UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Naturales y Matematicas

Movimientos Geodesicos en el espacio de soluciones de Schwarzschild

Memoria:

Reynaldo Castillo Macuada

Tesis de Grado

para optar al grado de

LICENCIADO EN FILOSOFIA CON MENCION EN FISICA

Planteamiento del problema.

1.1 Relatividad Especial.

En esta parte de nuestro trabajo analizaremos las ideas centrales que conducen a una descripción de la naturaleza en el marco de la "Relatividad Especial".

Históricamente en la formulación de la teoría tenemos que considerar dos aspectos, uno teórico que constituye la concepción newtoniana de la naturaleza y uno fenomenológico el que culmina con el electromagnetismo de Maxwell-Faraday. La mecánica de Newton como cualquier otra teoría física precisa un referencial constituído por un sistema de coordenadas que permite indicar la ubicación en el espacio del fenómeno y además un reloj asociado solidariamente al sistema de coordenadas para que de este modo pueda darnos la cronología del fenómeno Siguiendo las ideas de la mecánica newtoniana y fijando nuestra atención en aquellas que son realmente significativas, no podemos dejar de mencionar las que condensaremos en las dos proposiciones siguientes.

1.1.a "Existen sistemas de referencia al interior de los cuales un cuerpo que se mueve libremente, sigue una trayectoria rectilínea".

Esto caracteriza cinemáticamente los llamados sistemas inerciales, el enunciado anterior es equivalente al siguiente:

"Existen sistemas de referencia en los cuales un cuerpo que se mueve libremente, lo hace con velocidad constante".

1.1.b Principio de equivalencia. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas inerciales y las transformaciones que permiten pasar de un sistema inercial a otro, son las que constituyen el grupo de Galileo. I) $\vec{R}' = \vec{r} + \vec{U}t$

II) $t' = t$, $\vec{U}$ vector constante, velocidad relativa

Es fácil darse cuenta que la aceptación del grupo de Galileo, equivale a aceptar en la naturaleza una concepción absoluta del tiempo. El tiempo se mide con independencia de cualquier sistema inercial. La idea

La idea de tiempo absoluto en conexión estrecha con I, nos lleva a concluír que las interacciones descritas en la naturaleza deben ser instantáneas. En efecto cada una de las acciones tiene asociada su tiempo, lo que equivale a declarar la posibilidad de comparación de tiempo en sistemas diferentes, pero sucede que no puede haber diferencias entre estos tiempos medidos así, pues la relación II así lo establece.

Opongamos a esta descripción el electromagnetismo cuyas ideas centrales son:

III. Existen los sistemas inerciales.

IV. Es válido el principio de equivalencia, pero no el grupo de simetrías de Galileo como normativo de toda teoría física.

V. Las interacciones no son instantáneas. Hecho que queda demostrado experimentalmente, con la medición de la velocidad de la luz $c = 2{,}99.792.10^{10} \left[\frac{cm}{seg}\right]$, constante para los sistemas inerciales y que se toma como velocidad máxima de interacción.

Como el punto de partida del electromagnetismo está en la realidad fenomenológica, si se quiere construir la mecánica desde el punto de vista fenomenológico, resulta indispensable tomar como punto de partida el electromagnetismo aceptando desde luego todas sus conclusiones y teniendo en vista que para producir una ordenación de los fenómenos que se describen en esta nueva mecánica es necesario un principio ordenador, resulta evidente que una de las aspiraciones debe ser la obtención de un principio de simetría, pero como estamos trabajando con los fenómenos tal cual ellos se nos presentan en la naturaleza, este principio de simetría debe ser lógicamente exacto.

1.2 Veamos primero que conclusiones sacamos de la constancia de la velocidad de la luz. Usaremos en lo sucesivo como referencial una variedad, llamada "espacio-tiempo", con las siguientes características : $x^o = ct$, $x' = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. A los puntos del "espacio-tiempo" de coordenadas (x^μ), $\mu = o, 1, 2, 3$ las llamaremos "sucesos", y nos referiremos a las trayectorias de las "partículas", como descritas por "líneas Universo".

Así en nuestra variedad tenemos una estructura de espacio vectorial (pseudo-Euclidiano), donde;

$$\left|A^u\right|^2 = \Delta_{uv} A^u A^v \qquad u,v = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \quad y$$

$$\Delta_{uv} = \begin{cases} 1 & u = v = 0 \\ -1 & u = v = 1,\ 2,\ 3. \\ 0 & u \neq v \end{cases}$$ es la llamada Delta generalizada.

Habiendo definido la "norma", de un vector podemos hablar de distancia entre dos sucesos $(x^u_{(1)})$, $(x^u_{(2)})$, como

$$d(x^u_{(1)}, x^u_{(2)}) = \left| x^u_{(1)} - x^u_{(2)} \right|$$

Veamos ahora cuales son las transformaciones que dejan invariante el "carácter plano" de nuestr variedad, Δuv, tensor métrico constante, estas corresponden desde el punto de vista de la mecánica clásica a transformaciones entre sistemas inerciales.

Si le imponemos la linealidad a nuestras transformaciones, tendremos:

1.2.1 $x'^u = \Lambda^u_{\ v} x^v$ de donde

1.2.2 $\Delta_{uv} \Lambda^u_{\ \rho} \Lambda^v_{\ \sigma} = \Delta_{\rho\sigma}$, que es la condición definitoria de nuestras transformaciones, a las cuales en lo sucesivo llamaremos "transformaciones de Lorentz".

Ahora estableceremos una clasificación general de las "matrices de Lorentz", y señalaremos algunas de sus propiedades;

1.2.2 implica $(\Lambda_{\rho u})^t \Delta_{uv} \Lambda^v_{\ \sigma} = \Delta_{\rho\sigma}$ de donde

$${}^t\Lambda \Delta \Lambda = \Delta \Longrightarrow$$

$$|{}^t\Lambda|\ |\Delta|\ |\Lambda| = |\Delta| \Longrightarrow$$

$$|\Lambda|^2 = 1 \Longrightarrow |\Lambda| = \pm 1$$

De las matrices de Lorentz de determinante equivalente a + 1, diremos que corresponden a transformaciones propias, y en cambio las de determinante -1, que corresponden a transformaciones impropias. Del hecho que $|\Delta| \neq 0$, deducimos que Λ, siempre tiene inverso, como existe Λ^{-1}, entonces habrá de tenerse; $\Lambda^{-1} I = I \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda \Lambda^{-1}$ con

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos entonces que las "matrices de Lorentz", constituyen un grupo, y el de las matrices propias de Lorentz un sub-grupo del primero.

A los sucesos podemos también clasificarlos en el espacio-tiempo, de acuerdo al invariante;

1.2.3 $|x| > 0$ sucesos tipo tiempo

1.2.4 $|x| = 0$ sucesos tipo luz

1.2.5 $|x| < 0$ sucesos tipo espacio, clasificación que es absoluto en nuestra variedad. Observemos ahora otra propiedad de los sucesos en el espacio-tiempo. Sea c un cuerpo moviéndose con velocidad $\vec{\mu}$, en un sistema de referencia s, y consideremos otro sistema s', solidario con c, tenemos entonces:

En s $ds^2 = \Delta_{uv} dx^u dx^v$

En s' $ds^2 = (dx^o)^2$, y como $dx^o = cdt$

$$\Delta t' = \frac{1}{c}\int \sqrt{\Delta_{uv}\, dx^u dx^v}\text{ , de donde}$$

$$\Delta t' = \frac{1}{c}\int \sqrt[2]{c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\text{, y finalmente}$$

1.2.6 $t_{2'} - t_{1'} = \int_{t^1}^{t^2} dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$; como $|\vec{u}| \ll c$, el reloj en s' atrasa con respecto al reloj en s, el tiempo marcado por el reloj s', se llama tiempo propio del cuerpo. En lo sucesivo consideraremos un sistema de unidades en que $c = 1$, y el factor $(1-\vec{\mu}^2)^{\frac{1}{2}}$; lo llamaremos factor de contracción de Lorentz.

1.3 Mecánica relativista.

Revisemos ahora en nuestra mecánica fenomenológica cuales son las ecuaciones de la trayectoria de una partícula. No podemos escoger como en el caso clásico, el tiempo como-para-metro, pues como ya discutimos éste perdió su carácter absoluto, y su medición es relativa al sistema inercial que nos referimos. Pero si tenemos en nuestro referencial una magnitud que por sus propiedades y de manera natural nos sirve como pará metro este es el "intérvalo entre sucesos". Así tenemos en un sistema inercial s.

1.3.1 $x^\mu = x^\mu(s)$ vector universo "posición"

1.3.2 $v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ vector universo "velocidad"

1.3.3 $a^u = \frac{d\nu^\mu}{ds}$ vector universo "aceleración"

Si ahora se llama $\gamma = (1 - \vec{u}^{\,2})^{-\frac{1}{2}}$, factor de contracción de Lorentz, tendremos $ds = \frac{dt}{\gamma}$, de donde

1.3.4 $(v^u) = \gamma \left[1, \vec{u}\right]$ (°)

1.3.5 $(a^u) = \gamma \left[\vec{u}\cdot\vec{a}, \vec{a} + \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{a})\right]$; además es fácil verificar que;

1.3.6 $\Delta_{uv} \nu^\mu \nu^\nu = 1$

1.3.7 $\Delta_{\mu\nu} v^\mu a^\nu = 0$, lo que geometricamente significa que (v^u) es un "versor", normal a (a^u).

1.4 Parece no haber razones contundentes que obliguen a destacar completamente la mecánica de Newton y es por esto que se tomará como bases de una nueva mecánica que permita descubrir el comportamiento dinámico de una partícula. Si postulamos que cada partícula tiene asociada una magnitud invariante, su masa m, resulta natural definir un cuaduvector momento (generalización del vector momento de la mecánica de Newton) por sus componentes:

1.4.1 $p_u = m\, u_\mu$ Para darle un buen grado de aceptación a esta definición, se puede hacer notar que las leyes de conservación de la masa y, el momento de la mecánica de Newton serian (hipotéticamente) formas particulares de principios de conservación de carácter mucho más general. En su forma más general estos principios establecen la conservación de los cuatro componentes del momento generalizado. Los tres componentes de espacio se corresponden con los componentes del momento Newtoniano y el cuarto componente p_4 es el llamado componente de tiempo o temporoboide.

1.4.2 $p_4 = \frac{ime}{\sqrt{1-\beta^2}}$ con $i^2 = -1$

y b $\beta = \frac{u}{c}$

que se puede identificar con la energía como aparecen luego. El empleo de una notación tensorial es aconsejable sólo cuando se hace transformaciones de uno a otro sistema debido a que con ello se simplifica las transformaciones, pero si el estudio se hace al interior de un marco de referencia cualesquiera, la mejor manera de relacionar los hechos empíricos con la teoría que ellos dan lugar es emplear propusamente las nota-

(°) Ver apéndice 1
(°°) Ver apéndice 2

ciones que han surgido con la mecánica Newtoniana cuyos principios más que enunciarlos hay que generalizarlos. Para empezar mantengamos el enunciado:

$$F_u = \frac{d}{dt}(p_u) \quad o \quad F_u = \frac{d}{d}(mv\mu)$$

Es de notar que esta definición no da un vector cuadridimensional verdadero por cuanto t es escencialmente la componente de un vector y no un escalar como ocurre en la mecánica de Newton. De los cuatro componentes de F se puede central la atención sobre los tres componentes de espacio:

1.4.3 $$F_i = \frac{d}{dt}(p_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,u\,i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Si se quiere que las relaciones hasta ahora mencionadas puedan entrar compatiblemente en una formulación lagrangiana de la mecánica será preciso que tal como en la mecánica Newtoniana sea aquí $\frac{\partial L}{\partial \dot{u}i} = p_i$ es decir $\frac{\partial l}{\partial ui} = \frac{m\,ui}{\sqrt{1-\beta^2}}$ Por integración de esta ecuación diferencial se obtendrá: $L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} + \text{Cte}\,(ui)$

La constante de integración, como es obvio, deberá identificarse con $V(x_i)$, es decir habrá de tenerse:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V(x_i)$$

En cuanto a las correspondientes ecuaciones de Lagrange, serán:

1.4.5 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,ui}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \frac{\partial v}{\partial xi} = 0$$

Comparando a) y b) resulta que ha de ser:

1.4.6 $F_i = -\frac{\partial v}{\partial xi}$ pues el primer término de 1.4.5 es precisamente F_i. Sin embargo no es posible controlar esta relación 1.4.6 en la práctica como sería de desear. En efecto un caso, natural para la comprobación sería por ejemplo el de la fuerza de gravitación y bien sabemos que en el marco de la relatividad restringida ello no es posible debido a que la fuerza aludida, requiera para su descripción, condiciones que no tienen sentido en (la relatividad restringida) el marco señalado. Para una partícula libre resulta que por ser $F_i = 0$ será:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\ u_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \qquad o:$$

$\frac{d}{dt}\, p_i = 0$ y se podrá entonces describir el comportamiento de la partícula libre. Otro tanto podrá hacerse con sistemas de partículas libres. Se comprende que no es posible describir con la mecánica relativista el comportamiento dinámico del cuerpo rígido mediante la formulación de Lagrange pues se requiere considerar la existen de interacciones instantáneas entre sus partículas que estan en contraducción flagrante con el llamado postulado de la relatividad especial. Es más se puede ser tajante y decir que la idea de cuerpo rígido es incompatible en la relatividad especial o restringida.

