FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Matemáticas

Velocidad de invasión de la solución fundamental de una ecuación subdifusiva con término de reacción

Tesis presentada en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de

Magíster en Ciencias Matemáticas

Claudio Carrasco Gómez.

Tutor: Dr. Juan Carlos Pozo V.

11 de enero de 2024.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por

- FONDECYT Regular 1221271.

Abstract

Recientemente, Dipierro, Pellacci, Valdinoci y Verzini [15] han estudiado la *velocidad de invasión* de la solución fundamental de la siguiente ecuación diferencial fraccionaria en tiempo con término de reacción

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t,x) + a\Delta u(t,x) = bu(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \delta_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde ∂_t^α denota la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in (0,1)$ en el sentido de Caputo, δ_0 es la distribución Delta de Dirac centrada en $x=0$, y las constantes a y b son positivas. Las técnicas que usan les permiten analizar la velocidad de invasión cuando $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ y $n=1$. En esta tesis, extendemos a todo $\alpha \in (0,1)$ y a cualquier dimensión los resultados obtenidos en [15]. Más aún, mostramos que nuestra técnica se puede aplicar a una gran gama de ecuaciones de evolución.

A la memoria de mi tía Ana María Gómez Huerta

Agradecimientos

Quisiera empezar agradeciendo a mis padres, Fresia Gómez y Claudio Carrasco, por el inmenso sacrificio, esfuerzo y cariño que nos han entregado a mis hermanos y a mí. Gracias por las enseñanzas recibidas desde la infancia y por cuidarme durante los momentos más difíciles. También agradezco a mis abuelos, Clara Riquelme y Manuel Carrasco, por su inconmensurable amor. A mi pareja, la profesora Sofía Sepúlveda, le agradezco por acompañarme a lo largo de estos años, por los consejos, por la paciencia, y por llenar de cariño mi día a día; y a mi tía Mónica Gómez y a su encantadora familia, por su inmensa hospitalidad al recibirme en su hogar. Siempre estaré infinitamente agradecido con cada uno de ustedes.

En el ámbito académico, quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor de tesis, el Dr. Juan Carlos Pozo, quien me introdujo al fascinante mundo de las ecuaciones diferenciales no locales. Gracias por todos los consejos, ayudas y enseñanzas que me brindó durante estos dos años. Su compromiso en mi formación como matemático se evidenció al proporcionarme financiamiento parcial a través del proyecto **FONDECYT Regular 1221271**, al integrarme en diversos proyectos de investigación, y al proporcionarme la literatura necesaria para el presente trabajo.

Dentro del departamento de matemáticas de la Universidad de Chile, deseo expresar mi agradecimiento a todos los profesores y profesoras que tuve durante mi etapa en el pregrado. Quiero hacer especial énfasis en el Dr. Gonzalo Robledo, con quien colaboré como ayudante de cátedra durante años, y en quien, en diversos procesos de postulación, mostró disposición al redactar cartas de recomendación a mi favor.

Finalmente, agradecer al Dr. Luciano Abadías de la Universidad de Zaragoza por sus múltiples e importantes contribuciones a esta tesis.

Índice general

1. Introducción **1**

1.1. ¿Por qué estudiar ecuaciones de evolución no-locales? 2

1.2. Velocidad de Invasión 5

1.3. Resultados principales 10

2. Preliminares **13**

2.1. Conceptos Esenciales para el Análisis 13

2.1.1. Transformada de Laplace y de Fourier 16

2.1.2. Derivada de Caputo 21

2.1.3. La función de Mittag-Leffler y de Wright 22

2.2. Semigrupos de convolución 26

2.2.1. Laplaciano fraccionario de orden $s > 0$ 29

2.3. Familias α-resolvente 31

2.3.1. Principio de subordinación de Prüss 31

3. Existencia y unicidad **34**

3.1. Existencia y unicidad de la solución 34

4. Comportamiento asintótico **38**

4.1. Resultados de divergencia 38

4.1.1. Caso $s \in (0, 2)$ 39

4.1.2. Caso $s = 2$ 41

4.1.3. Caso $s \in [2, \infty)$ 43

4.2. Resultado de convergencia 54

5. Conclusiones **59**

5.1. Trabajos Futuros 60

Referencias **63**

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis se enmarca dentro de la teoría de las denominadas ***ecuaciones de evolución no-locales***. Específicamente, queremos estudiar el comportamiento asintótico de la solución distribucional a una ecuación no-local de evolución de la forma

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t,x) + a(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = bu(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde a, b son constantes no negativas. El dato inicial δ_0 es la distribución delta de Dirac centrada en $x = 0$. El operador ∂_t^α representa a la ***derivada fraccionaria de orden*** $\alpha \in (0,1)$ en el sentido de ***Caputo***, la cual está definida por

$$\partial_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} \, ds, \tag{1.2}$$

para $f \in W^1_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$. Por su parte, $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$, con $s > 0$, denota al operador ***laplaciano fraccionario***, el está definido vía transformada de Fourier como

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f(x) := \mathcal{F}^{-1}\{|\xi|^s \mathcal{F}\{f(x)\}(\xi)\}(x), \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

para una función f suficientemente buena (por ejemplo, si f está en clase de Schwartz) A largo de esta tesis nos referiremos a la función $|\xi| \mapsto |\xi|^s$ como el símbolo del operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$.

Debemos notar que la no-localidad de la ecuación (1.1) proviene tanto del operador espacial como temporal. Debido a su carácter lineal, es una de las ecuaciones no-locales en tiempo y espacio más sencillas de plantear. Sin embargo, las propiedades de sus soluciones aún no están completamente entendidas y son materia actual de investigación.
Es precisamente por esta razón que hemos establecidos los siguientes objetivos en el desarrollo de esta tesis:

(O1) Establecer la existencia y unicidad de la solución distribucional al problema (1.1).

(O2) Estudiar la influencia de los operadores que aparecen en la ecuación (1.1) en el comportamiento asintótico de su solución.

(O3) Hacer una comparación entre las propiedades de la solución (1.1) y la ecuación de reacción-difusión clásica.

1.1. ¿Por qué estudiar ecuaciones de evolución no-locales?

Desde su introducción hace ya varios siglos, los modelos continuos clásicos descritos por ecuaciones diferenciales han permitido describir de manera bastante adecuada muchos fenómenos naturales. No obstante, una importante cantidad de procesos y fenómenos se pueden describir de una manera más precisa mediante la consideración de *modelos no-locales*.

Llevado a un lenguaje matemático, lo mencionado en el párrafo anterior se refiere a la naturaleza local o no-local de la ecuación diferencial involucrada en el modelo. Más precisamente, una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) clásica es una relación entre los valores de una función desconocida y algunas de sus derivadas. Para comprobar si una de estas ecuaciones se satisface en un punto, solo se necesita conocer los valores de la solución en una vecindad arbitrariamente pequeña de dicho punto, de manera que todas las derivadas involucradas se puedan calcular a la vez, lo cual define esencialmente la naturaleza local del modelo.

En contraste, los modelos no-locales se caracterizan por tener ecuaciones para las cuales se necesita información sobre los valores de la solución en regiones que, a priori, no son pequeñas. La mayoría de las veces, esto se debe a que la ecuación involucra operadores integrales en su fórmulación. Estas EDPs son conocidas en la literatura como ecuaciones diferenciales parciales no-locales (EDP no-locales). Si alguna de las variables de la ecuación se puede identificar con el tiempo, se denominan como ecuaciones no-locales de evolución.

Entre los operadores no locales que surgen de manera natural en estos modelos, podemos destacar, a modo de ejemplo, las derivadas fraccionarias en el sentido de Riemman-Liouville y la de Grünwald–Letnikov, el operador potencial de Riesz, y así como los operadores definidos en (1.2) y (1.3), entre otros. Consulte [37] para obtener una descripción básica de algunos de estos operadores.

El operador definido en (1.2) fue introducido de manera independiente por muchos autores, entre los cuales se incluyen Rabotnov en [42], Dzherbashyan y Nersesian en [16], y el propio Caputo en [8].

Dado su carácter integro-diferencial, la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo ha demostrado ser particularmente valiosa en la descripción de fenómenos físicos. Esto se debe a que permite modelar efectos de memoria en los procesos descritos. En muchas ocasiones, se prefiere este operador por sobre los anteriormente mencionados. Una ventaja significativa radica en la forma que adquiere el *Teorema de Taylor* al emplear este operador. Específicamente, en el [13, Corolario 3.9], se observa que el desarrollo de Taylor alrededor de un punto, se describe en términos de derivadas de orden entero, de manera muy similar al enfoque del teorema clásico. En ese sentido, la versión de Caputo es de gran utilidad al momento de resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias que modelan algún fenómeno físico. Esto se debe a que las condiciones iniciales pueden expresarse como dependientes de derivadas enteras, lo cual intuitivamente es fácil de comprender y, en general, puede atribuirse algún significado.

La teoría de ecuaciones diferenciales parciales no-locales ha experimentado un rápido desarrollo en las últimas décadas debido a su aplicación en problemas provenientes de áreas aplicadas tales como viscoelasticidad, fenómenos de dispersión débil, difusión anómala, procesos estocásticos con saltos, mecánica de fluído, además de otras (ver, por ejemplo, [6, 9, 14, 19, 30, 31, 33, 35, 36, 43, 44, 46, 48]). En numerosas situaciones, una ecuación diferencial no-local da una descripción mucho más precisa de un fenómeno que una ecuación diferencial clásica.

Como ejemplo, en la mecánica de fluídos, la ecuación quasigeostrófica es un módelo no-local que es usado en oceanografía para describir la temperatura de la superficie del agua [10]. Otro caso se presenta en el estudio de la dinámica de aguas poco profundas donde la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP) [27] modela ondas de propagación débil que se mueven sobre la direción x. En difusión de calor, la ecuación de Gurtin-Pipkin [23] es un módelo no-local introducido para evitar la denominada "*paradoja de velocidad de propagación infinita*" que ocurre con la ecuación clásica del calor.

Este tipo de operadores no locales también ha encontrado aplicabilidad en la epidemiología. Por ejemplo, en [11], los autores refórmularon el modelo clásico SIR (susceptible–infected–recovered) a uno fraccionario mediante la derivada de Caputo para estudiar la dinámica de propagación del COVID-19 en distintos países. En este trabajo, los autores demuestran, mediante un enfoque estadístico, cómo el efecto de la "histéresis biológica"puede modelarse con mayor precisión mediante operadores fraccionarios.

Desde un punto de vista matemático, el estudio de ecuaciones diferenciales no-locales resulta intrigante y desafiante debido a que, en general, las técnicas usuales no son aplicables. Además, el comportamiento y las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial no-local pueden ser completamente distintas de las propiedades de la solución de una ecuación diferencial clásica, inclusivo si comparten una estructura similar.

Por ejemplo, el problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = \delta_0(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

tiene una estructura similar a la ecuación clásica del calor salvo por la naturaleza del operador espacial. Es conocido que este problema posee una solución dada por

$$u(t,x) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{(\pi|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{1.5}$$

(ver [1, Apendice I, página 47]). Podemos notar un decaimiento polinomial cuando t tiende a infinito y x está fijo, en claro contraste con la solución al problema clásico, que decae de forma exponencial. Sin embargo, en general, no se conoce una fórmula explicita para la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = \delta_0(x), \end{cases} \tag{1.6}$$

cuando $s \in (0,2) - \{1\}$. Más adelante profundizaremos un poco más en esta ecuación.

Un ejemplo de una EDP de evolución no-local y no-lineal es

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^s u = u - u^2 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.7}$$

donde u_0 es una función de soporte compacto. Es conocido que tanto para $s = 1$ como para $s \in (0,2)$ existe una "*invasión*" del estado inestable $u \equiv 0$ por el estado estable $u \equiv 1$. Sin embargo, cuando $s = 1$, la velocidad de invasión es lineal, mientras que si $s \in (0,2)$, la velocidad de invasión tiene una tasa exponencial [5].

Otro ejemplo, pero de diferente naturaleza, en el que las propiedades de una ecuación de evolución no-local difieren completamente de su contraparte clásica se manifiesta con la siguiente ecuación de evolución fraccionaria en tiempo:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha (u(t,x) - u_0(x)) - \Delta u(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.8}$$

donde ∂_t^α representa la derivada fraccionaria en el sentido de *Riemann-Liouville* de orden $\alpha \in (0,1]$. Cuando $\alpha = 1$, la ecuación (1.8) coincide con la ecuación clásica de difusión. En tal caso, es bien conocido que la solución fundamental pertenece a $L_p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p \geq 1$, independientemente de la dimensión del espacio. En contraste, cuando $\alpha \in (0,1)$, Kemppainen, Siljander, Vergara y Zacher en [29] demostraron que la correspondiente solución fundamental pertenece a $L_p(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $p < \frac{n}{n-2}$. Posteriormente, Pozo y Vergara [39], extendieron este resultado reemplazando el operador Laplaciano por el operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$ de orden $s \in (0,2)$.

Aún más, si en (1.8) se elije $u_0(x) = \delta_0(x)$, $n \geq 2$ y $\alpha \in (0,1)$, la solución fundamental $Z(t,x)$ no solo posee una singularidad en $t = 0$, si no que también en $x = 0$. Esto representa una significativa diferencia respecto al caso clásico, en el cual la solución está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Como último ejemplo, consideremos el Problema de Valor Incial (PVI) de la ecuación de evolución biarmónica concentrada inicialmente en el origen:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t,x) + \Delta^2 u(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(0,x) = \delta_0(x), \end{cases} \tag{1.9}$$

con $\alpha \in (0,1]$ y Δ^2 es el operador (1.3) con $s = 4$. Si aplicamos transformada de Fourier respecto a la variable espacial en el problema (1.9), se puede demostrar que la solución K_α viene representada por $K_\alpha(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\{E_\alpha(-|\xi|^4 t)\}(x)$.

Si $\alpha = 1$, la función de Mittag-Leffler se reduce a la función exponencial $K_1(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\{e^{-|\xi|^4 t}\}(x)$. En este caso, la función $x \mapsto K(t)(x) := K(t,x)$ pertenece siempre a $L^p(\mathbb{R}^n)$, independiente de la dimensión n.

Por el contrario, si $\alpha \in (0,1)$ y $n \geq 5$, no podemos asegurar que la solución al problema (1.9) sea p integrable como sucede en el caso clásico. De hecho, ocurre algo muy similar a lo discutido en el problema (1.8) (ver [47, Observación 2.3]):

$$K_\alpha(t,\cdot) \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad \text{si y solo si,} \quad p < \frac{n}{n-4}.$$

1.2. Velocidad de Invasión

Queremos analizar algunas propiedades de las soluciones de ecuaciones de evolución no-locales de la forma (1.1). Durante toda la tesis usaremos la notación $u_{\alpha,s}$ para referirnos a la solución de la ecuación (1.1) y enfatizar la dependencia del parámetro $\alpha \in (0,1]$ y $s \in \mathbb{R}_+$. Nos referiremos a $u_{1,2}$ como la solución al problema clásico de (1.1).

En [15], Di Pierro, Pellacci, Valdinoci y Verzini, estudian el caso particular $s = 2$ del problema (1.1), y establecen la existencia y unicidad en un sentido distribucional de la solución fundamental a este problema en cualquier dimensión. Además, investigan el comportamiento asintótico de ella sobre $\mathbb{R}$ a partir de cotas precisas de $u_{\alpha,s}$.

En este trabajo, seguimos una ruta similar, es decir, en una primera parte establecemos la existencia y unicidad de $u_{\alpha,s}$ mediante técnicas de la teoría de familias α- resolventes. En concreto, demostramos que la solución viene representada por:

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(rt^{-\alpha})u_{1,s}(r,x)\,dr;\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

donde Φ_α es la función de tipo Wright (definida en (2.19) más adelante).

Además, según lo desarrollado en [15, Lema 2.5], se espera tener una representación de $u_{\alpha,s}$ en términos de la función de Mittag-Leffler. Así, mediante la representación integral (1.10) anteriormente mencionada, demostramos que:

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\{E_\alpha(t^\alpha(b-a|\xi|^s))\}(x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier definida en algún espacio adecuado, usualmente, en el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Respecto a la representación (1.11), notamos que en virtud del decaimiento de las funciones de Mittag-Leffler (esto es, la relación (2.14) discutida más adelante), la función de Mittag-Leffler involucrada en (1.11) posee el siguiente comportamiento asintótico:

$$E_\alpha(t^\alpha(b-a|\xi|^s) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{t^\alpha(a|\xi|^s-b)}, \quad \text{como} \quad |\xi|\to\infty.$$

En consecuencia, para cada $t > 0$ fijo,

$$E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s)) \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad \text{si y solo si,} \quad p > \frac{n}{s}. \tag{1.12}$$

Esto muestra una gran discrepancia respecto al caso clásico, en el que el rápido decaimiento de la función $\xi \mapsto e^{-ta|\xi|^s}$ implica la p-integrabilidad en cualquier orden y en cualquier dimensión.

Más aún, de lo anterior se sigue que $\mathcal{F}\{u_{\alpha,s}(t,x)\}(\xi) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, si y solo si, $s > n$. Si este es el caso, se tiene que:

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))\, d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En el siguiente capítulo estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de $u_{\alpha,s}$ vía la representación (1.10) y mediante las técnicas utilizadas por los autores en [15].

