UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

ALGEBRAS DE CLIFFORD

Tesis para optar al Grado
de Licenciado en Ciencias
con Mención en Matemáticas.

Profesor Guía : Dr. Jorge Soto A.
Alumno : Michael Neuburg G.

- 1978 -

INTRODUCCION

El presente ttabajo está basado fundamentalmente en el Artículo I y parte del Artículo II del Seminario de Heidelberg-Strasburg, y hace un estudio y clasificación de las Algebras de Clifford, lo cual constituye todo el Capítulo I, que es a su vez el objetivo fundamental del mismo.

Después de realizado este trabajo, me interesó dar una aplicación de las Algebras de Clifford en algún campo. De hecho estas han tenido distintos tipos de aplicaciones tanto en la Física como en las Matemáticas. Me decidí por último, dar su aplicación en la K-Teoría, pero antes de esto, por ser la K-Teoría desconocida para mí, he tenido que informarme y dar a conocer rápidamente, sin entrar en muchos detalles, algo de lo que es la K-Teoría y es lo que puede encontrarse en el Capítulo II, además, este Capítulo trae un ejercicio práctico que tuve que resolver, a saber, calcular $K(S^1)$.

Por último, el Capítulo III, nos da la aplicación de las Algebras de Clifford en K-Teoría, llegando a establecer de otro modo, a como lo hace la K-Teoría clásica, los teoremas de periodicidad de Bott.

INDICE

CAPITULO I

LAS ALGEBRAS DE CLIFFORD $C^{p,q}$

1. INTRODUCCION Y PRIMEROS EJEMPLOS

1.1 Construcción de $C^{1,0}$; $C^{0,1}$; $C^{2,0}$; $C^{1,1}$

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales, $\mathbb{C}$ el cuerpo de los complejos y $\mathbb{H}$ el cuerpo de los cuaterniones. Consideremos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ como algebras sobre $\mathbb{R}$

1.1.1 Construcción de $C^{1,0}$

En $\mathbb{C}$ tenemos $i=\sqrt{-1}$ y $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$. Entonces $\mathbb{C}$ es generado por i y por 1 con la relación $i^2=-1$. Tenemos asi un algebra de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$ que denotaremos por $C^{1,0}$, es decir $C^{1,0}=\mathbb{C}$

1.1.2 Construcción de $C^{2,0}$

Sabemos que $\mathbb{H}$ es generado por $1,i,j,k$ con las relaciones

$i^2=j^2=-1$, $ij=-ji$ $k=ij$

$\mathbb{H}$ es asi un $\mathbb{R}$-algebra de dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$ que denotaremos por $C^{2,0}$.

Tenemos entonces $C^{2,0}\cong\mathbb{H}$.

1.1.3 Construcción de $C^{0,1}$

$C^{0,1}$ es por definición, el algebra sobre $\mathbb{R}$ generada por $1,\varepsilon$ con la relación $\varepsilon^2=1$. Entonces un elemento de $C^{0,1}$ tendrá la forma $a+\varepsilon b$ con a y b en los reales.

La suma estará definida por:

$$(a+\varepsilon b)+(c+\varepsilon d)=(a+c)+\varepsilon(b+d)$$

El producto se define por

$$(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d)=(ac+bd)+\varepsilon(bc+ad)$$

y la ponderación por escalar por

$$\lambda(a+\varepsilon b)=\lambda a+\lambda\varepsilon b$$

Se puede observar con facilidad que con estas operaciones $C^{0,1}$ es un

$$g(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } g(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$g(x) = \begin{pmatrix} a + c & b - d \\ b + d & a - c \end{pmatrix}$$

para todo $x = a\,1 + b\varepsilon + c\eta + d\zeta \in C^{0,2}$

i) g es un isomorfismo lineal pues transforma la $\mathbb{R}$ - base $1, \varepsilon, \eta, \zeta$ de $C^{0,2}$ en una base de $\mathbb{R}(2)$

ii) g es un homomorfismo de $\mathbb{R}$- algebras pues respeta las relaciones entre los generadores, en efecto:

$$(g(\varepsilon))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$(g(\eta))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

es decir $(g(\varepsilon))^2 = (g(\eta))^2 = 1$

igualmente se demuestra que

$$g(\varepsilon)\, g(\eta) = -g(\eta)\, g(\varepsilon)$$

y

$$g(\zeta) = g(\varepsilon)\, g(\eta)$$

Luego $C^{0,2} \cong \mathbb{R}(2)$ Q.E.D.

1.1.5 Construcción de $C^{1,1}$

$C^{1,1}$ es por definición el $\mathbb{R}$ - algebra de dimensión 4 sobre $\mathbb{R}$ generada por los elementos $1, i, \varepsilon, \rho$ con las relaciones

$$i^2 = -1 \;,\; \varepsilon^2 = 1 \;,\; i\varepsilon = -\varepsilon i \;,\; i\varepsilon = \rho$$

Proposición: $C^{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$

Dem: Definamos una aplicación $\mathbb{R}$ - lineal

$f: C^{1,1} \longrightarrow \mathbb{R}(2)$ por:

$$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; f(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; f(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; f(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) $Q(\lambda X) = \lambda^2 Q(X) \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall X \in V$

ii) La aplicación $B : V \times V \longrightarrow K$ definida por

$$B(x,y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

es una forma bilineal sobre V

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^n$

$$K = \mathbb{R}$$

y sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ entonces $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

es una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$

En efecto

$$Q(\lambda x) = Q(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda^2 Q(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} y \quad B(x,y) &= B(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) \\ &= Q(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i) - Q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) - Q(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Se tiene así

$$B(x,y) = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La cual es claramente bilineal en x e y

2.2 Algebra tensorial

Definiciones:

a) Sea K un cuerpo conmutativo, V un espacio vectorial sobre K con una multiplicación bilineal y asociativa denotada por:

$$(x,y) \longrightarrow x * y \qquad (x, y \in V)$$

Entonces diremos que V es un algebra asociativa sobre K

Proposición: $T(V) \cong \mathbb{R}[x]$, con $\mathbb{R}[x]$ algebra de polinomios con coeficientes reales.

Demostración: Sea

$$\phi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow T(V) \text{ tal que:}$$

$$\phi(X) = x \in T_1(V) \subset T(V) \ ;$$

extendemos ϕ_a un único homomorfismo de algebras de $\mathbb{R}[x]$ en $T(V)$; de la siguiente forma:

$\phi(a_0 + a_1x + \ldots\ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1x + \ldots\ldots + a_n x^{\otimes n}$,
donde $x^{\otimes n} = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$ (n factores).

La aplicación φ es un isomorfismo lineal pues transforma la $\mathbb{R}$-base $\{x^n\}_{n \geq 0}$ de $\mathbb{R}[x]$ en la $\mathbb{R}$-base $\{x^{\otimes n}\}_{n \geq 0}$ de $T(V)$
$\therefore \ \mathbb{R}[x] \cong T(V)$

Q. E. D.

2.4. Estudio de las algebras consideradas en 1.1 bajo las ideas de las definiciones anteriores.

2.4.1. Estudio de $C^{1.0}$

Ya sabemos que $C^{1.0}$ es un algebra de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, isomorfa a $\mathbb{C}$. Podemos redefinir $C^{1.0}$ de la siguiente forma:

Sea V un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{R}$ y sea x un generador de V .

Por 2.3 sabemos que $T(V) \cong \mathbb{R}[x]$.

Sea ahora I un ideal de $T(V)$ que precisaremos más adelante.

Si llamamos $I(Q)$ al ideal engendrado por elementos de la forma antes señalada tendremos así $I(Q) = I$

Notemos que

$$Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x) = -\alpha^2 \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

y además

$$Q(\alpha_x + \beta_x) = Q(\alpha_x) + Q(\beta_x) + B(\alpha_x, \beta_x) \quad , \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de donde

$$B(\alpha_x, \beta_x) = -2\alpha\beta$$

Sea entonces

$\phi : T(V)/_I \longrightarrow C^{1.0}$ la aplicación lineal definida por

$$\bar{1} \longrightarrow 1$$

$$\bar{x} \longrightarrow i$$

Es inmediato que ϕ es un isomorfismo de $T(V)/_I$ sobre $C^{1.0}$

Tenemos en resumen:

$$T(V)/_I \cong T(V)/_{I(Q)} \cong C^{1.0} \cong \mathbb{C} \; ;$$

además se ve con claridad que

$$T(V)/_I \cong \mathbb{R}[x]/_{x^2+1} \cong \mathbb{C}$$

Nota: Notaremos por $Q^{1.0}$ la forma cuadrática $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ antes definida. La misma construcción hecha aquí puede repetirse para

$$C^{0.1},\; C^{2.0},\; C^{0.2},\; C^{1.1}$$

Podemos señalar una base para $T(\mathbb{R}^2)$ a saber:

$\bar{1}$, e_1, e_2, $e_1 \otimes e_1$, $e_1 \otimes e_2$, $e_2 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$, $e_1 \otimes e_1$, $e_1 \otimes e_1 \otimes e_2$, ...

Sea I un ideal de $T(\mathbb{R}^2)$ que precisaremos más adelante y construyamos:

$$T(\mathbb{R}^2)/I$$

Ahora para poder identificar $\bar{e}_1$ con i, $\bar{e}_2$ con j $\bar{1}$ con 1, debemos tener:

$$(\bar{e}_1)^2 = -\bar{1} \quad , \quad \text{luego } \overline{e_1 \otimes e_1 + 1} = \bar{0} \; , \quad \text{es decir } e_1 \otimes e_1 + 1 \in I$$

$$(\bar{e}_2)^2 = -\bar{1} \quad , \quad \text{luego } e_2 \otimes e_2 + 1 \in I$$

Además como se debe cumplir $ij = -ji$, se debe tener

$$\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 = -\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 \; , \quad \text{luego } \overline{e_1 \otimes e_2} + \overline{e_2 \otimes e_1} = \bar{0} \; , \quad \text{es decir}$$

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in I$$

Sea entonces I el ideal generado por $e_1 \otimes e_1 + 1$, $e_2 \otimes e_2 + 1$, $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$. Notar además que la clase de cualquier elemento de la base de $T(\mathbb{R}^2)$ se puede identificar, salvo un signo, con alguna de las clases $\bar{1}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\overline{e_1 \otimes e_2}$

Por ejemplo:

$$\overline{e_1 \otimes e_1} = -\bar{1} \quad ; \quad \overline{e_1 \otimes e_1 \otimes e_1} = -\bar{e}_1$$

$$\overline{e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes e_1} = -\overline{e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_1} = \overline{e_1 \otimes e_2}$$

Así en general una clase $\bar{p}$ cualquiera de las ya señaladas será de la forma

$$\bar{p} = \pm \bar{e}_1 \quad \text{o} \quad \bar{p} = \pm \bar{e}_2 \quad \text{o} \quad \bar{p} = \pm \bar{1} \quad \text{o} \quad \bar{p} = \pm \overline{e_1 \otimes e_2}$$

es decir $T(\mathbb{R}^2)/I$ está generado como algebra por las clases $\bar{1}$, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ con las relaciones