Como en la mecánica de Newton la energía cinética puede definirse mediante $\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ o $\frac{dT}{dt} = \sum_i F_i\, U_i$ de por desarrollo nos dá

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i u_i \frac{d}{dt}\left(\frac{m\ u_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \sum_i u_i \sqrt{1-\beta^2}\ \frac{d}{dt}(m\ u_i)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\ \sum_i u_i\ \frac{d}{dt}(m\ u_i)$$

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\left[\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{m\ u_i^2}{2}\right) - u_4\,\frac{d}{dt}\,p_4\right]$$

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\ \frac{d}{dt}\left\{\sum_u \frac{1}{2}\, m\, u_u^2\right\} - \frac{dp_4}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\left(\sum_u \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, m\ u_u^2\right)\right) - i\, c\,\frac{dp_4}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sqrt{1-\beta^2}\left\{\frac{1}{2}\, m\,\frac{d}{dt}\sum u_u^2\right\} - i\, c\,\frac{dp_4}{dt}$$

$\frac{dT}{dt} = -\,i\,c\,\frac{dp_4}{dt}$, pues como $\sum u_u^2 = -\,c^2$ es el largo invariante del cuadrivector velocidad que se define por la relación

$u_u = \frac{dx_u}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ \frac{dx_u}{dt}$, volviendo entonces a la relación

$\frac{dT}{dt} = -i\,c\,\frac{dp_4}{dt}$ se obtiene $\frac{d}{dt}\left[T + i\,c\,p_4\right] = 0$, lo que conduce a

$T + i\,c\,p_4 = \text{constante}$ o $p_4 = \frac{i}{c}\left[T + c\right]$. Como además era

$p_4 = \frac{i\ m\ c}{\sqrt{1-\beta^2}}$, entonces resulta $p_4 = \frac{i\ m\ c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{i}{c}\,(T + c)$, de donde

$\dfrac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = T + c$, para encontrar la constante c, supongamos que cuando la partícula se encuentra en reposo la energía cinética es nula y entonces $m\,c^2 = \not{c}$, lo que nos conduce a $T + m\,c^2 = \dfrac{m\,c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$T + m\,c^2 = E$ se denomina la energía total, lo cual puede decirse en consecuencia que es igual a la suma de la energía cinética y el equivalente masa energía ($m\,c^2$).

Sabemos que la teoría especial de la relatividad se ha establecido para incluir dentro de un esquema general invariante los fenómenos del electromagnetismo.

Resulta legítimo esperar que el formalismo de Lagrange sea apto para emprender el estudio de los fenómenos electromagnéticos. Sabemos por ejemplo que la fuerza que actúa sobre una partícula de carga e es la llamado fuerza de Lorentz: $F = e\,(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v}\times\vec{\beta})$ que no resulta adecuado para incorporarla al esquema general lagrangiano pero puede transformarse con solo introducir las potenciales ϕ, y $\vec{A}$ mediante las relaciones:

$\vec{\beta} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, y $\vec{F}$ se puede expresar en la forma:

$$F_i = e\left\{\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}\left(\phi - \frac{1}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

Hagamos $M = e(\phi - \frac{1}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{A})$ de suerte que sea $F_\gamma = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_\gamma}\right) - \frac{\partial M}{\partial x_\gamma}\right]$

Llevemos a $Q_i = \sum_\gamma F_\gamma \frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}$ donde Q_γ son los componentes generalizados de la fuerza. Entonces:

$$Q_i = \sum_\gamma F_\gamma \frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i} = \sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_\gamma}\right) - \frac{\partial M}{\partial x_\gamma}\right]\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \sum_\gamma\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_\gamma}\,\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_\gamma}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial x_\gamma}\,\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\right\}$$

$$Q_i = \sum_\gamma\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_\gamma}\,\frac{\partial \dot{x}_\gamma}{\partial \dot{q}_i}\right] - \left[\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_\gamma}\,\frac{\partial \dot{x}_\gamma}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial x_\gamma}\,\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\right]\right\}$$

$Q_i = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial M}{\partial q_i}$, ya que; $M = M(\dot{x}_\gamma, x_\gamma)$, $x_\gamma = x_\gamma(q_i, t)$.

Mostramos con esto que la fuerza de Lorentz se adapta al esquema de Lagrange y es posible escribir las ecuaciones de movimiento de una partícula que se mueve dentro de un campo electromagnetico, así:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ , donde}$$

$$L = T - M \quad \text{con} \quad M = e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

Para velocidades bajas la relación;

$$F_i = e\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\circ\vec{A}\right)$$

queda comprobada por la experiencia. Pero cuando no se cumple esta condición, es decir para grandes velocidades, nada hay que pueda considerarse como una razón poderosa para afirmar que su aplicación sea de validez general. Supondremos que efectivamente se verifica para toda velocidad, entonces tendremos que las ecuaciones relativistas de movimiento deben ser;

1.4.7 $$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = e\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\ \vec{A}\right)$$

Nuevas observaciones efectuadas sobre el movimiento de las particulas de alta energía muestran un acuerdo bastante aceptable entre las ecuanes 1.4.7 y el comportamiento real, y por esta razón 1.4.7 se tomaron como las ecuaciones del movimiento correcto, si se parte suponiendo que es legítimo aquí un principio de Hamilton;

$$\delta\int L dt = 0 \text{ , con}$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c_i}\sum \dot{x}_i A_i\right)$$

tendremos muevamente las ecuaciones del movimiento.

Formulación de Hamilton.

Supongamos que $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$, siendo $L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c}\sum \dot{x}_i A_i\right)$

Los componentes de espacio del movimiento de una partícula que está en un campo electromagnético son:

$$p_i = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}A_i$$

Nada podríamos sin embargo decir respecto a un componente en el tiempo, por cuanto eso está incluido en el esquema de Lagrange, se define la función de Hamilton tal como en la mecánica de Newton por:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

$$H = \sum p_i \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m}\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right) + m c^2 \sqrt{1-\beta^2} + e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

$$H = e\sqrt{\left\{m c^2 + \left(p - \frac{e}{c} A\right)^2\right\}} + e\,\phi$$

$$H = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + c\,\phi$$

La derivada temperal de la energía cinética para este caso será:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i x_i \frac{d}{dt} p_i = \sum_i x_i \frac{d}{dt}\left(\frac{m x_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{d}{dt} \frac{m x^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Si consideramos que T=0 en el reposo resulta al integrar la ecuación.

$$dT = d\left(\frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) ; \int_0^T dT = \int_0^v d\left(\frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$\therefore T = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Big/_0^v ; \quad T = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m c^2 , \text{ o}$$

$$T = m c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] \text{, ahora de}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \sum x_i \frac{d}{dt}\left(\frac{m x_i}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \text{ resulta}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i e\, x_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right) \text{ resulta que}$$

$$\frac{dT}{dt} = e \cdot \vec{v}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \beta\right) = e\,\vec{v}\cdot\vec{E}$$

1.5 "Ley de Gravitación Universal de Newton"

Como sabemos la teoría de Newton afirma que dos partículas aisladas en el universo, interaccionan de acuerdo a:

1.5 1) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

1.5 2) $\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}$

1.5 3) $\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$

Si conocemos las condiciones iniciales, el problema se reduce a solucionar la ecuación diferencial 1.5.2, reduciéndolo al problema de una partícula con auxilio de 1.5.1. y 1.5.3. se puede plantear también el problema de tres partículas, que ofrece más dificultades, pero que ya está solucionado.

En todo caso nuestros sistemas tienen siempre carácter discreto, para tratar el caso continuo generalicemos primero la ley de Newton de la siguiente manera;

1.5.4 Dados dos cuerpos c_1 y c_2, consideremoslos divididos a la manera del cálculo diferencial, además supongamos que la masa de cada elemento está concentrado en un punto, en estas condiciones diremos que el cuerpo c_1, como sistema de partículas ejerce sobre el cuerpo c_2, una fuerza que es el límite de la fuerza cuando las dimensiones de sus elementos tienden a 0.

Veamos entonces que forma toman los componentes de la fuerza en esta formulación. Sean los cuerpos c_1, y c_2, en c_1 un punto $P(x_1, y_1, z_1)$, y en c_2 un punto $Q(x_2, y_2, z_2)$, además en c_1M c_2 r spectivamente los elementos de volumen δV_1, δV_2 que contienen a P y Q, con densidades medias ρ_1, y ρ_2, entonces la partícula de volumen δV_2 ejerce sobre la partícula de volumen V_1, una fuerza cuyo punto de aplicaciones P, y cuya expresión es

$$\Delta x = \rho_1 \rho_2 \delta V_1 \delta V_2 \frac{(x_2 - x_1)}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3}$$

$$1.5.5. \quad \Delta y = \rho_1 \rho_2 \delta V_1 \delta V_2 \frac{(y_2 - y_1)}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3}$$

$$\Delta z = \rho_1 \rho_2 \delta V_1 \quad V_2 \cdot \frac{(z_2 - z_1)}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3}$$

Para los componentes del momentun con respecto al origen tenemos;

$$\Delta L = \rho_1 \rho_2 \frac{\delta V_1 \delta V_2}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3} (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

$$1.5.6. \quad \Delta M = \rho_1 \rho_2 \frac{\delta V_1 \delta V_2}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3} (z_1 x_2 - x_2 z_1)$$

$$\Delta N = \rho_1 \rho_2 \frac{\delta V_1 \delta V_2}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

luego en el límite la fuerza que c_2 ejerce sobre c_1 es;

$$X = \int_{V1}\int_{V2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} (x - x_i)\, dV_1 dV_2$$

1.5.7. $$Y = \int_{V1}\int_{V2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} (y - x_i)\, dV_1 dV_2$$

$$Z = \int_{V1}\int_{V2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} (z - z_i)\, dV_1 dV_2$$, y para el momentun;

$$L = \int_{V1}\int_{V2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} (y_i z - z_i y)\, dV_1 dV_2$$

1.5.8. $$M = \int_{V1}\int_{V2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} (z_i x - x_i z)\, dV_1 dV_2$$

$$N = \int_{V1}\int_{V2} \frac{\rho_1\rho_2}{r^3} (x_i y - x y_i)\, dV_1 dV_2$$

Si ahora consideramos que el origen de coordenadas está ubicado en c_1, cuando las dimensiones de este tienden a 0, $P(x_i, y_i, z_i)$ tiende al origen, y el momentun (L M, N) se anula, y la fuerza resultante se reduce a la fuerza sobre una partícula cuya expresión es;

$$X = \frac{x}{r_o^3} \int_{V1} \rho_1 dV_1 \int_{V2} \rho_2 dV_2 = \frac{x}{r_o^3} m_1 m_2$$

1.5.9. $$Y = \frac{y}{r_o^3} \int_{V1} \rho_1 dV_1 \int_{V2} \rho_2 dV_2 = \frac{y}{r_o^3} m_1 m_2$$

$$Z = \frac{z}{r_o^3} \int_{V1} \rho_1 dV_1 \int_{V2} \rho_2 dV_2 = \frac{z}{r_o^3} m_1 m_2$$

Lo que es consecuencia de lo formulado por Newton como nosotros vemos en 1.5.9. la expresión de la fuerza es una integral doble, lo que para fines de cálculo es a veces muy engorroso, para superar este problema introducimos el concepto de "fuerza específica", o fuerza por unidad de masa, de acuerdo con esto tenemos, considerando un elemento V_1 de c_1, que contiene al punto $P_o (x_o, y_o, z_o)$, y suprimiendo las densidades $_1$ $_2$ contínuas, y las regiones de integración simples, podemos integrar iteradamente lo que da.

$$x_o = \lim_{\Delta V_1 \to o} \frac{\Delta x}{\Delta m} = \int_{V_L} \frac{\rho_2}{r^3} (x - x_o)\, dV_2$$

1.5.10 $$y_o = \lim_{\Delta 1 \to o} \frac{\Delta y}{\Delta m} = \int_{V_2} \frac{\rho_2}{r^3} (y - y_o)\, dV_2$$

$$z_o = \Delta 1 \to o\ \frac{\Delta z}{\Delta m} = \int_{V_2} \frac{\rho_2}{r^3} (z - z_o)\, dV_2$$

$$r_o = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2}$$

En lo sucesivo cuando hablemos de fuerza, entenderemos que estamos hablando de fuerza específica.

1.6 Masa.

Discutiremos brevemente ahora los problemas que se presentan en Física cuando nos referimos al concepto de masa, aunque la masa se define de muchas maneras en las diferentes teorías físicas, para nuestros fines nos referiremos a tres acepciones del concepto.

Ponemos primero el concepto de masa inercial m_1, definido así:

"Pongamos en un plano pulido un cuerpo c_1, al cual le damos un impulso p, entonces c_1 se mueve con una velocidad v_1, supongamos ahora un cuerpo c_2 al cual le aplicamos el mismo impulso p, tal que c_2 se mueve con velocidad v_2; si $v_2 = kv_1$, decimos entonces que la masa de c_2 es k veces la masa de c_1".

De esta definición vemos que en ella la masa, es netamente una masa de choque, y no hemos considerado la ley de Fuerza de Newton que se manifiesta por la presencia de la tierra.

