,\xi)} > 0$. Por ende, existe $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\det D_\xi H_\tau(\xi) > 0$ y $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subseteq]0, +\infty[$, es decir, $\det D_\xi H_\tau(\xi) > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

En resumen, probamos que el homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en si mismo que preserva orientación para todo $n \geq 2$.

Se concluye que para cada $n \in \mathbb{N}$, el homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en si mismo que preserva orientación, lo cual concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

Suavidad del Homeomorfismo de Lin y su inversa.

En la sección anterior establecimos condiciones suficientes para verificar que los tiempos de cruce T y S sean funciones de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R})$, con ello se demostró que el Homeomorfismo de Lin H_τ es, de hecho, un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en sí mismo que preserva orientación para cada $\tau\in\mathbb{R}$ fijo.

En esta sección estableceremos condiciones sobre el sistema no lineal (1.11) para que el homeomorfismo H_τ sea un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en sí mismo con $k\geq 2$ para todo τ fijo. En otras palabras, buscamos obtener propiedades sobre el campo $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi+B(t)\xi+g(t,\xi)$ para que los homeomorfismos de Lin H_τ y G_τ tengan derivadas de orden superior que sean continuas, similarmente al capítulo anterior.

Nuestro punto de partida será establecer condiciones para verificar que T y S sean funciones de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R})$, posteriormente, abordaremos el problema de la suavidad de H y de H_τ mencionadas anteriormente.

1. Suavidad del Crossing Time del sistema no lineal.

Recordemos que la función $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ corresponde a la única solución del sistema no lineal (1.11), la cual también puede ser vista como una función

$$\begin{array}{rcl} x:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t,\tau,\xi) & \longmapsto & x(t,\tau,\xi). \end{array}$$

En el Lema 2.1 se establece la existencia y unicidad de la función Crossing Time $T:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to\mathbb{R}$, la cual verifica la propiedad $||x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2=1$ para todo $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Por otro lado, en el Teorema 2.1 se afirma que si las funciones $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi,(t,\xi)\mapsto B(t)\xi$ y $(t,\xi)\mapsto g(t,\xi)$ son de clase $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, entonces, $T\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R})$.

De este modo, el siguiente resultado proporciona condiciones suficientes que aseguran la suavidad de la función $(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)$, la cual será útil para proporcionar propiedades para que la función Crossing Time sea de clase $\mathscr{C}^k$:

Teorema 3.1 (Suavidad de la función crossing time). *Supongamos que en el sistema (1.11), se verifican las condiciones (1.12), (1.13). Sea T función Crossing Time asociado a (1.11). Si se verifica que $g\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, y que tanto $(t,\xi)\mapsto B(t)\xi$ como $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi$ son funciones de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ con $k>1$, entonces, para todo $(\tau_0,\xi_0)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$existen subconjuntos abiertos $U\subseteq\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ y $V\subseteq\mathbb{R}$ tales que*

(i) *$(\tau_0,\xi_0)\in U$ y $T(\tau,\xi)\in V$ para todo $(\tau,\xi)\in U$.*

(ii) *$T\in\mathscr{C}^k(U,V)$.*

En particular, se verifica que $T\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$.

La demostración de este Teorema emula los pasos de la demostración realizada para el caso $k = 1$, pues, será una aplicación de dos resultados importantes: el Teorema de la función implícita para funciones de clase $\mathscr{C}^k$ y la derivabilidad de clase $\mathscr{C}^k$ de las soluciones de ecuaciones diferenciales con respecto a las condiciones iniciales. De un modo similar a lo efectuado en el Capítulo 2, trabajaremos con los enunciados de estos teoremas propuestos en el libro de Thomas Sideris [**40**, Teo 5.7, Cor 5.1, Teo 6.1, Cor 6.1] que son enunciados sin demostración en el Apéndice A.

A partir de la Proposición A.7 y de algunos resultados clásicos del cálculo vectorial, obtendremos resultados que serán de utilidad para demostrar el Teorema 3.1:

LEMA 3.1. *Supongamos que se verifican las propiedades (1.12) y (1.13), donde las funciones* $(t,\xi) \mapsto B(t)\xi$ *e* $(t,\xi) \mapsto C(t)\xi$ *son de clase* $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *y además que* $g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *con* $k > 1$.

Entonces, la solución $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ *del sistema no lineal (1.11) es de clase* $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida en (2.6), donde $t \mapsto C(t)$, $t \mapsto B(t)$ y $(t, y) \mapsto g(t, y)$ verifican las propiedades (1.12) y (1.13), es decir, se verifica lo siguiente:

(i) La matriz C es de la forma $C(t) = \mathrm{diag}\{C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)\}$ siendo $C_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas y acotadas que satisfacen $C_i(t) \leq -\delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

(ii) La matriz $B : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función continua en $\mathbb{R}$ que verifica la desigualdad $||B(t)|| \leq \frac{\delta}{4}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Además, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua que verifica $g(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$||g(t, y_1) - g(t, y_2)|| \leq \frac{\delta}{4}||y_1 - y_2|| \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \quad \text{y todo } t \in \mathbb{R}.$$

Si suponemos que $(t,\xi) \mapsto C(t)\xi$, $(t,\xi) \mapsto B(t)\xi$ e $(t,\xi) \mapsto g(t,\xi)$ son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, entonces, la función $(t,\xi) \mapsto \mathcal{F}(t,\xi)$ definida en (2.6) verifica $\mathcal{F} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ por ser suma de funciones de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Por la Proposición A.7, la función $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(D, \mathbb{R}^n)$ donde

$$D = \{(t, \tau, \xi) \colon a(\tau, \xi) < t < b(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\},$$

siendo $]a(\tau, \xi), b(\tau, \xi)[\subseteq \mathbb{R}$ el intervalo maximal de existencia de $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$. Sin embargo, se tiene que $]a(\tau, \xi), b(\tau, \xi)[= \mathbb{R}$ para todo $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ en virtud de la Proposición A.1. Luego, se verifica que $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y se concluye que $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Usando la regla de la cadena [**30**, Teo 9, Cap 2] junto con el Lema 3.1 obtenemos un resultado de fundamental importancia para determinar la derivabilidad de la función ψ definida en la Observación 2.3. Recordemos la construcción de dicha función:

Dada la única solución $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ del sistema no lineal (1.11) que verifica $x(\tau, \tau, \xi) = \xi$, la función $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\psi(\tau, \xi, t) = ||x(t, \tau, \xi)||^2 - 1.$$

Corolario 3.1. *Bajo las hipótesis del Lema 3.1, se tiene que* $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\psi(\tau,\xi,t) = ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1$$

verifica la propiedad $\psi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Demostración. Como $g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ y las funciones

$$(t,\xi) \mapsto C(t)\xi \quad \text{y} \quad (t,\xi) \mapsto B(t)\xi$$

son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, el Lema 3.1 nos dice que la solución $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ del sistema no lineal (1.11) es de clase $\mathscr{C}^k$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ cuando es vista como una función $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$.

Además, la función $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \mapsto ||x||^2 - 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ por ser un polinomio de n variables reales, de este modo,

$$\psi(\tau,\xi,t) = ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1 = \sum_{i=1}^n x_i^2(t,\tau,\xi) - 1$$

es una composición de funciones de clase $\mathscr{C}^k$, e decir, $\psi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ que es exactamente lo que se quería probar. □

1.1. Demostración del Teorema 3.1. Sean X, Y, Z como en el Teorema 2.1, es decir, $X := (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \sqrt{|\cdot|^2 + ||\cdot||^2})$ e $Y = Z = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, siendo $||\cdot||$ la norma euclideana de $\mathbb{R}^n$ y $|\cdot|$ el valor absoluto los cuales son $\mathbb{R}-$espacios de Banach.

Además, recordemos que $\mathcal{O} \subseteq X\times Y$ está definido por $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$ el cual es un subconjunto abierto en $X\times Y$ mientras que $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ corresponde a la única solución de (1.11). Definimos la función $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ por $f(\tau,\xi,t) = ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1$, la cual corresponde a la restricción sobre el abierto $\mathcal{O}$ de la función $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y está definida por

$$\psi(\tau,\xi,t) := ||x(t,\tau,\xi)||^2 - 1.$$

Como $g \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ y las funciones $(t,\xi) \mapsto B(t)\xi$, $(t,\xi) \mapsto C(t)\xi$ son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, el Corolario 3.1 dice que $\psi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, entonces, $f = \psi|_{\mathcal{O}} \in \mathscr{C}^k(\mathcal{O},\mathbb{R}^n)$.

Recordemos además que T verifica la propiedad

$$||x(T(\tau,\xi),\tau,y)||^2 = 1 \quad \text{para todo } (\tau,\xi) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),$$

implica que se verifica la identidad $f(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0)) = 0$.

Por otro lado, en el Paso 5 de la demostración del Teorema 2.1, se verificó que $\frac{\partial f(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0))}{\partial T}$, vista como matriz cuadrada de orden 1, es invertible y que su inversa pertenece a $\mathcal{L}(Z,Y)$.

Entonces, en el Paso 6 de la demostración del Teorema 2.1, se aplica el Teorema de la Función Implícita para asegurar la existencia de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ con $(\tau,\xi) \in U$, un subconjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ y una función $s : U \to V$ tales que

(i) $(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0)) \in U\times V$.
(ii) $U\times V \subseteq \mathcal{O}$ y por ende $U \subseteq \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.
(iii) $s \in \mathscr{C}^1(U,V)$ y $\psi(\tau,\xi,s(\tau,\xi)) = 0$ para todo $(\tau,\xi) \in U$.
(iv) $s(\tau_0,\xi_0) = T(\tau_0,\xi_0)$,
(v) En el mismo Paso 6 de demostración del Teorema 2.1, se probó que $s = T|_U$,

entonces, el Teorema de la Función implícita para funciones de clase $\mathscr{C}^k$ (Proposición A.6) nos dice que la función s es de clase $\mathscr{C}^k(U,V)$, esto nos permite afirmar que $T|_U = s \in \mathscr{C}^k(U,V)$.

En resumen, si $(\tau_0,\xi_0) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, existe una vecindad $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ de (τ_0,ξ_0) y una vecindad $V\subseteq\mathbb{R}$ de $T(\tau_0,\xi_0)$ tales que la función Crossing Time $(\tau,\xi)\mapsto T(\tau,\xi)$ verifica que $T\in\mathscr{C}^k(U,V)$.

