LA FORMULA DE PLANCHEREL EN EL GRUPO DE HEISENBERG.

Tesis de Grado para optar al título de Licenciado en Ciencias con mención en Matemáticas.

Profesores Guías: Manuel Elgueta y Jorge Soto

Alumno : Guido Ahumada

- 1979 -

Agradezco a los Profesores
Manuel Elgueta y Jorge Soto por la
notable paciencia con que me guiaron

INTRODUCCION

El problema de encontrar una familia de operadores $\{P_i, Q_j\}_{1\leq i,j\leq n}$, en un espacio de Hilbert V, que satisfagan las relaciones:

$$[Q_i, Q_j] = 0 = [P_i, P_j]$$

$$[P_i, Q_j] = \frac{h}{2\pi i} \delta_{ij} I_V$$

llamadas "Relaciones de Conmutación de Heisenberg", donde $\delta_{i,j}$ es el delta de Kroeneker y h la constante de Planck, es la formulación matemática de un problema de la mecánica cuántica, elaborada por Werner Heisenberg, aproximadamente en 1923.

Encontrar tales P_i, Q_j significa encontrar las representaciones de una R-álgebra de matrices $L(H_n)$ en $\mathrm{End}_C(V)$, donde V es un espacio de Hilbert separable y $L(H_n)$ está definida por generadores X_i, Y_j, Z;

$$1 \leq i, j \leq n,$$

tales que:

$$[X_i, X_j] = 0 = [Y_i, Y_j] \quad y \quad [X_i, Y_j] = Z\delta_{ij}.$$

Este problema conduce a considerar las representaciones del grupo de Lie H_n correspondiente al álgebra de Lie $L(H_n)$. El grupo H_n es llamado el grupo de Heisenberg.

El proposito de éste trabajo es generalizar la transformada de Fourier clásica sobre R^+

$$\mathcal{F}(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_R f(x)e^{ixs}dx, \quad (f \in L^1(R);\ s \in R)$$

y la correspondiente fórmula de inversión:

$$f(x) = \int \hat{f}(s)e^{-isx}ds$$

al grupo no conmutativo $H_1 = H$.....

Se define el operador:

$$\mathcal{F}(f)(\pi) = \hat{f}(\pi) = \int_H f(s)\pi_s ds$$

del espacio de la representación π, como la transformada de Fourier de $f \in L^1(H)$ evaluada en π, representación unitaria e irreductible de H; se busca una fórmula análoga a la inversión clásica en R y se ve que éste problema junto con el Teorema de Plancherel, que dice que $\mathcal{F}$ es una isometría L^2, son consecuencias de la expansión de la Delta de Dirac δ_e, en el origen de H, en integral de los trazos de las representaciones (unitarias e irreductibles de H):

$$\delta_e(\cdot) = \int_{\hat{H}} \mathrm{Tr}\ \pi.\ d^P\mu(\pi),$$

respecto de cierta medida d^P sobre $\hat{H}$.

I N D I C E

-- * --

CAPITULO I

EL GRUPO DE HEISENBERG

El grupo de matricas de la forma $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: (x,y,z)$ $(x,y,z \in \mathbb{R})$, con la multiplicación de matrices, es llamado el grupo de Heisenberg y se anota por H.

De ahora en adelante trabajaremos con H asimilado a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bajo la identificación hecha arriba.

La multiplicación de dos elementos (x,y,z), (x',y',z') de H se traduce como:

$$(x,y,z)\cdot(x',y'z') = (x+x',\ y+y',\ z'+xy'+z) \quad ;$$

el elemanto neutro es:

$$e = (0,0,0) \quad ;$$

y el elemento inverso de (x,y,z) es:

$$(x,y,z)^{-1} = (-x,\ -y,\ xy-z) \ .$$

Notemos además que H es un grupo no conmutativo (por ejemplo $(1,0,0)(0,1,0) = (1,1,1) \neq (1,1,0) = (0,1,0)(1,0,0)$, cuyo centro $Z(H)$ está formado por los elementos $(0,0,z)$ $(z \in \mathbb{R})$.

I.- RELACIONES ENTRE LOS GENERADORES DE H.

Notemos en primer lugar que para $(x,y,z) \in H$ se tiene:

$$(x,y,z) = (0,y,0)(x,0,0)(0,0,z)$$

o también (1)

$$(x,y,z) = (x,0,0)(0,y,0)(0,0,z-xy)$$

Pongamos

$$X(x) = (x,0,0) \quad ,$$
$$Y(y) = (0,y,0) \quad , \qquad (x,y,z \in \mathbb{R}) \quad ;$$
$$Z(z) = (0,0,z) \quad .$$

Se obtienen las siguientes relaciones:

$R_1)$ $Z(z)X(x) = X(x)Z(z)$

$R_2)$ $Z(z)Y(y) = Y(y)Z(z)$

$R_3)$ $X(x)Y(y) = Y(y)X(x)Z(xy)$ $(\Longleftrightarrow Z(xy) = X^{-1}(x)Y^{-1}(y)X(x)Y(y))$

$R_4)$ $Z(z+z') = Z(z)Z(z')$

$R_5)$ $X(x+x') = X(x)X(x')$

$R_6)$ $Y(y+y') = Y(y)Y(y')$

$(x,y,z,x',y',z' \in \mathbb{R})$

De R_3 y (1) se deduce que los elementos de la forma $Y(y)$, $X(x)$ $(y,x \in \mathbb{R})$ generan el grupo H. Además toda otra relación entre estos generadores se deduce de las relaciones de más arriba; puesto que cualquier producto finito de elementos $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ se puede reducir a uno de la forma $Y(y)X(x)Z(z)$ usando sólo las relaciones R_i $i = 1,2,\ldots,6$.

El centro $Z(H)$ de H es distinguido en H, y $\{X(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ y $\{Y(y)/y \in \mathbb{R}\}$ son subgrupos aditivos de H (isomorfos en $\mathbb{R}^+$) .

De (1) y de $Z(z)Y(y)Z(z')Y(y') = Z(z+z')Y(y+y')$ $(z,y,z',y' \in \mathbb{R})$ se obtiene que:

$$H = \{(0,y,z) \ / \ y,z \in \mathbb{R}\}$$

es un subgrupo distinguido y abeliano (isomorfo a $(\mathbb{R}^2)^+$) de $\mathcal{H}$. Poniendo

$$K = \{(x,0,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$$

obtenemos (por 1)

$$\mathcal{H} = H \rtimes K$$

la notación $\mathcal{H} = H \rtimes K$ significa que $\mathcal{H}$ es producto semidirecto de H y K con $H \vartriangleleft K$.

NOTA: Esta descomposición permite construir todas las representaciones unitarias e irreductibles de $\mathcal{H}$, salvo isomorfismos, sabiendo todos los de H por inducción.

En este texto seguiremos otro método.

II.- TOPOLOGIA Y DIFERENCIABILIDAD SOBRE $\mathcal{H}$.

Con la topología y la estructura de variedad C^∞ usual de $\mathbb{R}^3$ las operaciones de multiplicación e inversión de $\mathcal{H}$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{m} \mathbb{R}^3$$

$$m: ((x,y,z),(x',y',z')) \longmapsto (x+x', y+y', z'+xy' \pm z)$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$$

$$i: (x,y,z) \longmapsto (-x,-y,xy-z)$$

son C^∞.

De esta manera $\mathcal{H}$ es un grupo de Lie real.

NOTA: Llamaremos traslación a la izquierda por (x_0,y_0,z_0) a la aplicación C^∞ de $\mathcal{H}$

$$(x,y,z) \longmapsto (x_0,y_0,z_0)(x,y,z)$$

en forma análoga la traslación derecha por (x_0,y_0,z_0) es:

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y,z)(x_0,y_0,z_0)$$

III.- UNA MEDIDA INVARIANTE POR TRASLACIONES IZQUIERDAS Y DERECHAS DE $\mathcal{H}$. (Medida de Haar sobre $\mathcal{H}$).

La medida de Lebesgue m de $\mathbb{R}^3$ es una medida invariante por traslaciones izquierdas y derechas de $\mathcal{H}$; es decir, dado (x_0,y_0,z_0) $\mathcal{H}$, se tiene

$$m((x_0,y_0,z_0)\cdot A) = m(A) = m(A\cdot(x_0,y_0,z_0))$$

con A $\mathcal{H}$, A medible de Lebesgue.

Efectivamente:

$$\begin{aligned}(x_0,y_0,z_0)A &= (x_0,y_0,z_0) + \{(a_1,a_2,a_3 + x_0a_2)/(a_1,a_2,a_3)\in A\}\\ &= (x_0,y_0,z_0) + L(A)\end{aligned}$$

donde L es la aplicación lineal

$$(a_1,a_2,a_3) \longmapsto (a_1,a_2,a_3 + x_0a_2) \quad ((a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3)$$

de $\mathbb{R}^3$, cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x_0 & 1\end{pmatrix}.$$

Como la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones del grupo aditivo $(\mathbb{R}^3)^+$ y además $m(T(A)) = |\det T|\, m(A)$ para cada operador lineal T de $\mathbb{R}^3$ y cada $A \subset \mathbb{R}^3$ medible se tiene que

$$m((x_0,y_0,z_0)A) = m(LA) = |\det L|\, m(A) = 1 \cdot m(A) .$$

De igual modo se comprueba que

$$m(A(x_0,y_0,z_0)) = m(A) .$$

Luego, considerando medibles de H a los medibles según Lebesgue de $\mathbb{R}^3$, obtenemos que m es una medida de Haar biinvariante sobre H .

IV.- LAS REPRESENTACIONES IRREDUCTIBLES DE H .

Nuestro propósito en esta parte es encontrar las representaciones continuas unitarias e irreductibles de H .

Def. 1 Una representación unitaria de H en un espacio de Hilbert H es un homomorfismo de grupos Π de H en el grupo de automorfismos unitarios de H .

Π se llama la acción de la representación, H es el espacio de la representación.

Anotaremos $\Pi_g = \Pi(g)$ y cuando no dé motivo a confusión llamaremos Π a la representación (H,Π) .

Def. 2 Diremos que una representación unitaria (H,Π) de H es continua si para cada $h_0 \in \mathrm{H}$ la aplicación

$$g \longmapsto \Pi_g(h_0)$$

de G en H es contínua.

<u>Def. 3</u> Diremos que la representación (H,Π) de $\mathcal{H}$ es irreductible si los únicos subespacios cerrados de H estables por Π_g para cada $g\in\mathcal{H}$ son H y (0).

NOTA: Por el lema de Schur para el caso contínuo (ver apéndice) la irreductibilidad de una representación (H,Π) de $\mathcal{H}$ es equivalente a que los únicos operadores contínuos de H que conmutan con Π_g para $g\in\mathcal{H}$ sean las homotecias.

Supongamos que (H,Π) es una representación contínua unitaria e irreductible de $\mathcal{H}$. Nos proponemos caracterizar (H,Π) y realizar la representación en un espacio H conocido.

- <u>Observación inicial.</u>

Como $\Pi_{(0,0,z)}$, $(z\in\mathbb{R})$ conmuta con $\Pi_{(x,y,z)}$, $(x,y,z\in\mathbb{R})$, (pues $(0,0,z)\in Z(\mathcal{H})$ y Π es un homomorfismo de grupos) y ya que la representación (H,Π) es irreductible, resulta del lema de Schur que

$$\Pi_{(0,0,z)} = \lambda(z)\mathrm{Id}_H \quad (z\in\mathbb{R})$$

para un $\lambda(z)\in\mathbb{C}$.

Por la unitaridad, continuidad y por ser Π un homomorfismo de grupos, se obtiene que:

i) $\lambda(z)$ depende continuamente de z,
ii) $\lambda(z+z') = \lambda(z)\lambda(z')$,
iii) $|\lambda(z)| = 1$;

es decir, $z \longmapsto \lambda(z)$ es un carácter unitario del grupo $\mathbb{R}^+$. Es conocido que en esta situación existe un único $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $\lambda(z) = e^{i\alpha z}$; deducimos así que, forzosamente,

$$\Pi_{(0,0,z)} = e^{i\alpha z}\mathrm{Id}_H \qquad (z\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}) .$$

λ se llama el carácter central de Π .

<u>Distinguiremos dos casos:</u>

Caso a.) $\alpha = 0$. En este caso $\Pi_{(0,0,z)} = \mathrm{Id}_H$ $(z\in\mathbb{R})$ y probaremos que la representación Π de dimensión 1 viene dada por un carácter del grupo $(\mathbb{R}^2)^+$.

Formemos el grupo cuociente ($Z(H)$ es distinguido)

$$H/_{Z(H)} = \{(x,y,0)Z(H)\ /\ (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$$

El grupo $H/_{Z(H)}$ está en correspondencia biunívoca con $\mathbb{R}^2$ (vía $(x,y,z)Z(H)\longmapsto(x,y)$; más aún dicha correspondencia es un isomorfismo de grupos de $H/_{Z(H)}$ sobre $(\mathbb{R}^2)^+$, pues

$$(x,y,0)Z(H)\cdot(x',y',0)Z(H) = (x+x',\ y+y',0)Z(H) \quad .$$

Por otro lado, del hecho de que $\mathrm{Ker}\,\Pi\supset Z(H)$, existe una única representación Π' *de* $H/_{Z(H)}$ en H tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\Pi"'] & H/_{Z(H)} = (\mathbb{R}^2)^+ \arrow[d, "\Pi'"] \\ & \mathrm{Aut}(\mathrm{H}) \end{tikzcd} \qquad (\Pi'\circ P = \Pi)$$

conmuta, donde P es el epimorfismo canónico: $P(x,y,z) = (x,y,z)Z(H)$. Es decir Π se factoriza por $H/_{Z(H)}$. Además es inmediato que

$\{T : H \to H / T\Pi_g = \Pi_g T,\ g \in H,\ T$ op. lineal continuo$\} =: A$

coincide con

$\{T : H \to H / T\Pi'_g = \Pi'_g T,\ g \in H,\ T$ op. linealmente continuo$\} =: B$

y como Π es irreducible $\dim A = 1$; luego $\dim B = 1$.

Concluímos por el lema de Schur que la representación (H, Π') de $H/_{Z(H)}$ es irreducible. Puesto que $H/_{Z(H)} = (\mathbb{R}^2)^+$, la representación Π' es de dim 1 e isomorfa a una representación de $(\mathbb{R}^2)^+$ de la forma $(\mathbb{C}, e^{i(s,t)\cdot ?}\Pi)$ *para* algún $(s,t) \in \mathbb{R}^2)$ donde $e^{i(s,t)\cdot ?}$ es la aplicación

$$(x,y) \longmapsto e^{i(s,t)\cdot(x,y)} \quad .$$

Deducimos que la representación (H,Π) (de dim 1) es isomorfa a la representación $(x,y,z) \longmapsto \Pi'_{(x,y)} = e^{i(s,t)\cdot(x,y)}\Pi_{\mathbb{C}}$ de H en $\mathbb{C}$ que denotaremos por $(\mathbb{C}, \Pi^{(s,t)})$.

Por último $(\mathbb{C}, \Pi^{(s,t)})$ no es isomorfa a $(\mathbb{C}, \Pi^{(s',t')}$ si $(s,t) \neq (s',t')$, pues si hubiera un isomorfismo se obtendría que $e^{i((s,t)-(s',t'))\cdot(x,y)} = 1\ \forall\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ lo cual es posible sólo si $(s,t) = (s',t')$.

De esta manera concluímos que para $\alpha = 0$ obtenemos una familia de representaciones irreducibles, no isomorfas dos a dos, indicadas por $\mathbb{R}^2$:

$$\{(\mathbb{C}, \Pi^{(s,t)})\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2} \quad .$$

Caso b.) $\alpha \neq 0$. En este caso $\Pi_{(0,0,z)} = e^{i\alpha z} Id_H$

Notemos que tanto $\Pi_{(x,0,0)} =: V_x$ como $\Pi_{(0,y,0)} =: U_y$ definen representaciones continuas y unitarias de $\mathbb{R}^+$ en H (gracias a la actividad del producto en cada variable).

De la relación

$$X(x)Y(y)X^{-1}Y^{-1}(y) = Z(xy) \qquad (x,y \ \mathbb{R})$$

obtenemos

$$(*) \quad V_x \circ U_y \circ V_x^{-1} U_y^{-1} = \Pi_{(0,0,xy)} = e^{i\alpha xy} Id_H \ .$$

Porcediendo inversamente construiremos un par de representaciones continuas V y U de $\mathbb{R}^+$ que satisfagan esta relación, lo cual nos asegura que

$$U_y \cdot V_x \cdot e^{i\alpha dz} Id_H = \Pi_{(x,y,z)}$$

define una representación continua y unitaria de H . Probaremos también que Π así definida es necesariamente irreductible.