Así $Q(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha^2 Q(e_1) + \beta^2 Q(e_2) + \alpha\beta B(e_1, e_2)$

$$= -\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta B(e_1, e_2)$$

Si tomamos $\omega = e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^2$ se tendrá:

$$\begin{aligned} \omega \otimes \omega - Q(\omega)1 &= (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) - Q(e_1 + e_2)1 \\ &= e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 - \\ &\quad - [Q(e_1) + Q(e_2) + B(e_1, e_2)] \\ &= (e_1 \otimes e_1 - Q(e_1)1) + (e_2 \otimes e_2 - Q(e_2)1) + \\ &\quad + (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 - B(e_1, e_2)) \, . \end{aligned}$$

Entonces si $B(e_1, e_2) = 0$ se tendrá que $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in I(Q^{2.0})$ y así se debe tener:

$$Q(\alpha e_1 + \beta e_2) = -\alpha^2 - \beta^2 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \, .$$

Entonces el ideal $I(Q^{2.0})$ y el ideal I coinciden

Tenemos en resumen:

$$T(\mathbb{R}^2)/I \cong T(\mathbb{R}^2)/I(Q^{2.0}) \cong C^{2.0} \cong H$$

2.4.4. <u>Estudio de</u> $C^{0.2}$

Es totalmente análogo al caso anterior. En este caso

$$Q^{0.2}(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

y se obtendrá

$$T(\mathbb{R}^2)/I(Q^{0.2}) \cong C^{0.2} \cong \mathbb{R}(2)$$

Por un estudio análogo al hecho con los casos anteriores se obtendría

$$Q^{1,1}(\alpha x + \beta y) = -\alpha^2 + \beta^2 \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{R})$$

y se tendría:

$$T(\mathbb{R}^2)/I \cong T(\mathbb{R}^2)/I(Q^{1,1}) \cong C^{1,1} \cong \mathbb{R}(2) .$$

§ 3. Algebras de Clifford.

Con las ideas anteriores entremos a definir lo que es un algebra de Clifford.

Definición: Sea K un cuerpo conmutativo, V un espacio vectorial sobre K, Q una forma cuadrática sobre V. Sea $T(V)$ el algebra tensorial de V sobre K, $I(Q)$ el ideal bilateral en $T(V)$ generado por elementos de la forma $x \otimes x - Q(x)1$ $(x \in V)$. Entonces:

$$C(V, Q) = T(V)/I(Q)$$

la llamada algebra de Clifford de V con respecto a Q.

Ejemplo: Sea $K = \mathbb{R}$ y $V = \mathbb{R}^{p+q}$

Consideremos la base canónica de $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_p, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_q$ de $\mathbb{R}^{p+q}$; entonces si $x \in \mathbb{R}^{p+q}$ se tiene

$$x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_j \qquad \text{con}$$

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)$.

$f_Q : C(Q) \longrightarrow A$ tal que $f_Q \circ i_Q = f$

es decir:

$$\begin{tikzcd} T(V)/I(Q) = C(Q) \arrow[rr, dashed, "\exists!\ f_Q"] & & A \\ & V \arrow[ul, "i_Q"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u>

i) La sucesión

$$0 \longrightarrow I(Q) \xrightarrow{i} T(V) \xrightarrow{\Psi} C(Q) \longrightarrow 0$$, donde i es la inyección canónica y el Ψ es el epimorfismo canónico; es trivialmente exacta

ii) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & T(V) \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Por propiedad universal del algebra tensorial $\exists!\ \phi : T(V) \longrightarrow A$ homomorfismo de algebras tal que $\phi \circ i = f$

Tenemos así:

$\Psi : T(V) \longrightarrow C(Q)$, epiyección canónica

$\Phi : T(V) \longrightarrow A$, homomorfismo de K-algebras y

sabemos que existe $f_Q : C(Q) \longrightarrow A$, homomorfismo de K-algebras, con $f_Q \circ \Psi = \Phi$ ssi $\operatorname{Ker} \Psi \subseteq \operatorname{Ker} \Phi$.

Demostremos ahora que f_Q es único.

Supongamos que existe $f'_Q : C(Q) \longrightarrow A$ tal que

$$f'_Q \circ i_Q = f = f_Q \circ i_Q$$

o bien

$$f'_Q \circ \psi = \phi = f_Q \circ \psi$$

Sea x un elemento cualquiera de $C(Q)$.

Como ψ es epiyectiva se deduce que $f'_Q = f_Q$. Luego f_Q es único.

4.2 Algebras graduadas

Definición: Sea Δ monoide abeliano con neutro 0 . Se llama graduación de tipo Δ sobre G (grupo abeliano) a una familia $(G_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ de subgrupos de G tal que $G = \bigoplus_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$.

Δ se llama conjunto de los grados de G , $x \in G$ se llama homogéneo de grado λ si $x \in G_\lambda$ $(gr\,x = \lambda \Leftrightarrow x \in G_\lambda)$

Definición: Sea Δ monoide abeliano y sea A anillo graduado de tipo Δ (es decir existe $(A_\lambda)\lambda \in \Delta$ graduación sobre el grupo aditivo A^+ de A) . Sea E un A-algebra; se dice que una graduación $(E_\lambda)\ \lambda \in \Delta$ sobre el grupo aditivo E^+ de E es compatible con la estructura de A-algebra de E si es compatible con la estructura de A-módulo y de anillo de E , es decir:

donde

$$C^{(0)}(Q) = T^{(0)}(V)/I(Q)$$

$$C^{(1)}(Q) = T^{(1)}(V)/I(Q)$$

y podemos así tomar $C(Q)$ como un álgebra Z_2-graduada.

4.3 Caracter funcional de C.

Recordemos las definiciones de Funtor y Categoría.

Definición: Una categoría $\mathcal{C}$ está formada por:

a) Una clase $Obj(\mathcal{C})$ cuyos elementos se llaman objetos de $\mathcal{C}$.

b) Para todo $A,B \in Obj(\mathcal{C})$ un conjunto $\mathcal{C}(A,B)$ cuyos elementos se llaman los morfismos de A en B, y se denotan por $f:A \longrightarrow B$. Escribiremos $Mor(\mathcal{C}) = \bigcup_{A,B \in Obj(\mathcal{C})} \mathcal{C}(A,B)$ y llamaremos a $Mor(\mathcal{C})$ la clase de todos los morfismos de la categoría.

c) Para todo $A,B,C \in Obj(\mathcal{C})$ una función

$$\mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) \longrightarrow \mathcal{C}(A,C)$$
$$(f,g) \longmapsto g \circ f\ .$$

Notada composición, con las siguientes propiedades:

i) $(A,B) \neq (A',B') \Longrightarrow \mathcal{C}(A,B) \cap \mathcal{C}(A',B') = \phi$

ii) $\forall A \in Obj(\mathcal{C}), \exists 1_A : A \longrightarrow A$ tal que $\forall f : B \longrightarrow A,\ g : A \longrightarrow C$ se tiene $1_A \circ f = f,\ g \circ 1_A = g$

iii) $[f : A \longrightarrow B\ ,\ g : B \longrightarrow C\ ,\ h : C \longrightarrow D]\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\ .$

La categoría $\mathcal{D}$ está dada por:

i) Sus objetos son K-algebras Z_2-graduadas

ii) Sus morfismos son homomorfismos de K-algebras $(f : A \longrightarrow B)$ que respetan la Z_2-graduación.

Así, si $C : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ está dado por

i) $C_o : Obj(\mathcal{C}) \longrightarrow Obj(\mathcal{D})$ definida por .....

$$(V, Q) \longrightarrow C(V, Q) = C^{o}(V) \oplus C^{(1)}(V)$$

ii) $C_m : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{D})$, tal que $C_m f = Cf$, definida por $C(f(\bar{x})) = \overline{f(x)}$ $\forall x \in T(V)$,

tenemos que si $f : (V, Q) \longrightarrow (V', Q')$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ entonces:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_Q"'] & V' \arrow[d, "i_{Q'}"] \\
C(V) \arrow[r, "Cf"] & C(V')
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir:

$$Cf \circ i_Q = i_{Q'} \circ f \ .$$

Demostraremos que C así definido es un funtor.

Veamos primero que Cf está bien definida, es decir Cf no depende del elemento de la clase escogido.

ii) $C(1_{(V,Q)}) = 1_{C(V,Q)}$ en efecto :

$$C(1_{(V,Q)})(\bar{x}) = \overline{1_{(V,Q)}(x)} = i_Q 1_V(x) = i_Q(x) = \bar{x} = 1_{C(V,Q)}(\bar{x})$$

iii) $C(g \circ f) = C(g) \circ C(f)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[d, "i_Q"'] & V' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_{Q'}"'] & V'' \arrow[d, "i_{Q''}"'] \\
C(V) \arrow[r, "Cf"] \arrow[rr, bend right, "Cg \circ Cf"'] & C(V'') \arrow[r, "Cg"] & C(V'')
\end{tikzcd}$$

pues $Cg(Cf(\bar{x})) = Cg(\overline{f(x)}) = \overline{g(f(x))} = C(g \circ f)(\bar{x})$

Además por unicidad de la propiedad universal se tendrá que

$C : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor.

4.4 Producto tensorial graduado.

En la categoría $\mathcal{C}$ podemos definir una suma como sigue:

$$(V,Q) + (V', Q') = (V \oplus V', Q \oplus Q')$$

donde $V \oplus V'$ es la suma directa del espacio V con el espacio V' y

$$(Q \oplus Q')(v, v') = Q(v) + Q'(v') \qquad (v \in V, \; v' \in V')$$

Sean M, N dos módulos Z_2-graduados sobre K. Por $M \hat{\otimes} N$ denotamos el producto tensorial de M y N graduado como sigue:

Demostración:

Tenemos:

$$(f(x_1, x_2))^2 = (i_Q(x_1)\hat{\otimes}1)^2 + (1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2))^2$$

en efecto

$$(f(x_1, x_2))^2 = (i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1)^2 + (i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1)(1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2)) +$$

$$+ (1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2))(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1) + (1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2))^2 .$$

Ahora

$$(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1)(1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2)) = (-1)^{\omega(1)\omega(1)}(i_{Q_1}(x_1)\otimes i_{Q_2}(x_2)) =$$

$$= i_{Q_1}(x_1)\otimes i_{Q_2}(x_2)$$

pues $\omega(1) = 0$ ya que $1 \in C^0(V)$

además

$$(1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2))(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1) = (-1)^{\omega(i_{Q_2}(x_2))\,\omega(i_{Q_1}(x_1))}(i_{Q_1}(x_1)\otimes i_{Q_2}(x_2))$$

Ahora $\omega(i_Q(x)) = 1 \quad \forall x \in V$ (pues $i_Q(x) = x + I(Q) \in C^1(V)\ \forall x \in V$)

$$\therefore\ (1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2))(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1) = (-1)(i_{Q_1}(x_1)\otimes i_{Q_2}(x_2))$$

De donde tendremos que:

$$(f(x_1, x_2))^2 = (i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1)^2 + (1\hat{\otimes}i_{Q_2}(x_2))^2$$

Ahora

$$(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}1)^2 = (-1)^{\omega(1)\omega(i_{Q_1})}(i_{Q_1}(x_1)\cdot i_{Q_1}(x_1)\otimes 1\cdot 1).$$

$$= (i_{Q_1}(x_1))^2\hat{\otimes}1$$

$$
\begin{aligned}
\theta\,\tilde{f}(x_1, x_2) &= \theta(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} i_{Q_2}(x_2)) \\
&= \theta(i_{Q_1}(x_1)\hat{\otimes}\, i_{Q_2}(x_2)) \\
&= \psi_1(i_{Q_1}(x_1) \cdot \psi_2(i_{Q_2}(x_2)) \\
&= (x_1, 0) \cdot (0, x_2) \\
&= (x_1, x_2) \quad .
\end{aligned}
$$

Luego $\tilde{f}$ es un isomorfismo de algebras Z_2-graduadas.