Por último, como $(\tau_0,\xi_0)\in U$ y $T\in\mathscr{C}^k(U,V)$, se tiene que todas las $k-$ésimas derivadas de T existen y son continuas en (τ_0,ξ_0). Ahora, como (τ_0,ξ_0) es arbitrario, las $k-$ésimas derivadas de $(\tau,\xi)\mapsto T(\tau,\xi)$ existen y son continuas en todos los pares $(\tau_0,\xi_0)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, lo cual equivale a $T\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$ y el resultado se sigue. ☐

2. La suavidad del Homeomorfismo de Lin.

Dada la única solución $t\mapsto x(t,\tau,\xi)$ del sistema (1.11) con $x(\tau,\tau,\xi)=\xi$, junto con la función Crossing Time $(\tau,\xi)\mapsto T(\tau,\xi)$, recordemos la función de Lin definida en (1.16), es decir,

$$\begin{array}{rcl} H:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\tau,\xi) & \longmapsto & H(\tau,\xi)=\begin{cases} x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)\exp\left(\dfrac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)\right) & y\neq 0 \\ \\ 0 & y=0. \end{cases} \end{array}$$

Entonces, nuestro objetivo se logra al verificar la existencia y continuidad de todas las derivadas de H en $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, las cuales serán abordadas en el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.1, se verifica que la función de Lin H es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. En particular, para todo τ fijo, el homeomorfismo de Lin H_τ verifica $H_\tau\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.*

Demostración. Sean $\tau\in\mathbb{R}$ y $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Como se verifican las condiciones (1.12), (1.13) y además las funciones $(t,\xi)\mapsto B(t)\xi$ e $(t,\xi)\mapsto C(t)\xi$ y g son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, el Lema 3.1 implica que $T\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R})$.

Entonces, para todo $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ se verifica

$$H(\tau,\xi)=x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)\exp\left(-\frac{\delta}{2}(T(\tau,\xi)-\tau)\right),$$

el cual, corresponde a la composición y producto de funciones de clase $\mathscr{C}^k$ lo que implica que $(\tau,\xi)\mapsto H(\tau,\xi)$ sea de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

Por último, si se fija $\tau\in\mathbb{R}$, se obtiene que $H(\tau,\cdot)\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ inmediatamente. Ésto es equivalente a que $H_\tau\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ lo cual concluye la demostración. ☐

En lo que llevamos, hemos demostrado que $(\tau,\xi)\to H(\tau,\xi)$ es una función de clase $\mathscr{C}^k$ en $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\times\{0\})$. En la siguiente sección, verificaremos que la inversa del Homeomorfimo de Lin H^{-1} también es de clase $\mathscr{C}^k$ en alguna vecindad de (τ,ξ) para todo $\xi\neq 0$ y $\tau\in\mathbb{R}$.

3. Suavidad de la Inversa del Homeomorfismo de Lin

Al igual que con H y H_τ, nuestro punto de partida será analizar propiedades del Crossing Time S de la ecuación lineal (1.10). Hasta ahora, hemos visto que $S \in \mathscr{C}^1$ en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y no requerimos de condiciones de diferenciabilidad y/o suavidad sobre el sistema lineal (1.10). Más aún, todavía podremos deducir que el Crossing Time de la ecuación lineal (1.10) es de clase $\mathscr{C}^k$ sin requerir de propiedades adicionales sobre la ecuación diferencial lineal (1.10) que no sean las establecidos en las propiedades **(L1)** y **(L2)**. Se demostrará al aplicar solamente el Teorema de la regla de la cadena, [**30**, Teo 11, Cap 2, pág 134].

Previo a demostrar dichos resultados, recordemos que el Lema 2.3 asegura la existencia y unicidad de la función Crossing Time $(\tau, \xi) \mapsto S(\tau, \xi)$, la cual satisface

$$||y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)||^2 = ||\xi||^2 e^{-\delta(S(\tau,\xi)-\tau)} = 1$$

lo cual implica directamente la identidad (2.12), a saber,

$$S(\tau,\xi) = \frac{1}{\delta}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) + \tau$$

con $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Cuya demostración consistió en reconstruir las funciones C, B y g del sistema (1.11). Sin embargo, otro enfoque para la demostración es observar a S como una composición de funciones de clase $\mathscr{C}^k$ y aplicar, como se dijo anteriormente, el Teorema de la regla de la cadena y esa será la estrategia de la demostración.

Teorema 3.3. *Sea $k \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Si $S : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ es la función crossing time del sistema (1.10), entonces, se verifica la propiedad $S \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$.*

Demostración. Por un lado, la función $(\tau, \xi) \mapsto ||z||^2$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R})$ y la función $t \mapsto \ln(t)$ es de clase $\mathscr{C}^k(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, por otro lado, la función $(\tau, \xi) \mapsto \tau$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R})$. Entonces, el Teorema de la regla de la cadena dice que

$$(\tau,\xi) \mapsto \frac{1}{\delta}\ln(||\xi||^2)$$

es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$. Luego, como el Lema 2.3 establece que

$$S(\tau,\xi) = \frac{1}{\delta}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right) + \tau$$

con $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se tiene S es la suma de dos funciones de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$, por ende, $S \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$. □

Primero que todo, recordemos que la función Crossing Time $(\tau, \xi) \mapsto S(\tau, \xi)$ verifica la identidad

$$||\xi||^2 \exp\left(-\delta(S(\tau,\xi)-\tau)\right) = 1 \quad \text{para todo } (\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

siendo $t \mapsto y(t,\tau,\xi) = \exp\left(-\frac{\delta}{2}(t-\tau)\right) I\xi \in \mathbb{R}^n$ la solución de (1.10). Entonces, para cada $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ se tiene que

$$y(S(\tau,\xi),\tau,\xi) = \exp\left(-\frac{\delta}{2}(S(\tau,\xi)-\tau)\right) I\xi = \frac{\xi}{||\xi||}.$$

Entonces, para $\xi \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} H_\tau^{-1}(\xi) &= x\left(\tau, S(\tau,\xi), \xi \exp\left(-\frac{\delta}{2}(S(\tau,\xi)-\tau)\right)\right) \\ &= x\left(\tau, \frac{1}{\delta}\ln(||\xi||^2)+\tau, \frac{\xi}{||\xi||}\right). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función definida en (2.6), la identidad precedente será de gran utilidad para demostrar el resultado que sigue a continuación, el cual establece que, bajo las condiciones del Teorema 2.1, se tiene que H^{-1} es tan suave como la función $\mathcal{F}$.

TEOREMA 3.4. *Suponga que se verifican las hipótesis del Teorema 3.1. Entonces, la función $(\tau,\xi)\mapsto H_\tau^{-1}(\xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ y en particular, para cada $\tau\in\mathbb{R}$ fijo, se tiene que $H_\tau^{-1}\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que para $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, se tiene que

$$H_\tau^{-1}(\xi) = G(\tau,\xi) = x\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right),$$

entonces,

- La solución $(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)$ de (1.11) es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ en virtud del Lema 3.1.
- El Teorema 3.3 establece que la función Crossing time S asociado al sistema lineal (1.10) es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R})$.
- La función $(\tau,\xi)\mapsto\frac{\xi}{||\xi||}$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$.
- Por último y no menos importante, se tiene que $(\tau,\xi)\mapsto\tau$ tambíen es una función de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$.

Por ende, la función $\rho:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to\mathbb{R}^{2+n}$ definida por

$$\rho(\tau,\xi) = \left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right)$$

es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$ al serlo por coordenadas (este resultado puede ser visto, por ejemplo, en [**30**, Teo. 9, Cap. 2, pág 128]).

Recordemos que para $\xi\neq 0$, se cumple la igualdad

$$G(\tau,\xi) = x\left(\tau, S(\tau,\xi), \frac{\xi}{||\xi||}\right) = x(\rho(\tau,\xi)),$$

y por ende, G es composición de funciones de clase $\mathscr{C}^k$. Por la regla de la cadena, $H_\cdot^{-1} = G\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$ y al fijar τ, se tiene que $H_\tau^{-1}\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n)$ lo cual concluye la demostración. □

Como ya se probó que H_τ y H_τ^{-1} son funciones de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, se obtiene inmediatamente el siguiente corolario, el cual resulta ser una combinación de los Teoremas 2.5, 3.2 y 3.4:

COROLARIO 3.2. *Bajo las condiciones del Teorema 3.1, se tiene que el homeomorfismo de Lin H_τ es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ que preserva orientación para todo $\tau\in\mathbb{R}$ fijo.*

Capítulo 4

El Homeomorfismo de Palmer via Crossing y sus propiedades de suavidad

Como se vio en el Capítulo 1, se define la función Crossing Time para los sistemas (1.1) y (1.2) como funciones $T, S : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, las cuales verifican las igualdades:

$$V(T(\tau,\xi), x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1 \quad \text{y} \quad V(S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1,$$

para todo $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, donde $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ y $t \mapsto y(t,\tau,\xi)$ son las respectivas soluciones de (1.1) y (1.2) con condición inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$ en $t = \tau$.

Las propiedades **(P3)** y **(P4)**, enunciadas en el Capítulo 1, combinadas con la estabilidad asintótica uniforme de (1.1) y (1.2) descrita en el Lema 1.1 jugarán un rol clave en la demostración de la existencia y unicidad de los crossing times T y S.

En la primera parte de este capítulo, se demostrará la ya mencionada existencia y unicidad de las funciones S y T con mayores detalles. La estrategia de la demostración será aplicar las propiedades **(P3)**, **(P4)**, la estabilidad asintótica uniforme de los sistemas (1.1) y (1.2) y el Teorema de los valores intermedios [**41**, Teo 1, Cap 7].

En la segunda parte de este capítulo, estudiaremos condiciones suficientes sobre los sistemas (1.1) y (1.2) para que las $k-$ésimas derivadas de las funciones T y S existan y sean continuas en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Adicionalmente, utilizaremos este y otros resultados con el objetivo de demostrar que $H, G \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, lo cual implicará que cada homeomorfismo de Palmer via Crossing time $H_\tau = H(\tau,\cdot)$ y $G_\tau = G(\tau,\cdot)$ definidos en (1.7) y (1.8), respectivamente, también sean de clase $\mathscr{C}^k$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Veremos que esto requerirá agregar hipótesis adicionales de regularidad sobre los sistemas (1.1) y (1.2).

El Lema 1.1 será importante para demostrar el siguiente resultado:

LEMA 4.1. *Bajo las hipótesis **(P1)–(P4)**, suponga que $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ y $t \mapsto y(t,\tau,\xi)$ son las respectivas soluciones de (1.1) y (1.2) con condición inicial ξ en $t = \tau$.*

Si $\xi \neq 0$, existen $T(\tau,\xi), S(\tau,\xi) \in \mathbb{R}$ únicos, tales que

$$V(T(\tau,\xi), x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1 \quad y \quad V(S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. **Existencia.**

Consideremos la función $V\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la propiedad **(P3)** vista en el Capítulo 1 y $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Por el Lema 1.1 del Capítulo 1, se verifican los comportamientos asintóticos

$$\lim_{t\to+\infty} V(t, x(t,\tau,\xi)) = 0 \tag{4.1}$$

y

$$\lim_{t\to-\infty} V(t,x(t,\tau,\xi)) = +\infty. \tag{4.2}$$

La definición de límite y la propiedad **(P3)** aseguran que, dado $\varepsilon = 1$, existen $T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon) > 0$ tales que

$$V(t,x(t,\tau,\xi)) = |V(t,x(t,\tau,\xi))| < 1 \quad \text{para todo } t \geq T_1(\varepsilon) \qquad \text{por (4.1)},$$

$$V(t,x(t,\tau,\xi)) = |V(t,x(t,\tau,\xi))| > 1 \quad \text{para todo } t \leq -T_2(\varepsilon) \quad \text{por (4.2)}.$$

Entonces, dados $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\tau \in \mathbb{R}$, definamos el conjunto $I = [-T_2(\varepsilon), T_1(\varepsilon)]$ y la función

$$\begin{array}{rcl} \phi_1(\tau,\xi,\cdot) : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi_1(\tau,\xi,t) := V(t,x(t,\tau,\xi)) - 1. \end{array}$$

Como $t \mapsto \phi_1(\tau,\xi,t)$ es continua en $\mathbb{R}$, se tiene que $t \mapsto \phi_1(\tau,\xi,t)$ es continua en el compacto I. Por otro lado, se verifica que

$$\phi_1(\tau,\xi,T_1(\varepsilon)) < 0 \quad \text{y} \quad \phi_1(\tau,\xi,-T_2(\varepsilon)) > 0,$$

y el Teorema de los valores intermedios (ver por ejemplo [**41**, Teo 1, Cap 7]) implica la existencia de $T(\tau,\xi)$ tal que

$$V(T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) - 1 = \phi(\xi,\tau,T(\tau,\xi)) = 0,$$

es decir, existe $T(\tau,\xi) \in I \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$V(T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1,$$

lo cual garantiza la existencia de la función Crossing Time para el sistema (1.1).

