

✓ Física
L 962
C.3

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS

Propiedades de la matriz S
en el Plano de Momentum angular
Complejo como consecuencia de
la analiticidad del potencial

PROPIEDADES DE LA MATRIZ S EN EL PLANO DE
MOMENTUM ANGULAR COMPLEJO COMO CONSECUENCIA
DE LA ANALITICIDAD DEL POTENCIAL



Fernando Lund P.

Informe de investigación presentado ante la Facultad de
Ciencias de la Universidad de Chile en cumplimiento de
los requisitos para optar al grado de licenciado.



Profesor guía: Carlos López S.

INDICE

| | |
|---|-----|
| Introducción | i |
| Agradecimientos | iii |
| I.- Ideas Preliminares | 1 |
| II.- El trabajo de Regge | 8 |
| III.- La Demostración de R. Newton | 9 |
| IV.- Los Trabajos de Barut-Calogero y Bollini-Giambiagi | 12 |
| V.- La diferencia entre los potenciales tipo Yukawa y los de alcance finito. Posible aplicación de un método di- señado por Martin | 14 |
| VI.- Ideas finales | 16 |
| Referencias | 17 |

07379

UNIVERSIDAD DE CHILE
SEDE SANTIAGO ORIENTE
BIBLIOTECA CENTRAL

El orden que se seguirá es el siguiente: en la sección I se introduce la transformación de Sommerfeld-Watson y se resumen conceptos de interacciones relativistas que permiten apreciar la importancia de la transformación. Se enfatiza la importancia del tipo de potencial considerado. En la parte II se dan los resultados obtenidos por Regge en su primer trabajo estudiando propiedades de la matriz de difusión como función de momentum angular complejo. Estos resultados no garantizan la validez de la transformación de Sommerfeld-Watson. En la parte III se estudia la demostración de R. Newton de las buenas propiedades de la matriz de difusión para potenciales de tipo Yukawa. Esta demostración como dijimos no es válida para potenciales de alcance finito, pues, hay una integral que no se puede evaluar. La parte IV da las propiedades que si se conocen de los potenciales de alcance finito: Barut y Calogero han mostrado un mal comportamiento asintótico de la matriz de difusión, pero Bollini y Giambiagi muestran que tiene un número finito de polos (reales) en el semiplano derecho. En la sección V se encuentra que la diferencia fundamental entre ambos tipos de potencial es la no analiticidad de los de alcance finito y se intenta explotar este hecho. Finalmente, en la sección VI se hace un breve comentario final.

INTRODUCCION

Se estudiará las diferencias entre los potenciales de tipo Yukawa y los de alcance finito (en especial el potencial de pozo cuadrado) a la luz de la transformación de Sommerfeld-Watson.

Esta transformación es interesante, pues al suponerla válida para altas energías, da un arma muy poderosa para estudiar el comportamiento asintótico de la amplitud de difusión, gracias a la simetría de cruce entre los distintos canales en la interacción relativista de partículas. Como su uso en el problema relativista es puramente especulativo, se hace necesario estudiar su fundamentación en el caso no relativista, donde contamos con la ecuación de Schrödinger para describir los procesos dinámicos. Esto se hace estudiando las propiedades de la matriz de difusión como función del momentum angular complejo. En particular, interesan su comportamiento asintótico y sus polos. Estas propiedades dependen esencialmente del potencial responsable por la difusión. Para potenciales de tipo Yukawa la situación es bastante clara, aun cuando se atribuye a Regge (quien fue el primero en estudiar el problema) resultados bastante posteriores. Por ejemplo, que el número de polos de la matriz de difusión en el semiplano derecho de momentum angular complejo es finito. Para potenciales de alcance finito no hay esa misma claridad e incluso parece existir la opinión en la bibliografía de que el número de polos de que hablábamos antes es infinito.

En este trabajo veremos que el potencial de pozo cuadrado da un número finito de polos de la matriz de difusión en el semiplano derecho del momentum angular complejo. Sin embargo no es posible efectuar la transformación de Sommerfeld-Watson debido al mal comportamiento asintótico de la matriz de difusión a lo largo del eje imaginario. Se verá que la demostración de transformación para potenciales de tipo Yukawa no es válida para potenciales de alcance finito pues cierta integral ya no es evaluable en forma cerrada.

