UNA VERSION ESTOCASTICA DEL PRINCIPIO DEL MAXIMO DE PONTRYAGIN CUANDO LOS CONTROLES ADMISIBLES SON ESCALONADOS

Autor:

Sonia Klimpel L.

A QUIENES HAN SIDO

MIS MAESTROS

AGRADECIMIENTOS

Debo expresar mi profunda gratitud al Doctor Jorge González G. quién a pesar de su gran actividad como profesor en el Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación de la Universidad Técnica del Estado, ha guiado esta tesis de grado con paciencia y dedicación.

Agradezco también a los profesores del Departamento de Probabilidad y Estadística de la Universidad Católica de Chile, señores Julio López S. y Alberto Saenger L., sus valiosas opiniones que contribuyeron a la elaboración de esta tesis.

I N D I C E

RESUMEN

Cuando se tiene un proceso de control caracterizado por una ecuación diferencial determinística y se busca un control y una trayectoria optimales, el Principio del Máximo de Pontryagin es una importante ayuda,pues permite seleccionar los posibles controles optimales.

Si en el proceso de control se introduce una perturbación aleatoria(ruido), los controles y trayectorias se convierten en procesos estocásticos que dependen de la naturaleza de la perturbación aleatoria.

Presentamos aquí una versión estocástica de este Principio, esto es, una condición necesaria para la optimalidad de un control, cuando la ecuación que caracteriza el proceso de control es una ecuación diferencial estocástica unidimensional y lineal y los controles admisibles son escalonados en un sentido específico.

Con este tipo de controles se hace necesario introducir los conjuntos singulares, conjuntos donde no se verifica el teorema, y que dependen de la naturaleza de la distribución de probabili-

dad de la perturbación aleatoria. Pero, si bien esta dependencia es clara, la manera como se da es un tema que no ha sido tratado aquí y queda abierto.

El ejemplo presentado está basado en una ecuación muy simple donde la perturbación aleatoria es un proceso gaussiano con esperanza cero, una de las perturbaciones más frecuentes.

Otras versiones del Principio del Máximo Estocástico existen en la literatura reciente: una de las primeras es la de Kushner [5]. Posteriormente, han aparecido Principios del Máximo Estocástico con ecuaciones diferenciales de Îto, Mc. Shane y otras. (Por ejemplo"Kuo": "On the Stochastic Maximun Principle in Banach Spaces", J. of Functional Analysis 14, N°2, 1973; V. Warfield: "A Stochastic Maximun Principle", SIAM- Control, Vol 14, N°5,1976)

Este trabajo se inspira en las ideas originales de Pontryagin [1] y en el artículo de Kushner [5], pero su planteamiento y resultados son nuevos.

I.- INTRODUCCION

1.- Teoría de Control Optimal.

Un proceso de control puede describirse como:

(1) $$\frac{dx_i}{dt} = f_i \ (x_1, \ldots . x_n, u_1, \ldots .. u_r)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

donde:

i) $x_1, \ldots . x_n$ son las variables que caracterizan el proceso, es decir, las coordenadas del objeto controlado que determinan su posición, velocidad, aceleración, etc. en cada instante t.

ii) $u_1, \ldots . u_r$ son los parámetros de control que determinan el curso del proceso.

iii) t es el tiempo.

Para determinar el curso del proceso de control en cierto intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_1$, es suficiente dar los parámetros de control como funciones de t en este intervalo:

$$u_j = u_j\ (t) \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots.\ r.$$

Entonces, para valores iniciales dados

$$x_i\ (t_0) = x_{0i} \qquad\qquad i = 1, \ldots.\ n.$$

La solución del sistema (1) queda únicamente determinado, suponiéndose naturalmente que f cumpla las condiciones de existencia y unicidad de (1).

El problema general que estudia la Teoría de Control Optimal consiste en lo siguiente :

Sea

$$(2) \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} f_0\ (x\ ,\ \upsilon)\ dt$$

donde:

$f_0\ (x\ ,\upsilon)$ es una función dada de:

$$x = (x_1, \ldots.\ x_n)$$
$$\upsilon = (u_1, \ldots.\ u_r)$$

Para cada control dado, definido en $[t_0, t_1]$ y dadas las condiciones iniciales, el curso del proceso queda únicamente determinado y el funcional J toma un valor definido.

Es necesario suponer que el punto $u = (u_1, \dots u_r)$ pertenece a un cierto conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^r$, cuya elección depende del problema que se está resolviendo. Los controles definidos a través del conjunto U y de otras hipótesis adicionales que dependerán del problema se llaman admisibles.

Supongamos que se quiere transferir el objeto de control desde un estado inicial $x(t_0) = x_0 = (x_{01}, \dots x_{0n})$ a un estado final $x(t_1) = x_1 = (x_{11}, \dots x_{1n})$ de tal manera que el valor del funcional J sea mínimo.

Para ello debemos encontrar un control:

$$\overline{u}_j = \overline{u}_j(t) \qquad j = 1, 2, \dots r.$$

que minimice (2).

Tal control se llama optimal y su trayectoria correspondiente a través de (1), trayectoria optimal.

Una condición para la optimalidad del par (x , υ) es el Principio del Máximo de Pontryagin (1), cuyo enunciado es el siguiente:

"Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible tal que su trayectoria correspondiente, que comienza en el punto x_0 y pasa, en algún instante t_1, por un punto perteneciente a una recta Π. Para que $\upsilon(t)$ y $x(t)$ sean optimales es necesario que exista una función vectorial continua

$$\psi(t) = (\Psi_0(t), \Psi_1(t), \ldots\ldots \Psi_n(t)$$

correspondiente a $\upsilon(t)$ y $x(t)$, tal que :

a) Para todo t; $t_0 \leq t \leq t_1$, la función $H(\psi(t), x(t), u(t))$ de la variable $u \in U$, alcance su máximo en el punto $u = \upsilon(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), \upsilon(t)) = M(\psi(t), x(t)).$$

b) En el instante final t_1, las relaciones

$$\Psi_0 (t_1) \leq 0 , \qquad M (\psi (t_1), x (t_1) = 0$$

se satisfacen, donde

$$M (\psi (t), x (t) = \sup_{u \in U} H (\psi (t), x (t), u). "$$

<u>Nota</u>:

i) La función $\psi (t) = (\Psi_0 (t), ..., \Psi_n(t))$ está definida como solución del sistema:

$$(3) \quad \frac{d\Psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f_\alpha (x(t), \upsilon(t))}{\partial x_i} \Psi\alpha \qquad i = 1, 2,.. n.$$

donde $\upsilon(t)$ es un control admisible y $x(t)$ su trayectoria correspondiente a través de (1), con condición inicial $x(t_0) = x_0$.

ii) La función $H (\psi , x , u)$ se define por:

$$H (\psi(t), x(t), \upsilon(t)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \Psi_\alpha(t) f_\alpha(x(t), \upsilon(t)),$$

expresión que se puede escribir en forma de sistema:

$$(4) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_i} \quad ; \quad \frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

llamado sistema Hamiltoniano.