Unicidad:

Supongamos que T_0 es otro número real tal que $V(T_0,x(T_0,\tau,\xi)) = 1$, entonces,

$$V(T_0,x(T_0,\tau,\xi)) = 1 = V(T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)),$$

es decir, se tiene que $V(T_0,x(T_0,\tau,\xi)) = V(T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))$ y por la inyectividad de $t \mapsto V(t,x(t,\xi,\tau))$ descrita en la observación 1.1 del Capítulo 1, se tiene que $T_0 = T(\tau,\xi)$ lo cual demuestra la unicidad de T.

Con un argumento similar al anterior, podemos demostrar la existencia de $L_1, L_2 > 0$ tales que

$$V(L_1,y(L_1,\tau,\xi)) < 1 \quad \text{y} \quad V(-L_2,y(-L_2,\tau,\xi)) > 1,$$

y, de este modo, construir una función $\varphi_2(\tau,\xi\cdot) : [-L_2,L_1] \to \mathbb{R}$ la cual está definida por $\varphi_2(\tau,\xi\cdot) := V(t,y(t,\tau,\xi)) - 1$ y demostrar que existe un único $S(\tau,\xi)$ tal que

$$V(S(\tau,\xi),y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1,$$

lo cual demuestra el Teorema. □

Observación 4.1. *Del Lema 1.1, no es difícil deducir que cada* $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *verifica*

i) *Si* $V(\tau,\xi) > 1$, *entonces* $T(\tau,\xi) > \tau$ *y* $S(\tau,\xi) > \tau$,
ii) *Si* $V(\tau,\xi) < 1$, *entonces* $T(\tau,\xi) < \tau$ *y* $S(\tau,\xi) < \tau$,
iii) *Si* $V(\tau,\xi) = 1$, *entonces* $T(\tau,\xi) = S(\tau,\xi) = \tau$.

OBSERVACIÓN 4.2. *Recordemos que la demostración de la existencia y unicidad del Crossing Time $T(\tau,\xi)$ requirió usar la familia de funciones auxiliares*

$$\begin{aligned}\phi_1(\tau,\xi,\cdot):I(\tau,\xi) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto \phi_1(\tau,\xi,t)=V(t,x(t,\tau,\xi))-1\end{aligned}$$

siendo $I(\tau,\xi)\subseteq\mathbb{R}$ algún intervalo cerrado y acotado que depende de $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y $\tau\in\mathbb{R}$.

De manera similar, para construir el crossing Time S, se requirió la construcción de la siguiente familia de funciones

$$\begin{aligned}\phi_2(\tau,\xi,\cdot):J(\tau,\xi) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto \phi_2(\tau,\xi,t)=V(t,y(t,\tau,\xi))-1\end{aligned}$$

siendo $J(\tau,\xi)\subseteq\mathbb{R}$ algún intervalo cerrado y acotado dependiente de $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y $\tau\in\mathbb{R}$.

Entonces, para $i=1,2$ podemos hacer una extensión de ϕ_i considerando la función $\psi_i:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\psi_i(\tau,\xi,t)=\begin{cases}V(t,x(t,\tau,\xi))-1 & i=1,\\ \\ V(t,y(t,\tau,\xi))-1 & i=2,\end{cases}$$

y tener en cuenta dos propiedades:

- *Para todo $\xi_0\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y todo $\tau_0\in\mathbb{R}$ se verifica*

$$\psi_1(\tau_0,\xi_0,\cdot)|_{I(\tau_0,\xi_0)}=\phi_1(\tau_0,\xi_0,\cdot)\quad y\quad \psi_2(\tau_0,\xi_0,\cdot)|_{J(\tau_0,\xi_0)}=\phi_2(\tau_0,\xi_0,\cdot).$$

- *Para todo $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y todo $\tau\in\mathbb{R}$ se verifica que*

$$\psi_1(\tau,\xi,T(\tau,\xi))=0\quad y\quad \psi_2(\tau,\xi,S(\tau,\xi))=0.$$

Las funciones ψ_i jugarán un rol crucial en la siguiente sección. En efecto, buscaremos condiciones suficientes para que ψ_i sea continuamente diferenciable en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ con la esperanza de demostrar que tanto $\xi\mapsto T(\tau,\xi)$ como $\xi\mapsto S(\tau,\xi)$ lo sean en $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ bajo las condiciones obtenidas para ψ_i.

Para simplificar la notación, las funciones H y G descritas respectivamente en (1.7) y (1.8), serán denominadas como las ***Funciones de Palmer via Crossing Time*** y recordemos que, para cada $t\in\mathbb{R}$ fijo, la función H_t es un homeomorfismo con inversa G_t, las cuales serán denominadas como los ***Homeomorfismos de Palmer via Crossing Time***. En la sección 2 estudiaremos condiciones para determinar la derivabilidad S y T, mientras que en la sección 3 estudiaremos condiciones necesarias para determinar la derivabilidad de las funciones de Palmer vía Crossing Time.

1. Derivabilidad de los Crossing Times

Recordemos que si $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ y $\tau\in\mathbb{R}$, las funciones T y S satisfacen

$$V(T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))=V(S(\tau,\xi),y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))=1.$$

Ésto nos dice que T y S son definidos implícitamente, de este modo, el Teorema de la función implícita, la regla de la cadena y la derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales nuevamente jugarán un rol importante en el estudio de la derivabilidad de S y T.

Con el fin de estudiar las funciones T y S, estudiaremos propiedades de las funciones $\psi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas en la Observación 4.2.

Como ha sido habitual, sean $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ y $t \mapsto y(t,\tau,\xi)$ las respectivas soluciones de los sistemas (1.1) y (1.2) con condición inicial ξ en tiempo $t=\tau$. Asimismo, continuaremos usando la notación vectorial $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ junto con

$$x(t,\tau,\xi) = (x_1(t,\tau,\xi),\ldots,x_n(t,\tau,\xi)) \quad \text{e} \quad y(t,\tau,\xi) = (y_1(t,\tau,\xi),\ldots,y_n(t,\tau,\xi)).$$

El siguiente resultado presenta condiciones suficientes para que ψ_1 y ψ_2 sean de clase $\mathscr{C}^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.1. *Bajo las hipótesis del Lema 1.2, si suponemos las propiedades $V \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, y los operadores de Nemitskii de los sistemas (1.1) y (1.2) verifican $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ con $k \in \mathbb{N}$, entonces, ψ_1 y ψ_2 son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Por otro lado, si $\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}$ es la derivada de ψ_1 con respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi} \tag{4.3}$$

mientras que la derivada de ψ_1 respecto a t, a saber $\frac{\partial \psi_1}{\partial t}$, verifica

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi} \cdot \mathcal{F}(t,x(t,\tau,\xi)) + \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial t} \tag{4.4}$$

Por último, si $\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi}$ es la derivada de ψ_1 con respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = \frac{\partial y(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial V(t,y(t,\tau,\xi))}{\partial \xi} \tag{4.5}$$

mientras que si $\frac{\partial \psi_2}{\partial t}$ es la derivada de ψ_2 respecto a t, se verifica

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial V(t,y(t,\tau,\xi))}{\partial \xi} \cdot \mathcal{G}(t,y(t,\tau,\xi)) + \frac{\partial V(t,y(t,\tau,\xi))}{\partial t} \tag{4.6}$$

Demostración. En efecto, considerando que $V \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y además $\mathcal{F} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ se tiene que $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ en virtud de la Proposición A.7. Entonces, recordando que

$$\psi_1(\tau,\xi,t) = V(t,x(t,\tau,\xi)) - 1,$$

se tiene que ψ_1 sólo consta de composiciones y combinaciones lineales de funciones de clase $\mathscr{C}^k$, lo cual implica que $\psi_1 \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Por otro lado, si suponemos que $\mathcal{G} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, se tiene que la función $(t,\tau,\xi) \mapsto y(t,\tau,\xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ en virtud de la Proposición A.7. Entonces, al recordar que

$$\psi_2(\tau,\xi,t) = V(t,y(t,\tau,\xi)) - 1,$$

se tiene, de manera análoga, que ψ_2 sólo consta de composiciones y combinaciones lineales de funciones de clase $\mathscr{C}^k$, por lo tanto $\psi_2 \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Para verificar la ecuación (4.3), notemos que para cada $i \in \mathbb{N}_n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,t)}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}\{V(t,x(t,\tau,\xi))-1\} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\{V(t,x(t,\tau,\xi))\} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi_j}\frac{\partial x_j(t,\tau,\xi)}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j(t,\tau,\xi)}{\partial \xi_i}\frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi_j},
\end{aligned}$$

y por ende,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,t)}{\partial \xi} &= \left(\frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,t)}{\partial \xi_1},\dots,\frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,t)}{\partial \xi_n}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j(t,\tau,\xi)}{\partial \xi_1}\frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi_j},\dots,\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j(t,\tau,\xi)}{\partial \xi_n}\frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi_j}\right) \\
&= \frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para verificar la ecuación (4.4),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}\{V(t,x(t,\tau,\xi))-1\} = \frac{\partial}{\partial t}\{V(t,x(t,\tau,\xi))\} \\
&= \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_i(t,\tau,\xi)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial t} + \frac{\partial V(x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial x(t,\tau,\xi)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial V(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial t} + \frac{\partial V(x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi}\cdot\mathcal{F}(t,x(t,\tau,\xi)),
\end{aligned}$$

mientras que para verificar (4.5) y(4.6), los cálculos son análogos al reemplazar $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ por $t \mapsto y(t,\tau,\xi)$. Con esto se concluye la demostración. $\square$

Con esto, ya tenemos las herramientas necesarias para poder estudiar la derivabilidad de las funciones S y T.