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer aquí al Profesor Carlos López su constante preocupación por este trabajo, así como sus valiosos comentarios e ideas. También al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias por su ayuda económica, y a la señorita Carmen Morales por su eficiente labor al mecanografiar el manuscrito.

I.- IDEAS PRELIMINARES

Consideremos la difusión de una partícula sin spin por un potencial central. La amplitud de difusión está dada por el conocido desarrollo en ondas parciales

$$A(k, z) = (2ik)^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) [S_{\ell}(k) - 1] P_{\ell}(z) \quad (1)$$

donde k es el número de onda, $z = \cos \theta$, $S_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$ es el ℓ -ésimo autovalor de la matriz S , con δ_{ℓ} el ℓ -ésimo corrimiento de fase. Consideremos en S_{ℓ} & P_{ℓ} que el índice ℓ toma valores complejos y llamemos $\lambda = \ell + 1/2$. Esto se puede lograr, por ejemplo, haciendo que ℓ tome valores complejos en la ecuación radial de Schrödinger y en la ecuación de Legendre respectivamente, exigiendo que cuando ℓ tome valores enteros, recuperemos las expresiones ya conocidas para esas funciones. En este caso, la serie (1) se puede reemplazar, gracias al teorema de Cauchy, por una integral a lo largo del camino C_1 , indicado en la figura 1

$$A(k, z) = (2ik)^{-1} \int_{C_1} d\lambda \lambda [S(\lambda, k) - 1] P_{\lambda-1/2}(-z) \sec \pi \lambda \quad (2)$$

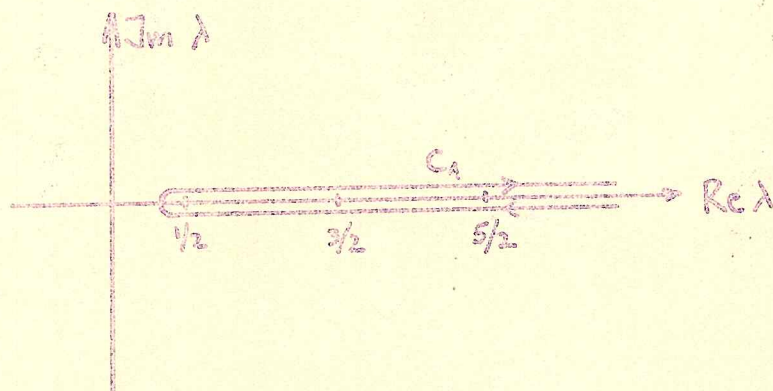


figura 1

Supongamos ahora que la matriz S tiene un número finito de polos en el semiplano $\text{Re } \lambda > 0$ y que estos están ubicados en el primer cuadrante. Por ejemplo, en $\ell = \alpha_n$ con residuos β_n . Supongamos también que $S \rightarrow 1$ cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$.

La validez de estas suposiciones es lo que nos ocupará en la mayor parte de este trabajo. Por otro lado, la extensión de P_ℓ a valores complejos que hemos mencionado es una función analítica de ℓ , de buen comportamiento asintótico. (es decir, permite el proceso que indicamos a continuación). Consideremos el camino c_2 indicado en la figura 2.

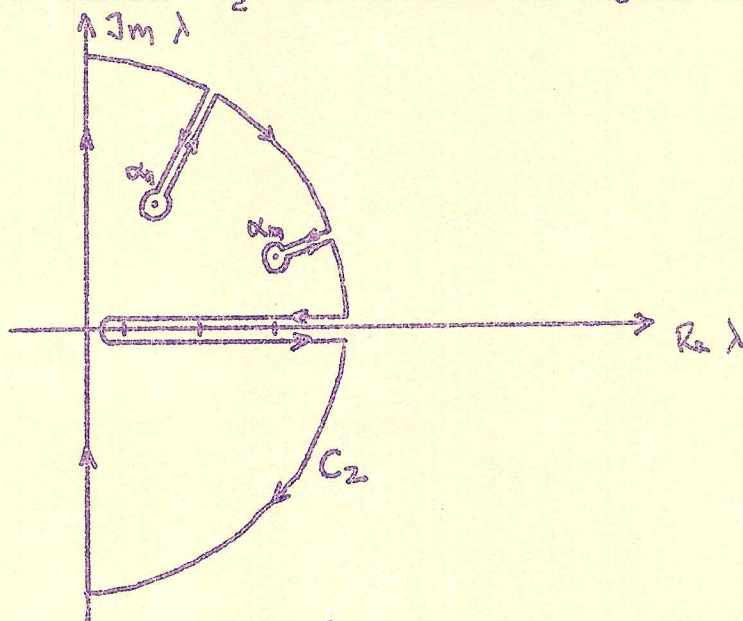


figura 2

Si hacemos tender el radio de la semicircunferencia a infinito, tendremos entonces para la amplitud de dispersión:

$$A(k,z) = (zk)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \lambda' [S(i\lambda',k) - 1] P_{i\lambda' - 1/2}(-z) / \cosh \pi \lambda' \quad (3)$$

$$+ i\pi k^{-1} \sum_n (\alpha_n + 1/2) \beta_n P_{\alpha_n}(-z) / \sin \pi \alpha_n$$

Esta expresión se conoce como la transformación de Sommerfeld-Watson, y la integral que aparece en el segundo miembro es la integral de fondo ("background term"). Hemos puesto $\lambda = i\lambda'$

Si el integrando en (2) tuviera puntos de ramificación en el plano λ , habría que sumar a (3) las integrales de las discontinuidades a lo largo de las cortaduras. La ventaja de (3) es que converge para todo Z que no esté entre $Z = 1$ y $Z = +\infty$.

La expresión (2) sólo converge para Z dentro de una elipse² (elipse de Lehman). Podemos entonces encontrar el comportamiento asintótico de la amplitud de dispersión como función de Z . Resulta²

$$A(k, z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} F(k) z^{\alpha(k)} \quad (4)$$

donde $F(k)$ es una función de k y $\ell = \alpha$ es la ubicación del polo de S que tiene mayor parte real. Se le conoce como polo dominante. ("leading pole"). Aquí podría pensarse que esto no tiene mayor interés, puesto que los valores físicos de Z son aquellos para los cuales $|z| \leq 1$. Esto no es así, como veremos a continuación.

Para entender la importancia de la expresión (4) haremos una excursión al problema de interacción relativista de partículas elementales. Esto, aunque no es el tema principal de nuestro estudio, proporcionará una perspectiva desde la cual la utilidad de la transformación de Sommerfeld-Watson se verá con claridad.

Consideramos entonces la interacción de cuatro partículas sin spin y de igual masa m : $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$, representada esquemáticamente en la figura 3

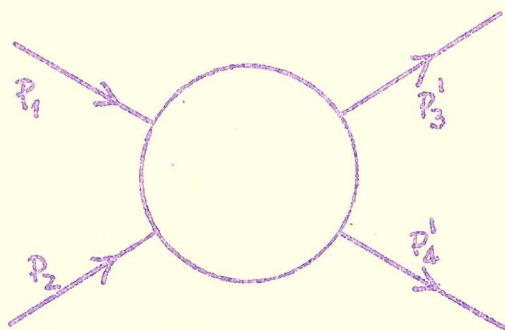


figura 3

P_i es el cuadrimomentum de la partícula i

La amplitud de dispersión para la reacción es función de dos variables, en general la energía total W y $\cos \Theta$, con Θ el ángulo de dispersión, ambos tomados en el sistema centro

de masa. Como queremos que tal amplitud sea invariante de Lorentz usamos variables que son explícitamente invariantes:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = (p_1 + p_3)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} p_3 &= -p_1 \\ p_4 &= -p_2 \end{aligned} \quad (5)$$

Se tiene entonces: $s + t + u = 4m^2$

Además se cumple:

$$\begin{aligned} s &= W^2 = 4(k^2 + m^2) \\ t &= -2k^2(1 - \cos\theta) \\ u &= -2k^2(1 + \cos\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

donde k es el momentum relativo entre las partículas en el sistema centro de masa. Es lo que se llama canal s . Para que el proceso tenga sentido físico debe cumplirse

$k \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} s &> 4m^2 \\ t &\leq 0 \\ u &\leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Tomemos ahora la reacción $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$. La amplitud será función de la energía W_t y el ángulo de dispersión θ_t y se cumplirá

$$\begin{aligned} s &= -2k_t^2(1 + \cos\theta_t) \\ t &= 4(k_t^2 + m^2) = W_t^2 \\ u &= -2k_t^2(1 - \cos\theta_t) \end{aligned} \quad (8)$$

Es lo que llamamos el canal t . Para que haya sentido físico debe cumplirse

$$\begin{aligned} s &\leq 0 \\ t &> 4m^2 \\ u &\leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

O sea las amplitudes de cada reacción son funciones de las mismas variables s , t , u , pero están definidas en distintos dominios para el caso físico. Estos dominios no se in-

tersectan.