Para valores fijos de x y de ψ, la función H es una función de $u \in U$. (Para mayores detalles, ver [1]).

La solución general del problema utiliza, entonces, el sistema auxiliar de ecuaciones (3), para definir H a través de (4), y encontrar $u(t)$ que maximice H en cada instante del tiempo. Finalmente, se resuelve (1), obteniendo así la trayectoria optimal.

2.- Teoría de Probabilidades.

Definición 1.:

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidades, es decir, un espacio de medida finita con $P(\Omega) = 1$.

i) $X : (\Omega, F) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ es variable aleatoria si

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ es Borel medible.

ii) $X : (\Omega, F) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n))$ es vector aleatorio

si para cada $i = 1, \ldots.n$,

$p_i \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ es Borel medible.

(p_i es la proyección i-ésima sobre $\mathbb{R}$).

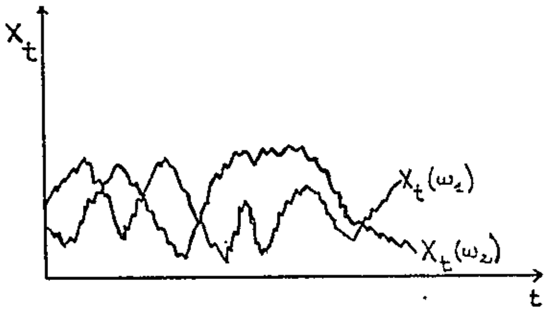
<u>Definición 2.</u>:

Sea (Ω,F,P) espacio de probabilidades y T un conjunto de índices. Se llama Proceso Ectocástico a una colección $\{X_t\}_{t\in T}$ de vectores (variables) aleatorios (as) tales que:

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}^n , \quad n \geq 1$$

<u>Nota</u>:

Una realización de un proceso $\{X_t\}_{t\in T}$ es el conjunto de valores $X_t(\omega)$, ω fijo en Ω.



Dos realizaciones de un proceso.

Definición 3.:

i) Cada variable aleatoria X induce sobre $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ una medida de probabilidad P_X definida por:

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A)) \qquad \text{cada } A \in \mathbb{B}$$

P_X se llama distribución de X.

ii) Función de distribución de una variable aleatoria X es una función $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por:

$$F_X(x) = F_X((-\infty, x]) \qquad x \in \mathbb{R}$$

F_X es monótona creciente y continua por la izquierda.

Definición 4.:

Se llama esperanza de una variable aleatoria X a la expresión:

$$E\ (X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\infty}^{\infty} X\ dP_X = \int_{-\infty}^{\infty} X d.F_X\ ,$$

siempre que la integral exista.

Definición 5.:

Sea G sub-σ-álgebra de F y sea B fijo en F. Llamamos probabilidad condicional de B dado G a la función medible:

$$P\ (B\ |\ G) : (\Omega, G) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$$

que satisface:

$$P\ (C \cap B) = \int_C\ P\ (B|G)\ dP \quad \text{para cada } C \in G$$

Definición 6.:

Sea X: $(\Omega,\ F) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}\ ,\ \bar{\mathbb{B}})$ variable aleatoria tal que $E(X)$ existe y sea G sub-σ-álgebra de F.

Llamamos esperanza condicional de X dado G, a la función

$$E\,(X|G) : (\Omega,G) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$$

que satisface:

$$\int_C X\, dP = \int_C E(X|G)\, dP \quad \text{para cada } C \in G.$$

Nota 2.:

La existencia y unicidad c.t.p. [P] de estas dos últimas funciones puede ser demostrada utilizando el Teorema de Radon-Nikodym. (ver [2]).

3.- Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

Definición 1.:

Sea (Ω, F, P) espacio de probabilidades y sean $X = \{X_t\}_{t \in T}$, $Y = \{Y_t\}_{t \in T}$ dos procesos estocásticos definidos sobre Ω.

Diremos que:

$$X \overset{T}{\equiv} Y \iff \text{existe } \Omega_0 \subset \Omega,\ P(\Omega_0) = o \text{ tal que}$$

$$X_t\ (\omega) = Y_t\ (\omega)\ ,\ \forall\ \omega \in \Omega - \Omega_0$$

Se observa que Ω_0 no dependerá de t.

Definición 2.:

$$\text{Sea } f : \mathbb{R}^n \times \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Una R - solución (solución en realizaciones) de la ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dx}{dt} = f\ (x,\ \omega,\ t)$$

con condición inicial:

$$X_{t_0} = x_0 \quad ; \qquad x_0 \text{ vector aleatorio,}$$

es un proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \in T}$ que satisface.

i) $\frac{d}{dt}\ X_t\ (\omega) \overset{T}{\equiv} f\ (x(\omega,t),\omega,\ t)$

ii) $P\ (X_{t_0} = X_0) = P\ (\{\omega \in \Omega / X_{t_0}\ (\omega) = X_0\}) = 1$

es decir, casi todas las realizaciones satisfacen la ecuación diferencial y $X_{t_0} = x_0$ casi seguramente. (ver [3]).

Definición 3.:

Sean $\{X_t\}_{t \in T}$, $\{Z_t\}_{t \in T}$, $\{u_t\}_{t \in T}$ procesos estocásticos y sea $T = [t_0 , t_1]$.

Una R- solución de la ecuación lineal:

$$\frac{dx_t}{dt} = A X_t + B(t) u_t + Z_t \qquad \text{con } X_{t_0} = x_0$$

tiene la forma

$$X_t(\omega) = Q(t) X_0 (\omega) + Q(t) \int_{t_0}^{t} [Q(s)]^{-1}\{B(s) u_s(\omega)+ Z_s(\omega)\} ds$$

$$\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega - \Omega_0 .$$

donde Q(t) es la matriz fundamental, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1) $Z(\omega,\cdot)$ es continua para cada $\omega \in \Omega - \Omega_0$

2) $|Z(\omega,\cdot)|$ es integrable en cada subintervalo compacto de T.

3) $u(\omega,\cdot)$ es medible y acotada en $t \in T$ y continua, excepto en un número finito de puntos de T, para cada $\omega \in \Omega-\Omega_0$.

4) $B(t)$ continua y acotada en T (ver [4]).

II.- EL PROBLEMA

1.- Definición del Problema.