Pero existe otra manera de comparar masas, es mediante una balanza, en la cual claramente interviene la ley de Newton, discutamos este punto, consideremos dos cuerpos c_1 y c_2 de masas m_1 y m_2 y pensemos que m_1 es la fuente de un campo gravitatorio y m_2 es la masa de un objeto sujeto a la acción del campo creado por m_1, llamaremos a m_1 "masa gravitacional activa" y a m_2 "masa gravitacional pasiva", esto lo simbolizaremos por $m_1(a)$, $m_2(b)$. Si ahora invertimos la situación tenemos $m_2(a)$, $m_1(b)$, apliquemos a estos dos casos la ley de gravitación de Newton, y el principio de "Acción y Reacción", entonces:

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \frac{G\, m_1(a)\, m_2(b)}{\left|r_{12}\right|^2}$$

1.6.1

$$\left|\vec{F}_{21}\right| = \frac{G\, m_1(b)\, m_2(a)}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2}$$

y como $\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|$, de 1.6.1. deducimos 1.6.2. $\frac{m_1(a)}{m_1(b)} = \frac{m_2(a)}{m_2(b)}$, normalizando, podemos establecer la identidad $m(a) \equiv m(b) \equiv m_g$ "masa gravitatoria".

Veamos que sucede ahora en relación a m_i y m_g, multiples experiencias muestran que podemos identificar $m_i \equiv m_g$, la primera de estas experiencias fue la de Galileo, posteriormente señalemos la experiencia de Eötvös que lo demuestran con un error de 2.157.

Esto señala la posibilidad de postular el llamado principio de equivalencia en Mecánica Newtoniana que dice lo siguiente:

1.6.3 "Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo en caida libre, son independientes de su masa".

Matematicamente podemos establecerlo, en la siguiente situación, supongamos un cuerpo c, entonces de acuerdo con Newton:

$$m_i\, a = m_g\, f$$

donde f es la intensidad del campo gravitatorio si y a la acelación que adquiere el cuerpo, si $m_i = m_g$, entonces :

$$a = f \quad \text{independiente de m.}$$

La equivalencia antes establecida, está presente tambien en el concepto de "peso", entendiendo por, "peso" de un cuerpo, la fuerza que se ejerce sobre el debido a la atracción de la tierra.

Para detallar mas esta situación, hagamos primero el siguiente análisis.

Consideremos dos sistemas s y s', tales que s' rota con velocidad = , y s es inercial ademas consideremos una partícula de masa m ubicado en el plano xy, luego

en s $\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}$, en s' $\vec{a} = \frac{d^2r'}{dt'^2}$

s en $\vec{r_1} = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ vector posición de m en s', luego

$\vec{r}_1 = (\dot{x}' - \omega y')\hat{\imath} + (\dot{y}' + \omega x')\hat{\jmath}$, donde $\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \omega\hat{\jmath}$

$\frac{d\hat{\jmath}}{dt} = -\omega\hat{\imath}$ entonces

$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')\hat{\imath}' + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y')\hat{\jmath}'$ y como

$\dot{\hat{\imath}} = \omega\hat{\lambda}$, para $\ddot{\vec{r}}$

1.6.4 $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 + 2\Omega \times \dot{\vec{r}}_1 + \Omega \times (\Omega \times \vec{r}\,')$, si pensamos ahora que s es un sistema solidario a las estrellas fijas, y s' es la tierra, para el peso de la partícula en un punto de ella tenemos las relaciones:

1.6.5 $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,' + \Omega \times (\Omega \times \vec{r}\,')$

$\ddot{\vec{r}}\,' = \ddot{\vec{r}} - \Omega \times (\Omega \times r')$ multiplicando por m_i, tenemos:

1.6.6 $m_i \ddot{\vec{r}}\,' = m_i \ddot{\vec{r}} - \Omega \times (\Omega \times r')\, m_i$

expresión donde $m_i\, r$, $m_i\, \ddot{r}$, son fuerzas debido a la presencia de la tierra, entonces podemos escribir:

1.6.7 $P = \vec{g}\, m_g - m_i \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,')$, luego en un sistema de referencia no inercial aparecen fuerzas que no pueden ser distinguidas documentadamente de un campo gravitatorio, y cuyos efectos desaparecen en un sistema inercial, notemos que en la relación 1.6.7 está implicitamente aceptado el "principio de equivalencia".

1.7. Estudiemos ahora el comportamiento de una partícula de masa m, sujeta a la acción de un campo de fuerza $F_o = (x_o, y_o, z_o)$ de acuerdo con Newton, tenemos:

1.7.1 $m \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda m x_o$

$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda m y_o$

$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \lambda m z_o$ donde λ es una constante, de 1.7.1, deducimos:

1.7.2 $\frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \lambda m \left[x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}\right]$, si llamamos

1.7.3 $T = \frac{1}{2} m v^2$, energía cinética de la partícula, tenemos:

$T - T_o = \lambda m \int_{t_o}^{t} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}\right) dt$, si suponemos que la partícula se ha movido en una trayectoria T, con extremos $P = P[r(t)]$

P_o $\quad P_o = P_o\left[\vec{r}(t_o)\right]$, tenemos.

1.7.4 $T - T_0 = \int_{P_0}^{P} (Xdx + Ydy + Zdz)$, lo que llamaremos:

1.7.5 $T - T_0 = \lambda m W(P, P_0, \Omega)$, que no dice que la variación de energía cinética es igual al trabajo ejecutado por el campo, para mover la partícula de P o P_0, además concluimos de 1.7.5 que nos basta conocer la trayectoria seguida por la partícula para conocer sus constantes de movimiento.

Existe un caso muy importante de campos, en que las constantes son independientes del camino, son los llamados campos conservativos, y en ellos $W = W(P_0, P)$, es función sólo de los extremos, en estos campos el producto $-\lambda m W(P, P_0)$ se le llama la energía potencial de la partícula, y concluimos que para un campo de este tipo:

1.7.6 $T - T_0 + \lambda m W(P, P_0) = 0$, la suma de la energía potencial y cinética se conserva.

Restringuiremos en lo sucesivo nuestra atención a campos conservativos en regiones simplemente anexas, en las cuales el campo es una función contínua, escojamos además un sistema en que $= 1$, entonces:

$W(P_0 P) = \int_{P_0}^{P} (Xdx + Ydy + Zdz)$ la consideraremos sólo en los puntos en que el campo es realmente significativo, entonces:

1.7.7 $W(P) = \int_0^P \vec{F}\, d\vec{r}$, como las direcciones son arbitrarias podemos escribir en particular:

1.7.8 $X = \frac{\partial W}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial W}{\partial y}$; $Z = \frac{\partial W}{\partial z}$, recordando ahora la formulación de Newton

1.7.9 $X = \frac{x_0 - x}{|\vec{r}|^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|r|}\right)$, analogamente $Y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)$; $Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$

e introduciendo la función $= \frac{k}{|\vec{r}|}$, "potencial gravitatoria", podemos escribir:

1.7.10 $\vec{F} = -\vec{\nabla}\, U$

Si ahora aplicamos 1.7.10 a una esfera con distribución homogenea de masa, tenemos considerando el flujo, a través de la superficie esférica:

1.7.11 $\phi = \int \vec{F}\, d\vec{S}$, $\vec{F} = \frac{G\, m}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \Longrightarrow$

1.7.12 $\phi = \int \frac{G\, m}{|r|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|}\, d\vec{S}$

por otro lado 1.7.11, resulta despues de aplicar el teorema de Gauss

$$\left.\begin{array}{l}\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\, dv \\ \int(\nabla\cdot\vec{F})\,dv \simeq Gm \int_V \rho\, dv\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 4\pi G\rho$$

de donde:

1.7.13 $\Delta^2 \phi = 4\pi G\rho$, ecuación fundamental de la mecánica newtoniana.

1.8 "Problemas planteados con la ecuación $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ en relación al universo de Newton".

Analizemos las conclusiones a que nos llevan las hipótesis newtonianas del universo.

El espacio de Newton es infinito y euclidiano, el tiempo transcurre con independencia de lo que en él ocurre y es metricamente independiente y variar $t \in [-\alpha, \alpha]$. Puede elegirse como sustrato del universo un fluido homogeneo en el que se cumple

1.8.1 $p = p(t)$
$\rho = \rho(t)$

Si O es el origen ligado al fluido y P es una partícula cualquiera del fluido $\vec{r} = \vec{OP}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ la homogeneidad implica que ha de tenerse

1.8.2 $\vec{v} = A(t)\vec{R}$ donde $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, si agregamos la hipótesis de la isotropia se podrá obtener el equivalente newtoniano de la métrica de Robertson.

1.8.3 $a_{ij} = f(t)\delta_{ij}$, entonces

1.8.4 $\frac{d\vec{r}}{dt} = f(t)\delta_{ij}\vec{r} = 0$, sustituyendo $f(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$

1.8.5 $r_0 = r(t_0)$, $r(t_0) = 1$

apliquémosle ahora al fluido la ecuación de continuidad para los fluidos newtonianos, entonces:

1.8.6 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(p\vec{v}) = 0$ con $\rho = \rho(t)$
$\vec{v} = f(t)\vec{r}$

1.8.7 $\frac{d\rho}{dt} + 3p(t)\, f(t) = 0$

sustituyendo $3f(t) = \frac{s''(t)}{s(t)}$

1.8.8 $\frac{d\rho}{dt}\ \frac{s^1(t)}{s(t)}\ \rho = 0$, de donde

$\rho(t)s(t)=c$, de donde

1.8.9 $\rho(t)=ce^{3\int f(t)dt}$, y como $R(t_0)=1$, y $R(t)=e^{-\int f(t)dt}$

$\rho(t)=c\left[e^{-\int f(t)dt}\right]^3$, de donde

1.8.10 $\rho(t)=\frac{\rho_0 r_0^3}{\Omega^3}=\frac{\rho_0}{R^3}$ analizando ahora la ecuación 1.8.10 lo que resulta natural al interior de una teoria que supone el espacio euclidiano y no aplica el principio de inercia de la energía.

Para ir más lejos es necesario aplicar al fluido cósmico en consideración, la ley newtoniana de la gravitación. (Se supone resuelto una serie de problemas muy delicados relativos a la validez de esta ley para sistemas en que la densidad no se anula en el infinito). Admitiendo pues esto las ecuaciones de movimiento del fluido son: a) ¡a) $\vec{F}=\frac{d\vec{w}}{dt}+\frac{1}{\rho}\nabla P$ que no es otra que la ecuación de Euler para un fluido sin viscosidad y b) $\vec{F}=-\nabla\phi$ $\vec{F}$ verifica la ecuación de Poisson: $\nabla\phi=4\pi\rho G$ lo que nos dice que $\nabla\cdot F=-4\pi\rho G$

Como $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$ se tiene que $\frac{d}{dt}\left[f(t)\vec{r}\right]=\vec{F}$, pero $F(t)=\frac{\overset{o}{R}}{R}$

$\frac{d}{dt}\left[\frac{\overset{o}{R}}{R}\ R\ \vec{r_o}\right]=\vec{F}$

$\frac{d}{dt}\left[\overset{o}{R}\ \vec{r_o}\right]=\vec{F}$ $\frac{d}{dt}\left[\overset{o}{R}\ \vec{r_o}\right]=F$

$\ddot{R}\ \vec{r_o}=\vec{F}$ multiplicando por R^3 será

$R^3\cdot\ddot{R}\ \vec{r_o}=\vec{F}\ R^3$ y como es:

$\vec{r_o}=\frac{\vec{r}}{R}$ entonces habrá de tenerse:

$R^2\ddot{R}\vec{r}=-R^3\nabla\phi$ pues $F=\text{grad}\ \phi$ de aqui se infiere que:

$R^2\ \ddot{R}=-\frac{4}{3}\pi\ (R^3\rho)\ G$ pero como

$R^3\rho=\rho_o$ entonces será

$R^2\ \ddot{R}=-\frac{4}{3}\pi\ \rho_o\ G$

1.8.13 $R^2\ \ddot{R}+\frac{4}{3}\pi\ \rho_o\ G=0$

Se puede notar que si el universo no es vacío es decir si $\rho_o\neq 0$ entonces la ecuación que diremos newtoniana no admite una solución estática $R=$ constante. Volviendo a la ecuación (1.1.13) $\nabla^r\ \phi=4\pi\rho G$ ya que $\phi=4\ r\int\rho\ dv$ y $F=F(r^{-2})$ en la frontera, la densidad de masa ~~Materia~~ deberá tender a cero más rapidamente que F, si no tendríamos una indeterminación en las fuerzas debido a las masas en determinado punto, pero 1.7.13 $\Delta\rho = 4\pi G f$, está basado en un potencial del tipo $U = \frac{Gm}{|r|}$, potencial que no cumple estas condiciones; para solucionar esto, Neumann y Sleeger propusieron un potencial con un factor de decaimiento exponencial, este es:

1.8.14 $U = \frac{Gm}{|r|} e^{-\sqrt{\lambda}\,|r|}$, este potencial transforma la ecuación de Poisson 1.7.13 en la ecuación de Neumann-Sleeger.

1.8.15 $\nabla^2 U = \lambda U = 4\pi G\alpha$, para lo cual una solución es $\alpha = cte$, $U = \frac{4\pi G\alpha}{\lambda}$ para todo el espacio

Campo Gravitatorio.

1) Caracterizaremos un campo gravitatorio diciendo que es aquel campo, dentro del cual los cuerpos se mueven de igual manera bajo las mismas condiciones iniciales, con total independencia de su masa o carga.

Bajo esta caracterización procedemos a enunciar el llamado principio de equivalencia; "Todas las propiedades del movimiento en un sistema no inercial, son equivalentes a los de un sistema inercial en presencia de un campo gravitatorio". Lo que distingue un campo gravitatorio "real", de uno equivalente a un sistema no inercial es el comportamiento en la frontera, un campo "real" se anula en el infinito, no así uno equivalente que tiende a infinito, además estos últimos se anulan no bien pasamos a un sistema inercial, cosa que no es posible en un campo real pues estos se anulan en el infinito.

