Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Representaciones Inducidas

Tesis para optar al
grado de Licenciado
en Ciencias con
mención en Matemáticas.

Autor: Eduardo Valenzuela D.
Tutor: Dr. Jorge Soto A.

1978

Introducción

Este trabajo pretende mostrar como se puede construir una representación de un grupo; a partir de una representación de un subgrupo de el.

Ademas trataremos de averiguar cuando las representaciones asi construidos, son irreducibles.

En el capitulo uno consideraremos las representaciones de grupos finitos solamente.

En el capitulo dos. daremos los fundamentos topologicos para construir la representación inducida cuando G es un grupo localmente compacto.

En el capitulo tres analizaremos el entrelazamiento de los representaciones inducidas de grupos finitos.

Agradezco al Dr. Jorge Soto A. por haber dedicado parte de su tiempo, para guiarme en la tesis; como asì por todas las enseñanzas brindadas. durante estos años.

Dedico este trabajo a mi madre.

Indice:

Capitulo Primero.

Representaciones inducidas de grupos finitos

§1 Introducción.

Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G; Se desea construir una representación de G a partir de una representación (K,σ) de H.

Para esto supongamos primero que G actua a la izquierda sobre un conjunto finito $\mathcal{X}$, o sea que existe una aplicación; $(g,x) \longmapsto gx$ de $G \times \mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ tal que: para todo g, g' en G y todo x en $\mathcal{X}$, se tiene $g(g'x) = (gg')x$., consideremos

$$\mathcal{H} = \{ f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C} \}$$

y $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ definida por.:

$$(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x)$$

entonces se verifica para todo g, g' en G

$$\tau_{gg'} = \tau_g \tau_{g'}.$$

Por lo tanto $(\mathcal{H}_G, \tau)$ es una representación de G; que se llama la representación natural de G asociada a su acción en $\mathcal{X}$.

Miremos ahora el caso en que G actua transitivamente sobre $\mathcal{X}$; esto quiere decir que dados x, y en $\mathcal{X}$ existe g en G tal que $gx = y$.

Sea x_0 en $\mathcal{X}$ fijo y consideremos la aplicación $g \longmapsto gx_0$ de G en $\mathcal{X}$; esta aplicación es epiyectiva pero en general no es inyectiva.

Designemos por $H = \{g \in G / gx_0 = x_0\}$ el estabilizador de x_0; es claro que H es un subgrupo de G y ademas se tiene:

$$G/H \xrightarrow{\sim} \mathcal{X} \ ; \ gH \xmapsto{\sim} gx_0$$

Esta biyección nos permite interpretar las funciones sobre $\mathcal{X}$, como funciones sobre G/H y estas últimas se pueden considerar como funciones sobre G que son constantes sobre las clases izquierdas de H en G.

Por lo tanto se tiene que la definición de la representación natural $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ recien dada, se puede presentar de la siguiente manera, la cual es completamente equivalente.

$$\mathcal{H} = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; f(gh) = f(g) \,,\; h \in H \,,\; g \in G \}$$

$$\mathcal{T}_g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \;;\; (\mathcal{T}_g f)(g') = f(g^{-1} g').$$

El definir la representación natural de G asociada a su acción en $\mathcal{X}$ de esta manera, tiene la ventaja que es mas o menos inmediatamente generalizable.

§2 Definición y primeras propiedades de las representaciones inducidas

Supongamos que (K, σ) es una representación de $H = \operatorname{Stab} x_0$ y consideremos

$$\mathcal{H}^\sigma = \{ f : G \longrightarrow K \;/\; f(gh) = \sigma_{h^{-1}}(f(g)) \,,\; h \in H,\; g \in G \}$$

y $\tau_g^\sigma : \mathcal{H}^\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^\sigma$; $(\tau_g^\sigma f)(g') = f(g^{-1}g')$

Observacion: Se sabe que en K es posible escojer un producto interior; de tal manera que σ_h sea un operador unitario de K para todo h en H; en estas condiciones se tiene $\sigma_{h^{-1}} = \sigma_h^*$.

Por lo tanto obtenemos así una representación de G que se llama la representación inducida a G por la representación (K, σ) de H y denotada por. $\operatorname{Ind}_{H \uparrow G}(K, \sigma)$.

Cabe notar que la representación natural $(\mathcal{H}, \tau)$ definida anteriormente se obtiene como caso particular de $(\mathcal{H}^\sigma, \tau^\sigma)$ tomando (K, σ) igual a la representación trivial de H.

En el caso recién considerado supusimos que G actuaba transitivamente sobre X y obtuvimos el subgrupo H como el estabilizador de un punto de X.

Ahora supongamos que G y H estan dados; ¿ Es posible encontrar un conjunto X sobre el cual G actue a la izquierda transitivamente y en donde H sea el estabilizador de un punto de X?

¡Si!, Consideremos $X = G/H$ y la aplicación $(g, g'H) \longmapsto gg'H$ de $G \times G/H$ en G/H, entonces es claro que G actua transitivamente sobre G/H; pues si $gH, g'H$ en G/H tomando $g'g^{-1}$ en G se tiene $(g'g^{-1})(gH) = g'H$ y ademas si $x_0 = H$ en G/H entonces $Stab\, x_0 = \{ g \in G / gH = H \} = H$

Por lo tanto dados G y H siempre podemos encontrar X de tal manera de estar en el caso inicialmente considerado.

<u>Proposición 1:</u> Sea $(\mathcal{H}^{\sigma}, \tau^{\sigma}) = \operatorname{Ind}_{H\uparrow G} (K, \sigma)$.

Entonces para toda representación (V, ρ) de G y para todo H-morfismo ϕ de (K, σ) en (V, ρ) existe un únicos G-morfismo $\bar{\phi}$ de $(\mathcal{H}^{\sigma}, \tau^{\sigma})$ en (V, ρ), tal que $\phi = \bar{\phi} \circ \varphi$ con

$\varphi : (K, \sigma) \longrightarrow (\mathcal{H}^{\sigma}, \tau^{\sigma})$; $k \longmapsto \varphi_k$ definido por:

$$\varphi_k(g) = \begin{cases} \sigma_{h^{-1}}(k) & \text{si } g = h \in H \\ 0 & \text{si } g \notin H \end{cases} .$$

<u>Demostración:</u> Definamos para f en $\mathcal{H}^{\sigma}$:

$$\bar{\phi}(f) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \rho_g \, \phi f(g) \quad , \text{entonces:}$$

$$\rho_g(\bar{\phi} f) = \frac{1}{|H|} \sum_{g' \in G} \rho_g \rho_{g'} \phi f(g') = \frac{1}{|H|} \sum_{g_0 \in G} \rho_{g_0} \phi f(g^{-1} g_0)$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{g_0 \in G} \rho_{g_0} \phi \, \tau_g^{\sigma} f(g_0) = \bar{\phi}(\tau_g^{\sigma} f)$$

Por lo tanto $\bar{\phi}$ es un G-morfismo.

Ahora como para todo h en H $\phi \sigma_h = \rho_h \phi$.

$$\bar{\phi} \varphi(k) = \bar{\phi} \varphi_k = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \rho_g \, \phi \, \varphi_k(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \rho_h \, \phi \varphi_k(h)$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \rho_h \, \phi \, \sigma_{h^{-1}}(k) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \rho_h \rho_{h^{-1}} \phi(k)$$

$= \phi(k)$; por lo tanto $\phi = \bar{\phi} \circ \varphi$.

Veamos que $\bar{\Phi}$ es única; supongamos que existe otro G-homomorfismo $\bar{\Phi}'$ que verifica la proposición, entonces si f esta en $\mathcal{H}^\sigma$ con soporte de f igual a H

$$\bar{\Phi}'(f) = \bar{\Phi}'(\varphi f(e)) = \phi(f(e)) = \bar{\Phi}(\varphi f(e)) = \bar{\Phi}(f).$$

Ahora como sabemos que:

$$\text{sop}\ \tau_g^\sigma f = g(\text{sop}\ f)$$

pues si g' esta en el soporte de $\tau_g^\sigma f$ $0 \neq \tau_g^\sigma f(g') = f(g^{-1}g')$ lo que equivale a $g^{-1}g'$ este en el soporte de f, o sea $g' \in g(\text{sop}\ f)$.

Por lo tanto si tomamos f en $\mathcal{H}^\sigma$ con $\text{sop}\ f = gH$ y definimos f_H^g en $\mathcal{H}^\sigma$ con $\text{sop}\ f_H^g = H$, por: $f_H^g(e) = f(g)$ se tiene:

$$\tau_g^\sigma f_H^g(g) = f_H^g(g^{-1}g) = f_H^g(e) = f(g).$$

o sea $f = \tau_g^\sigma f_H^g$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}' f &= \bar{\Phi}' \tau_g^\sigma f_H^g = \rho_g \bar{\Phi}' f_H^g = \rho_g \bar{\Phi} f_H^g \\ &= \bar{\Phi}\, \tau_g^\sigma f_H^g = \bar{\Phi} f. \end{aligned}$$

Tomemos ahora cualquier f en $\mathcal{H}^\sigma$ y expresemosla como una suma de sus restricciones en cada clase lateral gH.

$$f = \sum_{gH \in G/H} f_{gH}$$

$$\overline{\Phi}' f = \sum_{gH} \overline{\Phi}' f_{gH} = \sum_{gH} \overline{\Phi} f_{gH} = \overline{\Phi} f.$$

por lo tanto $\overline{\Phi}$ es unica ; o sea el par $((\mathcal{H}^\sigma, \mathcal{Z}^\sigma), \varphi)$ es solución al problema universal planteado.

Q.E.D.

En la proposición anterior usamos el hecho que (V, ρ) puede considerarse como una representación de H, por restricción

o sea $\operatorname{Res}_{G \downarrow H}(V, \rho) = (V, \rho/_H)$

Ademas se sabe que para todo $\overline{\Phi}$ de

$\mathcal{H}om_G(\operatorname{Ind}_{H \uparrow G}(K, \sigma), (V, \rho))$ $\quad \overline{\Phi} \circ \varphi$ pertence a

$\mathcal{H}om_H((K, \sigma), \operatorname{Res}_{G \downarrow H}(V, \rho))$ y esta aplicación es

lineal; Entonces en virtud de la proposición anterior, existe la aplicación inversa.

Por lo tanto tenemos la formula de reciprocidad de Frobenius

$$\mathcal{H}om_H((K,\sigma), \operatorname*{Res}_{G\downarrow H}(V,\rho)) \cong$$
$$\cong \mathcal{H}om_G(\operatorname*{Ind}_{H\uparrow G}(K,\sigma),(V,\rho))$$

con los isomorfismos $\phi \xrightarrow{\sim} \bar{\Phi}$ y $\bar{\Phi} \xrightarrow{\sim} \bar{\Phi}\circ\varphi$ respectivamente.

<u>Corolario:</u> $[\sigma, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H}\rho]_H = [\operatorname*{Ind}_{H\uparrow G}\sigma, \rho]_G$.