Se plantea una versión estocástica del Principio del Máximo de Pontryagin, para el caso en que el proceso de control es:

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = AX + Bu + Z \qquad \text{con } X(o) = x_o$$

donde:

A es una constante (no aleatoria)

B es una función de $t \in [0,T]$

Z es una perturbación aleatoria, es decir, un proceso.

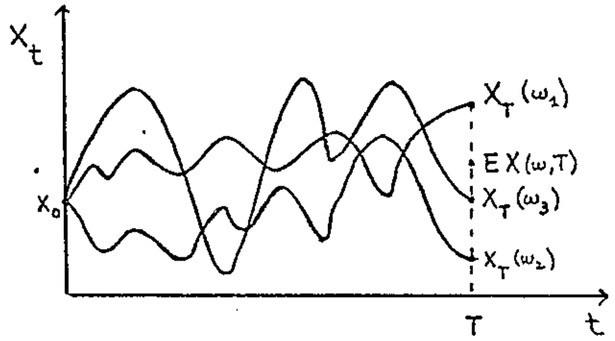
$$\{Z_t\}_{t \in [0,T]} \,,\ Z_t : \Omega \to \mathbb{R}$$

Luego, la R - solución X es un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [0,T]}$ y los controles admisibles funciones

$u: \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$.

El funcional a minimizar es el costo promedio de parada:

(2) E (c $X(\omega,T)$ c constante dada.



Se buscará entonces, una condición necesaria para la optimalidad de $u(\omega,t)$, cuando se quiere minimizar la esperanza de la solución en realizaciones en el instante de término T.

2.- Supuestos y Controles Admisibles.

2.1.- Supuestos.

Sea Ω es espacio muestral y sea Σ (t) σ-álgebra minimal sobre la cual $Z(\cdot,\tau)$ es medible, para todo $\tau \leq t$, es decir, Σ (t) es la σ-álgebra generada por la colección $\{Z_\tau\}_{\tau \leq t}$ y la medida sobre $(\Omega,\Sigma(T))$, la medida de probabilidad P.

Sobre $([0,T], \mathbb{B})$ consideramos la medida usual de Lebesgue y en el espacio producto $(\Omega \times [0,T], \tilde{\Sigma})$ la medida producto m, donde $\tilde{\Sigma}$ es la σ-álgebra minimal sobre la cual $Z(\cdot,\cdot)$ es medible. Naturalmente $\tilde{\Sigma} \subseteq \Sigma(T) \times \mathbb{B}$.

Además se requiere $Z(\omega,\cdot)$ continua para cada $\omega \in \Omega - \Omega_0$, $P(\Omega_0) = 0$ y:

$$\int_0^T E\,|Z(t)\,dt < \infty$$

Por último, $B(\cdot)$ debe ser continua y acotada en $[0,T]$.

2.2.- Controles Admisibles.

i) Cada control $u(\cdot,\cdot): \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ quedará determinado por una partición Q_n de Ω y una partición P_m de $[0,T]$ de manera que $u(\omega,\cdot)$ sea escalonado, excepto un conjunto de medida de Lebesgue nula y $u(\cdot,t)$ sea simple para casi todo $t \in [0,T]$ es decir, si

$Q_n = \{\Omega_i\}_{i=1}^n$ y $P_m = \{I_j\}_{j=1}^m$, entonces

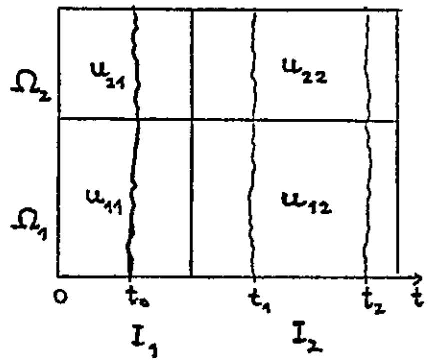
$u(\omega,t) = \sum\limits_i \sum\limits_j u_{ij}\, 1_{\Omega_i \times I_j}(\omega,t)$ para todo $\omega \in \Omega$ y para casi todo $t \in [0,T]$

con u_{ij} constante, todo (i,j).

ii) $|u(\omega,t)| \leq M$ todo $\omega \in \Omega$, casi todo $t \in [0,T]$.

iii) $u(\cdot,\tau)$ es medible en una sub-σ-álgebra $\Sigma_u(t) \subset \Sigma(t), \tau \leq t$.

"Gráficamente" un control admisible sería:



u_{ij} son los valores del control en cada rectángulo $\Omega_i \times I_j$

En t_0, t_1, t_2 hay valores distintos a los u_{ij}.

Con estos supuestos y controles admisibles, la solución de la ecuación (1) es:

$$X(\cdot,t) = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-As}\,(B(s)\,u(\cdot,s) + Z(\cdot,s))\,ds\right)$$

para cada $\omega \in \Omega - \Omega_0$ y es Lebesgue integrable en $[0,T]$.

Además

$$E\,|(X(t)| < \infty \quad \text{y cada } t \in [0,T]$$

y $\int_0^T E\,|X(t)|\,dt < \infty$ ver [5].

3.- Controles perturbados.

Sea u (ω,t) control admisible arbitrario con trayectoria correspondiente $X(\omega,t)$.

a) Se define el control perturbado $u_{\pi_{11}}$ a través de la perturbación

$\pi_{11} = \{u_{11}, G_1, J_1, k_1, l_1, \varepsilon, \delta\}$ de la manera siguiente:

$$u_{\pi_{11}} = \begin{cases} u_{11} & (\omega,t) \in G_1 \times J_1 \\ u(\omega,t) \ , & (\omega,t) \in (G_1 \times J_1)^c \end{cases}$$

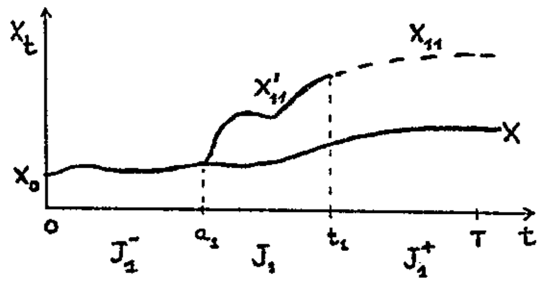
donde ε y δ son números positivos arbitrarios y:

$P(G_1) \leq k_1 \delta$; $\mu(J_1) \leq l_1 \varepsilon$; u_{11} constante,

$| u_{11} | \leq M.$ (μ es medida de Lebesgue)

