FACULTAD DE
FILOSOFÍA Y
HUMANIDADES
UNIVERSIDAD DE CHILE

# La abducción como inferencia lógica: el caso de la creatividad matemática

Ariel Enrique Toledo Soto

Tesis para optar al grado de Licenciado en Filosofía
Universidad de Chile

Profesor guía:
Dr. Cristián Soto Herrera

2023

# Índice general

*“No hay duda de la importancia de este problema. Según Kant la pregunta central de la filosofía es “¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori?”. Pero antes de esta viene la pregunta de cómo son posibles los juicios sintéticos en general, y más generalmente, cómo es posible en absoluto el razonamiento sintético. Cuando la respuesta al problema general se haya obtenido, la respuesta particular será comparativamente más simple. Este es el seguro sobre la puerta de la filosofía.”*

**Charles S. Peirce (CP 5.348)**

# Agradecimientos

A mi familia, sin ellos nada de esto sería posible.

Agradezco a ANID por el financiamiento mediante el proyecto FONDECYT Regular 1210570, The effectiveness of mathematics: the case of physical laws, a cargo del Dr. Cristián Soto.

Quisiera agradecer a Cristián, por la paciencia y el apoyo en este camino. Porque desde un comienzo le interesó la idea de ser mi tutor.

Agradezco a Alejandro Ramírez, sin su curso sobre *Peirce y la lógica abductiva* quizá me hubiese demorado más tiempo en encontrar la maravillosa obra de Peirce.

Agradezco a todas las personas que hicieron posible las IX Jornadas Pierce en Argentina, espacio que me permitió realizar una exposición sobre parte de esta investigación.

También quisiera agradecer a Juan Redmond, por su disposición a leer una primeriza versión del manuscrito y realizar comentarios que siempre fueron provechosos.

Quisiera agradecer a todos los buenos docentes que desde pequeño tuve la fortuna de encontrar, quienes fueron pieza clave al estimular mi creatividad y mis deseos de entender (aunque sea de forma parcial) la realidad que me rodea. En particular a aquellos que conocí en la Facultad de Ciencias. Gracias Anita, Jorge y Gonzalo, por los teoremas aprendidos y por enseñarme que las matemáticas no sólo son verdades necesarias, también son registros de creatividad de aquellos que hicieron suyo los problemas de la disciplina.

Por último, quiero agradecer a todas las pensadoras y pensadores que antes de mí hicieron de la abducción un objeto de estudios. Sin ellos, esta investigación carecería de contenido.

# Resumen

Esta tesis explora el papel de la abducción como una herramienta fundamental en la creatividad matemática. Desde la introducción de la hipótesis central que destaca el papel crucial de la abducción en el proceso creativo hasta la aplicación práctica de este fenómeno en problemas geométricos específicos. Inmersos en la filosofía de Charles Sanders Peirce, analizamos las cinco etapas de la abducción y exploramos varios tipos de inferencias, estableciendo un marco conceptual sólido.

Esta investigación demuestra que la formalización de la abducción proporciona herramientas para abordar problemas abductivos en geometría, especialmente aquellos que siguen la forma del problema de suficiencia fuerte de datos. También destaca la intersección de la filosofía, la lógica y la creatividad matemática como un área fructífera para futuras investigaciones, con el objetivo de inspirar y motivar investigaciones adicionales en esta fascinante convergencia de disciplinas.

# Capítulo 1

# Introducción

Este trabajo tiene como objetivo mostrar que una *lógica abductiva* puede ser aplicable a campos semánticos como el de la geometría euclidiana de dos dimensiones. Esta aplicación serviría para representar razonamientos creativos en el contexto de descubrimiento de hipótesis necesarias para resolver un problema. De esta forma, podríamos demostrar de forma *post hoc* un razonamiento de descubrimiento de enunciados necesarios para resolver un problema abductivo en geometría.

## 1.1. Hipótesis de este trabajo

El camino hacia este objetivo se inicia con la exploración de las contribuciones de Charles S. Peirce a la abducción, fruto de un extenso estudio sistemático que abarca décadas. La exposición de las ideas de Peirce [1] constituye un paso inicial crucial antes de sumergirnos en la elección y justificación de un modelo lógico específico. Este modelo debe capturar los elementos esenciales de la abducción y enfocarse en un algoritmo de cálculo abductivo basado en herramientas deductivas.