Teorema 4.2 (Suavidad de los crossing times de Palmer). *Consideremos $k \in \mathbb{N}$, supongamos que los sistemas (1.1) y (1.2) verifican las condiciones **(P1)–(P4)**, $\mathcal{F} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{G} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ y consideremos las funciones Crossing Time T y S de los sistemas (1.1) y (1.2), respectivamente.*

Si $i \in \{1,2\}$, para todo $\xi_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y todo $\tau_0 \in \mathbb{R}$ existen subconjuntos abiertos $U_i \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $V_i \subseteq \mathbb{R}$ tales

(i) $U_i \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$,
(ii) $(\tau_0, \xi_0) \in U_i$,
(iii) $T(\tau, \xi) \in V_1$ *para todo* $(\tau, \xi) \in U$.
(iv) $S(\tau, \xi) \in V_2$ *para todo* $(\tau, \xi) \in U_2$.
(v) $T \in \mathscr{C}^k(U_1, V_1)$ *y* $S \in \mathscr{C}^k(U_2, V_2)$.

En particular, se verifica que $T, S \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n)$.

Más aún, si $\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi}$ es la derivada parcial de $T := T(\tau, \xi)$ respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\dfrac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial \xi}\dfrac{\partial V(T,x(T,\tau,\xi))}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial V(T,x(T,\tau,\xi))}{\partial t} + \dfrac{\partial V(T,x(T,\tau,\xi))}{\partial \xi} \cdot \mathcal{F}(T,x(T,\tau,\xi))} \tag{4.7}$$

mientras que si $\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi}$ es la derivada parcial de $S := S(\tau, \xi)$ respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi} = -\frac{\dfrac{\partial y(S,\tau,\xi)}{\partial \xi}\dfrac{\partial V(S,y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial V(S,y(S,\tau,\xi))}{\partial t} + \dfrac{\partial V(S,y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi} \cdot \mathcal{G}(S,y(S,\tau,\xi))} \tag{4.8}$$

Demostración. Al igual que con lo realizado para el Homeomorfismo de Lin, la demostración será una aplicación del Teorema de la función implícita, es decir, la Proposición A.6 y usará las mismas lineas argumentativas de los Teoremas 2.1 y 3.1.

Dados $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, sean X, Y, Z como en el Teorema 2.1, es decir,

$$X := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \sqrt{||\cdot||^2 + |\cdot|^2}) \quad \text{e} \quad Y = Z = (\mathbb{R}, |\cdot|),$$

siendo $||\cdot||$ la norma euclideana de $\mathbb{R}^n$ y $|\cdot|$ el valor absoluto. Además, recordemos que X, Y y Z son $\mathbb{R}-$espacios de Banach.

Al igual que en los Teoremas 2.1 y 3.1, necesitaremos un subconjunto abierto $\mathcal{O} \subseteq X \times Y$ y un par de funciones $f_1, f_2 : \mathcal{O} \to Z$ de clase $\mathscr{C}^k(\mathcal{O}, Z)$ tales que $f_1(\xi_0, \tau, T(\tau_0, \xi_0)) = f_2(\xi_0, \tau, S(\tau_0, \xi_0)) = 0_Z$.

Como $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = X \times Y$. Entonces, denotaremos por $\mathcal{O}$ al subconjunto abierto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Como ha sido habitual, para cada $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ denotemos respectivamente como $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ y $t \mapsto y(t, \tau, \xi)$ a las soluciones de (1.1) y (1.2). Finalmente, si $i \in \{1,2\}$, consideraremos las funciones $f_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ las cuales serán definidas por $f_1(\tau, \xi, t) = V(t, x(t, \tau, \xi)) - 1$ y $f_2(\tau, \xi, t) = V(t, y(t, \tau, \xi)) - 1$.

Para $i \in \{1, 2\}$, recordemos que las funciones $\psi_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$\psi_1(\tau, \xi, t) := V(t, x(t, \tau, \xi)) - 1 \quad \text{y} \quad \psi_2(\tau, \xi, t) := V(t, y(t, \tau, \xi)) - 1.$$

Entonces, por la definición de ψ_i y f_i se tiene que la restricción de ψ_i sobre $\mathcal{O}$ es la función f_i, es decir, $\psi_i|_{\mathcal{O}} = f_i$. Además, como $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, el Teorema 4.1 dice que $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, podemos concluir que $f_i = \psi_i|_{\mathcal{O}} \in \mathscr{C}^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$.

Como $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, cada ψ_i verifica las identidad

$$\psi_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) = 0 \quad \text{y} \quad \psi_2(\tau_0, \xi_0, S(\tau_0, \xi_0)) = 0$$

además, se verifica que $(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)), (\tau_0, \xi_0, S(\tau_0, \xi_0)) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} = \mathcal{O}$ lo cual implica las identidades

$$\begin{aligned} f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) &= \psi_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0)) = 0, \\ f_2(\tau_0, \xi_0, S(\tau_0, \xi_0)) &= \psi_2(\tau_0, \xi_0, S(\tau_0, \xi_0)) = 0. \end{aligned}$$

Notemos que $\psi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ implica que $\psi_1(\tau, \xi, t) \in \mathbb{R}$ para todo $(\tau, \xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, lo cual implica que $f_1(\tau, \xi, t) \in \mathbb{R}$ para todo $(\tau, \xi, t) \in \mathcal{O}$ y por ende, $\frac{\partial f_1(\tau, \xi, t)}{\partial t} \in \mathbb{R}$, entonces, con el objetivo de demostrar que $\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial T}$ sea invertible, nos basta probar que $\frac{\partial f_1(\tau, \xi, t)}{\partial t} \neq 0$ para todo $(\tau, \xi, t) \in \mathcal{O}$.

Para verificar dicha invertibilidad, recordemos que $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verifica que $\mathcal{F}(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como la propiedad **(P2)** nos dice que $x \mapsto \mathcal{F}(t, x)$ es una función Lipschitziana con constante $L > 0$, la Proposición A.3 combinada con **(P1)** y **(P4)** señala que para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{V(t, x(t, \tau_0, \xi_0)) - 1\} \leq -\eta ||x(t, \tau_0, \xi_0)||^\beta \\ &\leq -\eta ||\xi_0||^\beta \exp\{-L\beta |t - \tau_0|\}, \end{aligned}$$

Luego, dado que $\xi_0 \neq 0$, $\eta > 0$ y $\exp\{-L\beta|t - \tau_0|\} > 0$, se deduce que $\frac{\partial f(\tau_0, \xi_0, t)}{\partial t} < 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, t)}{\partial t} \neq 0$$

En particular, al considerar $t = T(\tau_0, \xi_0)$, se verifica que $\frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial T} \neq 0$ lo cual implica que $\frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t}$ es una *matriz* cuadrada de orden 1 invertible. Por último, al escribir $M = \left| \frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t} \right|^{-1}$, se verifica

$$\left| \left(\frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t} \right)^{-1} z \right| = \left| \left(\frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t} \right) \right|^{-1} |z| \leq M|z|$$

para todo $z \in Z$, lo cual afirma que $\left(\frac{\partial f_1(\tau_0, \xi_0, T(\tau_0, \xi_0))}{\partial t} \right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(Z, Y)$.

Por último, un argumento análogo al anterior pero con la función $\mathcal{G}$, la solución $t \mapsto y(t, \tau_0, \xi_0)$ de (1.2) y $(\tau, \xi, t) \mapsto f_2(\tau, \xi, t)$, se concluye que $\frac{\partial f_2(\tau_0, \xi_0, S(\tau_0, \xi_0))}{\partial S}$

es invertible y su inversa $\left(\frac{\partial f_2(\tau_0,\xi_0,S(\tau_0,\xi_0))}{\partial S}\right)^{-1}$ es un elemento que pertenece a $\mathcal{L}(Z,Y)$.

En resumen, hemos construido funciones $f_1, f_2 : \mathcal{O} \to Z$ de clase $\mathscr{C}^k(\mathcal{O}, Z)$ tales que

(a) $f_1(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0)) = f_2(\tau_0,\xi_0,S(\tau_0,\xi_0)) = 0$
(b) Tanto $\frac{\partial f_1(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0))}{\partial T}$ como $\frac{\partial f_2(\tau_0,\xi_0,S(\tau_0,\xi_0))}{\partial S}$ son operadores lineales invertibles cuyas inversas pertenecen a $\mathcal{L}(Z,Y)$.

De este modo, ya hemos corroborado todas las hipótesis del Teorema de la Función Implícita para funciones de clase $\mathscr{C}^k$ (Proposiciones A.4 y A.6), el cual asegura la existencia de subconjuntos abiertos $U_i \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $V_i \subseteq \mathbb{R}$ además de funciones $s_i : U_i \to V_i$ que verifican las siguientes propiedades

(i) $(\tau_0,\xi_0,T(\tau_0,\xi_0)) \in U_1 \times V_1$ y $(\tau_0,\xi_0,S(\tau_0,\xi_0)) \in U_2 \times V_2$.
(ii) $U_i \times V_i \subseteq \mathcal{O}$ y por ende $U_i \subseteq \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ con $i \in \{1,2\}$.
(iii) $s \in \mathscr{C}^k(U_1,V_1)$ y $\psi_i(\xi,\tau,s_i(\tau,\xi)) = 0$ para todo $(\tau,\xi) \in U_i$.
(iv) $s_1(\tau_0,\xi_0) = T(\tau_0,\xi_0)$ y $s_2 = S(\tau_0,\xi_0)$

Demostraremos el resto del Teorema corroborando que para todo $(\tau,\xi) \in U_1$ se tiene que $T(\tau,\xi) = s_1(\tau,\xi)$ y $S(\tau,\xi) = s_2(\tau,\xi)$ para cualquier $(\tau,\xi) \in U_2$. Por un lado, se tiene $\psi_1(\xi,\tau,s_1(\tau,\xi)) = 0$ y, por ende,

$$V(s_1(\tau,\xi), x(s_1(\tau,\xi),\tau,\xi)) = 1 = V(T(\tau,\xi), x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)),$$

entonces, la unicidad de T del Lema 4.1 nos dice que $s_1(\tau,\xi) = T(\tau,\xi)$ para todo $(\tau,\xi) \in U_1$. Usando el mismo argumento con f_2, s_2 y S, se verifica la identidad $s_2(\tau,\xi) = S(\tau,\xi)$ para todo $(\tau,\xi) \in U_2$.

Todo ésto implica que para cada $(\tau_0,\xi_0) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, existen vecindades $U_i \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ de (τ_0,ξ_0) y vecindades $V_i \subseteq \mathbb{R}$ tales que la función Crossing Time T verifica que $T \in \mathscr{C}^k(U_1,V_1)$, pues, $s_1 \in \mathscr{C}^k(U_1,V_1)$ y $T|_{U_1} = s_1$ mientras que, de forma análoga, el Crossing Time $(\tau,\xi) \mapsto S(\tau,\xi)$ verifica que $S \in \mathscr{C}^k(U_2,V_2)$, pues, $S|_{U_2} = s_2 \in \mathscr{C}^k(U_2,V_1)$.

Por último, la arbitrariedad de (τ_0,ξ_0) implica que que todas las $k-$ésimas derivadas parciales de T y S existen y son continuas en cada $(\tau_0,\xi_0) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, lo cual implica que $T, S \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),\mathbb{R})$.