Consideramos por último la reacción (canal u):

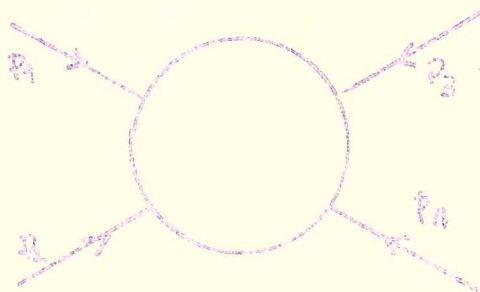
en que se cumplirá (caso físico)

$$s = -2k_u^2 (1 - \cos \theta_u) < 0$$

$$t = -2k_u^2 (1 + \cos \theta_u) < 0$$

$$u = W_u^2 = 4(k_u^2 + m^2) > 4m^2$$

Tenemos pues tres amplitudes que no cumplen ninguna relación para situaciones físicas. Sin embargo, si continuamos analíticamente a valores complejos de la energía y ángulo de dispersión, la situación cambia. Por ejemplo, la amplitud para el canal s puede extenderse hasta alcanzar la región física del canal t. Se postula³ que la extensión analítica de una amplitud coincide con la amplitud de otro canal en la región en que esta última está definida. Es lo que se llama simetría de cruce o ley de sustitución. En otras palabras: a cada diagrama hay asociada una función analítica de tres



variables s, t, u , que representa las tres amplitudes para las reacciones

$$1+2 \longrightarrow 3+4$$

$$1+\bar{3} \longrightarrow \bar{2}+4$$

$$1+\bar{4} \longrightarrow \bar{1}+3$$

En la región física de cada canal, tal función da los valores de la amplitud de difusión del canal respectivo.

Volvamos ahora a la expresión (4). La reescribiremos en tér-

minos del momentum transferido t y la energía W como

$$A \underset{|t| \rightarrow \infty}{\sim} G(W) t^{\alpha_1(E)} e^{i\alpha_2(E) \log t} \quad (10)$$

donde $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$.

Supongamos ahora que la transformada de Sommerfeld-Watson, y por lo tanto la expresión (10), sigue siendo válida para altas energías. Sea pues A la amplitud para el canal s de cierta reacción

Se tiene

$$A \underset{|s| \rightarrow \infty}{\sim} f(s) t^{\alpha_1(s)} e^{i\alpha_2(s) \log t} \quad (11)$$

La simetría de cruce nos asegura entonces que la amplitud en el canal t tendrá el comportamiento asintótico

$$A \underset{|t| \rightarrow \infty}{\sim} f(t) s^{\alpha_1(t)} e^{i\alpha_2(t) \log s} \quad (12)$$

Pero esta expresión tiene un significado físico directo: Predice un comportamiento bien definido de la sección eficaz a altas energías!

Vemos pues que la gran importancia de la transformación de Sommerfeld-Watson radica en su uso especulativo a altas energías. Interesa entonces su justificación en el caso de difusión por un potencial ("potential scattering"), donde se cuenta con la ecuación de Schrödinger para describir completamente los procesos dinámicos. La gran gracia de esta transformada es que un comportamiento asintótico está dado sólo por un polo de la matriz S , que hemos llamado dominante. Para que esto sea cierto, es imprescindible que la matriz S tenga un número finito de polos en el semiplano $\text{Re } \lambda > 0$ y que su comportamiento cuando $|\lambda| \rightarrow \infty$ sea tal que la integral en (3) se pueda efectuar a lo largo del eje imaginario. Estas hipótesis han sido demostradas² para potenciales de tipo Yukawa:

$$V(r) = \int_m^\infty \frac{e^{-\mu r}}{\mu} \sigma(\mu) d\mu \quad (13)$$

Potenciales de este tipo son muy interesantes pues son sugeridos por la teoría cuántica de campos ⁴. (parece^{ser} que la difusión por un potencial puede considerarse como límite no relativista de la teoría de campos sólo para potenciales de tipo (3)). Sin embargo hay otros potenciales, que permiten una solución explícita de la ecuación de Schrödinger, para los cuales la situación no es tan clara. Son los potenciales de alcance finito, y más específicamente, el potencial de pozo cuadrado. La impresión general parece ser que el potencial de pozo cuadrado da un número infinito de polos para la matriz S en $\text{Re } \lambda > 0$. Mostraremos que la situación no es tan clara como se piensa. Para esto estudiaremos la demostración válida para potenciales de tipo Yukawa y los tratamientos que se han hecho del potencial de pozo cuadrado.