Habiendo explorado los fundamentos del pensamiento de Peirce en relación con la

[1] Quisiera mencionar que en general todas las traducciones de citas han sido realizadas por mí, a excepción de la cita del epígrafe del presente texto. La traducción del epígrafe está tomada de Niño (2007), también se tiene en cuenta las traducciones relizadas en aquel trabajo para realizar las traducciones para la presente investigación.

abducción, es esencial ahora presentar y respaldar la elección de un *modelo* que no solo capture los aspectos fundamentales de la abducción, sino que también se enfoque en la formulación de un algoritmo de cálculo abductivo apoyado en herramientas deductivas.[2] Este enfoque estratégico se justifica por la naturaleza rigurosa y formal de la geometría euclidiana bidimensional, donde los enunciados particulares desempeñan un papel crucial al representar verdades deductivas esenciales en nuestro análisis.

Por otra parte, es necesario exponer brevemente qué consideramos como un proceso creativo en matemáticas. Para ello será prudente revisar qué han descrito quienes principalmente se dedican a las matemáticas y pensadores que se han dedicado a exponer aspectos del razonamiento creativo en matemáticas, ya sea con respecto al momento de descubrimiento, el proceso de generación de hipótesis, el proceso de selección de hipótesis y el testeo de dichas hipótesis. En este sentido, también será adecuado esquematizar de qué forma se realizan las demostraciones matemáticas.

Luego, presentaremos un problema abductivo en geometría. Un problema que no es posible su solución de manera deductiva, pero que, añadiendo una hipótesis a este problema: este problema se vuelve resoluble deductivamente.

Para concluir este trabajo, se expondrá una apreciación de los resultados obtenidos durante esta investigación.

## 1.2. Estructura de la tesis

En lo que respecta a la estructura de esta tesis, la misma se divide en seis capítulos. El presente capítulo proporciona una introducción general al propósito central de la tesis y a su estructura. Cabe destacar que cada capítulo posterior, a excepción de

[2]Es imperativo destacar la trascendencia del supuesto subyacente, según el cual un cálculo deductivo, tal como se utiliza en las tablas semánticas o se aborda en la sección 5.3, se fundamenta en la generación y selección de hipótesis. En el marco semántico de la geometría, donde los enunciados específicos encapsulan las características de los objetos geométricos asumidos, estos enunciados adquieren el estatus de verdades deductivamente necesarias. Este principio se revela como fundamental, dado que en el contexto analizado, la naturaleza precisa y rigurosa de la geometría exige que dichos enunciados desempeñen un papel esencial como afirmaciones lógicamente ineludibles.

la conclusión, cuenta con su propia introducción[3]. La inclusión de una introducción para cada capítulo busca proporcionar al lector una visión panorámica de la discusión contenida en cada sección, así como situar cada capítulo dentro del eje argumental central de la tesis.

El segundo capítulo está enfocado a rastrear los antecedentes de la abducción, centrándose en los resultados de la investigación de Peirce. También se tendrán en cuenta algunas interpretaciones del proyecto peirceano, teniendo a la vista la relevancia que dichos aportes tiene relación con este modesto, pero ambicioso proyecto.

El tercer capítulo se hace cargo de la elección y justificación del modelo lógico que será considerado como la *lógica abductiva* que se tiene que tener en cuenta en un contexto semántico como el de la geometría euclidiana. Esto se debe principalmente a su relación con el cálculo deductivo que proporcionan los árboles semánticos y la necesidad de los enunciados de la geometría euclidiana.

El cuarto capítulo se centra en revisar la vinculación que hay entre la creatividad matemática y los principales métodos de demostración de teoremas. Para esquematizar dicho vínculo entre la creatividad y los métodos de demostración, nos centraremos en tres tipos de demostración que son cruciales para representar un proceso de generación de hipótesis a la hora de demostrar un teorema.[4]

El quinto capítulo es en donde se afronta la tarea central de esta investigación: presentar cómo podemos entender la aplicación de la *lógica abductiva* para dar cuenta de un proceso creativo en geometría euclidiana. Para esto, se define lo que es un problema de suficiencia de datos fuerte, defendiendo la postura de que se trata de un problema de tipo abductivo. De esta forma, aplicando las definiciones y conceptos de los capítulos anteriores podemos resolver dicho problema de tipo abductivo, el problema de suficiencia de datos fuerte.