Para demostrar la identidad (4.7), denotemos por $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ a la derivada de la función T en la variable ξ. Entonces, dado que $f_1 = \psi_1|_{\mathcal{O}}$ y $s_1 = T|_{U_1}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi} &= \frac{\partial s_1(\tau,\xi)}{\partial \xi} = -\left(\frac{\partial f_1(\tau,\xi,s_1(\tau,\xi))}{\partial s_1}\right)^{-1} \frac{\partial f_1(\tau,\xi,s_1(\tau,\xi))}{\partial \xi} \\
&= -\left(\frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,T(\tau,\xi))}{\partial T}\right)^{-1} \frac{\partial \psi_1(\tau,\xi,T(\tau,\xi))}{\partial \xi} \\
&= -\frac{\dfrac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial \xi}\dfrac{\partial V(T,x(T,\tau,\xi))}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial V(T,x(T,\tau,\xi))}{\partial \xi}\cdot \mathcal{F}(T,x(T,\tau,\xi)) + \dfrac{\partial V(T,x(T,\tau,,\xi))}{\partial T}},
\end{aligned}$$

y esto último por usar la notación $T = T(\tau,\xi)$. Luego, tenemos que se verifica la identidad (4.7).

Para demostrar identidad (4.8) basta con replicar lo realizado en el último cálculo, considerando la función $f_2 = \psi_2|_{\mathcal{O}}$, es decir, intercambiando $(t,\xi) \mapsto \mathcal{F}(t,\xi)$ y $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$ por las funciones $(t,\xi) \mapsto \mathcal{G}(t,\xi)$ y $(t,\tau,\xi) \mapsto y(t,\tau,\xi)$, respectivamente, concluyendo así la demostración. $\square$

2. Derivabilidad del Homeomorfismmo de Palmer y su inversa

Dadas las soluciones $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ e $t \mapsto y(t,\tau,\xi)$ de los sistemas (1.1) y (1.2) junto con sus respectivos Crossing Times $T(\tau,\xi)$ y $S(\tau,\xi)$, recordemos la función de Palmer vía Crossing Time:

$$\begin{aligned} H:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\tau,\xi) &\longmapsto H(\tau,\xi) = \begin{cases} y(\tau, T(\tau,\xi), x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)) & \xi \neq 0 \\ \\ 0 & \xi = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donde, para cada $\tau \in \mathbb{R}$, se tiene que $H_\tau = H(\tau,\cdot)$ es un homeomorfismo cuya inversa $H_\tau^{-1} = G(\tau,\cdot)$ se define por

$$\begin{aligned} G:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\tau,\xi) &\longmapsto G(\tau,\xi) = \begin{cases} x(\tau, S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)) & \xi \neq 0 \\ \\ 0 & \xi = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para verificar la suavidad de H y G usaremos las siguientes notaciones: si $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. De este modo, para cualquier $i \in \mathbb{N}_n$ y $(t,\tau,\xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, consideraremos las siguientes notaciones:

- $x(t,\tau,\xi) = (x_1(t,\tau,\xi), x_2(t,\tau,\xi), \ldots, x_n(t,\tau,\xi))$ donde cada $x_i(t,\xi,\tau) \in \mathbb{R}$.
- $y(t,\tau,\xi) = (y_1(t,\tau,\xi), y_2(t,\tau,\xi), \ldots, y_n(t,\tau,\xi))$ con $y_i(t,\xi,\tau) \in \mathbb{R}$.
- $H(\tau,\xi) = (H_1(\tau,\xi), H_2(\tau,\xi), \ldots, H_n(\tau,\xi))$ donde todos los $H_i(\tau,\xi)$ están en $\mathbb{R}$.
- $G(\tau,\xi) = (G_1(\tau,\xi), G_2(\tau,\xi), \ldots, G_n(\tau,\xi))$ donde cada $G_i(\tau,\xi) \in \mathbb{R}$.

Con estas herramientas, veremos las hipótesis suficientes para que H sea de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}), \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ mediante el siguiente resultado:

TEOREMA 4.3. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2, se tiene que la función de Palmer via Crossing Times H verifica que $H \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}), \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.*

Más aún, si $\frac{\partial H}{\partial \xi}$ es la derivada de H respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial H(\tau,\xi)}{\partial \xi} = \mathcal{Y}(\tau,\xi) + \frac{\partial y(\tau, T, x(T,\tau,\xi))}{\partial \xi}\left[\mathcal{X}(\tau,\xi) + \frac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial \xi}\right], \tag{4.9}$$

siendo $T := T(\tau,\xi)$ y $\mathcal{X}:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función matricial donde cada i,j-componente $\mathcal{X}_{i,j}(\tau,\xi)$ viene definida por

$$\mathcal{X}_{i,j}(\tau,\xi) := \frac{\partial x_i(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial T}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_i}.$$

Por otro lado, $\mathcal{Y}:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ viene dada por $\{\mathcal{Y}_{i,j}((\tau,\xi))\}_{i,j=1}^n$ las cuales verifican

$$\mathcal{Y}_{i,j}(\tau,\xi) := \frac{\partial y_i(\tau, T(\tau,\xi), x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial \tau}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial \xi_j}$$

y en particular, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ fijo, se tiene que H_τ es una función de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que para $(\tau,\xi)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, se tiene que

$$H(\tau,\xi)=y(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)),$$

entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:
• Las funciones $(t,\tau,\xi)\mapsto x(t,\tau,\xi)$ y $(t,\tau,\xi)\mapsto y(t,\tau,\xi)$ son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ en virtud de las proposiciones A.5 y A.7.
• La función Crossing time T asociada a la ecuación diferencial (1.1) satisface $T\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R})$ de acuerdo al Teorema 4.2.
• La función $(\tau,\xi)\mapsto x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n)$ por la regla de la cadena.

Por ende, la función $\rho_1:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\to\mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$\rho_1(\tau,\xi)=(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi)),$$

verifica $\rho_1\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^{2+n})$, en efecto, todas sus $k-$ésimas derivadas existen y son continuas. Luego,

$$H(\tau,\xi)=y(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))=y(\rho_1(\tau,\xi))\quad\text{para todo }\xi\neq 0,$$

es decir, H es una composición de funciones de clase $\mathscr{C}^k$. Entonces, H es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ por la regla de la cadena. En particular, al fijar $\tau\in\mathbb{R}$, se verifica $H_\tau\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

Para verificar la identidad (4.9), notemos que la regla de la cadena nos dice que la derivada parcial de H_i respecto a la variable ξ_j en (τ,ξ) verifica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_i(\tau,\xi)}{\partial\xi_j} &= \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left\{y_i(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))\right\}\\
&= \frac{\partial y_i(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial\tau}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\\
&\quad +\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial y_i(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial\xi_\ell}\frac{\partial x_\ell(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial T}\frac{\partial T(\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\\
&\quad +\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial y_i(\tau,T(\tau,\xi),x(T(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial\xi_\ell}\frac{\partial x_\ell(T(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\\
&= \mathcal{Y}_{i,j}(\tau,\xi)+\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial y_i(\tau,T,x(T,\tau,\xi))}{\partial\xi_\ell}\left[\mathcal{X}_{\ell,j}(\tau,\xi)+\frac{\partial x_\ell(T,\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\right]
\end{aligned}$$

y esto último por usar $T=T(\tau,\xi)$. Luego, la derivada de H respecto a ξ verifica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(\tau,\xi)}{\partial\xi} &= \left\{\mathcal{Y}_{i,j}(\tau,\xi)+\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial y_i(\tau,T,x(T,\tau,\xi))}{\partial\xi_\ell}\left[\mathcal{X}_{\ell,j}(\tau,\xi)+\frac{\partial x_\ell(T,\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\right]\right\}_{i,j=1}^n\\
&= \mathcal{Y}(\tau,\xi)+\frac{\partial y(\tau,T,x(T,\tau,\xi))}{\partial\xi}\left\{\mathcal{X}_{i,j}(\tau,\xi)+\frac{\partial x_i(T,\tau,\xi)}{\partial\xi_j}\right\}_{i,j=1}^n\\
&= \mathcal{Y}(\tau,\xi)+\frac{\partial y(\tau,T,x(T,\tau,\xi))}{\partial\xi}\left[\mathcal{X}(\tau,\xi)+\frac{\partial x(T,\tau,\xi)}{\partial\xi}\right]
\end{aligned}$$

lo cual prueba la identidad (4.9) y con esto se concluye la demostración. □

Ahora, teniendo en cuenta lo obtenido con H, veremos que estableciendo las mismas condiciones, podemos verificar que G también es de clase $\mathscr{C}^k$ de forma análoga a lo hecho con H:

TEOREMA 4.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2, se tiene que la función de Palmer G verifica que $G \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.*

Más aún, si $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ es la derivada de G respecto a ξ, entonces,

$$\frac{\partial G(\tau,\xi)}{\partial \xi} = \mathcal{Z}(\tau,\xi) + \frac{\partial x(\tau, S, y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi}\left[\mathcal{W}(\tau,\xi) + \frac{\partial y(S,\tau,\xi)}{\partial \xi}\right] \tag{4.10}$$

Siendo $\mathcal{Z} : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función matricial donde cada entrada $\mathcal{Z}_{i,j}(\tau,\xi)$ viene definida por

$$\mathcal{Z}_{i,j}(\tau,\xi) := \frac{\partial x_i(\tau, S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial \tau}\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi_j}$$

Por otro lado, las i,j-componentes $\mathcal{W}_{i,j}(\tau,\xi)$ de $\mathcal{W} : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ vienen definidas por

$$\mathcal{W}_{i,j}(\tau,\xi) := \frac{\partial y_i(S(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial S}\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi_i}.$$

y en particular, cada Homeomorfismo implícito de Palmer G_τ es una función de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que para $(\tau,\xi) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, la función implícita de Palmer viene definida por

$$G(\tau,\xi) = x(\tau, S(\tau,\xi), y(S,\tau,\xi)),$$

donde además, se verifican las siguientes propiedades:
- Una consecuencia de las proposiciones A.5 y A.7 es que las funciones $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$ y $(t,\tau,\xi) \mapsto y(t,\tau,\xi)$ son de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.
- La función Crossing time S asociada a la ecuación diferencial (1.2) satisface $S \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R})$ de acuerdo al Teorema 4.2.
- La función $(\tau,\xi) \mapsto y(S(\tau,\xi),\tau,\xi)$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n)$ en virtud del Teorema de la regla de la cadena.

Estas tres propiedades implican que la función $\rho_2 : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$\rho_2(\tau,\xi) = (\tau, S(\tau,\xi), y(S,\tau,\xi)),$$

verifica la propiedad $\rho_2 \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^{2+n})$, en efecto, cada $k-$ésima derivada de ρ_2 existe y es continua en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Entonces, cada $\xi \neq 0$ satisface la igualdad

$$G(\tau,\xi) = x(\tau, S(\tau,\xi), y(S,\tau,\xi)) = x(\rho_2(\tau,\xi)),$$

es decir, G es una composición de funciones de clase $\mathscr{C}^k$, lo cual implica que $G \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Más aún, se concluye que cada homeomorfismo de Palmer $G_\tau = H_\tau^{-1}$ es de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ al fijar $\tau \in \mathbb{R}$.