Con esta definición $u_{\pi_{11}}$ es admisible y su trayectoria correspondiente está dada por:

$$X_{\pi 11}(\omega,t) = \begin{cases} X(\omega,t) & \text{en } (G_1^c \times [0,T] \cup (G_1 \times \bar{J_1}) \\ X'_{11}(\omega,t) & \text{en } G_1 \times J_1 \\ X_{11}(\omega,t) & \text{en } G_1 \times J_1^+ \end{cases}$$



donde $J_1 = [a_1, t_1]$: $\bar{J_1} = [0,a_1]$ y $J_1^+ = [t_1,T]$

y :

$$X'_{11}(\omega,t) = e^{A(t-a_1)} (X(\omega,a_1) + \int_{a_1}^{t} e^{-A(s-a_1)}(B(s)u_{11} +$$

$$Z(\omega,s))\, ds)\omega \in G_1-G'_0 \text{ , } P(G'_0) = 0, \; t \in J_1.$$

$$X_{11}(\omega,t) = e^{A(t-t_1)}(X'_{11}(\omega,t_1) + \int_{t_1}^{t} e^{-A(s-t_1)}(B(s)u(\omega,s)$$

$$+ Z(\omega,s))\, ds)\; \omega \in G_1-G_0,\; P(G_0) = 0,\; t \in J_1^+.$$

$X_{\pi 11}(\cdot,t)$ es continua para todo $t \in [0,T]$.

b) i) Cálculo de $\delta^{11} X(\omega,t) = X_{\pi_{11}}(\omega,t) - X(\omega,t)$

$$\delta^{11} X(\omega,t) = \begin{cases} \delta_0 X(\omega,t) = 0 & \text{en } (G_1^c \times [0,T] \cup (G_1 \times J_1^-) \\ \delta'_{11} X(\omega,t) & \text{en } G_1 \times J_1 \\ \delta_{11} X(\omega,t) & \text{en } G_1 \times J_1^+ \end{cases}$$

donde:

$$\delta'_{11} X(\omega,t) = X'_{11}(\omega,t) - X(\omega,t)$$

y

$$\delta_{11} X(\omega,t) = X_{11}(\omega,t) - X(\omega,t)$$

Claramente:

$\delta^{11} X(\omega,t)$ es continua para todo $t \in [0,T]$.

ii) Cálculo de $\frac{d}{dt} \delta^{11} X(\omega,t)$.

$$\frac{d}{dt}\delta^{11}X(\omega,t) = \begin{cases} A\delta_0 X(\omega,t)+B(t)\,\delta_0 u(\omega,t) & \text{en } (G_1^c \times [0,T])\cup(G_1 \times \overset{o}{J}{}_1^{-}) \\ A\delta'_{11} X(\omega,t)+B(t)\delta'_{11}u(\omega,t) & \text{en } G_1 \times J_1 \\ A\delta_{11} X(\omega,t)+B(t)\delta_{11}u(\omega,t) & \text{en } G_1 \times \overset{o}{J}{}_1^{+} \end{cases}$$

donde

$$\delta^{11}u(\omega,t) = \begin{cases} \delta_0\; u(\omega,t) = 0 & \text{en } (G_1^c \times [0,T\,])\cup(G_1 \times \overset{\circ}{J}{}_1^{-}) \\ \delta_{11}'\; u(\omega,t) = u_{11}-u(\omega,t) & \text{en } G_1 \times J_1 \\ \delta_{11}\; u(\omega,t) = 0 & \text{en } G_1 \times \overset{\circ}{J}{}_1^{+} \end{cases}$$

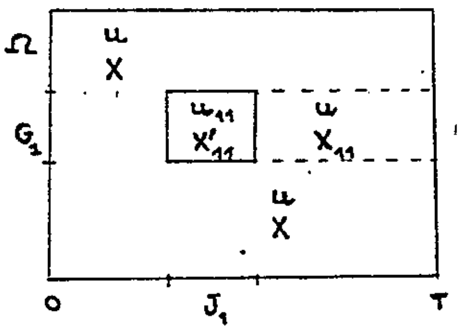
$$\text{y}\quad \overset{\circ}{J}{}_1^{-} = [\,0,a_1) \quad ; \quad \overset{\circ}{J}{}_1^{+} = (t_1,T\,].$$

Más brevemente:

$$\frac{d}{dt}\;\delta^{11}\,X(\omega,t) = A\delta^{11}\,X(\omega,t) + B(t)\;\delta^{11}\,u(\omega,t)$$

salvo en un conjunto de probabilidad nula.

Como función de t, $\frac{d}{dt}\;\delta^{11}X$ es continua excepto en los puntos a_1 y t_1; gráficamente la situación puede resumirse como:



c) Sea $\pi_{nm} = \{\{u_{ij}\}_{1\le i\le n}^{1\le j\le m}\;,\; Q_n\;,\; P_m\;,\{k_i\}_{1\le i\le n},\{l_j\}_{1\le j\le m},\varepsilon,\delta\}$

una perturbación, donde:

u_{ij} son constantes tales que $|u_{ij}| \leq M$ para todo par (i,j).

$Q_n = \{G_i \subset \Omega / P(G_{i_1} \cap G_{i_2}) = 0,\ i_1 \neq i_2 ;\quad i = 1,2,\ldots,n\}$

$P_m = \{J_j \subset [0,T] / \mu(J_{j_1} \cap J_{j_2}) = 0,\ j_1 \neq j_2 ;\quad j = 1,2,\ldots,m\}$

k_i constante positiva tal que $P(G_i) \leq k_i\delta$, $i = 1,\ldots. n$.

l_j constante positiva tal que $\mu(J_j) \leq l_j\varepsilon$, $j = 1,\ldots. m$.

ε y δ números positivos arbitrarios.

Entonces el control perturbado

$$u_{\pi_{nm}}(\omega,t) = \begin{cases} \sum\limits_{i,j} u_{ij}\, 1_{G_i \times J_j}(\omega,t) & (\omega,t) \in \bigcup\limits_{i,j} (G_i \times J_j) \\ u(\omega,t) & (\omega,t) \in \left(\bigcup\limits_{i,j} (G_i \times J_j)\right)^c \end{cases}$$

es admisible y su trayectoria

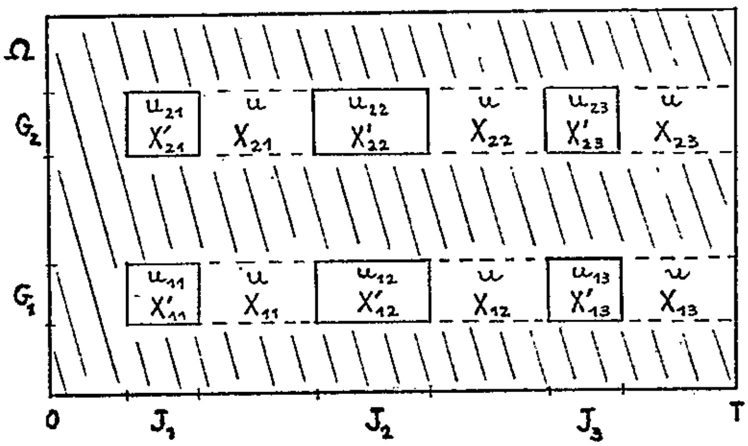
$$X_{\pi_{nm}}(\omega,t) = X(\omega,t)\, 1_I(\omega,t) + \sum_{i,j} X'_{ij}(\omega,t) 1_{G_i \times J_i}(\omega,t) + \sum_{i,j} X_{ij}(\omega,t) 1_{G_i \times J_j^+}(\omega,t)$$

$$\text{donde } I = \{(\bigcup_{1}^{n} G_i)^c \times [0,T]\} \cup \{(\bigcup_{1}^{n} G_i) \times \bar{J_i}\}$$

es continua para todo $t \in [0,T]$.