<u>Demostración:</u>

$$[\sigma, \operatorname*{Res}_{G\downarrow H}\rho]_H = \langle \chi_\sigma, \chi_{\operatorname*{Res}_{G\downarrow H}\rho}\rangle_H$$
$$= \langle \chi_{\operatorname*{Ind}_{H\uparrow G}\sigma}, \chi_\rho\rangle_G = [\operatorname*{Ind}_{H\uparrow G}\sigma, \rho]_G.$$

Q. E. D.

§ 3 Ejemplo

Consideremos $\mathbb{F}_q$ cuerpo de $q = p^n$, $q > 2$ p primo.

Sea $G = GL(2, \mathbb{F}_q)$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \right\}$

luego: $|G| = (q^2-1)(q^2-q)$, $|H| = q(q-1)^2$

como $q>2$. se tiene que el subgrupo conmutador de H es:

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \; b \in \mathbb{F}_q \right\}$$

pues:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & [b_2(a_1-d_1) + b_1(d_2-a_2)]d_1^{-1}d_2^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde para obtener cualquier b en $\mathbb{F}_q$. es necesario que sea posible escojer a_1, a_2, d_1, d_2 no nulos y $a_1 \neq d_1$ o $a_2 \neq d_2$; o sea el cuerpo debe poseer entre sus elementos no nulos. a lo menos. dos elementos mas., o sea $q>2$.

y $H/H' \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} / \; a, d \in \mathbb{F}_q^\times \right\} = D \cong \mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times$

Demonos ahora una representación de dimensión uno $(\mathbb{C}, \sigma)$ de H; como para todo h' en H' se tiene $\sigma_{h'} = 1$, resulta entonces que para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ en H $\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \sigma\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ pues $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & ba^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; o sea que las representaciones de dimensión uno de H son extensiones triviales de las de D pero como $D \cong \mathbb{F}_q^{\times} \times \mathbb{F}_q^{\times}$; se tiene que toda representación de D esta completamente determinada por un par de representaciones de $\mathbb{F}_q^{\times}$. o sea

$$\sigma : D \longrightarrow \mathbb{C}^{\times} ; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \alpha(a)\beta(d)$$

Por consiguiente denotaremos tales σ por $\sigma^{\alpha\beta}$ y de esta manera obtenemos todas las de H; que son en total $(q-1)^2$.

Construyamos ahora la representación de G. inducida por la representación $(\mathbb{C}, \sigma^{\alpha\beta})$ de H

$$\mathcal{H}^{\alpha\beta} = \left\{ f \in \mathbb{C}^G / f\left(g\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \alpha(a)^{-1}\beta(d)^{-1} f(g), \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H \right\}$$

y $\tau_g^{\alpha\beta} : \mathcal{H}^{\alpha\beta} \longrightarrow \mathcal{H}^{\alpha\beta}$; $\left(\tau_g^{\alpha\beta} f\right)(g') = f(g^{-1}g')$.

¿Cual es la dimensión de $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$?
Como toda f en $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ es $\sigma^{\alpha\beta}$-homogenea, para que f este definida sobre todo G; basta que lo este sobre un sistema de representan-

tes de las clases izquierdas de H en G.

Por lo tanto una base de $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ esta formada por $\{\delta_{gH} \,/\, gH \in G/H\}$ con

$$\delta_{gH}(g') = \begin{cases} \sigma^{\alpha\beta}_{h^{-1}} & \text{si } g' = gh \in gH \\ 0 & \text{si } g' \notin gH \end{cases}$$

lo que implica que $\dim \mathcal{H}^{\alpha\beta} = |G:H| = q+1$

Ahora es natural preguntarse:
¿Cuando $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ es irreducible?
¿Cuando $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ y $\mathcal{H}^{\alpha'\beta'}$ son G-isomorfos?

Para poder responder a estas interrogantes es necesario estudiar los operadores de entrelazamiento de estas representaciones inducidas, o sea:

$$\mathcal{H}om_G((\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \zeta^{\alpha\beta}), (\mathcal{H}^{\alpha'\beta'}, \zeta^{\alpha'\beta'})).$$

Capitulo Segundo

Representaciones Inducidas de grupos. localmente compactos

§1 Introducción

Sea G un grupo topologico localmente compacto, el cual actua continuamente a la izquierda, sobre un espacio topologico localmente compacto $\mathcal{X}$; esto quiere decir que la aplicación $(g, x) \longmapsto gx$ de $G \times \mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ es continua y $g(g'x) = (gg')x$, para todo g, g' en G y todo x en $\mathcal{X}$.

Supongamos que en $\mathcal{X}$ existe una medida μ, G-invariante, o sea. para todo A μ-medible se tiene $\mu(gA) = \mu(A)$ para todo g en G, o en forma equivalente para toda f en $L^1(\mathcal{X}, \mu)$ y para todo g en G

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} f(g^{-1}x)\, d\mu(x)$$

Consideremos. $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{X}, \mu)$ y $\tau : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$.

con $Aut(\mathcal{H}) = \{$automorfismos lineales continuos de $\mathcal{H}\}$ definida por:

$$(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x) \ , \ g \text{ en } G \ , \ x \text{ en } \mathcal{X}$$

entonces se verifica:

① $\tau_{gg'} = \tau_g \tau_{g'}$; para todo g, g' en G
② τ_g es un operador unitario de $\mathcal{H}$, todo g
③ Para toda f_0 en $\mathcal{H}$, fija; la función $g \longmapsto \tau_g f_0$ de G en $\mathcal{H}$, es continua.

La demostración de estas tres propiedades se dara posteriormente en un contexto mas general; Por lo tanto $(\mathcal{H}, \tau)$ es una representación continua, unitaria de G y que es el analogo continuo obvio, de la representación natural de un grupo finito, asociada a una acción a la izquierda, sobre algun conjunto finito.

Miremos ahora el caso en que G actua transitivamente sobre $\mathcal{X}$, y sea H el estabilizador de un punto x_0 de $\mathcal{X}$, entonces es claro que H es un subgrupo cerrado de G, pues es la imagen inversa de x_0 en $\mathcal{X}$, bajo la aplicación continua $g \longmapsto g x_0$, de G en $\mathcal{X}$.

Esto induce una biyección $gH \longmapsto gx_0$, de G/H sobre $\mathcal{X}$; la cual nos permite transportar la medida μ sobre $\mathcal{X}$, a una medida $\tilde{\mu}$ sobre G/H y ademas las funciones sobre $\mathcal{X}$; se pueden considerar como sobre G/H, por lo tanto:

$$L^2(\mathcal{X},\mu) \cong L^2(G/H,\tilde{\mu})$$

y como toda función sobre G/H; se puede interpretar como una sobre G, que es constante sobre las clases izquierdas de H en G; se tiene que la definición de la representación natural $(\mathcal{H},\sigma)$ recien dada; se puede dar de la siguiente forma; la cual es completamente equivalente:

$$\mathcal{H} = \{f: G \to \mathbb{C} / f(gh) = f(g),\ g \in G,\ h \in H;\ \int_{G/H} |f(g)|^2 d\tilde{\mu}(g) < \infty\}$$

y acción $(\sigma_g f)(g') = f(g^{-1}g')$

Al definir asi la representación natural de G, asociada a su acción en $\mathcal{X}$; podemos en forma mas o menos inmediata, definir la representación inducida a G, por una representación de H.

§2 Definición de la representación inducida cuando G/H posee una medida G-invariante

Consideremos nuevamente el caso en que G actua transitivamente sobre $\mathcal{X}$, $H = \mathrm{Stab}\, x_0$ y μ es una medida G-invariante sobre $\mathcal{X}$.

Sea (K, σ) una representación continua, unitaria de H y consideremos:

$$\mathcal{M} = \{ f : G \to K \,/\, f(gh) = \sigma_h^*(f(g)), \ \forall g \in G, \ \forall h \in H \}$$

con σ_h^* el operador de K tal que $\langle \sigma_h(x), y \rangle = \langle x, \sigma_h^*(y) \rangle$ para todo x, y en K, para todo h en H.

Notemos que si f esta en $\mathcal{M}$, entonces como σ es unitaria se tiene:

$$\| f(gh) \|_K^2 = \| \sigma_h^* (f(g)) \|_K^2 = \| f(g) \|_K^2$$

o sea $\| f(?) \|_K^2$ se puede considerar como una función sobre G/H.

Sea $\mathcal{H}^\sigma = \{ f \in \mathcal{M} \,/\, \int_{G/H} \| f(g) \|_K^2 d\tilde{\mu}(g) < \infty \}$

Analogamente si f y f' estan en $\mathcal{M}$ se tiene que: $\langle f(?), f'(?) \rangle_K$ es una función sobre G/H.

Por lo tanto si definimos para f y f' en $\mathcal{H}^\sigma$

$$\langle f, f' \rangle = \int_{G/H} \langle f(g), f'(g) \rangle_K \, d\tilde{\mu}(g)$$

entonces resulta que $\mathcal{H}^\sigma$ es un espacio de Hilbert.

Definamos $\mathcal{T}_g^\sigma$ de $\mathcal{H}^\sigma$ en $\mathcal{H}^\sigma$ por $(\mathcal{T}_g^\sigma f)(g') = f(g^{-1}g')$ de esta manera obtenemos una representación continua unitaria $(\mathcal{H}^\sigma, \mathcal{T}^\sigma)$ de G; (que es unitaria es consecuencia de $\tilde{\mu}$ G-invariante) que se llama la representación inducida a G por la representación (K, σ) de H y que denotaremos por:

$$\operatorname{Ind}_{H\uparrow G} (K, \sigma).$$

Cabe notar que la representación natural $(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ definida anteriormente; se obtiene como caso particular de $(\mathcal{H}^\sigma, \mathcal{T}^\sigma)$ tomando (K, σ) igual a la representación trivial de H.

Ahora bien, una de nuestras suposiciones iniciales fue; que el grupo G actuaba transitivamente, sobre el espacio $\mathcal{X}$; y obtuvimos el subgrupo H como el estabilizador de un punto de $\mathcal{X}$.

Si G y H estan dados; con H un subgrupo cerrado de G; podemos tomar $\mathcal{X} = G/H$ provisto de la topologia cuociente y con la acción $(g, g'H) \longmapsto gg'H$. Y se verifica facilmente que: G actua transitivamente sobre $\mathcal{X}$; la acción es continua y el estabilizador de $X_0 = H$ en $\mathcal{X}$ es el subgrupo H.

Por lo tanto, dados G y H, siempre podemos escojer $\mathcal{X}$; de tal manera de estar en la situación anterior.

La otra suposición que hemos hecho; fué que $\mathcal{X}$ estaba provisto de una medida μ G-invariante; esto por lo general no es cierto, y por lo tanto debemos estudiar esto mas detenidamente; de tal manera que aún en el caso en que $\mathcal{X}$ no posea una medida G-invariante; la definición de la representación inducida; nos dé una representación continua y unitaria de G.

Como sabemos que $\mathcal{X}$ lo podemos escojer como G/H; de ahora en adelante, solo consideraremos este último espacio.

El primer resultado que vamos a ver es que en G/H siempre es posible construir una medida no trivial μ tal que para todo $A \subseteq G/H$ μ-medible. y para todo g en G

$$\mu(A) = 0 \text{ si y solo si } \mu_g(A) = 0$$

con $\mu_g(A) = \mu(gA)$. Una medida que cumpla esta condición; se llama una medida cuasi-invariante sobre G/H.