Q. E. D.

5.2 Teorema de Dimensión de $C(V, Q)$

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, car $K \neq 2$. Entonces la función $i_Q: V \longrightarrow C(V, Q)$ es inyectiva y así se puede identificar V con $i_Q(V)$. Si $(e_j)^n_{j=1}$ es una base de V entonces los productos $e_{j_1}, \ldots e_{j_2} (1 \leq j_1 < j_k \leq n)$ y el elemento 1 (1) forman una base de $C(V, Q)$. En particular $\dim C(V) = 2^{\dim V}$

Demostración: Demostremos primero que $\dim C(V) \leq 2^{\dim V}$, para lo que basta demostrar que (1) es un sistema de generadores de $C(V)$. Bastará demostrar que cualquier otra clase que no es de la forma (1) es una combinación lineal de alguna de estas clases. Para ello basta demostrar que $e_j \otimes e_j \in k\,\bar{1}$ para todo j, y que (2) $\overline{e_j \otimes e_k} \in K(\overline{e_k \otimes e_j}) + k\bar{1} (1 \leq k \leq j \leq n)$, pues si esto es así cualquier otra clase que no tenga la forma antes señalada se reduce a la forma (1) reemplazando un factor $\bar{e}_j \otimes \bar{e}_j$ por un múltiplo escalar de $\bar{1}$ y permutando los $\bar{e}_i$ gracias a la relación (2)

Demostremos ahora que $\dim C(V, Q) \geq 2^{\dim V}$.

Haremos la demostración por inducción sobre la dimensión de V .

Sea $\dim V = 1$ y sea e un elemento que genere V . Para demostrar que $\bar{1}$, $\bar{e}$, donde $\bar{e} = i_Q(e)$, es libre.

Sea entonces:

$$\alpha 1 + \beta e \in I(Q) \quad ; \quad \text{p. d.} \quad \alpha = \beta = 0 \quad .$$

Veamos entonces como son los elementos de $I(Q)$.

Sabemos que $I(Q)$ es el ideal bilátero generado por los $\lambda^2(e \otimes e - Q(e)1)$ $(\lambda \in K)$, es decir por $e \otimes e - Q(e)1$, en el caso en que $\dim V = 1$. De donde se tendrá que los elementos de $I(Q)$ son de la forma (3) $\sum_{i \cdot j} t^i(e \otimes e - Q(e)r^j$, donde la suma es finita y t^i, r^j son elementos de $T(V)$ de grado i y j respectivamente.

Ahora bien, una componente de grado i en $T(V)$ tendrá la forma:
$\lambda_1 e \otimes \lambda_2 e \otimes \ldots\ldots \otimes \lambda_i e = \lambda'_i e^{\otimes i}$ donde $\lambda'_i = \lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_i$.
Puede sin embargo, que los componentes de grado i en (3) sean más de una, es decir sea de la forma
$\lambda_1 e^{\otimes i} + \lambda_2 e^{\otimes i} + \ldots + \lambda_n e^{\otimes i} = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j) e^{\otimes i} = \lambda'_i e^{\otimes i}$ donde
$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \lambda'_i$

Así un $t^i(e \otimes e - Q(e)r^j$ tendrá la forma
$\lambda'_i e^{\otimes i}(e \otimes e - Q(e))\mu'_j e^{\otimes j} = \lambda'_i \mu'_j e^{\otimes i+j}(e \otimes e - Q(e))$.
De donde la forma (3) se puede reducir a la forma:

(4) $\sum_{i=0}^{n} \rho'_i e^{\otimes i}(e \otimes e - Q(e))$,

Que es en definitiva la forma de los elementos de $I(Q)$.

Luego $\bar{1}, \bar{e}$ son l. i.

es decir $\dim C(V, Q) = 2$.

Supongamos ahora el resultado válido para $\dim V = n - 1$.

Sea entonces (V, Q) no degenerado de dimensión n . Dado Q existe base de V que llamaremos $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ tal que

$$Q(\Sigma\lambda_i e_i) = \Sigma a_i \lambda^2_i$$

es decir podemos escribir Q de la siguiente forma:

$$Q = a_1 \xi_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_i \xi_i^2$$

donde $\xi_i(v) = \lambda_i$ para $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ $(1 \leq i \leq n)$

Podemos así descomponer la forma cuadrática Q en dos formas cuadráticas Q_1 y Q_{n-1} definidas sobre V_1 y V_{n-1} (que definiremos más adelante) de la siguiente forma:

$$Q_1 = a_1 \xi_1^2$$

$$Q_{n-1} = \sum_{i=2}^{n} a_i \xi_i^2$$

En esta forma obtenemos:

$$Q = Q_1 \perp Q_{n-1} \quad .$$

A partir de la base antes señalada podemos descomponer V en

$$V = V_1 \perp V_{n-1}$$

$$\text{Ker } i_Q = \{x \in V \ldots \mid i_Q(x) = \bar{0}\}$$

Ahora bien como $x \in V$ se tiene

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

y así

$$i_Q(x) = i_Q\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i i_Q(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$$

Luego

$$i_Q(x) = \bar{0} \implies \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = \bar{0} .$$

Pero por lo demostrado anteriormente los $\bar{e}_i$ son linealmente independiente.

Luego: $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1 \ldots n$;

es decor $x = 0$

y así $\text{Ker } i_Q = 0$

Con lo cual hemos demostrado que i_Q es inyectiva.

Q. E. D.

5.3 Signo de C(V)

Definición: Si existe un elemento ε en $C(V)$ de grado cero con $\varepsilon^2 = 1$ (resp. $\varepsilon^2 = -1$) y $\varepsilon x = -x\varepsilon$ $(x \in V)$, decimos que el signo de $C(V)$ es positivo.

(resp. negativo) y escribimos $\text{sign } C(V) = 1$ (resp. $\text{sign } C(V) = -1$)

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon e_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon\, \varepsilon_j$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (-1)^{p+q-1} e_i\, \varepsilon + \sum_{j=1}^{q} (\beta_j)(-1)^{p+q-1} \varepsilon_j \varepsilon \text{(por(1)(2)(3))}$$

$$= \Big(- \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_j \Big)\varepsilon \quad \text{(pues } p+q \text{ es par)}$$

$$= - x\, \varepsilon .$$

De donde ε anticonmuta con $x \in \mathbb{R}^{p+q}$.

Ahora analicemos ε^2

$$\varepsilon^2 = e_1 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q e_1 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$$

$$= - e_1 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{q-1} e_1 \varepsilon_q e_2 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$$

$$= (-1)^{p+q-1} e_1 e_1\, e_2 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q e_2 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$$

$$= (-1)^{p+q-1} (-1) e_2 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q e_2 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$$

$$= (-1)^{p+q-1} (-1)^{p+q-2} (-1) e_2 e_2 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q e_3 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$$

$$= (-1)^{p+q-1} (-1)^{p+q-2} (-1)^2 e_3 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q e_3 \dots e_p \varepsilon_1 \dots \varepsilon_q$$

$$= \dots$$

$$= (-1)^{(p+q-1) + (p+q-2) + \dots (p+q-p)} (-1)^p (-1)^{q-1} \underbrace{\varepsilon_1 \varepsilon_1}_{1} \varepsilon_2 \dots \varepsilon_q \varepsilon_2 \dots \varepsilon_q$$

$$= \dots$$

$$= (-1)^p (-1)^{(p+q-1)+(p+q-2)+ \dots +1}$$

$$= (-1)^N$$

con $N = p + (p + q - 1) + (p + q - 2) + \dots + 1 = p + \frac{1}{2} (p+q-1)(p+q) =$

$= \frac{1}{2}[2p + (p + q)^2 - p - q] = \frac{1}{2} [(p + q)^2 + (p - q)] \equiv \frac{1}{2}(p-q) \mod 2.,$

pues se supone $p + q$ par

Así
$$\operatorname{sign} C^{p,q} = (-1)^{\frac{1}{2}(p-q)}$$

Consideremos el conjunto

$$E = \{ \chi(e_i) \mid e_i \in \mathbb{R}^{p+q} \} \cup \{ \chi(\varepsilon_i) \mid \varepsilon_i \in \mathbb{R}^{p+q} \} \quad .$$

Si E genera $C^{q,p}$ se tendrá demostrado que $\tilde{\chi}$ es epiyectiva pues se tendrá que la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^{p+q}$ forma un conjunto de generadores de $C^{p,q}$ $(\tilde{\chi}(i_Q(e_i)) = \chi(e_i))$, puesto que sabemos que el conjunto de generadores de $C^{q,p}$ está formado por 1 y los elementos de la forma $e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_k} \varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_s}$ con $j_1 < j_2 < \ldots j_k$, $i_1 < \ldots < i_s$, $k + s \leq p + q$.

Demostremos entonces que E genera $C^{q,p}$. Para ello bastará demostrar que cualquier elemento de la forma e_i ó ε_j se puede obtener a partir de los elementos de E .

Veamos como obtenemos e_i .

Se tiene: para $i \neq j$

$$\begin{aligned} \chi(e_i) \cdot \chi(e_j) &= (e_1 \ldots \hat{e}_i \ldots e_p \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q)(e_1 \ldots \hat{e}_j \ldots e_p \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_q) \\ &= \pm e_i e_j \quad . \end{aligned}$$

lo cual se obtiene por permutaciones, sabiendo que $e_k e_k = -1$, $\varepsilon_s \varepsilon_s = 1$

Igualmente se deduce que:

$$\chi(e_i)\, \chi(\varepsilon_j) = \pm e_i \varepsilon_j$$

$$\chi(\varepsilon_i)\, \chi(\varepsilon_j) = \pm \varepsilon_i \varepsilon_j \; .$$

Ahora

$$(v\otimes 1)^2 = v^2\otimes 1 = Q^{p,q}(v)(1\otimes 1) \qquad (\text{pues } v^2 - Q^{p,q}(v)1 = 0)$$

y $\quad (\varepsilon\otimes v')^2 = (\varepsilon\otimes v')(\varepsilon\otimes v') = \varepsilon^2\otimes v'^2 = 1\otimes Q^{p',q'}(v') = Q^{p',q'}(v')1\otimes 1$.

$\therefore \quad (\mathfrak{Z}(v, v'))^2 = (Q^{p,q}(v) + Q^{p',q'}(v'))(1\otimes 1) = (Q^{p,q}\oplus Q^{p',q'})(v,v')(1\otimes 1)$

$\therefore$ Por propiedad universal del algebra de Clifford existe un único homomorfismo.

$$\tilde{\mathfrak{Z}} : C^{p,q}\hat{\otimes}C^{p',q'} \longrightarrow C^{p,q}\otimes C^{p',q'}$$

Pero además $\tilde{\mathfrak{Z}}$ es tal que envía el conjunto de generadores $v\hat{\otimes}1$ y $1\hat{\otimes}v'$ sobre el conjunto de generadores $v\otimes 1$, $\varepsilon\otimes v'$ $\quad (v \in \mathbb{R}^{p+q}, v' \in \mathbb{R}^{p'+q'})$

$\therefore \quad \tilde{\mathfrak{Z}}$ es un epimorfismo y por igualdad de dimensiones de los espacios en juego, $\tilde{\mathfrak{Z}}$ es un isomorfismo.