Ejemplo:

$u_{\pi 23}$ y $X_{\pi 23}$



En la región achurada el control es u y la trayectoria, X.

Nota:

Hay que recordar que cada X'_{ij} y cada X_{ij} son soluciones de la ecuación diferencial para todo $\omega \in G_i$, excepto en los conjuntos G'_{oi} y G_{oi} respectivamente, conjuntos que no dependen de los intervalos J_j y J_j^+, con $P(G'_{oi}) = P(G_{oi}) = 0$, $\forall$ i.

Luego la R-solución $X_{\pi_{nm}}(\omega,t)$ es solución de la ecuación

(1) con el control perturbado $u_{\pi_{nm}}(\omega,t)$ para todo

$$\omega \in \Omega - \left(\bigcup_{i=1}^{n} (G'_{oi} \cup G_{oi})\right)$$

La diferencia $X_{\pi_{nm}}(\omega,t) - X(\omega,t) = \delta^{nm} X(\omega,t)$ es también continua en t y satisface la relación:

(3) $\frac{d}{dt} \delta^{nm} X(\omega,t) = A\, \delta^{nm} X(\omega,t) + B(t)\, \delta^{nm} u(\omega,t)$

$\frac{d}{dt} \delta^{nm} X(\omega,t)$ es continua en t, excepto en los puntos

a_1 , t_1, ... a_m, t_m

donde $J_j = [a_j, t_j]$ y

$$\delta^{nm} u(\omega,t) = 0\cdot 1_I(\omega,t) + \sum_{i,j} (u_{ij} - u(\omega,t)) 1_{G_i \times J_j}(\omega,t) + \sum_{i,j} 0\cdot 1_{G_i \times J_j^+}(\omega,t)$$

4.- El Principio del Máximo.

4.1.- Definiciones Preliminares.

Supongamos que existe un control admisible $\overline{u}$ que es optimal para el problema, esto es, que minimiza el costo esperado (2) cuya trayectoria correspondiente es $\overline{X}$.

Definición 1.:

Se define la variable auxiliar p(t) como solución de la ecuación diferencial.

$$(4) \quad \dot{p}(t) = -\frac{d}{dx} \; (AX(t) + B(t)\, u + Z(t))\; p(t)$$

$$= \; -Ap(t) \qquad \text{con } p(t) = c.$$

Entonces la única solución:

$$p(t) = e^{-A(t-a)} \qquad \text{con } a = T + \frac{\ln c}{A}$$

es continua y acotada en $t \in [\,0,T\,]$ y no depende de ω.

Definición 2.:

Se define ahora, para cualquier control admisible $\hat{u}$ y cualquier trayectoria X, la función:

$$H(X,\hat{u},p) = p(AX + B\hat{u} + Z)$$

de manera que para cada par (ω,t) se tiene:

$$E(X(\omega,t),\hat{u}(\omega,t),p(t)) = p(t)\ \{AX(\omega,t) + B(t)\hat{u}(\omega,t)+ Z(\omega,t)\}$$

Entonces H está bien definida y es Lebesgue integrable para cada $\omega \in \Omega - \Omega_0$ y satisface:

$$(5) \quad \int_0^T E\ |H(X(t), \hat{u}(t), p(t)|\ dt < \infty$$

En efecto, siendo $\hat{u}$ admisible y X Lebesgue integrable, $AX + B\hat{u} + Z$ es integrable en $[0,T]$. Además p(t) es integrable y finita; luego $H(X(\omega,\cdot), \hat{u}(\omega,\cdot), p(\cdot))$ es integrable para cada $\omega \in \Omega - \Omega_0$.

Nota:

Si $\bar{u}$ es optimal y $\hat{u}$ es cualquier control admisible con trayectorias $\overline{X}$ y $\hat{X}$ respectivamente, entonces:

(6) $E\, c\, \delta X_T = E\, c\, \hat{X}_T - E\, c\, \overline{X}_T \geq 0$

Esta diferencia es el aumento del costo debido a un control perturbado. [1]:

Definición 3.:

Sea $D \in \Sigma(T)$ y $t_1 \leq t_2$. Llamamos rectángulo admisible a un rectángulo R de la forma:

$$R = D \times \{ [t_1, t_2] - N\}$$

donde N tiene medida de Lebesgue nula.

Definición 4.:

Sea $A \in \tilde{\Sigma}$, $m(A) \neq 0$. Diremos que A es singular si :

1: *Siendo los controles admisibles escalonados c.t.p., cualquier control admisible puede considerarse como el perturbado de otro.*

i) existe una sucesión creciente $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \tilde{\Sigma}$ para todo n tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo rectángulo admisible R tal que $R \subset A_n$, se tiene $m(R) = 0$.

4.2.- El Teorema.

En este torema se expresa la condición necesaria para un control optimal cuando los controles admisibles son escalonados. La utilización de un proceso de control que se caracteriza por una ecuación diferencial lineal simplifica en algún sentido el problema, pero la condición misma se mantiene si se utiliza un proceso del tipo:

$$\frac{dX_t^i}{dt} = f(X_t^1, \ldots, X_t^n, u_t^1 \ldots\ldots u_t^r) \quad i=1, \ldots n$$

con:

$$P(X_0^i(\omega,0) = X_0^i) = 1$$

bajo ciertas restricciones para f. (Por ejemplo: Lipschitziana).

Teorema 1.-

Si $\overline{u}$ con trayectoria $\overline{X}$ es optimal para el problema, entonces para cualquier control admisible $\hat{u}$, se tiene:

$$(7) \quad E(H(\overline{X}(\omega,t),\overline{u}(\omega,t),p(t))|\Sigma_{\overline{u}}(t)) \leq E(H(\overline{X}(\omega,t),\hat{u}(\omega,t),p(t)|\Sigma_{\overline{u}}(t))$$

salvo en conjuntos singulares o de medida nula.

Demostración:

a) La demostración requiere en primer lugar del cálculo del aumento del costo debido a un control perturbado.