O sea μ es cuasi-invariante sobre G/H equivale a decir; que para todo g en G μ_g es absolutamente continua con respecto a μ; y reciprocamente.

Para llegar a este resultado; debemos dar varios lemas previos; que nos capacitarán para construir ciertas funciones continuas ρ de G en $]0,\infty[$.

§3 Construccion de medidas cuasi-invariantes sobre G/H

Recordemos algunas definiciones de topología general:

Un cubrimiento $(Q_j)_{j\in J}$ se llama un refinamiento del cubrimiento $(O_i)_{i\in I}$ si para todo j en J, existe un i en I, tal que $Q_j \subseteq O_i$

El cubrimiento $(Q_j)_{j\in J}$, se dice localmente finito si todo x en $\mathcal{X}$; posee una vecindad N_x, la cual intersecta solo a un número finito de los Q_j.

Un espacio topologico se dice paracompacto; si todo cubrimiento abierto de $\mathcal{X}$; posee un refinamiento abierto, localmente finito.

Lema 1: Sea $g: G \longrightarrow \mathbb{C}$, continua, $S=\operatorname{sop} g$ tal que para todo compacto C de G, $CH\cap S$ es compacto; entonces:

$$g_0(x) = \int_H D(h)g(xh)\,d\nu(h)$$

define una funcion continua de G. Donde ν es la medida de Haar izquierda de H y $D: H \to \mathbb{C}$ continua.

<u>Demostración:</u> Dado x en G, escojamos una vecindad simétrica y compacta C de x en G, si y esta en C y h en H; $g(yh) \neq 0$ implica $yh \in CH \cap S$; de donde $h \in C(CH \cap S)$ pues $C^{-1} = C$

Sea $K = C(CH \cap S) \cap H$, como H es cerrado y C, $CH \cap S$ son compactos entonces K es compacto y.

$$g_0(y) = \int_K D(h)\, g(yh)\, d\nu(h) = \int_H D(h)\, g(yh)\, d\nu(h)$$

por lo tanto $g_0(y)$ existe para todo y en C.

Ahora:

$$|g_0(y) - g_0(x)| \leq \int_K |D(h)|\, |g(yh) - g(xh)|\, d\nu(h)$$

$$\leq D_K \int_K |g(yh) - g(xh)|\, d\nu(h)$$

con $D_K = \sup \{ |D(h)| \ / h \in K \}$

Como CK es compacto, g es uniformemente continua allí y por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad N_e de e en G; con $xN_e \subseteq C$ y tal que:

$$|g(\xi) - g(\eta)| < \frac{\varepsilon}{D_K\, \nu(K)}$$

para todo ξ, η en CK. que cumplan que $\xi\eta^{-1}$ este en N_e; en particular si y en C

satisface $(yh)(xh)^{-1} = yx^{-1}$ en N_e, entonces:

$$|g(yh) - g(xh)| < \frac{\varepsilon}{D_K\, \nu(K)} \quad \text{todo } h \text{ en } K$$

por lo tanto:

$$|g_0(y) - g_0(x)| < D_K \int_K \frac{\varepsilon}{D_K\, \nu(K)}\, d\nu(h) = \varepsilon$$

para todo y tal que. yx^{-1} en N_e.
por lo tanto g_0 es continua

Q.E.D.

<u>Observación</u>: Se sabe de Topologia general que si G es un grupo localmente compacto y H es un subgrupo cerrado de G; entoces G/H es localmente compacto y paracompacto (ref. [1]).

<u>Lema 2</u>: Sea H un subgrupo cerrado del grupo localmente compacto G; entonces existe una función continua f de G en $]0,\infty[$ con $S = \text{sop} f$ tal que para todo compacto C de G, $CH \cap S$ sea compacto y para todo x en G:

$$\int_H f(xh)\, d\nu(h) = 1$$

<u>Demostración</u>:

Sea π de G en G/H la proyección canonica; que se sabe es abierta y continua. Sea $\mathcal{O}$ una vecindad abierta, relativamente compacta de e en G (o sea $\overline{\mathcal{O}}$ es compacto); es claro que $(\mathcal{O}_X)_{X\in G}$ cubre G y por lo tanto $(\pi(\mathcal{O}_X))_{X\in G}$ es un cubrimiento abierto de G/H y como G/H es paracompacto, podemos encontrar un refinamiento localmente finito $(Q_i^1)_{i\in I}$ de $(\pi(\mathcal{O}_X))_{X\in G}$.

Ademas como G/H es separado (pues H es cerrado) y paracompacto; se tiene que G/H es normal y por lo tanto existe un cubrimiento localmente finito $(Q_i^2)_{i\in I}$ tal que $\overline{Q}_i^2 \subseteq Q_i^1$ para todo i en I; analogamente existe $(Q_i^3)_{i\in I}$ tal que $\overline{Q}_i^3 \subseteq Q_i^2$

Ademas podemos encontrar abiertos $(\mathcal{O}_i^k)_{i\in I}$ $k=1,2,3$, de G tales que: $\pi(\mathcal{O}_i^k) = Q_i^k$, $k=1,2,3$ y $\overline{\mathcal{O}}_i^3 \subseteq \mathcal{O}_i^2$, $\overline{\mathcal{O}}_i^2 \subseteq \mathcal{O}_i^1$; basta tomar $\mathcal{O}_i^k = \pi^{-1}(Q_i^k) \cap \mathcal{O}_{X_i}$, pues $Q_i^1 \subseteq \pi(\mathcal{O}_{X_i})$ para algun X_i en G; y como $\overline{\mathcal{O}_{X_i}}$ es compacto se tiene que los $\mathcal{O}_i^k$ son relativamente compactos.

Dado X en G, como $(Q_i^1)_{i\in I}$ es localmente finito, existe vecindad $N_{\pi(X)}$ de $\pi(X)$ en G/H, la cual intersecta sólo a un número finito de los Q_i^1, pero $\pi^{-1}(N_{\pi(X)}) \cap \mathcal{O}_i^1 \neq \phi$

implica que $N_{\pi(x)} \cap Q^1_i \neq \phi$, por lo tanto como $N_{\pi(x)}$ intersecta a finitos Q^1_i, se tiene que $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$ intersecta a finitos $\mathcal{O}^1_i$; de donde resulta que $(\mathcal{O}^1_i)_{i\in I}$ es localmente finita.

Ahora como para todo i en I, $\overline{\mathcal{O}}^3_i$, $\mathcal{O}^{2^c}_i$ son cerrados disjuntos; por el lema de Urysohn, existen funciones continuas g_i de G en $]0,1[$, tales que:

$$g_i/_{\overline{\mathcal{O}}^3_i} = 1 \quad y \quad g_i/_{\mathcal{O}^{2^c}_i} = 0\text{, de donde}$$

$g_i(x) = 1$ para todo x en $\mathcal{O}^3_i$ y $g_i(x) = 0$ para todo x que no este en $\mathcal{O}^2_i$; ademas como para x en G, existe $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$ vecindad de x que intersecta a finitos $\mathcal{O}^1_i$ y como $\mathcal{O}^2_i \subseteq \mathcal{O}^1_i$, se tiene que tambien esta vecindad intersecta a solo finitos $\mathcal{O}^2_i$; por lo tanto todas las g_i son nulas sobre $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$, salvo un numero finito de ellas; de aqui que $g = \sum_{i\in I} g_i$, para cada x es una suma finita de funciones continuas y no negativas sobre G, lo que implica que g tambien lo es.

Sea $S = \text{sop } g$, C compacto en G por lo tanto $\pi(C)$ compacto y $\pi^{-1}(\pi(C))$ cerrado pero $CH = \pi^{-1}(\pi(C))$ y como S es cerrado, se tiene $CH \cap S$ cerrado; por lo tanto para ver que es compacto, basta demostrar que se pueda cubrir con un número finito de compactos $\overline{\theta}_i^2$.

Dado x en C, existe $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$ vecindad de x que intersecta a finitos $\overline{\theta}_i^2$ (pues $\overline{\theta}_i^2 \subseteq \theta_i^1$) y como $\pi(C)$ es compacto; existe subrecubrimiento finito de $(N_{\pi(x)})_{x \in C}$.

Escojamos aquellos $\overline{\theta}_i^2$ que intersectan a alguno de estos finitos $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$

Ahora como $(\overline{\theta}_i^2)_{i \in I}$ es una familia de cerrados localmente finita; se tiene que $\bigcup_{i \in I} \overline{\theta}_i^2$ es cerrado, por lo tanto:

$$\mathcal{U} = \left(\bigcup_{i \in I} \overline{\theta}_i^2\right)^c = \bigcap_{i \in I} \overline{\theta}_i^{2\,c} \text{ es abierto}$$

$y \in \mathcal{U}$, equivale a decir que y no esta en: $\overline{\theta}_i^2$ para todo i en I; de donde $g_i(y) = 0$ todo i en I; por lo tanto $g/\mathcal{U} = 0$; lo que implica $S \cap \mathcal{U} = \phi$; Sea s en $CH \cap S$ esto implica que s no esta en $\mathcal{U}$, o sea existe i en I, tal que s esta en $\overline{\theta}_i^2$, y como s esta en CH, se tiene

$\pi(s)$ esta en $\pi(C)$, pero $\pi(C)$ esta cubierto por un numero finito de $N_{\pi(x)}$, lo que implica que $\pi(s)$ esta en algun $N_{\pi(x)}$; de donde s esta en $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$, por lo tanto s en $\overline{O}_i^2 \cap \pi^{-1}(N_{\pi(x)})$; lo que implica que esta intersección es no vacia.; de esto ultimo se desprende que $\overline{O}_i^2$ es uno de aquellos, seleccionados anteriormente en numero finito, que intersectan a algun $\pi^{-1}(N_{\pi(x)})$, o sea que dado s en $CH \cap S$, se tiene que s esta en alguno de los $\overline{O}_i^2$ escogidos anteriormente; esto quiere decir que $CH \cap S$ esta cubierto por un numero finito de los $\overline{O}_i^2$; de donde $CH \cap S$ es compacto.

Definamos $f = \frac{g}{g_0}$ con $g_0(x) = \int_H g(xh)\,d\nu(h)$ por el lema 1 y como g continua, se tiene g_0 continua.

Ademas como $\pi(O_i^3) = Q_i^3$ es un cubrimiento de G/H, tenemos que para todo x en G, existe i en I, tal que $\pi(x) = xH \in Q_i^3$ de donde $xH \cap O_i^3 \neq \phi$, o sea para algún h en H, se tiene xh en O_i^3, por lo tanto para todo x de G, existe i en I, tal que $g_i(xh) = 1$, para algún h de H

lo que da $g(xh) \neq 0$, y como g es no negativa, resulta que para todo x de G $g_0 > 0$; de donde f esta bien definida, es continua y positiva sobre G.