II El trabajo de Regge

El primero en permitir que el momento angular, que aparece como un parámetro en la ecuación radial de Schrödinger, tome valores complejos fue Regge ⁵. Consideró potenciales $V(r)$ analíticamente continuables a $V(z)$ en un sector $\arg z < \varphi + \varepsilon < \pi/2$. Para estos potenciales, mostró que la matriz S tiene un número finito de polos en $0 < |\arg \lambda| < \frac{1}{2}\varphi_0 < \pi/2$.

donde

$$\tan \frac{1}{2}\varphi_0 = \frac{\alpha^1}{\pi - 2\sigma}$$

$$\alpha^1 = \log(1 + \alpha^2/2)$$

y el potencial tiene un comportamiento en el infinito (a lo largo del eje real) tal que existe un τ_0 de modo que

$$|V(r)| < C e^{-\frac{\alpha^1 r - \alpha^1 \tau_0}{r}} \quad r > r_0$$

O sea, la matriz S tiene un número finito de polos en una cuña del plano λ que no coincide con el semiplano derecho. (Ver figura 4). Podría ocurrir por ejemplo que hubiera polos acumulándose cerca del eje imaginario. La razón está en que no se admite potenciales continuables hasta $\varphi = \pi/2$.

Las exigencias de más arriba sobre el potencial se cumplen perfectamente para potenciales de tipo Yukawa. Para potenciales de alcance finito fallan de partida, pues estos no son analíticamente continuables. (En efecto, una función que se anula en un conjunto continuo de puntos se puede prolongar analíticamente fuera de ese conjunto sólo como la función idénticamente nula). Sin embargo, no por eso demuestra nada acerca de ellos.

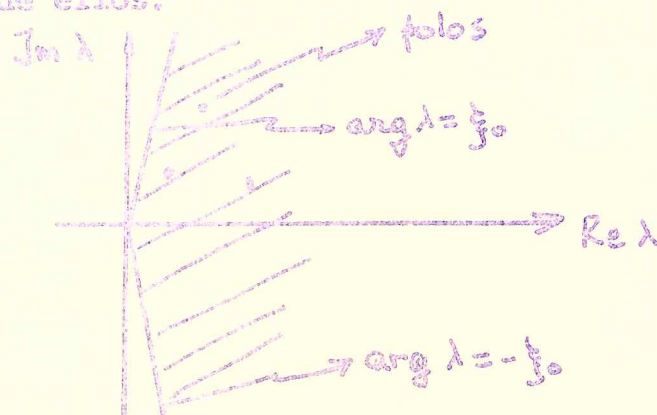


figura 4

III La Demostración de R. Newton

Para potenciales de tipo Yukawa, Newton² mostró que el número de polos de la matriz S en el semiplano $\text{Re } \lambda > 0$ es finito. Veamos en que punto de la demostración es importante la forma del potencial.

Se sabe que la matriz S es la razón de dos funciones de Jost*:

$$S(\lambda, k) = \frac{f_+(\lambda, k)}{f_-(\lambda, k)} \quad (14)$$

donde tanto f_+ como f_- son funciones analíticas de λ , lo que hace que los polos de S estén dados por los ceros de f_- . Basta pues mostrar que $f_- \rightarrow c e^{i\alpha}$ cuando $\text{Re } \lambda \rightarrow \infty$, $\text{Im } \lambda \rightarrow \pm \infty$. En efecto, esto asegura que f_- no tiene un punto de acumulación de ceros en el infinito. Por otro lado, su analiticidad asegura que no tiene un punto de acumulación de ceros a distancia finita. Es decir f_- tiene un número finito de ceros en el semiplano $\text{Re } \lambda > 0$ y por lo tanto S tiene en esa región un número finito de polos.