Q. E. D.

5.6 <u>Proposición.</u>

Si sign $C^{p,q} = -1$ entonces $C^{p,q}\hat{\otimes}C^{p',q'} \cong C^{p,q}\otimes C^{q',p'}$

<u>Demostración:</u>

Definamos la siguiente función $\mathbb{R}$-lineal:

$$\mathfrak{C} : \mathbb{R}^{p+q}\oplus\mathbb{R}^{p'+q'} \longrightarrow C^{p,q}\otimes C^{q',p'}$$

$$(v, v') \longmapsto (v\otimes 1) + (\varepsilon\otimes v')$$

donde $\varepsilon \in C^{p,q}$, $\omega(\varepsilon) = 0$, $\varepsilon^2 = -1$ y $-x\varepsilon = \varepsilon x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{p+q}$

Se tiene que:

$$(\mathfrak{C}(v, v'))^2 = (v\otimes 1)^2 + (v\otimes 1)(\varepsilon\otimes v') + (\varepsilon\otimes v')(v\otimes 1) + (\varepsilon\otimes v')^2$$

$(a_{ij}) \in A(n)$ es congruente con 0 módulo 2 si $a_{ij} \in A^0$ para $i+j$ par y $a_{ij} \in A^1$ para $i+j$ impar.

$(a_{ij}) \in A(n)$ es congruente con 1 mod 2 si $a_{ij} \in A^1$ para $i+j$ par y $a_{ij} \in A^0$ para $i+j$ impar.

Entonces si $(a_{ij}) \equiv 0 \bmod 2$ se tendrá una matriz de la siguiente forma :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \ldots\ldots & 1 \\ 1 & - & - & - & \\ 0 & - & - & - & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 1 & 0 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Donde se señala por 0 un elemento de grado 0 en A y por 1 un elemento de grado 1 en A. (Si n es par). Si n es impar basta agregar otra fila y otra columna a la matriz anterior.

En forma análoga $(a_{ij}) \equiv 1 \bmod 2$ si

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{pmatrix}$$

Ahora para $\alpha \in A(n)$, $a \in A^n$ ambos homogéneos, se tiene

$\omega(\alpha a) \equiv (\omega(\alpha) + \omega(a)) \bmod 2$

donde αa es el producto usual de una matriz por un vector.

párrafo anterior; entonces:

$$\mathbb{R}(n)\hat{\otimes} A \cong \mathbb{R}(n)\otimes A$$

como algebras graduadas.

Demostración :

Si escojemos una base para $\mathbb{R}^n$, podemos identificar $\mathbb{R}(n)$ con $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Se tendrá así que tanto $\mathbb{R}(n)\otimes A$ como $\mathbb{R}(n)\hat{\otimes} A$ operan sobre los elementos de $\mathbb{R}^n\otimes A$ de la siguiente forma:

$$(\alpha\hat{\otimes} a)(x\otimes c) = \alpha(x)\otimes ac \qquad (\alpha \in \mathbb{R}(n) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n;\ a,c \in A)$$

Definamos:

$$\psi : \mathbb{R}(n)\hat{\otimes} A \longrightarrow \mathbb{R}(n)\otimes A \qquad \text{por}$$

$$\psi(\alpha\hat{\otimes} a)(x\otimes c) = (-1)^{\omega(a)\omega(x)}\alpha(x)\otimes ac \qquad (x \in \mathbb{R}^n \text{ homogéneo, } c \in A)$$

ψ es claramente $\mathbb{R}$-lineal. Además ψ es epiyectiva pues envía los generadores $\alpha\hat{\otimes} a$ $(\alpha \in \mathbb{R}(n),\ a \in A)$ de $\mathbb{R}(n)\hat{\otimes} A$ sobre generadores de $\mathbb{R}(n)\otimes A$.

Demostremos que

$$\psi((\alpha\hat{\otimes} a)(\beta\hat{\otimes} b))(x\otimes c) = [\psi(\alpha\hat{\otimes} a)\psi(\beta\hat{\otimes} b)](x\otimes c)$$

para todo descomponible $x\otimes c \in \mathbb{R}^n\otimes A$, x homogéneo

$$[\psi(\alpha\hat{\otimes} a)\psi(\beta\otimes b)](x\otimes c) = \psi(\alpha\hat{\otimes} a)\,[(-1)^{\omega(b)\omega(x)}\beta(x)\otimes bc\,]$$

$$= (-1)^{\omega(b)\omega(x)+\omega(a)\omega(\beta x)}\alpha\beta(x)\otimes abc$$

Luego $\exists !\ f : \mathbb{R}(n) \otimes A \longrightarrow A(n)$ $\mathbb{R}$-lineal tal que $f \circ \psi = \psi'$.
Basta ver que f es epiyectiva ya que

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(n) \otimes A = n^2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} A = \dim_{\mathbb{R}} A(n) \ .$$

f es epiyectivo:

Sea $(a_{ij}) \in A(n)$ y e_{ij} base canónica de $\mathbb{R}(n)$.

El elemento $s = e_{11} \otimes a_{11} + \dots + e_{1n} \otimes a_{1n} + \dots + e_{nn} \otimes a_{nn} \in \mathbb{R}(n) \otimes A$
es tal que $f(s) = (a_{ij})$.

$\therefore$ f es un isomorfismo lineal.

Q. E. D.

6.3.3. Corolario

Se tienen los isomorfismos de algebras graduadas.

$$\mathbb{R}(n) \hat{\otimes} \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$$

$$\mathbb{R}(n) \hat{\otimes} A \cong A(n)$$

Demostración:

Por el lema 6.2.1 sabemos que

$$\mathbb{R}(n) \hat{\otimes} \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m)$$

Pero $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$ (se demuestra en forma análoga a Prop. 6.2.2)

$\therefore$ $\mathbb{R}(n) \hat{\otimes} \mathbb{R}(m) \cong \mathbb{R}(nm)$.

Además por lema 6.2.1.

$$\mathbb{R}(n) \hat{\otimes} A \cong \mathbb{R}(n) \otimes A$$

y por prop. 6.2.2

$$\mathbb{R}(n) \otimes A \cong A(n)$$

$\therefore$ $\mathbb{R}(n) \hat{\otimes} A \cong A(n)$.

Q. E. D.

6.3.2 Algebras $C^{p,q}$ con $p > 0$ y $q > 0$

Por la proposición 5.1 podemos ver que

$$
\begin{aligned}
C^{p+n,\, q+n} &\cong C^{p,q} \hat{\otimes} C^{n,n} \\
&\cong C^{p,q} \hat{\otimes} \mathbb{R}(2^n) && \text{(por prop. 6.3.1)} \\
&\cong C^{p,q}(2^n) && \text{(por corolario 5.3.3 con } A = C^{p,q})
\end{aligned}
$$

donde $C^{p,q}(2^n)$ designa el algebra de todas las matrices $2^n \times 2^n$ con coeficientes en $C^{p,q}$.

Podemos así determinar todas las algebras $C^{p,q}$ con $p > 0$ y $q > 0$ a partir de las algebras $C^{p,0}$ y $C^{0,q}$, ya que

$$C^{p,q} \cong C^{(p-1)+1,\ (q-1)+1} \cong C^{p-1,\ q-1}(2) \quad .$$

6.3.3 Algebras $C^{p,q}$ $p = 0$ ó $q = 0$

Como signo $C^{4,0} = 1$ ya que existe $\varepsilon = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4$ tal que $\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{8}{2}(4-0)} = 1$, se tendrá por proposición 5.4
$C^{4,0} \cong C^{0,4}$

Por consiguiente:

$$
\begin{aligned}
C^{8,0} &\cong C^{4,0} \hat{\otimes} C^{4,0} && \text{(prop. 5.1)} \\
&\cong C^{4,0} \hat{\otimes} C^{0,4} && \text{(prop. 5.4)} \\
&\cong C^{4,4} && \text{(prop. 5.1)} \\
&\cong \mathbb{R}(2^4) = \mathbb{R}(16) && \text{(prop. 6.3.1)} \quad ;
\end{aligned}
$$

y $C^{0,8} \cong C^{8,0}$ $\mathbb{R}(16)$,

y así:

Como sign $C^{0,2} = -1$ (ya que $\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{1}{2}(0-2)} = -1$) , tenemos por proposición 5.6.

$$C^{0,2} \otimes C^{p,0} \cong C^{0,2} \hat{\otimes} C^{0,p}$$
$$\cong C^{0,2+p} \qquad \text{(prop. 5.1)} .$$

Podemos así calcular:

$$C^{0,3} \cong C^{0,2+1} \cong C^{0,2} \otimes C^{1,0} \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2) \quad ,$$
$$C^{0,4} \cong C^{0,2+2} \cong C^{0,2} \otimes C^{0,2} \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(2) \quad .$$

Ahora como sign $C^{2,0} = -1$ (por el mismo razonamiento anterior),

$$C^{2,0} \otimes C^{0,p} \cong C^{2,0} \hat{\otimes} C^{p,0} \cong C^{2+p,0} \quad .$$

Podemos así obtener:

$$C^{3,0} \cong C^{2,0} \otimes C^{0,1} \cong \mathbb{H} \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \quad ,$$
$$C^{4,0} \cong C^{2,0} \otimes C^{0,2} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H}(2) \quad .$$

Ahora bien, sign $C^{4,0} = 1$.

Se tendrá:

$$C^{4,0} \hat{\otimes} C^{p,0} \cong C^{4,0} \otimes C^{p,0} \cong C^{p+4,0} \quad .$$

Además,

$$C^{4,0} \cong C^{0,4}$$

Luego

$$C^{p+4,0} \cong C^{0,4} \otimes C^{p,0} \cong C^{p,4} \cong C^{0+p,(4-p)+p} \cong C^{0,4-p}(2^p)$$

Podemos así encontrar,

$$C^{5,0} \cong C^{1+4,0} \cong C^{0,4-1}(2) \cong C^{0,3}(2) \cong \mathbb{C}(2)(2) \cong \mathbb{C}(4)$$

ii) En forma análoga si

$p \geq q$.

$$C^{p,q} \cong C^{q+8m+n,q} \cong C^{n,0}(16^m)(2^p) \qquad (0 \leq n \leq 7)$$

Calculemos ahora como ejemplo

1.) $C^{9,11} = C^{9,9+3} \cong C^{0,2}(2^9) \cong \mathbb{R}(2)(2^9) = \mathbb{R}(2^{10})$

2.) $C^{1,30} = C^{1,1+8\cdot 3+5} \cong C^{0,5}(16^3)(2) \cong (H(2) \oplus H(2))(16^3)(2)$

$\cong H(16^3 \cdot 4) \oplus H(16^3 \cdot 4) = H(2^{14}) \oplus H(2^{14})$

3.) $C^{27,15} = C^{15+8+4,15} \cong C^{4,0}(16)(2^{15}) \cong H(2)(16)(2^{15}) = H(2^{19})$

= = = = * - - - -

CAPITULO II

K - TEORIA CLASICA

§ 1. Fibrados Vectoriales.