Ademas como ν es la medida de Haar izquierda sobre H, se tiene, para todos h en H y x en G.

$$g_0(xh) = \int_H g(xhh')\,d\nu(h') = \int_H g(xh'')\,d\nu(h'') = g_0(x).$$

por lo tanto: $\int_H f(xh)\,d\nu(h) = \int_H \frac{g(xh)}{g_0(xh)}\,d\nu(h)$

$$= \int_H \frac{g(xh)}{g_0(x)}\,d\nu(h) = \frac{1}{g_0(x)} \int_H g(xh)\,d\nu(h) = 1$$

Q.E.D.

Designemos por Δ la función modular de G, y la de H por δ.

Lema 3: Sea G localmente compacto y H cerrado; entonces existe una función ρ de G en $]0,\infty[$ continua y tal que:

$$\rho(xh) = (\delta/\Delta)(h)\,\rho(x). \quad \text{todo } h \text{ en } H,\ x \text{ en } G$$

Demostración:

Sea $\rho(x) = \int_H (\Delta/\delta)(h)\, f(xh)\,d\nu(h).$

donde f designa la función continua, positiva; cuya existencia se establece en el lema 2; y como el cuociente Δ/δ es positivo y continuo sobre H; se tiene por el lema 1, que ρ es continua y positiva sobre G; ademas como ν es invariante a la ~~derecha~~ izquierda, se tiene para todo h' en H, X en G

$$\rho(Xh') = \int_H (\Delta/\delta)(h) f(Xh'h)\, d\nu(h) = \int_H (\Delta/\delta)(h'^{-1}h'') f(Xh'')\, d\nu(h'')$$

$$= (\Delta/\delta)(h'^{-1}) \int_H (\Delta/\delta)(h'') f(Xh'')\, d\nu(h'') = (\delta/\Delta)(h')\rho(X).$$

Q.E.D.

<u>Lema 4:</u> Para f en $C_c(G)$, definamos $\tilde{f}$ por:

$$\tilde{f}(X) = \int_H f(Xh)\, d\nu(h) \quad ;\text{entonces:}$$

① $\tilde{f}(Xh) = \tilde{f}(X)$. para todos h en H y X en G

② Si miramos $\tilde{f}$ como una función sobre G/H se tiene $\tilde{f}$ en $C_c(G/H)$; ademas si $S = \text{sop}\, f$ entonces $\pi(S) = \text{sop}\, \tilde{f}$.

<u>Demostración:</u> ① sale del hecho de ser ν invarianta

② Si $S = \text{sop}\, f$ y si C es un compacto de G se tiene, $CH = \pi^{-1}(\pi(C))$ es cerrado y por lo tanto $CH \cap S$ es compacto, tomando la función continua que lleva a todo H en 1 y por el lema 1, resulta que $\mathcal{F}$ es continua.

Veamos ahora que $\mathcal{F}$ en $C_c(G/H)$. Para esto consideremos. $\mathcal{F}(xH)$, esto es 0 a menos que xh en S, para algun h en H; por lo tanto $\mathcal{F}(xH) = 0$ a menos que xH este en. $\{sH / s \in S\} = \pi(S)$., pero como S es compacto, se tiene que $\pi(S)$ es compacto, de donde $\mathcal{F}$ en $C_c(G/H)$.

Q.E.D.

<u>Lema 5:</u> Si K es compacto en G/H, entonces existe un compacto C en G, tal que $\pi(C) = K$.

<u>Demostración:</u> Sea A una vecindad compacta de e en G, entonces $\pi(A)$ es una vecindad compacta de $\pi(e) = H$ en G/H; como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n$ en G. tales que $\bigcup_{i=1}^{n} \pi(x_i A) \supseteq K$.

Sea

$C = \pi^{-1}(K) \cap (x_1 A \cup \cdots \cup x_n A)$. y como. $\pi^{-1}(K)$ es cerrado y $x_1 A \cup \cdots \cup x_n A$ compacto, se tiene que C es compacto; y es claro que $\pi(C) = K$.

Q.E.D.

__Lema 6:__ La aplicación $f \mapsto \tilde{f}$ de $C_c(G)$ en $C_c(G/H)$ es lineal, epiyectiva y continua.

__Demostración:__ Que es lineal es claro.

Sea φ en $C_c(G/H)$ con $\operatorname{sop}\varphi = K$; por lema 5 existe compacto C de G, tal que $\pi(C) = K$. Sea $g \in C_c(G)$ tal que $g > 0$ sobre C; entonces $\tilde{g} > 0$ sobre K.

$$\text{Sea } F(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{\tilde{g}(x)} & \text{si } \tilde{g}(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{g}(x) = 0 \end{cases}$$

Entonces F es continua en G y $F(xh) = F(x)$ para todo x en G y h en H, pues φ y $\tilde{g}$ son constantes sobre las clases izquierdas de H en G.

Sea $f = gF$; es claro que f es continua y de soporte compacto; consideremos ahora $\tilde{f}$,

$$\tilde{f}(x) = \int_H (gF)(xh)\,d\nu(h) = \int_H \frac{g(xh)\varphi(xh)}{\tilde{g}(xh)}\,d\nu(h)$$

$$= \int_H \frac{g(xh)\varphi(x)}{\tilde{g}(x)}\,d\nu(h) = \frac{\varphi(x)}{\tilde{g}(x)} \int_H g(xh)\,d\nu(h)$$

$$= \frac{\varphi(x)}{\tilde{g}(x)}\,\tilde{g}(x) = \varphi(x)$$ por lo tanto $f \mapsto \tilde{f}$ es epiyectiva.

Veamos que $f \mapsto \tilde{f}$ es continua.

Se sabe que si $\mathcal{X}$ es un espacio topologico localmente compacto y separado; entonces podemos dar a $C_c(\mathcal{X})$ la siguiente topologia

Un conjunto $\mathcal{O} \subseteq C_c(\mathcal{X})$ se dice abierto, si y solo si, para todo compacto K de $\mathcal{X}$, se tiene $\mathcal{O} \cap C_K(\mathcal{X})$ es abierto en $C_K(\mathcal{X})$; en donde $C_K(\mathcal{X}) = \{ f : \mathcal{X} \to \mathbb{C} \,/\, \text{continuas}, \ \operatorname{sop} f = K \}$ esta dotado de la topologia definida por la norma $\|f\|_\infty$.

Ademas para ver que una aplicación lineal de $C_c(G)$ en $C_c(G/H)$ es continua, basta que lo sea su restricción a $C_C(G)$, para todo compacto C de G

Sea $m = \inf \{ |g(x)| \,/\, x \in C \}$. entonces

$$\|f\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{g(x)\varphi(x)}{\tilde{g}(x)} \right| \,/\, x \in C \right\}$$

$$\geq \sup \left\{ m \left| \frac{\varphi(x)}{\tilde{g}(x)} \right| \,/\, x \in C \right\} = \frac{m}{\|\tilde{g}\|_\infty} \|\varphi\|_\infty$$

Por lo tanto existe $M_C > 0$ tal que.

$$\|\varphi\|_\infty = \|\tilde{f}\|_\infty \leq M_C \|f\|_\infty \quad \text{con } M_C = \frac{m}{\|\tilde{g}\|_\infty}$$

O sea $f \mapsto \tilde{f}$ es continua en 0; lo que equivale a continuidad global.

Q.E.D.

Lema 7: Sea ρ de G en $]0,\infty[$ continua tal que $\rho(xh) = (\delta/\Delta)(h)\rho(x)$ y f en $C_c(G)$ tal que $\tilde{f} = 0$, entonces si λ denota la medida de Haar izquierda sobre G, se tiene:

$$\int_G f(x)\rho(x)\,d\lambda(x) = 0 .$$

Demostración: Si $\tilde{f} = 0$, quiere decir que para todo x en G $\int_H f(xh)\,d\nu(h) = 0$ por lo tanto

$$\int_H f(xh^{-1})\,\delta(h^{-1})\,d\nu(h) = 0$$

Sean $C = \operatorname{sop} f$ y g en $C_c(G)$, tal que $\tilde{g}$ es 1 sobre $\pi(C)$ y $g \geq 0$ sobre G; la existencia de g esta asegurada, gracias a que $\pi(C)$ es compacto y que, por lema 6, $f \longmapsto \tilde{f}$ es epiyectiva, por lo tanto tenemos:

$$0 = \int_G \rho(x)\,g(x)\left(\int_H f(xh^{-1})\,\delta(h^{-1})\,d\nu(h)\right)d\lambda(x)$$

$$= \int_H \int_G \rho(x)\,g(x)\,f(xh^{-1})\,\delta(h^{-1})\,d\lambda(x)\,d\nu(h)$$

$$= \int_H \int_G \rho(yh)\,g(yh)\,f(y)\,\delta(h^{-1})\,d\lambda(yh)\,d\nu(h)$$

$$= \int_H \int_G (\delta/\Delta)(h)\,\rho(y)\,g(yh)\,f(y)\,\delta(h^{-1})\,\Delta(h)\,d\lambda(y)\,d\nu(h)$$

$$= \int_G f(y)\rho(y)\left(\int_H g(yh)\,d\nu(h)\right)d\lambda(y)$$

$$= \int_G f(y)\rho(y)\tilde{g}(y)\,d\lambda(y) = \int_G f(y)\,\rho(y)\,d\lambda(y)$$

pues $\tilde{g}(x) = 1$ sobre $\pi(C)$, por lo tanto

$$\int_G f(x)\,\rho(x)\,d\lambda(x) = 0$$

Q.E.D.

Corolario: Si $\tilde{f} = \tilde{g}$, entonces:

$$\int_G f(x)\rho(x)\,d\lambda(x) = \int_G g(x)\rho(x)\,d\lambda(x)$$

Demostración: Es claro que $\tilde{f} = \tilde{g}$ equivale a $\tilde{f} - \tilde{g} = 0$ de donde $\widetilde{f-g} = 0$ y por lema 7 $\int_G (f-g)(x)\,\rho(x)\,d\lambda(x) = 0$; lo que equivale al resultado anunciado.

Q.E.D.

Lema 8: Definamos la función de $G \times G/H$ en $]0,\infty[$ por $\gamma_\rho(x,y) = \dfrac{\rho(xy)}{\rho(y)}$, la que denotaremos solo por γ; entonces γ satisface:

① $\gamma(x, yh) = \gamma(x, y)$, para todo x, y en G y h en H

② $\gamma(xy, \xi) = \gamma(x, y\xi)\,\gamma(y, \xi)$, todo x, y en G y ξ en G/H

③ $\gamma(h, k) = (\delta/\Delta)(h)$, para todo h, k en H.

Demostración:

① $\gamma(x, yh) = \frac{\rho(xyh)}{\rho(yh)} = \frac{(\delta/\Delta)(h)\,\rho(xy)}{(\delta/\Delta)(h)\,\rho(y)} = \gamma(x,y)$

② $\gamma(xy, \xi) = \frac{\rho(xy\xi)}{\rho(\xi)} = \frac{\rho(xy\xi)}{\rho(y\xi)} \cdot \frac{\rho(y\xi)}{\rho(\xi)}$

$$= \gamma(x, y\xi)\,\gamma(y,\xi)$$

③ $\gamma(h, \dot{h}) = \gamma(h, e) = \frac{\rho(h)}{\rho(e)} = \frac{(\delta/\Delta)(h)\,\rho(e)}{\rho(e)} = (\delta/\Delta)(h)$

Q.E.D.