Newton muestra que tanto para potenciales tipo Yukawa como para los de alcance finito se cumple que $\lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow \infty} f_-(\lambda, k) = 1$ cuando λ tiende a infinito a lo largo de cualquier rayo con $-\frac{\pi}{2} < \arg \lambda < \frac{\pi}{2}$, y que $\lim_{\text{Im } \lambda \rightarrow -\infty} f_-(\lambda, k) = 1$. El problema se presenta cuando se quiere demostrar el mismo comportamiento asintótico para $\text{Im } \lambda \rightarrow +\infty$. La fórmula 5-12^o de la referencia 2 dice:

$$f_{\pm}(\lambda, k) = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{(\frac{1}{2}k)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty dr r^{1/2} V(r) (Y_\lambda(kr) \pm i J_\lambda(kr)) \phi(\lambda, k; r) \quad (15)$$

donde ϕ es la solución de la ecuación radial de Schrödinger regular en el origen. J_λ y Y_λ son funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente.

Si escribimos $\varphi(r) = i \phi(r) (\frac{1}{2}k)^\lambda r^{1/2} / \Gamma(\lambda+1)$

* Usamos la notación de Newton² para denotar las funciones de Jost

se tendrá² la ecuación integral para ψ :

$$\psi(r) = J_\lambda(kr) + \frac{1}{2} \pi r \operatorname{cosec} \pi \lambda \int_0^r dt (tr) V(tr) \psi(tr) [J_\lambda(kr) J_\lambda(kit) - J_\lambda(kr) J_\lambda(ki)] \quad (16)$$

El término dominante en f_- es entonces²

$$f_-^{(0)} = 1 - \frac{1}{2} \pi e^{-i\pi \lambda} \operatorname{cosec} \pi \lambda \int_0^\infty dr r V(r) J_\lambda(kr) \psi(r) \quad (17)$$

La ecuación (16) se puede resolver por iteración. Sea ψ_n el término n-ésimo. Si se usa la relación integral⁶

$$J_\lambda(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\lambda}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 ds e^{izs} (1-s^2)^{\lambda-1/2} \quad (18)$$

y se introduce la forma (13) para el potencial, se obtiene

$$\int_0^\infty dr r V J_\lambda \psi_n = C \frac{t_0}{s_0} \int_{st\mu}^{(h)} k^{2\lambda} \int_0^\infty dr r^{n+2\lambda} \frac{e^{-r(\bar{\mu}+is\bar{t})}}{r^{2(\frac{1}{2}+\lambda)}} \quad (19)$$

Donde $\int_{st\mu}^{(h)}$ representa integrales sobre las variables s, t, μ . $\bar{\mu}$ es la suma de los μ y \bar{st} es una combinación bilineal de las variables s y t . La integral sobre r que aparece en el segundo miembro de (19) no es más que la transformada de Laplace de una potencia, y su valor es

$$(\bar{\mu} + is\bar{t})^{-\lambda-n-2\lambda} \Gamma(n+2\lambda+1)$$

Como cada integración en s da un factor $|\lambda|^{-1/2}$, resulta que la integral en el miembro izquierdo de (19) es proporcional a

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \log |\lambda| - n \log n + \left(\frac{1}{2} + n + 2\lambda\right) \log |2 + n\lambda|\right) \quad (20)$$

Luego cada término tiende uniformemente a cero y se tiene lo que buscábamos :

$$f_- (\lambda, k) \xrightarrow{J_n \lambda \rightarrow \infty} 1$$

Esto, para potenciales de tipo Yukawa. Hay que notar que la fórmula (18) es válida sólo para $|\operatorname{Re} \lambda| < \frac{1}{2}$ ⁶. Esto no es grave pues para $|\operatorname{Re} \lambda| > \frac{1}{2}$ se puede usar fórmulas de recurrencia para J_λ y prolongación analítica. En todo caso, interesa principalmente el caso $\operatorname{Re} \lambda = 0$

Vemos pues que el Paso crucial está en (19), que es donde se hace uso explícito del hecho de ser el potencial de tipo Yukawa. Es una suerte para la demostración de este caso que la integral en el segundo miembro se pueda evaluar explícitamente. Para potenciales de alcance finito no parece ser posible evaluar tal integral incluso en el caso de un potencial de pozo cuadrado.