1.1. Definiciones.

Definición: Un triple $\xi = (E, p, X)$, donde E y X son espacios topológicos y $p : E \longrightarrow X$ es una aplicación contínua, se llama un fibrado vectorial real (complejo) ssi:

1) Para todo $x \in X$, $p^{-1}(x)$ tiene la estructura de espacio vectorial real (complejo) de dimensión finita (que escribiremos a menudo de la forma Ex) .

2) Existe un recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de X y una familia $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de homeomorfismos con

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times E_\alpha \longrightarrow p^{-1}(U_\alpha)$$

tal que $p\psi_\alpha(x, v) = x$ para todo $(x, v) \in U_\alpha \times E_\alpha$

Nota: 1) La familia $\{(U_\alpha , \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ se llama trivialización local de ξ .

2) Al espacio vectorial $p^{-1}(x) = Ex$ lo llamaremos la fibra encima de x .

3) Si para todo $x \in X$ la dimensión de $p^{-1}(x)$ es n (fijo) diremos que $\xi = (E, p, X)$ es un n-fibrado vectorial real (complejo) sobre X .

$$f \otimes f' : U \otimes U' \longrightarrow V \otimes V' \qquad \text{definida por}$$

$$(f \otimes f')(u \otimes u') = f(u) \otimes f'(u')$$

Se define así una aplicación

$$\mathrm{Hom}(U, V) \times \mathrm{Hom}(U', V') \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \otimes U', V \otimes V')$$

que es continua.

<u>Definición:</u> Sean $\xi = (E, p, X)$ y $\xi' = (F, q, X)$ dos fibrados vectoriales, definimos el fibrado $\xi \otimes \xi'$ de la siguiente forma:

El espacio que anotaremos por $E \otimes F$ será :

$$E \otimes F = \dot{\bigcup_{x \in X}} (E_x \otimes F_x) \quad .$$

La función $p \otimes q : E \otimes F \longrightarrow X$ envía cada elemento de $E_x \otimes F_x$ en x .

Se verifica sin mucha dificultad que $\xi \otimes \xi' = (E \otimes F, p \otimes q, X)$ es un fibrado vectorial sobre X , que será llamado fibrado suma de Whitney (o suma directa) de ξ y ξ'

1.2.3. <u>Fibrado inducido.</u>

Dado un fibrado vectorial (E, p, X) y una función continua $f : Y \longrightarrow X$ (Y espacio topológico), se puede definir un fibrado vectorial sobre Y de la siguiente forma:

Sea

$$F = \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\}$$

<u>Notación:</u> Si denotamos el fibrado (E, p, X) por ξ , el fibrado inducido (F, π_1, Y) lo denotaremos por $f^*(\xi)$

1.4 <u>Fibrados equivalentes.</u>

<u>Definición:</u> Dos fibrados sobre X, (E_1, p_1, X) y (E_2, p_2, X) son equivalentes ssi existe un homeomorfismo $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ tal que $p_2 \circ \phi = p_1$, y que su restricción a cada fibra $p_1^{-1}(x)$ sea un isomorfismo de espacios vectoriales.

Se tendrá así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\sim", "\phi"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Esta relación es claramente una relación de equivalencia sobre el conjunto de fibrados vectoriales sobre X .

<u>Notación:</u> Denotaremos por $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}(X)$ al conjunto de clases de equivalencia de fibrados vectoriales reales sobre X ($\mathfrak{B}_{\mathbb{C}}(X)$ en el caso de fibrados vectoriales complejos) y por $\mathfrak{B}_{K}(X)$ al conjunto de clases de equivalencia de K-fibrados vectoriales.

<u>Proposición:</u> Sea $f : Y \longrightarrow X$ una función continua. Si ξ y ξ'

Observación: Vemos así que una función continua $f : Y \longrightarrow X$ induce una función $f^* : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$.

§ 2. Los Grupos $K(X)$ y $\tilde{K}(X)$

2.1 El Semi grupo $\mathcal{B}(X)$

Al conjunto de clases de equivalencia de fibrados vectoriales $\mathcal{B}(X)$ se le puede dar una estructura de semi-grupo abeliano si definimos la siguiente ley de composición interna:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X) &\longrightarrow \mathcal{B}(X) \\ (\xi, \xi') &\longmapsto \xi \oplus \xi' \end{aligned}$$

donde $\xi \oplus \xi'$ es la suma de Whitney.

Nota: El neutro de este semi-grupo es el fibrado trivial de fibra nula.

Además si $f : Y \longrightarrow X$ es continua, la función inducida $f^* : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(Y)$ es un homomorfismo de semi-grupos.

2.2. Construcción de $K(X)$

Sea $S = (\mathcal{B}(X), \oplus)$

Asociado a $\mathcal{B}(X)$ podemos construir el grupo de Grothendieck $G(\mathcal{B}(X)) = K(X)$.

Construyamos ahora el siguiente funtor contravariante K.

2.3. Definición de $\tilde{K}(X)$

Sea x_0 punto base de X, sea $i : \{x_0\} \longrightarrow X$ inclusión canónica y $c : X \longrightarrow \{x_0\}$ función constante.

Como $(c \circ i)(x_0) = x_0$ entonces $i^* \circ c^*$ es el homomorfismo idéntico de $K(X)$, luego i^* es un epimorfismo.

Definamos:

$$\tilde{K}(X) = \ker i^*$$

llamado grupo reducido de $K(X)$.

Obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(X) \longrightarrow K(X) \underset{c^*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} K(\{x_0\}) \longrightarrow 0$$

de donde

$$K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus K(\{x_0\})$$

Por otro lado todo fibrado vectorial sobre x_0 es trivial, es decir, es de la forma $(\{x_0\} \times \mathbb{R}^n, p, \{x_0\})$.

Podemos así asociar a un n-fibrado sobre x_0 el entero positivo n , obteniendo así un isomorfismo de semigrupos de $\mathfrak{B}(x_0)$ sobre el semi-grupo Z^+ .

Luego $K(\{x_0\}) \cong Z$

$$\xi - \eta = \xi \oplus \eta' - \eta \oplus \eta' = \xi \oplus \eta' - \theta^n = \xi \oplus \eta' - i^*(\xi \oplus \eta') = \alpha\,(\xi \oplus \eta')$$

$\therefore\ \alpha$ es epiyectiva.

Sean ahora ξ^n y η^m dos fibrados vectoriales tal que
$\xi - \eta = i^*(\xi) - i^*(\eta)$ (es decir $\alpha(\xi) = \alpha(\eta)$) .

Existe entonces, por definición del grupo de Grothendieck, fibrado ρ tal que $\xi \oplus \theta^m \oplus \rho$ y $\eta \oplus \theta^n \oplus \rho$ son isomorfos.

Sea ρ' el fibrado vectorial tal que $\rho \oplus \rho'$ y θ^q son isomorfos entonces $\xi \oplus \theta^n \oplus \theta^q = \xi \oplus \theta^{m+q}$ y $\eta \oplus \theta^n \oplus \theta^q = \eta \oplus \theta^{n+q}$ son isomorfos y así ξ y η son establemente equivalentes.

Inversamente

Si $\xi \oplus \theta^r$ y $\eta \oplus \theta^s$ son isomorfos tendremos:
$\alpha(\xi \oplus \theta^r) = \alpha(\eta \oplus \theta^s)$ y como $\alpha(\rho \oplus \theta^q) = \alpha(\rho)$ para todo entero positivo q , tenemos:

$$\alpha(\xi) = \alpha(\eta) \quad .$$

Q. E. D.

Notar que gracias a este Teorema tenemos que si todo fibrado vectorial ξ sobre X tiene un suplementario η tal que $\xi \oplus \eta$ es un fibrado trivial (hipótesis que se cumple, por ejemplo, si X es compacto), entonces $\widetilde{K}(X)$ se puede describir con clases de equivalencia estable.

$$\xi \cong \theta^{k-1} \oplus \eta_{k-1}$$

con η_{k-1} fibrado de dimensión 1 .

Se tendrá entonces que todo fibrado vectorial de dimensión k será isomorfo a la suma de fibrados vectoriales triviales con un fibrado de dimensión 1 .

Así nuestro problema de determinar $\mathcal{B}(S^1)$ se nos ha reducido a determinar el conjunto de clases de equivalencia estables de fibrados vectoriales de dimensión uno que se pueden construir sobre S^1 .

4.2. Conjunto de clases de equivalencia estable de fibrados de dimensión uno sobre S^1 .

4.2.1 Fibrado trivial y fibrado cinta de Möbius.

i) Fibrado trivial: El primer fibrado de dimensión uno que podemos construir sobre S^1 es el fibrado trivial.

$$\theta = (S^1 \times \mathbb{R}, p, S^1)$$

con $p : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ definimos por $p(s, t) = s$.

Notar además que si $\theta = (S^1 \times \mathbb{R}^n, p_1, S^1)$ y $\theta_2 = (S^1 \times \mathbb{R}^m, p_2, S^1)$ entonces θ_1 es establemente equivalente con θ_2 .

Definamos:

$$M = [0,1] \times \mathbb{R} \Big/ \sim_M \ .$$

b) Construcción de $q : M \longrightarrow S^1$

Podemos redefinir S^1 de la siguiente forma: En $[0, 1]$ consideremos la siguiente partición:

1.) Las clases de la forma $\{a\}$ con $0 < a < 1$ que anotaremos por $[\,a\,]$.

2.) La clase $[\,0]$ que será formada por $\{0, 1\}$ (es decir $a \in [0]$ ssi $a = 0$ ó $a = 1$) .

Esta partición determina una relación de equivalencia en $[0, 1]$ que anotaremos por $\sim_{S^1}$, y tendremos que

$$S^1 = [0, 1] \Big/ \sim_{S^1}$$

Tenemos así el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times \mathbb{R}} \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\exists\psi"'] & {[0,1] \times \mathbb{R}/\sim_M = M} \arrow[d, dashed, "\exists q"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "t_2"'] & {[0,1]/\sim_{S^1} = S^1}
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u>

Recordemos que una sección es una función contínua $s : X \longrightarrow E$ tal que $p \circ s = id_X$, con $\xi = (E, p, X)$ fibrado vectorial sobre X. Una sección nunca nula es una tal función $s : X \longrightarrow E$ tal que

$$s(x) \neq 0 \in p^{-1}(x) \quad , \forall x \in X$$

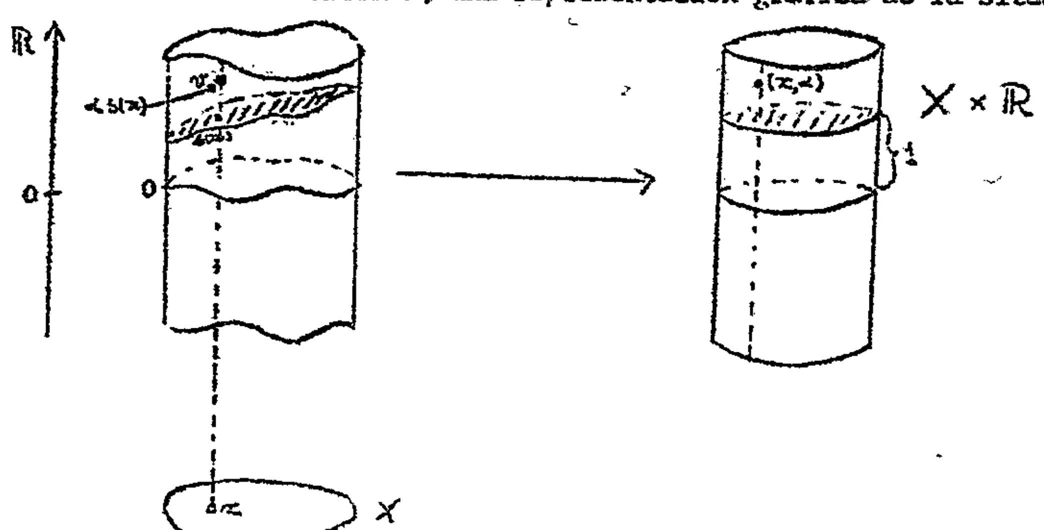
$\Longrightarrow$) Sea entonces $\theta = (E, p, X)$ un fibrado vectorial trivial. Luego existe un isomorfismo ψ de E sobre $X \times \mathbb{R}$.