2) Como en relatividad escogemos como referencial un sistema de coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

Pero para el estudio de campos gravitatorios, no podemos ya suponer para $ds^2 = \eta_{ij} x^i x^j$, con $\eta_{ij} = (1, -1, -1, -1)$, pues por ejemplo en un sistema en rotación uniforme $ds^2 \neq (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$, en general tendremos $\eta_{ij} = g_{ij}(x)$ y para $ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu$ luego vemos de cerca que ds que es una cantidad geométrica depende de las propiedades físicas que estemos considerando, luego, en resumen la métrica y los fenómenos físicos están expresando una misma realidad; y no son fenómenos intrínsicos considerados separadamente.

En relación con 1 esto se traduce, que en un campo gravitatorio real, $g_{\mu\nu}(x^{\lambda})$, no se puede reducir nunca a $g_{\mu\nu}(x^{\lambda})=\Delta_{ij}$, para todo el espacio de esta clase de espacios se dicen que son espacios curvos, en contraposición a los sistemas no inerciales que mediante una transformación de coordenadas se pueden reducir a la forma diagonal Δ_{ij}, y que llamaremos espacios planos.

Así el campo gravitatorio se estudia en un espacio tangente en un punto, en los cuales $g_{\mu\nu}$ se ha diagonalizado, pero todas estas propiedades por lo tanto son propiedades locales.

Como ya lo digimos, usamos en general en el estudio del campo gravitatorio un sistema de coordenadas curvilineas, $x'^{\mu}=f^{\mu}(x^{\lambda})$ como figura el tiempo como argumento de la función debemos revisar el concepto de referencial que habíamos adoptado, pues carece aca de sentido hablar de un sistema de coordenadas solidarias con las estrellas fijas, pues no existe ese carácter absoluto del tiempo, así en gravitación un referencial será entonces un sistema de cuerpos, con relojes solidarios a ellos que se mueven en forma orbitraria.

Por otro lado señalemos también que en gravitación carece de sentido caracterizar a los campos por las fuerzas, como analizamos en detalle en la introducción para el caso de la tierra, las fuerzas ficticias, se confunden con el verdadero carácter gravitatorio de la Fuerza de Newton, y más que en las fuerzas los campos se caracterizan cinemáticamente por la aceleración que en el adquieren los cuerpos, claro esto si que el único criterio para detectar el campo gravitatorio real será el "tensor de curvatura", y de su interpretación deduciremos el carácter avariante de las leyes de la física.

2) Tiempo Propio, elemento de Longitud.

Entremos ahora a discutir que vamos a entender por "tiempo propio", y longitud en relatividad generalizada, en la perspectiva que estamos en un universo cuya geometría es la Riemann.

Consideremos dos sucesos vecinos que ocurren en un punto del espacio

(x^{μ}), luego podemos escribir $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ pero como para estos sucesos $dx^1=dx^2=dx^3=0$ tenemos $ds^2=c^2d\tau^2=g_{00}(dx^0)^2$ donde $d\tau$ es el tiempo real entre los sucesos, entonces

1) $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0$

2) $\boxed{\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0}$

Ahora con respecto a $dl^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$ no podemos como en relatividad especial hacer $dx^0=0$, pues τ cambia en cada punto, así que para determinar dl procedemos así, consideremos dos puntos $A(x^{\mu})$ y $B(x^{\mu}+dx^{\mu})$, y midamos el tiempo, en B que demora una señal luminosa para ir a A y volver a B, evidentemente para este tiempo $d\tau$, tenemos

3) $c\,d\tau = 2\,dl.$

luego para el intérvalo ds, tenemos $ds=0$, pues se trata de una señal luminosa, escribiendo el desarrollo explícitamente

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\,dx^0dx^{\alpha} + g_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta} \quad \alpha,\beta=1,2,3$$

y como $ds^2=0 \Longrightarrow$

4) $dx^0 = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}dx^{\alpha} \pm \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^{\alpha}dx^{\beta}}\right\}$

llamemos a las raíces

5) $dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}}\{-g_{0\alpha}dx^{\alpha} - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^{\alpha}dx^{\beta}}$

6) $dx_0^{(2)} = \frac{1}{g_{00}}\{g_{0\alpha}dx^{\alpha} + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^{\alpha}dx^{\beta}}$

Si interpretamos como el instante de la detección de la señal en A, la emisión en B es $x_0+dx_0^{(1)}$, y su detección al regreso de A es $x_0+dx_0^{(2)}$, luego el tiempo trascurrido en el viaje de la señal luminosa es; 6) $dx_0^{(2)}-dx_0^{(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta}-g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^{\alpha}dx^{\beta}}$

para expresar   recordemos ahora las relaciones (2) y (3) entonces podemos escribir

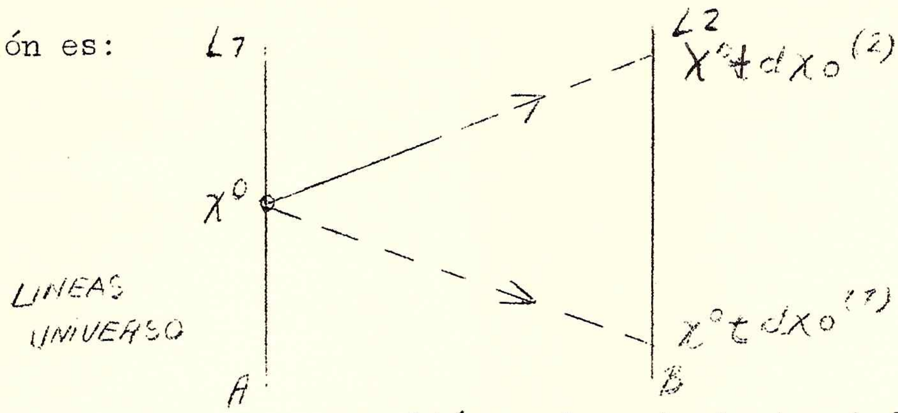
7) $\boxed{dl^2 = \left(\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}\right)dx^{\alpha}dx^{\beta}}$

llamaremos en lo sucesivo $\gamma_{\alpha\beta} = \left(\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}\right)$ "tensor métrico espacial", y escribimos

8) $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}dx^{\beta}$

Por último nos referiremos a la sincronización de relojes, en relación con el concepto de simultaneidad.

La sincronización en el espacio-tiempo debe evidentemente realizarse mediante señales luminosas, así que consideremos nuevamente la propagación entre dos puntos A y B, como en (4), (5) y (6), esquemáticamente esta situación es:



Consideremos como simultáneas las siguientes indicaciones de los relojes;

I en el punto A $x_0 + \Delta x^0$

II en el punto B $x_0 + \frac{1}{2}\left(dx_0^{(1)} + dx_0^{(2)}\right)$, entonces

7) $\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$ es el valor que nos permite sincronizar relojes ubicados en puntos diferentes, siempre si que ellos sean vecinos en el sentido de geometría diferencial.

Derivado Covariante.

Analizemos ahora el sentido del operador derivada en geometría Riemann en el espacio euclideo, esta corresponde a un límite tomando la diferencia de dos vectores ubicados en dos puntos vecinos pero distintos del espacio. Como ya discutimos en geometría de Riemann las propiedades van variando localmente, así que no podemos considerar esta diferencia en estricta analogía con Euclides, lo que debemos hacer acá es "trasladar" paralelamente los vectores a un mismo punto y considerar ahí su diferencia en el límite, obviamente este es el caso más general y nos conduce a lo llamado derivado avariante, respectivamente contravariante.

Así podemos escribir, para un vector contravariante: $DA^u = dA^u - \delta A^u$ donde DA^u es la diferencia de los vectores aplicados en el mismo punto, dA^u es la diferencial ordinaria y δA^u es la contribución a la diferencia debida a la operación "traslación paralela", como estamos analizando el equivalente de la derivada impongamos la condición de linealidad de los sumandos, entonces; $DA^{\mu} = dA^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} A^{\nu} dx^{\lambda}$, y donde $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x^{\mu})$

Son los llamados símbolos de Christoffel.

Como podemos comprobar, para un vector covariante, tendremos: $DA_{\mu} = dA_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu} dx^{\lambda}$, luego en resumen tenemos;

$$9)\ A^{\mu}_{;\lambda} = DA^{\mu} = \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} A^{\nu}\right) dx^{\lambda}$$

$$A_{\mu;\lambda} = DA_{\mu} = \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu}\right) dx^{\lambda}$$

Como (9) expresa ahora relaciones intrínsicas del espacio ellas obviamente tienen carácter tensorial, no asi los símbolos Γ separadamente pues como se puede comprobar se anulan en un espacio euclideo,

Analogamente para un tensor de segundo rango tenemos:

$$A^{i}_{k;l} = \frac{\partial A^{i}_{k}}{\partial x^{l}} - \Gamma^{m}_{kl} A^{i}_{m} + \Gamma^{i}_{ml} A^{m}_{k}$$ etc. de 9 podemos deducir:

$$10)\ \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma'^{m}_{np} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \cdot \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\nu}} \cdot \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 x'^{m}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \cdot \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}}$$

De donde podemos concluir que siempre es posible escoger un sistema de coordenadas en que $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = 0$ y la métrica se reduce a uno galileano, en efecto pues escojamos el punto x^{μ} como origen y sean $(\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda})_0$ los valores iniciales de los Γ', en la vecindad del punto y efectuemos la transformación: $x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda})_0 x^{\nu} x^{\lambda}$, entonces $\left(\frac{\partial^2 x'^{m}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \cdot \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}}\right)_0 = (\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda})_0$, luego por (10) los $\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda}$ se anulan en ese punto.

<u>Derivado covariante del tensor métrico</u>.

Analizemos ahora la expresión 1) $DA_{\mu} = g_{\mu\nu} DA^{\nu}$, y como

2) $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ entonces

3) $D(g_{\mu\nu} A^{\nu}) = g_{\mu\nu} DA^{\nu} + Dg_{\mu\nu} A^{\nu}$

luego de (1), (2), (3) $Dg_{\mu\nu} A^{\nu} = 0$; como A^{ν} es arbitraria $Dg_{\mu\nu} = 0$ la derivada covariante del tensor métrico es 0.

$\therefore$ como $Dg_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\lambda} \Longrightarrow$

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} \Longrightarrow$$

$$11)\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\nu,\mu\lambda} - \Gamma_{\mu,\nu\lambda} = 0$$, luego permutando índices.

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\nu,\mu\lambda} + \Gamma_{\mu,\nu\lambda}$$

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu}$$

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma_{\lambda,\nu\mu} - \Gamma_{\nu,\lambda\nu} \quad (+)$$

$$12)\ \Gamma_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)$$ Simbolos de 1ra Especie

$$13)\ \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu B}\left(\frac{\partial g_{B\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{B\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^B}\right)$$ Simbolos de 2da Especie

Continuando con nuestro análisis veamos cual sería la ecuación de una partícula libre en un campo gravitatorio, para esto vemos que la analogía más directa es:

14) $Dv^\mu = 0$, es decir

$$15)\ dv^\mu + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} v^\nu dx^\lambda = 0 \Longrightarrow$$

$$16)\ \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0$$

La interpretación que le daremos a los términos de 1 es;

"Vector universo aceleración" $(a^\mu) = \left(\frac{dv^\mu}{ds}\right)$

"Vector universo fuerza" $-m\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda$, de la expresión 13 .

13) $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu B}\left(\frac{\partial g_{B\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{B\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial}\right)$ vemos entonces que $g^{\mu\nu}$ debe considerarse como función potencial.

Ecuaciones del campo gravitatorio.

Antes de deducir las ecuaciones del campo, buscaremos la expresión de dos tensores que tienen importancia fundamental en la teoría, ellos son el "Tensor de Curvatura", y el "Tensor Energía-Impulso".

Revisemos primero el tensor curvatura, supongamos en el espacio-tiempo una curva;

17) $x^\mu = x^\mu(s)$, si escogemos un trozo de curva de longitud mínima, es decir una geodésica, en ella se verifica, por 14 .

14) $Dv^\mu = 0$, como estamos usando la longitud de arco como parametro, (v^μ) es entonces vector tangente, y la ecuación 14 dice que para una geodésica el vector tangente se desplaza paralelamente a si misma, ahora en un espacio de Riemann, para un contorno curvado no se verifica esta propiedad, consideremos entonces la variación de un vector a lo largo de un contorno cerrado;

18) $\Delta A_\mu = \oint \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_\nu dx^\lambda$, apliquémosle ahora a 18 , el teorema de Stokes;

19) $\Delta A_\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} A_\nu)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial(\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_\nu)}{\partial x^\beta}\right]\Delta S^{\lambda\beta}$ entonces:

$$20)\ \Delta A_\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}}{\partial x^\lambda} A_\nu - \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}}{\partial x^\rho} A_\nu + \Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\rho} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\rho}\right]\Delta S^{\lambda\rho}$$

$$21)\ \Delta A_\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}}{\partial x^\lambda} A_\nu - \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}}{\partial x^\rho} A_\nu + \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}\Gamma_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\lambda} A_\alpha - \Gamma_{\nu}{}^{\beta}{}_{\rho} A_\beta\right]\Delta S^{\lambda\rho}$$

definiendo el tensor de curvatura

$$22)\ R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\rho}\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\lambda} - \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\Gamma_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\rho}$$ entonces:

$$23)\ \Delta A_\mu = \frac{1}{2} R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho} A_\nu \Delta S^{\lambda\rho}$$ de 23

Vemos entonces que $R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho}$ interviene directamente al considerar la variación de un vector como en un espacio, euclidiano siempre podemos escoger un sistema en que los $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = 0$, entonces $R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho}$ para cualquier espacio euclidiano y recíprocamente, de ahí la importancia de este tensor pues no permite clasificar espacios. Se verifica de la definición que $R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho}$ es antisimétrico con respecto a los índices $\lambda\rho$, además si escogemos un sistema localmente geodésico tenemos;

$$R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho,\sigma} = \frac{\partial^2 \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}$$

$$23)\ R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda\rho,\sigma} + R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\sigma\lambda,\rho} + R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho\sigma,\lambda} = 0$$

$$R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\sigma\lambda,\rho} = \frac{\partial^2 \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\lambda}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\lambda}$$

$$R_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho\sigma,\lambda} = \frac{\partial^2 \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\rho}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} \Longrightarrow$$ que es la llamada identidad de Bianchi.