Tomemos $H = L^2(\mathbb{R}, dm) =: L^2(\mathbb{R})$ y definamos

$V_x(f)(t) = f(x+t) \quad (x,t \ \mathbb{R})$ (representación regular derecha de $\mathbb{R}^+$) ,

$U_y(f)(t) = e^{i\alpha yt} f(t) \quad (y,t \ \mathbb{R}) \quad (f \ L^2(\mathbb{R})$

es decir,

$$U_y = F_\alpha \circ V_y \circ F_\alpha^{-1}$$

donde

$$F_\alpha(f)(x) = \int f(s)e^{-i\alpha xs}ds \qquad f\ S(\mathbb{R})$$

V,U son representaciones contínuas y unitarias de $\mathbb{R}^+$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Verifiquemos ahora que satisfacen (*)

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, $(x,y,z) \in H$ y, $t \in \mathbb{R}$; entonces

$$\begin{aligned}(V_x \circ U_y \circ V_x^{-1} \circ U_y^{-1})(f)(t) &= (U_y \circ V_x^{-1} \circ U_y^{-1})(f)(x+t) \\ &= e^{i\alpha y(x+t)}(V_x^{-1} \circ U_y^{-1})(f)(x+t) \\ &= e^{i\alpha y(x+t)}U_y^{-1}(f)(t) \\ &= e^{i\alpha yx}f(t) \\ &= e^{i\alpha yx}Id_{L^2(\mathbb{R})}(f)(t)\end{aligned}$$

Por lo tanto definiendo

$$\Pi_{(x,y,z)} = U_y \circ V_x \circ e^{i\alpha z}Id_{L^2(\mathbb{R})} \qquad ((x,y,z)\ H)$$

obtenemos una representación contínua y unitaria de H en $L^2(\mathbb{R})$, pues es compuesta de operadores unitarios y fijado $f \in H$, la aplicación $(x,y,z) \longrightarrow \Pi_{(x,y,z)}f$ es ontínua en cada variable (pues $U, V, e^{i\alpha ?}Id_{L^2}$ son representaciones contínuas).

Además es un homomorfismo de grupos pues respeta todas las relaciones R_1 a R_6 entre los generadores $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ $(x,y,z \in \mathbb{R})$ de H

Veamos ahora que Π definida de esta manera es irreductible.

<u>Proposición</u>. <u>La representación</u> Π <u>definida más arriba es irreductible</u>.

<u>Dem</u>.- Sea $0 \neq W$ un subespacio cerrado y estable por Π de $L^2(\mathbb{R})$. (En particular W es estable por U y V). Probaremos que $W = L^2(\mathbb{R})$.

i) Afirmamos que W contiene una función h contínua y no nula:

Sea $0 \neq g \in W$ y $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una aproximación de la unidad entonces $\lim_{n \to \infty} h_n * g = g$ en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ y además $h_n * g$ es contínua para cada n (ver apéndice), puesto que $g \neq 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_{n_0} * g =: h$ es no nula.

Demostraremos que $h \in W$, recurriendo a un argumento que se desarrolla en el segundo capítulo

Puesto que W es un espacio de Hilbert estable por Π lo es en particular por V; de donde se deduce que (W,V) es una representación contínua y unitaria de $\mathbb{R}^+$. Esta representación V se extiende a un homomorfismo de algebras, $f \longmapsto V_f$ del algebra de convolución $L'(\mathbb{R})$ en en algebra $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ con la composición de operadores, donde

$$V_f(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} V_s(g)(x) f(s)\,ds = \int g(x+s) f(s)\,ds$$

$(f \in L'(\mathbb{R})\ ,\ g \in W \quad x \in \mathbb{R})$,

en particular $h = h_{n_0} * g \in W$.

ii) Supongamos que $W^{\perp} \neq (0)$. Como $W^{\perp}$ es cerrado y estable por Π, por los argumentos anteriores existe una función $f \in W^{\perp}$ continua y no nula. Probaremos que esto es contradictorio:

Para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$0 = \langle f, (U_y V_x) h \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{h(x+s)} e^{-i\alpha y s} ds \ .$$

es decir la transformada de Fourier de $f(\cdot)\overline{V_x h(\cdot)}$ es nula.

Se concluye

$$f(s)\overline{V_x h(s)} = 0 \quad \text{c.s. en } s$$

por continuidad de f y h

$$f(s)\overline{V_x h(s)} = 0 \quad (s \in \mathbb{R}) \ ,$$

Como X es cualquiera

$$f(s)h(t) = 0 \quad (s, t \in \mathbb{R}) \quad \text{contradicción}$$

Deducimos que $W^{\perp} = (0)$ y puesto que W es cerrado, $W = L^2(\mathbb{R})$.

Hemos probado que la representación Π es irreductible.

Anotemos por Π^{α} la representación obtenida por esta construcción:

$$\Pi^{\alpha}_{(x,y,z)}(f)(t) = e^{i\alpha(yt+z)} f(x+t) \quad (f \in L^2\mathbb{R}), \ (x,y,z \in H, \ t \in \mathbb{R})$$

Π^{α} no es equivalente a Π^{μ}, si $\alpha \neq \mu$. En efecto, si lo fueran existiría un operador T invertible tal que

$$T \circ \Pi^{\alpha}_{(x,y,z)} = \Pi^{\mu}_{(x,y,z)} \circ T \qquad ((x,y,z) \in H) \;;$$

en particular

$$T \circ e^{i\alpha z}\, id_{L^2} = e^{i\mu z}\, id_{L^2} \circ T \quad (z \in \mathbb{R})$$

de donde

$$(e^{i\alpha z} - e^{i\mu z})T = 0 \qquad (z \in \mathbb{R})$$

Como T no es singular,

$$e^{i\alpha z} - e^{i\mu z} = 0 \qquad (z \in \mathbb{R})$$

de donde $\alpha = \mu$.

De esta manera obtenemos una familia de representaciones irreductibles de dim infinita , no isomorfos dos a dos, indicadas por $\mathbb{R} - \{0\}$,

$$\{(L^2(\mathbb{R}), \Pi^{\lambda})\}_{\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

COMENTARIOS DEL PRIMER CAPITULO

Hemos encontrado una familia de representaciones unitarias e irreductibles de H .

$$\{(L^2(\mathbb{R}),\pi^\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}^x} \cup \{\mathbb{C},\ \pi^{(s,t)}\}_{(s,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

de ahora en adelante escribiremos $Z = (\mathbb{R}^x \cup \mathbb{R}^2)$.

Es natural preguntarse si esta familia de representaciones irreductibles es completa, en el sentido de que cualquier otra representación irreductible unitaria de H , sea equivalente a algunas de la familias dadas.

Una respuesta se puede dar examinando las restricciones de estas representaciones al subgrupo H de H .

En lo que sigue de este comentario sólo relacionaremos este problema con la expansión de la delta de Dirac δ_e , en el origen del grupo H , en integral de los trazos de las representaciones $\pi^z(z\in Z)$. Para ello examinaremos la situación en el caso finito:

Sea k cuerpo finito con $|k| = q$, y

$$H = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: (x,y,z) \ / \ x,y,z \ \ k\}$$

Entonces

$$|H| = q^3 \ .$$

Trasponiendo el método de la sección anterior encontramos la siguiente familia de representaciones unitarias e irreductibles:

$$\{(L^2(k,\ \mu_c),\ \pi^\lambda)\}_{\lambda\in k^x}\ \cup\{(\mathbb{C},\ \pi^{(s,t)})\}_{(s,t)\in k\times k}\ ,$$

donde μ_c es la medida de conteo normalizada sobre k y

$$\pi^\lambda_{(x,y,z)}\ f(t) = e^{\lambda(yt+z)} f(x+t) \quad (t\in k,\quad f\in L^2(k,\ \mu_c)$$

$$(x,y,z)\in H\ ;\quad \lambda\in k^x)\ ,$$

$$\pi^{(s,t)}_{(x,y,z)} = e^{(sx+z)} 1_{\mathbb{C}}\ (x,y,z)\in H,\ (s,t)\in k\times k)\ ,$$

con e carácter unitario fijo no nulo de k^+, donde anotamos

$$e^s := e(s) \quad (s\in k)\ .$$

Además

$$\dim(L^2(k,\ \mu_c),\ \pi^\lambda) =: \dim \pi^\lambda =: d_\lambda = q \quad (\lambda\in k^x)\ ,$$

$$\dim(\mathbb{C},\ \pi^{(s,t)}) =: \dim \pi^{(s,t)} = d_{(s,t)} = 1\ ((s,t)\in k\times k)\ .$$

NOTA: $L^2(k,\ \mu_c) \cong \{f : k\to \mathbb{C}\ /\ f\ \text{función}\} =: \mathbb{C}^k$.

Este es un sistema completo de representaciones unitarias e irreductibles de H pues

$$\sum_{\lambda\in k^x} d_\lambda^2 + \sum_{(s,t)\in k\times k} d_{(s,t)}^2 = (q-1)q^2 + q^2 = q^3 = |H|$$

Un criterio como este no es posible en el caso continuo ($k = \mathbb{R}^+$). Pero existe otra versión: desarrollar el delta de Dirac δ_e del grupo H en términos de los caracteres irreductibles.

Consideremos sobre H la medida de conteo normalizada, que anotaremos por V_c, donde:

$$V_c\{g\} = \frac{1}{q^3} \qquad (g \in H) .$$

Notemos que $L^2(H, V_c) = \{f : H \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ función}\} =: \mathbb{C}^H$;

definimos

$$\delta_e(g) = \begin{cases} |H| = q^3 & \text{si } g = e \\ 0 & \text{si } g \neq e . \end{cases}$$

δ_e es una función sobre el grupo H que representa al funcional evaluación en e de $\mathbb{C}^H$, i.e.

$$F(e) = \langle F, \delta_e \rangle := \frac{1}{q^3} \sum_{g \in H}{}' F(g)\overline{\delta_e(g)} \quad (F \in \mathbb{C}^H) .$$

Además δ_e es la unidad del algebra de convolución $\mathbb{C}$ donde:

$$(F * G)(x) = \frac{1}{q^3} \sum_{g \in H}{}' F(g)G(g^{-1}x) \quad (F, G \in \mathbb{C}^H, \ x \in H) .$$

<u>Observación:</u> Por cálculos directos se obtiene que:

$$\mathrm{Traza}\,\Pi^{\lambda}_{(x,y,z)} =: \mathrm{Tr}\Pi^{\lambda}_{(x,y,z)} = \frac{\delta_o(x)}{q}\ \ \delta_o(y)e^{\lambda z}$$

con $\delta_o(t) = \begin{cases} |k| & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$

y

$$\mathrm{Traza}\,\Pi^{(s,t)}_{(x,y,z)} =: \mathrm{Tr}\Pi^{(s,t)}_{(x,y,z)} = e^{(sx+ty)}$$

$$((x,y,z) \in H;\ \ \lambda \in k^{x};\ (s,t) \in Z)$$

y se verifica que

$$\delta_e = \sum_{\lambda \in k^x} d_{\lambda} \mathrm{Tr}\Pi^{\lambda} + \sum_{(s,t) \in k \times k} d_{(s,t)} \cdot \mathrm{Tr}\Pi^{(s,t)} ,$$

en particular

$$q^3 = \delta_e(e) = \sum_{\lambda \in k^x} d^2_{\lambda} + \sum_{(s,t) \in k \times k} d^2_{(s,t)} .$$

NOTA: Anotaremos $\mathrm{Tr}\Pi^{z} = \chi^{z}$ $(z \in k^{x} \cup k \times k)$.

Sea $Z = k^{x} \cup k \times k$ y supongamos por un momento que hemos encontrado una estructura de espacio medible sobre Z y una medida d^{P} tal que

i) $z \longmapsto \mathrm{Tr}\Pi^{z}_{g}$ es medible para cada $g \in H$,

ii) $\delta_e(g) = \int_{Z} \mathrm{Tr}\Pi^{z}_{g} d^{P}(z)$ para cada $g \in H$,

usando (i) es fácil ver que los conjuntos $\{z\}$ $(z \in Z)$ deben ser medibles; luego d^{P} es una cierta medida de conteo y (ii) queda como:

$$\delta_e = \sum_{\lambda \in k^x} d^P(\{\lambda\}) Tr\pi^\lambda + \sum_{(s,t) \in k \times k} d^P\{(s,t)\} Tr\pi^{(s,t)}$$

Usando la ortonormalidad de los caracteres irreductibles obtenemos

$$d_\lambda = d^P(\{\lambda\}) \ , \ d_{(s,t)} = d^P(\{(s,t)\}) \quad (\lambda \in k^x, \ (s,t) \in k \times k)$$

es decir, la medida d^P es única si existe.

Además, de (ii) resulta

$$q^3 = \delta_e(e) = \sum_{\lambda \ k^x} d^2 + \sum_{(s,t) \ k \times k} d^2_{(s,t)}$$

es decir la existencia de la medida d^P asegura la completitud de la familia de representaciones indicadas por Z .

Por la observación tenemos que la familia de representaciones irreductibles indicadas por Z es completa.

Así en el caso finito ~~por~~ una condición necesaria y suficiente para la completitud de la familia de representaciones indicadas en Z es que δ_e se pueda desarrollar según el sistema de caracteres asociados a la familia de representaciones.

Mas aún, se demuestra que la condición (i), (ii), asegura una descomposición, en suma directa ortogonal, de la representación regular de H en términos de subrepresentaciones irreductibles; en efecto:

de

$$\delta_e = \sum_{\lambda \ k^x} d_\lambda \chi^\lambda + \sum_{(s,t)} d_{(s,t)} \chi^{(s,t)} \quad ,$$

por convolución, se obtiene

$$F = \delta_e * F = \sum_{\lambda \in k^x} d_\lambda \chi^\lambda * F + \sum_{(s,t)\in k\times k} d_{(s,t)} \chi^{(s,t)} * F$$

para cada $F \in \mathbb{C}^H$,
y puesto que

$$P_z(f) = d_z \chi^z * f \quad ((f \in L^2(H)\ ,\quad z \in Z) \quad \text{define}$$

una familia completa de proyectores ortogonales $\{P_z\}_{z\in Z}$, (ya que como es conocida la familia $\{\chi(@)\chi\}$ (χ caract. irreductible de H) es una familia de idempotentes centrales primitivos ortogonales dos a dos en el algebra de las funciones centrales de H)

$$\mathbb{C}^H = \bigoplus_{z\in Z} \mathrm{Im}P_z \ .$$

Mas aún, $\mathrm{Im}P_z$ es la componente isotípica asociada a la representación π^z.

Esto último sugiere que el problema de la completitud del sistema de representaciones indicadas por Z se puede interpretar como el "de la suficiente cantidad de representaciones irreductibles unitarios de H para permitir la descomposición hecha arriba. Este problema equivale a desarrollar el δ_e en términos de los caracteres irreductibles, es decir, a la existencia de la medida d^P sobre Z.

La medida d^P se llama la medida de Plancherel sobre H.

Observación: Es conveniente interpretar las fórmulas (i), (ii), en el sentido de "funciones generalizadas", es decir, de "funcionales lineales sobre el Espacio de Prueba" $\mathbb{C}^{H}$ identificando las funciones corrientes a funciones generalizadas sobre H por:

$$\mathbb{C}^{H} \ni f \longmapsto \Lambda_f \quad (\mathbb{C}^{H})^*$$

donde $\Lambda_f(g) = \langle g, f^V \rangle$ con

$$f^V(x) = f(x^{-1}) \quad (x \in H) .$$

La correspondencia $f \longrightarrow \Lambda_f$ define un isomorfismo conjugado lineal de $\mathbb{C}^{H}$ en $(\mathbb{C}^{H})^*$.

En particular Λ_{δ_e} es la evaluación en e ,

y

$$\Lambda_{\chi z} : F \longrightarrow \mathrm{Tr}\,\Pi_F^z \quad \text{donde}$$

$$\Pi_F^z = \frac{1}{q^3} \sum_{s \in H} F(s)\,\Pi_s^z \qquad (F \in \mathbb{C}^{H})\, z \in Z$$

$\Lambda_{\chi z}$ lo llamaremos el <u>caracter generalizado</u> asociado a la representación Π^z

(En particular pàro $F = \delta_g$, $\Pi_{\delta_g}^z = \Pi_g$ y de este modo la aplicación $\mathbb{C}^{H} \ni F \longmapsto \Pi_F^z \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{H})$ es una extensión de la representación Π^z al algebra $\mathbb{C}^{H}$ con la convolución; identificando g con δ_g) .