Dado que $u_{\alpha,s}$ es una función radial (ver Teorema 2.3), es interesante preguntarse por los valores de $u_{\alpha,s}$ sobre esferas cuyo radio crece en el tiempo. Más precisamente, queremos estudiar los valores de $u_{\alpha,s}$ en tiempos grandes, sobre regiones del tipo $|x| = \Theta(t)$, donde $\Theta(t)$ sea una función estrictamente creciente y positiva. De este modo, si la función Θ es lo suficientemente pequeña (lo que se traduce en esferas lentas), entonces se espera que los valores $u_{\alpha,s}$ se vean fuertemente afectados por la singularidad en el origen a causa del efecto de memoria que entrega el operador definido en (1.2). En términos matemáticos, esto se traduce en que:

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, \Theta(t)\vec{e}) = \infty, \tag{1.13}$$

donde $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$, donde $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Por el contrario, si Θ es lo suficientemente grande (es decir, esferas rápidas), se espera que los valores $u_{\alpha,s}$ se vean muy poco afectados por la singularidad en el origen. En este caso:

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, \Theta(t)\vec{e}) = 0. \tag{1.14}$$

Para ilustrar esto de mejor manera, consideremos la solución al problema (1.1) para $\alpha = 1$ y $s = 2$. Utilizando (1.11) y técnica elementales del análisis de Fourier (ver más adelante en el Ejemplo 2.5), se puede demostrar que la solución viene dada por:

$$u_{1,2}(t,x) = \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{bt - \frac{|x|^2}{4ta}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si suponemos que $|x| = \Theta(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{bt-\frac{\Theta^2(t)}{4ta}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{4abt^2-\Theta^2(t)}{4ta}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{((2\sqrt{ab}t-\Theta(t))(2\sqrt{ab}t+\Theta(t)))}{4ta}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{\left(\frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}-\frac{\Theta(t)}{4ta}\right)(2\sqrt{ab}t+\Theta(t))} \\
&= \begin{cases} \infty, & \Theta(t) = o(t) \\ 0, & t = o(\Theta(t)). \end{cases}
\end{aligned}$$

donde $o(f)$ representa la notación clásica de Landau en análisis asintótico (ver más adelante Definición 2.1). Observamos que hay un cambio entre el comportamiento divergente del convergente en la función $f(t) = t$. Es decir, si $\Theta(t) = mt^\beta$, con m y β reales positivos, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} u_{1,2}(t, mt^\beta \vec{e}) = \begin{cases} \infty, & \beta \in (0,1) \\ 0, & \beta > 1. \end{cases}$$

Podemos observar que para $\beta = 1$, la convergencia o divergencia del límite dependerán de la pendiente m.

En efecto, si $|x| = mt$, entonces:

$$\lim_{t\to\infty} u_{1,2}(t, mt\vec{e}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}} e^{bt-\frac{m^2}{4a}t} \tag{1.15}$$

$$= \begin{cases} \infty, & m < 2\sqrt{ab} \\ 0, & m \geq 2\sqrt{ab} \end{cases} \tag{1.16}$$

Por otro lado, es importante destacar que el responsable del comportamiento divergente de la solución $u_{1,2}$ es el término de reacción $b > 0$. De hecho, si $b = 0$, el estudio de la velocidad de invasión es trivial pues en cualquier caso, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} u_{1,2}(t, \Theta(t)\vec{e}) = 0,$$

para cualquier función Θ positiva y estrictamente creciente.

El ejemplo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que una función $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $\Theta(t) = t^\alpha$, con $\alpha > 0$ es una velocidad de invasión de f si*

$$\lim_{t\to\infty} f(mt^\beta) = \begin{cases} 0 & : \beta > \alpha \\ \infty & : \beta < \alpha, \end{cases}$$

para todo $\beta > 0$ y $m > 0$.

De acuerdo a la definición precedente, la velocidad de invasión de la función $u_{1,2}$ corresponde a $\Theta(t) = t$.

Proposición 1.1. *Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continua. Si existe $\alpha > 0$ como en la Definición 1.1, entonces este es único.*

Demostración. Supongamos que existen $0 < \alpha < \alpha'$ como en la Definición 1.1. Tomemos $\beta = \frac{\alpha+\alpha'}{2}$. Es decir, $\beta > \alpha$ y $\beta < \alpha'$, de las cuales se deducen los siguientes límites:

$$\lim_{t\to\infty} f(t^\beta) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t^\beta) = \infty.$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha = \alpha'$. ∎

Otro ejemplo interesante surge al considerar la solución al problema (1.1), con $\alpha = 1$ y $s = 1$. Fijando $a = b = 1$, en este caso la solución fundamental $u_{1,1}$ viene dada por

$$u_{1,1}(t,x) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{te^t}{(\pi|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si al igual que antes, $|x| = mt^\beta$, entonces es claro que

$$\lim_{t\to\infty} u_{1,1}(t, mt^\beta \vec{e}) = \infty, \tag{1.17}$$

independiente del valor que tome β. Es decir, a diferencia de lo que sucedía con $u_{1,2}$, en este caso aún hay infinitud en los valores de $u_{1,1}$ sobre esferas que se mueven más rápido que la velocidad lineal. De todas maneras, este es un comportamiento esperado y no debe causar mayor confusión: tanto $u_{1,1}$ y $u_{1,2}$ son funciones de densidad de probabilidad de encontrar una partícula a tiempo t en la posición x [1], donde el movimiento de tal partícula es conducido por una caminata aleatoria en el caso de $u_{1,2}$, y por un proceso aleatorio con saltos arbitrariamente largos en el caso de $u_{1,1}$ (ver [1]).

Esta diferencia se ve ilustrada de forma clara en los decaimientos de ambas soluciones fundamentales cuando el término de reacción está ausente (esto es, cuando $b = 0$). Es decir, mientras que $u_{1,2}$ presenta un decaimiento exponencial, presentando así colas más cortas, la solución $u_{1,1}$ exhibe un decaimiento polinomial con colas más largas. Este no es un hecho aislado entre la clase de operadores $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$, con $s \in (0,2)$, y es más bien, la excepción que confirma la regla: todas las soluciones $u_{1,s}$ satisfacen una relación del tipo (1.17). A raíz de este último ejemplo, uno podría pensar que el efecto del operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$, con $s \in (0,2)$, sobre la solución $u_{\alpha,s}$, es *acelerar la invasión* respecto al caso clásico, vale decir, si queremos "escapar" de la divergencia, hay que moverse en esferas más rápidas que las del tipo $|x| = mt^\beta$ (ver [7] y las referencia que allí se citan para una discusión de esto último).

Distinto es el panorama cuando consideramos soluciones $u_{\alpha,s}$ para el problema (1.1), con $\alpha \in (0,1)$ y $s > 0$. En este contexto, hay varias razones que dificultan el análisis de la solución. Por ejemplo, la función de Mittag-Leffler con parámetro $\alpha \in (0,1)$ que aparece en (1.11) no cumple la relación

$$E_\alpha(x+y) = E_\alpha(x)E_\alpha(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

En el caso clásico, esta relación nos permite, entre otras cosas, analizar por separado la influencia del término de reacción del término que aporta el operador $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ en la solución $u_{\alpha,s}$ (estos son bt^α y $-a|\xi|^s$ respectivamente en (1.11)). Para el caso fraccionario, esto ya no es posible.

Otras dificultades surgen del carácter no local que presenta el operador de Caputo, lo cual provoca algunas anormalidades que no se observaban en el caso clásico. Por ejemplo,

$$u_{\alpha,s}(t,0) = \int_{\mathbb{R}} E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))\, d\xi = \infty, \quad \text{para todo} \quad t > 0,$$

si, $s = 2$ y $n = 3$. Es decir, la singularidad en el origen persiste en todos los tiempos (sorprendentemente, esto es cierto incluso si $b = 0$).

Dicho lo anterior, se espera que el efecto de memoria entregado por el operador fraccionario en tiempo *ralentice la invasión* respecto al caso clásico. Considerando esto, los autores en [15, Teorema 1.2] demuestran que:

Teorema 1.1. *Sean $n = 1$, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $m > 0$. Entonces,*

$$u_{\alpha,2}(t, mt^\beta) > m\alpha t^{\beta-2\alpha}E_\alpha(t^\alpha)[1 - o(1)].$$

En particular,

$$u_{\alpha,2}(t, mt^\beta) \to \infty, \quad \textit{cuando} \quad t \to \infty. \tag{1.18}$$

De este teorema surgen las siguientes observaciones:

***Observación* 1.1.** *Por el Teorema 1.1, sabemos que la velocidad de invasión de $u_{\alpha,2}$ debe ser igual o más rápida a la de una potencia tan cercana a la raíz cuadrada, es decir, más grande que mt^β, siendo $m > 0$ y $\beta \in (0, \frac{1}{2})$.*

Notamos también que el teorema no dice nada acerca de $\beta \in [\frac{1}{2}, \infty)$.

***Observación* 1.2.** *No es casualidad que los autores hayan solo trabajado el caso unidimensional. El caso de dimensiones más altas está lleno de complicaciones causadas por el núcleo oscilatorio $J_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)r^{\frac{n}{2}}$ que aparece en el integrando de la transformada de Fourier (ver Teorema 2.3). En particular, cuando $n = 1$, este núcleo termina siendo bastante benigno.*

***Observación* 1.3.** *El Teorema 1.1 restringe los exponentes fraccionarios al intervalo $[\frac{1}{2}, 1)$.*

***Observación* 1.4.** *El Teorema 1.1 no dice nada acerca de la convergencia de los valores de* $u_{\alpha,2}$.

De esta forma, surgen naturalmente las siguientes preguntas:

(P1) ¿Qué sucede cuando $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$?

(P2) Si $\beta \in [\frac{1}{2}, \infty)$, ¿hay finitud o divergencia en los valores de $u_{\alpha,2}$?

(P3) ¿Hay alguna relación clara en los parámetros α y β?

(P4) ¿Qué sucede en más dimensiones?

(P5) ¿Qué papel juegan los coeficientes a y b?

(P6) ¿Cómo es la velocidad de invasión en soluciones $u_{\alpha,s}$, con $s > 0$?

1.3. Resultados principales

Hemos obtenido resultados significativos en relación con la divergencia de $u_{\alpha,s}$. Presentamos a continuación un teorema que establece condiciones bajo las cuales la solución $u_{\alpha,s}$, con $s \in (0,2)$, exhibe un comportamiento divergente.

Teorema 1.2. *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ *y* $s \in (0,2)$, *y consideremos* $b > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$ *y* $a > 0$ *como en* (1.1). *Si* $\beta > 0$, *entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \infty,$$

para cualquier $m > 0$ *y* $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

El siguiente teorema extiende y complementa los resultados del trabajo realizado por Serena Dipierro y demás autores en [15]:

Teorema 1.3. *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $a > 0$ *y* $b > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$ *fijos como en* (1.1). *Se siguen las siguientes proposiciones:*

1. *Si* $0 < \beta < 1$, *entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,2}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \infty,$$

con $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

2. *Si* $\beta = 1$ *y* $m < 2\sqrt{a(b-(1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)})}$, *entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,2}(t, mt\vec{e}) = \infty,$$

con $m > 0$ *y* $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

El rango restante de $s \in (2, \infty)$ será analizado a través de la representación (1.11) solo en el caso unidimensional.

Teorema 1.4. *En $n = 1$, sea $M \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ y $s \geq 2$. Para $\alpha \in [\frac{1}{M}, 1]$, $\beta \in (0, \frac{1}{s})$ y $\ell \in (0, \frac{\pi}{2})$, existe $C > 0$ tal que*

$$u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) > Cm^{s-1}t^{\beta(s-1)-\alpha M}E_{\alpha}(t^{\alpha})[1 - o(1)],$$

donde $m > 0$ y $C = \min\{\ell^{2-s}\frac{\alpha}{s}, \frac{\alpha}{s}(\frac{2}{\pi})^{s-1}\}$. En particular,

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \infty.$$

Aún más,

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, \Phi(t)\vec{e}) = \infty,$$

si Φ es creciente, positiva, divergente y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{\sqrt[s]{t}} = 0.$$

Por último, presentamos el siguiente resultado acerca de la convergencia a 0 cuando $\alpha = \frac{1}{2}$ y $s \geq 2$.

Teorema 1.5. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\beta \in (1, \infty)$. Entonces para $s \geq 2$ se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = 0,$$

con $m > 0$ y $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

En la siguiente tabla se resumen los resultados obtenidos en esta tesis fijando $a = b = 1$. Para su lectura, seguiremos el siguiente orden:

- Indica la dimensión del espacio.
- Indica el orden de la derivada fraccionaria de Caputo.
- Indica los valores de $\beta > 0$ en los que hay divergencia o convergencia en regiones del tipo $|x| = mt^{\beta}$.

$(-\Delta)^{s/2}$	Convergencia	Divergencia
$s \in (0, 2)$	No existe $\beta > 0$.	▪ Cualquier dimensión. ▪ $\alpha \in (0, 1)$. ▪ $\beta > 0$.
$s = 2$	▪ Cualquier dimensión. ▪ $\alpha = \frac{1}{2}$. ▪ $\beta > 1$.	▪ Cualquier dimensión. ▪ $\alpha \in (0, 1)$. ▪ $\beta \leq 1$.
$s \in (2, \infty)$	▪ Cualquier dimensión. ▪ $\alpha = \frac{1}{2}$. ▪ $\beta > 1$.	▪ $n = 1$. ▪ $\alpha \in (0, 1)$. ▪ $0 < \beta < \frac{1}{s}$.

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección, introduciremos conceptos claves que serán fundamentales en el desarrollo de esta tesis. Además, presentaremos algunos resultados básicos de la teoría de semigrupos de convolución, así como otros aspectos relacionados con la teoría de familias resolvente desarrollada por Prüss en [40].

2.1. Conceptos Esenciales para el Análisis

Empezamos esta sección fijando notaciones: Para $G \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por

- $C(G)$ al espacio de funciones continuas complejo-valuadas;
- $C^m(G) \subset C(G)$ el espacio de funciones m-veces continuamente diferenciales, con $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- $C_0^\infty(G) \subset C^\infty(G)$ el espacio de funciones infinitamente diferenciable con soporte compacto;
- $C_\infty(G)$ el espacio de funciones continuas que convergen a 0 en el infinito;
- Dado $p \geq 1$, $L_p(G)$ denota el conjunto de funciones p integrables sobre G, esto es,

  $$\int_G |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

  donde dx es la medida usual de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

En adición, denotamos por

- $W_1^1(I)$ $(I \subset \mathbb{R}) = \{f \in L_1(I) : f' \in L_1(I)\}$ y $W_{1,loc}^1(I) = \{u \in W_1^1(J), J \subset\subset I\}$, donde $J \subset\subset I$ significa que J es un intervalo cerrado tal que $\overline{J} \subset I$;

- $\mathcal{M}_b^+$ al conjunto de medidas positivas y acotadas en algún espacio medible $(\Omega, \mathcal{B})$;
- $\mathbb{R}_+$ es el intervalo de número reales $[0, \infty)$.
- $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, donde $|\cdot|$ denota la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Respetamos la notación usual para el producto convolución entre dos funciones en $L_1(\mathbb{R}_+)$

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-s)g(s)\, ds,$$

Más en general, si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, definimos el producto convolución sobre $\mathbb{R}^n$ como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Ambas convoluciones están bien definidas por la desigualdad de Young.

A continuación, definimos algunas funciones elementales y resaltando las propiedades más relevantes para el avance de nuestro trabajo.

La **función Gamma** $\Gamma : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1}\, dt, \quad \beta > 0.$$

Integrando por partes, resulta sencillo comprobar que esta función satisface la ecuación funcional

$$\Gamma(1+\beta) = \beta\Gamma(\beta), \quad \beta > 0.$$

Es conocido que la función Γ tiene un mínimo entre 1,46 y 1,47 (ver [12]). En particular, en la deducción de ciertos resultados en esta tesis, será relevante la monotonía de Γ en el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

Para $a > 0$ fijo, definimos la **función Gamma incompleta** $\Gamma(a, \cdot) : \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt, \quad a > 0. \tag{2.1}$$

Evidentemente, $\Gamma(a, 0) = \Gamma(a)$.

Definimos la **función error** $\mathrm{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt. \tag{2.2}$$

Un resultado elemental en la teoría de integración es que

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

es decir, se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1. \tag{2.3}$$

La función **error complemento**, denotada por erfc, se define como

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

De las observaciones anteriores, es claro que

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{erfc}(x) = 0.$$

Aún más, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\mathrm{erfc}(x) \leq e^{-x^2}, \quad x > 0. \tag{2.5}$$

La función error aparece naturalmente en el cálculo de antiderivadas de muchas funciones. Por ejemplo, en [21, Página 108, fórmula 2.33], se aprecia que

$$\int e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\mathrm{erf}\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) + C, \tag{2.6}$$

para a, b, c y C reales, con $a \neq 0$.

Introducimos la clásica notación de Landau para relaciones asintóticas.

Definición 2.1. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones.*

1. *Diremos que $f = o(g)$ si*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

2. *Diremos que $f = O(g)$ si existe $M > 0$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f(t) \leq Mg(t), \quad t \geq t_0.$$

3. *La igualdad asintótica $f(t) \sim g(t)$ significa que existe $C > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = C.$$

4. *La relación $f \asymp g$ significa que existen constantes $0 < C_2 < C_1$ tales que*

$$C_2 g(x) \leq f(x) \leq C_1 g(x), \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$

Ejemplo 2.1. *Se tiene que $f = o(1)$, si y solo si, $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. En particular, $\frac{p(t)}{e^t} = o(1)$, para cualquier polinomio p.*

Ejemplo 2.2. *La función Gamma incompleta satisface para $a > 0$ que*

$$\Gamma(a, x) \sim x^{a-1}e^{-x}. \tag{2.7}$$

El **espacio de Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ consiste en todas las funciones $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha u(x)| < \infty, \tag{2.8}$$

donde $x^\beta = (x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}, x_3^{\beta_3}, ...)$ y $\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot ...\partial x_n^{\alpha_n}}$, con $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Ejemplo 2.3. *La función $f(x) = e^{-a|x|}$, para $a > 0$, no pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ porque no es diferenciable en $x = 0$.*

Ejemplo 2.4. *Si $a > 0$ y $s \geq 2$, la función $f(x) = e^{-a|x|^s}$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

2.1.1. Transformada de Laplace y de Fourier

La **transformada de Laplace** de una función $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ compleja valuada es definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt, \quad Re(\lambda) > \omega,$$

para algún $\omega \in \mathbb{R}$ adecuado.

Lema 2.1. *Sea X un espacio de Banach. Sea $u(t) \in X$ una función continua definida para $t \geq 0$ tal que $u(t) = O(e^{\gamma t})$, si $t \to \infty$, para algún $\gamma > 0$. Entonces, su transformada de Laplace existe para $\lambda > \gamma$ y se cumple que*

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \frac{d^n}{d\lambda^n}\mathcal{L}\{u(t)\} \left(\frac{n}{t}\right).$$

Este lema es conocido en la literatura como ***fórmula de inversión de Post-Widder***. Ver [4] para una demostración elemental de esta fórmula.

Para $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$, definimos la **transformada de Fourier** de la función u por

$$\mathcal{F}\{u(x)\}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

La integral anterior está bien definida, ya que la función $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}u(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Para simplificar la escritura, denotaremos $\mathcal{F}\{u(x)\}(\xi) := \widehat{u}(\xi)$.

Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

y, si f y g son tales que $fg \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces también se satisface que

$$\mathcal{F}\{(fg)(x)\}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) * \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

La transformada de Fourier restringida a la clase de Schwartz, es una función continua y lineal de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [25, Teorema 3.1.2]. De hecho, $\mathcal{F}$ es biyectiva con inversa

$$\mathcal{F}^{-1}\{u(x)\}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} u(x)\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

La función $\mathcal{F}^{-1}$ también es lineal y mapea continuamente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo. Denotamos por $\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}(\xi) = \check{f}(\xi)$.