Para verificar la identidad (4.10), consideremos $S := S(\tau,\xi)$. Entonces, la regla de la cadena implica que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_i(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left\{x_i(\tau, S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))\right\} \\
&= \frac{\partial x_i(\tau, S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial \tau}\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial x_i(\tau, S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial \xi_\ell}\frac{\partial y_\ell(S(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial t}\frac{\partial S(\tau,\xi)}{\partial \xi_i} \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial x_i(\tau, S(\tau,\xi), y(S(\tau,\xi),\tau,\xi))}{\partial \xi_\ell}\frac{\partial y_\ell(S(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial \xi_j} \\
&= \mathcal{Z}_{i,j}(\tau,\xi) + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial x_i(\tau,S,y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi_\ell}\left[\mathcal{W}_{\ell,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial y_\ell(S,\tau,\xi)}{\partial \xi_j}\right]
\end{aligned}$$

y por ende,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(\tau,\xi)}{\partial \xi} &= \left\{\mathcal{Z}_{i,j}(\tau,\xi) + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial x_i(\tau,S,y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi_\ell}\left[\mathcal{W}_{\ell,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial y_\ell(S,\tau,\xi)}{\partial \xi_j}\right]\right\}_{i,j=1}^{n} \\
&= \mathcal{Z}(\tau,\xi) + \frac{\partial x(\tau,S,y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi}\left\{\mathcal{W}_{i,j}(\tau,\xi) + \frac{\partial y_i(S(\tau,\xi),\tau,\xi)}{\partial \xi_j}\right\}_{i,j=1}^{n} \\
&= \mathcal{Z}(\tau,\xi) + \frac{\partial x(\tau,S,y(S,\tau,\xi))}{\partial \xi}\left[\mathcal{W}(\tau,\xi) + \frac{\partial y(S,\tau,\xi)}{\partial \xi}\right],
\end{aligned}$$

lo cual prueba la identidad (4.10) y con esto, el resultado se sigue. □

Para terminar, gracias a los Teoremas 4.3 y 4.4, contamos con todas las hipótesis necesarias para establecer que cada homeomorfismo de Palmer es un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$.

COROLARIO 4.1. *Sea $\tau\in\mathbb{R}$ y $k\in\mathbb{N}$. Suponga que se verifican las hipótesis **(P1)–(P4)** junto con que $\mathcal{F},\mathcal{G}\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.*

Entonces, $H_\tau\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n)$ y $G_\tau\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbb{R}^n)$. Lo cual implica que $H_\tau:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ es un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^k$.

Apéndice A

Resultados Técnicos

1. Resultados preliminares

Revisitaremos algunos resultados clásicos en la literatura de ecuaciones diferenciales ordinarias, los cuales serán de utilidad para el desarrollo de la Tesis.

LEMA A.1 (Desigualdad de Gronwall). [**40**, Lema 3.3. p.26]
Sean $J =]\alpha, \beta[$ un intervalo abierto, $\varphi, f : J \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas no negativas en J, $t_0 \in J$ y $c_0 > 0$. Si

$$f(t) \leq c_0 + \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(r) f(r)\, dr \right| \quad \textit{para todo } t \in J$$

entonces,

$$f(t) \leq c_0 \exp\left(\left| \int_{t_0}^{t} \varphi(r)\, dr \right| \right) \quad \textit{para todo } t \in J.$$

Otras referencias sobre la desigualdad de Gronwall pueden encontrarse en [**11**, p.19] y [**22**, p.24].

A continuación consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= \mathcal{F}(t,x) \\ x(\tau) &= \xi. \end{cases} \tag{A.1}$$

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para la existencia, unicidad y prolongabilidad de soluciones para el problema (A.1) y corresponde a una reformulación de [**11**, Teorema 2, p.12]:

PROPOSICIÓN A.1. *Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado, $t_0 \in J$ y $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\mathcal{F} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua en $J \times \mathbb{R}^n$ y existe una constante $L > 0$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $t \in J$ se tiene la desigualdad:*

$$||\mathcal{F}(t,x) - \mathcal{F}(t,\xi)|| \leq L||x - y||,$$

entonces, se verifica la existencia y unicidad de una solución $t \mapsto x(t, t_0, \xi_0)$ del sistema (A.1) con condición inicial $x(t_0, t_0, \xi_0) = \xi_0$ la cual está definida en J.

Proposición A.2 (Propiedad de Semiflujo:). *Bajo las condiciones de la Proposición A.1, sean $\tau \in J$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. Entonces, toda solución $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ de (1.1) con $x(\tau,\tau,\xi) = \xi$ verifica la igualdad:*

$$x(s,t,x(t,\tau,\xi)) = x(s,\tau,\xi) \quad \text{para todo } s,t,\tau \in J.$$

Demostración. Por un lado, se tiene que $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ es la solución del problema de valores iniciales (A.1). Además, se tiene que $s \mapsto x(s,t,x(t,\tau,\xi))$ es la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{ds} & = & \mathcal{F}(s,x) \\ x(t) & = & x(t,\tau,\xi) \end{array} \right. \tag{A.2}$$

de modo que la solución $s \mapsto x(s,\tau,\xi)$ de (A.1) también es solución de (A.2), entonces, por la unicidad de soluciones obtenida en la Proposición A.1, se verifica que $x(s,t,x(t,\tau,\xi)) = x(s,\tau,\xi)$ para todo $s,t,\tau \in J$. □

Proposición A.3. [**27**, Prop 2, p.40] *Suponga que $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y verifica $\mathcal{F}(t,0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponga que existe $L > 0$ tal que*

$$||\mathcal{F}(t,\xi_1) - \mathcal{F}(t,\xi_2)|| \leq L||\xi_1 - \xi_2|| \qquad \text{para todo } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Sean $\xi \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ y $t \mapsto x(t,s,\xi)$ la solución del problema de valores iniciales (A.1). Entonces, se verifica que

$$||\xi_1 - \xi_2|| \exp(-L|t-s||) \leq ||x(t,s,\xi_1) - x(t,s,\xi_2)|| \leq ||\xi_1 - \xi_2|| \exp(L|s-t|).$$

En particular, si $\xi_2 = 0$, se verifica que:

$$||\xi_1|| \exp(-L|t-s|) \leq ||x(t,s,\xi_1)|| \leq ||\xi_1|| \exp(L|t-s|).$$

Demostración. Dados $z \in \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}$, la solución $t \mapsto x(t,s,z)$ se representa en su forma integral:

$$x(t,s,z) = z + \int_s^t \mathcal{F}(r,x(r,s,z))\,dr.$$

Entonces, se verifica que:

$$\begin{array}{rcl} ||x(t,s,\xi_1) - x(t,s,\xi_2)|| & = & \left|\left|\xi_1 - \xi_2 + \displaystyle\int_s^t \mathcal{F}(r,x(r,s,\xi_1)) - \mathcal{F}(r,x(r,s,\xi_2))\,dr\right|\right| \\ & \leq & ||\xi_1 - \xi_2|| + \left|\displaystyle\int_s^t ||\mathcal{F}(r,x(r,s,\xi_1)) - \mathcal{F}(r,x(r,s,\xi_2))||\,dr\right| \\ & \leq & ||\xi_1 - \xi_2|| + \left|\displaystyle\int_s^t L||x(r,s,\xi_1) - x(r,s,\xi_2)||\,dr\right|, \end{array}$$

por lo tanto:

$$||x(t,s,\xi_1) - x(t,s,\xi_2)|| \leq ||\xi_1 - \xi_2|| + \left|\int_s^t L||x(r,s,\xi_1) - x(r,s,\xi_2)||\,dr\right|.$$

Por la desigualdad de Gronwall, descrita en la Proposición A.1, se tiene que

$$||x(t,s,\xi_1) - x(t,s,\xi_2)|| \leq ||\xi_1 - \xi_2|| \exp(L|t-s|). \tag{A.3}$$

La propiedad de semiflujo, descrita en la Proposición A.2, nos dice que

$$x(s,t,x(t,s,z)) = x(s,s,z) = z \quad \text{para todo } t,s \in \mathbb{R} \text{ y todo } z \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, usando ξ_1, ξ_2 en lugar de $x(t,s,\xi_1)$ y $x(t,s,\xi_2)$, la desigualdad (A.3) nos ayuda a deducir que

$$\begin{array}{rcl} ||\xi_1 - \xi_2|| & = & ||x(t,s,x(s,t,\xi_1) - x(t,s,x(s,t,\xi_2))|| \\ & \leq & ||x(s,t,\xi_1) - x(s,t,\xi_2)|| \exp(L|s-t|). \end{array}$$

Esta estimación, combinada nuevamente con (A.3), implica que:

$$||\xi_1 - \xi_2|| \exp(-L|s-t|) \leq ||x(s,t,\xi_1) - x(s,t,\xi_2)|| \leq ||\xi_1 - \xi_2|| \exp(L|s-t|).$$

Ahora, en el caso $\xi_2 = 0$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} ||x(t,s,0)|| & = & \left|\left|\displaystyle\int_s^t \mathcal{F}(r,x(r,s,0))\,dr\right|\right| \leq \left|\displaystyle\int_s^t ||\mathcal{F}(r,x(r,s,0))||\,dr\right| \\ & \leq & \left|\displaystyle\int_s^t L||x(r,s,0)||\,dr\right| \leq \dfrac{1}{n} + \left|\displaystyle\int_s^t L||x(r,s,0)||\,dr\right|, \end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la desigualdad de Gronwall implica que:

$$||x(t,s,0)|| \leq \frac{1}{n} \exp\left(L|t-s|\right),$$

entonces, si $n \to +\infty$, el Teorema del encaje implica que $||x(t,s,0)|| = 0$ para todo $t,s \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $x(t,s,0) = 0$ para todo $t,s \in \mathbb{R}$, entonces, si $\xi_2 = 0$, se tiene que

$$||\xi_1|| \exp(-L|s-t|) \leq ||x(s,t,\xi_1)|| \leq ||\xi_1|| \exp(L|s-t|),$$

lo cual concluye la demostración. □

Corolario A.1. *Sean $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $t \mapsto x(t,\tau,\xi)$ como en la Proposición A.3. Dado $\tau \in J$ fijo, y $M > 0$, la función $\xi \mapsto x(t,\tau,\xi)$ es continua en $\mathbb{R}^n$ uniformemente en todo $t \in [\tau - M, \tau + M]$.*

Demostración. Sean $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon e^{-2ML}$. Por la Proposición A.3, para todo $t \in [\tau - M, \tau + M]$ se tiene que:

$$||x(t,\tau,\xi) - x(t,\tau,\xi_0)|| \leq ||\xi - \xi_0|| e^{L|t-\tau|},$$

de modo que si $||\xi - \xi_0|| < \delta$, se verifica que

$$||x(t,\tau,\xi) - x(t,\tau,\xi_0)|| \leq ||\xi - \xi_0|| e^{L|t-\tau|} < \varepsilon e^{-2ML} e^{2LM} = \varepsilon.$$

para todo $t \in [\tau - M, \tau + M]$.