IV Los Trabajos de Barut-Calogero y Bollini-Giambiagi

Barut y Calogero⁷ estudiaron explícitamente el caso de potenciales que más allá de cierta distancia r_0 son nulos, o bien tienen un comportamiento como $1/r^2$. El segundo caso se obtiene casi de regalo a partir del primero pues el término $1/r^2$ se puede absorber en el término centrífugo de la ecuación de Schrödinger. Mostraron, bajo suposiciones muy generales acerca de la derivada logarítmica de la función de onda en $r = r_0$ que la matriz S tiende a una constante cuando $\text{Im } \lambda \rightarrow +\infty$ con $\text{Re } \lambda$ fijo y que diverge cuando $\text{Im } \lambda \rightarrow -\infty$. Para esta clase de potenciales se puede efectuar entonces la transformada de Sommerfeld-Watson en un camino tan cercano como se quiera al eje imaginario, pero no sobre este (ver figura 5).

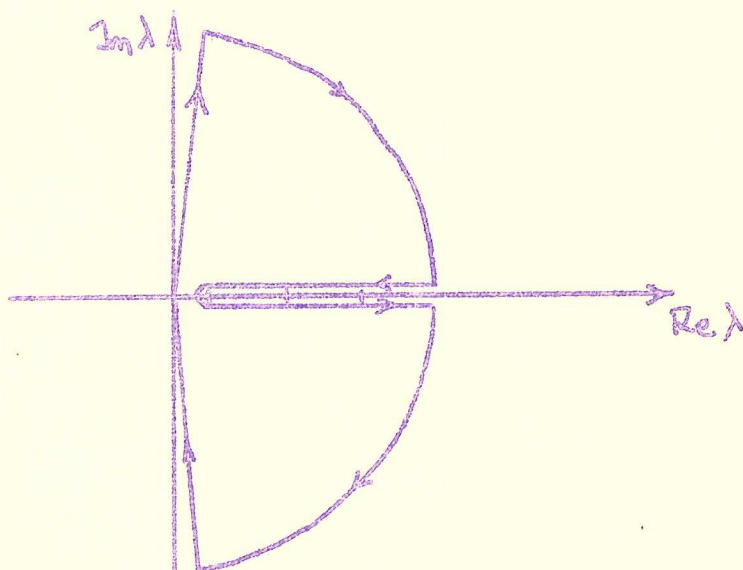


figura 5

Para el caso particular de un pozo cuadrado:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > r_0 \\ -V & r \leq r_0 \end{cases}$$

tanto Barut y Calogero como Bollini y Giambiagi⁸ obtuvieron que los polos de la matriz S a energía nula ($k = 0$) están dados por la solución de las ecuaciones

$$J_\lambda(\sqrt{V}) = 0 \quad \text{Re } \lambda > -1$$

$$J_{\lambda+2}(\sqrt{V}) = 0 \quad \text{Re } \lambda < -1$$

Bollini y Giambiagi recuerdan que el número de ceros de $J_\lambda(\gamma_0)$ que están a la derecha de cierto valor fijo $\lambda > 0$, $\gamma_0 > 0$

es igual al número de ceros positivos (los ceros en λ de $J_\lambda(y)$ son reales) de $J_{\lambda_0}(y)$ como función de y para $y < \gamma_0$.

Tenemos entonces que el número de ceros de la matriz S para $\text{Re } \lambda > -1$ está dado por el número de ceros de $J_\lambda(\sqrt{V})$. Como para $-1 < \text{Re } \lambda \leq 1$ hay siempre un único cero, el número mencionado es uno más que el número de ceros de $J_\lambda(\sqrt{V})$ para $\lambda > 1$. Este último número es el número de lugares nulos de $J_\lambda(y)$ para $0 < y < \sqrt{V}$. Venos pues que para energía nula el número de polos de S para $\text{Re } \lambda > 0$ es finito y depende de la profundidad del pozo. Esta conclusión sigue válida para $k \neq 0$. En efecto, el único modo de que esto ^{no} sucediera sería que hubiera un número infinito de polos a lo largo de $\text{Re } \lambda = -1$, para $k = 0$. Esto no puede ser, pues como ya dijimos, S tiende a una constante cuando $\text{Im } \lambda \rightarrow +\infty$ con $\text{Re } \lambda$ fijo. Además los polos no pueden acumularse a distancia finita so pena de contradecir la analiticidad de S .

V La diferencia entre los potenciales tipo Yukawa y los de alcance finito.

Posible Aplicación de un Método diseñado por Martin.