Sea $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ un operador diferencial lineal con constantes $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Es conocido que para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{F}\{P(D)u(x)\}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (i\xi)^\alpha, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n.$$

En particular, tendremos que

$$\mathcal{F}\{\Delta u(x)\}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi),$$

donde Δ es el operador laplaciano en $\mathbb{R}^n$ definido por $\Delta u(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \partial_{x_j}^2 u(x)$.

Proposición 2.1. *La función* $g(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *es un punto fijo de* $\mathcal{F}$*, es decir,*

$$\mathcal{F}\{e^{\frac{-|x|^2}{2}}\}(\xi) = e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}.$$

Demostración. Observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\cdot\xi} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_j\xi_j} e^{-\frac{x_j^2}{2}}\, dx_j,$$

de modo que basta mostrar que el resultado sobre $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Es fácil notar que g satisface la ecuación diferencial

$$iD_x g(x) + xg(x) = 0,$$

donde $D_x g(x) := -i\partial_x g(x)$. Si aplicamos transformada de Fourier en la ecuación anterior, obtenemos

$$\xi\hat{g}(\xi) + iD_\xi \hat{g}(\xi) = 0.$$

Esta ecuación tiene solución $\hat{g}(\xi) = Ce^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. La constante $C = 1$ está determinada gracias a la igualdad $\hat{g}(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1$. Con esto se demuestra la proposición. ∎

Ejemplo 2.5. *Para cada $t > 0$, la función $H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ definida en $\mathbb{R}^n$, está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Además,*

$$\mathcal{F}\{H_t(x)\}(\xi) = e^{-t|\xi|^2}.$$

En efecto, notamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} e^{-t|\xi|^2}\, d\xi = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi_j x_j} e^{-t\xi_j^2}\, d\xi_j,$$

así que basta analizar el caso unidimensional. Notamos que

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-t|\xi|^2}\}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-t|\xi|^2}\, d\xi.$$

Tomamos el cambio de variables $u = \sqrt{2t}\xi$, y utilizamos la Proposición 2.1 para reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} e^{-t|\xi|^2}\, d\xi &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu\frac{x}{\sqrt{2t}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\frac{u^2}{2}}\}\left(\frac{x}{(2t)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \end{aligned}$$

El resultado se sigue de multiplicar n-veces la integral anterior.

Proposición 2.2. *Para $u, v \in L_1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) v(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi)\hat{v}(\xi)\, d\xi.$$

Demostración. La demostración se sigue del Teorema de Fubini. ∎

La siguiente proposición da una representación alternativa para la transformada de Fourier aplicada a funciones radiales.

Proposición 2.3. *([22, Apéndice B5]) Sea $u(x) = u_0(|x|)$ una función radial en $\mathbb{R}^n$, donde u_0 está definida en $[0, \infty)$. Entonces la transformada de Fourier de u está dada por la fórmula*

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2\pi}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{\infty} u_0(r) J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r|\xi|) r^{\frac{n}{2}}\, dr, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde $J_{\frac{n}{2}-1}$ es la función de Bessel de primer tipo y de orden $\frac{n}{2} - 1$.

Terminamos esta sección definiendo la transformada de Fourier para elementos del espacio $\mathcal{M}_b^+$.

Definición 2.2. *Sea $\mu \in \mathcal{M}_b^+$. Definimos la transformada de Fourier $\hat{\mu}$ de μ por*

$$\hat{\mu}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \mu(dx).$$

Ejemplo 2.6. *Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ un espacio medible. Para $A \in \mathcal{B}$, definimos δ_0 como*

$$\delta_0(A) = \begin{cases} 0, & 0 \notin A \\ 1, & 0 \in A. \end{cases}$$

Claramente, $\delta_0 \in \mathcal{M}_b^+$. Vemos que

$$\hat{\delta}_0(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-ix\cdot 0} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}.$$

Ejemplo 2.7. *Para cada $t > 0$, la función definida en el Ejemplo 2.5 define una medida en $\mathcal{M}_b^+$ sobre $\mathbb{R}^n$. En efecto,*

$$\eta_t(A) = \int_A H_t(x)\, dx$$

es una medida acotada y positiva en los borelianos de $\mathbb{R}^n$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_t(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \eta_t(dx) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} H_t(x)\, dx \\ &= \mathcal{F}\{H_t(x)\}(\xi) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Definición 2.3. *El espacio dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es llamado el espacio de distribuciones temperadas. Es decir, el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ consiste de todas las funciones $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ que son lineales y continuas, donde el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está dotado de la topología generada por la familia $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}$, con*

$$p_{\alpha,\beta}(u) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha u(x)|.$$

La transformada de Fourier puede extenderse vía dualidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.4. *La transformada de Fourier $\mathcal{F}\{u\}$ (o simplemente $\hat{u}$) de un elemento $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una nueva distribución definida por*

$$\mathcal{F}\{u\}(\phi) = u(\mathcal{F}\{\phi(x)\}(\cdot)), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Como es usual en la literatura, la igualdad precedente la escribiremos como

$$(\hat{u}, \phi) := (u, \hat{\phi}), \quad \text{para toda} \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ejemplo 2.8. *Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces el funcional Ψ definido por*

$$\Psi_u(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

está en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 2.9. *Si $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\Psi_u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

está en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $L_1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 2.10. *Si $\mu \in \mathcal{M}_b^+$, entonces el funcional Ψ_μ definido por*

$$\Psi_\mu(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mu(dx), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

está en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}_b^+ \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En particular,

$$\Psi_{\delta_0}(\phi) = \phi(0).$$

Ejemplo 2.11. *Sea δ_0 la medida delta de Dirac. Para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene por definición que*

$$(\hat{\delta_0}, \phi) = (\delta_0, \hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)\delta_0(d\xi) = \hat{\phi}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(1, \phi).$$

Por lo tanto, como ϕ es arbitrario, se tiene que

$$\hat{\delta_0} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}.$$

Análogamente,

$$\hat{1} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta_0.$$

***Observación* 2.1.** *Dado que en esta tesis se centra en el estudio del comportamiento asintótico de las funciones $u_{\alpha,s}$, es evidente que la multiplicación por constantes fijas y positivas no influye en nuestros propósitos. De esta forma, asumiremos de ahora en adelante que*

$$\hat{\delta_0} = 1$$
$$\hat{1} = \delta_0.$$

Proposición 2.4. *La transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es una extensión de la transformada de Fourier en $L_1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $u \in L_1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por la definición de transformada de Fourier en el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tendremos que

$$(\hat{u}, \phi) = (u, \hat{\phi}).$$

Pero como $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$,

$$(\hat{u}, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\hat{\phi}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)\phi(x)\, dx.$$

Vale decir, la transformada de Fourier de un elemento de $L_1(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es justamente, la distribución inducida por $\hat{u}$. ■

2.1.2. Derivada de Caputo

Sea $\alpha \in (0,1)$ y $m = \lfloor \alpha \rfloor$. Definimos

$$g_\beta(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

La **integral fraccionaria de Riemman-Lioville** de orden $\alpha > 0$ es definida por la siguiente igualdad:

$$J_t^\alpha f(t) := (g_\alpha * f)(t), \quad f \in f \in W^1_{1,loc}(\mathbb{R}_+), \quad T > 0. \tag{2.11}$$

Para $f \in W^1_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$, definimos su **derivada fraccionaria en el sentido de Caputo** de orden $\alpha \in (0,1)$ por

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha f(t) &:= J_t^{1-\alpha} f'(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.12. *Si $f(t) = t^\gamma$, con $\gamma \in (-1, \infty)$, entonces*

$$\partial_t^\alpha f(t) = t^{\gamma-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}.$$

Debido a su naturaleza integro-diferencial y a la presencia del peso $K(t,\tau) := \frac{1}{(t-\tau)^\alpha}$ (cuyo soporte es todo $I = [0,t]$) en su formulación, los valores que toma este operador en un instante t se ven fuertemente afectados por los valores que toma K en $(0,t)$. En efecto, el núcleo $K(t,\tau)$ define una función creciente en τ, lo que significa que los eventos más recientes *pesan más* que los más antiguos. Este fenómeno se conoce como *efecto de* *memoria*. Para ilustrar este fenómeno, consideremos $0 < t_1 < t_2$ y $f \in L^1([0,T])$, y definamos la cantidad

$$H_\alpha := (J_t^\alpha f)(t_2) - (J_t^\alpha f)(t_1).$$

Por definición, esto se expresa como:

$$\begin{aligned} H_\alpha &= (J_t^\alpha f)(t_2) - (J_t^\alpha f)(t_1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^{t_2}(t_2-s)^{1-\alpha}f(s)ds - \int_0^{t_1}(t_1-s)^{1-\alpha}f(s)ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{1-\alpha}f(s)ds + \int_0^{t_1}((t_2-s)^{1-\alpha}-(t_1-s)^{1-\alpha})f(s)ds\right] \end{aligned}$$

Observamos que cuando $\alpha \neq 1$, la integral

$$\int_0^{t_1}((t_2-s)^{1-\alpha}-(t_1-s)^{1-\alpha})f(s)ds \neq 0,$$

es decir, la cantidad H_α se ve fuertemente influida por los valores que toma f en el intervalo $[0,t_1]$. En contraste, cuando $\alpha = 1$, este término se anula, y solo queda la dependencia en el intervalo $[t_1,t_2]$, sin importar lo que suceda en tiempos pasados a t_1.

Para más detalles, consulte [1, Página 16].

2.1.3. La función de Mittag-Leffler y de Wright

Sea $0 < \alpha \leq 1$. La función de **Mittag-Leffler** es definida por la serie de potencias

$$E_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Es claro que $E_1(\pm r) = e^{\pm r}$.

El rápido crecimiento de la función Γ, hace que esta serie converja para cualquier número real (ver [20, Capítulo 1]).

La siguiente proposición muestra cómo es el comportamiento asintótico de esta clase de funciones.

Proposición 2.5. *Sea $0 < \alpha < 1$. Entonces*

$$E_\alpha(r) = \frac{1}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}} + O(r^{-1}), \quad \textit{para} \quad r \to \infty, \tag{2.13}$$

y

$$E_\alpha(r) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)r} + O(r^{-2}), \quad \textit{para} \quad r \to -\infty. \tag{2.14}$$

La demostración de esta proposición utiliza una representación integral de la función de Mittag-Leffler y algunas otras herramientas analíticas de variable compleja, consulte [20, Corolario 3.7]. Además, bajo esta misma representación integral, se puede demostrar que la función de Mittag-Leffler con argumento negativo es completamente monótona. Esto es, para todo $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, se tiene que

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(E_\alpha(-x)) \geq 0, \quad x > 0, \tag{2.15}$$

consulte [20, Proposición 3.23]. En particular, la función E_α es positiva en todo $\mathbb{R}$.

Una generalización natural de esta función viene dada por la siguiente serie de potencias:

$$E_{\alpha,\beta}(r) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad r \in \mathbb{R},$$

donde $\alpha, \beta > 0$. En la literatura, a esta función se le conoce como la *función de Mittag-Leffler de dos parámetros*. Lo primero que podemos observar es que $E_{\alpha,1} = E_\alpha$. Nuevamente, debido al crecimiento de la función Γ, esta serie converge para todo $r \in \mathbb{R}$ (ver [20, Capítulo 4]). A continuación, demostramos una profunda conexión que tiene E_α con $E_{\alpha,\alpha}$:

Proposición 2.6. *Para $r \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$E'_\alpha(r) = \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(r).$$

Demostración. Derivando respecto a r en (2.12), se puede deducir que

$$\begin{aligned} E'_\alpha(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k r^{k-1}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) r^k}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) r^{k-1}}{(k+1)\alpha\Gamma(k\alpha + \alpha)} \\ &= \frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(r), \end{aligned}$$

lo cual demuestra el resultado. ■

El siguiente corolario es una consecuencia directa de la proposición precedente y de lo señalado en (2.15).

Corolario 2.1. *Sea $\alpha \in (0, 1]$. Entonces $E_{\alpha,\alpha}(r) > 0$, para todo $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Si consideramos $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, la serie que define $E_{\alpha,\alpha}$ tiene término general en $\mathbb{R}_+$, por lo que el resultado es directo. De esta forma, solo nos concentraremos en el caso que $r < 0$.

Recordemos que la función $r \mapsto E_\alpha(-r)$ es completamente monótona. Aplicando la regla de la cadena, se sigue que

$$E'_\alpha(-r) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad r > 0. \tag{2.16}$$

Ahora bien, por continuidad, esta desigualdad es en realidad estricta, ya que, al ser también creciente (de nuevo, por ser completamente monótona), no puede anularse. Luego, por la proposición precedente, se tiene que

$$\frac{1}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(-r) > 0, \quad \text{para todo} \quad r > 0,$$

y así, se concluye la demostración. ∎

La siguiente proposición será útil de gran utilidad en el Capítulo 3.

Proposición 2.7. *Sea $\alpha \in (0,1)$ y $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\partial_t^\alpha E_\alpha(\omega t^\alpha) = \omega E_\alpha(\omega t^\alpha).$$

Demostración. El caso $\omega = 0$ se sigue del hecho que la derivada de Caputo anula a las constantes.

Supongamos entonces que $\omega \neq 0$. Por definición,

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha E_\alpha(\omega t^\alpha) &= \partial_t^\alpha \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{(\omega t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\
&= J^{m-\alpha} D^m \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{\omega^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\
&= J^{m-\alpha} \sum_{k=1}^\infty \frac{\omega^k t^{\alpha k - m}}{\Gamma(\alpha k + 1 - m)} \\
&= \sum_{k=1}^\infty \frac{\omega^k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1 - \alpha)} \\
&= \omega E_\alpha(\omega t^\alpha).
\end{aligned}$$

∎

Sean $\alpha > -1$ y $\beta \in \mathbb{R}$, y consideremos la función definida por

$$W_{\alpha,\beta}(r) := \sum_{k=0}^\infty \frac{r^k}{k!\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Esta serie es absolutamente convergente en todo $\mathbb{R}$, ver [20, Apéndice F], y a través de una sencilla manipulación algebraica dentro de la serie, obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} W'_{\alpha,\beta}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{k-1}}{(k-1)!\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k}}{k!\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)} \\ &= W_{\alpha,\alpha+\beta}(r). \end{aligned}$$

En particular, si $\alpha \in (0,1)$, se tiene que

$$W'_{-\alpha,1}(r) = W_{-\alpha,1-\alpha}(r). \tag{2.18}$$

Mediante esta serie, definimos la **función de tipo Wright** por

$$\Phi_\alpha(r) := W_{-\alpha,1-\alpha}(-r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r)^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Ejemplo 2.13. *Más adelante veremos que será deseable tener expresiones explicitas para la función Φ_α en términos de otras funciones conocidas. En ese sentido, será importante el trabajo realizado por Mainardi y Tomirotti en [34, Apéndice A], en el cual han demostrado que para $\alpha = \frac{1}{p}$, donde p es un entero mayor o igual a 2, la función $\Phi_{\frac{1}{p}}$ se puede expresar como suma de $(p-1)$ funciones enteras. En particular, para $q = 2$, ellos demuestran que*

$$\Phi_{\frac{1}{2}}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{2}\right)_m \frac{r^{2m}}{(2m)!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{4}},$$

donde $(\cdot)_m$ es el símbolo de Pochhammer.

La siguiente igualdad, muestra la profunda relación que existe entre las funciones Φ_α con E_α:

$$E_\alpha(r) = \int_0^\infty W_{-\alpha,1-\alpha}(-t)e^{rt}\,dt = \mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t)\}(-r), \quad r \in \mathbb{R}, \tag{2.20}$$

vale decir, la transformada de Laplace de Φ_α coincide con la función $E_\alpha(-r)$ (ver [50] para una prueba de este hecho). Evaluando en $r = 0$, se deduce fácilmente que

$$\int_0^\infty \Phi_\alpha(t)\,dt = E_\alpha(0) = 1, \tag{2.21}$$

y por ende, la función $\Phi_\alpha(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Además, en consecuencia de la Proposición 2.1, podemos deducir la igualdad

$$\Phi_\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} \frac{d^n}{d\lambda^n} E_\alpha(-\lambda)_{|_{\lambda=n/t}},$$

y por ende,

$$\Phi_\alpha(t) \geq 0, \quad t > 0, \tag{2.22}$$

debido a que $r \mapsto E_\alpha(-r)$ es completamente monótona en $\mathbb{R}_+$.

Terminamos esta sección exhibiendo el comportamiento asintótico de cierta clase de funciones $W_{\alpha,\beta}$:

$$W_{-\nu,\mu}(z) = Y^{\frac{1}{2}-\mu}e^{-Y}\left(\sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-m} + O(|Y|^{-M})\right), \quad \text{con} \quad |z| \to \infty \tag{2.23}$$

con $0 < \nu, \mu < 1$ e $Y = (1-\nu)(-\nu^\nu z)^{\frac{1}{1-\nu}}$, donde A_m son ciertos números reales (ver [49]).

2.2. Semigrupos de convolución y funciones definidas negativas

Definición 2.5. *Una familia $(\eta_t)_{t\geq 0}$ de medidas de Borel positivas y acotadas en $\mathbb{R}^n$ es llamada un semigrupo de convolución en $\mathbb{R}^n$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(*I*) $\eta_t(\mathbb{R}^n) \leq 1$, *para todo* $t \geq 0$.

(*II*) $\eta_{t+s} = \eta_t \star \eta_s$ *para todo* $s, t \geq 0$, *y* $\eta_0 = \delta_0$.

(*III*) $\eta_t \to \delta_0$ *vagamente cuando* $t \to 0$, *es decir,*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\eta_t(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\delta_0(dx) = \phi(0), \qquad \textit{para todo} \quad \phi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Referenciamos a [25, Capítulo 3] para un estudio profundo de estos objetos.