Teorema 1: Para toda función ρ de G en $]0,\infty[$ contínua que cumpla $\rho(xh) = (\delta/\Delta)(h)\,\rho(x)$, existe una medida cuasi-invariante no trivial μ sobre G/H definida por:

$$\mu(\tilde{f}) = \int_{G/H} \tilde{f}(\xi)\,d\mu(\xi) = \int_G f(x)\,\rho(x)\,d\lambda(x).$$

Demostración: Por el corolario del lema 7 $\tilde{f} = \tilde{g}$ implica $\mu(\tilde{f}) = \mu(\tilde{g})$, por lo tanto μ esta bien definida y no depende, de la función de la cual provenga $\tilde{f}$.

Ademas por el lema 6, como $f \mapsto \tilde{f}$ es epiyectiva, se tiene que μ esta definida para todos elementos de $C_c(G/H)$, y como $f \mapsto \tilde{f}$ es lineal, se tiene que μ es un funcional lineal sobre $C_c(G/H)$; ademas por el lema 6 se tiene que para todo compacto K de G/H $f \mapsto \mu(\tilde{f})$ es continuo sobre $C_K(G/H)$; lo que equivale a decir que μ es una medida sobre G/H.

Para ver que μ es cuasi-invariante, basta ver que para todo x en G, la medida μ_x sea absolutamente continua con respecto a μ y reciprocamente.

Denotemos por ${}^x f$ la función tal que: ${}^x f(y) = f(x^{-1}y)$; notemos que: ${}^x(\tilde{f}) = \widetilde{({}^x f)}$, pues

$${}^x\tilde{f}(y) = \int_H f(x^{-1}yh)\, d\nu(h) = \int_H {}^x f(yh)\, d\nu(h) = \widetilde{({}^x f)}(y)$$

Sea ahora x en G fijo. Entonces como $\gamma(x, yh) = \gamma(x, y)$ para todo y en G, todo h en H se tiene que $\gamma(x, ?)$ se puede considerar como una función sobre G/H y:

$$\widetilde{\left(f\gamma(x, ?)\right)}(y) = \int_H (f\gamma(x, ?))(yh)\, d\nu(h)$$

$$= \int_H f(yh)\gamma(x, yh)\, d\nu(h) = \int_H f(yh)\gamma(x, y)\, d\nu(h)$$

$$= \left(\int_H f(yh)\, d\nu(h)\right)\gamma(x, y) = \left(\tilde{f}\gamma(x, ?)\right)(y).$$

Veamos entonces que μ es cuasi invariante

$$\mu_x(\tilde{f}) = \mu({}^x\tilde{f}) = \mu\left(\widetilde{{}^x f}\right) = \int_G f(x^{-1}y)\, \rho(y)\, d\lambda(y)$$

$$= \int_G f(z)\rho(xz)\,d\lambda(xz) = \int_G f(z)\frac{\rho(xz)}{\rho(z)}\rho(z)\,d\lambda(z)$$

$$= \int_G f(z)\gamma(x,z)\rho(z)\,d\lambda(z) = \mu\left(\widetilde{f\gamma(x,?)}\right) = \mu\left(\tilde{f}\gamma(x,?)\right)$$

Por lo tanto $\mu_x(\tilde{f}) = \mu\left(\tilde{f}\gamma(x,?)\right)$, o sea:

$$\int_{G/H} \tilde{f}(\xi)\,d\mu_x(\xi) = \int_{G/H} \tilde{f}(\xi)\gamma(x,\xi)\,d\mu(\xi) \quad \text{para toda}$$

$\tilde{f}$ en $C_c(G/H)$, con $\gamma(x,?)$ de G/H en $\mathbb{R}$ continua.

Por lo tanto por el teorema de Radon-Nikodym, se tiene que μ_x es absolutamente continua con respecto a μ. y recíprocamente; o sea μ es cuasi-invariante.

Q.E.D.

Corolario: Sean μ_1, μ_2 medidas cuasi invariantes sobre G/H, definidas por medio de funciones positivas, continuas ρ_1 y ρ_2 respectivamente; y que cumplen $\rho_k(xh) = (\delta/\Delta)(h)\,\rho_k(x)$, $k=1,2$, para todo x en G y h en H; entonces μ_1 y μ_2 son equivalentes, o sea poseen los mismos conjuntos de medida nula.

Demostración: ver que μ_1 y μ_2 poseen los mismos conjuntos de medida nula, equivale a ver que μ_1 es absolutamente continua con respecto a μ_2, y recíprocamente.

Sea $\tilde{f}$ en $C_c(G/H)$, entonces:

$$\mu_1(\tilde{f}) = \int_G f(x)\,\rho_1(x)\,d\lambda(x)$$

$$= \int_G f(x)\,\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\,\rho_2(x)\,d\lambda(x) = \mu_2\left(\widetilde{f\frac{\rho_1}{\rho_2}}\right)$$

y como ρ_1/ρ_2 es constante sobre las clases izquierdas de H en G; por lo tanto define una función sobre G/H y se tiene:

$$\widetilde{f\frac{\rho_1}{\rho_2}}(x) = \int_H f(xh)\,\frac{\rho_1(xh)}{\rho_2(xh)}\,d\nu(h).$$

$$= \int_H f(xh)\,\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\,d\nu(h) = \tilde{f}\,\frac{\rho_1}{\rho_2}(x)$$

por lo tanto tenemos $\mu_1(\tilde{f}) = \mu_2(\tilde{f}\,\rho_1/\rho_2)$, lo que equivale a que μ_1 es absolutamente continua con respecto a μ_2.

En forma analoga se llega a la afirmación recíproca; por lo tanto μ_1 y μ_2 son equivalentes.

O sea la medida sobre G/H no depende de la función ρ elegida.

Q.E.D.

§4 Definición de la representación inducida y primeras propiedades.

Ocupando los resultados del parrafo anterior, pasaremos a definir la representación inducida aún cuando no haya en G/H una medida G- invariante.

Por el teorema 1 y su corolario, sabemos que si G es localmente compacto y H cerrado, entonces existe una medida cuasi invariante μ sobre G/H, que no depende de la función ρ usada para su construcción

Para nuestra medida cuasi invariante μ tenemos para todo X en G y toda $\tilde{f}$ en $L^1(G/H, \mu)$.

$$\int_{G/H} \tilde{f}(\xi)\, d\mu_X(\xi) = \int_{G/H} \tilde{f}(\xi)\, \gamma(X,\xi)\, d\mu(\xi)$$

con $\gamma(X, ?)$ de G/H en $\mathbb{R}$ continua, definida por:

$$\gamma(X, \xi) = \frac{\rho(X\xi)}{\rho(\xi)}.$$

Sea (K, σ) una representación continua unitaria de H y consideremos:

$$\mathcal{M}=\{f: G\longrightarrow K \,/\, f(gh)=\sigma_h^*(f(g)),\ h\in H,\ g\in G\}$$

Notemos que si f y g estan en $\mathcal{M}$, como σ es unitaria, se tiene:

$$\langle f(xh), g(xh)\rangle_K=\langle\sigma_h^*(f(x)),\sigma_h^*(g(x))\rangle_K=\langle f(x), g(x)\rangle_K$$

Por lo tanto $\langle f(?), g(?)\rangle_K$ se puede considerar como una función sobre G/H.

Sea $\mathcal{H}^\sigma=\{f\in\mathcal{M} \,/\, \int_{G/H}\|f(\xi)\|_K^2\, d\mu(\xi)<\infty\}$

y definamos para f, g en $\mathcal{H}^\sigma$

$$\langle f, g\rangle=\int_{G/H}\langle f(\xi), g(\xi)\rangle_K\, d\mu(\xi).$$

entonces $\mathcal{H}^\sigma$ resulta ser un espacio de Hilbert.

Pasemos ahora a definir la acción $\mathcal{Z}^\sigma$ con $\mathcal{Z}_g^\sigma$ de $\mathcal{H}^\sigma$ en $\mathcal{H}^\sigma$:

$$(\mathcal{Z}_g^\sigma f)(g')=f(g^{-1}g')\sqrt{\gamma(g^{-1},\pi(g'))}$$

entonces para todo h en H se tiene:

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}_g^\sigma f)(g'h)&=f(g^{-1}g'h)\sqrt{\gamma(g^{-1},\pi(g'h))}\\&=\sigma_h^*(f(g^{-1}g'))\sqrt{\gamma(g^{-1},\pi(g'))}\\&\doteq\sigma_h^*\left(f(g^{-1}g')\sqrt{\gamma(g^{-1},\pi(g'))}\right)\\&=\sigma_h^*(\mathcal{Z}_g^\sigma f(g')).\end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{T}^{\sigma}_{g} f \in \mathcal{M}$, y como $\gamma(x,?)$ es continua para todo x en G y f en $\mathcal{H}^{\sigma}$, se tiene:

$$\int_{G/H} \|\mathcal{T}^{\sigma}_{g} f(g')\|^2 d\mu(g') = \int_{G/H} \| f(g^{-1}g')\|^2 |\gamma(g^{-1},\pi(g'))| d\mu(g') < \infty$$

por lo cual $\mathcal{T}^{\sigma}_{g} f$ esta en $\mathcal{H}^{\sigma}$ y ademas es claro que es lineal.

<u>Teorema 2</u>: El par $(\mathcal{H}^{\sigma}, \mathcal{T}^{\sigma})$ es una representación unitaria y continua de G.

<u>Demostración</u>: Se tiene:

$$\mathcal{T}^{\sigma}_{g_1}(\mathcal{T}^{\sigma}_{g_2} f)(g) = \mathcal{T}^{\sigma}_{g_2} f(g_1^{-1}g)\sqrt{\gamma(g_1^{-1},\pi(g))}$$

$$= f(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\sqrt{\gamma(g_1^{-1},\pi(g))}\sqrt{\gamma(g_2^{-1},\pi(g_1^{-1}g))}$$

$$= f((g_1g_2)^{-1}g)\sqrt{\gamma(g_1^{-1},\pi(g))\gamma(g_2^{-1},g_1^{-1}\pi(g))}$$

$$= f((g_1g_2)^{-1}g)\sqrt{\gamma(g_2^{-1}g_1^{-1},\pi(g))}$$

$$= f((g_1g_2)^{-1}g)\sqrt{\gamma((g_1g_2)^{-1},\pi(g))}$$

$$= \left(\mathcal{T}^{\sigma}_{g_1g_2} f\right)(g).$$

por lo tanto $\mathcal{T}^{\sigma}$ es una representación de G.

Veamos que $\mathcal{T}^{\sigma}_{g}$ es unitario para todo g en G.

$$\|\mathcal{Z}^\sigma_g f\|^2 = \int_{G/H} \|\mathcal{Z}^\sigma_g f(\xi)\|^2 d\mu(\xi)$$
$$= \int_{G/H} \|f(g^{-1}\xi)\|^2 \gamma(g^{-1}, \xi)\, d\mu(\xi).$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 \gamma(g^{-1}, g\eta)\, d\mu(g\eta).$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 \gamma(g^{-1}, g\eta)\, d\mu_g(\eta).$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 \gamma(g^{-1}, g\eta)\, \gamma(g, \eta)\, d\mu(\eta)$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 \gamma(g^{-1}g, \eta)\, d\mu(\eta).$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 \gamma(e, \eta)\, d\mu(\eta)$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 \frac{\rho(e\eta)}{\rho(\eta)}\, d\mu(\eta).$$
$$= \int_{G/H} \|f(\eta)\|^2 d\mu(\eta) = \|f\|^2.$$

por lo tanto $\mathcal{Z}^\sigma_g$ es un operador unitario de $\mathcal{H}^\sigma_1$ para todo g en G.