[3]Con la intención de facilitar una comprensión más profunda del Capítulo 5, se ha diseñado con dos introducciones distintas: la primera aborda el capítulo en su totalidad, mientras que la segunda se centra específicamente en la sección encargada de demostrar la aplicación del modelo a un ejemplo geométrico. Esta estructura se implementa con el propósito de fortalecer la presentación y comprensión de la tesis central de este trabajo.

[4]Cabe mencionar que la demostración por inducción no será tratada o expuesta.

El sexto capítulo, es una recopilación de los resultados obtenidos. También se pretende realizar una exposición de las posibles críticas a la metodología y a los objetivos de este trabajo. También se espera poder reflexionar sobre la importancia de explorar el uso de los distintos tipos de lógicas abductivas o modelos abductivos propuestos, cada uno en diferentes e iguales campos semánticos.

Este estudio no solo se limita a explorar la aplicabilidad de la lógica abductiva en el contexto de la geometría euclidiana bidimensional, sino que también busca defender una acotación conceptual de la abducción peirceana al período del uso del término retroducción dentro de los texto de Peirce, en contextos semánticos específicos como es el caso de la geometría. A medida que nos sumergimos en las contribuciones filosóficas de Peirce y delineamos un modelo lógico específico, este trabajo se erige como una empresa ambiciosa que no solo rastrea el desarrollo histórico de la abducción, sino que también propone nuevas vías para comprender y aplicar este razonamiento en el campo de la geometría. La singularidad de esta investigación radica en su capacidad para amalgamar la riqueza conceptual de la abducción con la complejidad inherente de los problemas geométricos, destacando así su contribución original al pensamiento lógico y matemático contemporáneo.

En definitiva, este trabajo tiene dos objetivos intrínsecamente relacionados: por una parte, este proyecto pretende dar cuenta de la importancia e influencia del pensamiento de Peirce en los desarrollos de la *lógica abductiva*; por otra parte, este trabajo busca aportar una forma de comprender la abducción, y la lógica abductiva como una herramienta de representación de un razonamiento de descubrimiento.[5] De esta manera, este trabajo comienza con la intención de plantear un introducción filosófica a la abducción, para finalizar presentando un ejemplo en el cual podemos representar un razonamiento abductivo en geometría mediante las definiciones presentadas.

[5]Es importante recalcar que no se considera la *lógica abductiva* como una lógica del descubrimiento. Por esto es importante la palabra ‘representación’, es decir, para efectos de este trabajo la abducción como retroducción nos permite representar el proceso de generación y selección de hipótesis.

# Capítulo 2

# Peirce y las motivaciones filosóficas de la presente investigación

Este capítulo sumerge al lector en los antecedentes históricos que delinean la abducción como una inferencia lógica, centrándose en el extenso trabajo del filósofo estadounidense Peirce. Peirce no sólo introduce el concepto de abducción en los debates filosóficos de las ciencias, sino que también proporciona una descripción detallada de lo que él considera una inferencia de tipo abductiva.

## 2.1. Introducción

En esta sección, se destaca la relevancia filosófica del trabajo y su vinculación con los problemas contemporáneos de la epistemología, elementos esenciales para comprender el alcance de la investigación. Peirce, filósofo influyente de finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, es conocido por sus contribuciones en áreas cruciales de la filosofía: semiótica, pragmatismo y lógica. Estas disciplinas, interconectadas de manera intrincada, proporcionan el contexto conceptual necesario para comprender los tipos de inferencia abordados en este trabajo.

Para apreciar plenamente la contribución de Peirce, es fundamental contextualizar cada área de su trabajo. La semiótica, que explora la interpretación de signos y símbolos, establece los fundamentos de la ciencia de los signos y símbolos, directamente relacionada con la inferencia abductiva. Implica la capacidad de atribuir significado a signos y símbolos mediante la inferencia retroductiva. El trabajo de Peirce sienta las bases para el estudio de la comunicación y la interpretación de símbolos en disciplinas como la lingüística y la comunicación visual. El pragmatismo, uno de los fundamentos de Peirce, filosofía centrada en la práctica y utilidad como criterios de evaluación de la verdad y el significado, se relaciona con la inferencia inductiva al abogar por la observación y la experiencia como base para llegar a conclusiones. Es relevante destacar que el pragmatismo influye en los tres tipos de inferencias. Este es un tema de estudio clave para Peirce, subrayando su postura de que el pragmatismo, en sí mismo abducción, permite la *reductio ad absurdum*.[1]