Sea $s : X \longrightarrow E$ definida por $s(x) = \psi^{-1}(x,b)$ con b fijo y $b \neq 0$; se tendrá que s es contínua, $p \circ s = id_X$ y $s(x) \neq 0$, $\forall x \in X$.

$\Longleftarrow$) Sea $\xi = (E, p, X)$ un fibrado vectorial sobre X tal que $s : X \longrightarrow E$, sección nunca nula;

p. d. $E \cong X \times \mathbb{R}$.

Construyamos nuestro isomorfismo, veamos, para introducir la idea del isomorfismo; una representación gráfica de la situación:



$\psi(v) = \psi(v') \Longleftrightarrow (x,\alpha) = (x', \alpha')$

$\therefore \quad x = x' \qquad y \; \alpha = \alpha'$

Como $x = x'$ entonces están en la misma fibra : $p^{-1}(x) = p^{-1}(x')$;
como $\alpha = \alpha'$ entonces $v = \alpha s(x) = \alpha' s(x') = v'$

$\therefore \quad v = v'$

ii) ψ es epiyectiva :

En efecto, sea $(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}$. Entonces $\exists \, v \in E$ tal que $v \in p^{-1}(x)$ y $v = \alpha s(x)$ (pues $p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}$) .

$\therefore \; \psi(v) = (x,\alpha)$.

De donde tenemos que ψ es biyectiva.

2) ψ es continua

El espacio total E es localmente trivial.

Es decir existe un recubrimiento de X por abiertos U de X tales que $\pi^{-1}(U)$ sea homeomorfo a $U \times \mathbb{R}$; sea $h : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}$ homeomorfismo. Podemos demostrar que ψ es continuo si demostramos que $\psi' : U \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ es continua, donde $\psi' = \psi \circ h^{-1}$ es decir $\psi = \psi' \circ h$.

Si aceptamos este hecho, se tendrá: h contínuo, ψ' contínuo entonces ψ es contínuo.

Demostremos entonces que ψ' es contínuo.

Preguntémos ahora como es la imagen inversa de un elemento de la sub-base de $\mathbb{R}$, es decir un intervalo abierto $]a,b[$. Será una región de $U \times \mathbb{R}$ encerrada por $as'(U)$ y $bs'(U)$ pero donde éstas dos se excluyen, anotémosla por $]\,as'(U), bs'(U)[$.

Gráficamente podemos representarla de la siguiente forma:

Demostremos entonces que $]as'(U), bs'(U)[$ es abierto en $U \times \mathbb{R}$. Sea $v' \in\,]as'(U), bs'(U)[$ cualquiera, y sea $v' = \alpha'(s'(y)) = (y,\beta)$. Como s' es contínua, podemos encontrar en U una vecindad compacta U_y , tan chica como se quiera, tal que $y \in U_y$ de tal forma que el plano $U_y \times \beta$ no corta a $as'(U)$ ni a $bs'(U)$.

Sea γ = inf. de la distancia de $U_y \times \beta$ a $as'(U)$ y a $bs'(U)$; γ es estrictamente mayor que cero y se tendrá así que $U_y \times\ ]\beta + \gamma , \beta - \gamma[$ es un abierto que contiene a v' y que está totalmente contenido en $]\,as'(U), bs'(U)[$.

$\therefore$ ψ'_2 es contínua.

Q. E. D.

Nota: Este resultado se puede generalizar para fibrados vectoriales de dimensión k sobre X .

Tenemos en resumen que μ no es isomorfo a θ, es decir, en $\mathcal{B}(S^1)$ existen al menos dos clases de isomorfismos de dim 1, a saber la clase del fibrado trivial θ y la clase de la cinta de Möbius.

4.3 $\widetilde{K}(S^1) \cong Z/2Z$

4.3.1 Consideraciones preliminares.

Consideremos las siguientes categorías:

Top: Objetos de Top son los espacios topológicos.

Morfismos de Top son las funciones continuas

$\mathfrak{D}$: Objetos: Conjuntos de componentes conexas de un espacio Topológico.

Morfismos: Funciones $f_\#$ que entramos a definir ahora:

Si $f:X \longrightarrow Y$ es un morfismo de Top, definamos

$f_\#$: { componentes conexos de X} $\longrightarrow$ {componentes conexos de Y} tal que lleva la componente conexa de $x \in X$ a la componente conexa de $f(x)$ en Y .

Podemos construir un funtor, que llamaremos π_0' , de la siguiente forma:

π_0 : Top $\longrightarrow \mathfrak{D}$

$\pi_{0_{Obj}}$: Obj Top $\longrightarrow$ Obj $\mathfrak{D}$ tal que $\pi_0(X) =$ {componentes conexos de X} , En efecto, sabemos que al intercambiar dos filas o columnas de una matriz de $k \times k$, cambia el signo del determinante, así considerando la función que produce tal cambio, esta será el homeomorfismo que deseamos (que envía matrices ortogonales en matrices ortogonales).

Tendremos así que bastará ver sólo las componentes conexas, de las matrices de determinante $+1$. Ya que en virtud del homeomorfismo las matrices de det -1 tendrán las "mismas" componentes conexas.

Demostraremos que toda matriz de det $+1$ se puede transformar continuamente en la matriz idéntica.

El grupo $SO(3,\mathbb{R})$, como ya se sabe, corresponde al grupo de rotaciones en torno a un eje, es decir, toda matriz de $SO(3,\mathbb{R})$ se puede representar como una rotación R_α en un ángulo α.

Así una matriz $A \in SO(3,\mathbb{R})$ puede ser expresada, con respecto a un sistema de coordenadas convenientes, como una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A(\alpha)$$

Notar además, que en este sistema de coordenadas la matriz idéntica está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ 0 & \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = A(0)$$

<u>Corolario:</u> $\widetilde{K}(S^1) \cong Z_2$

<u>Demostración:</u> Por el teorema anterior se tiene:

$$\widetilde{K}(S^1) \cong \pi_0(O(n)), \text{ para } n \geq 3, \text{ pero } \pi_0(O(n)) \cong Z_2$$

Luego $\widetilde{K}(S^1) \cong Z_2$

4.4 <u>Generadores de</u> $\widetilde{K}(S^1)$

En lo que sigue demostraremos que μ (fibrado cinta de Möbius) no es establemente equivalente con θ (fibrado trivial).

En 4.2.2. se demostró que μ y θ no son equivalentes. Recordemos que dos fibrados vectoriales son establemente equivalentes ssi existe fibrado trivial θ tal que $\xi \oplus \theta^n \cong \psi \oplus \theta^n$.

Por último ya se había visto que todo fibrado de dimensión k es isomorfo a un fibrado $\theta^{k-1} \oplus \eta_{k-1}$ con η_{k-1} fibrado de dimensión uno. Por esto, basta demostrar sólo que μ y θ no son equivalentemente estables, para demostrar que ellos generan $\widetilde{K}(S^1)$, en vista de 4.3.

4.4.1. $\mu \oplus \theta$ <u>no es isomorfo a</u> $\theta \oplus \theta$

<u>Lema:</u> $\mu \oplus \theta$ no es isomorfo a $\theta \oplus \theta = \theta^2$.

<u>Demostración:</u> Supongamos que $\mu \oplus \theta \cong \theta^2$ y sea $\psi: \mu \oplus \theta \longrightarrow \theta^2$ tal isomorfismo.

Consideremos ahora los siguientes morfismos:

designaremos por $(\theta \oplus \theta)_p$ es un plano, pues es de dimensión dos.

Ahora bien, veamos que pasa en el fibrado cuociente:

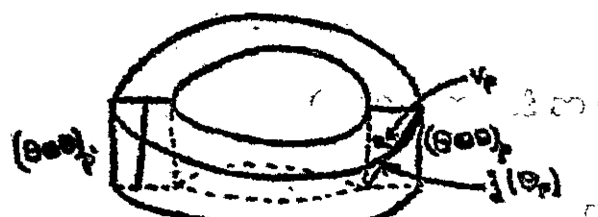
i) Tenemos que $j(\theta)$ es un sub-fibrado de $\theta \oplus \theta$ isomorfo (vía j) al fibrado trivial θ .

ii) Luego, en el fibrado cuociente tenemos sobre cada punto un fibrado de dimensión uno, a saber $j(\theta)_p$ que denotaremos también $j(\theta_p)$.

iii) La recta $j(\theta_p)$ depende continuamente de p .

iv) Como $j(\theta)$ es fibrado trivial no es isomorfo a la cinta de Möbius. Así el encontrar la sección no nula se reduce a demostrar que existe un vector v_p en cada fibra $(\theta \oplus \theta)_p$ que no coincide nunca con la recta $j(\theta_p)$ y que varía continuamente con p .

Gráficamente nuestra situación es la siguiente:



El lema demostró que la proposición es válida para $n = 1$

Supongámos válido para $n = k$;

por demostrar $\mu \oplus \theta^{k+1}$ no es isomorfo a $\theta \oplus \theta^{k+1}$

Supongamos $\mu \oplus \theta^{k+1} \cong \theta \oplus \theta^{k+1}$

En forma análoga a la demostración del lema se pueden considerar los morfismos i canónica y $j = \psi \circ i$, y obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \theta \oplus \theta^{k+1} \arrow[r] & \theta \oplus \theta^{k+1}/j(\theta) \cong \theta \oplus \theta^{k} \\
\theta \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "i"'] & & \\
 & \mu \oplus \theta^{k} \oplus \theta \arrow[uu, "\cong", "\psi"'] \arrow[r] & \mu \oplus \theta^{k+1}/\theta \cong \mu \oplus \theta^{k} \arrow[uu, "\exists"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

El problema se reduce, igual que en el caso anterior, a demostrar que $\theta \oplus \theta^{k+1}/j(\theta) \cong \theta \oplus \theta^{k}$

Como $j(\theta)$ es trivial admite una sección no nula, además es de dimensión uno; obtenemos entonces, para todo $p \in S^1$, un vector unitario v_p^1, $v_p^1 \in j(\theta)_p$ dependiendo continuamente de p.
Consideremos las siguientes secciones

$$s^i : S^1 \longrightarrow \theta^{k+1} \qquad (i = 1, \dots, k+1) ,$$
$$p \longmapsto v_p^i$$

de tal forma que $\{v_p^i\}_{i=1}^{k+1}$ formen una base de $(\theta \oplus \theta^{k+1})_p$ para todo $p \in S^1$.