Veamos ahora que $\mathcal{Z}^\sigma$ es continua; sea f_0 en $\mathcal{H}^\sigma$ fija. Por demostrar que la aplicación de G en $\mathcal{H}^\sigma$; $g \longmapsto \mathcal{Z}^\sigma_g f_0$ es continua y es suficiente demostrar que es continua en e en G.

Ademas basta considerar f_0 una función con soporte compacto pues se sabe que $C_c(G)$ es denso en $L^2(G)$ y entonces si f_0 en $C_c(G)$ y f en $L^2(G)$ es cualquiera se tiene como $\mathcal{Z}_g^\sigma$ unitaria:

$$\|\mathcal{Z}_g^\sigma f - f\| \leq \|\mathcal{Z}_g^\sigma f - \mathcal{Z}_g^\sigma f_0\| + \|\mathcal{Z}_g^\sigma f_0 - f_0\| + \|f_0 - f\|$$
$$= \|f - f_0\| + \|\mathcal{Z}_g^\sigma f_0 - f_0\| + \|f_0 - f\|.$$

por lo tanto dados $\varepsilon > 0$ se tiene $\|f - f_0\| < \varepsilon/3$. por densidad de $C_c(G)$. y $\|\mathcal{Z}_g^\sigma f_0 - f_0\| < \varepsilon/3$. si suponemos demostrado para f_0 en $C_c(G)$; de donde. $\|\mathcal{Z}_g^\sigma f - f\| < \varepsilon$.

Sea $S =$ sop $\|f_0(?)\|$ compacto en G/H, escojamos una vecindad simetrica y compacta C de e en G, como ρ de G en $]0,\infty[$ es continua se tiene que γ^1 de $G \times G/H$ en $]0,\infty[$ es tambien continua y por lo tanto uniformemente continua sobre CS, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una vecindad simetrica N_e de e en G, tal que $N_e \subseteq C$ y tal que si g en N_e y g' en G entonces:

$$\left|\sqrt{\gamma^1(g, g')} - 1\right| < \varepsilon$$

Como tambien f_0 es uniformemente continua sobre G podemos escojer el anterior N_e de tal manera que tambien se tenga:

$\|f_o(gg') - f_o(g')\| < \varepsilon$ para todo g en N_e y g' en G

Como $\|f_o(?)\|$ tiene soporte compacto, podemos escojer $M > 0$ tal que. $\|f_o(g')\| \leq M$. para todo g' en G. y tal que. $|\gamma(g, g')| \leq M$. para todo g en C y todo g' en S

Ahora para todo g, g' en G se tiene:

$$\|\tau_g^\sigma f_o(g') - f_o(g')\| \leq \|\sqrt{\gamma(g^{-1}, g')}\,(f_o(g^{-1}g') - f_o(g'))\| + \|f_o(g')(\sqrt{\gamma(g^{-1}, g')} - 1)\|$$

y como $|\gamma(g, g')| \leq M$. todo g en C y g' en S. y además. $\|f_o(g')\| \leq M$. todo g' en G, se tiene por consiguiente

$$\|\tau_g^\sigma f_o(g') - f_o(g')\| \leq \sqrt{M}\,\|f_o(g^{-1}g') - f_o(g')\| + M\left|\sqrt{\gamma(g^{-1}, g')} - 1\right|$$

Ahora bien, para todo g en N_e. y todo g' en G, se tiene

$$\|f_o(g^{-1}g') - f_o(g')\| < \varepsilon \quad y \quad \left|\sqrt{\gamma(g^{-1}, g')} - 1\right| < \varepsilon.$$

por lo tanto:

$$\|\tau_g^\sigma f_o(g') - f_o(g')\| \leq \varepsilon\,(\sqrt{M} + M).$$

Ahora si g' no esta en CS entonces en particular g' no esta en S. y por lo tanto

$f_0(g')=0$ y si g en C entonces $g^{-1}g'$ no esta en S; de donde $f_0(g^{-1}g')=\mathcal{Z}^\sigma_g f_0(g')=0$, por lo tanto si g' no esta en CS. se tiene:

$$\|\mathcal{Z}^\sigma_g f_0(g')-f_0(g')\|=0$$

por lo tanto:

$$\|\mathcal{Z}^\sigma_g f_0-f_0\|=\int_{G/H}\|\mathcal{Z}^\sigma_g f_0(g')-f_0(g')\|d\mu(g')$$

$$=\int_{CS}\|\mathcal{Z}^\sigma_g f_0(g')-f_0(g')\|d\mu(g')$$

$$\leq\int_{CS}\varepsilon(\sqrt{M}+M)d\mu(g')=\varepsilon(\sqrt{M}+M)\mu(CS)$$

para todo g en Ne, por lo tanto $g\longmapsto\mathcal{Z}^\sigma_g f_0$ es continua en G, lo que implica que la representación $\mathcal{Z}^\sigma$ es continua.

Q.E.D.

Hemos construido finalmente aún en el caso en que G/H no admita una medida G-invariante, la representación inducida a G por la representación (K,σ) de H.

Cabe notar que si G/H posee una medida G-invariante, entonces para todo g en G $\mu_g=\mu$, o sea $\gamma(g,?)=1$ de donde resulta

$$(\mathcal{Z}^\sigma_g f)(g')=f(g^{-1}g')\sqrt{1}=f(g^{-1}g').$$

o sea recuperamos nuestra definición inicial de $(\mathcal{H}^\sigma, \mathcal{Z}^\sigma)$ la cual en virtud del teorema 2 es una representación unitaria y continua de G, demostración que no dimos en su oportunidad porque la daríamos posteriormente con mas generalidad en el teorema 2.

Vimos que si utilizabamos dos funciones ρ_1 y ρ_2 para construir medidas cuasi-invariantes sobre G/H, entonces estas medidas resultaban equivalentes; veamos ahora entonces:

<u>Proposición:</u> Sean μ_1 y μ_2 dos medidas cuasi-invariantes equivalentes sobre G/H y sean $(\mathcal{H}_1^\sigma, \mathcal{Z}_1^\sigma)$ y $(\mathcal{H}_2^\sigma, \mathcal{Z}_2^\sigma)$ las representaciones inducidas a G por la representación (K, σ) de H, ocupando las medidas μ_1 y μ_2 respectivamente; entonces:

$$(\mathcal{H}_1^\sigma, \mathcal{Z}_1^\sigma) \cong (\mathcal{H}_2^\sigma, \mathcal{Z}_2^\sigma).$$

<u>Demostración:</u> Sean ρ_1 y ρ_2 las funciones continuas y positivas usadas para construir μ_1 y μ_2; como son equivalentes resulta que para toda f en $C_c(G)$

$$\int_{G/H} \tilde{f}(g)\, d\mu_1(g) = \int_G f(g)\rho_1(g)\, d\mu(g) =$$

$$= \int_G f(g)\frac{\rho_1(g)}{\rho_2(g)}\rho_2(g)\,d\mu(g) = \int_{G/H} \widetilde{f\frac{\rho_1}{\rho_2}}(g)\,d\mu_2(g) = \int_{G/H} \tilde{f}(g)\frac{\rho_1(g)}{\rho_2(g)}\,d\mu_2(g)$$

Definamos $\mathcal{U}: \mathcal{H}_1^\sigma \longrightarrow \mathcal{H}_2^\sigma$ por: $\mathcal{U}f = f\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ entonces es claro que $\mathcal{U}$ es lineal y biyectiva y:

$$(\mathcal{U}f)(gh) = f(gh)\sqrt{\frac{\rho_1(gh)}{\rho_2(gh)}} = \sigma_h^*(f(g))\sqrt{\frac{\rho_1(g)}{\rho_2(g)}}$$

$$= \sigma_h^*\left(f(g)\sqrt{\frac{\rho_1(g)}{\rho_2(g)}}\right) = \sigma_h^*\left(\mathcal{U}f(g)\right).$$

por lo tanto $\mathcal{U}f$ esta en $\mathcal{M}$ y como $\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ es continua se tiene que $\mathcal{U}f$ esta en $\mathcal{H}_2^\sigma$.

Ademas $\|\mathcal{U}f\|_2^2 = \int_{G/H} \left\|f(g)\sqrt{\frac{\rho_1(g)}{\rho_2(g)}}\right\|^2 d\mu_2(g)$

$$= \int_{G/H} \|f(g)\|^2 \frac{\rho_1(g)}{\rho_2(g)}\,d\mu_2(g) = \int_{G/H} \|f(g)\|^2 d\mu_1(g) = \|f\|_1^2$$

por lo tanto $\mathcal{U}$ es unitario.

Veamos ahora $\tau_{2g}^\sigma(\mathcal{U}f)(g') = \mathcal{U}f(g^{-1}g')\sqrt{\delta_2(g^{-1},\pi(g'))}$

$$= f(g^{-1}g')\sqrt{\frac{\rho_2(g^{-1}g')}{\rho_2(g')}}\sqrt{\frac{\rho_1(g^{-1}g')}{\rho_2(g^{-1}g')}}$$

$$= f(g^{-1}g')\sqrt{\frac{\rho_2(g^{-1}g')\rho_1(g^{-1}g')}{\rho_2(g')\rho_2(g^{-1}g')}} = f(g^{-1}g')\sqrt{\frac{\rho_1(g^{-1}g')\,\rho_1(g')}{\rho_1(g')\,\rho_2(g')}}.$$

$$= f(g^{-1}g')\sqrt{\delta_1(g^{-1},\pi(g'))}\sqrt{\frac{\rho_1(g')}{\rho_2(g')}} = (\tau_{1g}^\sigma f)(g')\sqrt{\frac{\rho_1(g')}{\rho_2(g')}}$$

$= \mathcal{U}(\tau_{1g}^\sigma f)(g')$ o sea $\tau_{2g}^\sigma \circ \mathcal{U} = \mathcal{U}\circ\tau_{1g}^\sigma$ todo g en G.

por lo tanto $\mathcal{U}$ es un isomorfismo de representaciones.

§5 Ejemplos

① Tomemos $G = SL(2,\mathbb{R})$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / b \in \mathbb{R} \right\}$
Sea $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y la acción

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (x,y) \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

entonces es claro que $H = \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y como la acción es transitiva, se tiene $\mathcal{X} \simeq G/H$.

Consideremos en $\mathcal{X}$ la medida de Lebesgue μ; entonces es claro que:

$$\mu({}^g f) = \int_{\mathcal{X}} f(g^{-1}x)\, d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\, |\det g|\, d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathcal{X}} f(x)\, d\mu(x) = \mu(f)$$

Por lo tanto μ es una medida G-invariante sobre G/H.