La ecuación

$$F(e) = \sum_{\lambda \in k^x} d_\lambda \Lambda_{\chi\lambda}(F) + \sum_{(s,t) \in k \times k} \Lambda_{\chi(s,t)}(F) \quad (F \in \mathbb{C}^{H})$$

es equivalente al desarrollo de δ_e en (ii) por unicidad.

Así las condiciones (i) e (ii) se pueden escribir como:

(i') $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Tr}\Pi_F^Z = A_{\chi Z}(F)$ es medible para cada $F \in \mathbb{E}^H$.

(ii') $\delta_e(F) = \int A_{\chi Z}(F)\, d^P(z)$ para cada $F \in \mathbb{E}^H$.

Esta última forma es mucho más sugerente para el caso contínuo.

CAPITULO II

En este capítulo, daremos una extensión de cada representación continua y unitaria de H al algebra de grupo $L^1(H, dm)$. (Cuya multiplicación es la convolución de funciones asociada a la acción de H en $L^1(H)$).

Además, definiremos los caracteres generalizados, asociados a la familia de representaciones de H encontradas en el capítulo anterior. Será necesario definir un espacio de funciones rápidamente decrecientes en el infinito sobre H y dar una noción de traza para operadores en $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Notaciones.

Para anotar la medida de Haar del grupo H, que es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^3$, usaremos cualquiera de los signos siguientes:

dx, dm(x), dxdydz, ...
ds, dm(s) ; $ds_1 ds_2 ds_3$, ..., etc.

Sea $1 \leq p < \infty$, el espacio normado
$L^p(H, dm) = \{F : H \to \mathbb{C}$ / F es dm-medible y $\|F\|_p = (\int |f(x)|^p\, dm(x))^{1/p} < \infty\}/\sim$ donde $F \sim G \Leftrightarrow F = G$ salvo en un conjunto de medida nula, lo anotaremos como $L^p(H)$ y sus elementos los escribiremos con letras mayúsculas F,G,H, ... ;

T_g, $g \in H$, será la traslación izquierda, que define H sobre $L^p(H)$ por:

$$T_g(F)(x) = F(g^{-1}x) \ , \quad (F \in L^p(H),\ x \in H) \ .$$

Los elementos de $L^p(\mathbb{R}, dx) =: L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, donde dx es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, los anotaremos con letras minúsculas: $f, g, h, \phi, \ldots$

La transformada de Fourier clásica sobre $\mathbb{R}^n$ de una función $F \in L'(\mathbb{R}^n)$ la anotaremos como:

$$\hat{F}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} F(s) e^{is \cdot x} ds \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

donde $\cdot$ es el producto interior de $\mathbb{R}^n$.

I.- En esta sección daremos definiciones y algunas proposiciones que serán demostradas en el apéndice.

1) <u>Def.</u>: Diremos que la convolución de dos funciones medibles F, G sobre H, que anotaremos por $F * G$ existe en un punto $x \in H$, si la función

$$y \longmapsto F(y) G(y^{-1}x)$$

es un elemento de $L'(H)$; el valor de la convolución en x es definido por la integral

$$(F * G)\ (x) = \int_H F(y) G(y^{-1}x) dy$$

2) <u>Proposición</u>: Si $F \in L'(H)$ y $G \in L^p(H)$, $1 \leq p < \infty$ entonces

$F * G$ $L^p(H)$ y

$$\|F * G\|_p \leq \|F\|_1 \|G\|_p \ .$$

3) <u>Proposición</u>: $L^1(H)$ es un algebra con la convolución y además tiene una involución definida por

$$F^*(x) = \overline{F(x^{-1})} \quad (F \in L'(H),\ x \in H) .$$

4) <u>Observación:</u> El espacio de las funciones centrales sobre H :

$$\mathcal{Z}(H) := \{F \in L'(H) \ / \ F(g^{-1}hg) = F(h),\ g,h \in H\} ,$$

es nulo. Efectivamente la órbita de un elemento $h = (h_1,h_2,h_3)$ con $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ es

$$0_h := (h_1,h_2,t) \ / \ t \in \mathbb{R}\} ;$$

de donde si $F \in \mathcal{Z}(H)$; entonces F no depende de la tercera variable una vez fijado $(h_1,h_2) \neq (0,0)$. Por la integrabilidad $F = 0$.

Además el algebra $L^1(H)$ no tiene elemento neutro ni es conmutativa.

Para verificar esta afirmación, tomamos la sucesión de funciones de $L'(H)$.

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n^3} \ \chi_{N_n}(x) \quad (x \in H) ;$$

donde N_n es el cubo centrado en el origen de lado $\frac{1}{n}$ y χ_{N_n} es la función característica de N_n .

$\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se llama una aproximación de la unidad porque

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n * F = F \quad \text{en} \ \|\ \|_1 \ , \ (F \in L'(H)) ,$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} (\phi_n * F)(x) = F(x) \;, \quad (F \in L^1(H), \quad x \in H$$

un punto de continuidad de F) . como se comprueba directamente.

Usando las propiedades de $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se verifi... que; si $L^1(H)$ fuera conmutativa entonces, al meno... para cada función continua e integrable $F(x) = F(x^{-1})$ $(x \in H)$ (lo que es falso); y si $L^1(H)$ tiene un... identidad $\bar{e}$ entonces $\bar{e} = 0$ lo que es contradic... ori...

Nótese en cambio que

$$(F * G)(0,0,z) = (G * F)(0,0,z) \;;\; (G,F \in L^1(H)\; (0,0,z) \in H)$$

5) <u>Definición</u>: Diremos que una función F, de ... C^∞ sobre H, es rápidamente decreciente en el ... si

$$\sup_{x\in H} |x^\alpha (D^\beta F)(x)| < \infty$$

Para cada $\alpha := (n_1,n_2,n_3)$ y $\beta = (m_1,m_2,m_3)$ $n_i,m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ donde si $(x_1,x_2,x_3) = x \in H$ ...

$$x^\alpha = x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \quad y \quad (D^\beta F)(x) = \frac{\partial^{m_1+m_2+m_3}}{\partial x_1^{m_1}\, \partial x_2^{m_2}\, \partial x_3^{m_3}} F(x_1,x_2 ...$$

Anotaremos como $S(H)$ el espacio de las funci... rápidamente decrecientes sobre H . Es inmediato q... $S(H)$ es $S(\mathbb{R}^3)$, el espacio de las funciones ráp... mente decrecientes del grupo $(\mathbb{R}^3)^+$.

6) <u>Proposición</u>: $S(H)$ es un espacio lineal complejo y la familia

$$\{P_{\alpha,\beta}\} \quad ; \quad \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^3 \quad ;$$

$$P_{\alpha,\beta}(F) = \sup_{x \in H} |x^\alpha (D^\beta F)(x)| \quad , \quad (F \in S(H)) \quad ,$$

es una familia de normas que definen una estructura de espacio lineal topológico, localmente convexa y completa sobre $S(H)$.

7) <u>Definición</u>: Una funcional lineal T , sobre $S(H)$, continua respecto de la topología mencionada más arriba, se llama una distribución temperada sobre H

<u>Ejemplo</u>: La delta de Dirac, δ_e , en el origen

$$F \longrightarrow F(e)$$

es una distribución temperada.

8) <u>Proposición</u>: $S(H)$ es una sub-algebra, involutiva, de $L^1(H)$. respecto de la convolución, y es estable por T_g para cada $g \in H$.

II.- <u>EXTENSION DE UNA REPRESENTACION UNITARIA Y CONTINUA π DE H AL ALGEBRA DE CONVOLUCION $L^1(H)$</u> .

9) Sea (H,π) , $(H, <\,,\,>)$ un espacio de Hilbert complejo, una representación continua y unitaria de H y $F \in L^1(H)$

15227

Sean $f,g\in H$; entonces $s \longrightarrow < \Pi_s f,g >$ es continua (por ser Π continua) y uniformemente acotada por $\|f\|\,\|g\|$; de donde

$$\int_H F(s) < \Pi_s f,g > ds$$

existe y es acotada por $\|F\|_1 \|f\| \|g\|$.

Definiremos

$$B(f,g) := \int F(s) < \Pi_s f,g > ds \quad , \quad (f,g\in H) \quad ,$$

B es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda. Fijando $g\in H$ la aplicación de H en $\mathbb{C}$

$$f \longmapsto B(f,g) \quad , \quad (g\in H) \quad ,$$

es lineal y continua; por lo que existe un único vector $T^*(g)\in H$ tal que

$$B(f,g) = < f,T^*(g) > \quad , \ (f\in H) \quad .$$

La aplicación de H en sí mismo

$$g \longmapsto T^*(g)$$

define un único operador lineal continuo en H tal que

$$B(f,g) = < f,T^*(g) > \quad , \quad (f,g\in H) \ .$$

<u>Definición</u>:

El adjunto de T^* , es el operador Π_F y está definido por la relación:

$$< \Pi_F f,g > = \int_H F(s) < \Pi_s f,g > ds \ , \ (f,g\in H) \ .$$

Anotamos

$$\Pi_F =: \int_{H} F(s)\,\Pi_s\,ds \quad .$$

10) Teorema:

Bajo las condiciones demás arriba la aplicación

$$F \longmapsto \int_{H} F(s)\,\Pi_s\,ds$$

es un $*$ - homomorfismo de $L'(H)$, como algebra de convolución, sobre un algebra de operadores contínuos de H ; cuya clausura respecto de la topología débil de operadores contiene a $\Pi(H) = \{\Pi_h \;/\; h \in H\}$.

Además

$$\|\Pi_F\| \leq \|F\|_1 \quad y \quad \Pi_x \Pi_F = \Pi_{T_x F} \quad , \quad (x \in H) \; .$$

Demostración:

La aplicación $F \longrightarrow \Pi_F$ es lineal, además;

$$\|\Pi_F(f)\|^2 = |< \Pi_F(f) \; , \; \Pi_F(f) >| \leq \|F\|_1 \; \|f\| \; \|\Pi_F(f)\| \; ,$$

de donde

$$\|\Pi_F\| \leq \|F\|_1 \quad ;$$

por lo que Π_F es un operador contínuo en H .

Sea $x \in H$ y $F \in L^1(H)$ entonces

$$< \Pi_{T_x F}(f), g > = \int F(x^{-1}s) < \Pi_s f, g > ds$$

$$= \int F(s) < \Pi_x \Pi_s f, g > ds$$

Además

$\|\Pi_F\| \leq \|F$

Demostración:

La aplic

$$= < \pi_F(f) \; , \; \pi_{x^{-1}}(g) >$$

$$= < \pi_x \pi_F(f), g > \; ,$$

Para todo par de vectores $f, g \in H$, de donde

$$\pi_{\tau_x F} = \pi_x \pi_F \; .$$

Si $(\pi_F)^*$ es el adjunto de π_F entonces

$$(\pi_F)^* = \pi_{F^*} \; , \quad (F \in L^1(G)) \; ,$$

efectivamente:

$$< \pi_F \, f,g > = \int F(s) < \pi_s \, f,g > ds$$

$$= \overline{\int < \pi_u \, g,f > F(u^{-1}) du}$$

$$= < f, \pi_{F^*} g > , \; (f,g \in H) \; .$$

Por otro lado usando el teorema de Fubini

$$< \pi_{F*G} \, f,g > = \iint F(u) G(u^{-1}s) du < \pi_s \, f,g > ds$$

$$= \int F(u) \int G(u^{-1}s) < \pi_s \, f,g > ds \, du$$

$$= \int F(u) < \pi_G \, f, \pi_{u^{-1}} g > du$$

$$= < \pi_F \pi_G \, f, g > , \quad (f,g \in H) \; ,$$

de donde

$$\pi_{F*G} = \pi_F \pi_G$$

Demostraremos por último que $\Pi(H)$ está contenido en la clausura de $\{\Pi_F \;/\; F \in L'(H)\}_{clr}$ a la topología débil en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)$.

Consideremos una vecindad débil W de 1_H determinada por $\varepsilon > 0$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vectores de H.

Demostremos que existe $F \in L'(H)$ tal que $\Pi_F \in W$. Por la continuidad de la representación existe una vecindad compacta V del origen e, en H tal que

$$\|\Pi_g x_i - x_i\| < \varepsilon \|x_i\| \quad i = 1, \ldots, n, \; g \in V$$

Sea $F \in C_c(H)$ con $\operatorname{sop} F \subset V$ y $\int_V F(s)\,ds = 1$;

entonces

$$< \Pi_F V - V, W > = \int_V F(s) < \Pi_s V - V, W > ds , \quad (V, W \in H)$$

en particular.

$$< \Pi_F x_i - x_i , \Pi_F x_i - x_i > \leq \sup_{s \in V} \|\Pi_s x_i - x_i\|^2$$

$$= \|\Pi_{s_i} x_i - x_i\|^2 , \quad s_i \in V$$

$$< \varepsilon \|x_i\|^2 , \quad i = 1, \ldots, n$$

de donde: $\Pi_F \in W$.

Por último por la unitaridad de Π_g, $g \in H$,

$$\|\Pi_{T_g F}(x_i) - \Pi_g(x_i)\| = \|\Pi_g \Pi_F(x_i) - \Pi_g(x_i)\| =$$

$$= \|\Pi_F(x_i) - x_i\| < \varepsilon \|x_i\| , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Puesto que ε era arbitrario, termina la demostración.

Esta es la demostración de un hecho general, para grupos localmente compactos con una medida de Haar.
Ref. Segal Kunze. Integral and Operator pag

11) <u>Observación</u>: En particular para la representación irreductible $(L^2(\mathbb{R}), \pi^\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^x$, es fácil comprobar, usando el teorema de Fubini, que:

$$\pi_F^\lambda(\phi)(t) = \int_H \pi_s^\lambda(f)(t)F(s)ds \quad , \quad (f \in L^2(\mathbb{R}) \ , \ t \in \mathbb{R} \quad F \in L^1(H)) \ ,$$

$$= \iiint e^{i\lambda(s_2 t + s_3)} f(t+s_1)F(s_1,s_2,s_3)ds_1 ds_2 ds_3 \quad ;$$

y que para $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\pi_F^{(s,t)} = \iiint e^{i(s_1 \cdot s + s_2 \cdot t)} F(s_1,s_2,s_3)ds_1 ds_2 ds_3 1_{\mathbb{C}} \quad ,$$

$$(F \in L^1(H)) \ ,$$

$$= \hat{F}(s,t,0)1_{\mathbb{C}}$$

III.- <u>DEFINICION Y CALCULO DEL CARACTER GENERALIZADO ASOCIADO A LA REPRESENTACION π^z, $(z \in Z)$.</u>

12) <u>Definición</u>: Sea $(H, \langle\ \rangle)$ un espacio de Hilbert separable y T un operador lineal continuo en H. Diremos que T es trazable o tiene traza si para cada base ortonormal $(\phi_i)_{i \in N}$ de H la serie

$$\sum_{n \in N} \langle T\phi_n, \phi_n \rangle$$

converge y su valor es independiente de la elección de $\{\phi_i\}_{i\in N}$.

Si T tiene traza definimos

$$TrT : TrazaT = \sum_{n\, N}' < \phi_n, \phi_n > \quad (\{\phi_n\} \text{ base ortonormal de } H)$$

NOTA: Si H es de dimensión finita esta noción coincide con la usual. Nótese que si H es de dimensión infinita 1_H no tiene traza.

13) <u>Lema:</u> Si T es un operador lineal continuo de H y si para una base ortonormal fija $\{\phi_i\}_{i\in N}$ de H ,

$$\sum_{i,j} | < T\phi_i, \phi_j > | < \infty$$

entonces para cada par de operadores continuos A, B de H , ATB, TBA y BAT tienen traza y

$$TrATB = TrTBA = TrBAT .$$

<u>Demostración:</u> Ver apéndice.

14) Sea $(H, < >)$ un espacio de Hilbert y A un operador lineal continuo de A . Diremos que A es un operador de Hilbert-Schmidt (H.S.) de H , si para una base ortonormal $\{\phi_i\}_{i\, N}$ de H ,

$$\sum_i \|A\phi_i\|^2 < \infty .$$

Se demuestra que el valor de la serie es independiente de la base ortonormal $\{\phi_i\}$. (Ver apéndice)

NOTA: Tomando $H = \ell^2(\mathbb{N})$ donde

$< x,y > = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \bar{y}_n$, $(x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}))$

y el operador definido por $Te_n = \frac{1}{n} e_n$, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$, vemos que T es de H.S. pero no tiene traza.

El recíproco es cierto, es decir, si A tiene traza entonces A es de H.S. (pues A^* también tiene traza).

Cualquier operador de rango finito en H tiene traza.