Además como

$$K(S^1) \cong \tilde{K}(S^1) \oplus Z ,$$

se tiene

$$K(S^1) \cong Z/2Z \oplus Z .$$

Aquí hemos hecho el estudio de $\tilde{K}(S^1)$; sin embargo a manera de resumen daré los resultados de $\tilde{K}(S^n)$ para $0 \leq n \leq 4$. Se puede demostrar este resultado aplicando el Teorema citado en 4.3.3 y con un estudio más completo de los grupos de homotopía π_n y de los grupos $SO(m,R)$ (ver [3]).

Los resultados son los siguientes, tomando como cuerpo base los reales.

$$\tilde{K}(S^0) = Z$$
$$\tilde{K}(S^1) = Z_2$$
$$\tilde{K}(S^2) = Z_2$$
$$\tilde{K}(S^3) = 0$$
$$\tilde{K}(S^4) = Z .$$

nita, además $Q_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática ; podemos así construir el algebra de Clifford asociada a $p^{-1}(x)$ y a Q_x, denotada $C(p^{-1}(x), Q_x)$.

Sea ahora

$$E(n,Q) = \coprod_{x \in X} C(p^{-1}(x), Q_x) \quad (\coprod \text{ indica unión disjunta})$$

La proyección $p(n,Q)$; $E(n,Q) \longrightarrow X$ es tal que

$$p(n,Q)(C(p^{-1}(x), Q_x) = x$$

Se verifica sin dificultad que (con la topología natural sobre el espacio total) se obtiene un fibrado vectorial $C(n,Q) = (E(n,Q), p(n,Q), X)$.

Además se tiene una noción natural de $C(n,Q)$ - módulo a saber:

Un fibrado vectorial $\xi = (E,p,X)$ sobre X, cuyas fibras anotaremos por E_x, provisto de una familia de endomorfismos A_i, B_j de ξ ($1 \leq i \leq p$; $1 \leq j \leq q$) tales que

$$A_i^2 = -Id_E$$

$$B_j^2 = Id_E$$

$$A_i B_j + B_j A_i = 0$$

$$A_i A_j + A_j A_i = 0 \qquad i \neq j$$

$$B_i B_j + B_j B_i = 0 \qquad i \neq 0$$

Los objetos de $\mathscr{C}^{p,q}(X)$ son los $C^{p,q}$-módulos, es decir, fibrados vectoriales ξ con $p+q$ endomorfismos A_i, B_j que cumplen las relaciones

$$
* \begin{cases}
A_i^2 = -\,Id_\xi \\
B_j^2 = Id_\xi \\
A_i B_j + A_j A_i = 0 \\
A_i A_j + A_j A_i = 0 & i \neq j \\
B_i B_j + B_j B_i = 0 & i \neq j
\end{cases}
$$

Los morfismos de $\mathscr{C}^{p,q}(X)$ son los morfismos $f : \xi \longrightarrow \xi'$ de $\mathscr{C}(X)$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r, "f"] \arrow[d, "A_i"'] & \xi' \arrow[d, "A'_i"] \\
\xi \arrow[r, "f"] & \xi'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r, "f"] \arrow[d, "B_j"'] & \xi' \arrow[d, "B'_j"] \\
\xi \arrow[r, "f"] & \xi'
\end{tikzcd}
$$

La categoría $\mathscr{C}^{p,q}(X)$ se llama la categoría de $C^{p,q}$-módulos de base X.

1.4 <u>**Observación**</u>

$\mathscr{C}^{p,q}(X)$ es una categoría de Banach.

Proveemos cada espacio de morfismos de $\mathscr{C}^{p,q}(X)$ de la topología compacto abierto, de hecho, es posible introducir una

Si $\bar{\xi}$ es un objeto de $\mathcal{E}^{p,q}(X)$, entonces $\chi(\bar{\xi}) = \overline{\xi \oplus \xi}$
donde $\xi \oplus \xi$ es la suma de Whitney de dos copias de ξ.
Los endomorfismos están definidos por:

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & -A_i \end{pmatrix} \qquad i = 1, \ldots, p;$$

$$\bar{B}_j = \begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & -B_j \end{pmatrix} \qquad j = 1, \ldots, q;$$

$$\bar{A}_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & -Id_\xi \\ Id_\xi & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{B}_{q+1} = \begin{pmatrix} 0 & Id_\xi \\ Id_\xi & 0 \end{pmatrix}$$

y se tiene que estos endomorfismos verifican las relaciones que definen la categoría $\mathcal{E}^{p+1,\,q+1}(X)$.

En efecto:

$$(\bar{A}_i)^2 = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & -A_i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A_i^2 & 0 \\ 0 & A_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Id_\xi & 0 \\ 0 & -Id_\xi \end{pmatrix}$$

$$= -Id_{\xi\oplus\xi} \qquad i = 1, \ldots, p$$

$$\bar{A}_{p+1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -Id_\xi \\ Id_\xi & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -Id_\xi & 0 \\ 0 & -Id_\xi \end{pmatrix} = -Id_{\xi\oplus\xi}$$

Proposición.

El funtor χ es una equivalencia de categorías de Banach, (es decir χ posee una casi inversa χ' tal que la aplicación inducida $\mathcal{L}^{p+1,q+1}(\chi)(\mathcal{S},\mathcal{S}') \to \mathcal{L}^{p,q}(\chi)(\mathcal{S},\mathcal{S}_,)$ es lineal y continua.

Demostración: Construyamos la casi inversa χ'.

Para ello consideremos el funtor de olvido $0^{a,b} : \mathcal{L}^{p+a,q+b}(\chi) \to \mathcal{L}^{p,q}(\chi)$, es decir, un funtor tal que dado $\mathcal{S}$ con $p+a$ anti involuciones y $q+b$ involuciones, $0^{a,b}(\mathcal{S})$ es tal que tiene las mismas p anti involuciones y q involuciones dejando a un lado las a anti involuciones y b involuciones restantes.

Sea entonces $\mathcal{S}$ un $C^{p+1,q+1}$-módulos y sean A_i, B_j $i = j, \ldots, p+1$; $j = 1, \ldots, q+1$ los endomorfismos que definen tal estructura.

Llamemos $\eta = B_{q+1} A_{p+1}$

Se puede comprobar con facilidad que η es una involución de $0^{1,1}\mathcal{S}$.

Definamos χ'

$$\chi' \mathcal{S} = \mathcal{S}^{\bullet} = \operatorname{Ker} \frac{1-\eta}{2}$$

$$\chi' f = f/\mathcal{S}^{\bullet}$$

Luego

$$\mathcal{C}^{p,q+8}(X) \approx \mathcal{C}^{p+4,q+4}(X) \approx \mathcal{C}^{p+8,q}(X)$$

Ahora de 2.1 se tiene $\mathcal{C}^{p+1,q+1}(X) \approx \mathcal{C}^{p,q}(X)$

Luego

$$\mathcal{C}^{p+n,q+n}(X) \approx \mathcal{C}^{p,q}(X)$$

y así se tiene el resultado.

§ 3. Graduaciones

Definición: Sea $\mathcal{S}$ un $C^{p,q}$-módulo. Llamaremos graduación de $\mathcal{S}$ un automorfismo de cuadrado igual $Id_{\mathcal{S}}$ que anti-conmuta con las operaciones de $C^{p,q}$.

Llamaremos $grad^{p,q}(\mathcal{S})$ al conjunto de graduaciones de $\mathcal{S}$ y será un subespacio de $\mathcal{C}(X)(\mathcal{S},\mathcal{S})$.

Ahora si B es una graduación de $\mathcal{S}$, uno dirá que es un $C^{p,q}$-módulo graduado. Notar además, que si B es una graduación de $\mathcal{S}$ se tendrán las siguientes relaciones:

$$B^2 = Id_{\mathcal{S}}$$

$$B\,B_j + B_jB = 0$$

$$B\,A_i + A_iB = 0$$

Se obtiene así que uno puede considerar un $C^{p,q}$-módulo graduado $\mathcal{S}$ como un $C^{p,q+1}$ módulo definiendo $B_{q+1} = B$.

$\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists \tau, \tau'$ triples elementales tales que $\sigma \oplus \tau = \sigma' \oplus \tau'$

Definimos:

$$K^{p,q}(X,Y) = \Gamma^{p,q}(X,Y)/\sim .$$

Notar que si $Y = \phi$ podemos hacer la misma construcción y obtener $K^{p,q}(X,\phi)$, lo que anotaremos por $K^{p,q}(X)$.

Ahora si $f : (X,Y) \longrightarrow (X'.Y')$ es una función continua, el funtor $f^* : \mathcal{G}^{p,q}(X') \longrightarrow \mathcal{G}^{p,q}(Y')$ induce un homomorfismo $K^{p,q}(f) : K^{p,q}(X', Y') \longrightarrow K^{p,q}(X,Y)$.

Por último la clase de equivalencia de un triple σ la anotaremos por $d(\sigma)$.

4.2. $K^{p,q}(X,Y)$ <u>es un grupo.</u>

<u>Proposición:</u> Se tiene la igualdad:

$$d(\xi, B^1, B^2) + d(\xi, B^2, B^3) = d(\xi, B^1, B^3) ;$$

en particular $K^{p,q}(X,Y)$ es un grupo, el neutro son los triples elementales y el opuesto de $d(\xi, B^1, B^2)$ es $d(\xi, B^2, B^1)$.

<u>Demostración:</u> Probemos primero que el neutro está formado por la clase de triples elementales.

Demostremos que los triples elementales están en una misma clase. En efecto:

Si τ y τ' triples elementales cualquiera, entonces clara-

Ahora $B^1 \oplus B^2 \oplus B^3$, salvo permutaciones es el mismo que $B^2 \oplus B^3 \oplus B^1$. Debemos entonces, encontrar una homotopía $h : [0,1] \longrightarrow grad^{p,q}(\S \oplus \S \oplus \S)$. Recordemos que los endomorfismos de $\S \oplus \S \oplus \S$ los podemos describir como matrices de 3×3 con coeficientes endomorfismos (de la misma forma que lo hacíamos para los endomorfismos de $\S \oplus \S$ que describíamos con matrices de 2×2).

Consideremos la siguiente matriz $M \in End(\S \oplus \S \oplus \S)$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y sea M_t un camino de matrices ortogonales 3×3 de origen la identidad y extremo M.

Es decir:

$$M_t : [0,1] \longrightarrow O(3) \quad \text{tal que}$$
$$M_t(0) = Id$$
$$M_t(1) = M$$

Entonces se tiene:

$$h : [0,1] \longrightarrow grad^{p,q}(\S \oplus \S \oplus \S)$$
$$t \longmapsto M^t \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & B^3 \end{pmatrix} M_t^{-1}$$

Notar además que $K^{p,q}$ es un funtor de la categoría de espacios topológicos y funciones continuas en la categoría de grupos con morfismos, homomorfismos de grupos.