Sea $\hat{u} = \overline{u} + \delta\,\overline{u}$; $\hat{X} = \overline{X} + \delta\,\overline{X}$

Por definición:

$$H(\overline{X} + \delta\overline{X}\ ,\ \overline{u} + \delta\overline{u},\ p) = p\,(A(\overline{X} + \delta\overline{X}) + B(\overline{u} + \delta\overline{u}) + Z)$$

Entonces:

i) $H((X + \delta\overline{X})(\omega,t),(\overline{u} + \delta\overline{u})(\omega,t),p(t)) - H(\overline{X}(\omega,t),\overline{u}(\omega,t),p(t))$

$$= p(t)\ \{\ A\ \delta\overline{X}(\omega,t) + B\ \delta\overline{u}\ (\omega,t)\}$$

$$= p(t)\frac{d}{dt}\ \delta\overline{X}\ (\omega,t) \qquad\qquad \text{por (3)}$$

Además,por desarrollo de Taylor,se tiene:

ii) $H((\overline{X} + \delta\overline{X})(\omega,t),(\overline{u} + \delta\overline{u})(\omega,t),\ p(t))$

$$= H(\overline{X}(\omega,t),(\overline{u} + \delta\overline{u})(\omega,t),p(t)) + \frac{d}{dx}H(\overline{X}(\omega,t),(\overline{u}+\delta\overline{u})(\omega,t)p(t)\cdot\delta\overline{X}(\omega,t)$$

$$= H(\overline{X}(\omega,t),(\overline{u} + \delta\overline{u})(\omega,t),p(t)) - (\frac{d}{dt}\ p(t))\cdot\ \delta\overline{X}\ (\omega,t)$$

De i) y ii), resulta:

$$\delta H(\omega,t) = H(\overline{X}(\omega,t),(\overline{u}+\delta\overline{u})(\omega,t),p(t)) - H(\overline{X}(\omega,t),\overline{u}(\omega,t),p(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\ p(t)\ \delta\overline{X}\ (\omega,t) + p(t)\ \frac{d}{dt}\ \delta\overline{X}\ (\omega,t)$$

luego:

$$\int_0^T \delta H(\omega,t)\ dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\ \{p(t)\ \delta\overline{X}(\omega,t)\}\ dt = p(T)\cdot\ \delta\overline{X}(\omega,T)$$

recordando que $\delta\overline{X}(\omega,0) = 0$

Entonces:

(8) $E\ c\ \delta\overline{X}\ (\omega,t) = E \int_0^T \delta H(\omega,t)\ dt$, puesto que

$p(T) = c$

b) Sea A un conjunto no singular sobre el cual no se cumple (7). Entonces existe un control perturbado $\overline{u} + \delta\overline{u}$ que difiere de $\overline{u}$ solo en A y tal que:

$$E(\delta H(\omega,t) \mid \Sigma_{\overline{u}}(t)) < 0 \quad \text{en} \quad A$$

Sea $A_n = \{(\omega,t)/E(\delta H(\omega,t) \mid \Sigma_{\overline{u}}(t)) < -\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y se ve fácilmente que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$$

Siendo A no singular, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_o} \supset R$, R admisible y $m(R) \neq 0$.

Para $p = 1/n_o$, existe una perturbación admisible $\delta\overline{u}_p$ que difiere de $\overline{u}$ solo en R y tal que:

$$E(\delta H_p\ (\omega,t)\ |\ \Sigma_{\bar{u}}\ (t)) < -\ p \quad \text{en } R$$

(Esto es posible dada la definición de control admisible).

Observamos que las secciones izquierdas R_t, $t \in [0,T]$, de R son $\Sigma_{\bar{u}}(t)$ medibles para cada valor de t, pues $E(\delta H_p(\omega,t)|\ \Sigma_{\bar{u}}(t)$ es una función $\Sigma_{\bar{u}}(t)$ medible para cada t.

Por (5), se verifica el corolario del Teorema de Fubini y podemos intercambiar la esperanza con el signo de integral; luego:

$$E \int_0^T \delta H_p(\omega,t)dt = \int_0^T E(\delta H_p(\omega,t)dt = \int_0^T \left(\int_{R_t} \delta H_p(\omega,t)\ dP\right)dt =$$

$$= \int_0^T \left(\int_{R_t} E(\delta H_p\ (\omega,t)|\ \Sigma_{\bar{u}}(t))dP\right)\ dt$$

$$< -\ p \int_0^T \ (\int_{R_t} dP)\ dt = -p\ m(R) < 0$$

puesto que $m(R) \neq 0$.

Esto significa que:

$$E\, c\, \delta\overline{X}\,(\omega,t) < 0 \qquad \text{por (8),}$$

lo que contradice la optimalidad de $\overline{u}$.

c.q.d.

III.- EJEMPLO:

Sea $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso distribuído normalmente con media cero y varianza $K\,t^{\alpha}$, K constante, $-1<\alpha\leq 0$.

Sea $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ solución de la ecuación diferencial estocástica:

(1) $\frac{dX_t}{dt} = -X_t + u_t \operatorname{sen} t + Z_t$

con condición inicial $P(X_0(\omega)=0)=1$

Los controles admisibles aquellos escalonados c.t.p tales que $|u| \leq 1$.

El funcional a considerar será:

(2) $E\,c\,X_T$ con $c = 1$

Entonces la variable auxiliar es: $p(t) = e^{(t-T)}$ y

$$H(X(\omega,t),\ u(\omega,t),p(t)) = e^{(t-T)}\ \{-X_t(\omega) + \operatorname{sen} t\ u_t(\omega) + Z_t\ (\omega)\}$$

La R-solución es:

$$X_t = e^{-t} \int_0^t e^s \text{ sen } s\, u_s\, ds + e^{-t} \int_0^t e^s\, Z_s\, ds$$

para casi todo t.

y:

$$-e^{(t-T)}\, X_t = -e^T \{ \int_0^t e^s \text{ sen } s\, u_s\, ds + \int_0^t e^s\, Z_s\, ds \}$$

Luego:

(3) $E(\, H(X_t, u_t,\, p(t)) \mid \Sigma_u\, (t)) =$

$$-e^{-T} \{E(\int_0^t e^s \text{ sen } s\, u_s\, ds \mid \Sigma_u(t)) + E(\int_0^t e^s\, Z_s\, ds|\Sigma_u(t)\} +$$

$$+\, e^{(t-T)}\{E(u_t \text{ sen } t|\Sigma_u\, (t)) + E(Z_t|\Sigma_u(t))\} =$$

$$e^{-T} \{E(e^t\, u_t \text{ sen } t - \int_0^t e^s\, u_s \text{ sen } s\, ds|\Sigma_u(t)) + E(e^t\, Z_t - \int_0^t e^s\, Z_s ds|\Sigma_u(t))\}$$