15) <u>Teorema:</u> Para cada $F \in S(H)$ y $z \in Z$ el operador Π_F^z tiene traza y

$$\text{Traza } \Pi_F^z = \begin{cases} \hat{F}(s,t,0) & \text{si } z = (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \frac{2\pi}{|\lambda|} \int_{\mathbb{R}} F(0,0,s) e^{i\lambda s} ds & \text{si } z = \lambda \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

para $z \in Z$ fijo la aplicación

$$F \longrightarrow \text{Tr}\, \Pi_F^z$$

es una distribución temperada.

<u>Demostración:</u> Distinguiremos dos casos:

Caso 1) $z = (s,t) \in \mathbb{R}^2$. En este caso tenemos la noción usual de traza y está definida para cualquier $F \in L^1(H)$ en efecto; puesto que

$$\pi_F^{(s,t)} = \hat{F}(s,t,0)1_{\mathcal{H}}$$

$$\mathrm{Tr}\,\pi_F^{(s,t)} = \hat{F}(s,t,0) \ .$$

La aplicación $\hat{F} \longmapsto F(s,t,0)$ es continua con respecto a la topología de $S(H)$, pues es la composición de la transformada de Fourier con la evaluación en $(s,t,0)$ (que es una distribución temperada).

<u>Caso 2.</u>- La funcional $F \longmapsto \frac{2\pi}{|\lambda|}\int F(0,0,s)e^{i\lambda s}ds = \frac{2\pi}{|\lambda|}\hat{F}(0,0,\cdot)(\lambda)$

$(\lambda \in \mathbb{R}^{*})$,

es una distribución temperada. Efectivamente, sea $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $S(H)$ que converge a cero; es inmediato que $\{F_k(0,0,\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $S(\mathbb{R})$ que converge a cero y como la transformada de Fourier en $(\mathbb{R})^{+}$ es un homeomorfismo de $S(\mathbb{R})$ en sí mismo, la sucesión $\{\hat{F}_k(0,0,\cdot)\}$ converge a cero.

El resto de la demostración la haremos en cuatro pasos:

Sea $\{\phi_i\}_{i=0,1,2\ldots}$ la base ortonormal de funciones de Hermite de $L^2(\mathbb{R})$.

$$\phi_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\, e^{t^2/2}\, \frac{d^n}{dt^n}\, e^{-t^2} \ , \ n = 0,1,\ldots$$

Las funciones de Hermite son rápidamente decrecientes en $\mathbb{R}$ y además $|\phi_n(t)| < 1$, $(n \in \mathbb{N}\ ,\ t \in \mathbb{R})$.
(Ver Carleman "Ortogonal Functions" pg.)

<u>Lema a)</u> Sea $f \in S(\mathbb{R})$; entonces dado $k \in \mathbb{N}$

$$< f,\phi_\mu > = \frac{1}{\sqrt{2^k \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-k+1)}} < P^k(f),\phi_{\mu-\mu} > ,$$

$$(\mu > k) \quad ,$$

donde

$$P(f)(t) = \frac{df}{dt}(t) + tf(t) \quad , \quad (f \in S(\mathbb{R})\ ,\ t \in \mathbb{R}) \quad ,$$

<u>Demostración</u>: Nótese que P es un operador lineal de $S(\mathbb{R})$ en $S(\mathbb{R})$.

En la demostración se usa básicamente la integración por partes y el hecho de que ϕ_n es rápidamente decreciente y f acotada en el infinito.

$$< f' , \phi_n > = C(n)\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{t^2/2}\,\frac{d^n}{dt^n}\,e^{-t^2}\,dt$$

$$= -C(n)\int f(t)[\,te^{t^2/2}\,\frac{dn}{dt^n}\,e^{-t^2} + et^2/2\,\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\,]\,dt$$

$$= -\int tf(t)\phi_n(t)\,dt - \frac{C(n)}{C(n+1)}\int f(t)\phi_{n+1}(t)\,dt \ .$$

donde

$$C(n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \quad y \quad f' = \frac{df}{dt} \quad ,$$

Se obtiene que

$$< f,\phi_{n+1} > = (-1)\frac{C(n+1)}{C(n)} < P(f),\phi_n > , \quad (n > 0) \ ;$$

Por iteración

$$< f,\phi_{n+1} > = (-1)^k \frac{C(n+1)}{C(n-k+1)} < P^k,\phi_{n-k+1} > \quad (n > k-1) \ ;$$

poniendo $\mu = n+1$

$$< f,\phi_\mu > = (-1)^k \frac{C(\mu)}{C(\mu-k)} < P^k(f),\phi_{\mu-k} > \ ,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^k \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k+1)}} < P^k(f),\phi_{\mu-k} > , \quad (\mu > k) \ .$$

Una consecuencia del cálculo anterior es que

$$\sum_{n \in N} | < f,\phi_n > |^P < \infty \quad , \quad (P > 0 \ , \ f \in S(\mathbb{R})) \ ;$$

puesto que

$$\sum_{n=0}^{\infty} | < f,\phi_n > |^P = \sum_{\mu=0}^{k_o-1} | < f,\phi_\mu > |^P +$$

$$+ \sum_{\mu=k_o}^{\infty} \left(\frac{1}{[2^{k_o}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k_o+1)]^{P/2}} \times | < P^{k_o}(f), \phi_{\mu-k_o} > |^P \right)$$

$$< \sum_{\mu=0}^{k_o-1} |< f,\phi_\mu >|^P + \| P^{k_o}(f) \|_2^P \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{[2^{k_o} \mu(\mu-1)\ldots(\mu-k_o+1)]^{P/2}}$$

para $k_o > 1$. De donde basta elegir k_o de modo que

$$\frac{k_o P}{2} > 1$$

Pues

$$\sum_{\mu=k_0}^{\infty} \frac{1}{[2^{k_0}\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k_0+1)]^{p/2}} \leq \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k}(N+1)}\right)^{\frac{k_0 p}{2}}$$

En especial para $p = 1$ se puede tomar $k_0 = 2$ (usando la desigualdad de Schwartz).

Nótese que basta que $P^k(f) \in L^2(\mathbb{R})$, para obtener que

$$\sum_i |<f,\phi_i>|^p < \infty$$

si

$$\frac{k_0 \cdot p}{2} > 1 .$$

Además

$$\sum_{i=0}^{N} <f,\phi_i> \phi_i$$ converge, cuando N tiende a infinito, a f , en la norma del supremo. Puesto que

$$\left|\sum_{i=0} <f,\phi_i> \phi_i\right| \leq \sum_{i=0}^{N} |<f,\phi_i>|$$

de donde

$$\left\{\sum_{i=0}^{N} <f,\phi_i> \phi_i\right\}_N$$ es una sucesión de Cauchy

en la norma del supremo; ya que existe una subsucesión $\sum_{i=0}^{N} <f,\phi_i> \phi_i$ que converge puntualmente casi en todas partes, a f ,se tiene la afirmación.

$$\left(\sum_{i=0}^{N} <f,\phi_i> \phi_i \to f \text{ en } \| \|_2\right)$$

Lema b.- Sea $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $F \in S(H)$; entonces

$$\Pi_F^\lambda(\phi) \in S(\mathbb{R}) \qquad , \qquad (\phi \in L^2(\mathbb{R})) .$$

(Podemos decir que Π_F^λ , $F \in S(H)$, regulariza indefinidamente a cualquier ϕ en $L^2(\mathbb{R})$.)

Demostración: Usaremos las desigualdades de Schwartz y de Jensen repetidas veces además de la integración por partes y el teorema de Fubbini.

1) Como

$$\Pi_F^\lambda(\phi)(t) = \iiint F(s_1,s_2,s_3)e^{i\lambda s_3}\, e^{i\lambda s_2 t}\, \phi(t+s_1)ds_1 ds_2 ds_3$$

$$= \iiint F(s_1-t,s_2,s_3)e^{i\lambda s_3}e^{i\lambda s_2 t}\phi(s_1)ds_1, ds_2 ds_3 \quad ;$$

entonces

$$|\Pi_F^\lambda(\phi)(t)| \leq \iiint |F(s_1-t,s_2,s_3)|\,|\phi(s_1)|\, ds_1 ds_2 ds_3$$

$$\leq \|\phi\|_2 \iiint \left(\int |F(s_1-t,s_2,s_3)|^2 ds_1\right)^{1/2} ds_2 ds_3$$

$$= \|\phi\|_2 \iint \left(\int |F(s_1,s_2,s_3)|^2 ds_1\right)^{1/2} ds_2 ds_3 \;;$$

Además, como F es rápidamente decreciente, existe un compacto $I_1 \times I_2 \times I_3$, I_i, $(i = 1,2,3)$, intervalos compactos en $\mathbb{R}$, y un $M > 0$ tal que

$$|F(s_1,s_2,s_3)| \leqslant \frac{M}{(1+s_1^2)^2(1+s_2^2)^2(1+s_3^2)^2}$$.

para cada s_1, s_2 fijos:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |F(s_1,s_2,s_3)|^2 ds_1\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{I_1} |F(s_1,s_2,s_3|^2 \; ds_1\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{I_1} |F(s_1,s_2,s_3)|^2 \; ds_1\right)^{1/2} \leqslant m(I_1)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |F(s_1,s_2,s_3)| ds_1 +$$

$$+ \frac{M^{1/2}}{(1+s_2^2)(1+s_3^2)} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{ds_1}{(1+s^2)}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant m(I_1)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |F(s_1,s_2,s_3)| ds_1 + \frac{M^{1/2}}{(1+s_2^2)(1+s_3^2)} \pi^{1/2} \quad ;$$

de donde

$$|\pi_F^{\lambda}(\phi)(t)| \leqslant \|\phi\|_2 \; (m(I_1)^{-1/2} \; \|F\|_1 + M^{1/2}\pi^{5/2}), \quad (t\in\mathbb{R}) \; ,$$

es decir, $\pi_F^{\lambda} \phi(t)$ es uniformemente acotada.

2) $\pi_F^{\lambda}(\phi)(t)$ es C^{∞} ; en efecto como $F\in S(H)$,

$s_2^j \frac{\partial^{k-j}}{\partial s_1^{k-j}} F(s_1,s_2,s_3) \in S(H)$ $(k \geqslant j \geqslant 1)$, luego podemos

derivar bajo la integral y

$$\frac{d^k}{dt^k}\Pi_F^\lambda(\phi)(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}(i\lambda)^j(-1)^{k-j}\iiint\frac{\partial^{k-j}}{\partial s_1^{k-j}}F(s_1-t,s_2,s_3)$$

$$s_2^j\, e^{i\lambda s_2 t}\, e^{i\lambda s_3}\, \phi(s_1)ds_1ds_2ds_3$$

$$= \Pi_H^\lambda(\phi)(t) \quad , \quad H\in S(H) \ ,$$

donde $H(s_1,s_2,s_3) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(i\ )^j(-1)^{k-j}\frac{\partial^{k-j}}{\partial s_1^{k-j}}F(s_1,s_2,s_3)\cdot s_2^j$

3) Sea $k\in\mathbb{N}$ entonces

$$t^k\Pi_F^\lambda\phi(t) = t^k\iiint F(s_1,s_2,s_3)e^{i\lambda s_2 t}\, e^{i\lambda s_3}\phi(t+s_1)ds_1ds_2ds_3$$

$$= \iiint t^k\, F(s_1,s_2,s_3)e^{i\lambda s_2 t}ds_2\, e^{i\lambda s_3}\phi(t+s_1)ds_1ds_2\, s_3$$

$$= \left(\frac{i}{\lambda}\right)^k\iiint\frac{\partial^k}{\partial s_2^k}F(s_1,s_2,s_3)e^{i\lambda s_2 t}\, e^{i\lambda s_3}\phi(t+s_1)ds_1ds_2\,ds_3$$

$$= \Pi_G^\lambda(\phi)(t) \quad , \quad G\in S(H) \ ,$$

con $G(s_1,s_2,s_3) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^k\frac{\partial^k}{\partial s_2^k}\ F(s_1,s_2,s_3)$.

Combinando (1),(2),(3), se obtiene el lema.

<u>Lema c)</u> Para cada $F\in S(H)$

$$\Psi_F(s,t) = \iint F(s,s_2,s_3)e^{i\lambda s_3}\, e^{i\lambda s_2 t}ds_2ds_3 \ , \ ((s,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \ ,$$

es rápidamente decreciente en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Nótese que $\Pi_F^\lambda(\phi)(t) = \int \Psi_F(s_1,t)\phi(t+s_1)ds_1$

$$= < \Psi_F(\cdot,t), \overline{\phi(t+\cdot)} > , \quad (t\in\mathbb{R}) .$$

Demostración:

Por argumentos análogos a los del lema b), (2)(3) se comprueba que Ψ_F es de clase C^∞ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Además

$$t^k s^\ell \frac{\partial^{k'+\ell'}}{\partial t^{k'} \partial s^{\ell'}} \Psi_F(s,t) = \Psi_H(s,t), \quad ((s,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ k,\ell,\ell',k'\in\mathbb{N})$$

donde $H\in S(H)$ y depende de F, k,ℓ,k',ℓ' .

Luego bastaría demostrar que Ψ_F es uniformemente acotada, pero;

$$|\Psi_F(s,t)| \leq \iint |F(s\ ,s_2,s_3)|\,ds_3ds_2$$

y usando que $F\in S(H)$ en un argumento análogo al de b)(1), se comprueba el acotamiento.

Lema d.) Para cada $F\in S(H)$ y $\lambda\in\mathbb{R}^x$

$$\sum_{n,m} | < \Pi_F^\lambda\phi_n, \phi_m > | < \infty$$

donde $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la base de Hermite de $L^2(\mathbb{R})$.
Se dice que Π_F^λ es sumable.

Demostración:

Para m fijo por el lema 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} |<\Pi_F^\lambda \phi_m, \phi_n>| \leq |<\Pi_F^\lambda\phi_m, \phi_o>| + |<\Pi_F^\lambda\phi_m, \phi_1>|$$

$$+ C\|P^2(\Pi_F^\lambda\phi_m)\|_2$$

$$= |<\phi_m, \Pi_F^\lambda\phi_o>| + |<\phi_m, \Pi_F^\lambda\phi_1>|$$

$$+ \|\Pi_H^2(\phi_m)\|_2 \quad ;$$

donde $H \in S(H)$ y depende del operador diferencial P^2. Como $F \in S(H)$, $\Pi_F^\lambda \phi_i \in S(\mathbb{R})$, $i = 0,1$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |<\phi_m, \Pi_F^\lambda \phi_i>| < \infty \quad , i = 0,1, \ldots ;$$

por lo que basta demostrar que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \| \Pi_H^\lambda(\phi_m) \|_2 < \infty$$

Pero

$$\|\Pi_H^\lambda\phi_m\|_2 = (\int_{\mathbb{R}} |\Pi_H^\lambda\phi_m(t)|\,|\Pi_H^\lambda\phi_m(t)|dt)^{1/2}$$

$$\leq (\int_{\mathbb{R}} |\Pi_H^\lambda\phi_m(t)| \,[\int|\Psi_H(s,t)ds\,]\,dt)^{1/2} \quad ,$$

(pues $\phi_m(t) \leq 1$) .

$$\leq [\iint_{\mathbb{R}\,\mathbb{R}} |\Psi_H(s,t)|dsdt]^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |\Pi_H^\lambda\phi_m(t)|^{1/2}\int|\Psi_H(s,t)|dsdt.$$

Nótese que si $\iint|\Psi_H(s,t)|dsdt = 0$

entonces

$$\|\Pi_H^\lambda\phi_m\|_2 = 0 \;, \quad (m\in\mathbb{N})$$

Por otro lado; usando el lema a); para t fijo

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\Pi_H^{\lambda}\phi_m(t)|^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} | < \Psi_H(\cdot,t),\phi_m(\cdot+t) > |^{1/2}$$

$$\leq \sum^{4} | <\Psi_H(\cdot,t),\phi_m(\cdot+t) >|^{1/2}$$

$$+ C\|P^5(\Psi_H(\cdot-t,t)\|_2$$

$$\leq C' + C\|\Psi_{H'}(\cdot-t,t)\|_2$$

donde $H' \in S(H)$ y depende de operador P^5 que es suma de operadores del tipo $s^k \dfrac{d^{\ell}}{d\ell^s}$ con $k,\ell \leq 5$, puesto que

$$\|\Psi_{H'}(\cdot-t,t)\|_2 = (\int|\Psi_{H'}(s-t,t)|^2 ds)^{1/2}$$

$$= (\int|\Psi_{H'}(s,t)|^2 ds)^{1/2} ,$$

es acotada ya que $H' \in S(H)$, obtenemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\Pi_H^{\lambda}\phi_m(t)|^{1/2} \leq M \text{ , para algún } M \geq 0 \text{ , } (t \in \mathbb{R}) .$$

Combinando este resultado con el anterior y usando el teorema de convergencia monótona, tenemos

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\Pi_H^{\lambda}\phi_m\|_2 \leq M(\iint|\Psi_H(s,t)|dsdt)^{1/2} < \infty$$

con lo que termina la demostración del Lema.