Por podemos construir;

$$R_{\mu\lambda\alpha}^{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\alpha}}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\lambda}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta} \mp \Gamma_{\mu}{}^{\beta}{}_{\alpha}\Gamma_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\beta}$$

el tensor $R_{\mu\lambda}$ es simétrico por definición; en relación a él interesa, el escalar ρ , llamado curvatura escalar del espacio.

$$24)\ \rho = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda}$$

Tensor Energía-Impulso.

Para deducir la expresión de este tensor analizaremos algunas cuestiones previas.

Recordemos que en general, en un cambio de coordenadas un tensor transforma de la siguiente manera: $A_{\mu\nu} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}$, si el sistema es curvilíneo, entonces: $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = J$

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = J$$

es llamado el Jacobiano de la transformación.

Supongamos ahora una transformación en un punto donde $(g_{\mu\nu})$, se ha diagonalizado, entonces;

25) $\Delta(g) < 0$ además $g_{\mu\nu} = g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}$ de donde

26) $\Delta = \Delta(g')J^2$ de lo cual deducimos:

27) $J = \frac{1}{\sqrt{-\Delta(g)}}$ Signo menos, pues por 2 , si no la cantidad sería imaginaria.

De 27 deducimos entonces que bajo estas condiciones: $dV = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ transforma en $dV' = d\Omega \sqrt{-\Delta(g)}$ donde $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx^2 dx^3$

Postulemos ahora para el campo gravitatorio una acción de la forma: $A = \frac{1}{c}\int_{\sigma(T_1)}^{\sigma(T_2)} \mathcal{L}(g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}{}_{,\lambda})\sqrt{-g}\, d\Omega$ donde $\sigma(T_1)$, $\sigma(T_2)$ son superficies límites en las constantes T_1 y T_2

Veamos ahora cual es la cantidad que se conserva bajo una traslación en el espacio de Riemann.

Consideremos la traslación:

$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$, entonces para

$$28)\quad g'^{\mu\nu}(x'^{\lambda}) = g^{\alpha\beta}(x^{\lambda}) \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}$$
$$= g^{\alpha\beta}(x^{\lambda})\left[\delta^{\mu}_{\alpha} + \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right]\left[\delta^{\nu}_{\beta} + \frac{\partial a^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right] \Longrightarrow$$

$$29)\quad g'^{\mu\nu}(x'^{\lambda}) = g^{\mu\nu}(x^{\lambda}) + g^{\mu\beta} \frac{\partial a^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + g^{\nu\alpha} \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$$

Para expresar ambos miembros en un mismo sistema de coordenadas, consideremos ahora: $g'^{\mu\nu}(x'^{\lambda}) = g'^{\mu\nu}(x^{\lambda} + a^{\lambda})$

$g'^{\mu\nu}(x'^{\lambda}) = g^{\mu\nu}(x^{\lambda}) - a^{\lambda} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + g^{\mu\lambda} \frac{\partial a^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + g^{\nu\lambda} \frac{\partial a^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}$ $\Big\{$ por desarrollo en serie para términos de 1er orden.

30) $g'^{\mu\nu}(x'^{\lambda}) = g^{\mu\nu}(x^{\lambda}) + a^{\mu\nu} + a^{\nu\mu}$ llamando $a^{\mu,\nu} + a^{\nu,\mu} = \delta g^{\mu\nu}$ entonces

$$g'^{\mu\nu}(x'^{\lambda}) = g^{\mu\nu}(x^{\lambda}) + \delta g^{\mu\nu} \Longrightarrow$$

31) $g'(x\lambda+a\lambda)=g^{\mu\nu}(x\lambda)+\delta g_{\mu\nu}$ es la variación de en el cambio de coordenadas.

Como ya discutimos anteriormente, debemos ahora considerar;

$\delta A=0,$ entonces:

31) $\delta A=\frac{1}{c}\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}+\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)}\delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)\right]d\Omega$ entonces:

32) $\delta A=\frac{1}{c}\left[\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\,\Omega+\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)}\frac{\partial}{x\lambda}(\delta g^{\mu\nu})\,d\Omega\right]$

Ahora la segunda integral la podemos escribir:

$\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)}\frac{\partial}{\partial x\lambda}(\delta g_{\mu\nu})\,d\Omega=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}}\delta g_{\mu\nu}\Big|_{G1}^{G2}-\int_{\Omega 1}^{\Omega 2}\frac{\partial}{\partial x\lambda}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)}\right]\delta g^{\mu\nu}\,d\Omega$

Si imponemos la condición $\delta g_{\mu\nu}=0$ en la frontera entonces para 32

33) $\delta A=\frac{1}{c}\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x\lambda}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)}\right]\delta g_{\mu\nu}\,d\Omega=0$

entonces si llamamos:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\Theta_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x\lambda}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x\lambda}\right)}-\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}$$

34) Toma la forma:

$\delta A=-\frac{1}{2c}\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\Theta_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega$

recordemos que $\delta g_{\mu\nu}=a^{\mu}{}_{,\nu}+a^{\nu}{}_{,\mu}$, además aprovechando la simetría de $\Theta_{\mu\nu}$ podemos escribir : $\delta A=\frac{1}{c}\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}\Theta_{\mu\nu}\,a^{\mu,\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega$

que se puede escribir:

35) $\delta A=\frac{1}{c}\int_{\Omega(T1)}^{\Omega(T2)}(\Theta^{\nu}_{\mu}a^{\mu})_{,\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega+\frac{1}{c}\int_{G1}^{G2}\Theta^{\nu}_{\mu,\nu}a^{\mu}\sqrt{-g}\,d\Omega$

para la primera integral del segundo miembro de 35), consideremos el teorema de Gauss

$\int_{\Omega T1}^{\Omega T2}(\Theta^{\nu}_{\mu}a^{\mu})_{,\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega=\int_{G1}^{G2}\Theta^{\nu}_{\mu}a_{\mu}\,dS\nu=0$

ya que (a^{μ}) se anula en la frontera, entonces 35 implica:

$\delta A=\frac{1}{c}\int_{\Omega 1}^{\Omega 2}\Theta^{\nu}_{\mu,\nu}a^{\mu}\sqrt{-g}\,d\Omega=0$ como (a^{μ}) es arbitraria, deducimos que la ecuación de continuidad es:

36) $\Theta^{\nu}_{\mu,\nu}=0$

Ecuaciones del campo.

Deduzcamos ahora las ecuaciones del campo gravitatorio, nos basaremos nuevamente en la formulación integral.

Para la función acción de un campo de este tipo, debemos considerar una parte debido al campo, y la contribución de la materia, en general podemos escribir:

$A = Ag + Am$, ahora si imponemos para $Ag = Ag\left[g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda}\right]$ deberemos escribir

37) $Ag = \int G \sqrt{-g}\, d\Omega$ donde $G = G\left[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\right]$

como ya vimos en 24, el escolar " $\mathcal{R}$ " reune esas condiciones luego podemos suponer sin perder generalidad que:

38) $Ag = \int_\Omega \left(\mathcal{R}\, \frac{\partial \mu^\nu}{\partial x^\alpha}\right) \sqrt{-g}\, d\Omega$ donde (μ^α) es una función que se anula en la frontera. Antes de continuar veamos que representan los términos de 37 y 38, comparando estas ecuaciones podemos escribir:

$$\int_\Omega \mathcal{R} \sqrt{-g}\, d\Omega = \int \left[G\sqrt{-g} + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,\mu^\nu\right)}{\partial x^\alpha}\right] d\Omega$$

entonces considerando la divergencia en la frontera:

$$\delta \int \mathcal{R} \sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int G \sqrt{-g}\, d\Omega$$

de donde

39) $\delta Ag = \frac{c^3}{16 K \pi}\, \delta \int G \sqrt{-g}\, d\Omega = \frac{c^3}{16 K \pi}\, \delta \int \mathcal{R} \sqrt{-g}\, d\Omega$ donde

$K = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{cm^2}{gr\ seg^2}\right]$ es la llamada constante de gravitación universal; y el factor $\frac{c^3}{16\pi}$ se introduce para la normalización de las unidades.

De la definición de $\mathcal{R}$ tenemos;

$$\sqrt{-g}\, \mathcal{R} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

40) $$= \sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^\lambda} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\right]$$

luego como:

41) $$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\right) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)$$

42) $$\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}\right) - \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)$$ entonces:

reemplazando en 39, 40, 41, 42, 43, tenemos:

$$\sqrt{-g}\, G = \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right) - \left(\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}\right) g^{\mu\nu} \sqrt{-g}$$

$$\sqrt{-g}\,G = \sqrt{-g}\left[2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}g^{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}g^{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}\right]$$
$$- \left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\right) g^{\mu\nu}\sqrt{-g}$$
luego:

43) $G = g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\right)$

Entremos ahora a calcular las variaciones de A, entonces: $\delta A = \delta A_g + \delta A_m$ para el primer término $\delta A_g = \delta\int_\Omega \rho\sqrt{-g}\,d\Omega$

luego

44) $\delta A_g = \delta\int_\Omega g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega = \int\left[R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\,\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta R_{\mu\nu}\right]d\Omega$

luego como:

$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-g)\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$ entonces en 44)

45) $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega + \int g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega.$

Si ahora nos ubicamos en un sistema inercial, como
$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$, en la segunda integral de 45, tenemos:

46) $g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right)\right] = \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}}$ donde

$u^{\lambda} = g^{\mu\nu}\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\,\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}$ entonces la expresión para 46 en un sistema orbitrario sería

47) $g^{\mu\nu}\,\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\sqrt{-g}\,u^{\lambda}\right)$ entonces en 45 implica:

48) $\delta A_g = \int\left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,u^{\lambda}\right)}{\partial x^{\lambda}}\,d\Omega\right.$

ahora por teorema de Gauss podemos transformar esta integral, en una definida en la frontera donde la variación del campo es cero.

Entonces $\delta A_g = \frac{c^3}{16\pi K}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega$,

la acción de la materia debe ser función evidentemente del tensor Energía-Impulso luego de acuerdo con 31, podemos escribir para δA
$\delta A = \frac{c^3}{16\pi K}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho - \frac{8\pi K}{c^4}\theta_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d\Omega = 0$ luego:

49) $\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\rho = \frac{8\pi K}{c^4}\,\Theta_{\mu\nu}}$ que son las ecuaciones del "campo gravitatorio".

a) Considerar movimiento del tipo (atrape o captura)

b) Condiciones analíticas que debe verificar $\frac{d\varphi}{dr}$ para los distintos tipos de movimiento.

c) Movimientos radiales.

Sinópsis de las consideraciones relativistas.

En este punto nos parece indispensable realizar la sinópsis tanto de la relatividad especial como de la general y naturalmente que al emprender esta tarea dejaremos de mano los cálculos y nos concretaremos a destacar las consecuencias significativas de esta hermosa teoría tratando de ir mostrando en una secuencia lógica una apretada síntesis.

A) Algunas consideraciones sobre relatividad.

A partir de 1) $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ es posible como se sabe, dar una forma geométrica a la relatividad especial y para ello se puede suponer que el marco espacio temporal de los fenómenos físico puede darse por medio de una variedad V_4 impropiamente euclidiana (o mejor pseudo euclidiana) que no es otra cosa que el espacio tiempo de
Los entes físicos aparecen representados por vectores o tensores asociados a la variedad V_4 Si se observa atentamente la métrica 1) se nota de inmediato que sus coeficientes son constantes por lo que los geodésicos que obedecen a las ecuaciones:

2) $$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

3) $ds = 0$ son rectas

Las primeras pueden considerarse como las trayectorias espacio temporales o líneas de universo de los sistemas galileanos. Los segundos corresponderían a la trayectoria de luz. El hecho de que la signatura este determinada por los signos $+ - - -$ se caracteriza diciendo que la variedad es de la forma hiperbólica normal. Desde el punto de vista de la teoría de las formas, habrá que decir que ds^2 es una forma cuadrática no definida positiva por lo que habrá tres clases de geodésicos según que:

a) $ds^2 < 0$

b) $ds^2 = 0$

c) $ds^2 > 0$

En el caso a) se está ante las geodésicas llamadas del género espacio.