Puesto que $(e^t\, u_t \text{ sent } - \int_0^t e^s\, u_s \text{ sen } s)$ depende de la función (sen t + cos t) se propone como un posible control optimal:

$$u(\omega,t) = \begin{cases} - \operatorname{sgn} (\text{sen } t + \cos t) & \omega \in \Omega, t \neq \frac{(2k+3)\pi}{4} \quad k=0,2,4\ldots \\ - \operatorname{sgn} (\text{sen } \tau + \cos \tau) & \omega \in \Omega, t = \frac{(2k+3)\pi}{4} \quad k=0,2,4\ldots \end{cases}$$

$$\tau \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{4} , \frac{(2k+3)\pi}{4} \right]$$

y $\Sigma_u (t) = \{\Omega , \phi\}$ cada $t \in [0,T]$.

a) $t \in (0, \frac{3\pi}{4}]$

$u = -1$

$EX_t = -e^{-t} \int_0^t e^s \text{ sen } s \, ds$

$= -1/2 (\text{sen } t - \cos t + e^{-t})$

$EX_{\frac{3\pi}{4}} = -0{,}75$

b) $t \in (\frac{3\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}]$

$u = +1$

$EX_t = e^{-(t-3\pi/4)} \left(EX_{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^t e^{-(s-3\pi/4)} \text{ sen } s \, ds\right)$

$$= e^{-(t-3\pi/4)}\, EX_{\frac{3\pi}{4}} + 1/2\ (\text{sen } t - \cos t - \sqrt{2}\, e^{-(t-3\pi/4)}]$$

$$EX_{\frac{7\pi}{4}} = -\ 0.77$$

c) $t \in (\frac{7\pi}{4}\ ,\ \frac{11\pi}{4}]$

$u = -\ 1$

$$EX_t = e^{-(t-7\pi/4)}\ EX_{\frac{7\pi}{4}} - \int_{\frac{7\pi}{4}}^{t} e^{(s-7\pi/4)} \text{ sen } s\, ds$$

$$= e^{-(t-7\pi/4)} EX_{\frac{7\pi}{4}} - 1/2\ (\text{sen } t - \cos t + \sqrt{2}\, e^{-(t-7\pi/4)})$$

d) Las trayectorias esperadas se siguen construyendo en forma análoga a los casos aquí presentados.
(Se acompaña gráfico de EX_t).

Supongamos ahora que T (momento de parada) es tal que:

$$\frac{7\pi}{4} < T < \frac{11\pi}{4}$$

Sean $\tilde{u}$ control admisible arbitrario y $\tilde{X}$ su trayectoria correspondiente a través de (1).

Veremos si se cumple $E\tilde{X}_T - EX_T \geq 0$

$$E\tilde{X}_T = e^{-T} \left(\int_0^T e^s \text{ sen } s\, E(\tilde{u}_s)\, ds\right)$$

$$EX_T = e^{-(T-7\pi/4)}\, EX_{\frac{7\pi}{4}} - e^{-(T-7\pi/4)} \int_{\frac{7\pi}{4}}^T e^{(s-7\pi/4)} \text{sen } s\, ds.$$

(4) $$E\tilde{X}_T - EX_T = e^{-T} \left\{ \int_0^{7\pi/4} e^s \text{ sen } E(\tilde{u}_s) ds - EX_{\frac{7\pi}{4}} + \int_{\frac{7\pi}{4}}^T e^s \text{ sen } s(E(\tilde{u}_s)+1) ds\right\}$$

$$= e^{-(T-7\pi/4)} \left\{E(\tilde{X}_{\frac{7\pi}{4}}) - E(X_{\frac{7\pi}{4}}) + \int_{\frac{7\pi}{4}}^T e^{(s-7\pi/4)} \text{sen } s\, (E(\tilde{u}_s)+ 1)\, ds\right\}$$

Pero:

$$-1 \leq \tilde{u}_s \leq 1 \Rightarrow -1 \leq E(\tilde{u}_s) \leq 1$$

Luego:

$$0 \leq E(\tilde{u}_s) + 1 \leq 2$$

y:

$$0 \leq \int_{\frac{7\pi}{4}}^T e^{(s-7\pi/4)} \text{sen } s(E(\tilde{u}_s)+1)\, ds \leq e^{(T-7\pi/4)} (\text{sen } T - \cos T) + \sqrt{2}$$

Compararemos $\quad E\tilde{X}_{\frac{7\pi}{4}}$ con $EX_{\frac{7\pi}{4}}$

a) Si $t \in (\,0, \frac{3\pi}{4}\,]$

$$E\tilde{X}_t = e^{-t} \int_0^t e^s \operatorname{sen} s \; E(\tilde{u}_s)\, ds$$

$$EX_t = -e^{-t} \int_0^t \operatorname{sen} s \; ds$$

$$EX_t - EX_t = e^{-t} \int_0^t e^s \operatorname{sen} s \; (E(\tilde{u}_s) + 1)\, ds$$

$$EX_{\frac{3\pi}{4}} - EX_{\frac{3\pi}{4}} \geq 0$$

Pues:

$$0 \leq \int_0^t e^s \operatorname{sen} s \; (E(\tilde{u}_s) + 1)\, ds \leq (\operatorname{sen} t - \cos t + e^{-t})$$

b) Si $t \in (\frac{3\pi}{4} \,,\, \frac{7\pi}{4}\,]$

$$E\tilde{X}_t = e^{-(t-3\pi/4)} E\tilde{X}_{\frac{3\pi}{4}} + e^{-(t-3\pi/4)} \int_{\frac{3\pi}{4}}^t e^{(s-3\pi/4)} \operatorname{sen} s \,(E(\tilde{u}_s) ds$$

$$E\tilde{X}_t - EX_t = e^{-(t-3\pi/4)}(E\tilde{X}_{\frac{3\pi}{4}} - EX_{\frac{3\pi}{4}}) + e^{-(t-3\pi/4)}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{t} e^{(s-3\pi/4)}\operatorname{sen} s(E(\tilde{u}_s)-1)ds$$

Se tiene $-2 \leq E(\tilde{u}_s) - 1 \leq 0$

Supongamos los casos extremos en que:

$$E\tilde{X}_{\frac{3\pi}{4}} - EX_{\frac{3\pi}{4}} = 0$$

y:

$$E(\tilde{u}_s) - 1 = -2$$

Entonces:

$$E\tilde{X}_{\frac{7\pi}{4}} - EX_{\frac{7\pi}{4}} = e^{-\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} e^{(s-3\pi/4)} \operatorname{sen} s\,(-2)\,ds$$

$$= -e^{-\pi}\left(e^{\pi}(-\sqrt{2}) - \sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,(1 + e^{-\pi}) > 0$$

Resulta, entonces que (4) es positivo o nulo, lo que significa que el control u propuesto y su trayectoria correspondiente X, son optimales.