Ejemplo 2.14. *Sea $a > 0$. La familia $(\eta_t)_{t\geq 0}$ definida por*

$$\eta_t(dx) = \frac{1}{(4\pi a t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}} \lambda(dx) = H_t(x)\lambda(dx),$$

donde $\lambda(dx)$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, define un semigrupo de convolución en $\mathbb{R}^n$. Esto se puede deducir fácilmente a través de las propiedades de la transformada de Fourier. En efecto:

- *Por el Ejemplo 2.5, se tiene que*

$$\eta_t(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}} \lambda(dx) = \mathcal{F}\{H_t(x)\}(0) = 1.$$

- *Basta notar que*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{H_t * H_s\}(\xi) &= (2\pi)^{n/2}\hat{H}_t\hat{H}_s(\xi)\\ &= (2\pi)^{n/2}\hat{\eta}_s(\xi)\\ &= e^{-ta|\xi|^2}e^{-sa|\xi|^2}\\ &= e^{-(t+s)a|\xi|^2}\\ &= \mathcal{F}\{H_{s+t}\}(\xi).\end{aligned}$$

- *Observamos que como*

$$\mathcal{F}\{H_t\}(\xi) = e^{-ta|\xi|^2}$$

entonces

$$\mathcal{F}\{H_0\}(\xi) = 1.$$

Es decir,

$$H_0 = \delta_0.$$

El semigrupo mencionado en el ejemplo anterior se presenta como un caso específico en la resolución del problema (1.1) cuando $\alpha = 1$ y $s = 2$. Al aplicar transformada de Fourier se obtiene la siguiente EDO:

$$\begin{cases}\partial_t\hat{u}(t,\xi) + a|\xi|^2\hat{u}(t,\xi) = b\hat{u}(t,\xi), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n\\ \hat{u}(0,\xi) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.24}$$

cuya solución es

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{bt}e^{-ta|\xi|^2}. \tag{2.25}$$

En virtud del Ejemplo 2.5, se tiene que

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{bt}e^{-ta|\xi|^2}\}(\xi) = e^{bt}H_t(x).$$

En particular, $u(t,x)$ es positiva, para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, y es acotada respecto a la variable x, para cada $t > 0$. Para el caso general $s \neq 2$, no sabemos a priori si existe solución, ni qué propiedades posee en caso de existir

En este contexto, nos interesa saber bajo qué condiciones existe, para cada $t > 0$, una función $x \mapsto u(t,x)$ que verifique la ecuación (2.25), y de ser este el caso, cuándo posee propiedades parecidas al semigrupo H_t. Además, planteamos la siguiente interrogante: ¿será que toda solución a la ecuación (2.25) define un semigrupo de convolución? Para abordar estas cuestiones, procedemos a introducir algunas definiciones.

Definición 2.6. *Una función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es llamada definida positiva si para cada elección de $k \in \mathbb{N}$ y vectores $\xi^1, ..., \xi^k \in \mathbb{R}^n$ la matriz $(u(\xi^j - \xi^l))_{j,l=1,...,k}$ es Hermitiana positiva, es decir, para todo $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\sum_{j,l=1}^{k} u(\xi^j - \xi^l)\lambda_j \overline{\lambda_l} \geq 0.$$

Ejemplo 2.15. *La transformada de Fourier de cualquier medida perteneciente a $\mathcal{M}_b^+$ es una función definida positiva (ver [25, Lema 3.5.4]).*

Definición 2.7. *Una función $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es llamada definida negativa si $\mu(0) \in \mathbb{R}$ es tal que*

$$\mu(0) \geq 0,$$

y la función

$$\xi \mapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t\mu(\xi)},$$

es definida positiva para todo $t \geq 0$. Si además, μ es una función continua en $\mathbb{R}^n$, diremos que μ es continua negativa definida, y lo denotaremos por $\mu \in CN(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 2.16. *En [25, Ejemplo 3.6.18] se ha establecido que toda forma cuadrática simétrica y no negativa $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua definida negativa. En particular, la función $\xi \mapsto |\xi|^2$ es continua definida negativa.*

Teorema 2.1. *([26, Teorema 3.6.16]) Para cualquier semigrupo de convolución $(\eta_t)_{t\geq 0}$ existe una única función continua definida negativa $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\hat{\eta}_t(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t\mu(\xi)}, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.26}$$

Recíprocamente, para cualquier función continua definida negativa $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, existe un único semigrupo de convolución $(\eta_t)_{t\geq 0}$ satisfaciendo la identidad (2.26).

Ejemplo 2.17. *La función $\xi \mapsto |\xi|^2$ es continua definida negativa por el Ejemplo 2.16. Por lo tanto, por el Teorema 2.1 existe una familia de medida $(H_t)_{t\geq 0}$ de Borel positivas y acotadas en $\mathbb{R}^n$ tales que*

$$\hat{H}_t(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^2}.$$

Vale decir, para cada $t \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, H_t(dx) = e^{-t|\xi|^2}.$$

Pero como vimos en el Ejemplo 2,5, este semigrupo se conoce explícitamente y es

$$H_t(dx) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, dx, & t > 0, \\ \delta_0(x), & t = 0. \end{cases}$$

A la familia $(H_t)_{t\geq 0}$ recién definida se le conoce como ***semigrupo del calor*** *o* ***semigrupo gaussiano****.*

Lema 2.2. *Para cualquier función $q \in CN(\mathbb{R}^n)$ existe una constante $c_q > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$|q(\xi)| \leq c_q(1 + |\xi|^2). \tag{2.27}$$

Demostración. Basta encontrar $c > 0$ tal que

$$|q(\xi)| \leq c|\xi|^2,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n - B(0, 1)$. Por [25, Lema 3.6.21],

$$\sqrt{|q(m\eta)} \leq m\sqrt{|q(\eta)|},$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$. Tomando $\eta = \frac{\xi}{m}$, implica por la desigualdad anterior que

$$|q(\xi)| \leq m^2 \left| q\left(\frac{\xi}{m}\right) \right|.$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$. Por continuidad, existe $c := \sup_{|\eta| \leq 2} |q(\eta)|$. Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \leq 1$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\xi| \in [m_0, m_0 + 1)$, y por tanto,

$$|q(\xi)| \leq m_0^2 \left| q\left(\frac{\xi}{m_0}\right) \right| \leq m_0^2 c \leq c|\xi|^2.$$

■

Corolario 2.2. *Si $\alpha > 2$ entonces la función $\xi \mapsto |\xi|^\alpha$ no es definida negativa.*

Demostración. Directo del Lema 2.2. ■

2.2.1. Laplaciano fraccionario de orden $s > 0$

Definición 2.8. *Una función $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ se dice de tipo Bernstein si $f \in C^\infty((0, \infty))$ y además, para cada $x > 0$,*

$$f(x) \geq 0 \quad y \quad (-1)^k \frac{d^k f(x)}{dx^k} \leq 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.18. *Si $0 < s < 1$, entonces la función*

$$f(x) = x^s, \quad x > 0,$$

es una función de tipo Bernstein .

El siguiente teorema ha sido demostrado en [25, Lema 3.9.9].

Teorema 2.2. *Para cualquier función Bernstein $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ y cualquier función continua definida negativa $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, la función $(g \circ \mu)$ también es continua definida negativa.*

En consecuencia, el Teorema 2.1 garantiza la existencia de un único semigrupo de convolución $(\eta_t^g)_{t\geq 0}$ tal que

$$\widehat{\eta_t^g}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-tg(\mu(\xi))}, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dado que la función $\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ también es continua definida negativa, podemos inferir una vez más del Teorema 2.1 que existe un semigrupo de convolución $(\eta_t)_{t\geq 0}$ asociado a la función $\mu(\xi)$. En el contexto del Teorema 2.2, el nuevo semigrupo de convolución $(\eta_t^g)_{t\geq 0}$ se denomina semigrupo de convolución subordinado a $(\eta_t)_{t\geq 0}$ o a $\mu(\xi)$. A la función $\mu(\xi)$ se le llama usualmente *símbolo*.

Corolario 2.3. *Si $s \in (0, 2]$, entonces la función $\xi \mapsto |\xi|^s$ es definida negativa.*

Demostración. Consideremos la función $x \mapsto x^{\frac{s}{2}}$. Por el Ejemplo 2.18, esta función es de tipo Bernstein. Por lo tanto, en virtud del Teorema 2.2 y del Ejemplo 2.16, la función $\xi \mapsto (|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$ debe ser definida negativa. ■

***Observación* 2.2.** *Si $s \in (0, 2]$, el Teorema 2,1 nos da la existencia de un semigrupo de convolución $(\eta_t^s)_{t\geq 0}$ tal que*

$$\hat{\eta}_t^s(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^s}, \quad t \geq 0.$$

Cabe señalar que en general no se conoce explícitamente una expresión para el semigrupo, salvo en los casos $s = 2$ (descrito en el Ejemplo (2.5)) y el milagroso $s = 1$, en cual es bien conocido que

$$\eta_t^1(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{(\pi|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A pesar de no contar con fórmulas explícitas para estos semigrupos, si conocemos bien su comportamiento asintótico. Resulta que si $s \in (0, 2)$, se tiene que

$$\eta_t^s(x) \asymp \frac{t}{(|x|^2 + t^{\frac{2}{s}})^{\frac{n+s}{2}}}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.28}$$

ver [3].

***Observación* 2.3.** *De acuerdo al Corolario 2.2, la función $\xi \mapsto |\xi|^s$, para $s > 2$, no genera un semigrupo de convoluciones. No obstante, para cada $t \geq 0$, la función*

$$f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^s}$$

posee inversa de Fourier al pertenecer a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, esta inversa también pertenece a la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotando esta inversa como η_t^s, se sigue que para cada $t \geq 0$,

$$\hat{\eta_t}^s(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-t|\xi|^s}.$$

Al tomar transformada de Fourier, resulta evidente que la familia de funciones $(\eta_t^s)_{t>0}$ preserva la propiedad de semigrupo:

$$\eta_t^s * \eta_r^s = \eta_{t+r}^s, \quad \textit{para todo} \quad t, r > 0.$$

Sin embargo, como ya se discutió, esta familia $(\eta_t^s)_{t>0}$ no genera un semigrupo de convoluciones. De hecho, no podemos asegurar que las medidas inducidas por cada una de las funciones η_t sean positiva.

Este fenómeno se ilustra de muy bien en el trabajo [32], donde Li y Wong muestran que si s es un entero mayor o igual a 2, entonces la función η_t^s tiene infinitos ceros en los reales, presentando el siguiente comportamiento oscilatorio en el infinito. Este comportamiento se describe mediante la expresión:

$$\eta_t^s(x) := t^{-\frac{n}{s}} f_n\left(\frac{|x|}{t^{\frac{1}{s}}}\right), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.29}$$

donde

$$f_n(z) = \frac{K_{s,n}}{z^{n(\frac{s}{2}-1)/(s-1)}} \left[\cos(a_s z^{s/(s-1)} - b_{n,s}) + O(z^{-s/(s-1)})\right] e^{-\sigma_s z^{s/(s-1)}}, \quad z \to \infty \tag{2.30}$$

donde $K_{s,n}, b_{n,s}, a_s, \sigma_s$ son constantes positivas reales dependientes de sus respectivos subíndices. La función f_n es comúnmente conocida como el perfil simétrico radial. Gracias al trabajo de Galaktionov-Pohožaev en [18, Proposición 2.1], conocemos el decaimiento exponencial de las funciones f_n: para cualquier dimensión $n \in \mathbb{N}$, existen constantes $K = K_n > 0, \mu = \mu_n > 0$ tales que

$$|f_n(y)| \leq K e^{-\mu y^{s/(s-1)}}, \quad y \geq 0. \tag{2.31}$$

2.3. Familias α-resolvente

2.3.1. Principio de subordinación de Prüss

Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y $x \in X$. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t) = \mathcal{A}u(t), & t > 0 \\ u(0) = x \in X, \end{cases} \tag{2.32}$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $\mathcal{A}$ es un operador lineal cerrado y densamente definido en X. Denotamos $D(\mathcal{A})$ al dominio del operador $\mathcal{A}$.

Definición 2.9. *Decimos que una función $u \in C(\mathbb{R}_+, x)$ es una **solución fuerte** del problema (2.32) si $u \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A}))$, $g_{1-\alpha} * (u - x) \in C^1(\mathbb{R}_+, x)$ y (2.32) vale en $\mathbb{R}_+$.*

Aplicando la integral fraccionaria de Riemman-Liouville, obtenemos que el problema (2.32) es equivalente a la siguiente ecuación:

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)\mathcal{A}u(s)\,ds = x + (g_\alpha * \mathcal{A}u)(t). \tag{2.33}$$

Definición 2.10. *Una familia $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es llamada una **familia α-resolvente** para (2.32) si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$S_\alpha(t)$ es fuertemente continua, para cada $t \geq 0$ y $S_\alpha(0) = I$.*
2. *$S_\alpha(t)D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A})$ y $AS_\alpha(t)\mathcal{A}x = S_\alpha(t)\mathcal{A}x$, para cada $x \in D(\mathcal{A})$ y $t \geq 0$.*
3. *$S_\alpha(t)x$ es una solución de (2.33) para todo $x \in D(\mathcal{A})$ y $t \geq 0$, es decir, se satisface*

$$S_\alpha(t)x = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)\mathcal{A}S_\alpha(s)x\,ds = x + (g_\alpha * \mathcal{A}S_\alpha)(t).$$

Es decir, si el problema (2.32) admite una familia α-resolvente $S_\alpha(t)$, entonces la correspondiente solución (y única) es

$$u(t) = S_\alpha(t)x, \quad x \in D(\mathcal{A}).$$

Definición 2.11. *Una familia α- resolvente se dice **exponencialmente acotada** si existen $M \geq 1$ y $\omega \geq 0$ tales que*

$$\|S_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \tag{2.34}$$

Además, diremos que un operador $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\alpha(M, \omega)$ si el problema (2.32) admite una familia α-resolverte exponencialmente acotada.

Observe que cuando $\alpha = 1$ se obtiene la clásica teoría de semigrupos fuertemente continuas (consulte [38]).

Ejemplo 2.19. *([24, Ejemplo 4.1.3]) Sea $(\eta_t)_{t\geq 0}$ un semigrupo de convolución en $\mathbb{R}^n$. En el espacio $X = (C_\infty, ||\cdot||_\infty)$ definimos*

$$S_1(t)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\mu_t(dy) = (u * \mu_t)(x).$$

Entonces la familia $(S_1(t))_{t\geq 0}$ es una familia 1-resolvente en X, es decir, define un semigrupo fuertemente continuo.

Proposición 2.8. *([38, Teorema 1.1]) Si $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^1(M, \omega)$ y $\mathcal{B}$ es un operador acotado en X, entonces el operador $\mathcal{C} + \mathcal{B} \in \mathcal{C}^1(M, \omega + M||B||)$.*

Ejemplo 2.20. *Si en la proposición anterior $\mathcal{B} = bI$, con $b > 0$ e I el operador identidad, entonces $a\mathcal{A} + bI$ genera una familia 1-resolvente $(S(t))_{t\geq 0}$, para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^1(M, \omega)$ con familia 1-resolvente $(T(t))_{t\geq 0}$ y $a > 0$. Es sencillo comprobar que $S(t) = e^{bt}T(at)$, para todo $t \geq 0$ (consulte [17, Página 60]).*

Teorema 2.3. ***(Subordinación)*** *[2, Teorema 3.1] Sea $0 < \alpha \leq 1$ y $\omega \geq 0$. Si $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^1(M, \omega)$, entonces $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\alpha(M, \omega^{\frac{1}{\alpha}})$, y se sigue la siguiente relación entre las respectivas familias resolventes:*

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(st^{-\alpha})S_1(s)\,ds, \quad t > 0, \tag{2.35}$$

donde Φ_α es la función de tipo Wright definida en (2.19).

El siguiente corolario es una consecuencia directa del Teorema 2.3.

Corolario 2.4. *Si $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^1(M, \omega)$ con familia 1-resolvente $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, entonces $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\alpha(M, \omega^{\frac{1}{\alpha}})$, para cualquier $\alpha \in (0, 1]$.*

Capítulo 3

Existencia y unicidad

3.1. Existencia y unicidad de la solución

En esta sección demostramos que el problema (1.1) posee una única solución distribucional dada por la siguiente definición:

Definición 3.1. *La función $u_{\alpha,s} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es llamada una solución fundamental del problema* (1.1)*, si $u_{\alpha,s}(t,\cdot)$ resuelve* (1.1) *en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > 0$ y*

$$\lim_{t\to 0^+} u_{\alpha,s}(t,x) = \delta_0(x), \quad en \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

En el resto del capítulo nos centraremos en construir una función $u_{\alpha,s}(\cdot,\cdot)$ que satisfaga las condiciones de la Definición 3.1.

Para empezar, notamos que las hipótesis del Teorema 2.3 (Subordinación) nos sugieren estudiar la solución fundamental del problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + a(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = bu(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Al aplicar formalmente la transformada de Fourier, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) + a|\xi|^s \hat{u}(t,\xi) = b\hat{u}(t,\xi), & t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) = 1, & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.2}$$

cuya solución viene dada por

$$\hat{u}_{1,s}(t,\xi) = e^{bt} e^{-ta|\xi|^s}. \tag{3.3}$$

(a) CASO $s \in (0,2]$: Como ya hemos visto en el Corolario 2.2, la función $\xi \mapsto |\xi|^s$ definida en $\mathbb{R}^n$ no siempre determina una función definida negativa. De hecho, solo lo es cuando $s \in (0, 2]$ (ver Corolario 2.3). En dicho caso, el Teorema 2.1 nos garantiza la existencia de un único semigrupo de convolución $(\eta_t^s)_{t\geq 0}$ satisfaciendo la igualdad

$$\hat{\eta}_t^s(\xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-ta|\xi|^s}.$$

Por otro lado, para $t > 0$, la función definida por $\xi \mapsto e^{-ta|\xi|^s}$ pertenece a $L_1(\mathbb{R}^n)$, y su transformada de Fourier inversa está bien definida. De este modo, gracias a la Proposición 2.4, podemos deducir que

$$\hat{\eta}_t^s(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \eta_t^s(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \mathcal{F}^{-1}\{e^{-ta|\xi|^s}\}(x)\, dx,$$

donde $\mathcal{F}^{-1}$ es la transformada inversa de Fourier en $L_1(\mathbb{R}^n)$. De esta forma, la solución distribucional del problema (3.1) viene dada por:

$$(u_{1,s}(t), \phi) := (e^{bt}\eta_t^s, \phi), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

donde $\eta_t^s(x) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-ta|\xi|^s}\}(x)$.

Por lo tanto, si $t > 0$, se tiene que

$$u_{1,s}(t, x) = e^{bt}\eta_t^s(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Además,

$$(u_{1,s}(0), \phi) = (\eta_0^s, \phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\eta_0^s(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\varepsilon_0(dx) = \phi(0).$$

Por lo tanto, del Ejemplo 2.10, deducimos que $u_{1,s}(0) = \delta_0$. Es relevante destacar que $u_{1,s}(t, x) > 0$, para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, ya que $(\eta_t^s)_{t\geq 0}$ constituye una familia de medidas positivas. Esto resuelve los casos $s \in (0, 2]$.