Con el Lema c) se asegura que Π_F^{λ} tiene traza para cada $\lambda \in \mathbb{R}^x$ y para cada $F \in S(H)$.

Demostración del Teorema.

Nos resta calcular la traza del operador Π_F^λ , $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $F \in S(H)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} < \Pi_F^\lambda \phi_m , \phi_m > = \sum_{m=0}^{\infty} \int < \Psi_F(\cdot - t, t), \phi_m > \phi_m(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=0}^{\infty} < \Psi_F(\cdot - t, t), \phi_m > \phi_m(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Psi_F(0,t)\, dt$$

$$= \iiint F(0,s_2,s_3)\, e^{i\lambda s_2 t}\, e^{i\lambda s_3} ds_2 ds_3 dt$$

$$= \iint \hat{F}(0,\cdot,s_3)(\lambda t)\, dt e^{i\lambda s_3} ds_3$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \iint \hat{F}(0,\cdot,s_3)(t)\, dt\; e^{i\lambda s_3} ds_3$$

$$= \frac{2\pi}{|\lambda|} \int F(0,0,s_3)\, e^{i\lambda s_3} ds_3 .$$

El intercambio de límites es justificado por la desigualdad de Schwartz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int | < \Psi_F(\cdot - t, t), \phi_m > \| \phi_m(t) | dt \leq \sum_{m=0}^{\infty} \| \Pi_F^\lambda \phi_m \|_2 \quad ;$$

el resto de los pasos consiste en usar el comentario del Lema 1 en la función Ψ_F ; aplicar el Teorema de Fubini; el cambio de variables, y la fórmula de inversión en $S(\mathbb{R})$.

Hemos terminado la demostración.

16.) Definición: El carácter generalizado asociado a la representación unitaria e irreductible Π^z de H, $z \in Z$, es la distribución temperada

$$F \longmapsto Tr\Pi^z_F \qquad (F \in S(H),\ z \in Z)\ ,$$

y

$$Tr\Pi^z_F = \begin{cases} \hat{F}(s,t,0) & \text{si } z=(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \dfrac{2\pi}{|\lambda|} \displaystyle\int F(0,0,s)e^{i\lambda s}ds & \text{si } z = \lambda \in \mathbb{R}^x \end{cases} .$$

17.) La aplicación

$$F \longmapsto Tr\Pi^z_{F^* * F} \qquad (z \in Z)\ ,$$

asigna a cada $F \in S(H)$ la norma H.S. de Π^z_F.

Se tiene que para $z = \lambda \in \mathbb{R}^x$

$$\|\Pi^\lambda_F\|^2_{HS} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Pi^\lambda_F \phi_n\|^2_2 = Tr(\Pi^\lambda_F)^* \Pi^\lambda_F = Tr\Pi^\lambda_{F^* * F}$$

$$= \frac{2\pi}{|\lambda|} \int (F^* F)(0,0,s)e^{i\lambda s}ds$$

$$= \frac{2\pi}{|\lambda|} \iint |\hat{F}(x,y,\cdot)(\lambda)|^2 dxdy \quad ,$$

usando el cambio de variable; y para $z = (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\|\Pi^{(s,t)}_F\|^2_{HS} = |\hat{F}(s,t,0)|^2 \quad .$$

18.) Observación: Es claro que si $z \neq z'$ entonces $Tr\Pi^z \neq Tr\Pi^{z'}$, $(z,z' \in Z)$.

Cabe hacerse la pregunta siguiente:
¿Proviene la distribución $\mathrm{Tr}\Pi^{z}$ de una función F_z, localmente integrable en H ? . Es decir, ¿existe una función F_z localmente integrable en H tal que

$$\mathrm{Tr}\Pi_G^z = \int_H G(s)F_z(s)\,ds \quad ; \quad (G\in S(H))$$

para algún $z\in Z$? .

En el caso $z=(s,t)$ la respuesta es afirmativa y

$$F_{(s,t)}(x,y,z) = \mathrm{Tr}\Pi_{(x,y,z)}^{(s,t)}$$

es el carácter corriente de $\Pi^{(s,t)}$.

La situación con $\lambda\in\mathbb{R}^{x}$ es más interesante: la ecuación

$$\mathrm{Tr}\Pi_G^{\lambda} = \frac{2\pi}{|\lambda|}\int_{\mathbb{R}} G(0,0,s)e^{i\lambda s}ds = \iiint G(x,y,z)F_{\lambda}(x,y,z)\,dxdz$$

$(G\in S(H))$, sugiere formalmente que

$$F_{\lambda}(x,y,z) = \frac{2\pi}{|\lambda|}\ \delta_{(0,0)}(x,y)\cdot e^{i\lambda z} \quad ;$$

donde $\delta_{(0,0)}$ es la "función corriente" asociada a la Delta de Dirac en (0,0), que es infinita en (0,0) y nula en otros puntos.

De ser cierta esta conjetura formal se tiene una respuesta negativa a la cuestión planteada.

Verifiquemos que no existe tal F_λ :

Sea

$$W(x,y,z,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{(4\Pi\varepsilon)^3}} \cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)\frac{1}{4\varepsilon}} \quad \left[(x,y,z)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \varepsilon > 0\right].$$

El núcleo de Weierstrass en $\mathbb{R}^3$.

Si F_λ existiera entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\int\int W(x-s_1,y-s_2,z-s_3,\varepsilon)F\ (s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 = F_\lambda(x,y,z)$$

salvo en un conjunto nulo. (Ver Stein-Weiss en "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces" pg. 12-13)

Entonces usando la ecuación, obtenemos:

$$F\ (x,y,z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\Pi}{|\lambda|}\ \frac{1}{\sqrt{(4\Pi\varepsilon)^3}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2+(z-s)^2)\frac{1}{4\varepsilon}} \cdot e^{i\lambda s}ds$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\Pi}{|\lambda|}\ \frac{1}{\sqrt{(4\Pi\varepsilon)^3}} \cdot e^{(x^2+y^2)\frac{1}{4\varepsilon}} \cdot e^{i\lambda t_3} \cdot e^{-\lambda^2\varepsilon} \cdot \sqrt{4\Pi\varepsilon}$$

$$= \begin{cases} +\infty \cdot \frac{2\Pi}{|\lambda|}\ e^{i\lambda z} = +\infty & \text{si}\quad (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si}\quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$

CAPITULO III

En éste capítulo definiremos la transformada de Fourier (en el grupo H) sobre $L^1(H)$. Además; encontraremos una medida positiva d^P, sobre Z; que permite desarrollar la Delta de Dirac, δ_e, del grupo , como integral sobre Z de los caracteres generalizados χ^Z, $(Z \in Z)$; veremos que esta expansión es equivalente a la fórmula de inversión sobre $S(H)$ y, por densidad de $S(H)$ en $L^2(H)$, extenderemos la transformada de Fourier, F, a una isometría de $L^2(H)$ sobre $L^2(R^X, HS(L^2(R), d^P)$.

I) La medida de Plancherel sobre Z.

Buscaremos una medida positiva, que anotaremos d^P, que permita la expansión:

$$\delta_e = \int_Z \operatorname{Tra} \pi^Z \, d^P(Z) = \int_Z \chi^Z \, d^P(Z),$$

de la Delta de Dirac; es decir tal que:

$$F(e) = \int_Z \operatorname{Tra} \pi^Z_F \, d^P(Z) = \int_Z \chi^Z(F) \, d^P(Z)$$

para cada $F \in S(H)$.

Sabemos por cálculos del segundo capítulo que:

$$[\text{illegible}] = \mathrm{Tr}\ \pi_F^Z = \begin{cases} \hat{F}(S, t, 0) & \text{si } Z = (S,t) \in R \times R \\ \dfrac{2\pi}{|\lambda|} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} F(0,0,S)\, e^{i\lambda s}\, ds & \text{si } Z = \lambda \in R^* \end{cases}$$

en base a está información se caracteriza totalmente a la medida d^P:

1) Proposición.

Consideremos sobre Z la tribu $\Sigma = B(R^*) \cup B(R \times R)$ y la medida positiva d^P sobre Σ definida por:

$$d^P(B) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_B |\lambda|\, dm(\lambda), \quad (B \in B(R^*),$$

y:

$$d^P(R \times R) = 0;$$

donde $B(R^*)$, (respectivamente $B(R \times R)$) es la tribu de los borelianos en R^* (respectivamente $R \times R$); y $dm(\lambda)$ es la medida de Lebesgue en $R - \{0\}$.

Entonces:

i) $Z \to \mathrm{Tr}\ \pi_F^Z$ es Σ-medible para cada $F \in S(H)$;

ii) $\delta_e = \displaystyle\int_Z \mathrm{Tr}\ \pi^Z\, d^P(Z)$.

Además (Z, Σ, d^P) es único; en el sentido de que si $(Z, \Sigma', d^{P'})$ es otro espacio con medida, que satisface i), ii), entonces $\Sigma \subset \Sigma'$ y $d^{P'}/\Sigma = d^P$.

Demostración.

La parte i) se sigue inmediatamente del hecho de que la aplicación de R^X en C

$$\lambda \to \frac{2\pi}{|\lambda|} \int F(0, 0, S)\, e^{i\lambda s}\, ds$$

es continua; y que la aplicación de R^2 en C

$$(S, t) \to \hat{\hat{F}}(S, t)$$

es continua.

La parte ii) se deduce de la fórmula de inversión clásica en R: Si $F \in S(H)$ entonces:

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\hat{F}}(0,0,\cdot)(\lambda)\, dm(\lambda) = \int_{R-\{0\}} \frac{2\pi}{|\lambda|} \int F(0,0,\cdot)(S)\, e^{iS\lambda}\, ds\, \frac{|\lambda|}{(2\pi)^2}\, dm(\lambda)$$

$$= \int_Z \chi^Z(F)\, d^P(\lambda) = \int_Z \mathrm{Tra}\ \pi_F^Z\ d^P(Z)$$

Demostremos la unicidad.

Supongamos que existe un espacio con medida $(Z, \Sigma', d^{P'})$ que satisface i), ii).

Demostraremos que necesariamente $\Sigma \subset \Sigma'$ y que $d^{P'}/\Sigma = d^{P}$.

a) Los borelianos de R^{*} son Σ'-medibles:

Sea $a < b < 0$ ó $0 < a < b$, $a, b \in R$

entonces existe una función $g \in S(R)$ tal que:

$$\hat{g}(x) > 0 \qquad (x \in (a, b))$$

$$\hat{g}(x) = 0 \qquad (x \notin (a, b))$$

pues la transformada de Fourier en R es un homeomorfismo de $S(R)$ en $S(R)$.

Sea $f \in S(R \times R)$, tal que, $f(0, 0) = 1$

Definiendo:

$F(x, y, Z) = f(x, y)\, g(Z)$ obtenemos una función en $S(H)$ y:

$$\mathrm{Tr}\ \pi_F^Z = \begin{cases} 0 & \text{si } Z = (x, y) \in R \times R \\ \dfrac{\hat{g}(a)}{|\lambda|} \cdot 2\pi & \text{si } Z = \lambda \in R^{*}; \end{cases}$$

Se tiene $(a, b) = \{Z \in Z / \mathrm{Tr}\ \pi^Z > 0\}$ es Σ' medible por i), de donde los borelianos de R^{*} son Σ'-medibles.

b) Los borelianos de $R \times R$ son Σ'-medibles: Sean I, J ... abiertos en R; entonces, por razonamientos análogos a los ... s, existe una función $f \in S(R \times R)$ tal que:

$$\hat{f}(x, y) > 0, \qquad ((x,y) \in I \times J) ;$$

$$\hat{f}(x,y) = 0, \qquad ((x,y) \notin I \times J)$$

Sea $g \in S(R)$ tal que $\hat{g}(x) > 0$, $(x \in R)$; entonces $F($ y, z $f(x,y)\, g(Z) \in S(H)$ y:

$$I \times J \cup R^{x} = \{Z \in Z / \mathrm{Tr}\; \pi_{F}^{Z} > 0\} \text{ es } \Sigma\text{-medible } ...$$

Por lo tanto los borelianos de $R \times R$ son Σ'-medibles

Hemos probado que $\Sigma \subset \Sigma'$, lo que implica; que si f: ... es tal que:

f/R^{x} y $f/R \times R$ son continuas, respecto de las topologías usuales en R^{x} y $R \times R$ respectivamente, entonces f es Σ'-medible ... la condición ii) la podemos anotar como:

$$F(0,0,0) = 2\pi \int_{R^{x}} \hat{F}(0,0,0)(\lambda)\, \frac{d^{P'}(\lambda)}{|\lambda|} + \int_{R \times R} \hat{F}(x,y,0)\, d^{P'}(x,y), \quad \in$$

c) Demostraremos que $d^{P'}(R \times R) = 0$.

La idea es probar que $d^{P'}((-n,n) \times (-n, n)) = 0$, $(n \in N)$, calculemos primero $d^{P'}((-1, 1) \times (-1, 1)$. Usando ii).

Escojamos $f_n \in S(R^2)$, tal que, $\hat{f}_n$ sea una función meseta de tipo C^∞ con:

1) $\hat{f}_n(x,y) = 1$, $((x,y) \in [-1 + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}] \times [-1 + \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n}]$

$= I_n \times I_n)$, $(n \in N)$,

2) $1 \geq \hat{f}_n(x,y) > 0$, $((x,y) \in I \times I - I_n \times I_n = D_n;\ I = (-1, 1))$, $(n \in N)$;

3) $\hat{f}_n(x,y) = 0$, $((x,y) \notin I \times I)$

4) $\hat{f}_n(x,y) < \hat{f}_{n+1}$ $((x,y) \in R \times R)$.

Esta construcción es posible pues dado un intervalo cerrado $[a, b]$ en R y $\varepsilon > 0$ existe una función meseta f tal que $f/[a, b] = 1$; $f(x) > 0$, $(x \in (a - \varepsilon, a) \cup (b, b + \varepsilon))$; f cero en otras partes y porque la transformada de Fourier en R^2 es un homeomorfismo de $S(R^2)$ en $S(R^2)$

Se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(x,y) = \Psi_{(-1,1)x(-1,1)}(x,y), \quad ((x,y) \in R \times R);$$

donde:

$\Psi_{(-1,1)x(-1,1)}$ es la función característica de $(-1,1)x(-1,1)$

Puesto que $\hat{f}_n$ es continua de R^2 en C se tiene que es $\Sigma' \cap P(R \times R)$-medible y por el Teorema de Convergencia Dominada:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^2} \hat{f}_n(x,y) \, d^{P'}(x,y) = \int_{R^2} \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n(x,y) \, d^{P'}(x,y)$$

$$= d^P \{(-1,1)x(-1,1)\}$$

Por otro lado, por la fórmula de inversión clásica en $R \times R$,

$$0 \leq f_n(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \hat{f}_n(x,y) \, dm(x,y)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \left[dm\{I_n \times I_n\} + \int_{P_n} \hat{f}_n(x,y) \, dm(x,y) \right]$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \left[(2 - \frac{2}{n})^2 + m(D_n) \right];$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0,0) = \frac{1}{\pi^2}$$

Sea $g \in S(\mathbb{R})$ entonces $F_n(x,y,z) = f_n(x,y)g(z) \in S(H)$ y por ii)

$$F_n(0,0)g(0) = 2\pi\, F_n(0,0) \int_{\mathbb{R}^x} \hat{g}(\lambda)\, \frac{d^P(\lambda)}{|\lambda|} + \hat{g}(0)\, d^P\{(-1,1)x(-1,1)\}$$

$(n \in N)$,

pasando al límite, cuando n tiende a infinito;

$$(*)\quad \frac{1}{\pi^2}\, g(0) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^x} \hat{g}(a)\, \frac{d^P(\lambda)}{|\lambda|} + \hat{g}\,(0)\, d^P\,(\{(-1,1)x(-1,1)\}$$

$(g \in S(H))$

Se deduce que:

$$(**)\quad \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \int_{(-1,0)\cup(0,1)} \frac{d^P(\lambda)}{|\lambda|} + d^P\,\{(-1,1)x(-1,1)\}\ ;$$

construyendo la sucesión de funciones de $S(H)$ definidas por:

(1) $\hat{g}_n(x) = 1$, $(x \in [-1-\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{2n}], n \in N)$;

(2) $1 > \hat{g}_n(x) > 0$, $(x \in (-1, -1+\frac{1}{2n})\ .\ \cup (1-\frac{1}{2n}, 1)$

$=: \overset{\circ}{0}_n$. $n \in N)$;

(3) $\hat{g}_n(x) = 0$, $(x \notin I = (-1,1))$;

(4) $\hat{g}_n(x) \leq \hat{g}_{n+1}(x)$, $(x \in R)$.

y pasando al límite en (**).