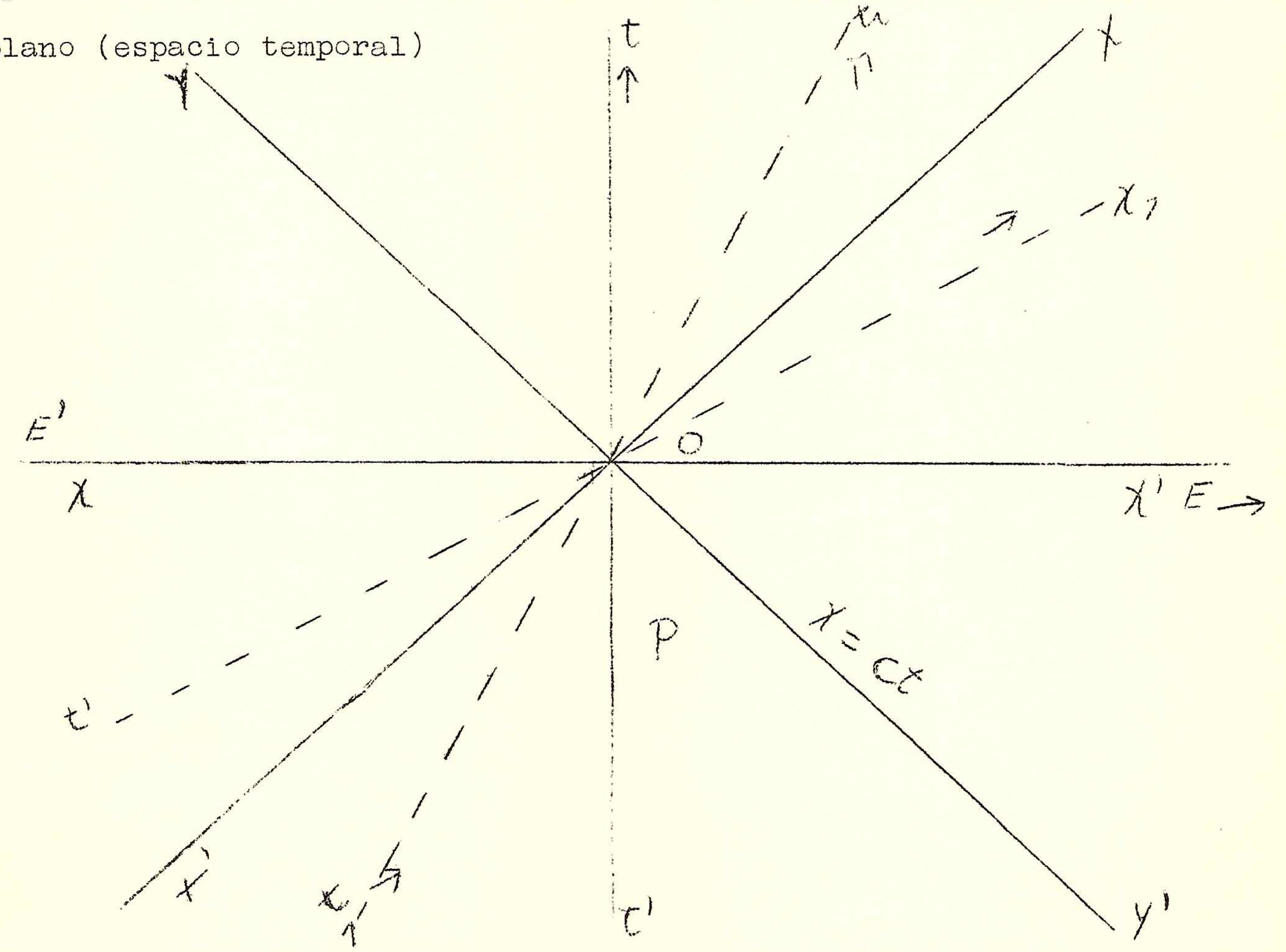
En el caso b) $ds^2 = 0$ se está ante la trayectoria de los fotones.

En el caso c) $ds^2 > 0$ se está ante la trayectoria de las partículas galileanas.

El caso b) $c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ define un cono (tridimensional) que separa tres dominios (dominios cuadridimensionales): el dominio del pasado constituido por el conjunto de puntos sucesos P que pueden unirse a O a causa de una acción física originada en P y en sentido de P hacia O (P O). El dominio del futuro constituido por el conjunto de puntos sucesos Q que pueden ser unidos a Q debido a una acción física que se ejerce en el sentido O Q. Hay además un conjunto de puntos acontecimientos que no pueden ligarse al punto O por ninguna acción física.

Diagrama de MINKOWSKI

Serán: O un punto acontecimiento que se toma como origen arbitrario, OX, OT ejes de espacio y tiempo de un referencial galileano, lo mismo digamos de OX, OT, $X'OX$, $Y'OY$ sean las trayectorias de rayos luminosos que pasan por O (se toma $C=1$). Las rectas son los trazos de un cono nulo sobre un plano (espacio temporal)



F $\rightarrow$ es el dominio del futuro

P $\rightarrow$ es el dominio del pasado

E, E' corresponde al dominio de los puntos sucesos que no pueden ligarse al punto O por ninguna acción física (presente).

La partición del espacio tiempo en la forma indicada debe considerarse como una propiedad intrínseca de la variedad y al no depender del orígen tampoco depende del referencial escogido. Las transformaciones del grupo de Lorentz hacen corresponder a un eje de la clase espacio a otro de la misma clase, otro tanto ocurre con un eje de la clase tiempo. En relación al electromagnetismo la relatividad ristringida sólo permite establecer un orden geométrico al interior de esa teoría y este orden por supuesto respeta los principios que esten en la base de la teoría. Es así como dan una versión tensorial de las ecuaciones de Maxwell y eliminan toda diferencia de naturaleza entre campo eléctrico y campo magnético.

En lo que se refiere a la Cinética y a la Dinámica se sabe que durante mucho tiempo se las consideró como ciencias directrices por la filosofía de la naturaleza, pero la Relatividad restringida mostró que era urgente una revisión de sus principios y conceptos fundamentales principalmente los de velocidad, masa, energía y naturalmente que a través del concepto de energía se cuestionó toda la física clásica.

La 1) $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ que es en realidad una forma espacio temporal permite afirmar que el desplazamiento en el espacio y el tiempo son dos aspectos de un mismo fenómeno cinemático.

La relatividad restringida no da sino una aplicación limitada al principio de la relatividad del movimiento. Por otra parte Einstein aceptó el principio de Mach: "El campo de inercia está determinado exclusivamente por la distribución de la materia del Universo" y la incorpora como tercer principio a la teoría de la relatividad general.

Las llamadas fuerzas de inercia no pueden en este orden de ideas ser consideradas como propiedades intrínsecas, absolutas de los cuerpos ya que la experiencia se encarga de mostrar que a juzgar por los efectos observables la fuerzas de inercia son equivalentes a las llamadas fuerzas gravitacionales. Einstein de acuerdo con estas observaciones fué conducido a buscar una teoría geométrica de la gravitación en la cual la existencia de un campo de gravitación se hace matemáticamente el empleo de una estructura espacio temporal. La teoría se construye a partir de los siguientes axiomas: a) Axioma de "La expresión de las leyes debe ser independiente de la elección del referencial que se emplea para caracterizar el espacio tiempo".

b) Principio de equivalencia "Las fuerzas de inercia son de la misma naturaleza que las fuerzas de gravitación".

c) Principio de determinación de la métrica mediante la materia "las propiedades métricas del espacio tiempo están en cada punto determinadas por la distribución de masas y de la energía en la vecindad de ese punto".

La teoría, en primera aproximación debería conducir a resultados idénticos a los de la teoría newtoniana de la gravitación que han sido confirmados por la experiencia y ello obligó a Einstein a buscar una ecuación comparable con la de Poisson : $\Delta^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4\pi g$

y esta ecuación es: $G_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}$

$G_{\mu\nu}$ es aqui un tensor formado exclusivamente a partir de los componentes del tensor $g_{\mu\nu}$ del tensor métrico, mientras que $T_{\mu\nu}$ es un tensor que depende de la distribución material considerado y se llama tensor impulso energía. Para un fluido perfecto es: $T^{\mu\nu} = (c^2 \rho + p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}$

g y p son aqui la densidad y la presión del fluido en el punto considerado y $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$ al generalizar los principios que permiten extremar en física clásica conducen a las geodésicas de la relatividad general. En las vecindades, o bien al interior de las distribuciones de materia los cuerpos de prueba describen las geodésicas ya mencionadas: $\frac{d^2 x^{\sigma}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$

de las variedades de métrica g soluciones de las ecuaciones de Einstein. La integración de las ecuaciones de Einstein es extremadamente difícil y la determinación explícita no es posible sino en un número restringido de casos. El más notable es el de la solución de Schwarzchild pone el caso exterior. Esta solución define el potencial gravitacional producido en el vacío que rodea una masa puntual o esférica homogénea y considerando como condiciones en los límites que los $g_{\mu\nu}$ tomen en el infinito los valores galileanos. Si se emplea coordenadas polares con centro en el centro de masas se obtiene:

$$2)\quad ds^2 = c^2 dt^2\left(1-\frac{2m}{r}\right) - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 sen^2\theta\, d\varphi^2$$

El número m tiene aqui las dimensiones de una longitud, medida en el sistema de unidades convenientes. Se observa qué 2) a) presenta una singularidad sobre la esfera de radio $r=2m$ b) para que la ecuación en estudio (2) satisfaga localmente la condición de estar en acuerdo con espacio tiempo de Minkowsky es necesario que $1-\frac{2m}{r} > 0$. La solución no tiene en consecuencia sentido en el interior de la esfera $r= 2m$. Se demuestra que la solución 2) se mantiene válida cualesquiera que sean las transferencia de masa y energía al interior de la esfera central siempre que estas transferencias no alteren la simetría esférica de la distribución (Teorema de BURKOFF (1923).

Al aplicar la solución 2) al movimiento de los planetas en torno del sol se encuentra que sus órbitas difieren ligeramente de las elípses keplerianas a consecuencia de un movimiento secular del perihelio. Se obtiene entonces una explicación muy satisfactoria del movimiento de mercurio que no se puede explicar con la mecánica celeste clásica. La métrica 2) muestra que las geódesicas de la luz $ds^2 = 0$ se curvan en las vecindades del sol es decir de la masa central. Este efecto ha sido verificado con buena presión en varios eclipses de sol (ej. eclipse observado por EDINGTON en 1919). El término $1-\frac{2m}{r}$ que aparece en el coeficiente dt^2 de la métrica (2) hace que la frecuencia de una fuente luminosa se desplaza hacia el rojo cuando ella se aproxima al centro. Este es el efecto de Einstein ahora observado en el campo de la gravitación terrestre debido al desplazamiento de ciertos rayos de resonancia nuclear casi monocromáticas (Efecto de MÓSSLAUER

Movimientos geodésicos en el campo de soluciones de Schwarzchild.

a) <u>Campo gravitatorio central</u>. Métrica asociada al punto de masa m.

Un campo gravitatorio central se presenta cuando tenemos una distribución de materia con esta simetría, y cuando además el movimiento de la materia la conserva. Geometricamente esta propiedad se traduce en que ds es el mismo para todos los puntos que pertenecen al lugar geométrico correspondiente, en este caso una superficie esférica.

Por otro lado, como estamos en un espacio de Riemann, debido a la presencia del campo gravitatorio, no podemos usar aca como parámetro el radio vector, que es el que cumple con estas propiedades en el espacio euclideo. Debido a la orbitrariedad de las referenciales, la elección del radio vector es tambiéı orbitraria.

Si usamos en nuestro referencial un sistema de coordenadas esférica polar, la expresión más general para ds^2 es:

$$50)\quad ds^2 = f_1(r,t)\,dr^2 + f_2(r,t)\left(\operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2 + d\theta^2\right) + f_3(r,t)\,dt^2 + f_4(r,t)$$

veamos ahora la expresión de ds^2 cuando efectuamos la siguiente transformación de coordenadas;

$$r = g_1(r',t) \qquad t = g_2(r',t)$$

tal que $f_4(r,t) \equiv 0 \quad f_2(r,t) = -r^2 \quad f_1(r,t) = -e^{\lambda(r,t)}, \quad f_3(r,t) = c^2 e^{\nu(r,t)}$

Bajo esta transformación estamos imponiendo la simetría esférica en el espacio de Riemann, explícitamente en la forma de $f_2(r,t) = -r^2$, entonces para ds^2

$$51)\quad ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2\right) - e^{\lambda} dr^2$$

Hagamos explícitas las coordenadas:

$x^0 = ct$

$x^1 = r$

$x^2 = \theta$

$x^3 = \phi$

Si usamos el tensor métrico, en la forma galileana es $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ tenemos en este caso para los $g_{\mu\nu} \neq 0$

$g_{11} = e^{\lambda} \quad g_{22} = r^2 \quad g_{33} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \quad g_{00} = -e^{\nu}$

$g^{11} = e^{-\lambda} \quad g^{22} = r^{-2} \quad g^{33} = r^{-2} \operatorname{sen}^{-2}\theta \quad g^{00} = -e^{-\nu}$

y para los símbolos de Christoffel distintos de cero, de acuerdo con 13.