Consideremos para todo t en $\mathbb{R}$, la representación $(\mathbb{C}, \sigma^t)$ de H definida por:

$$\sigma^t \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = e^{bti}\, Id_{\mathbb{C}}$$

entonces la representación inducida a G es:

$$\mathcal{H}^t = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, f\left(g \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{-bti} f(g),\ \int_{G/H} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

y acción $\left(\tau_g^t f\right)(g') = f(g^{-1}g')$.

② Tomemos ahora $G = GL(2,\mathbb{R})$ y $H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \in G\right\}$ y para cada t en $\mathbb{R}$ definamos la representación $(\mathbb{C}, \sigma^t)$ de H por.

$$\sigma^t\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right) = a^{ti}\, Id_{\mathbb{C}}$$

Para formar la representación inducida a G por $(\mathbb{C}, \sigma^t)$; necesitamos tener una medida cuasi invariante en G/H, asociada a una cierta función ρ de G en $]0,\infty[$;

Pero para esto necesitamos conocer las medidas de Haar izquierdas, tanto de G como de H, pero como son grupos de Lie, las podemos determinar con relativa facilidad (ref. [4]).

Miremos primero G, y demonos φ de U en $\mathbb{R}^4$, con U abierto de G que contenga a e.; definido por:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\right) = (x_1 - 1, x_2, x_3, x_4 - 1)$$

entonces se verifica

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4\end{pmatrix}\right) = (x_1 y_1 + x_2 y_3 - 1, x_1 y_2 + x_2 y_4, x_3 y_1 + x_4 y_3, x_3 y_2 + x_4 y_4 - 1)$$

Por lo tanto la medida de Haar izquierda μ sobre G es.

$$d\mu(x) = \left|\det \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}(x,e)\right|^{-1} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

$$= \left\|\begin{matrix} x_1 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_3 \\ x_2 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 \end{matrix}\right\|^{-1} dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

$$= \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4}{(\det x)^2} \qquad \text{con } x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Y la medida de Haar a la derecha ν sobre G es.

$$d\nu(y) = \left|\det \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(e,y)\right|^{-1} dy_1\, dy_2\, dy_3\, dy_4$$

$$= \frac{dy_1\, dy_2\, dy_3\, dy_4}{(\det y)^2} \qquad \text{con } y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $d\nu(x) = d\mu(x)$, para todo x en G. de donde resulta que $\Delta \equiv 1$; o sea G es un grupo unimodular.

Miremos ahora H, y definamos φ de $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^2$ por:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1^{-1} \end{pmatrix}\right) = (x_1 - 1,\, x_2), \quad \text{entonces:}$$

$$\varphi\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_1^{-1}\end{pmatrix}\right)\right) = (x_1 y_1 - 1,\ x_1 y_2 + x_2 y_1^{-1})$$

Por lo tanto la medida de Haar izquierda μ sobre H es:

$$d\mu(x) = \left|\det \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}(x,e)\right|^{-1} dx_1\, dx_2.$$

$$= \left|\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2 & x_1 \end{vmatrix}\right|^{-1} dx_1\, dx_2 = \frac{dx_1\, dx_2}{x_1^2}$$

Y la medida de Haar derecha ν sobre H es:

$$d\nu(y) = \left|\det \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(e,y)\right|^{-1} dy_1\, dy_2$$

$$= \left|\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1^{-1} \end{vmatrix}\right|^{-1} dy_1\, dy_2 = dy_1\, dy_2.$$

y como $d\nu(x) = \delta(x)\, d\mu(x)$. resulta que la función modular de H es. $\delta(X) = X_1^2$, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1^{-1}\end{pmatrix}$

Por lo tanto H no es un grupo unimodular pese a ser un subgrupo de uno que lo es.

Ahora que ya encontramos las funciones modulares de G y H, trataremos de encontrar una función ρ que cumpla las condiciones necesarias para definir una medida cuasi invariante $\tilde{\mu}$ sobre G/H.

Definemos:

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + c^2$$

entonces es claro que ρ es positiva y continua y

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a'^{-1} \end{pmatrix}\right) = \rho\left(\begin{pmatrix} aa' & ab' + ba'^{-1} \\ ca' & cb' + da'^{-1} \end{pmatrix}\right) = (aa')^2 + (ca')^2$$

$$= a'^2(a^2 + c^2) = (G/\Delta)\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a'^{-1} \end{pmatrix}\right)\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

Por lo tanto tenemos la medida $\tilde{\mu}$, con la cual podemos definir la representación inducida a G por la representación $(\mathbb{C}, \sigma^{\epsilon})$ de H y es:

$$\mathcal{H}^{\epsilon} = \left\{ f : G \to \mathbb{C} \,/\, f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a'^{-1} \end{pmatrix}\right) = a'^{-\epsilon i} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \text{ y } \int_{G/H} |f(g)|^2 \, d\tilde{\mu}(g) < \infty \right\}$$

con la acción: $\quad \mathcal{T}_g^{\epsilon} : \mathcal{H}^{\epsilon} \longrightarrow \mathcal{H}^{\epsilon}$

$$\left(\mathcal{T}_g^{\epsilon} f\right)(g') = f(g^{-1}g')\sqrt{\lambda(g^{-1}, g')}$$

con $\displaystyle \lambda(g^{-1}, g') = \frac{\rho(g^{-1}g')}{\rho(g')} = \frac{(aa' + bc')^2 + (ca' + dc')^2}{a'^2 + c'^2}.$

en donde $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

Capítulo Tercero

Operadores de entrelazamiento de representaciones inducidas

§1 Generalidades

Sean G un grupo finito, H un subgrupo de G, (K^i, σ^i), $i=1,2$ representaciones de H $(\mathcal{H}^{\sigma^i}, \mathcal{Z}^{\sigma^i})$ las respectivas representaciones inducidas de G; deseamos estudiar Φ en $\mathcal{H}om_G((\mathcal{H}^{\sigma^1}, \mathcal{Z}^{\sigma^1}), (\mathcal{H}^{\sigma^2}, \mathcal{Z}^{\sigma^2}))$.

Sabemos que hay un isomorfismo

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^{1G}, K^{2G}) \simeq (\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^1, K^2))^{G\times G}$$

$$\overline{\Phi} \longmapsto K_{\overline{\Phi}}$$

$$\overline{\Phi}_K \longleftarrow K$$

pues si $(e_i)_{i\in I}$ es una base de K^1 y $\delta^i_{g_0}$ denota la aplicación de G en K^1, definida por:

$$\delta^i_{g_0}(g) = \begin{cases} e_i & g = g_0 \\ 0 & g \neq g_0 \end{cases}$$

entonces se tiene $K_{\overline{\Phi}}(g, g_0)(e_i) = (\overline{\Phi}\,\delta^i_{g_0})(g)$

pues basta definirlo sobre la base $(e_i)_{i\in I}$.

$$(\bar{\Phi}_K f)(g) = \sum_{g' \in G} K(g, g')(f(g'))$$

en particular $\quad (\bar{\Phi}_K \delta^{i}_{g_0})(g) = K(g, g_0)(e_i)$

Por lo tanto si ϕ esta en $\mathcal{H}om_G(\tau^{\sigma^1}, \tau^{\sigma^2})$ se tiene para todo g en G $\tau^{\sigma^2}_g \circ \phi = \phi \circ \tau^{\sigma^1}_g$ y como $\mathcal{H}^{\sigma^i} \subseteq K^{iG}$, tenemos para todo i en I:

$$\tau^{\sigma^2}_g(\phi \delta^{i}_{g_0})(g') = \phi \delta^{i}_{g_0}(g^{-1}g') = K(g^{-1}g', g_0)(e_i)$$

$$\phi(\tau^{\sigma^1}_g \delta^{i}_{g_0})(g') = \phi \delta^{i}_{gg_0}(g') = K(g', gg_0)(e_i)$$

Por lo tanto $K(g^{-1}g', g_0) = K(g', gg_0)$, para todo g, g', g_0 en G; lo que implica que.

$$K(g_0 g, g_0 g') = K(g, g')$$

O sea los nucleos K son G-invariantes por la izquierda y en particular se tiene:

$$K(g, g') = K(g'^{-1}g, e)$$

esto ultimo se puede interpretar como una funcion $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^1, K^2)$; $\varphi(g) = K(g, e)$

Por lo tanto:

$$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^{1G}, K^{2G}) \cong (\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^1, K^2))^G$$

$$\bar{\Phi} \xmapsto{\sim} \varphi_{\bar{\Phi}}$$

$$\bar{\Phi}_\varphi \xleftarrow{\sim} \varphi$$

con $\left(\bar{\Phi}_\varphi f\right)(g) = \sum_{g' \in G} \varphi(g'^{-1} g)(f(g'))$

en particular $\left(\bar{\Phi}_\varphi \delta^i_{g_0}\right)(g) = \left(\varphi(g_0^{-1} g)\right)(e_i)$.

Además como sabemos que $\mathcal{H}^{\sigma^i} \subseteq K^{iG}$; existen proyectores de K^{iG}, llamemoslos P_i, tales que $\operatorname{Im} P_i = \mathcal{H}^{\sigma^i}$, con P_i definido por:

$$(P_i f)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sigma^i_h (f(gh)).$$

entonces se verifica:

$$(P_i f)(gh') = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sigma^i_h (f(gh'h))$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h_0 \in H} \sigma^i_{h'^{-1}} \sigma^i_{h_0} (f(gh_0)) = \sigma^i_{h'^{-1}} (P_i f(g))$$

por lo tanto $P_i f$ esta en $\mathcal{H}^{\sigma^i}$; ahora si f en $\mathcal{H}^{\sigma^i}$

$$(P_i f)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sigma^i_h (f(gh)) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sigma^i_h \sigma^i_{h^{-1}} (f(g))$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f(g) = f(g).$$

por lo tanto $P_i f = f$. Pero para todo $\bar{\Phi}$ en $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^{1G}, K^{2G})$ se tiene, la descomposición: $\bar{\Phi} = (P_2 + (I - P_2)) \circ \bar{\Phi} \circ (P_1 + (I - P_1))$; Si además $\bar{\Phi}$ esta en $\mathcal{H}om_G(\mathcal{Z}^{\sigma^1}, \mathcal{Z}^{\sigma^2})$ se debe tener:

$$\bar{\Phi} = P_2 \bar{\Phi} P_1.$$

o equivalentemente $P_2 \bar{\Phi} = \bar{\Phi} = \bar{\Phi} P_1$

Como $\{\delta^i_{g_0} / g_0 \in G, i \in I\}$ es una base de K^{1G}, se tiene:

(I) $P_2(\bar{\Phi}\delta^{i}_{g_0})(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sigma^2_h \bar{\Phi}\delta^{i}_{g_0}(gh)$

$= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sigma^2_h \varphi(g_0^{-1}gh)(e_i) = \varphi(g_0^{-1}g)(e_i)$

$= \bar{\Phi}\delta^{i}_{g_0}(g).$

(II) $\bar{\Phi}(P_1\delta^{i}_{g_0})(g) = \sum_{g'\in G}\varphi(g'^{-1}g)\,P_1\delta^{i}_{g_0}(g')$

$= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sum_{g'\in G}\varphi(g'^{-1}g)\sigma^1_h\left(\delta^{i}_{g_0}(g'h)\right)$

$= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(h\,g_0^{-1}g)\sigma^1_h(e_i)$

$= \varphi(g_0^{-1}g) = \bar{\Phi}\delta^{i}_{g_0}(g).$

De I y II se deduce para todo g en G:

$$\varphi(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\sigma^2_h\varphi(gh).$$

$$\varphi(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(hg)\,\sigma^1_h.$$

de donde

$$\varphi(g) = \frac{1}{|H|^2}\sum_{h,h'\in H}\sigma^2_{h'}\varphi(hgh')\sigma^1_h$$

por lo tanto, para $h_1, h_2 \in H$ se tiene:

$$\varphi(h_1gh_2) = \frac{1}{|H|^2}\sum_{h,h'\in H}\sigma^2_{h'}\varphi(hh_1gh_2h')\sigma^1_h.$$

$$= \frac{1}{|H|^2}\sum_{k,k'\in H}\sigma^2_{h_2^{-1}}\sigma^2_{k'}\varphi(kgk')\sigma^1_k\sigma^1_{h_1^{-1}}$$

$$= \sigma^2_{h_2^{-1}}\left(\frac{1}{|H|^2}\sum_{k,k'\in H}\sigma^2_{k'}\varphi(kgk')\sigma^1_k\right)\sigma^1_{h_1^{-1}}$$

$$= \sigma^2_{h_2^{-1}}\,\varphi(g)\,\sigma^1_{h_1^{-1}}$$

Por lo tanto si φ es la función asociada a un operador de entrelazamiento de $\mathcal{Z}^{\sigma^1}$ en $\mathcal{Z}^{\sigma^2}$; entonces φ debe cumplir, para todo h, h' en H y g en G.

$$\varphi(h\,g\,h') = \sigma^2_{h'^{-1}}\ \varphi(g)\,\sigma^1_{h^{-1}}$$

y recíprocamente; si φ cumple esta condición, entonces ella define un operador de entrelazamiento de $\mathcal{Z}^{\sigma^1}$ en $\mathcal{Z}^{\sigma^2}$; por lo tanto tenemos:

$$\mathcal{H}om_G\left((\mathcal{H}^{\sigma^1}, \mathcal{Z}^{\sigma^1}), (\mathcal{H}^{\sigma^2}, \mathcal{Z}^{\sigma^2})\right) \cong$$

$$\cong \left\{\varphi : G \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^1, K^2) \,/\, \varphi(h\,g\,h') = \sigma^2_{h'^{-1}}\,\varphi(g)\,\sigma^1_{h^{-1}}\right\}$$

Así entonces, hemos llegado; a que estudiar un operador de entrelazamiento de $\mathcal{Z}^{\sigma^1}$ en $\mathcal{Z}^{\sigma^2}$; equivale a darse una función bi-homogenea con valores operadores, sobre G.

Al conjunto de estas funciones lo denotaremos por A^{σ^1,σ^2}; De lo anterior, se desprende que:

$[\mathcal{Z}^{\sigma^1}, \mathcal{Z}^{\sigma^2}] = \dim A^{\sigma^1,\sigma^2} \leq |H \backslash G / H|$ = número de clases dobles de H en G.

Notemos que si inicialmente, nos hubieramos dado H_i, $i=1,2$ subgrupos de G y (K^i, σ^i) representación de H_i; entonces introduciendo solo algunos subindices mas, en el desarrollo anterior, habriamos llegado a:

$$\mathcal{H}om_G\left(\operatorname{Ind}_{H_1\uparrow G}(K^1,\sigma^1),\ \operatorname{Ind}_{H_2\uparrow G}(K^2,\sigma^2)\right) \cong$$

$$\cong \left\{\varphi : G \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(K^1,K^2) \,/\, \varphi(h_1 g h_2) = \sigma^2_{h_2^{-1}}\,\varphi(g)\,\sigma^1_{h_1^{-1}},\ h_i \in H_i\right\}$$

Por lo tanto $[\mathfrak{z}^{\sigma^1}, \mathfrak{z}^{\sigma^2}] \leq |H_1\backslash G/H_2|$.

En general en el caso finito esto es casi todo lo que se puede decir; aunque en casos especificos algo mas se puede hacer.

Sin embargo, en el caso continuo, hacer un estudio analogo, presenta serias dificultades analiticas y queda fuera del alcanse de esta tesis.

§2 Aplicación

Consideremos nuevamente nuestro ejemplo con $G = GL(2, \mathbb{F}_q)$ y $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G\}$; calculemos primero $|H \backslash G / H|$.

Para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en G con $c \neq 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - adc^{-1} & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & dc^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $G = H \cup HJH$, con $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; de donde $|H \backslash G / H| = 2$.

Veamos primero cuando $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ es irreducible, por lo anterior tenemos que $[\mathcal{Z}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta}]$ puede ser 1 ó 2; pero en $A^{\alpha\beta}$ siempre existen funciones con soporte en H, pues en $\mathcal{H}om_G(\mathcal{Z}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta})$ estan las homotecias, las cuales se obtienen como multiplos de la función

$$\varphi_0(g) = \begin{cases} \sigma^{\alpha\beta}_{h^{-1}} & \text{si } g = h \in H \\ 0 & \text{si } g \notin H \end{cases}$$

que es la que define el operador identidad.

Por lo tanto $(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta})$ reducible, equivale a decir que $[\mathcal{Z}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta}] = 2$, lo cual equivale a que exista una función φ en $A^{\alpha\beta}$ cuyo soporte contenga a HJH; la cual por ser bi-homogenea cumple que $\varphi(J) \neq 0$.

Pero para todo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ en D se tiene
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} J = J \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
por lo tanto:
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} J\right) = \varphi\left(J\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$$
o sea: $\alpha(a)^{-1}\beta(d)^{-1}\varphi(J) = \alpha(d)^{-1}\beta(a)^{-1}\varphi(J)$

por lo tanto para todo a y d en $\mathbb{F}_q^{\times}$ se tiene:
$$\varphi(J)\left[\alpha(a)^{-1}\beta(d)^{-1} - \alpha(d)^{-1}\beta(a)^{-1}\right] = 0.$$

Tomando en particular $d = 1$. y como $\varphi(J) \neq 0$ se tiene $\alpha(a) = \beta(a)$ para todo a en $\mathbb{F}_q^{\times}$

Por lo tanto $(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta})$ es reducible si y solo si $\alpha = \beta$; por lo tanto de las $(q-1)^2$ representaciones $(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta})$ hay $q-1$ reducibles; a saber las $(\mathcal{H}^{\alpha\alpha}, \mathcal{Z}^{\alpha\alpha})$.

Veamos ahora cuando $(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta})$ y $(\mathcal{H}^{\alpha'\beta'}, \mathcal{Z}^{\alpha'\beta'})$ son isomorfas, con $\mathcal{H}^{\alpha\beta}$ y $\mathcal{H}^{\alpha'\beta'}$ irreducibles.

Las representaciones son isomorfas si y solo si $[\mathcal{Z}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha'\beta'}] = 1 = \dim A^{\alpha\beta, \alpha'\beta'}$; pero esto quiere decir, que existen funciones bi-homogeneas sobre G; solo con soporte igual a H o solo con soporte HJH.

Supongamos primero que hay funciones con soporte H, si φ es una de estas, entonces para todo a y d en $\mathbb{F}_q^{\times}$ se tiene:

$$\alpha(a)^{-1}\beta(d)^{-1}\varphi(e) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} e\right) = \varphi\left(e \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \alpha'(a)^{-1}\beta'(d)^{-1}\varphi(e)$$

o sea:

$$\varphi(e)\left[\alpha(a)^{-1}\beta(d)^{-1} - \alpha'(a)^{-1}\beta'(d)^{-1}\right] = 0$$

pero como sop $\varphi = H$, se tiene $\varphi(e) \neq 0$ y tomando, $d = 1$ resulta $\alpha(a) = \alpha'(a)$, para todo a en $\mathbb{F}_q^{\times}$.

Ahora tomando $a = 1$, da: $\beta(d) = \beta'(d)$ para todo d en $\mathbb{F}_q^{\times}$; Por lo tanto obtenemos sólo el caso de isomorfismo trivial.

$$(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathfrak{Z}^{\alpha\beta}) \cong (\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathfrak{Z}^{\alpha\beta}).$$

Supongamos ahora que hay funciones bi-homogeneas con soporte HJH; si φ es una tal función, tenemos:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} J\right) = \varphi\left(J \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$$

o sea $\varphi(J)\left[\alpha(a)^{-1}\beta(d)^{-1} - \alpha'(d)^{-1}\beta'(a)^{-1}\right] = 0$ para todo a y d en $\mathbb{F}_q^{\times}$, pero como φ es bi-homogenea y su soporte es HJH, se tiene que $\varphi(J) \neq 0$ entonces:

tomando $d = 1$. obtenemos $\alpha(a) = \beta'(a)$, todo a en $\mathbb{F}_q^{\times}$

tomando $a = 1$ obtenemos $\beta(d) = \alpha'(d)$, todo d en $\mathbb{F}_q^{\times}$.

Por lo tanto el segundo caso de isomorfismo es:

$$(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathfrak{Z}^{\alpha\beta}) \cong (\mathcal{H}^{\beta\alpha}, \mathfrak{Z}^{\beta\alpha})$$

O sea que de las $(q-1)(q-2)$ representaciones $(\mathcal{H}^{\alpha\beta}, \mathcal{Z}^{\alpha\beta})$ irreducibles, sólo hay $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ que son no isomorfas dos a dos.

Esta serie de representaciones; se llama la serie principal de representaciones de $GL(2, \mathbb{F}_q)$.

Esta serie consta aproximadamente de la mitad de todas las representaciones irreducibles de $GL(2, \mathbb{F}_q)$.

Bibliografía:

[1] Bourbaki N. Topologie générale, ch 3
Hermann, Paris

[2] Bourbaki N. Intégration, ch 3, 7.

[3] Bourbaki N. Espaces vectoriels
topologiques, ch 5

[4] Bruhat. F. Representations des groupes
localment compacts.
Secrétariat Mathématique
de L'Ecole Normal Supérieure

[5] Mackey G. Induced representations
of locally compacts
groups I y II, Ann of
Math 55, 101–139 (1952)
58, 193–221 (1953).

[6] Mackey G. Functional Analysis and
related fields; Procee-
dings of a conference
in honor of Professor
Marshall Stone held
at the University of
Chicago, May 1968
Springer Verlag, Berlin.
1970.

[7] Rudin W. Real and Complex Analysis
Mc. Graw - Hill, New York
1966.
[8] Serre J. Representations Lineaires
des groupes finis
Hermann, Paris.
[9] Silberger A. An elementary construction
of the representations of
$SL(2, \mathbb{F}_q)$, Osaka J. Math.
6. 329-33[illegible] (1969).
[10] Soto J. Representaciones de grupos.
Instituto de Matematicas
Universidad Catolica de
Valparaiso 1976.
[11] Weil A. L'Intégration dans les
groupes topologiques
Hermann, Paris 1940.