Se procede ahora a calcular $\displaystyle\int_{(-1,0)\cup(0,1)} \frac{dP'(\lambda)}{|\lambda|}$:

se define la sucesión (f_n) de funciónes de S (R) dada por las siguientes condiciones:

(1) $\hat{f}_n(x) = 1$, $(x \in [-1+\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^n}]$; $n \in N)$;

(2) $0 < \hat{f}_n(x) < 1$, $(x \in (-1, -1+\frac{1}{2^n}) \cup (-\frac{1}{2^n}, 0) =: D_n''$; $n \in N)$;

(3) $\hat{f}_n(x) = 0$, $(x \notin (-1,0))$

y la sucesión $\{h_n\}_{n \in N}$ por:

$$\hat{h}_n(x) = \hat{f}_n(x-1)$$

Definiendo la sucesión $\{g_n\}_{n \in N}$ de S(R) por:

$$\hat{g}_n(x) = \hat{f}_n(x) + \hat{h}_n(x), \quad (x \quad R, n \quad N);$$

y pasando al límite en (*).

Se obtiene:

$$\int_{(-1,0)\cup(0,1)} \frac{d^{P'}(\lambda)}{|\lambda|} = \frac{1}{2\pi^2}$$

y reemplazando en (**) resulta:

$$d^{P'}\{(-1,1) \times (-1,1)\} = 0$$

El razonamiento se puede extender a cualquier intervalo de donde se concluye que $d^{P'}(R^2) = 0$.

d) Notemos que esto reduce la ecuación ii) a:

$$F(0,0,0) = 2\pi \int_{R^x} \hat{F}(0,0,\cdot)(\lambda) \frac{d^{P'}(\lambda)}{|\lambda|}; \quad (F \in S(H));$$

en particular para $g \in S(R)$

$$g(0) = 2\pi \int_{R^x} \hat{g}(\lambda) \frac{d^{P'}(\lambda)}{|\lambda|},$$

y:

$$\|g\|_2^2 = 2\pi \int_{R-\{0\}} |\hat{g}(\lambda)|^2 \frac{d^{P'}(\lambda)}{|\lambda|}$$

Usando esta nueva forma de la ecuación ii) y por argumentos análogos a los de b), se comprueba que para cualquier intervalo (a,b)

$$d_m\{(a,b)\} = (2\pi)^2 \int_{(a,b)} \frac{dP'(\lambda)}{|\lambda|} \quad . \text{ (d_m es la medida de lebesgue en R^x).}$$

De donde deducimos que para cualquier boreliano B de R^x

$$d_m\{B\} = (2\pi)^2 \int_B \frac{dP'(\lambda)}{|\lambda|} \quad ;$$

Por lo que en la tribu boreliana $\mathcal{B}$ de R^x $d_m \ll d^P$ y $d^P \ll d_m$; es decir d_m es una medida absolutamente continua respecto de d^P y recíprocamente.

Por el Teorema de Radon Nikodim existen únicas funciones $\mathcal{B}$-medibles positivas tal que:

$$d^P(B) = \int_B g(x)\, dm(x) \text{ y } dm(B) = \int_B f(x)\, dm(x), \quad (B \in \mathcal{B}),$$

y:

$f^{-1}(x) = g(x)$ (casi siempre respecto de d_m) pero por unicidad $f(\lambda) = \dfrac{(2\pi)^2}{|\lambda|}$ y luego $g(\lambda) = \dfrac{|\lambda|}{(2\pi)^2}$

de donde se llega a la conclusión.

II) Hemos obtenido una representación integral de la Delta de Dirac, δ_e, en términos de los caracteres generalizados de H:

$$\delta_e = \int_Z \mathrm{Tr}\, \pi^Z \; d^P(Z) \, ;$$

esta representación es única, por la unicidad de la medida d^P.

De $F(e) = \int_Z \mathrm{Tr}\, \pi^Z_F \, d^P(Z)$ (*), $(F \in S(H))$,

por traslaciones; tenemos la Fórmula de Inversión:

$$F(x) = \int_Z \mathrm{Tr}\; \pi^Z_{x^{-1}} \; \pi^Z_F \; d^P(Z), \qquad (x \in H),$$

o de manera equivalente

$$\delta_x = \int_Z \mathrm{Tr}\, \pi^Z_{x^{-1}} \; \pi^Z \; d^P(Z), \qquad (x \in H),$$

donde la aplicación de $S(H)$ en C,

$$F \longrightarrow \mathrm{Tr}\; \pi^Z_{x^{-1}} \; \pi^Z_F$$

es una distribución temperada, cada vez que se fija $x \in H$ y $z \in Z$; cuyo valor en $F \in S(H)$ es:

$$\operatorname{Tr} \pi^{Z}_{(u,v,w)^{-1}} \pi^{Z}_{F} = \begin{cases} e^{i(Su+tv)} \ \hat{F}(S,t,o) & \text{si} \quad Z = (S,t) \in R \times R, \\ \dfrac{2\pi}{|\lambda|} \ e^{-i\lambda w} \displaystyle\int_{R} F(u,v,S)\, e^{i\lambda s}\, ds & \text{si} \ Z = \lambda \in R^{x} \end{cases}$$

Para $(u,v,w) \in H$ y $z \in Z$.

De la fórmula * se deduce que:

$$\|F\|_2^2 = (F * F^*)(e) = \int_S \operatorname{Tr} \pi^{Z}_{F} \pi^{Z}_{F^*} \, d^P(Z) = \int_Z \|\pi^{Z}_{F}\|^2_{HS} \, d^P(Z)$$

para cada $F \in S(H)$. (El análogo de la identidad de Parceval).

Observación:

Se puede definir la convolución de una distribución temperada μ con $F \in S(H)$; como la función

$$(x,y,z) \to \mu(\tau_{(x,y,z)^{-1}} F) =: (\mu * F)\ (x,y,z).$$

En particular, para $z \in Z$ y $F \in S\ (H)$,

$$(\operatorname{Tr} \pi^{Z} * F)\ (x) = \operatorname{Tr} \pi^{Z}_{x^{-1}} \ \pi^{Z}_{F} \ , \quad (x \in H),$$

y además:

$$(\delta_e * F)\ (x) = F(x) \ , \qquad (x \in H);$$

de donde:

$$F = \delta_e * F = \int_Z \operatorname{Tr} \pi^Z * F \; d^p(Z).$$

Notemos que, para cada $z \in Z$,

$$V_Z = \{\operatorname{Tr} \pi^Z * F / F \in S(H)\}$$

es un espacio vectorial de funciones C^∞ y acotadas de H; que, en el caso finito, corresponde a la componente isotípica asociada a la representación π^Z.

En el caso continuo:

$$V_Z \cap L^2(H) = (0)$$

y se puede probar directamente que V_Z es estable por la acción izquierda y derecha del grupo H.

Además si $Z = \lambda \in R^X$, la aplicación

$$\frac{2\pi}{|\lambda|} e^{-i\lambda} \int_R F(\cdot,\cdot,s)e^{i\lambda s}\, ds + \frac{2\pi}{|\lambda|} \int_R F(\cdot,\cdot,s)e^{i\lambda s}\, ds, \quad (F \in S(H)),$$

es una inyección lineal de V_λ en un subespacio denso de $L^2(R \times R)$

Si $Z = (S, t) \in R \times R$ la aplicación

$$e^{i(S\cdot + t\cdot)}\ \hat{F}(S,t,o) \to \hat{F}(S,t,o), \quad (F \in S(H)),$$

es un isomorfismo lineal de $V_{(S,t)}$ en C.

3) Definición.

La transformada de Fourier de $F \in L^1(H)$ evaluada en π^Z, $z \in Z$, es el operador:

$$\int_H F(S)\ \pi_S^z\ dS =: \hat{F}(z) =:$$

del espacio de la representación πz.

Notación.-

El espacio de la representación π^Z lo denotaremos H^Z.

$$H^Z = \begin{cases} L^2(R) & \text{si } Z = \lambda \in R^x \\ R \times R & \text{si } Z = (S,t) \in R \times R. \end{cases}$$

Por el Teorema del punto 10 del Capítulo II.

$$\widehat{F * G}(z) = \hat{F}(\cdot)\ \hat{G}(z), \quad (z \in Z,\ F,\ G, \in L^1(H)).$$

y:

$$\widehat{T_g F}\,(Z) = \pi_g^Z\,\hat{F}(Z), \quad (Z \in \mathcal{Z},\ g \in H,\ F \in L^1(H);$$

reescribiendo la Fórmula de Inversión obtenemos:

$$F(x) = \int_{\mathcal{Z}} \mathrm{Tr}\ \pi_{x^{-1}}^Z\ \hat{F}(Z)\ d^P(Z)$$

$$= \int_{\mathcal{Z}} \mathrm{Tr}\ \widehat{T_{x^{-1}} F}(Z)\ d^P(Z),$$

y:

$$\|F\|_2^2 = \int_{\mathcal{Z}} \|\hat{F}(Z)\|_{HS}^2\ d^P(Z),$$

para cada $F \in S(H)$.

Con el fin de extender estos resultados a $L^2(H)$ y obtener el análogo del Teorema de Plancherel en $L^2(\mathbb{R}^n)$, precisaremos el espacio de llegada de la aplicación

$$Z \to \hat{F}(Z), \quad (F \in S(H)),$$

definido en $\mathcal{Z}$, introduciendo la noción de suma continua de espacios de Hilbert.

4) Proposición.

El espacio de todos los operadores de Hilbert-Schmidt de H^z, $z \in Z$, $(HS\ (H^z))$ es un espacio de Hilbert complejo, con la suma de operadores y ponderación por escalar usual, y con el producto

$$< A, B >_z = \operatorname{Tr} AB^*, \quad (A, B \in HS(H^z)) \quad z \in Z$$

Dem. Apéndice.

5) Definición.

1. Diremos que la aplicación

$$z \to HS(H^z)$$

es un campo de espacios de Hilbert sobre Z.

2. Un campo de vectores A sobre Z, asociado al campo de espacios de Hilbert

$$z \to HS(H^z),$$

es una aplicación

$$z \to A(z),$$

definida en Z, tal que $A(z) \in HS(H^z)$, para cada $z \in Z$.

De ahora en adelante sólo, diremos campos vectoriales sobre Z, sin mencionar que estan asociados al campo de espacios de Hilbert $Z \to HS(H^Z)$.

3) Diremos que el campo de vectores A sobre Z es d^P-medible si

$$Z \to \langle A(Z), A(Z) \rangle_Z = \|A(Z)\|_{HS}$$

es d^P-medible; y que A es cuadrado integrable si

$$Z \to \|A(Z)\|_{HS}$$

es d^P-cuadrado sumable en Z.

Ejemplos:

La transformada de Fourier de $F \in S(H)$

$$Z \to \hat{F}(Z)$$

es un campo de vectores sobre Z cuadrado sumable por construcción.

También si $f \in L^\infty(Z, d^P)$ y $F \in S(H)$ la aplicación

$$Z \to f(Z) \quad v_F^Z$$

es un campo de vectores cuadrado sumable.

Anotaremos $\mathcal{L}_2(Z)$ para indicar la familia de todos los campos vectoriales cuadrado sumable de Z.

6) Prop. $\mathcal{L}_2(Z)$ con las aplicaciones

$$(A + B)(Z) := A(Z) + B(Z)$$

$$(\alpha A)(Z) \ := \alpha\, A(Z)$$

$$(A, B \in \mathcal{L}_2(Z),\ z \in Z)$$

es un espacio vectorial complejo y la aplicación

$$(A, B) \to \int_Z < A(Z), B(Z) >_Z d^P(Z) =: < A|B >$$

es un seudo-producto escalar en $\mathcal{L}_2(Z)$

Dem.

La primera afirmación es sencilla y no la demostraremos. Para la segunda se deduce que:

$$< A + \alpha\, B|C > = < A, C > + \alpha < B|C >$$

$$< A, B > = < B, A >$$

de la linealidad de la integral y de las propiedades de $<,>_Z$; además

$$| < A|B > | < \int_Z |< A(Z), B(Z) >_Z| d^P(Z)$$

$$< \int_Z \|A(Z)\|_Z \; \|B(Z)\|_Z \; d^P(Z)$$

$$< \left(\int_Z \|A(Z)\|_Z^2 \; d^P(Z) \right)^{1/2} \left(\int_Z \|B(Z)\|_Z^2 \; d^P(Z) \right)^{1/2},$$

y si:

$$0 = < A, A > = \int_Z \|A(Z)\|_Z^2 \, d^P(Z)$$

entonces $A(Z)$ es cero salvo en un subconjunto N_A de Z de medida nula.

Si definimos la relación, $\equiv$, por

$$A \equiv B \qquad d^P \; \{z \in Z/A(Z) \neq B(Z)\} = 0 \; , \quad (A, B \quad \mathcal{L}^2(Z))$$

se verifica que es una relación de equivalencia, que respecta la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{L}^2(Z)$; y que, bajo esta identificación, el seudo producto escalar $< | >$ de $\mathcal{L}^2(Z)$ se transforma en un producto escalar en el espacio vectorial cuociente

$$\mathcal{L}^2(Z)/\equiv \; =: \int_Z^{\oplus} HS(H^Z) \; d^P(Z).$$

Se dice que $\int_Z^{\oplus} HS(H^Z)\ d^P(Z)$ es la suma continua del campo de espacios de Hilbert

$$Z \to HS(H^Z)$$

respecto de la medida d^P.

Anotaremos $\int HS(H^Z) d^P(Z) := \int_Z^{\oplus} HS(H^Z) d^P(Z)$ y sus elementos los seguiremos escribiendo como campos vectoriales cuadrados sumables sobre Z.

Si $X \in \int HS(H^Z)\ d^P(Z)$ se anotará a veces

$$X =: \int^{\oplus} X(Z) d^P(Z)$$

El producto interior de X e Y en $\int HS(H^Z)\ d^P(Z)$ lo anotaremos $\langle X|Y \rangle$ y la norma de X será:

$\| X \| = \sqrt{\langle X|X \rangle}$; donde para calcular tomamos representantes de cada clase.

7) Proposición $\left(\int HS(H^Z) d^P(Z), \langle | \rangle \right)$ es un espacio de Hilbert.

Dem.:

Basta probar la completitud por la observación anterior.

Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en $\int HS(H^Z)d^P(Z)$ y sea $\{Y_k\}_{k\in N}$ Una sub-sucesión de $\{X_n\}_{n\in N}$ tal que:

$$\|Y_{k+1} - Y_k\| < \frac{1}{2^k}\ , \ (k \in N);$$

entonces:

$$\sum_1^k \|Y_{n+1} - Y_n\| < 1 \quad y \quad \sum_1^\infty \|Y_{n+1} - Y_n\| \leq 1.$$

Sea $G_N(Z) = \|Y_1(Z)\|_Z + \sum_{k=1}^N \|Y_{k+1}(Z) - Y_k(Z)\|_Z$; entonces G_N es d^P-medible y:

$$\left(\int_Z |G_N(Z)|^2\, d^P(Z)\right)^{1/2} \leq \left(\int_Z \|Y_1(Z)\|_Z^2\, d^P(Z)\right)^{1/2} +$$

$$\left(\int \sum_{k=1}^N \|Y_{k+1}(Z) - Y_k(Z)\|_Z^2\, d^P(Z)\right)^{1/2}$$

$$= \|Y_1\| + \|\sum_{k=1}^N [Y_{k+1} - Y_k]\|$$

$$\leq \|Y_1\| + 1$$

De donde, por el Teorema de convergencia monótona;

$$\int_Z (\|Y_1(Z)\|_Z + \sum_{k=1}^{\infty} \|Y_{k+1}(Z) - Y_k(Z)\|_Z)^2 \, d^P(Z) \leq (|||Y_1||| + 1)^2;$$

luego, salvo en un conjunto de medida nula N_ϕ de Z,

$$\|Y_1(Z)\|_Z + \sum_{k=1}^{\infty} \|Y_{k+1}(Z) - Y_k(Z)\|_Z \quad \text{es convergente y la}$$

sucesión:

$$Y_1(Z) + \sum_{k=1}^{N} (Y_{k+1}(Z) - Y_k(Z));$$

converge a un vector $X_o(Z) \in HS(H^Z)$ para cada $Z \notin N_\phi$

Definimos el campo:

$$X(Z) = \begin{cases} X_o(Z) & \text{si } Z \notin N_\phi \\ 0 & \text{si } Z \in N_\phi \end{cases}$$

X es d^P-medible, pues

$$Y_1(Z) + \sum_{n=1}^{k-1} [Y_{n+1}(Z) - Y_n(Z)] = Y_k(Z) \qquad (k \in N)$$

y se tiene que:

$$X(Z) = \lim_{n \to \infty} Y_n(Z) \quad (\text{en} \| \, \|_Z) \text{ salvo en } N_\phi$$

Finalmente:

$$|||X_k - X|||^2 = \int_Z \|X_k(Z) - X(Z)\|_Z^2 \; d^P(Z)$$

$$= \int_Z \lim_{N \to \infty} \|X_k(Z) - Y_N(Z)\|_Z^2 \; d^P(Z)$$

$$\leq \underline{\lim}_N \int_Z \|X_k(Z) - Y_N(Z)\|_Z^2 \; d^P(Z)$$

$$= \underline{\lim}_N \; |||X_k - Y_N|||$$

Puesto que la sucesión $\{X_k\}_{k \; N}$ es de Cauchy se tiene:

$$\lim_{k \to \infty} |||X_k - X|||^2 = 0$$

y como $X - Y_n \in \int HS(H^Z) \; d^P(Z)$ ciertamente

$$X \in \int HS(H^Z) \; d^P(Z)$$

8) Corolario.