La influencia pragmática de Peirce perdura en la filosofía, la psicología y en las ciencias sociales. La lógica, otro pilar de las contribuciones de Peirce, es especialmente relevante para la inferencia deductiva, ya que desarrolla sistemas lógicos y notaciones que formalizan el razonamiento deductivo. Las ideas innovadoras de Peirce sobre la lógica de la investigación científica influyen en el desarrollo de la lógica simbólica y la filosofía de la ciencia. El legado filosófico de Peirce abarca áreas de la filosofía directamente relacionadas con los tipos de inferencia que se explorarán. Su pensamiento influye en diversas disciplinas y continúa siendo objeto de estudio y debate en la filosofía contemporánea. Así, la abducción emerge como un componente primordial, co-

[1] Así, Peirce en sus Lecciones sobre el Pragmatismo escribe:

"Por tanto, la máxima del pragmatismo, si es verdadera, abarca por completo toda la lógica de la abducción. Queda por indagar si esta máxima tiene algún efecto lógico adicional. Si es así, ha de afectar de alguna manera a la inferencia inductiva o deductiva. Pero es evidente que el pragmatismo no puede interferir en la inducción, porque la inducción simplemente nos enseña qué es lo que tenemos que esperar como resultado de la experimentación, y está claro que cualquier expectativa tal puede concebiblemente concernir a la conducta práctica. En cierto sentido, tiene que afectar a la deducción. Cualquier cosa que dé una regla a la abducción y ponga de esa manera un límite a las hipótesis admisibles reducirá las premisas de la deducción, y de esa manera posibilitará una *reductio ad absurdum* y otras posibles formas equivalentes de deducción que de otra manera no hubieran sido posibles. " (CP 5.196)

Cabe mencionar que en este período y texto en particular, Peirce reniega la vinculación entre inducción y pragmatismo, cosa que será diferente en otras ocasiones.

nectada tanto a la ampliación del conocimiento de un fenómeno como a la explicación de razonamientos en el progreso científico, facilitando la generación de nuevas hipótesis.

## 2.2. El fenómeno abductivo

Una de las características claves de la abducción tal como la presenta Peirce, es su capacidad explicativa frente a hechos sorprendentes.[2] En este sentido, el fenómeno abductivo se manifiesta cognitivamente en un individuo que, al establecer una relación de semejanza entre el hecho sorprendente y casos previos, es capaz de ofrecer y seleccionar una explicación que no estaba presente en su conocimiento inicial.

En términos sencillos, el fenómeno abductivo surge cuando un individuo se encuentra con un hecho sorprendente del cual carece de explicación y se propone responder a este enigma.[3] Se observa cómo el individuo, ante la novedad, relaciona el hecho sorprendente con casos similares de su experiencia previa, dando como resultado una hipótesis destinada a explicar el fenómeno desconcertante.

Esto se ve claramente en la formulación desarrollada por el autor:

> "Se observa el hecho sorprendente, C;
>
> Pero si A fuese verdadero, C sería algo corriente.[4]
>
> Por lo tanto, hay razón para sospechar que A es verdadero." (CP 5.189)

Esta es la estructura fundamental de la abducción de Peirce[5], a la que nos referiremos en adelante como el esquema abductivo de Peirce. Cabe mencionar que el esquema nos

---

[2]Es importante mencionar que esto es un rasgo principal de la abducción como cambio epistémico Aliseda (2006), y una lectura periceana a la abducción como una superación de la *condición de ignorancia*. Que por el contrario , dicha condición sí estará presente en el modelo GW como una característica principal en dicha propuesta (Woods, 2007, p. 307).

[3]Es importante recalcar, que el fenómeno abductivo corresponde a la inferencia realizada, más no a el hecho sorprendente.

[4]Agradezco al profesor Jaime Nubiola por su valiosa contribución en la sugerencia sobre cómo traducir la frase "matter of course"de manera precisa y contextual.

[5]También se le conoce como el Enunciado Canónico de la Abducción. Este es sin dudas el pasaje más citado de Peirce con respecto a la abducción, estando presente en la mayoría de los estudiosos de Peirce.

proporciona una estructura basada en una ontología de hechos, lo que expresa de mejor manera que nos encontramos frente a una situación de percepción de un fenómeno por parte de un sujeto.

La siguiente pregunta natural es: si el fenómeno abductivo conduce a la conclusión de una hipótesis, ¿qué tipo de inferencia representa este proceso, al cual denominamos fenómeno abductivo? Según Peirce, la inferencia correspondiente al fenómeno abductivo es la inferencia abductiva.[6] Exploraremos esta inferencia y su relación con las clásicas deducción e inducción en las secciones siguientes.