(b) **CASO** $s \in (2, \infty)$: Observemos que para cada $t > 0$, la función $\xi \mapsto e^{-ta|\xi|^s}$ pertenece a la clase de Schwartz, siempre y cuando $s \geq 2$, de modo que en este rango de valores de s, la transformada de Fourier de esta función siempre existe, y además, pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, para cada $t > 0$, definimos

$$u_{1,s}(t, x) = e^{bt}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-ta|\xi|^s}\}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Si fijamos $t > 0$, esta función define una distribución en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\Psi_t\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)u_{1,s}(t, x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Es claro que $\Psi_0\phi(x) = \phi(0)$, y por ende, $\Psi_0 = \delta_0$.

De esta forma, la solución al problema (3.1) viene dada por (3.5), y en cualquier caso para $s > 0$, la solución distribucional viene inducida por la función

$$u_{1,s}(t, x) = e^{bt}\mathcal{F}^{-1}\{e^{-ta|\xi|^s}\}(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A continuación, utilizando el principio de subordinación establecido en el Teorema 2.3, construiremos la solución fundamental para el problema (1.1).

Al igual que antes, tomamos transformada de Fourier formalmente en el problema (1.1):

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha \hat{u}(t,\xi) + a|\xi|^s \hat{u}(t,\xi) = b\hat{u}(t,\xi), & t>0,\, \xi \in \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0,\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.6}$$

Esta ecuación diferencial en tiempo fraccionario es equivalente a la ecuación estudiada en la Proposición 2.7 con $\omega = b - a|\xi|^s$. Por lo tanto, la solución se expresa como:

$$\hat{u}_{\alpha,s}(t,\xi) = E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s)), \quad t>0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Finalmente, aplicando el Teorema 2.3, afirmamos que la solución $u_{\alpha,s}$ para el problema (1.1) está dada por:

$$(u_{\alpha,s}(t),\phi) = \left(\int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha}) u_{1,s}(k,\cdot)\, dk, \phi \right), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\, t>0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\hat{u}_{\alpha,s}(t),\phi) &= (u_{\alpha,s},\hat{\phi}) \\ &= \left(\int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha}) u_{1,s}(k,\cdot)\, dk, \hat{\phi} \right) \\ &= \left(\int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha}) \hat{u}_{1,s}(k,\cdot)\, dk, \phi \right) \\ &= \left(\int_0^\infty \Phi_\alpha(s) e^{kt^\alpha(b-a|\xi|^s)}\, dk, \phi \right) \\ &= (E_\alpha(t^\alpha(b-a|\xi|^s)),\phi), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado que

$$\mathcal{L}\{\Phi_\alpha(t)\}(-r) = E_\alpha(r).$$

Evidentemente, $(u_{\alpha,s}(0),\phi) = \phi(0)$, es decir, $u_{\alpha,s}(0) = \delta_0$.

***Observación* 3.1.** *Es importante señalar que la distribución definida por $u_{\alpha,s}(t,x)$ está inducida por la función $x \mapsto \int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha}) u_{1,s}(k,x)\, dk$. De esta forma, la solución al problema (1.1) está identificada con la función*

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha}) u_{1,s}(k,x)\, dk, \quad t>0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, se tiene la siguiente expresión alternativa:

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\{E_\alpha(t^\alpha(b-a|\xi|^s))\}(x), \quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^n,$$

donde $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

***Observación* 3.2.** *Como ya hemos mencionado, la solución $u_{1,s}$ del problema (3.1) es globalmente positiva cuando $s \in (0,2]$. Por lo tanto, gracias a la representación (1.10), la positividad se preserva en $u_{\alpha,s}$, para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$.*

Una demostración alternativa a este hecho la hace el matemático fines Jukka Kemppainen en [28].

***Observación* 3.3.** *Cuando $s > 2$ y $n = 1$, la función $\xi \mapsto E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, como hemos mencionado en (1.12). En este caso, la transformada de Fourier en la representación*

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\{E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))\}(x), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n$$

coincide con la transformada de $L_1(\mathbb{R}^n)$ (ver Proposición 2.4), es decir,

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))\, d\xi.$$

Capítulo 4

Comportamiento asintótico

4.1. Resultados de divergencia

En este capítulo demostramos los teoremas enunciados en la Sección 1.3. Consideremos el problema de valor inicial definido en (1.1):

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t,x) + a(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = bu(t,x), & t>0, x\in\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \delta_0(x) & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Como probamos en el Capítulo 3, la solución fundamental al problema de valor inicial (1.1) se puede expresar vía subordinación al caso $\alpha = 1$ como:

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_0^\infty t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha})u_{1,s}(k,x)\,dk, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Por lo demás, siempre que tenga sentido (ver equivalencia (1.12)), podemos representar la solución como:

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))\,d\xi, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

En una primera parte, trabajamos el caso $s\in(0,2)$ vía la representación (1.10). A través de este enfoque, obtenemos resultados tanto de divergencia como de convergencia en los valores de $u_{\alpha,s}$ en cualquier dimensión. Es crucial destacar que la positividad de $u_{1,s}$ (ver Observación 3.2) desempeñará un papel crucial en la deducción de los resultados relacionados con la divergencia. Por lo tanto, el procedimiento no puede extenderse directamente a los operadores $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$, con $s>2$. Dentro del rango de exponentes $0<s\le 2$, el caso límite $s=2$ es especial y requerirá un tratamiento particular. Esto se debe a que el semigrupo asociado, además de ser positivo, también posee decaimiento exponencial.

Posteriormente, consideramos el caso $s\in[2,\infty)$, pero fijando $n=1$. La integrabilidad de la función $\xi\mapsto E_\alpha(t^\alpha(b-a|\xi|^s))$, nos permite utilizar la representación (3.3). En esta etapa, será de gran utilidad obtener nuevas cotas para las funciones de Mittag-Leffler.

4.1.1. Caso $s \in (0,2)$

En esta subsección demostramos el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ y $s \in (0,2)$, y consideremos $b > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$ y $a > 0$ como en (1.1). Si $\beta > 0$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \infty,$$

para cualquier $m > 0$ y $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Demostración. Sabemos por el capítulo anterior que la solución al problema (1.1) admite la representación

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_0^{\infty} t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha})u_{1,s}(k,x)\,dk, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Como $s \in (0,2)$, también tenemos conocimiento de que el semigrupo $u_{1,s}(t,x)$ es positivo para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Esto, junto con (2.22), garantiza que el integrando sea positivo. Por lo tanto, podemos establecer la siguiente desigualdad:

$$u_{\alpha,s}(t,x) \geq \int_t^{2t} t^{-\alpha}\Phi_\alpha(kt^{-\alpha})u_{1,s}(k,x)\,dk.$$

Por otro lado, debido a (3.5) y (2.28), existe $C > 0$ tal que

$$u_{1,s}(k,x) \geq Ce^{bk}\frac{k}{(k^{\frac{2}{s}} + |x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}.$$

Así, obtenemos la siguiente afirmación:

$$u_{\alpha,s}(t,x) \geq Ct^{-\alpha}\int_t^{2t} \Phi_\alpha(kt^{-\alpha})e^{bk}\frac{k}{(k^{\frac{2}{s}} + |x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}\,dk.$$

Por otro lado, observamos que, gracias a (2.21) y (2.22), la función $k \mapsto \Phi_\alpha(kt^{-\alpha})$ es integrable y positiva en $[t,2t]$. Además, la función $k \mapsto e^{bk}\frac{k}{(k^{\frac{2}{s}}+|x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}$ es continua en el intervalo $[t,2t]$. De esta manera, se satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio, y por ende, existe $c_t := c \in [t,2t]$ tal que

$$\begin{aligned} u_{\alpha,s}(t,x) &\geq Ct^{-\alpha}\frac{c}{(c^{\frac{2}{s}} + |x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}e^{bc}\int_t^{2t} \Phi_\alpha(kt^{-\alpha})\,dk \\ &= Ct^{-\alpha}\frac{c}{(c^{\frac{2}{s}} + |x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}e^{bc}\int_t^{2t} W_{-\alpha,1-\alpha}(-kt^{-\alpha})\,dk. \end{aligned}$$

Gracias a la recurrencia (2.18), sabemos que

$$\frac{d}{dk}\frac{W_{-\alpha,1}(-kt^{\alpha})}{-t^{-\alpha}} = W_{-\alpha,1-\alpha}(-kt^{-\alpha}), \tag{4.1}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} u_{\alpha,s}(t,x) &\geq C\frac{c}{(c^{\frac{2}{s}}+|x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}e^{bt}\left[W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})-W_{-\alpha,1}(-2t^{1-\alpha})\right] \\ &\geq C\frac{c}{(c^{\frac{2}{s}}+|x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}e^{bt}W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})\left[1-\frac{W_{-\alpha,1}(-2t^{1-\alpha})}{W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})}\right]. \end{aligned}$$

Notemos que dado que $\alpha \in (0,1)$, el argumento de ambas funciones $W_{-\alpha,1-\alpha}(-t^{1-\alpha})$ y $W_{-\alpha,1-\alpha}(-2t^{1-\alpha})$ divergen cuando t tiende a ∞. Por este razón, podemos emplear las asíntotas mencionadas en (2.23) en cada una de estas funciones, obteniendo así las siguientes relaciones:

$$W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha}) = [(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}t]^{-\frac{1}{2}}e^{-(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}t}\left[\sum_{m=0}^{M-1}A_mY^{-m}+O(|Y|)^{-M}\right],$$

con $t\to\infty$, donde $Y=(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}t$, y

$$W_{-\alpha,1}(-2t^{1-\alpha}) = [(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}2^{\frac{1}{1-\alpha}}t]^{-\frac{1}{2}}e^{-(1-\alpha)2^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}t}\left[\sum_{m=0}^{M-1}A_mZ^{-m}+O(|Z|)^{-M}\right],$$

con $t\to\infty$ y donde $Z=(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}2^{\frac{1}{1-\alpha}}t$. Luego, es evidente que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W_{-\alpha,1}(-2t^{1-\alpha})}{W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})}=0. \tag{4.2}$$

De forma, podemos acotar a la función de la siguiente manera:

$$u_{\alpha,s}(t,x)\geq C'\frac{t}{((2t)^{\frac{2}{s}}+|x|^2)^{\frac{n+s}{2}}}e^{bt}W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})\left[1-o(1)\right],$$

donde C' es alguna constante positiva.

Si $|x|=mt^\beta$, entonces

$$u_{\alpha,s}(t,mt^\beta)\geq C'\frac{t}{((2t)^{\frac{2}{s}}+m^2t^{2\beta})^{\frac{n+s}{2}}}e^{bt}W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})\left[1-o(1)\right].$$

Para establecer la divergencia del lado derecho de la desigualdad, observamos que los términos de orden t^θ no influyen mayormente en el comportamiento asintótico debido a la presencia del término e^{bt}. Sin embargo, la función $W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})$ sí posee decaimiento exponencial a una tasa $(1-\alpha)(\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})\in(0,1)$. Dado que $b>(1-\alpha)(\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}e^{bt}W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha}) &= \lim_{t\to\infty}e^{bt}[(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}t]^{-\frac{1}{2}}e^{-(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}t}\left[\sum_{m=0}^{M-1}A_mY^{-m}+O(|Y|)^{-M}\right] \\ &= \infty. \end{aligned}$$

De esta forma

$$\lim_{t\to\infty}u_{\alpha,s}(t,mt^\beta\vec{e})=\infty,$$

lo cual concluye la demostración. ∎

4.1.2. Caso $s = 2$

En contraste al caso trabajado anteriormente, ahora el semigrupo correspondiente posee decaimiento exponencial. Como veremos, esto hará que el parámetro **b** en (1.1) tome un papel protagónico en el comportamiento asintótico de $u_{\alpha,s}$.

Teorema 4.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $a > 0$ y $b > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$ fijos como en (1.1). Se siguen las siguientes proposiciones:*

1. *Si $0 < \beta < 1$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,2}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \infty,$$

con $m > 0$ y $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

2. *Si $\beta = 1$ y $m < 2\sqrt{a(b-(1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)})}$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,2}(t, mt\vec{e}) = \infty,$$

con $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Demostración. Como ya hemos demostrado, $u_{1,2}(t,x) = e^{bt}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4at}}}{(4\pi ta)^{\frac{n}{2}}}$, la cual define claramente una función positiva para todo $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. De esta forma, podemos proseguir de forma similar a como lo hicimos en el Teorema 4.1 de la sección anterior, es decir,

$$u_{\alpha,2}(t,x) \geq t^{-\alpha}\int_t^{2t} \Phi_\alpha(kt^{-\alpha})e^{bk}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4ak}}}{(4\pi ka)^{\frac{n}{2}}}\,dk, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

El teorema del valor medio para integrales da la existencia de $c_t := c \in [t, 2t]$ tal que

$$u_{\alpha,2}(t,x) \geq t^{-\alpha}e^{bc}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4ac}}}{(4\pi ca)^{\frac{n}{2}}}\int_t^{2t} W_{-\alpha,1-\alpha}(-kt^{-\alpha})\,dk.$$

Nuevamente, de la relación (4.1) y de $c \in [t, 2t]$, deducimos que

$$\begin{aligned} u_{\alpha,2}(t,x) &\geq e^{bt}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4at}}}{(8\pi ta)^{\frac{n}{2}}}\left[W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha}) - W_{-\alpha,1}(-2t^{1-\alpha})\right] \\ &= e^{bt}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4at}}}{(8\pi ta)^{\frac{n}{2}}}W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})\left[1 - \frac{W_{-\alpha,1}(-2t^{1-\alpha})}{W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (4.2), se tiene que

$$u_{\alpha,2}(t,x) \geq e^{bt}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4at}}}{(8\pi ta)^{\frac{n}{2}}}W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})\left[1 - o(1)\right].$$

Como es usual, consideramos $x = mt^\beta \vec{e}$, donde $\vec{e} \in \mathbb{S}^{n-1}$. De esta forma,

$$u_{\alpha,2}(t, mt^\beta \vec{e}) \geq e^{bt} \frac{e^{-\frac{m^2 t^{2\beta}}{4at}}}{(8\pi ta)^{\frac{n}{2}}} W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha}) \left[1 - o(1)\right].$$

Ahora recordamos que según (2.23), la función $t \mapsto W_{-\alpha,1}(-t^{1-\alpha})$ decae más rápido que $e^{-(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} t}$, cuando t va al infinito, de modo que existirá divergencia en los valores de $u_{\alpha,s}$ si se satisface el siguiente el límite:

$$\lim_{t\to\infty} \left[bt - \frac{m^2 t^{2\beta - 1}}{4a} - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} t \right] = \infty. \tag{4.3}$$

En efecto, tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \left[t(b - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}) - \frac{m^2}{4a} t^{2\beta-1} \right] = \lim_{t\to\infty} t \left[(b - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}) - \frac{m^2}{4a} t^{2\beta-2} \right].$$

Ahora si $\beta < 1$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \left[(b - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}) - \frac{m^2}{4a} t^{2\beta-2} \right] = (b - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}) > 0.$$

Esto demuestra la primera proposición.

Por otro lado, si $\beta = 1$, entonces el límite (4.3) se toma si

$$\lim_{t\to\infty} t \left(b - \frac{m^2}{4a} - (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} \right) = \infty,$$

es decir, cuando

$$b - \frac{m^2}{4a} > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Esto demuestra la segunda proposición. ■

***Observación* 4.1.** *Notemos que la condición*

$$b - \frac{m^2}{4a} > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)},$$

coincide con la impuesta en (1.15) *cuando* $\alpha \to 1^-$, *pues*

$$\lim_{\alpha\to 1} (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} = 0.$$

4.1.3. Caso $s \in [2, \infty)$

Para simplificar la escritura y la lectura de esta sección, hemos fijado los valores $a = b = 1$. El resultado general se obtiene por un simple cambio de variables en la integral (3.3). A saber, si $v_{\alpha,s}$ es la solución al problema

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t,x) + (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

y $u_{\alpha,s}$ la solución de (1.1), entonces

$$u_{\alpha,s}(t,x) = v_{\alpha,s}(ta^{\frac{1}{\alpha}}, x(a/b)^{\frac{1}{s}})(a/b)^{\frac{1}{s}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Producto de la igualdad anterior, el comportamiento asintótico se preserva en ambos problemas. De ahora en adelante, seguimos utilizando la notación $u_{\alpha,s}$ para referirnos a la solución fundamental de (1.1).

Dos cotas para las funciones de Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler juega un papel preponderante en el comportamiento asintótico de la función $u_{\alpha,s}$ y determinar nuevas cotas para esta clase de funciones es fundamental para extender los resultados obtenidos en [15]. En este contexto, demostramos dos lemas que generalizan a los presentados en [15, Sección 3] y cuyas demostraciones dependen fuertemente del intervalo de crecimiento de la función $s \mapsto \Gamma(s)$.

Lema 4.1. *Sean $M \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ y $\alpha \in [\frac{1}{M}, 1]$. Para $r \geq 0$ se tiene que*

$$E_\alpha(r) \leq \alpha E'_\alpha(r) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]} \gamma_k r^k, \tag{4.4}$$

donde

$$\gamma_k = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \alpha k)}.$$

Demostración. Sea $k \geq \left[\frac{3M-2}{2}\right]$. Dado que k es entero, se deduce por la definición de la función parte entera que $k \geq \frac{3M-2}{2}$. Como además $\alpha \geq \frac{1}{M}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 + \alpha k &\geq \alpha + \alpha k \\ &\geq \frac{1}{M} + \frac{3M-2}{2}\frac{1}{M} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$1 + k\alpha \geq \alpha + \alpha k > \frac{3}{2}. \tag{4.5}$$

Por [12], sabemos que la función Γ es creciente en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$, por lo que

$$\Gamma(1+k\alpha) \geq \Gamma(\alpha+\alpha k), \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Luego, para todo $k \geq \left[\frac{3M-2}{2}\right]$ y $r \geq 0$, se cumple que

$$\frac{r^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \leq \frac{r^k}{\Gamma(\alpha+k\alpha)}. \tag{4.7}$$

Notamos que al lado izquierdo de esta última desigualdad aparece el término general de la serie que define a la función E_α. Es decir, si sumamos sobre k, obtenemos que

$$\begin{aligned}
E_\alpha(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]-1} \frac{r^k}{\Gamma(1+\alpha k)} + \sum_{k=\left[\frac{3M-2}{2}\right]}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(1+\alpha k)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]-1} \frac{r^k}{\Gamma(1+\alpha k)} + \sum_{k=\left[\frac{3M-2}{2}\right]}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha+\alpha k)} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]-1} \frac{r^k}{\Gamma(1+\alpha k)} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]-1} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha+\alpha k)} + E_{\alpha,\alpha}(r) \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]-1} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\alpha k)}\right) r^k + \alpha E'_\alpha(r) \\
&= \alpha E'_\alpha(r) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]-1} \gamma_k r^k,
\end{aligned}$$

donde $\gamma_k := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha k)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\alpha k)}$. Lo cual demuestra la aseveración.