Si $\{X_k\}_{k \in N}$ es una sucesión convergente a X en $\int HS(H^Z) \; d^P(Z)$ entonces existe una subsucesión $\{X_{ki}\}_{i \in N}$ de $\{X_k\}_{k \in N}$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} A_{ki}(Z) = A(Z), \text{ en } \|\;\|_Z,$$

salvo en $N_A \subset Z$, de medida nula.

9) Observación.

Como la medida d^P restringida a $R \times R$ es nula, las siguientes identificaciones son válidas:

$$\int_Z HS(H^Z)\, d^P(Z) = \int_{R^x} HS(H^\lambda)\, d^P(\lambda)$$

$$= \int_{R^x} HS(L^2(R))\, d^P(\lambda)$$

$$= L^2(R^x, HS(L^2(R)), d^P)$$

Usaremos frecuentemente estas identificaciones, notemos que los espacios de Hilbert. $HS(H^{(S,t)})$, $(S,t) \in R \times R$, son irrelevantes en la suma contínua de los $HS(H^Z)$, $z \in Z$.

10) Proposición.

Existe un isomorfismo de algebras isométrico

$$A \to K_A$$

de $HS(L^2(R))$ en $L^2(R \times R)$, donde $HS(L^2(R \times R))$ es un algebra con la composición de operadores y $L^2(R \times R)$ es un algebra con la convolución de núcleos:

$$(K * L)(S,t) = \int_R K(S,t)\, L(u,t)\, du;$$

$(K, L \in L^2(R \times R)$, $(S, t) \in (R \times R)$, y K_A está definido por:

$$(Af)(\cdot) = \int K_A(\cdot, S)\, f(S)\,dS, \quad (f \in L^2(R)).$$

Además:

$$\mathrm{Tr}\ AB = \int_R K_{AB}(S, S)\, dS, \quad (A, B \in HS(L^2(R)),$$

$$K_{A^*}(S, t) = \overline{K_A(t, S)} =: K_A^*(S, t) \quad (A \in HS\ L^2(R),$$
$$(S, t) \in (R \times R).$$

Dem.

Ver apéndice.

11) Observación.

Para $F \in S(\mathbb{H})$, $\lambda \in R^x$, se tiene

$$\hat{F}(\lambda)(\phi)(t) = \iiint F(S_1-t, S_2, S_3) e^{i\lambda S_3} e^{i\lambda S_2 t}\ \phi(S_1)\,dS_1 dS_2 dS_3$$

$(t \in R$, $\phi \in L^2(R))$, de donde es fácil probar que

$$K_F(S, t, \lambda) := \iint F(S-t, S_2, S_3) e^{i\lambda S_3}\ e^{i\lambda S_2 t}\, dS_2\, dS_3,$$

$((S, t) \in R \times R)$, es el núcleo, de $L^2(R \times R)$, asociado al operador de HS. $\hat{F}(\lambda)$.

Es natural preguntarse si $\hat{F}(\lambda) \in HS(L^2(R))$, $\lambda \in R^x$, para cada $F \in L^1(H)$. La respuesta es negativa:

Si se toma $F(X,Y,Z) = f(X)g(Y,Z)$, $((X,Y,Z) \in H)$, con $g \in L^1(R \times R)$ y $f \in L^1(R)$, pero $f \notin L^2(R)$, entonces $F \in L^1(H)$ y $\hat{F}(\lambda) \notin HS(L^2(R))$:

En efecto; tomando una aproximación de la unidad, en $L^2(R)$, se comprueba, que de existir un nucleo $K_F \in L^2(R \times R)$, asociado a $F(\lambda)$, entonces necesariamente:

$$K_F(S, t) = \iint F(S-t, S_2, S_3)\, e^{i\lambda S_3}\, e^{i\lambda S_2 t}\, dS_2\, dS_3$$

$$= f(S-t) \iint g(S_2, S_3) e^{i\lambda S_3}\, e^{i\lambda S_2 t}\, dS_2,\, dS_3,$$

salvo en un conjunto de medida nula, lo cual es imposible pues $f \notin L^2(R)$.

Tómese como ejemplo:

$$f(X) = \Psi_{(-1,1)}(X) \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \; g(Y, Z) = \frac{1}{1+Y^2+Z^2}, \quad (X, Y, Z \in R),$$

donde $\Psi_{(-1,1)}$ es la función característica de $(-1,1)$.

(2) Proposición:

La familia numerable de funciones de $S(H)$

$F_{n,m,k}(X,Y,Z) := \phi_n(X)\,\check{\phi}_m(Y)\,\check{\phi}_k(Z)$, $((X,Y,Z) \in H,\ n,m \in N_o)$ donde $\{\phi_i\}_{i\in N}$ es la base de Hermite de $L^2(R)$ y

$(\check{\phi}_i)^{\vee} = \phi_i$, $(i \in N_o)$, determina una familia numerable de campos vectoriales

$$\{\hat{F}_{n,m,k}\}_{n,m,k \in N_o}$$

que es densa en $\int HS(H^Z)\, d^P(Z)$.

Demostración.

Supongamos que existe $T \in \int HS(H^Z) d^P(Z)$, tal que

$$0 = \langle T/\hat{F}_{n,m,k} \rangle, \quad (n,m,k \in N_o),$$

demostraremos que $T = 0$.

Por 10) para cada $\lambda \in R^X$ existe un único nucleo $K_T(\cdot, \cdot, \lambda)$ $L^2(R \times R)$ tal que:

$$T(\lambda)(f)(\cdot) = \int_R K_T(\cdot, S, \lambda)\, f(S)\, dS, \quad (f \in L^2(R));$$

y un único nucleo $K_{n,m,k}(\cdot, \cdot, \lambda) \in L^2(R \times R)$, $(n,m,k \in N_o)$ tal que:

$$\hat{F}_{n,m,k}(f)(\cdot) = \int_R K_{n,m,k}(\cdot, S, \lambda)\, f(S) dS, \quad (f \in L^2(R)).$$

Usando la observación (11) se deduce que:

$$K_{n,m,k}(S,\ t,\ \lambda) = \phi_n(S-t)\ \phi_m(\lambda\ t)\ \phi_k(\lambda);$$

y usando la proposición (10) se tiene

$$(*)\quad 0 = \langle T/\hat{F}_{n,m,k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^x} |\lambda| \iint K_T(S,t,\lambda)\,\phi_n(S-t)\,\phi_m(\lambda t)\,dSdt$$

$$\phi_k(\lambda)\,d_m(\lambda).$$

Demostraremos que esto asegura, para $n,\ m \in N_o$, que

$$0 = \iint K_T\ (\lambda,\ S,\ t)\ \phi_n\ (S-t)\ \phi_m(\lambda t)\ dSdt,$$

para cada $\lambda \notin E_{n,m} \subset Z$ con $d^P(E_{n,m}) = 0$, $(n,\ m \in N_o)$, de donde se deduce que

$$K_T(S,\ t,\ \lambda) = 0;$$

para casi todo $(S,\ t,\ \lambda) \in R \times R \times R$, salvo en un conjunto $D \times E$, $D \subset R^2$, $E = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$ de medida $d_m(X,Y) \times d^P$ nula, usando que $\{\phi_n \cdot \phi_m\}_{n,m}$ es una base ortonormal de $L^2(\ R \times R)$. Así se obtiene que $T = 0$.

Para probar nuestra afirmación observamos que:

$$\lambda \rightarrow \iint K_T\ (S,\ t,\ \lambda)\ \phi_n\ (S-t)\ \phi_m\ (\lambda t)\ dSdt\ \phi_k\ (\lambda)$$

es d^P-medible; y para n, m fijos, podemos reemplazar ϕ_k, por cualquier $f \in S(\mathbb{R})$, en la definición de $F_{n,m,k}$. En particular eligiendo una sucesión $(f_i)_i$ que converga puntualmente a 1 se obtiene que:

$$\lambda \to \iint K_T(S, t, \lambda)\, \phi_n(S-t)\, \phi_m(\lambda t)\, dSdt$$

es d^P-medible, para cada n, $m \in N$; luego es $d_M(\lambda)$ medible y más aún

$$\lambda \to |\lambda| \iint K_T(S, t, \lambda)\, \phi_n(S-t)\, \phi_m(\lambda t)\, dSdt$$

es $d_m(\lambda)$-cuadrado sumable; pues usando la desigualdad de Schwartz y que $\|\phi_n\|_2 = 1$ $(n \in N_0)$ se tiene:

$$\int_R |\lambda|^2 \left|\iint K_T(S, t, \lambda)\, \phi_n(S-t)\, \phi_m(\lambda t)\, dSdt\right|^2 d_m(\lambda)$$

$$\leq \int_R |\lambda|^2 \iint |K_T(S, t, \lambda)|^2\, dSdt \cdot \iint |\phi_n(S-t)|^2 |\phi_m(\lambda t)|^2 dSdt\; d_m(\lambda)$$

$$= (2\pi)^2 \; \|T\|$$

Puesto que $\{\phi_k\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, para n, m fijos por (*) se obtiene

$$0 = \iint K_T(\lambda, S, t)\, \phi_n(S-t)\, \phi_m(\lambda t)\, dSdt$$

$$\lambda \notin E_{n,m} \quad \text{con } d^P\,(E_{n,m}) = 0$$

13) Proposición.

La familia $\{\frac{1}{2\pi}\ \hat{F}_{n,m,k}\}_{n,m,k}$ es una base ortonormal de $\int HS(H^Z)\ d^P(Z)$.

Demostración.

Todo se reduce a observar que $\{\phi_n \cdot \phi_m \cdot \phi_k\}_{n,m,k}$ es una base ortonormal de $L^2(R \times R \times R)$ y usar (*).

Tenemos ahora todos los elementos para enunciar y demostrar el análogo del Teorema de Plancherel:

14) Teorema.

Existe una única isometría lineal de $L^2(H)$ sobre $\int HS(H^Z)\ d^P(Z)$ que está determinada por:

$$\mathcal{F} G = \hat{G}$$

para cada $G \in S\ (H)$

Demostración.

Es claro que la aplicación

$$F \to \hat{F}$$

es lineal de $S(H)$ en $HS(H^Z)d^P(Z)$; y que

$$<F, G> = <\hat{F}/\hat{G}>, \quad (F, G \in S(H)).$$

Sea $G \in L^2(H)$, por densidad de $S(H)$ en $L^2(H)$, existe $\{G_k\}_{k \in N} \subseteq S(H)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} G_k = G, \text{ en } \| \|_2;$$

como $<G_k, G_k> = <\hat{G}_k, \hat{G}_k>$, se deduce que $\{\hat{G}_k\}_{k \in N}$ es una sucesión de Cauchy en $\int HS(H^Z)d^P(Z)$, definimos:

$$(G) := \lim_{k \to \infty} \hat{G}_k = G, \text{ en } \| \, \|.,$$

entonces:

$$\|G\|_2^2 = \lim_{k \to \infty} \|G_k\|_2^2 = \lim_{k \to \infty} \|\hat{G}_k\|^2 = \| \hat{G} \|^2 = \int_Z \|\hat{G}(Z)\|_{HS}^2 \, d^P(Z).$$

Es sencillo verificar que esta bien definido es lineal e inyectiva. Además de $\|F+G\|_2 = \|\widehat{F+G}\|$ se deduce que:

$$<F, G> = <\hat{F}/\hat{G}>, \quad (F, G \in L^2(H)).$$

Por ser $(S(H))$ denso en $\int HS(H^Z)d^P(Z)$ e isométrica con su imagen; se tiene que es epiyectiva; la unicidad se sigue directamente de la definición de $\mathcal{F}$. Por último debemos probar que nuestras notaciones son coherentes es decir si $G \in L^1(H) \cap L^2(H)$

$$\mathcal{F}(G)(Z) = \pi_G^Z = \hat{G}(Z), \quad (Z \notin N_G \subset Z;\ d^P(N_G) = 0)$$

Para ello sea $G \in L^1(H)$ y $\{G_k\}_{k \in N} \subset S(H)$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} G_k = G, \quad \text{en} \quad \|\|_1 \ \text{y} \ \|\|_2;$$

Por el Teorema 10) del segundo capítulo

$$\| \pi_G^Z - \pi_{G_k}^Z \| \leq \| F - F_k \|_1 \quad , \quad (z \in Z),$$

luego:

$$\lim_{k \to \infty} \pi_{G_k}^Z = \pi_G^Z$$ en la norma de operadores, $(z \in Z)$, de donde se obtiene, que para $K \in N$, $\lambda \in R^x$,

$$\| \pi_G^\lambda - \pi_{G_K}^\lambda \|_{HS}^2 \leq \lim_{j \to \infty} \| \pi_{G_j}^\lambda - \pi_{G_K}^\lambda \|_{HS}^2 \quad ;$$

y, puesto que $\{\hat{G}_k\}_{k \in N}$ es convergente a $\mathcal{F}(G)$ en $\|\|, \|\|$,

$$\lim_{K \to \infty} \| \pi_G^\lambda - \pi_{G_K}^\lambda \|_{HS}^2 = 0,$$ salvo en un $N'_G \subset Z$ de medida nula,

y además existe una sub-sucesión $\{\hat{G}_{K_i}\}_{i \in N}$ de $\{\hat{G}_K\}_{K \in N}$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} \hat{G}_{K_i}(Z) = \mathcal{F}(G)(Z),$$ en $\|\|_{HS}$, salvo en un N^*_G de medida nula; luego

$$\mathcal{F}(G)(Z) = \pi^Z_G = \hat{\hat{G}}(Z) \quad \text{salvo en un conjunto de medida nula.}$$

Hemos demostrado el Teorema.

Observaciones:

15) Si $F, G \in L^1(H) \cap L^2(H)$ entonces $F * G \in L^2(H) \cap L^2(H)$ y:

$$(F * G)(X) = < T_{X^{-1}} F, G^* > = < \widehat{T_{X^{-1}} F}/\hat{\hat{G}}^* >$$

$$= \int_Z \operatorname{Tr} \pi^Z_{X^{-1}} \hat{\hat{F}}(Z) \hat{\hat{G}}(Z) \, d^P(Z), \quad (x \in H),$$

se pueden investigar otras condiciones para encontrar una fórmula de inversión, punto a punto, de funciones en $L^1(H)$.

16) Si $X_0 \in H$, $F \in L^2(H)$ entonces

$$\widehat{T_{X_0} F}(Z) = \pi^Z_{X_0} \hat{\hat{F}}(Z), \text{ para } Z \notin N_F \subset Z, \text{ con } d^P(N_F) = 0.$$

Efectivamente basta recordar la parte final del Teorema 14).

17) Trasponiendo la representación regular izquierdo de H en $L^2(H)$, por medio de $\mathcal{F}$, obtenemos una representación isomorfa T en $\int HS(H^Z)d^P(Z)$ donde:

$$T_g(X)(Z) = \pi^Z_g X(Z)$$

donde $g \in H$, $X \in \int HS(H^Z)d^P(Z)$ y la igualdad en Z se entiende como "salvo en un conjunto de medida nula".

18) La representación T se descompone en suma contínua de representaciones.