Es un hecho curioso que la transformación de Sommerfeld-Watson funcione bien para potenciales de tipo Yukawa y no resulte para potenciales de alcance finito. Aunque fuera sólo por razones sentimentales, uno quisiera no tener que botar a la basura al potencial de pozo cuadrado, que tantos servicios ha prestado en física. Interesa ver que diferencia entre ambos tipos de potencial hace que se produzca esta situación.

Un potencial de alcance finito, como ya dijimos, no puede ser continuado analíticamente al plano complejo. Por otro lado, y relacionado con esto está el hecho que los potenciales tipo Yukawa son, matemáticamente hablando, transformadas de Laplace. Sería interesante usar explícitamente este hecho para ver porqué estos potenciales son privilegiados, desde el punto de vista de la transformada de Sommerfeld-Watson.

Martin⁹ ha diseñado un método para estudiar las propiedades de la solución de Jost de la ecuación de Schrödinger como función de la energía que hace uso explícito del hecho de ser los potenciales tipo Yukawa transformadas de Laplace. Usando el teorema de Faltung (la transformada de Laplace del producto de convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de cada una de las funciones) se obtiene la siguiente ecuación (fórmula 6,24 de la referencia 9):

$$y(k, u) = P_l \left(1 + \frac{u}{ik} \right) - \frac{i}{k} \int_0^u \left\{ P_l \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right) Q_l \left(1 + \frac{\beta}{ik} \right) - P_l \left(1 + \frac{\beta}{ik} \right) Q_l \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right) \right\} \frac{dX(k, \beta)}{d\beta} d\beta \quad (21)$$

donde

$$Y_l(k, u) = 1 + \int_0^u f_l(k, \beta) d\beta$$

$$g_l(k, x) = 1 + \int_x^\infty f_l(k, \alpha) e^{-\alpha x} d\alpha$$

$$f(l, k, x) = e^{-ikx} g_l(k, x)$$

f es la solución de Jost

En la expresión (21) se puede hacer $l \rightarrow \lambda \in \mathbb{C}$ como de costumbre, y estudiar de esta manera las propiedades analíticas de la solución de Jost, y luego de la matriz S como función de λ . Para empezar, habría que ver las propiedades conocidas de ser f par y entera en λ . Desgraciadamente la ecuación (21) es demasiado complicada para admitir un tratamiento de este tipo.

UNIVERSIDAD DE CHILE
SEDE SANTIAGO ORIENTE
BIBLIOTECA CENTRAL

VI Ideas Finales

Hemos visto que potenciales de pozo cuadrado dan un número finito de polos de la matriz S en el eje real positivo de λ . La transformación de Sommerfeld-Watson no es realizable para potenciales de alcance finito sobre el eje imaginario, sino sólo sobre un camino que se acerca a este, con lo cual no se obtiene nada útil. El trabajo de Regge, aunque muy importante como primer paso, no demuestra las propiedades de la matriz S que aseguran la validez de Sommerfeld-Watson.

La pregunta que queda sin contestar es la siguiente:

¿Que característica física hace que los potenciales de alcance finito no sean tan "buenos" como los de tipo Yukawa? Porque la no analiticidad es una propiedad puramente matemática, poco satisfactoria desde el punto de vista intuitivo.

REFERENCIAS

- 1.- Bateman Manuscript Project, "Higher Transcendental Functions" (A. Erdelyi, editor), Mc Graw-Hill, New York, 1953.
- 2.- R.G. Newton, "The Complex j -Plane", Benjamin, New York, 1964
- 3.- G. Chew, "S-Matrix Theory of Strong Interactions", Benjamin, New York, 1961.
- 4.- J. M. Charap y S. Fubini, Nuovo Cim. 14, 540 (1959)
- 5.- T. Regge, Nuovo Cim. 14, 951 (1959)
- 6.- E.T. Whittaker y G.N. Watson "Modern Analysis", Cambridge University Press, New York, 1948.
- 7.- A. Barut y F. Calogero, Phys. Rev. 128, 1383 (1962)
- 8.- C.G. Bollini y J.J. Giambiagi, Nuovo Cim. 28, 341 (1963)
- 9.- V. de Alfaro y T. Regge, "Potential Scattering", North Holland, Amsterdam, 1965.

UNIV. DE CHILE
SEDE SANTIAGO ORIENTE
BIBLIOTECA CENTRAL