■

***Observación* 4.2.** *Notemos que para $M = 2$ se recupera el resultado obtenido en [15, Lema 3.1], ya que así*

$$\frac{3M-2}{2} = 2,$$

$$\gamma_0 = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(2\alpha)},$$

y para $r \geq 0$,

$$E_\alpha(r) \leq \alpha E'_\alpha(r) + 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\right) r.$$

***Observación* 4.3.** *La desigualdad (4.4) es optimal para $\alpha = 1$. En efecto, si $\alpha = 1$, entonces, independiente del valor de k, $\gamma_k = 0$, y dado que $E_1(r) = e^r = E_1'(r)$, la desigualdad (4.4) es trivial para todo $r \geq 0$.*

Lema 4.2. *Sea $M \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \in [\frac{1}{M}, 1]$. Para $r > 0$ se tiene que*

$$E_\alpha(r) \geq \frac{\alpha}{r^{M-1}} E_\alpha'(r) - \frac{1}{r^{M-1}} \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \lambda_k r^k + \frac{1}{r^{M-1}} \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \beta_k r^k, \tag{4.8}$$

con $\lambda_k := \frac{1}{\Gamma(\alpha+k\alpha)}$ y $\beta_k := \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))}$.

Demostración. Sea $r > 0$.

Notemos que,

$$r^{M-1} E_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{k+(M-1)}}{\Gamma(1+k\alpha)} = \sum_{k=M-1}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))}. \tag{4.9}$$

Por otro lado, para todo $k \geq (M-1) + \frac{1}{2\alpha}$, se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\alpha + k\alpha \geq 1 - \alpha(M-1) + k\alpha \geq 1 - \alpha(M-1) + \left((M-1) + \frac{1}{2\alpha}\right)\alpha = \frac{3}{2}.$$

Al igual que en el lema anterior, utilizamos la monotonía de la función $s \mapsto \Gamma(s)$ en el intervalo $[\frac{3}{2}, \infty)$ para obtener,

$$\Gamma(\alpha + k\alpha) \geq \Gamma(1 - \alpha(M-1) + k\alpha),$$

lo cual a su vez implica que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+k\alpha)} \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(M-1)+k\alpha)}, \quad \text{para todo} \quad k \geq (M-1) + \frac{1}{2\alpha}. \tag{4.10}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} r^{M-1} E_\alpha(r) &= \sum_{k=M-1}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))} \\ &= \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))} + \sum_{k=[M-1+\frac{1}{2\alpha}]+1}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))}. \end{aligned}$$

Por la desigualdad (4.10), podemos acotar E_α por su derivada más otros términos de orden polinomial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
r^{M-1}E_\alpha(r) &\geq \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))} + \sum_{k=[M-1+\frac{1}{2\alpha}]+1}^{\infty} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha+k\alpha)} \\
&= E_{\alpha,\alpha}(r) - \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha+k\alpha)} + \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))} \\
&= \alpha E_\alpha'(r) - \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \frac{r^k}{\Gamma(\alpha+k\alpha)} + \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \frac{r^k}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))} \\
&= \alpha E_\alpha'(r) - \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \lambda_k r^k + \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \beta_k r^k.
\end{aligned}$$

donde $\lambda_k := \frac{1}{\Gamma(\alpha+k\alpha)}$ y $\beta_k := \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha-\alpha(M-1))}$. Dividiendo a ambos lados por $r^{M-1} > 0$, se obtiene la desigualdad (4.8). ■

***Observación* 4.4.** *Cuando escogemos $M = 2$, se generaliza el [15, Lema 3.2]. En efecto, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$, y $\frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{2\alpha} \leq 2$. Por tanto, $[1 + \frac{1}{2\alpha}] = 1$. Reemplazando en (4.8), se obtiene que,*

$$E_\alpha(r) \geq \frac{\alpha}{r} E_\alpha'(r) - \frac{1}{\Gamma(\alpha) r} + 1 - \frac{1}{\Gamma(2\alpha)}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Una cota uniforme para la solución fundamental $u_{\alpha,s}$

En esta subsección estudiaremos la divergencia en los valores de $u_{\alpha,s}$ sobre esferas del tipo $|x| = ct^\beta$, para $\beta < \frac{1}{s}$.

La ausencia de positividad global en la solución $u_{1,s}$ (ver Observación (2.3)) nos impide utilizar las técnicas empleadas en la sección anterior.

Dado que $s > 1$, la solución $u_{\alpha,s}$ admite la siguiente representación (ver la equivalencia (1.12)):

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s))\, d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aún más, de la Proposición 2.3 y del hecho que $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x)$, podemos deducir que

$$u_{\alpha,s}(t,x) = C \int_0^\infty E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s)) \cos(x\xi)\, d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

con C alguna constante positiva.

***Observación* 4.5.** *Note que la igualdad* $u_{\alpha,s}(t,x) = u_{\alpha,s}(t,-x)$*, para cada* $t > 0$ *y* $x \in \mathbb{R}$*, nos permite reducir nuestro estudio solo al caso* $x > 0$*.*

Lema 4.3. *La solución fundamental* $u_{\alpha,s}$ *se puede expresar por*

$$u_{\alpha,s}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(t,x), \tag{4.11}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0(t,x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2x}} E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s))\cos(x\xi)\,d\xi, \\ a_k(t,x) &= (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2x}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2x}(2k+1)} E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s))\cos(x\xi)\,d\xi, \ \textit{para } k \geq 1. \end{aligned}$$

La sucesión $\{a_k(\cdot,\cdot)\}_{k\geq 1}$ *satisface las hipótesis del Criterio de Leibniz para series alternantes, es decir, para todo* $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ *y* $k \geq 0$*, se cumplen las siguientes propiedades:*

(*a*) $a_k(t,x) > 0$,

(*b*) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k(t,x) = 0$,

(*c*) $a_{k+1}(t,x) < a_k(t,x)$, *para todo* $k \geq 1$, *y* $2a_0(t,x) > a_1(t,x)$.

Demostración. Para demostrar la afirmación (*a*), bastar notar que

$$(-1)^k\cos(x\xi) > 0, \quad \xi \in \left(\frac{\pi}{2x}(2k-1), \frac{\pi}{2x}(2k+1)\right).$$

Como $u_{\alpha,s}(t,x) \in \mathbb{R}$, para todo $(t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$, la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k(t,x)$ converge. Con esto se tiene (*b*).

Por último, tomando el cambio de variables $\xi = z + \frac{\pi}{x}$, y del hecho que la función $r \mapsto E_\alpha(r)$ es creciente, tendremos que

$$\begin{aligned} a_{k+1}(t,x) &= (-1)^{k+1}\int_{\frac{\pi}{2x}(2(k+1)-1)}^{\frac{\pi}{2x}(2(k+1)+1)} E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s)\cos(x\xi)\,d\xi \\ &= (-1)^{k+1}\int_{\frac{\pi}{2x}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2x}(2k+1)} E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-(z+\frac{\pi}{x})^s\right)\right)\cos(xz+\pi)\,dz \\ &< (-1)^k\int_{\frac{\pi}{2x}(2k-1)}^{\frac{\pi}{2x}(2k+1)} E_\alpha(t^\alpha(1-z^s)\cos(xz)\,dz \\ &= a_k(t,x). \end{aligned}$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
2a_0(t,x) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2x}} E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s))\cos(x\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2x}}^{\frac{\pi}{2x}} E_\alpha(t^\alpha(1-\xi^s))\cos(x\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{3\pi}{x}} E_\alpha\left(t^\alpha(1-(u-\frac{\pi}{x})^s))\right)\cos(ux-\pi)\,du \\
&> -\int_{\frac{\pi}{2x}}^{\frac{3\pi}{x}} E_\alpha\left(t^\alpha(1-u^s)\right))\cos(ux)\,du \\
&= a_1(t,x).
\end{aligned}
$$

■

El siguiente lema es particularmente útil porque nos entrega infinitas cotas superiores e inferiores para $u_{\alpha,s}$.

Lema 4.4. *Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces la solución de la ecuación (1.1) satisface las siguientes desigualdades:*

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha,s}(t,x) &> \sum_{k=0}^{2m+1}(-1)^k a_k(t,x), \\
u_{\alpha,s}(t,x) &< \sum_{k=0}^{2m}(-1)^k a_k(t,x).
\end{aligned}
$$

En particular,

$$u_{\alpha,s}(t,x) < a_0(t,x), \tag{4.12}$$

$$u_{\alpha,s}(t,x) > a_0(t,x) - a_1(t,x). \tag{4.13}$$

Demostración. Directo del Lema 4.3. ■

***Observación* 4.6.** *Notemos que de la desigualdad (4.13) no podemos deducir que $u_{\alpha,s}(t,x) > 0$, puesto que solo sabemos que $2a_0 > a_1$.*

Mediante el cambio de variables $\rho := 1-\xi^s$, los coeficientes a_0 y a_1 pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
a_0(t,x) &= \frac{1}{s}\int_{1-(\frac{\pi}{2x})^s}^{1} E_\alpha(t^\alpha\rho)\cos(x\sqrt[s]{1-\rho})(1-\rho)^{\frac{1-s}{s}}\,d\rho, \\
a_1(t,x) &= -\frac{1}{s}\int_{1-(\frac{3\pi}{2x})^s}^{1-(\frac{\pi}{2x})^s} E_\alpha(t^\alpha\rho)\cos(x\sqrt[s]{1-\rho})(1-\rho)^{\frac{1-s}{s}}\,d\rho.
\end{aligned}
$$

A continuación, proporcionaremos cotas para los coeficientes a_0 y a_1 haciendo uso de los Lemas 4.1 y 4.2. Adicionalmente, verificaremos que el término a_0 *domina* sobre a_1.

Lema 4.5. *Si* $\frac{1}{M} \leq \alpha < 1$, $t > 0$ *y* $0 < \ell < \frac{\pi}{2} < x$, *entonces existe* $c_0 \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$a_0(t,x) \geq \frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1}\frac{\alpha}{t^{\alpha M}}\left[E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\ell}{x}\right)^s\right)\right) + c_0(t,x)\right] \tag{4.14}$$

donde

$$\lim_{t\to\infty}\frac{c_0(t,mt^\beta)}{E_\alpha(t^\alpha)} = 0,$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$ *y* $m \in \mathbb{R}_+$.

Demostración. La función $\rho \mapsto h(\rho) := \cos(x\sqrt[s]{1-\rho})(1-\rho)^{\frac{1-s}{s}}$ es creciente, para $\rho \in (1-(\frac{\ell}{x})^s, 1)$ y $s > 2$. En efecto, primero notamos que $0 < x(1-\rho)^{\frac{1}{s}} < \frac{\pi}{2}$, y por ende,

$$0 < \cos(x(1-\rho)^{\frac{1}{s}}) \text{ y } 0 < \sin(x(1-\rho)^{\frac{1}{s}}).$$

Luego,

$$h'(\rho) = \sin(x(1-\rho)^{\frac{1}{s}})\frac{x}{s}(1-\rho)^{\frac{2}{s}-2} - \cos(x(1-\rho)^{\frac{1}{s}})\frac{1-s}{s}(1-\rho)^{\frac{1}{s}-2} > 0.$$

Además, por la elección de ℓ, se verifica la contención $(1-(\frac{\ell}{x})^s, 1) \subset (1-(\frac{\pi}{2x})^s, 1)$. De esta forma,

$$\begin{aligned} a_0(t,x) &\geq \int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^1 E_\alpha(t^\alpha\rho)\cos(x\sqrt[s]{1-\rho})(1-\rho)^{\frac{1-s}{s}}\,d\rho \\ &\geq \frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1}\int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^1 E_\alpha(t^\alpha\rho)d\rho. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\rho > 0$, así que gracias al Lema 4.2 tendremos que:

$$\begin{aligned} a_0(t,x) \geq &\frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1}\int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^1\left(\frac{\alpha}{(t^\alpha\rho)^{M-1}}E'_\alpha(t^\alpha\rho) - \frac{1}{(t^\alpha\rho)^{M-1}}\sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]}\lambda_k(t^\alpha\rho)^k\ldots\right.\\ &\left.+\frac{1}{(t^\alpha\rho)^{M-1}}\sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]}\gamma_k(t^\alpha\rho)^k\right)d\rho. \end{aligned}$$

Pero como también $\rho \leq 1$, se sigue que:

$$\begin{aligned} a_0(t,x) \geq &\frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1}\int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^1\left(\frac{\alpha}{t^{\alpha(M-1)}}E'_\alpha(t^\alpha\rho) - \frac{1}{(t^\alpha\rho)^{M-1}}\sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]}\lambda_k(t^\alpha\rho)^k\ldots\right.\\ &\left.+\frac{1}{(t^\alpha\rho)^{M-1}}\sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]}\gamma_k(t^\alpha\rho)^k\right)d\rho. \end{aligned}$$

Procederemos con el cálculo de la primera integral. La aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo en este paso es crucial para nuestro análisis, ya que nos proporcionará el término dominante $E_\alpha(t^\alpha)$. Este término será fundamental más adelante, ya que será responsable de la divergencia de $u_{\alpha,s}$.

Dicho esto, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^{1} \frac{\alpha}{t^{\alpha(M-1)}} E'_\alpha(t^\alpha \rho)\, d\rho = \frac{\alpha}{t^{\alpha M}} \left[E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\ell}{x}\right)^s\right)\right)\right].$$

Las demás integrales solo nos proporcionarán términos polinómicos y/o logarítmicos, y serán dominados asintóticamente por $E_\alpha(t^\alpha)$. En efecto, el cálculo de la segunda integral es solo la integración clásica de potencias:

$$\int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^{1} \rho^{k+1-M} d\rho = \begin{cases} \frac{1-(1-(\frac{\ell}{x})^s))^{k+2-M}}{k+2-M} & si \quad k+1-M \neq -1 \\ -\ln|1-(\frac{\ell}{x})^s| & si \quad k+1-M = -1 \end{cases} := b_k(t,x),$$

para $0 \leq k \leq [M-1+\frac{1}{2\alpha}]$. Observamos que la segunda rama tiene sentido considerarla, ya que

$$M-2 \leq M-1+\frac{1}{2\alpha} \implies M-2 \leq \left[M-1+\frac{1}{2\alpha}\right].$$

La tercera integral solamente se conformará por términos polinómicos, y en contraste con las integrales anteriores, no aparecerán términos logarítmicos, ya que, en este caso, k es mayor o igual a $M-1$, y por tanto, distinto a $M-2$. Integrando las potencias correspondientes, se obtiene que $\int_{1-(\frac{\ell}{x})^s}^{1} \rho^{k+1-M} d\rho = \frac{1-(1-(\frac{\ell}{x})^s)^{k+2-M}}{k+2-M}$, para $M-1 \leq k \leq [M-1+\frac{1}{2\alpha}]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
a_0(x,t) \geq{}& \frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1} \frac{\alpha}{t^{\alpha M}} \left[E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\ell}{x}\right)^s\right)\right)\right] \\
&- \frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1} \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \lambda_k t^{\alpha k-\alpha(M-1)} b_k(t,x) \\
&+ \frac{\cos(l)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1} \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \gamma_k t^{\alpha k-\alpha(M-1)} \frac{1-(1-(\frac{\ell}{x})^s)^{k+2-M}}{k+2-M} \\
={}& \frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1} \frac{\alpha}{t^{\alpha M}} \Bigg(E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\ell}{x}\right)^s\right)\right) - t^\alpha \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \lambda_k t^{\alpha k} b_k(t,x) \\
&+ t^\alpha \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \gamma_k t^{\alpha k} \frac{1-(1-(\frac{\ell}{x})^s)^{k+2-M}}{k+2-M} \Bigg) \\
={}& \frac{\cos(\ell)}{s}\left(\frac{x}{\ell}\right)^{s-1} \frac{\alpha}{t^{\alpha M}} \left[E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\ell}{x}\right)^s\right)\right) + c_0(t,x)\right],
\end{aligned}$$

donde

$$c_0(t,x) := -t^\alpha \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \lambda_k t^{\alpha k} b_k(t,x) + t^\alpha \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \gamma_k t^{\alpha k} \frac{1-(1-(\frac{\ell}{x})^s)^{k+2-M}}{k+2-M},$$

y las constantes γ_k y λ_k son como en el Lema 4.2.
Finalmente, producto del comportamiento asintótico exhibido en 2.13, queda claro que

$$c_0(t,mt^\beta) = \frac{-t^\alpha \sum_{k=0}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \lambda_k t^{\alpha k} b_k(t,mt^\beta) + t^\alpha \sum_{k=M-1}^{[M-1+\frac{1}{2\alpha}]} \gamma_k t^{\alpha k} \frac{1-(1-(\frac{\ell}{mt^\beta})^s)^{k+2-M}}{k+2-M}}{e^t + o(1)} = o(1),$$

como $t \to \infty$. ■

Lema 4.6. *Si $\frac{1}{M} \leq \alpha < 1$, $t > 0$ y $\frac{3\pi}{2} < x$, entonces existe $c_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que*

$$a_1(t,x) \leq \frac{\alpha}{t^\alpha s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1}\left[E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\pi}{2x}\right)^s\right)\right) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{3\pi}{2x}\right)^s\right)\right) + c_1(t,x)\right]$$

donde

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c_1(t,mt^\beta)}{E_\alpha(t^\alpha)} = 0,$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{R}_+$.