4.3. Equivalencias de los grupos $K^{p,q}(X,Y)$

4.3.1. Proposición: Los funtores $\chi : \mathcal{C}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+1,q+1}(X)$ definidos en 2.1. y el isomorfismo $\mathcal{C}^{p+4,q}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^{p,q+4}(X)$ visto en 2.2. inducen los morfismos:

$$K^{p,q}(X,Y) \xrightarrow{\sim} K^{p+1,q+1}(X,Y)$$
$$K^{p+4,q}(X,Y) \xrightarrow{\sim} K^{p,q+4}(X,Y)$$

Demostración: Demostraremos $K^{p,q}(X,Y) \xrightarrow{\sim} K^{p+1,q+1}(X,Y)$

Para ello basta demostrar $\Gamma^{p,q}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \Gamma^{p+1,q+1}(X,Y)$, pues si esto es así por paso al cociente tenemos el isomorfismo anterior.

Construyamos primero el siguiente funtor:

$$F : \mathcal{C}^{p,q}_{grad.}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^{p+1,q+1}_{grad.}(X)$$

$$F_0(\xi, B^1, B^2) = (\chi\xi, \chi B^1, \chi B^2) .$$

Demostremos de inmediato que $(\chi\xi, \chi B^1, \chi B^2) \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{C}^{p+1,q+1}_{grad.}(X)$

Sabemos que $\chi\, \xi = \xi \otimes \xi \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{C}^{p+1,q+1}(X)$

y que $\chi(B^i) = \begin{pmatrix} B^i & 0 \\ 0 & B^i \end{pmatrix}$ $(i = 1,2)$ son morfismos de $\mathcal{C}^{p+1,q+1}(X)$, ya que B^i, por ser graduación, es un morfismo de $\mathcal{C}^{p,q}(X)$.

i) $\psi : (\S, B^1_\S, B^2_\S) \longrightarrow (\tau, B^1_\tau, B^2_\tau) \Longrightarrow F(\psi) : F(\S, B^1_\S, B^2_\S) \to F(\tau, B^1_\tau, B^2_\tau)$

ii) $F(1_{(\S, B^1_\S, B^2_\S)}) = 1_{F(\S, B^1_\S, B^2_\S)}$

iii) Si $\psi : (\S, B^1_\S, B^2_\S) \longrightarrow (\tau, B^1_\tau, B^2_\tau)$

$\gamma : (\tau, B^1_\tau, B^2_\tau) \longrightarrow (\rho, B^1_\rho, B^2_\rho)$

entonces: $F(\gamma \circ \psi) = F(\gamma) \circ F(\psi)$.

En efecto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\S, B^1_\S, B^2_\S) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dd, bend right=60, "\gamma \circ \psi"'] & (\chi\S, \chi B^1_\S, \chi B^2_\S) \arrow[d, "F(\psi)"] \arrow[dd, bend left=60, "F(\gamma \circ \psi)"] \\
(\tau, B^1_\tau, B^2_\tau) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & (\chi\tau, \chi B^1_\tau, \chi B^2_\tau) \arrow[d, "F(\gamma)"'] \\
(\rho, B^1_\rho, B^2_\rho) \arrow[r] & (\chi\rho, \chi B^1_\rho, \chi B^2_\rho)
\end{tikzcd}$$

El problema se reduce a demostrar que:

$$\chi(\gamma' \circ \psi') = \chi(\gamma') \cdot \chi(\psi') \quad , \quad \ldots$$

En efecto:

$$\chi(\gamma' \circ \psi') = \begin{pmatrix} \gamma' \circ \psi' & 0 \\ 0 & \gamma' \circ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi' & 0 \\ 0 & \psi' \end{pmatrix} = \chi(\gamma') \cdot (\psi')$$

$\therefore$ F es una aplicación funtorial.

Demostración:

Como $n = p - q$ entonces $n + 8 = p - q + 8 = p + 4 - (q - 4)$

$\therefore\ K^{n+8}(X,Y) = K^{p+4-(q-4)}(X,Y) = K^{p+4,\ q-4}(X,Y)$.

Pero por 4.3.1 existe isomorfismo functorial.

$K^{n+8}(X,Y) = K^{p+4,q-4}(X,Y) \xrightarrow{\cong} K^{p,q-4+4}(X,Y) = K^{p,q}(X,Y) = K^{n}(X,Y)$

$\therefore\ K^{n+8}(X,Y) \cong K^{n}(X,Y)$.

4.4. Conclusiones

Llama la atención que el isomorfismo de periodicidad antes señalado no implica el isomorfismo tradicional de periodicidad de Bott, que afirma:

$K(S^8X) \cong K(SX)$ donde SX indica la suspención de X, que definiremos más adelante.

Sólo se habrá demostrado esto cuando se haya comprobado que los grupos $K^n(X)$ son elementos de una teoría de cohomología reducida, en una manera que entraremos a precisar ahora:

Sea $\mathcal{C}$. la categoría formada por complejos celulares con punto base y funciones contínuas que preservan el punto base como morfismos. Entenderemos por complejos celulares finitos con punto base, espacios topológicos constructibles a partir de un punto pegando un número finito de células, de la manera usual en topología algebraica.

b) $\delta^n(X) : \tilde{H}^{n+1}(SX) \longrightarrow \tilde{H}^n(X)$ es un isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}_1$.

c) Si $(X,A) \in \mathcal{C}^2$ y $* \in A$, $A \subset X$, entonces la sucesión

$$\tilde{H}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{H}^n(p)} \tilde{H}^n(X) \xrightarrow{\tilde{H}^n(i)} \tilde{H}^n(A)$$

es exacta para todo n, donde

$\bar{p} : X \longrightarrow X/A$ es la función que lleva A a un punto .

e $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Tendremos así que en una teoría de cohomología reducida

$$H^{n+1}(SX) \cong H^n(X)$$

Por iteración tendremos

$$H^{n+8}(S^8X) \cong H^n(X) .$$

Ahora bien, se sabe que los grupos $K^n(X)$ forman una teoría de cohomología reducida (cf[4]), se tendrá por consiguiente:

$$K^{n+8}(S^8X) \cong K^n(X)$$

Pero por teorema de Bott visto anteriormente

$$K^n(S^8X) \cong K^{n+8}(S^8X) \cong K^n(X) \quad \forall n,$$

en especial si $n = 0$

$$K^0(S^8X) \cong K^0(X) .$$

Sea ahora ξ un fibrado vectorial en $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}^{0,0}(X)$; todo elemento idempotente de aut ξ es una graduación de ξ. En particular tenemos que $+1$ y -1, donde 1 señala la identidad en aut ξ son dos graduaciones y por lo tanto $d(\xi, +1, -1) \in K^{0,0}(X)$.

5.2. Teorema.

Teorema: $K(X)$ es isomorfo a $K^{0,0}(X)$.

Demostración: Definamos la siguiente función:

$$s: K(X) \longrightarrow K^{0,0}(X) \quad \text{por :}$$

$$s(d(\xi,\eta)) = d(\xi, +1, -1) - d(\eta, +1, -1) \quad ,$$

s está bien definida, en efecto:

Sea $d(\xi,\eta) = d(\xi', \eta')$; es decir $(\xi,\eta) \sim (\xi', \eta')$ entonces existen $\varepsilon, \varepsilon'$ tal que $(\xi \oplus \varepsilon, \eta \oplus \varepsilon) = (\xi' \oplus \varepsilon', \eta' \oplus \varepsilon')$ en $\Gamma \times \Gamma$, luego

$$\xi \oplus \varepsilon = \xi' \oplus \varepsilon'$$
$$\eta \oplus \varepsilon = \eta' \oplus \varepsilon'$$

Si consideramos en ε y ε' la involución 1, se tendrá que los triples $(\varepsilon, 1, 1)$ y $(\varepsilon', 1, 1)$ son triples elementales. Pero como $\xi \oplus \varepsilon = \xi' \oplus \varepsilon'$ se tendrá:

$$(\xi \oplus \varepsilon, 1 \oplus 1, -1 \oplus 1) \cong (\xi' \oplus \varepsilon', 1 \oplus -1, 1 \oplus 1),$$

es decir

$$(\xi, 1, -1) \oplus (\varepsilon, 1, 1) \cong (\xi', 1, -1) \oplus (\varepsilon', 1, 1) \quad .$$

Dejamos al lector verificar que r está bien definida. Tenemos:

$$s \circ r(d(\xi, B^1, B^2)) = s(d(\mathrm{Ker}(1 - B^1), \mathrm{Ker}(1 - B^2))$$
$$= d(\mathrm{Ker}(1 - B^1), 1, -1) - d(\mathrm{Ker}(1-B^2), 1, -1) .$$

Pero se sabe que:

$$d(\xi, B^1, B^2) = d(\xi, B^1, -1) + d(\xi, -1, B^2)$$

Además en $\Gamma^{0,0}(X)$ se tienen las siguientes relaciones:

$$(\xi, B^1, -1) = (\mathrm{Ker}(1 - B^1), 1, -1) \oplus (\mathrm{Ker}(1 + B^1), -1, -1)$$
$$(\xi, -1, B^2) = (\mathrm{Ker}(1 - B^2), -1, 1) \oplus (\mathrm{Ker}(1 + B^2), -1, -1)$$

y se tendrá así:

$$s \circ r(d(\xi, B^1, B^2)) = d(\xi, B^1, -1) + d(\xi, -1, B^2)$$
$$= d(\xi, B^1, B^2) .$$

Luego

$$s \circ r = \mathrm{Id}$$

Además:

$$r \circ s(d(\xi,\eta)) = r(d(\xi, 1, -1) - d(\eta, 1, -1))$$
$$= r(d(\xi, 1, -1)) + r(d(\eta, -1, 1))$$
$$= d(\mathrm{Ker}_\xi(1, -1), \mathrm{Ker}_\xi(1 + 1)) + d(\mathrm{Ker}_\eta(1+1), \mathrm{Ker}_\eta(1-1)) ;$$

Ahora bien,

$\mathrm{Ker}_\xi(1 - 1)$ = Núcleo de la función nula sobre ξ = ξ

$\mathrm{Ker}_\xi(1 + 1)$ = Núcleo de la función 2Id sobre ξ = 0

$\mathrm{Ker}_\eta(1 - 1) = \eta$

$\mathrm{Ker}_\eta(1 + 1) = 0$

es decir

$$r \circ s(d(\xi,\eta)) = d(\xi, 0) + d(0,\eta)$$
$$= d(\xi,\eta)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Husemoller Dale "Fiber Bundles" Edit. Mc Graw-Hill 1966
Cap. 8 prop. 1.1

[2] Husemoller Dale "Fiber Bundles" Cap. N° 7 N°4.

[3] Husemoller Dale "Fiber Bundles" Cap. N° 8 Teorema 5.1.

[4] Zisman M. K-Théorie élémentaire N° 2
Revista: Lectures notes in Mathematics N°136
año 1970 - Artículo II .

[5] Dyer Eldon "Cohomology Theories" Edit. Benjamin año 1969.

[6] Hilton Peter "General Cohomology Theory and K-Theory"
London Mathematical Society Notes Seires 1.
Año 1971

[7] Löffler P. "The Clifford Algebras $C^{p,q}$".
Revista: Lectures Notes in Mathematica N°136
Año 1970 - Artículo I.

[8] Poenaru V. "Cours Elementaire de K-Theory "
Publications Mathematiques D'Orsay
Año 1967 - 1968 .

- - * - -