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $||\xi - \xi_0|| < \delta$, entonces,

$$||x(t,\tau,\xi) - x(t,\tau,\xi_0)|| < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in [\tau - M, \tau + M],$$

y por ende,

$$\sup\{||x(t,\tau,\xi) - X(t,\tau,\xi_0)|| \colon t \in [\tau - M, \tau + M]\} < \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de ξ_0, probamos la continuidad de $\xi \mapsto x(t,\tau,\xi)$ en ξ_0 para todo $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ uniformemente en $[\tau - M, \tau + M]$. □

2. Teorema de la función implícita

Recordemos que la función crossing time T está definida implícitamente en las ecuación (2.1) por medio de la función ψ de la Observación 2.3. Entonces, el Teorema de la función implícita jugará un papel importante en la demostración del Teorema 2.1. En particular usaremos una reformulación de la versión presentada en el libro de Thomas Sideris, a saber, el Teorema [**40**, Teo 5.7, Cap 5, pág 82] combinada con el Corolario [**40**, Cor 5.1, Cap 5, pág 84]:

PROPOSICIÓN A.4 (Teorema de la Función Implícita). *Consideremos tres espacios de Banach reales X, Y, Z. Ademas, sean $\mathcal{O} \subseteq X \times Y$ un subconjunto abierto de $X \times Y$ y $f : \mathcal{O} \to Z$ tal que $f \in \mathscr{C}^1(\mathcal{O}, Z)$.*

Si existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ tal que $f(x_0, y_0) = 0_Z$, la derivada $Df_y(x_0, y_0)$ es invertible y su inversa pertenezca a $\mathcal{L}(Z, Y)$. Entonces:

a) *Existen vecindades U de x_0 y V de y_0 tal que $U \times V \subseteq \mathcal{O}$.*
b) *Existe una única función $g : U \to V$ de clase $\mathscr{C}^1$ tal que*

$$y_0 = g(x_0) \quad \text{y} \quad f(x, g(x)) = 0$$

para todo $x \in U$. Por último, si $f(x, y) = 0$, entonces, $y = g(x)$.
c) *Para todo $(x, y) \in U \times V$ se verifica que $Df_y(x, y)$ es invertible, $D_y(x, y) \in \mathcal{L}(Z, Y)$ y se tiene la igualdad*

$$Dg(x) = -Df_y(x, g(x))^{-1} Df_x(x, g(x)).$$

Para mas resultados sobre el Teorema de la función implícita sugerimos consultar [**17**, p.145].

2.1. Derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales. Para la demostración de los Teoremas 2.1,3.1 y 4.2 se estudian propiedades cualitativas de los sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(t,x). \tag{A.4}$$

Entonces, en esta sección recordaremos (sin demostración) los resultados de derivabilidad de las soluciones $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$ del sistema (A.4) con respecto a las condiciones iniciales. Para una demostración en detalle, remitimos al resultado presentado en la referencia de Thomas Sideris [**40**, Teo. 6.1, Cap.6, pág 89], el cual resulta ser una aplicación elegante y original del Teorema de la Función Implícita mencionado en la Proposición A.4. Por último, la notación $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}$ representa la matriz jacobiana de $x \mapsto \mathcal{F}(t,x)$.

Proposición A.5 (Derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales). *Consideremos el sistema (A.4) donde $\mathcal{F} : J\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathscr{C}^1(J\times\Omega,\mathbb{R}^n)$ siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto.*

Supongamos que $(\tau_0,\xi_0) \in J\times\Omega$ y que $x(\cdot,\tau_0,\xi_0) : I(\tau_0,\xi_0) \subseteq J \to \mathbb{R}^n$ es la única solución del sistema (A.4) con la condición inicial $x(\tau_0,\tau_0,\xi_0) = \xi_0$ donde $I(\tau_0,\xi_0)$ está definido por

$$I(\tau_0,\xi_0) =]a(\tau_0,\xi_0), b(\tau_0,\xi_0)[\subseteq J$$

y corresponde al intervalo maximal de existencia de la función $t \mapsto x(t,\tau_0,\xi_0)$.

Entonces, la función $x \in \mathscr{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$, donde

$$D := \{(t,\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{2+n} \colon a(\tau,\xi) < t < b(\tau,\xi), \quad (\tau,\xi) \in J\times\Omega\},$$

tal que $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$, verifica lo siguiente:
Para todo par fijo (τ,ξ), la función $t \mapsto \frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\tau,\xi) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, es solución del problema de valores iniciales matricial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dt} & = & \dfrac{\partial \mathcal{F}(t,x(t,\tau,\xi))}{\partial \xi} y \\ \\ y(\tau) & = & I, \end{array} \right. \tag{A.5}$$

siendo $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la identidad mientras que $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ es la matriz jacobiana de $(t,\tau,\xi) \mapsto x(t,\tau,\xi)$ con respecto a la condición inicial.

Este resultado también se puede encontrar en [**18**, Cap.3],[**22**, Cap.5], [**5**, Cap.1] con algunas diferencias formales.

2.2. Teorema de la función implícita para funciones de clase $\mathscr{C}^k$. Recordemos que la función crossing time T está definida implícitamente por la ecuación (2.1) y por medio de la función ψ de la Observación 2.3. Entonces, el Teorema de la función implícita jugará un papel importante en su demostración. En particular, usaremos una reformulación de la versión presentada por Thomas Sideris en [**40**, Cor 5.1, Cap 5, pág 84]:

Proposición A.6 (Teorema de la Función Implícita para funciones de Clase $\mathscr{C}^k$). *Bajo las hipótesis del Teorema A.4, si* $f \in \mathscr{C}^k(\mathcal{O}, Z)$, *entonces, se verifica* $g \in \mathscr{C}^k(U, V)$.

3. $\mathscr{C}^k$-Derivabilidad con respecto a las condiciones iniciales

Para demostrar los Teoremas 3.1 y 4.2, se necesita estudiar propiedades cualitativas de sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F}(t, x).$$

En particular, revisitaremos los resultados de suavidad de las solutiones $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ de (A.4) con respecto a las condiciones iniciales. En este caso, el resultado que será de utilidad para nosotros es una reformulación de [**40**, Cor. 6.1, Cap.6, pág 92], el cual es una consecuencia de las Proposiciones A.5 y A.6. Dichos resultados nos permitieron deducir condiciones de $\mathscr{C}^k$-derivabilidad de las soluciones de los sistemas (1.1), (1.2) y (1.11) con respecto a las condiciones iniciales (y tambien el tiempo inicial).

Proposición A.7 (Suavidad con respecto a las condiciones iniciales). *Consideremos el sistema (A.4) donde* $\mathcal{F} : \Omega \times J \to \mathbb{R}^n$ *es continua* $\mathscr{C}^1(\Omega \times J, \mathbb{R}^n)$ *siendo* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un subconjunto conexo y abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $J \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo abierto.*

Supongamos que $(\tau_0, \xi_0) \in J \times \Omega$ *y que* $x(\cdot, \tau_0, \xi_0) : I(\tau_0, \xi_0) \subseteq J \to \mathbb{R}^n$ *es la única solución del problema de valores iniciales (A.4) con* $x(\tau_0, \tau_0, \xi_0) = \xi_0$ *donde*

$$I(\tau_0, \xi_0) =]a(\tau_0, \xi_0), b(\tau_0, \xi_0)[\subseteq J$$

corresponde al intervalo maximal de existencia de la función $t \mapsto x(t, \tau_0, \xi_0)$.

Si $\mathcal{F}(t, \cdot) \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *entonces, la función* $(\tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ *es de clase* $\mathbb{C}^k(J \times \Omega)$.

Más aún, si $\mathcal{F} \in \mathscr{C}^k(J \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, *la función* $(t, \tau, \xi) \mapsto x(t, \tau, \xi)$ *verifica ser de clase* $\mathscr{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, *donde*

$$D := \{(t, \tau, \xi) \in \mathbb{R}^{2+n} : a(\tau, \xi) < t < b(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in J \times \Omega\}.$$

4. Continuidad de la función determinante.

En el Teorema 2.5, la continuidad del determinante $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ fue una herramienta crucial para corroborar que cada Homeomorfismo de Lin vía Crossing Time sea un difeomorfismo que preserva orientación. En ese sentido, el siguiente resultado es una generalización de lo realizado en [**25**, p.53] el cual constituye un resultado muy útil para la demostración de la continuidad del determinante:

Proposición A.8. *Sea* $(F, ||\cdot||_F)$ *un* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial normado. Toda aplicación multinileal* $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k} \to F$ *es continua.*

Con este resultado, ya contamos con todas las herramientas necesarias para demostrar que la función determinante $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua:

Proposición A.9. *La función* $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Demostración. Primeramente, sea $n_i = n$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Si consideramos la función $g : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_n}$ definida por

$$A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n} \mapsto g(A) := \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \right),$$

entonces, g es un isomorfismo entre los dos espacios normados de dimensión finita $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), ||\cdot||)$ y $(\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_n}, ||\cdot||)$, y por ende, g es un homeomorfismo.

Además, la función $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_n} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \right) = \det\{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$$

es una función multilineal alternante, lo cual implica ser continua en virtud de la Proposición A.8. Luego, tenemos que la función determinante satisface la identidad $\det = f \circ g$, es decir, det es una composición de funciones continuas, lo cual implica que det es una función continua. $\square$

Apéndice B

Demostración del Lema 1.1.

Con el objetivo de probar el Lema 1.1, partamos considerando un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La derivada inferior izquierda de y en $t \in I$ se define como

$$D_{-}y(t) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{y(t)-y(t-h)}{h} = \liminf_{h\to 0^-} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}.$$

Consideremos la siguiente definición:

Definición B.1. [**18**, Def 3.2, pag.61] *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua en el conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(t_0, x_0) \in D$. Se dice que la función $x :]\alpha_x, \omega_x[\to \mathbb{R}$ definida en un intervalo maximal de existencia $]\alpha_x, \omega_x[$ es una solución maximal del problema de valores iniciales*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& f(t,x) \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array} \right. \tag{B.1}$$

si cualquier otra solución $t \mapsto y(t)$ de (B.1) definida en su respectivo intervalo maximal de existencia $]\alpha_y, \omega_y[$ verifica $x(t) \geq y(t)$ para todo $t \in]\alpha_x, \omega_x[\cap]\alpha_y, \omega_y[$.

Por otro lado, se dice que la función $x :]\alpha_x, \omega_x[\to \mathbb{R}$ definida en un intervalo maximal de existencia $]\alpha_x, \omega_x[$ es una solución minimal del problema de valores iniciales (B.1) si cualquier otra solución $t \mapsto y(t)$ de (B.1) definida en su respectivo intervalo maximal de existencia $]\alpha_y, \omega_y[$ verifica $x(t) \leq y(t)$ para todo $t \in]\alpha_x, \omega_x[\cap]\alpha_y, \omega_y[$.