En cuanto a la varianza de la trayectoria X_t, podemos decir que si $\hat{\rho}_{s\tau}$ = coeficiente de correlación entre Z_s y Z_τ, se elige como:

$$\hat{\rho}_{s\tau} = e^{-(\tau-s)} \qquad \tau \geq s > 0$$

entonces Var X_t es decreciente del orden de $t\, e^{-2t}$.

El coeficiente de correlación expresa el grado de correlación entre dos variables:

i) $-1 \leq \rho_{s\tau} \leq 1$

ii) Los valores 1 y -1 expresan total correlación (positiva o negativa) y el valor 0 expresa la ausencia de correlación.

Como:

$$\text{Var } X_t = e^{-2t} \int_0^t \int_0^t e^s\, e^\tau\, \text{Cov}(Z_s, Z_\tau) ds \cdot d\tau \qquad t \geq \tau \geq s > 0$$

$$= e^{-2t} \int_0^t \int_0^\tau e^s\, e^\tau\, e^{-(\tau-s)} .\, K \cdot \tau^{\alpha/2}\, s^{\alpha/2}\, ds\, d\tau$$

$$< K(1 - e^{-2t}(t + 1))$$

donde Cov $(Z_S, Z_\tau) = \rho_{S\tau} \sqrt{\mathrm{Var}\, Z_S\, \mathrm{Var}\, Z_\tau}$ es la variación conjunta de ambas variables.

Siendo Var X_t decreciente, es claro que los valores de X_t se acercarán cada vez más a EX_t.

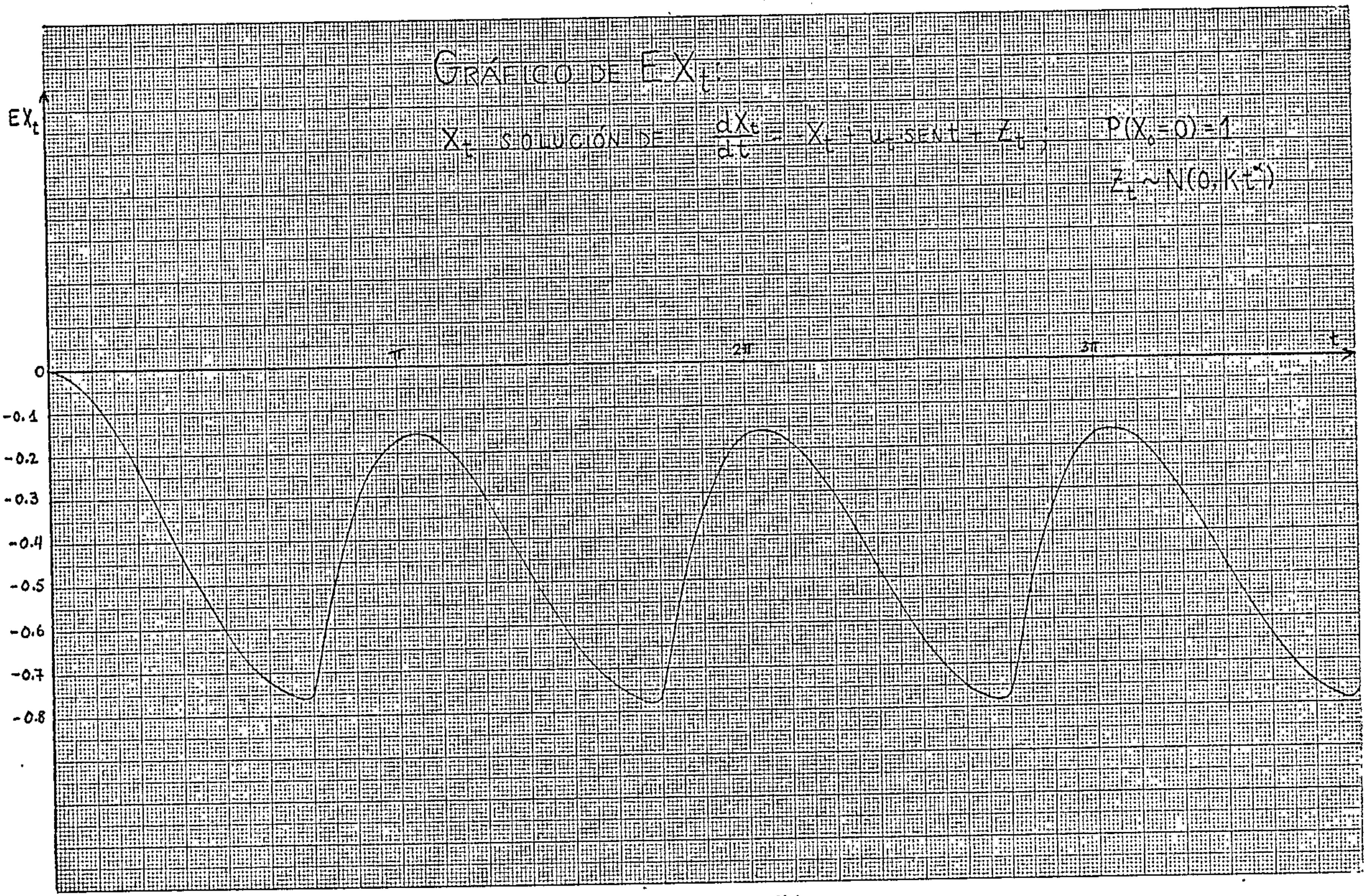


GRÁFICO DE EX_t:
X_t SOLUCIÓN DE $\frac{dX_t}{dt} = -X_t + u_t \,\mathrm{SEN}\, t + Z_t$; $P(X_0 = 0) = 1$
$Z_t \sim N(0, Kt^2)$
EX_t
t
π
2π
3π
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8

B I B L I O G R A F I A

1.- L.S. Pontryagin,

V.G. Boltyanskii,

R.V. Gamkrelidze,

E.F. Mishchenko: "The Mathematical Theory of Optimal Processes" J. Wiley, 1962.

2.- Robert B. Ash: "Real Analysis and Probability". Ac. Press, 1972.

3.- Jorge González: "Algunas Nociones sobre Ecuaciones Diferenciales Estocásticas". (Publ. interna Fac. Ciencias, 1976). "Seminario Dr. Naulin".

4.- Helga Bunke: "Geowöhnliche Differential Gleichungen mit Zufälligen Parametern". Akademic Verlag, Berlin, 1972.

5.- Harold. J. Kushner: "On Stochastic Maximun Principle: Time Fixed of Control". Journal of Mathematical Analysis of Applications 11, 78-92, 1965.