El sentido de esta afirmación es el siguiente:

Si fijamos $z \in Z$, podemos definir, para cada $X_o \in H$, el operador

$$T^Z_{X_o} : HS(H^Z) \to HS(H^Z) ;$$

$$A \to \pi^Z_{X_o} A$$

que es unitario y tiene inverso $T^Z_{X_o^{-1}}$.

Es fácil comprobar que la aplicación:

$$X_o \to T^Z_{X_o}$$

es una representación contínua y unitaria de H en $HS(H^Z)$.

Ahora si fijamos $X_o \in H$ el "campo de operadores" sobre Z

$$Z \to T^Z_{X_o}$$

define un único operador lineal L_{X_o} sobre $\int HS(H^Z)d^P(Z)$; que se anota por:

$$L_{X_o} =: \int T^Z_{X_o}\, d^P(Z),$$

$$L_{X_0}(X)(Z_0) =: \int T^{Z}_{X_0}\, X(Z)\, d^P(Z)/_{Z_0} = T^{Z_0}_{X_0}\, X(Z_0) = \pi^{Z_0}_{X_0}\, X(Z_0),$$

$$X \in \int HS(H^Z)\, d^P(Z), \qquad Z_0 \in Z.$$

Es inmediato que lo único ha verificar en la definición de L_{X_0}, es que $L_{X_0}(X) \in \int HS(H^Z)\, d^P(Z)$ para cada $X \in \int HS(H^Z)\, d^P(Z)$. Pero, en este caso particular, eso está asegurado, pues L_{X_0} es exactamente T_{X_0}.

Se dice que T_{X_0} es la suma continua del campo de operadores:

$$Z \to T^{Z}_{X_0}$$

Formalmente:

$$[T_{X_0}] = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & T^{Z}_{X_0} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \; HS(H^Z)$$
$$HS(H^Z)$$

más aún; puesto que T^Z es una representación unitaria de H en $HS(H^Z)$ para cada Z y que para cada X_0

$$T_{X_0} = \int T^{Z}_{X_0}\, dP(Z)$$

se dice que T es la suma continua del "campo de representaciones unitarias sobre Z".

$$Z \to T^Z$$

y se anota:

$$T = \int T^{Z}\, d^{P}(Z)$$

18) Por último de la identificación

$$\int HS(H^{Z})\, d^{P}(Z) = L^{2}\{ R^{X}, HS(L^{2}(R)), d^{P}\}$$

y del isomorfismo entre $HS(L^{2}(R))$ y $L^{2}(R \times R)$ se puede obtener una realización cómoda de todas las ideas mencionadas en éste capítulo; sólo diremos aquí que la transforma de Fourier de una función $F \in S(H)$ en este contexto es:

$$\hat{F}(\lambda) = K_{F}(\cdot, \cdot, \lambda) \in L^{2}(R \times R)$$

donde:

$$K_{F}(S, t, \lambda) = \iint F(S-t, S_{2}, S_{3})\, e^{i\lambda S_{2}}\, e^{i\lambda S_{3}}\, dS_{2} dS_{3}$$

y que la representación $T^{\lambda}_{X_o}$ esta definido por

$$(T^{\lambda}_{(X_0, Y_o, Z_o)} K)(S, t) = K(S, X_o + t)\, e^{i\lambda(Y_o t + Z_o)}$$

$$((X_o, Y_o, Z_o) \in H, \ (S, t) \in R^{2} \quad K \in L^{2}(R \times R))$$

COMENTARIOS AL CAPITULO III.

En el primer capítulo señalabamos que una condición necesaria y suficiente, para tener la completitud de una familia de representaciones unitarias e irreductibles, en el caso finito, era que se pudiera desarrollar la Delta de Dirac δ_e, en términos de los correspondientes caracteres. Hemos visto, en el caso continuo, que dicha expansión no asegura la completitud; pues por ejemplo los de dimensión 1 no aparecen en dicha expansión; más aún se puede suprimir, por ejemplo, cualquier subfamilia numerable de representaciones; pero si hemos comprobado, en el caso continuo, que se obtiene una descomposición de la representación regular izquierda en suma continua de sub-representaciones $(T^z, HS(H^z))$, $(z \in Z)$; queda sin desarrollar la verificación que se sospecha, a saber que la representación $(T^z, HS(H^z))$ juega el papel de la componente isotípica de π^z, como en el caso finito.

APENDICE

CAPITULO I.-

1) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces la convolución

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)ds \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

de f, g pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y es uniformemente continua.

Demostración:

Se deduce de la desigualdad de Jensen que

$$\|f*g\|_2 \leq \|f\|_1 \; \|g\|_2 \quad ;$$

de donde se obtiene fácilmente la continuidad uniforme.

2) El Lema de Schur.

(i) Sea Π una representación unitaria de un grupo G en un espacio de Hilbert H. Decir que Π es irreductible equivale a decir que los únicos operadores continuos de H que conmutan con los Π_g son l s homotecías.

(ii) Sean Π, Π' dos representaciones unitarias irreductibles de G en los espacios de Hilbert H y H' respectivamente.

Sea A un operador de entrelazamiento, es decir, $A \in L(H,H')$ tal que $A\Pi_g = \Pi'_g A$, $(g \in G)$, entonces $A = 0$ o A es un isomorfismo de espacios de Hilbert.

Demostración: Daremos un esbozo a la demostración para la parte i) (que es la usada en Cap. I)

(a) Si Π no es irreductible, el espacio H se puede descomponer en suma ortogonal de dos subespacios estables. Tomando la proyección de H en uno de ellos; se verifica que ella es un operador de entrelazamiento de núcleo no nulo; por lo que no pueda ser una homotecia.

(b) Para probar el recíproco se demuestra primero que si A $L(H,H)$ es hermitiano, es decir, $A^* = A$, entonces, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe una única descomposición en suma directa ortogonal de H en tres subespacios cerrados H_λ^+, H_λ^o, H_λ^-, estables por A, tales que

$$< Ax,x > \quad \begin{array}{l} > \lambda < x,x > \text{ si } x \; H_\lambda^+ \\ = \lambda < x,x > \text{ si } x \; H_\lambda^o \\ < \lambda < x,x > \text{ si } x \; H_\lambda \end{array} .$$

Entonces, si Π es irreductible, y A un operador de entrelazamiento hermitiano. Se prueba que los subespacios H_λ^+, H_λ^o, H_λ^- son estables por Π, (para cada λ) y se construye un $\lambda_o \neq 0$ tal que $H_{\lambda_o}^o \neq 0$; por la irreductibilidad de Π, $H_{\lambda_o}^o = H$ lo que implica que $A = \lambda_o Id_H$.

Finalmente, se observa que un operador de entrelazamiento cualquiera, se descompone en suma de dos operadores hermitianos.

CAPITULO II.-

Las proposiciones 2) y 3) de este capítulo son demostradas :.

1) en lo esencial y para un grupo cualquiera locamente compacto con una medida de Haar en:

I.E. Segal - R.A. Kunze
"Integral and Opertors"
Pg. 199 - 202.

2) La proposición 6) es un resultado clásico del análisis en $\mathbb{R}^n$: $S(H)$ es justamente el espacio de Schwartz en $\mathbb{R}^3$.

Enunciaremos un teorema, muy importante, relacionado con el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}^n$.

Teorema:

La aplicación de $S(\mathbb{R}^n)$ en $S(\mathbb{R}^n)$

$$F \qquad \hat{F}$$

es un homeomorfismo respecto de la topología de $S(\mathbb{R}^n)$, y se tiene la fórmula de inversión

$$F(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(s)\, e^{-is\cdot x} ds \quad , (x \in \mathbb{R}^n \, , F \in S(\mathbb{R}^n)) \; ;$$

donde

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(s)\, e^{is\cdot x} ds \qquad (x \quad \mathbb{R}^n \ , \ F \quad S(\mathbb{R}^n)) \ ,$$

y $\cdot$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

Para mayores referencias consultar:

W. Rudin
"Funcional Analysis"
Pg. 168 - 172.

E. Stein. Guido Weiss
"Fourier Analysis on Euclidean Spaces"
Pg. 19 - 21.

3) Prop. 8

<u>Demostración</u>:

Si $g \quad H$ y $F \quad S(H)$ es fácil probar que $T_g F$ y $F^* \quad S(H)$. La demostración queda como ejercicio.

Sean $F, G \quad S(H)$ por demostrar que $H_o = F*G \quad S(H)$. Puesto que $H_o \quad L'(H)$ y

$$H \qquad \hat{H}$$

es un homeomorfismo de $S(H)$ basta demostrar que $H_o \quad S(H)$.

Usando el Teorema de Fubini y la invariancia de la medida de Lebesgue respecto de las traslaciones de H , se tiene para $(t_1,t_2,t_3) \quad H$.

$\hat{H}_o(t_1,t_2,t_3) =$

$$\iiint F(u,v,w)\iiint G(x,y,z)K(u,v,w,x,y,z,t_1,t_2,t_3)dxdydzdudvdw$$

donde

$$K(u,v,w,x,y,z,t_1,t_2,t_3) = e^{i(xt_1+yt_2+zt_3)}e^{iuyt_3}e^{i(ut_1+vt_2+wt_3)}$$

entonces como K es C^∞ y al derivarla respecto de (t_1,t_2,t_3) se obtiene la función K multiplicada por un polinomio P en las variables u,v,w,x,y,z y puesto que $F(u,v,w)$, $G(x,y,z)$ son rápidamente decrecientes $\hat{H}_o$ es de tipo C^∞ . Mas aún cualquier derivada de $\hat{H}_o$ es suma de funciones del tipo: $(F_1,G_1 \quad S(H))$

$$\iiint F_1(u,v,w)\iiint G_1(x,y,z)K(u,v,w,x,y,z,t_1,t_2,t_3)dxdydzdudvdw$$

Pues el correspondiente polinomio P se puede presentar como suma de monomios.

Se deduce que basta probar que

$t_1{}^\alpha t_2{}^\beta t_3{}^\lambda \cdot \hat{H}_o(t_1,t_2,t_3)$ es acotada $(\alpha,\beta,\lambda \quad \mathbb{N})$.

Pero integrado por partes y observando que

$$H(t_1,t_2,t_3) =\iiint F(u,v,w)K_1(u,v,w,t_1,t_2,t_3)\iiint G(x,y,z)$$

$$K_1(x,y,z,t_1,t_2,t_3)e^{iyut_3}dxdydzdudvdw \quad .$$

donde

$$K(u,v,w,t_1,t_2,t_3) = e^{i(ut_1+vt_2+wt_3)}$$

Se tiene que

$$t_1^{\alpha}\hat{H}(t_1,t_2,t_3) =$$

$$\iiint F(u,v,w)K_1(\ldots)\iiint\left(-\frac{1}{i}\right)^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}G(x,y,z)K_1(x,y,z,t_1,t_2,t_3)e^{iut_3}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$dxdydzdudvdw\,,$$

Se obtienen formas análogas para $t_2^{\beta}H(t_1,t_2,t_3)$ y $t_3^{\gamma}H_o(t_1,t_2,t_3)$, pero usando la función F. Después de un momento de reflexión nos damos cuenta que gracias a esto basta demostrar que $\hat{H}_o$ es acotado, lo que es evidente.

4.) Parte III - Lema 13)

Demostración:

Sea $\|A\| = \operatorname{Sup}\{\|Av\| \,/\, \|v\| = 1\}$, $a_{ij} = \langle A\phi_i,\phi_j\rangle$,

$b_{ij} = \langle B\phi_i,\phi_j\rangle$. Entonces

$$\sum_{i,j,n\leq N} |a_{in}b_{nj}\langle T\phi_i,\phi_j\rangle| \leq \sum_{i,j=1}^{N}\left[\left(\sum_{n=1}^{N}|a_{in}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}|b_{nj}|^2\right)^{1/2}\right]|\langle T\phi_i,\phi_j\rangle|$$

por la desigualdad de Schwartz. Pero

$$\sum_{n=1}^{N}|a_{in}|^2 \leq \|A^*\phi_n\|^2 = \|A\phi_n\|^2 \leq \|A\|^2 \quad ;$$

de donde

$$\sum_{i,j,n\leq N} a_{in}\, b_{nj} \langle T\phi_i,\ \phi_j \rangle \,|\, \leq \|A\|\|B\| \sum_{i,j\leq N} |\langle T\,\phi_i\ \ \phi_j \rangle|$$

Se concluye que la serie:

$$(*)\qquad \sum_{i,j,n=1}^{\infty} a_{in}\, b_{nj} \langle T\phi_i,\ \phi_j \rangle$$

es absolutamente convergente.

Pero:

$$\sum_{i=1} \langle ATB\phi_i, \phi_i \rangle,\ \sum_{i=1} \langle BAT\phi_i,\ \phi_i \rangle,\ \text{y}\quad \sum_{i=1} \langle TBA\ \phi_i,\ \phi_i \rangle$$

son justamente rearreglos de (*), luego son iguales.

Sea $U : H \to H$ un operador unitario entonces:

$$\sum_{n=1} \langle ATB\quad \phi_n,\quad \phi_n \rangle = \sum_{n=1} \langle {}^{-1}ATB\quad \phi_n,\ \phi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1} \langle\quad {}^{-1}ATB\ \phi_n,\ \phi_n \rangle$$

$$= \sum_{n=1} \langle ATB\ \phi_n,\ \phi_n \rangle$$

5) La afirmación a reglón seguido de la definición 14), así como aquella que dice que BS(H), H espacio de Hilbert, con el producto interior

$< A, B > = \mathrm{Tr}\, AB^*$, A, B $HS(H)$, es un espacio de Hilbert, son desarrolladas con detalle en Dunford - Schwartz

Linear Operators parte II

Capítulo XI, págs, 1009 - 1025.

CAPITULO III.

1) Proposición.

Demostración.

Sea A $HS(L^2(R))$ entonces si $\{\phi_i\}$ es la base ortonormal de Hermite de $L^2(R)$

$$\infty > \sum_i \|A \phi_i\|_2^2 = \sum < A \phi_i, A \phi_i >$$

$$= \sum_{i,j} |< A \phi_i, \phi_j >|^2;$$

por lo que $C_{ij} = |< A \phi_i, \phi_j >|$ define una sucesión cuadrado sumable; luego existe un único K_A $L^2(R \times R)$ tal que:

$$K_A = \sum_{i,j} C_{ij} \phi_i \phi_j$$

Es fácil verificar que K_A define un operador lineal A' sobre $L^2(R)$ por:

$$A'(f)(S) = \int_R K_A(S, t)\, f(t)\, dt, \quad (f \quad L^2(R))$$

casi siempre en S.

Más aún, usando el T de convergencia monótona y el hecho de que

$$s \longmapsto K(x,s)$$

es cuadrado integrable para casi todo x R se tiene

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A' \; _i\|_2^2 = \sum_{i=1} \int |<K_A(X, \cdot), \phi_i>|^2 \, dX$$

$$= \int \sum_{i=1}^{\infty} |<K_A(X, \cdot), \phi_i>|^2 \, dX$$

$$= \|K_A\|_2^2$$

es decir A' HS(L^2(R)).

Por otro lado es fácil ver que:

$$<A' \phi_i, \phi_j> = C_{ij} = <A\, \phi_i, \phi_j> \quad (i, j \quad N)$$

luego:

$$A' = A.$$

Esto prueba que:

$$A \to K_A$$

es una aplicación bien definida, isométrica e invertible. La linealidad es inmediata. Demostraremos que:

$$K_{AB} = K_A + K_B$$

Por un lado $(AB)(f)(S) = \int K_{AB}(S, x)\, f(x)dx$ casi siempre en S, y por otra parte

$$(AB)(f) = \int K_A(S, x)\; B(f)\; (x)\; dx$$

$$= \iint K_A\,(x, S)\; K_B(S, \mu)\; dS\; f(\mu)\; d\mu,$$

por el Teorema de Fubini, puesto que, para casi todo x,

$$(S, \mu) \;\rightarrow\; K(x, S)\; f(\mu)$$

es cuadrado integrable y de la desigualdad de Schwartz se deduce que:

$$(S, \mu) \;\rightarrow\; K_A(x,S)\; K_B(S, \mu)\; f(\mu),$$

es integrable para casi todo x R.

Por la unicidad:

$$K_{AB} = K_A \ast K_B$$

Además es fácil ver que:

$$K_{A^*}\,(S, t) = \overline{K_A\,(t, S)}$$

Por último puesto que:

$$A \to K_A$$

es una isometría se deduce que:

$$\mathrm{Tr}\, AB^* = \langle K_A, K_B \rangle$$

de donde se obtiene:

$$\mathrm{Tr}\, AB = \int_R K_{AB}\,(S, S)\,dS$$