Demostración. Dado que la función $\rho \mapsto (1-\rho)^{\frac{1-s}{s}}$ es creciente para $s > 2$ y $-\cos(x\sqrt[s]{1-\rho}) \leq 1$, tendremos que:

$$\begin{aligned} a_1(t,x) &\leq \int_{1-(\frac{3\pi}{2x})^s}^{1-(\frac{\pi}{2x})^s} E_\alpha(t^\alpha \rho)(1-\rho)^{\frac{1-s}{s}}\, d\rho \\ &\leq \frac{1}{s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1} \int_{1-(\frac{3\pi}{2x})^s}^{1-(\frac{\pi}{2x})^s} E_\alpha(t^\alpha\rho) d\rho. \end{aligned}$$

La elección de $x > \frac{3\pi}{2}$, nos permite asegurar que $\rho > 0$ y utilizar el Lema 4.1:

$$\begin{aligned} a_1(t,x) &\leq \frac{1}{s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1} \int_{1-(\frac{3\pi}{2x})^s}^{1-(\frac{\pi}{2x})^s} \Big(\alpha E_\alpha'(t^\alpha\rho) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{3M-2}{2}\right]} \gamma_k (t^\alpha \rho)^k\Big)\, d\rho \\ &\leq \frac{\alpha}{t^\alpha s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1}\left[E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\pi}{2x}\right)^s\right)\right) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{3\pi}{2x}\right)^s\right)\right)\right] \\ &+ \frac{1}{s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1} \sum_{k=0}^{[\frac{3M-2}{2}]} \gamma_k t^{\alpha k}\left(\frac{(1-(\frac{\pi}{2x})^s)^{k+1}}{k+1} - \frac{(1-(\frac{3\pi}{2x})^s)^{k+1}}{k+1}\right) \\ &\leq \frac{\alpha}{t^\alpha s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1}\left[E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\pi}{2x}\right)^s\right)\right) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{3\pi}{2x}\right)^s\right)\right) + c_1(t,x)\right], \end{aligned}$$

donde

$$c_1(t,x) := \frac{t^\alpha}{\alpha}\sum_{k=0}^{[\frac{3M-2}{2}]} \gamma_k t^{\alpha k}\left(\frac{(1-(\frac{\pi}{2x})^s)^{k+1}}{k+1} - \frac{(1-(\frac{3\pi}{2x})^s)^{k+1}}{k+1}\right)$$

y

$$\frac{c_1(t,mt^\beta)}{E_\alpha(t^\alpha)} = \frac{\frac{t^\alpha}{\alpha}\sum_{k=0}^{[\frac{3M-2}{2}]} \gamma_k t^{\alpha k}\left(\frac{(1-(\frac{\pi}{2mt^\beta})^s)^{k+1}}{k+1} - \frac{(1-(\frac{3\pi}{2mt^\beta})^s)^{k+1}}{k+1}\right)}{e^t + o(1)} = o(1),$$

como $t \to \infty$. ∎

Teorema 4.3. *En $n = 1$, sea $M \in \mathbb{N} \cap [2,\infty)$ y $s \geq 2$. Para $\alpha \in [\frac{1}{M}, 1)$, $\beta \in (0, \frac{1}{s})$ y $\ell \in (0, \frac{\pi}{2})$, existe $C > 0$ tal que*

$$u_{\alpha,s}(t, mt^\beta \vec{e}) > Cm^{s-1}t^{\beta(s-1)-\alpha M}E_\alpha(t^\alpha)[1-o(1)],$$

donde $m > 0$ y $C = \text{mín}\{\ell^{2-s}\frac{\alpha}{s}, \frac{\alpha}{s}(\frac{2}{\pi})^{s-1}\}$. En particular,

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, mt^\beta\vec{e}) = \infty.$$

Aún más,

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, \Phi(t)\vec{e}) = \infty,$$

si Φ es creciente, positiva, divergente y

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{\sqrt[s]{t}} = 0.$$

Demostración. Sea $x > \frac{\pi}{2}$ y $0 < \ell < \frac{\pi}{2}$ tal que $\cos(\ell) = \ell$. Entonces, por la desigualdad (4.13) y los Lemas 4.5 y 4.6, se tiene que

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,s}(t,x) &\geq \ell^{2-s}\frac{x^{s-1}\alpha}{t^{\alpha M}s}\left[E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\ell}{x}\right)^s\right)\right) + c_0(t,x)\right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{t^\alpha s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{s-1}\left[E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{3\pi}{2x}\right)^s\right)\right) - E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-\left(\frac{\pi}{2x}\right)^s\right)\right) - c_1(t,x)\right] \\
&\geq C\frac{x^{s-1}}{t^{\alpha M}}E_\alpha(t^\alpha)\left[1 - \frac{E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-(\frac{\ell}{x})^s\right)\right)}{E_\alpha(t^\alpha)} + \frac{t^{\alpha(M-1)}E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-(\frac{3\pi}{2x})^s\right)\right)}{E_\alpha(t^\alpha)}\right. \\
&\quad \left. - \frac{t^{\alpha(M-1)}E_\alpha\left(t^\alpha\left(1-(\frac{\pi}{2x})^s\right)\right)}{E_\alpha(t^\alpha)} + \frac{c_0(t,x) - t^{\alpha(M-1)}c_1(t,x)}{E_\alpha(t^\alpha)}\right],
\end{aligned}$$

donde $C := \text{mín}\{\ell^{2-s}\frac{\alpha}{s}, \frac{\alpha}{s}(\frac{2}{\pi})^{s-1}\} > 0$. Si $x = mt^{\beta}\vec{e}$, entonces

$$u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) > Cm^{s-1}t^{\beta(s-1)-\alpha M}E_{\alpha}(t^{\alpha})\left[1 - \frac{E_{\alpha}(t^{\alpha}\left(1-\ell^{s}m^{-s}t^{-s\beta}\right))}{E_{\alpha}(t^{\alpha})}\cdots\right.$$
$$+\frac{t^{\alpha(M-1)}E_{\alpha}\left(t^{\alpha}\left(1-\frac{3^{s}\pi^{s}m^{-s}t^{-s\beta}}{2^{s}}\right)\right)}{E_{\alpha}(t^{\alpha})}\cdots$$
$$\left.-\frac{t^{\alpha(M-1)}E_{\alpha}\left(t^{\alpha}\left(1-\frac{\pi^{s}m^{-s}t^{-s\beta}}{2^{s}}\right)\right)}{E_{\alpha}(t^{\alpha})} + \frac{c_{0}(t, mt^{\beta}) - t^{\alpha(M-1)}c_{1}(t, mt^{\beta})}{E_{\alpha}(t^{\alpha})}\right].$$

Notamos que por los Lemas 4.5 y 4.6 tendremos que

$$\frac{c_{0}(t, mt^{\beta}) - t^{\alpha(M-1)}c_{1}(t, mt^{\beta})}{E_{\alpha}(t^{\alpha})} = o(1).$$

Por otro lado, por el comportamiento asintótico de la función de Mittag Leffler y la desigualdad de Bernoulli

$$\begin{aligned}\frac{E_{\alpha}(t^{\alpha}\left(1-\ell^{s}m^{-s}t^{-s\beta}\right))}{E_{\alpha}(t^{\alpha})} &= \frac{e^{t((1-\ell^{s}m^{-s}t^{-s\beta})^{\frac{1}{\alpha}})} + o(1)}{e^{t} + o(1)} \\ &= \frac{e^{t(1-\frac{1}{\alpha}\ell^{s}m^{-s}t^{-s\beta})} + o(1)}{e^{t} + o(1)} \\ &= e^{-(\frac{1}{\alpha}\ell^{s}m^{-s}t^{-s\beta+1})} + o(e^{-t}),\end{aligned}$$

como $t \to \infty$. Si $0 < \beta < \frac{1}{s}$, entonces

$$\frac{E_{\alpha}(t^{\alpha}\left(1-\ell^{s}m^{-s}t^{-s\beta}\right))}{E_{\alpha}(t^{\alpha})} = o(1).$$

Análogamente, para cualquier $\varepsilon > 0$ y $0 < \beta < \frac{1}{s}$,

$$\frac{t^{\alpha(M-1)}E_{\alpha}\left(t^{\alpha}\left(1-\varepsilon t^{-s\beta}\right)\right)}{E_{\alpha}(t^{\alpha})} = t^{\alpha(M-1)}e^{-\varepsilon t^{-s\beta+1}} = o(1).$$

Por lo tanto, para $0 < \beta < \frac{1}{s}$

$$u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) > Cm^{s-1}t^{\beta(s-1)-\alpha M}E_{\alpha}(t^{\alpha})[1-o(1)],$$

En particular, en regiones de la forma $\{x \in \mathbb{R} : |x| = mt^{\beta}\}$, hay divergencia en los valores de $u_{\alpha,s}$ a medida que t tiende a infinito. Más precisamente,

$$\lim_{t\to\infty} u_{\alpha,s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \infty.$$

Por último, si consideramos regiones del tipo $\{x \in \mathbb{R} : |x| = \Phi(t)\}$, entonces la condición necesaria para asegurar que

$$\frac{E_\alpha(t^\alpha (1 - \ell^s m^{-s}(\Phi(t))^{-s}))}{E_\alpha(t^\alpha)} = o(1), \; t \to +\infty,$$

es que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{(\Phi(t))^s} = \infty,$$

lo cual equivale a que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{\sqrt[s]{t}} = 0.$$

■

***Observación* 4.7.** *Si tomamos $M = 2$ y $s = 2$, se recupera el resultado de Dipierro et al. en [15, Teorema 1.2].*

***Observación* 4.8.** *Es interesante observar que a medida que el orden del operador espacial aumenta, la velocidad de invasión podría volverse más lenta.*

4.2. Resultado de convergencia

Como hemos vimos en la Sección 4.1.1, el lento decaimiento del semigrupo asociado a $s \in (0, 2)$, impide la convergencia a 0 en regiones del tipo $|x| = mt^\beta$. Sin embargo, cuando $s \geq 2$ y $\alpha = \frac{1}{2}$, el semigrupo asociado decae lo suficientemente rápido como para asegurar la convergencia a 0 en esferas que se muevan a lo menos a una velocidad lineal. El siguiente teorema demuestra esto.

Teorema 4.4. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\beta \in (1, \infty)$. Entonces para $s \geq 2$ se tiene que*

$$\lim_{t\to\infty} u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^\beta \vec{e}) = 0,$$

con $m > 0$.

Demostración. La representación (1.10), nos permite escribir la función $u_{\frac{1}{2},s}$ como

$$u_{\frac{1}{2},s}(t, x) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) u_{1,s}(k, x)\, dk, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\delta = \frac{\beta+1}{2}$. Es claro que $\delta > 1$ y $\delta < \beta$. Ahora reescribimos la integral anterior de la siguiente forma:

$$u_{\frac{1}{2},s}(t, x) = \int_0^{t^\delta} t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) u_{1,s}(k, x)\, dk + \int_{t^\delta}^\infty t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) u_{1,s}(k, x)\, dk.$$

Si reemplazamos $x = mt^\beta \vec{e}$, obtenemos que:

$$u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^\beta \vec{e}) = \int_0^{t^\delta} t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})\, dk + \int_{t^\delta}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})\, dk.$$

Con el objetivo de estudiar el comportamiento asintótico de estas integrales, tomamos valor absoluto a ambos lados de la igualdad y aplicamos la desigualdad triangular:

$$|u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^\beta \vec{e})| \le I_1(t) + I_2(t),$$

donde

$$I_1(t) = \int_0^{t^\delta} t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) |u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})|\, dk, \quad \text{y}$$
$$I_2(t) = \int_{t^\delta}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) |u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})|\, dk.$$

Empezamos estudiando la integral I_1. Como vimos en el Ejemplo (2.13),

$$\Phi_{\frac{1}{2}}(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}},$$

por lo tanto,

$$I_1(t) = \int_0^{t^\delta} (t\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4t}} |u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})|\, dk.$$

Por otro lado, ya hemos mostrado en el Capítulo 3 que la solución $u_{1,s}$ puede escribirse como

$$u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e}) = e^{bk} \eta_k^s(mt^\beta \vec{e}), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n,$$

donde η_t^s es el semigrupo asociado al símbolo $|\xi|^s$ (ver Observación 2.3). De esta forma,

$$I_1(t) = \int_0^{t^\delta} (t\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4t}} e^{bk} |\eta_k^s(mt^\beta \vec{e})|\, dk, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Evidentemente, se sigue la desigualdad

$$I_1(t) \le e^{bt^\delta} \int_0^{t^\delta} (t\pi)^{-\frac{1}{2}} |\eta_k^s(mt^\beta \vec{e})|\, dk.$$

En este contexto, el decaimiento de la familia $(\eta_k^s)_{k\ge 0}$ es conocido y viene dado por

$$\eta_k^s(mt^\beta \vec{e}) = t^{-\frac{n}{s}} f_n\left(\frac{mt^\beta}{k^{1/s}}\right),$$

donde por la Observación 2.3, existen constantes $K = K_n$ y $\mu = \mu_n$ tales que

$$f_n\left(\frac{mt^\beta}{k^{1/s}}\right) \le Ke^{-\mu\left(\frac{mt^\beta}{k^{1/s}}\right)^{s/(s-1)}}, \quad t>0,\, t^\delta > k.$$

En términos de la función f_n, la integral se reescribe como:

$$\begin{aligned} I_1(t) &\le (t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} \int_0^{t^\delta} \left| f_n\left(\frac{mt^\beta}{k^{1/s}}\right)\right| dk \\ &\le (t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} \int_0^{t^\delta} Ke^{-\mu\left(\frac{mt^\beta}{k^{1/s}}\right)^{s/(s-1)}} dk \\ &= K(t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} \int_0^{t^\delta} e^{-\mu\frac{(mt^\beta)^{s/(s-1)}}{k^{1/(s-1)}}} dk. \end{aligned}$$

Para simplificar el análisis de esta integral, llamaremos por $\alpha := \alpha(t,m,s,\beta) = \mu(mt^\beta)^{s/(s-1)}$. Así,

$$I_1(t) \le K(t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} \int_0^{t^\delta} e^{-\frac{\alpha}{k^{1/(s-1)}}} dk.$$

Si $u = \frac{\alpha}{k^{1/(s-1)}}$, entonces $du = -\frac{\alpha}{s-1} k^{-\frac{1}{s-1}-1} dk$, y por tanto,

$$\int_0^{t^\delta} e^{-\frac{\alpha}{k^{1/(s-1)}}} dk = (s-1)\alpha^{s-1} \int_{\frac{\alpha}{t^{\delta/(s-1)}}}^{\infty} e^{-u} u^{-s}\, du.$$

Esta última integral corresponde a una del tipo Gamma incompleta de parámetros $1-s$ y $\frac{\alpha}{t^\delta/(s-1)}$ (ver Definición 2.1):

$$(s-1)\alpha^{s-1} \int_{\frac{\alpha}{t^{\delta/(s-1)}}}^{\infty} e^{-u} u^{-s}\, du = (s-1)\alpha^{s-1} \Gamma\left(1-s, \frac{\alpha}{t^{\delta/(s-1)}}\right).$$

Volviendo a la integral I_1, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$I_1(t) \le K(t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} (s-1)\alpha^{s-1} \Gamma\left(1-s, \frac{\alpha}{t^{\delta/(s-1)}}\right).$$

Para terminar el análisis de I_1, utilizamos el comportamiento asintótico de la función Gamma incompleta (ver Ejemplo (2.2)) para deducir que

$$I_1(t) \le K'(t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} (s-1)\alpha^{s-1} \left(\frac{\alpha}{t^{\delta/(s-1)}}\right)^{-s} e^{-\frac{\alpha}{t^{\delta/(s-1)}}}.$$

Recordando que $\alpha = \mu(mt^\beta)^{s/(s-1)}$, tendremos que

$$I_1(t) \le K'(t\pi)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{s}} e^{bt^\delta} (s-1)(\mu(mt^\beta)^{s/(s-1)})^{s-1} \left(\frac{\mu(mt^\beta)^{s/(s-1)}}{t^{\delta/(s-1)}}\right)^{-s} e^{-\frac{\mu(mt^\beta)^{s/(s-1)}}{t^{\delta/(s-1)}}}.$$

Por lo tanto, si queremos que $I_1(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$, necesitamos que

$$\delta < \frac{\beta s}{s-1} - \frac{\delta}{s-1},$$

lo cual es cierto si $\beta > \delta$. Dado que $\delta = \frac{\beta+1}{2}$ y $\beta > 1$, se sigue que $\lim_{t\to\infty} I_1(t) = 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_{t^\delta}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\frac{1}{2}}(kt^{-\frac{1}{2}}) |u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})| \, dk \\ &= \int_{t^\delta}^{\infty} (t\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4t}} |u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})| \, dk. \end{aligned}$$

Notamos que

$$|u_{1,s}(k, mt^\beta \vec{e})| = e^{bk} \left| f_n \left(\frac{mt^\beta}{k^{\frac{1}{s}}} \right) \right| \leq e^{bk} K e^{-\mu \left(\frac{mt^\beta}{k^{\frac{1}{s}}} \right)^{s/(s-1)}} \leq K e^{bk},$$

para todo $k > t^\delta$. Luego,

$$I_2(t) \leq K(t\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{t^\delta}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4t}} e^{bk} \, dk = K(t\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{t^\delta}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4t} + bk} \, dk.$$

Como vimos en (2.6), esta clase de integrales tienen antiderivadas explicitas en términos de la función error erf. Se sigue entonces que:

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq K(t\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{t^\delta}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4t}} e^{bk} \, dk \\ &= K e^{tb^2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(2t^{\delta - \frac{1}{2}} - b\sqrt{t} \right) \right] \\ &= K e^{tb^2} \operatorname{erfc} \left(2t^{\delta - \frac{1}{2}} - b\sqrt{t} \right). \end{aligned}$$

Note que hemos utilizado el límite (2.3) para evaluar el extremo superior de la integral y la Definición 2.4. Ahora, del hecho que $\delta > 1$, podemos asegurar que

$$2t^{\delta - \frac{1}{2}} - b\sqrt{t} > 0,$$

para t suficientemente grande. De esta forma, si $T > 0$ es tal que

$$2t^{\delta - \frac{1}{2}} - b\sqrt{t} > 0,$$

para $t > T$, se sigue de la desigualdad (2.5) que

$$I_2(t) \leq K e^{tb^2} e^{-(2t^{\delta - \frac{1}{2}} - b\sqrt{t})^2} = K e^{tb^2} e^{-4t^{2\delta-1}} e^{4bt^\delta} e^{-b^2 t} = K e^{-4t^{2\delta-1}} e^{4bt^\delta}.$$

Pero como $\delta > 1$,

$$\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t\to\infty} |u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^{\beta}\vec{e})| \leq \lim_{t\to\infty} (I_1(t) + I_2(t)) = 0,$$

y

$$\lim_{t\to\infty} u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = 0.$$

Esto concluye la demostración. ■

***Observación* 4.9.** *Con el resultado obtenido en esta sección, junto con los de la Sección 4.1.2, hemos caracterizado completamente la velocidad de invasión del problema*

$$\begin{cases} \partial_t^{\frac{1}{2}} u(t,x) - a\Delta u(t,x) = bu(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.15}$$

si $b > \frac{1}{4}$ y $a > 0$. A saber, para $m > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} u_{\frac{1}{2},2}(t, mt^{\beta}) = \begin{cases} \infty, & \beta \in (0,1) \\ 0, & \beta > 1. \end{cases}$$

***Observación* 4.10.** *En vista del resultado obtenido en esta sección, sumado al Teorema 4.3, la solución al problema*

$$\begin{cases} \partial_t^{\frac{1}{2}} u(t,x) + a(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = bu(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.16}$$

con $s > 2$, satisface que

$$\lim_{t\to\infty} u_{\frac{1}{2},s}(t, mt^{\beta}\vec{e}) = \begin{cases} \infty, & \beta \in (0, 1/s) \\ 0, & \beta > 1. \end{cases}$$

Con las técnicas utilizadas no es posible aún determinar el comportamiento asintótico para $\beta \in [\frac{1}{s}, 1]$.