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\nu\beta}\left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

Si adoptamos el siguiente convenio: $\frac{\partial f}{\partial r} = f'; \frac{\partial f}{i\partial ct} = \dot{f}$

$\Gamma_{00}^{0} = \frac{\dot{\nu}}{2c}$ $\Gamma_{01}^{0} = \Gamma_{10}^{0} = \frac{\nu'}{2}$ $\Gamma_{11}^{0} = \frac{\dot{\lambda}}{2c} e^{\lambda-\nu}$

$\Gamma_{00}^{1} = \frac{\nu}{2} e^{\nu-\lambda}$ $\Gamma_{11}^{1} = \frac{\lambda'}{2}$ $\Gamma_{22}^{1} = -\lambda e^{-\lambda}$ $\Gamma_{33}^{1} = -r \operatorname{Sen}^2\theta e^{-\lambda}$

$\Gamma_{10}^{1} = \frac{\lambda^{0}}{2c} = \Gamma_{01}^{1}$ $\Gamma_{13}^{3} = \frac{1}{r}$

$\Gamma_{33}^{2} = -\operatorname{Sen}\theta \cos\theta$ $\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^{2}$

$\Gamma_{23}^{3} = \Gamma_{32}^{3} = \operatorname{cotg}\theta$, entonces en la ecuación 49

$R\mu\nu - \frac{1}{2} g\mu\nu\, \mathcal{S} = \frac{8\pi K}{c^4} T\mu\nu$, tenemos si $R\mu\nu = \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x\alpha}$
$+ \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} Ln\sqrt{-g} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{\partial Ln(\sqrt{-g})}{\partial x\alpha}$

$\frac{8\pi K}{c^4} T_{00}\ e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}$

$\frac{8\pi K}{c^4} T_{11} = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}$

$\frac{8\pi K}{c^4} T_{22} = \frac{1}{2} e^{-}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-2}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{r}^2}{2} \frac{\dot{x}\dot{\lambda}}{2}\right)$

$\frac{8\pi K}{c^4} T_{33} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-2}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right)$ $\frac{8\pi K}{c^4} T_{01} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{0}}{r}$

Integremos ahora las ecuaciones de movimiento, en el siguiente caso; "Un campo central en el vacío", esta solución fue obtenido por Schwarzchild en 1916, como estamos en el vacío $T\mu\nu = 0$, fuera de la presencia de las masas, entonces:

1.a 1) $e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0$

1.a 2) $\frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - r'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\ddot{r} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{x}\dot{\nu}}{2}\right) = 0$

1.a 3) $e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 0$

1.a 4) $e^{-1}\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0$

de 1.a 4) $\lambda = g(r)$ independiente de t, observemos que obtenemos un campo estático.

(1.a 1-1.a 3) $\Rightarrow$ $| \alpha\, b\, e^{-\lambda}\left[\frac{\nu' + \lambda'}{r}\right] = 0 \Rightarrow \lambda + \nu = f(t)$, como en t podemos hacer un cambio de escala, si consideramos: $\nu' = \nu + f(t) \Longrightarrow \lambda + \nu' = 0$, luego en general podemos suponer $\lambda = -\nu$ Bajo estas condiciones la ecuación 1. a 2 se reduce a las otras tres.

Entonces tenemos ahora de (3). $e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \Longrightarrow$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda' r - 1}{r^2}\right] = -\frac{1}{r^2}/r^2$$

$$e^{-r}\left[\lambda' r - 1\right] = -1 \Longrightarrow$$

$$\int e^{-\lambda}\lambda' r\,dr - \int e^{-\lambda}\,dr = -r + A \Longrightarrow$$

1.a 7) $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 + \frac{A}{r}$, de (7) vemos que a grandes distancias $r \Longrightarrow \infty$ $e^{\nu} = e^{-r} = 1$, si (ahora imponemos que a grandes distancias valga la ley de Newton).

$e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r}$, tenemos para el elemento de arco.

1.a 8) $$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}}}$$

b) Examinemos ahora en general, cuales son las ecuaciones de una geodésica bajo las condiciones: $\int ds$ estacionario. Tenemos que:

1.b.1) $ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$

1.b.2) $2\,ds\,\delta(ds) = dx^\mu dx^\nu \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,\delta(dx^\nu) + g_{\mu\nu}\,dx^\nu\,\delta(dx^\mu)$ luego;

1.b.3) $2\,ds\,\delta(ds) = dx^\mu dx^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma + g_{\mu\nu}\,dx^\mu\, d(\delta x^\nu) + g_{\mu\nu}\,dx^\nu\, d(\delta x^\mu)$

pero como $\delta\int ds$ podemos escribir la ecuación 1.b.3 en la forma siguiente.

1.b.4) $\frac{1}{2}\int\left[\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x^\nu) + g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{d}{ds}(\delta x^\mu)\right]ds = 0$ de donde;

1.b.5) $\frac{1}{2}\int\left[\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds} + g_{\sigma\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right)\right]\delta x^\sigma\, ds = 0$

Como δx^σ es orbitrario, en 1.6.5

1.b.6) $\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\mu\sigma}}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} - \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dg_{\sigma\nu}}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2} = 0$

Como $\frac{dg_{\mu\sigma}}{ds} = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}$ $\frac{dg_{\sigma\nu}}{ds} = \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{ds}$ en 1.b.6 entonces

1.b.7) $\frac{1}{2}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\right) - g_{\varepsilon\sigma}\frac{d^2x^\varepsilon}{ds^2} = 0$

1.b.8) $\boxed{\dfrac{d^2\chi^\sigma}{ds^2}+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\dfrac{d\chi^\mu}{ds}\dfrac{d\chi^\nu}{ds}=0}$ es la ecuación de una geodésica

c) Ecuaciones del movimiento plano.

Combinemos ahora las ecuaciones 1.a.8 y 1.b.8 bajo la condición $\theta=\frac{\pi}{2}$ para obtener las ecuaciones del movimiento plano, como $\theta=\chi^2$, en 1.b.8

1.c.1 $\dfrac{d^2\chi^2}{ds^2}+\Gamma^2_{12}\dfrac{d\chi^1}{ds}\dfrac{d\chi^2}{ds}+\Gamma^2_{21}\dfrac{d\chi^2}{ds}\dfrac{d\chi^1}{ds}+\Gamma^2_{33}\dfrac{d\chi^3}{ds}\dfrac{d\chi^3}{ds}=\theta$

reemplazando los valores de los símbolos de Christoffel.

1.c.2 $\dfrac{d^2\theta}{ds}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\theta}{ds}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2=0$

que se reduce para $\theta=\frac{\pi}{2}$ a la ecuación.

1.c.3 $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{ds^2}=0}$

Para $\chi^0=cT$ tenemos:

$$\frac{d^2\chi^0}{ds^2}+\Gamma^0_{00}\left(\frac{d\chi^0}{ds}\right)^2+2\Gamma^0_{01}\frac{d\chi^0}{ds}+\Gamma^0_{11}\left(\frac{d\chi^1}{ds}\right)^2=0$$

$$c^2\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{\overset{\circ}{\nu}}{2c}\left(\frac{d\chi^0}{d\sigma}\right)^2+c\nu'\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}+\frac{\overset{\circ}{\lambda}}{2c}e^{\lambda-\nu}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=0$$

Como $\overset{\circ}{\nu}=\overset{\circ}{\lambda}=0\Rightarrow$

1.c.4 $\boxed{c\dfrac{d^2t}{ds^2}+\nu'\dfrac{dt}{ds}\dfrac{dr}{ds}=0}$

Para $\chi^1=r$, tenemos:

$$\frac{d^2\chi^1}{ds^2}+\Gamma^1_{00}\left(\frac{d\chi^0}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{11}\left(\frac{d\chi^1}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\chi^2}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{33}\left(\frac{d\chi^3}{ds}\right)^2+2\Gamma^1_{01}\frac{d\chi^0}{ds}\frac{d\chi^1}{ds}=0$$

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{c^2\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2-r\,\mathrm{sen}\,2\theta\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2e^{-\lambda}+\frac{2\overset{\circ}{\lambda}}{2c}\frac{cdt}{ds}\frac{dr}{d\sigma}=0$$

Como $\overset{\circ}{r}=0$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ $\frac{d\theta}{ds}=0$ $\mathrm{Sen}^2\theta=1$, entonces:

1.c.5 $\dfrac{d^2r}{ds^2}+\dfrac{\lambda'}{2}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2-re^{-\lambda}\left(\dfrac{d\phi}{ds}\right)^2+\dfrac{c^2}{2}\nu'e^{\nu-\lambda}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2=0$

Para $\chi^3=\phi$

$\dfrac{d^2\chi^3}{ds^2}+2\Gamma^3_{13}\dfrac{d\chi^1}{ds}\dfrac{d\chi^3}{ds}=0$, entonces:

1.c.6 $\boxed{\dfrac{d^2\phi}{ds^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\phi}{ds}=0}$

2. "Clasificación de los movimientos desde el punto de vista de los valores de A, B. Orbitas estables, casi estables, movimiento radial".

Analizemos las ecuaciones para el movimiento plano:

1.c.3) $\frac{d^2\theta}{ds^2}=0$

1.c.4) $\frac{c\,d^2t}{ds^2}+\nu'\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}=0$

1.c.5) $\frac{dr^2}{ds^2}+\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r\,e^{-\lambda}\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2+\frac{c^2}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0$

1.c.6) $\frac{d^2\phi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds}=0$

y la expresión para la métrica de Schwarzchield

I) $ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)c^2dt^2-r^2(d\theta^2+\operatorname{sen}^2\theta\,d\phi^2)-\frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}}$

en estas ecuaciones hacemos las siguientes sustituciones

2.a.1. $z=\frac{2m}{r}$

2.a.2 $P^0=E=g_{00}\frac{dx^0}{ds}=(1-z)\frac{c\,dt}{ds}$, $P\alpha=0$ $\alpha=1,2,3$

2.a.3 $J=r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)$

Así para la ecuación 1.c.6 en ϕ , r , tenemos.

1.c.6 $\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\phi}{ds}\right)=0\Rightarrow$ 2.b.1) $r^2\frac{d\phi}{ds}=J$

Y para la ecuación I en r, reemplazando y dividiendo por ds^2

$$1=(1-z)\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{1}{1-z}$$

$$1=(1-z)\frac{E^2}{(1-z)^2}-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{1}{1-z}-\frac{J^2}{r^2}$$

de donde

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=E^2-(1-z)-\frac{J^2}{r^2}(1-z)$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=E^2-1+z-\frac{J^2}{r^2}(1-z)$$

Si ahora hacemos $A=\left(\frac{2m}{J}\right)^2$; $B=A\,(E^2-1)$

entonces para la ecuación en r.

2.b.2 $$\boxed{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=\frac{B}{A}+z-\frac{z^2}{A}(1-z)}$$

Expresemos ahora esta ecuación en función de z, entonces como:

$z=\frac{2m}{r}\Longrightarrow\frac{dr}{dz}=-\frac{2m}{z^2}$, y en 2.b.2

2.b.3) $$\boxed{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{z^4}{4m^2}\,\frac{z^3-z^2+Az+B}{A}}$$

luego $ds=\frac{2m}{z^2}\frac{\sqrt{A}\,dz}{\sqrt{z^3-z^2+Az+B}}$, entonces

2.b.4) $$\boxed{s-s_i=2m\int_{z_i}^{z}\frac{\sqrt{A+B}\,dz}{\sqrt{z^2}\,\sqrt{z^3-z^2+Az+B}}}$$

Para la ecuación en χ^0 1.c.4, nos valemos de la sustitución:

$$(1-z)\frac{d\chi^0}{ds}=E,$$, de donde

$$(1-z)\frac{d\chi}{dz}\frac{dz}{ds}=E$$, lo cual implica

2.b.5 $$\boxed{\chi^0-\chi^0_{(1)}=2m\int_{z_1}^{z}\frac{\sqrt{A+B}\,dz}{z^2(1-z)\sqrt{z^3-z^2+Az+B}}}$$

Independientemente de la elección de conclusiones iniciales, deberá ser siempre $A\geqslant 0$ y $A+B>0$ y no puede ser otra forma. El caso A corresponde a las condiciones iniciales que debe darse para caracterizar un rayo de luz. El caso $A+B=0$ no corresponde a nada real se dice que representa un caso de imposibilidad. En efecto:

$$A+B=A+A(E^2-1)\ \sigma$$
$$A+B=A\left[1+E^{-2}-1\right]\sigma$$

$$A+B=AE^2$$ entonces si

$$A+B=0$$ como ello implica

α, $A=-B\neq 0$ o bien $B)\ A=B=0$ deberá considerarse los dos casos α y B)

Caso α) $0=AE^2$ y $E^2=0$ (imposible)

Caso B) $F0=0$ E^2 F

A y B pueden ser infinitas lo que se dá en el caso de movimiento radial ($\dot{g}=0$). Pero cuando $A\to\infty$ $\frac{B}{A}\longrightarrow E^2-1$ lo que resulta de: $B=A(E^2-1)$. Supongamos por ahora que A y B son finitos para excluír el caso de movimiento radial. Cuando para algún $z=z_0$ es $0\leq z\leq 1$ entonces el movimiento es posible. Esto equivale a decir que el movimiento es posible para:

$$0\leq\frac{2m}{r}\leq 1\ \mathcal{S}$$
$$0\leq 2m\leq r\leq\infty$$ o mejor

$$2m\leq r\leq\infty$$ Las condiciones de posibilidad del movimiento están dadas por las condiciones para que el polimonio P (Z) sea positivo. χ^0, s y 0 son dependientes de z y la dependencia se muestra en las ecuaciones 2.6.4, 2,6,5 y 2.6,6

Si P $(Z)=0$ para algún valor de z allí queda definido un punto de retroceso.

Si P $(Z) > 0$ para algún valor de Z , ese punto será una posición de la partícula de prueba en movimiento.