En [**18**, Teo. 3.3, pag.61], se establece que si f es continua en D, entonces el problema de valores iniciales (B.1) tiene una solución minimal x_m y una solución maximal x_M. El siguiente resultado es una reformulación de los resultados [**18**, Teo. 4.1, pag.65] junto con [**18**, ejer. 19.(3), pag.66], el cual será de gran utilidad para demostrar la Proposición 1.1:

Lema B.1. *Sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos $(t_0, x_0) \in D$ y sea $t \mapsto x_m(t)$ la solución minimal del sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& f(t,x) \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array} \right.$$

en un intervalo minimal $]\alpha, \omega[$. Sea $v :]t_0 - a, t_0] \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica

(1) *El par ordenado $(t, v(t)) \in D$ para todo $t \in]t_0 - a, t_0]$ donde $a > 0$,*
(2) *$D_{-}v(t) \leq f(t, v(t))$ para $t \in]t_0 - a, t_0]$ y*
(1) *$v(t_0) \leq x_0$.*

Entonces, se verifica $v(t) \leq x_m(t)$ para todo $t \in]t_0 - a, t_0] \cap]\alpha, \omega[$.

Demostración del Lema 1.1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(s,x) = -\frac{\eta x}{C_1}$, la cual es continua en $\mathbb{R}^2$ y consideremos una solución $s \mapsto x(s)$ del sistema (1.1). Tenemos que el problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{du}{ds} & = & f(s,u) \\ u(t) & = & V(t,x(t)) \end{array}\right. \tag{B.2}$$

tiene una única solución la cual viene dada por $s \mapsto U(s) = V(t,x(t))e^{-\frac{\eta}{C_1}(s-t)}$ definida en el intervalo maximal $\mathbb{R}$, lo cual implica que U es una solución minimal de (B.2).

Además, si definimos $v :]-\infty, t] \to \mathbb{R}$ con $v(s) = V(s,x(s))$, las hipótesis nos dicen que se verifica

$$D_{-}v(s) = D_{-}V(s,x(s)) \leq -\eta||x(s)||^{\beta} \leq -\frac{\eta}{C_1}V(s,x(s)) = \frac{\eta}{C_1}v(s) = f(s,v(s))$$

Por último, se tiene que $v(t) = V(t,x(t)) = U(t)$ lo cual implica que $U(t) \leq v(t)$.

Luego, el Lema B.1 nos dice que $U(s) \leq v(s)$ para todo $s \in]-\infty, t] \cap \mathbb{R}$, es decir, se tiene

$$V(t,x(t))e^{-\frac{\eta}{C_1}(s-t)} = U(s) \leq v(s) = V(s,x(s)) \quad \text{para todo } s \leq t$$

y por ende,

$$V(t,x(t)) \leq V(s,x(s))e^{-\frac{\eta}{C_1}(t-s)} \quad \text{para cada } s \leq t,$$

lo cual demuestra (1.1).

Para demostrar que $t \mapsto V(t,x(t))$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, supongamos que $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $t_1 < t_2$. Entonces, $0 < e^{-\frac{\eta}{C_1}(t_2-t_1)} < 1$, y por ende

$$V(t_2,x(t_2)) \leq V(t_1,x(t_1))e^{-\frac{\eta}{C_1}(t_2-t_1)} < V(t_1,x(t_1)),$$

lo cual demustra que $t \mapsto V(t,x(t))$ sea estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.

Por último, como $C_2||x||^{\beta} \leq V(t,x)$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, en particular,

$$0 \leq C_2||x(t)||^{\beta} \leq V(t,x(t)) \leq V(s,x(s))e^{-\frac{\eta}{C_1}(t-s)}$$

entonces, fijando s y haciendo tender $t \to +\infty$, el Teorema de encaje dice que

$$\lim_{t \to +\infty} V(t,x(t)) = 0$$

mientras que si $t \leq s$, obtenemos que $e^{\frac{\eta}{C_1}(s-t)}V(s,x(s)) \leq V(t,x(t))$ y nuevamente, al fijar s, el Teorema de encaje dice que al hacer tender $t \to -\infty$, se verifica

$$\lim_{t \to -\infty} V(t,x(t)) = +\infty.$$

Si V verifica las condiciones **(P3)** y **(P4)**, cualquier solución $t \mapsto \phi(t)$ de (1.1) o de (1.2) verifica la desigualdad (1.9) y $t \mapsto V(t,\phi(t))$ es estrictamente decreciente. Por último, realizando el mismo argumento, podemos concluir los límites

$$\lim_{t \to +\infty} V(t,\phi(t)) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to -\infty} V(t,\phi(t)) = +\infty$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Bibliografía

[1] L. Backes, D.Dragičević. Smooth linearization of nonautonomous coupled systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **28** (2023), no. 8, 4497–4518.

[2] L. Barreira, C. Valls. A Grobman–Hartman theorem for nonuniform hyperbolic dynamics, J. Differential Equations **228** (2006), no. 1, 285–310.

[3] L. Barreira, C. Valls. Nonuniform exponential dichotomies and Lyapunov regularity. J. Dynam. Differential Equations **19** (2007), no. 1, 215–241.

[4] L. Barreira, C. Valls. Smooth linearization under nonuniform hyperbolicity, Rev. Mat. Iberoam. **37** (2021), no. 5, 1803–1860.

[5] E. Coddington, N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. Mc Graw–Hill, New York, 1955.

[6] A. Castañeda, P. González, G. Robledo. Topological equivalence of nonautonomous difference equations with a family of dichotomies on the half line, Comm. Pure Appl. Anal., **20** (2021), no. 2, 511–532.

[7] A. Castañeda, P. Monzón, G. Robledo. Smoothness of topological equivalence on the half line for nonautonomous systems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **150** (2019), no. 5, 2484–2502.

[8] A. Castañeda, P. Monzón, G. Robledo. Nonuniform contractions and converse stability results via a smooth topological equivalence. Dyn. Syst. **38** (2023), no 2, 179–196.

[9] A. Castañeda, G. Robledo. Differentiability of Palmer's linearization theorem and converse result for density functions, J. Differential Equations **259** (2015), no. 9, 4634–4650.

[10] J. Chu, F.F. Liao, S. Siegmund, Y. Xia, W. Zhang Nonuniform dichotomy spectrum and reducibility for nonautonomous equations. Bull. Sci. Math. **139** (2015), no 5, 538–557.

[11] W.A. Coppel. Stability and Asymptotic Behaviours of Differential Equations. Heath Boston, 1965.

[12] W.A. Coppel. Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in mathematics, Springer–Verlag, Berlin, 1978.

[13] L.V. Cuong, D.T Son, S. Siegmund. A Sternberg theorem for nonautonomous differential equations, J. Dynam. Diff. Eqs., **19** (2019), no. 3, 1279–1299.

[14] D. Dragičević. Admissibility and polynomial dichotomies for evolution families. Commun. Pure Appl. Anal. 19 (2020), 1321–1336.

[15] D. Dragičević, W. Zhang, W. Zhang. Smooth linearization of nonautonomous differential equations with a nonuniform dichotomy, Proc. Lond. Math. Soc., **121** (2020), no. 1, 32–50.

[16] D. Dragičević, W. Zhang, W. Zhang. mooth linearization of nonautonomous difference equations with a nonuniform dichotomy, Math. Z. **292** (2019), no. 3–4, 1175–1193.

[17] W. Fleming. Functions of Several Variables, second edition. Springer-Verlag, New York, 1977.

[18] J.R. Graef, J. Henderson, L. Kong L, X. Liu. Ordinary Differential Equations and Boundary Value Problems, Volume 1: Advanced Ordinary Differential Equations, Trends in Abstract and Applied Analysis, Vol. 7. New Jersey: World Scientific; 2018.

[19] N. Jara. Smoothness of class C^2 of nonautonomous linearization without spectral conditions, J. Dynam. Diff. Eqs. doi:10.1007/s10884-022-10207-5

[20] H.K. Khalil. Nonlinear Systems, 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle river NJ, 2000.

[21] W. Hahn. Stability of Motion, Springer–Verlag, Berlin, 1967.

[22] P. Hartman. Ordinary differential equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[23] L. Jiang. Generalized exponential dichotomy and global linearization. J. Math. Anal. Appl. **315** (2006) 474–490.

[24] P.E. Kloeden y M. Rasmussen. Nonautonomous Dynamical Systems, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 176, AMS, Providence RI (2011).

[25] E.L. Lima. Espaços Métricos, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 4a edición, 2009.

[26] F.X. Lin. Structurally stable linear system and exponential dichotomies, Annals of Differential Equations **4** (4) (1988) 425–450.

[27] F.X. Lin. Hartman's linearization on nonautonomous unbounded system. Nonlinear Analysis, **66** (2007) 38–50.

[28] Y.X Lin , Z. Lin. Linear systems Exponetial Dichotomy and Structure of Sets of Hyperbolic Points, World Scientific, 2000.

[29] W. Lu, M. Pinto, Y.H. Xia. Higher regularity of homeomorphisms in the Hartman-Grobman theorem and a conjecture on its sharpness, https://arxiv.org/abs/2201.12945

[30] J.E. Marsden y A.J. Tromba Cálculo Vectorial. Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

[31] R. Naulin, M. Pinto Roughness of (h, k)–dichotomies. J. Differential Equations **118** (1995) 20–35.

[32] S.E. Newhouse, On a differentiable linearization theorem of Philip Hartman. Modern theory of dynamical systems, 209–262, Contemp. Math., 692, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[33] K.J. Palmer. A generalization of Hartman's linearization Theorem. J. Math. Anal. Appl. **41** (1973) 753–758.

[34] K.J. Palmer. A characterization of exponential dichotomy in terms of topological equivalence. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, vol. 69, no 1, p. 8-16.

[35] M. Pinto Nonautonomous semilinear differential systems: asymptotic behaviour and stable manifolds", Preprint, Dept. Mat., Fac. Cie., Univ. Chile, Santiago, 1990;

[36] A. Reinfelds, D. Šteinberga. Dynamical equivalence of quasilinear equations, Int. J. Pur. Appl. Math. **98** (2015), no. 3, 355–364.

[37] G. Robledo, D. Urrutia. Some new results for the smoothness of topological equivalence in uniformly asymptotically stable systems. (Preprint)

[38] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy. Stability Theory by Liapunov's Direct Methods, Springer–Verlag, New York, 1977.

[39] J. Shi, K. Xiong. On Hartman's Linearization Theorem and Palmer´s Linearization Theorem. J. Math. Anal. Appl. **192** (1995) 813–832.

[40] T. C. Sideris. Ordinary differential equations and dynamical systems. Atlantis Press, Paris, 2013.

[41] M. Spivak. Cálculo Infinitesismal, Tercera Edición (Cuarta Edición Original). Editorial Reverté, S. A. 2014.

[42] J. Zhang, M. Fan, H. Zhu. Nonuniform (h, k, μ, ν)–dichotomy with applications to nonautonomous dynamical systems, J. Math. Anal. Appl. **452** (2017), no. 1, 505–551.