Capítulo 5

Conclusiones

La principal motivación de este trabajo surgió al intentar abordar las preguntas planteadas por Dipierro, Pellacci, Valdinoci y Verzini en [15] con respecto a la velocidad de invasión de la solución fundamental del problema (1.1) para $s = 2$. En este sentido, uno de los principales resultados que hemos demostrado en este trabajo es que, para cualquier dimensión $n \in \mathbb{N}$ y **cualquier** $\alpha \in (0, 1)$, siempre podemos escoger un $b > (1 - \alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$ (como en (1.1)) de manera que, si la variable espacial x está en esferas que se mueven a lo más a una velocidad lineal, entonces los valores de la solución $u_{\alpha,2}$ divergen a tiempos grandes. Este resultado claramente extiende al Teorema 1.2 del trabajo [15].

Por otro lado, era de esperar que la divergencia de $u_{\alpha,2}$ en esferas que se mueven a una velocidad lineal dependiera de los valores a y b, similar a lo que sucede en el caso clásico $\alpha = 1$ (para más detalle, ver la igualdad (1.15)). De hecho, hemos demostrado que existe divergencia en esferas del tipo $|x| = mt$ si se cumple la relación $b - \frac{m^2}{4a} > (1 - \alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$. Observe que si $\alpha \to 1$, se recupera la condición de la primera rama de (1.15).

En relación con la convergencia a 0 de los valores de $u_{\alpha,2}$, hasta ahora solo hemos podido dar un resultado para el exponente fraccionario $\alpha = \frac{1}{2}$. En este caso, hay convergencia si las esferas se mueven al menos a una velocidad lineal. Este resultado es independiente de los valores de n, a y b. Por tanto, junto a los resultados anteriormente mencionados, si escogemos adecuadamente el valor de b (por ejemplo, tomando $b = 1$), la velocidad de invasión en este caso es $\Theta(t) = mt$, para $m > 0$, y esta coincide con la del caso clásico $\alpha = 1$.

Resulta interesante observar que, a diferencia de lo pronosticado, la presencia del operador con memoria $\partial_t^{\frac{1}{2}}$ no influye (al menos en este caso) en el cálculo de la velocidad de invasión en comparación al caso clásico. Creemos que este fenómeno podría extenderse a todo $\alpha \in (0, 1)$, y actualmente estamos explorando nuevas herramientas para abordar esta cuestión. No obstante, en el caso en que la velocidad de las esferas es lineal (esto es, cuando $\beta = 1$), sí podría verse tal efecto de memoria. Vale decir, si pudiéramos demostrar que existe convergencia a 0 en $|x| = mt$, donde $m \geq 2\sqrt{a(b - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})}$, entonces sí existiría una ralentización respecto al caso clásico, en el que hay divergencia para valores de m en el intervalo $(0, 2\sqrt{ab})$, mientras que en el caso no local, habría divergencia en el intervalo más pequeño $(0, 2\sqrt{a(b-(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})})$.

Todo el estudio anterior motivó el estudio del problema (1.1) para cualquier $s > 0$. En particular, hemos probado que el problema con $s \in (0, 2)$, para $b > (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$, con algún $\alpha \in (0, 1)$ fijo, siempre existe divergencia en los valores de $u_{\alpha,s}$ en cualquier esfera del tipo $|x| = mt^{\beta}$, $\beta > 0$, con $t \to \infty$. Este resultado era esperado debido al lento decaimiento del semigrupo de convoluciones η_t^s.

Distinto es el caso $s > 2$. Sin dudas, este es el rango más difícil de estudiar debido a la naturaleza oscilatoria del semigrupo η_t^s. Aún más, es conocido que η_t^s presenta infinitos cambios de signo, de modo que las técnicas empleadas para el rango $0 < s \leq 2$ no pueden ser replicadas.

Para el desarrollo de esta parte del trabajo, fue necesario encontrar nuevas cotas para la función de Mittag-Leffler de orden $\alpha \in [\frac{1}{M}, 1]$ que se relacionaran con su derivada. Estas estimaciones, demostradas en el Lema 4.1 y en el Lema 4.2, generalizan las calculadas por los autores en [15]. A saber, al elegir $M = 2$, se recuperan las estimaciones mencionadas.

Utilizando la técnica de los autores en [15], hemos probado que existe divergencia en los valores de $u_{\alpha,s}$ en esferas del tipo $|x| = mt^{\beta}$, para $0 < \beta < \frac{1}{s}$, siempre que $n = 1$. Además, debido a que el correspondiente semigrupo posee decaimiento exponencial, hemos obtenido un resultado respecto a la convergencia a 0 en los valores de $u_{\alpha,s}$ para $\alpha = \frac{1}{2}$ y en esferas de la forma $|x| = mt^{\beta}$, con $\beta > 1$, empleando técnicas similares a las del caso $s = 2$.

En la siguiente sección discutiremos algunos problemas abiertos que surgen de esta investigación.

5.1. Trabajos Futuros

A continuación, destacamos los principales problemas que quedan abiertos en este trabajo y proponemos algunos otros para futuros proyectos de investigación:

1. En los teoremas 4.1 y 4.2, se requiere estudiar el caso $0 < b < (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$.

   Por un lado, para $s \in (0, 2)$, es posible que se obtenga un nuevo resultado de divergencia en vista del lento decaimiento que presenta el semigrupo $u_{1,s}$, mientras que para $s = 2$, se espera que el coeficiente **a** juegue algún papel importante en el comportamiento asintótico. De todas formas, es posible que en ambos casos se requieran usar otras representaciones para la solución $u_{\alpha,s}$.

   Respecto al Teorema 4.4, este solo responde al caso $\alpha = \frac{1}{2}$. Si se lee con cuidado la demostración de este teorema, la relevancia del parámetro $\alpha = \frac{1}{2}$ se ve en el cálculo de la integral I_2 debido a que se ocupa la forma explicita que toma la función $\Phi_{\frac{1}{2}}$. En ese sentido, dado que en general se desconoce la forma exacta de las funciones Φ_{α}, habría que buscar alguna vía alternativa para trabajar la integral I_2; probablemente, explotando su comportamiento asintótico y otras propiedades. Como comentamos brevemente en las conclusiones, es deseable estudiar a detalle el caso $\beta = 1$ y estudiar el intervalo $(0, 2\sqrt{a(b-(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})})$ para los valores de m.

2. Ahora bien, las mayores dificultades se encuentran en el rango $s \in (2, \infty)$ producto de la pérdida de la positividad en el semigrupo que subordina. Recordamos que nuestro resultado acerca de la divergencia, enunciado en el Teorema 4.3, es solamente válido en dimensión $n = 1$, y se requieren nuevas técnicas para abordar otras dimensiones. A modo de ejemplo, supongamos que $n = 3$. En este caso, debido a la condición (1.12), la inversa de Fourier en la representación (1.11) toma su forma clásica en $L_1(\mathbb{R}^n)$ cuando $s > 3$. En concreto, la solución puede escribirse por
$$u_{\alpha,s}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{\xi \cdot x} E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))\, d\xi.$$
Al ser la función $\xi \mapsto E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s))$ de tipo radial, su transformada inversa de Fourier admite una representación en términos de funciones de Bessel dada por la Proposición 2.3. De esta forma,
$$\begin{aligned} u_{\alpha,s}(t,x) &= \frac{2\pi}{\sqrt{|x|}} \int_0^\infty E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s)) J_{\frac{1}{2}}(2\pi r|x|) r^{\frac{3}{2}}\, dr \\ &= \frac{C}{\sqrt{|x|}} \int_0^\infty E_\alpha(t^\alpha(b - a|\xi|^s)) \sin(|x|r) r\, dr, \end{aligned}$$
donde C es alguna constante positiva. A pesar del parecido de esta representación respecto a la del caso $n = 1$, ahora no es posible establecer de manera directa una serie que satisfaga el criterio de Leibniz, debido a que el factor r dentro de la integral produce algunos ciclos de divergencia que dificultan aplicar el método utilizado en la Sección 4.1.3. En general, para $n > 4$ y $s > n$, las dificultades incrementan, porque en algunos casos ni siquiera se conoce explícitamente la correspondiente función de Bessel, y la distribución de sus ceros, aunque pueda ser bien conocida, complica igualmente el análisis.

   Dicho esto, es posible que en este caso se requiera considerar factores adicionales a los utilizados en la Sección 4.1.3. En particular, herramientas analíticas como la transformada de Hankel podrían ser de gran utilidad.

   Mencionar por último que queda abierto en el caso unidimensional el comportamiento asintótico de $u_{\alpha,s}(t, mt^\beta \vec{e})$, cuando $\beta \in [\frac{1}{s}, 1]$, tal como consignamos en la Observación 4.10. En similitud con el caso $s = 2$, se desea ampliar el rango de exponente fraccionarios α respecto a la convergencia a 0.

3. Proponemos ampliar el rango de operadores espaciales en el problema (1.1). En concreto, se podría considerar el problema
$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(t,x) + a\mathcal{A}u(t,x) = bu(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $\mathcal{A}$ sea un operador con propiedades parecidas a las del laplaciano fraccionario. Por ejemplo, es esperable que operadores pseudodiferenciales con un símbolo subordinado al semigrupo del calor (ver Teorema 2.2) tengan comportamientos parecidos a los estudiados en esta tesis.

En esa misma dirección, pero respecto al operador temporal, sería interesante estudiar el problema

$$\begin{cases} \partial_t(k * (u(\cdot, x)) + a(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(t,x) = bu(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.2}$$

donde k es un kernel del tipo $(\mathcal{PC})$ (ver [39]). Note que el problema (1.1) se recupera cuando se toma $k_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, con $\alpha \in (0,1)$.

En el caso general, es posible que se tengan que utilizar con exhaustividad la larga teoría desarrollada por Jan Prüss en [41]. En particular, creemos que es crucial conocer el comportamiento asintótico de la función de propagación asociada a la medida completamente positiva.

4. Nuestros resultados se han obtenido considerando la ecuación en $\mathbb{R}^n$, pero podría ser interesante extender el análisis a otros espacios funcionales, como dominios acotados, variedades e incluso espacios no arquimedianos. Esto podría llevar a nuevas perspectivas y desafíos en el estudio de ecuaciones fraccionarias.

5. Por último, en el espíritu de lo desarrollado en trabajos como [29, 39, 45, 47], sería interesante estudiar cuando la solución del problema (1.1) pertenece a algún espacio $L_p(\mathbb{R}^n)$. En vista de los resultados disponibles en la literatura, creemos que esta pertenencia dependerá fuertemente del número

$$\kappa(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{n-s} & \text{si} \quad s < n \\ \infty & \text{si} \quad s \geq n \end{cases}$$

Más precisamente, que para cada $t > 0$, $u(t, \cdot) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, si y solo si, $1 \leq p < \kappa(n)$.

También sería interesante encontrar estimaciones de la norma $||u(t,\cdot)||_p$. Creemos que estas no tendrían que ser muy distintas a las encontradas por los autores en [29], y solo diferir en algún factor Ψ dependiente del tiempo y de los valores de b, p y α.

Bibliografía

[1] N. Abatangelo and E. Valdinoci, *Getting acquainted with the fractional Laplacian*, in Contemporary research in elliptic PDEs and related topics, vol. 33 of Springer INdAM Ser., Springer, Cham, 2019, pp. 1–105.

[2] E. G. Bazhlekova, *Subordination principle for fractional evolution equations*, Fract. Calc. Appl. Anal., 3 (2000), pp. 213–230.

[3] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960), pp. 263–273.

[4] K. M. Bryan, *Elementary inversion of the laplace transform*, (1999).

[5] X. Cabré and J.-M. Roquejoffre, *The influence of fractional diffusion in Fisher-KPP equations*, Comm. Math. Phys., 320 (2013), pp. 679–722.

[6] L. Caffarelli and J. L. Vazquez, *Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure*, Arch. Ration. Mech. Anal., 202 (2011), pp. 537–565.

[7] L. A. Caffarelli, J.-M. Roquejoffre, and Y. Sire, *Variational problems for free boundaries for the fractional Laplacian*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 12 (2010), pp. 1151–1179.

[8] M. Caputo, *Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent*, Annals of Geophysics, 19 (1966), pp. 383–393.

[9] P. Constantin, *Euler equations, Navier-Stokes equations and turbulence*, in Mathematical foundation of turbulent viscous flows, vol. 1871 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2006, pp. 1–43.

[10] P. Constantin, A. J. Majda, and E. Tabak, *Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar*, Nonlinearity, 7 (1994), pp. 1495–1533.

[11] L. C. de Barros, M. M. Lopes, F. S. P. Simões, E. Esmi, J. P. C. d. Santos, and D. E. Sánchez, *The memory effect on fractional calculus: An application in the spread of covid-19*, 2020.

[12] W. E. Deming and C. G. Colcord, *The minimum in the gamma function*, Nature, 135 (1935), pp. 917–917.

[13] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, vol. 2004 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010. An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.

[14] S. Dipierro, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Dislocation dynamics in crystals: a macroscopic theory in a fractional Laplace setting*, Comm. Math. Phys., 333 (2015), pp. 1061–1105.

[15] S. Dipierro, B. Pellacci, E. Valdinoci, and G. Verzini, *Time-fractional equations with reaction terms: fundamental solutions and asymptotics*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 41 (2021), pp. 257–275.

[16] M. Dzherbashian and A. Nersesian, *Fractional derivatives and cauchy problem for differential equations of fractional order*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 23 (2020), pp. 1810–1836.

[17] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 63, 1999.

[18] V. Galaktionov and S. Pohozaev, *Existence and blow-up for higher-order semilinear parabolic equations: Majorizing order-preserving operators*, Indiana University Mathematics Journal, 51 (2002), pp. 1321–1338.

[19] G. Giacomin and J. L. Lebowitz, *Phase segregation dynamics in particle systems with long range interactions. I. Macroscopic limits*, J. Statist. Phys., 87 (1997), pp. 37–61.

[20] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. Rogosin, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, second ed., 2020.

[21] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, eighth ed., 2015. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll, Revised from the seventh edition [MR2360010].

[22] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[23] M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rational Mech. Anal., 31 (1968), pp. 113–126.

[24] N. Jacob, *Pseudo-differential operators and Markov processes*, vol. 94 of Mathematical Research, Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[25] N. Jacob, *Pseudo differential operators and Markov processes. Vol. I*, Imperial College Press, London, 2001. Fourier analysis and semigroups.

[26] N. Jacob and R. L. Schilling, *Subordination in the sense of S. Bochner—an approach through pseudo-differential operators*, Math. Nachr., 178 (1996), pp. 199–231.

[27] B. Kadomtsev and V. Petviashvili, *On the stability of solitary waves in weakly dispersing media*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 192 (1970), pp. 753–756.

[28] J. Kemppainen, *Positivity of the fundamental solution for fractional diffusion and wave equations*, (2019).

[29] J. Kemppainen, J. Siljander, V. Vergara, and R. Zacher, *Decay estimates for time-fractional and other non-local in time subdiffusion equations in* $\mathbb{R}^d$, Math. Ann., 366 (2016), pp. 941–979.

[30] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phys. Lett. A, 268 (2000), pp. 298–305.

[31] N. Laskin, *Fractional Schrödinger equation*, Phys. Rev. E (3), 66 (2002), pp. 056108, 7.

[32] X. Li and R. Wong, *Asymptotic behaviour of the fundamental solution to* $\partial u/\partial t = -(-\Delta)^m u$, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 441 (1993), pp. 423–432.

[33] G. Lu, *The Peierls-Nabarro model of dislocations: a venerable theory and its current development*, In Handbook of Materials Modeling, Springer Netherlands, 2005.

[34] F. Mainardi and M. Tomirotti, *On a special function arising in the time fractional diffusion-wave equation*, Transform Methods and Special Functions, (1995).

[35] R. Mancinelli, D. Vergni, and A. Vulpiani, *Front propagation in reactive systems with anomalous diffusion*, Phys. D, 185 (2003), pp. 175–195.

[36] R. Metzler and J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, Phys. Rep., 339 (2000), p. 77.

[37] M. D. Ortigueira and J. Tenreiro Machado, *What is a fractional derivative?*, Journal of Computational Physics, 293 (2015), pp. 4–13. Fractional PDEs.

[38] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[39] J. C. Pozo and V. Vergara, *Fundamental solutions and decay of fully non-local problems*, Discrete & Continuous Dynamical Systems - A, 39 (2019), pp. 639–666.

[40] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1993. [2012] reprint of the 1993 edition.

[41] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1993. [2012] reprint of the 1993 edition.

[42] Y. N. Rabotnov, *Creep of structural elements*, 1966.

[43] A. Reynolds and C. Rhodes, *The Lévy flight paradigm: Random search patterns and mechanisms*, Ecology, 90 (2009), pp. 877–887.

[44] S. Serfaty and J. L. Vázquez, *A mean field equation as limit of nonlinear diffusions with fractional Laplacian operators*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 49 (2014), pp. 1091–1120.

[45] S. Solís and V. Vergara, *A non-linear stable non-gaussian process in fractional time*, 2021.

[46] J. F. Toland, *The Peierls-Nabarro and Benjamin-Ono equations*, J. Funct. Anal., 145 (1997), pp. 136–150.

[47] A. Tuan Nguyen, T. Caraballo, and N. H. Tuan, *On the initial value problem for a class of nonlinear biharmonic equation with time-fractional derivative*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 152 (2022), pp. 989–1031.

[48] G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, E. J. Murphy, P. A. Prince, and H. Stanley, *Lévy flight search patterns of wandering albatrosses*, Nature, 381 (1996), pp. 413–415.

[49] E. M. Wright, *The asymptotic expansion of the generalized bessel function*, Proceedings of the London Mathematical Society, s2-38 (1935), pp. 257–270.

[50] E. M. Wright, *The Generalized Bessel function of order greater than one*, The Quarterly Journal of Mathematics, os-11 (1940), pp. 36–48.