La región de posibilidad del movimiento está dada por el intervalo cerrado $[0, 1]$ pues allí P $(Z) > 0$

En correspondencia con los tipos de condiciones iniciales que se dan, puede elegirse valores de A y B que definirán la forma de la gráfica de P (Z). La forma de la gráfica de P (Z) puede ser tal que muestre claramente que el movimiento procede de una región finita del universo, partiendo de la esfera de Schwarzchild (esto corresponde a lo que se denomina un movimiento de tipo captura). Cuando A es muy grande habrá captura si

$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{AZ})$

es una función monótona creciente de Z Cuando A es pequeño ocurre que todavía hay captura pero cuando A es muy pequeño $\frac{dr}{d\varphi}$ no es una función monótona creciente (sólo lo es el principio) y presenta puntos de máxima y mínima. Si A disminuye muy rapidamente, el punto donde P (Z) toma un valor mínimo sea Z_{min}, allí P (Z) tiende a cero y la órbita asociada a la pártícula de prueba en movimiento se hace casi estable. Cuando el mínimo $\frac{dZ}{d\varphi}$ tome el valor eventual cero, el número de rotaciones en la órbita se ha infinito. Y se puede decir cuando esto ocurre que "la órbita es estable".

Puede suceder también que el estudio del polimonio P (Z) nos conduzca a la consideración de movimientos casi parabólicos o a movimientos casi hiperbólicos. Conviene recordar que un punto de retroceso es un punto de la órbita que satisface la relación $\frac{dZ}{d\varphi} = 0$ Si un punto de retroceso está ubicado por $\varphi = \varphi_0$ y $Z = e$, habrá de tenerse:

$$P(e) = \left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2 \Big|_{Z=e} = 0$$

Como parámetros útiles para caracterizar la trayectoria puede tomarse la coordenada $Z = e$ de un punto de retroceso y el momento angular

$$g = r^2 \frac{d\varphi}{ds}$$

Supongamos que teoricamente, el radio de Scwarzchild o lo que viene a ser lo mismo, la coordenada del móvil y el ángulo pueden ser determinadas por algún observador ubicado a distancia finita para lo cual le bastará observar la luz emitida por el móvil. En consecuencia el observador estará capacitado para encontrar los valores de g y de $Z = e$ correspondiente al punto de inflexión del movimiento que observa. Podemos por consiguiente considerar estas cantidades como datos que permiten describir el movimiento en término de resultados observacionales. Volviendo al polinomio $P(Z) = Z^3 - Z^2 + AZ + B$ trataremos de expresarlo en términos de g y e. Recordemos que teniamos $A = \left(\frac{2m}{g}\right)^2$ y que debe ser:

$$P(e) = e^3 - e^2 + Ae + B$$

pero como

$P(e) = 0$ entonces:

$$e^3 - e^2 + Ae + B = 0 \quad o$$

$$B = e^2 - e^3 - Ae \quad \text{o aún:}$$

$$B = e^2 - e^3 - \left(\frac{2m}{g}\right)^2 e$$

El polinomio P (Z) tiene siempre al menos una raíz real en la región física correspondiente al intervalo:

$$0 \leq Z \leq 1 \quad ([0,1])$$

Las otras dos raíces del polinomio P (Z) (mejor es decir, los otros dos ceros del polinomio) sean e_1' y e_2'

De acuerdo con propiedades muy conocidas de los coeficientes de una ecuación algebraica: $Z^3 - Z^2 + AZ + B = 0$ tendremos que:

a)
$$e + e_1' + e_2' = 1$$
$$e e_1' + e e_2' + e_1' e_2' = \left(\frac{2m}{g}\right)^2$$

más otra relación que aqui no interesa. Procedamos a reemplazar las relaciones a) por otras b) equivalentes:

b)
$$e_1' + e_2' = 1 - e$$
$$e_1 e_2 = \left(\frac{2m}{g}\right)^2 - e(e_1' + e_2)$$

o bien en vez de la última:

$$e_1 e_2 = \left(\frac{2m}{g}\right) - e(1-e)$$

Auxiliándonos en las relaciones b) podemos construír una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes p y q se conocen por estas relaciones. Sea pues esta ecuación:

$$e'^2 + (1-e)e' + \left(\frac{2m}{g}\right)^2 + e^2 - e = 0$$

Esta ecuación nos dará las dos raíces restantes e_1' y e_2' de $Z^3 + Z^2 + AZ + B = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se tiene:

$$e' = \sqrt{\frac{1-e}{2} \pm 1 + 2e - 3e^2 \; 4\left(\frac{2m}{J}\right)^2}$$

se puede poner:

$1 + 2e - 3e^2 = 3(1-e)(e - \frac{1}{3})$ que resulta ser positivo en $[0,1]$ es decir pone un e perteneciente a este intervalo.

Llamemos, como es costumbre Δ a la discriminante de

$e'^2 + (1-e)\, e' + \left(\frac{2m}{J}\right)^2 + e^2 - e = 0$ de modo que:

$$\Delta = 1 - 2e - 3e^2 - 4\left(\frac{2m}{J}\right)^2$$

$$\Delta = 3(1-e)(e - \tfrac{1}{3}) - 4\left(\frac{2m}{J}\right)^2$$

Para que $\Delta \geqslant 0$ es preciso que:

$$3(1-e)(e-\tfrac{1}{3}) \geqslant 4\left(\frac{2m}{J}\right)^2$$

$$3(1-e)(e-\tfrac{1}{3}) \geqslant \frac{16\, m^2}{J^2}$$

es decir

$$J^2 \geqslant \frac{16\, m^2}{3(1-e)(e+1/3)} \qquad (x)$$

$$J^2 \geqslant \frac{16\, m^2}{(1-e)(3e+1}$$

Tenemos que las raíces e_i' y e_r' son también reales si se verifica esta última desigualdad.

Ahora de 2.b.1 $r^2 \frac{d\phi}{ds} = J$, tenemos la primera integral para ϕ lo cual con las ecuaciones (2.b.4), y (2.b.5) implica. $\frac{d\phi}{ds} = \frac{J}{r^2}$

2.6.6 $$\phi - \phi_i = \epsilon \int_{z_i}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - z^2 + Az + B}}, \quad \epsilon = \neq 1$$

el índice i, indica las condiciones iniciales del problema, expresados por A y B, y la ecuación 2.b.6 lo podemos escribir como

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{z^3 - z^2 + Az + B}}}$$

Hagamos ahora el análisis en cuanto a A y B.

4. "Movimiento radial".

Pasemos a considerar los movimientos en que $J = 0$ Para este caso tendremos $\frac{B}{A} \to E^2 - 1$, entonces;

4.a.1 $\phi - \phi_i = 0$

4.a.2 $s - s_i = \int_{z_i}^{z} \frac{dz}{z^2 \sqrt{z^2 + E - 1}}$

4.a.3 $x^0 - x^0_i = 2m\int_{z_1}^{z} \frac{E\,dz}{z^2(1-z)\sqrt{z+E^2-1}}$

De la ecuación 4.a.1 deducimos que el movimiento es radial. Por otro lado podemos ver que hay tres casos de movimientos posibles:

4.b.1) Cuando $E > 1$, caso en el que el movimiento parte desde el infinito con una $\sqrt{\alpha} > 0$ y asintaticamente alcanza la singularidad de Schwarzchild $E = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{\alpha}^2}{c^2}}}$ El tiempo x^0, necesario para alcanzar la singularidad antes mencionada desde una distancia finita es infinito.

Pero el tiempo propio en este caso cambia de un valor finito, lo mismo puede decirse para cualquier movimiento en que la partícula de prueba alcance el radio de la singularidad de Schwarzchild.

4.b.2 Si E=1, el movimiento en relación con el anterior tiene una pequeña diferencia y es que ahora $\sqrt{\alpha} = 0$, lo que equivale a un movimiento parabólico degenerado.

4.b.3 Cuando $E<1$, el movimiento que empieza en una singularidad de Schwarzchild x=1, alcanza despues de un tiempo propio finito, el punto de inflexión $z_{min} = e = 1-E^2$, y luego retrocede sin cesar hasta la singularidad.

4.c. Para integrar las ecuaciones hagamos las siguientes sustituciones:

4.c.1 $z = \frac{\cosh p_0 - 1}{\cosh p - 1}$

4.c.2 $p_0 = 2\cosh^{-1}E$, entonces

$$x^0 - x^0_i = -4m\int \frac{\cosh\frac{p_0}{2}}{\operatorname{senh}^3\frac{p_0}{2}} \frac{\operatorname{senh}^6\frac{p}{2}}{\operatorname{senh}^2\frac{p}{2} - \operatorname{senh}^2\frac{p_0}{2}}$$ cuya solución es:

4.c.3 $x^0 - x^0_i = -\frac{4m}{(E^2-1)^3}\left[\frac{1}{8}\operatorname{senh} p + \frac{1}{4}\cosh p - \frac{1}{8}p + \frac{E^2-1}{2}\operatorname{senh} p + \frac{2(E^2-1)}{\sqrt{1-E^2}}\operatorname{tgh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{E}{E^2-1}}\operatorname{tgh}\frac{p}{2}\right)\right.$ Y $s - s_i = -\frac{2}{\operatorname{senh}^2\frac{p_0}{2}}\int_1^2 \operatorname{senh}^4\frac{p}{2}\,dp$, cuya solución es:

4.c.4 $s - s_i = -\frac{2m}{E^2-1}\left[\frac{1}{8}\operatorname{senh} p + \frac{1}{4}\cosh p - \frac{p}{8}\right]_1^2$

"Leyes de Kepler para el tiempo propio"

El intervalo de tiempo propio que se necesita para que una partícula pase del "opocentro" al "pericentro", y de vuelta al "opocentro", se puede calcular la expresión,

$$\Delta s = 4m\sqrt{A}\int_e^{e'} \frac{dz}{z^2\sqrt{z^3 - z^2 + Az + B}}$$, tal que:

$z_{MIN} = e \quad A = ce'(1-c-e')(e+e')$

$2m\sigma = e' \quad B = ce'(1-c-e')$

Si hacemos $e = \frac{4m}{a}\frac{1}{1+\epsilon} \quad e' = \frac{4m}{a}\frac{1}{1-\epsilon}$, donde A es el semi-eje mayor de la órbita, ϵ es la excentricidad de la trayectoria, luego:

$$\Delta s = 4m\sqrt{\frac{8m}{a}}\left(\frac{a}{4m}\right)^2\sqrt{1+\frac{2m}{a}-\frac{8m}{a}\frac{1}{1-\epsilon^2}}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{(1+\xi)\,d\xi}{\sqrt{(\epsilon^2-\xi^2)\left(1-\frac{8m}{a}\frac{1}{1-\epsilon^2}-\frac{4m}{a}\frac{1}{1+\epsilon}\right)}}$$

esta fórmula puede escribirse explicitamente en términos de integrales elípticas como se hace en el movimiento del pericentro. Para movimientos en los cuales $\frac{a}{4m}$ es suficiente pequeño, ΔS puede darse como una serie de potencias de $\frac{a}{4m}$ obteniéndose de este modo:

$$\Delta S = \frac{\pi}{\sqrt{2}\,2m}\, a^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{3m}{a}+\left(\frac{4m}{a}\right)^2\left(\frac{3}{32}+\frac{3}{8\sqrt{1-\epsilon^2}}+\frac{3}{1-\epsilon^2}+\frac{3}{2(1-\epsilon^2)^2}\right)+\right]$$

El término de orden cero $\Delta S \cong \frac{\pi}{2\sqrt{2m}}\, a^{\frac{3}{2}}$ corresponde a las leyes de Kepler en mecánica newtoniana. La correspondencia de orden $\frac{m}{a}$ no depende ϵ. El último término de orden $\left(\frac{m}{a}\right)^2$, no ha sido aún obtenido por ningún método aproximado. Los términos de orden superior en $\frac{m}{a}$ pueden tambien determinarse a partir de la transformación de la integral en serie, pero parece que no son de interés práctico, aún en términos proporcionales a $\left(\frac{m}{a}\right)^2$ tenemos que este excede cualquier posibilidad experimental en la actualidad.

En el movimiento en el cual $\left(\frac{m}{a}\right)$ es orbitrariamente pequeño, se puede dar ΔS en una serie en términos de ϵ

$$\Delta S = \frac{\pi}{2\sqrt{2m}}\, a^{3/2}\sqrt{\frac{1-\frac{6m}{a}}{1-\frac{12m}{a}}}\left[1+\epsilon^2\frac{9\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(3-34\frac{m}{a}\right)}{\left(1-\frac{6m}{r}\right)\left(1-\frac{12m}{a}\right)^2}+\right]$$

El término proporcional a ϵ^0, puede obtenerse fácilmente a partir de la expresión, $r^2\frac{d\phi}{ds} = J$, y de la primera expresión para $\Delta\phi$

El término proporcionado ϵ^2 no ha sido aún obtenido por métodos aproximados. La expresión completa para ΔS tiene solamente un valor teórico por el momento, y nos atrevemos a asegurar que no hay muchas probabilidades de contratarla mediante alguna experiencia.

5. <u>Resultados físicos</u>.

5.a.1 De las caracteristicas analizadas para el campo de Schwarzschild vemos que la más importante de sus conclusiones, es la obtención en las primeras órdenes del conocimiento de los centros de una órbita, además como vimos en 1.a.4 la solución es estática para un campo de este tipo.

La ecuación 4 c.3 permite en función de la energía, calcular el tiempo transcurrido cuando una partícula alcanza el punto de singularidad desde un punto orbitrario.

Por otro lado vemos que las Leyes de Kepler, que fijan el comportamiento de una partícula en un campo central, no son experiencias exclusivamente empíricas, si no traducción del hecho de que una partícula solicitada por este tipo de campo, sigue una trayectoria bien específica esto es una geodésico, en rigor la condición se la impusimos, pero el análisis teórico concuerda con los datos experimentales, hecho que traduce la plausibilidad de nuestra hipótesis, asi podemos clasificar los movimientos en el campo de Schwarzschild, con el nombre de "movimientos geodésicos".