## 2.3. Tipos de inferencias

La clasificación de los tipos de inferencias de acuerdo a Peirce consta de la analítica (deductiva) y sintética (inducción e hipótesis -abducción-).

Por una parte, la deducción es identificada por excelencia con la argumentación matemática, pues consiste en obtener una conclusión al evaluar un caso particular en una regla general. Por su lado, la inducción se puede encontrar plenamente en la argumentación de las ciencias fácticas, en donde las leyes generales se comprueban de manera inductiva, de esta forma: de un resultado se infiere una regla general. Para finalizar, la abducción consiste en que teniendo una regla y un resultado (anomalía) se infiere un caso (hipótesis).

La inferencia es un proceso fundamental en la toma de decisiones y en la adquisición de conocimiento en el ser humano. Se refiere a la capacidad de obtener conclusiones a partir de premisas o expresar enunciados a partir de la información disponible. Entre los diferentes tipos de inferencia, destacan tres enfoques principales: la inferencia deductiva, la inferencia inductiva y la inferencia abductiva. En este contexto, la inferencia abductiva se considera un tipo de inferencia retroductiva, ya que, se centra en encontrar explicaciones plausibles o hipótesis que justifiquen la información observada; en

[6] Es menester mencionar que al menos son tres los aspectos a considerar en la evolución de la abducción en Peirce: terminología, conceptos y cronología (Niño, 2007, p. 11). En 2.5 profundizaremos un poco más en este tema.

contraste, la inferencia inductiva busca generalizar patrones a partir de ejemplos; y la inferencia deductiva que se basa en reglas lógicas para llegar a conclusiones precisas y necesarias.

El lector se podrá dar cuenta que parecieran ser todos *razonamientos* en los cuales se modifica el orden de las premisas con respecto a la conclusión. Para comprender de mejor forma esto, veamos el ejemplo que Peirce nos ofrece.

“ **DEDUCCIÓN.**

***Regla.***–Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.

***Caso.***–Estos frijoles son de esta bolsa.

∴ ***Resultado.***–Estos frijoles son blancos.

**INDUCCIÓN.**

***Caso.***–Estos frijoles son de esta bolsa.

***Resultado.***–Estos frijoles son blancos.

∴ ***Regla.***–Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.

**HIPÓTESIS.**

***Regla.***–Todos los frijoles de esta bolsa son blancos.

***Resultado.***–Estos frijoles son blancos.

∴ ***Caso.***–Estos frijoles son de esta bolsa.”(CP 2.623)

Expuesto de esta forma, podemos considerar que el *valor de la inferencia* en la deducción es absoluto, puesto que todo lo que se concluye de algo verdadero, es siempre verdadero (a menos que las premisas cambien). Sin embargo, el poder de *amplitud* explicativa de la deducción es nulo. Por otra parte, el valor inferencial de la inducción es menor (sólo es válida hasta que aparezca un caso que contradiga la regla), pero su valor ampliativo es mayor que el de la deducción. El valor de la inferencia (en sentido clásico) en la abducción es nulo. Por ejemplo, su forma de silogismo es en lógica clásica una falacia. Pero para nuestra sorpresa, la capacidad de ampliación de conocimiento de esta inferencia es mayor que en la inducción, por ende mucho mayor que en la deducción. En palabras de Peirce:

> "La Abducción es el proceso de formar una hipótesis explicativa. Es la única operación lógica que introduce alguna idea nueva, pues la inducción no hace más que determinar un valor y la deducción meramente desenvuelve las consecuencias necesarias de una hipótesis pura.
> La Deducción demuestra que algo debe ser, la Inducción muestra que algo es realmente operativo y la Abducción meramente sugiere que algo puede ser.
> La única justificación de esta es que, a partir de su sugerencia, la deducción puede hacer una predicción que puede ponerse a prueba mediante la inducción, y que si alguna vez hemos de aprender algo o entender los fenómenos en absoluto, ha de ser mediante la abducción."(CP 5.171)

El autor caracteriza a la abducción como el único razonamiento que incorpora nuevas ideas. Esto, en contraste con sus pares -la inducción y la deducción-. De esta forma, lo que la deducción tiene de seguridad lo pierde en amplitud; a su inversa, la abducción pierde seguridad pero gana en ampliación. Incluso esta característica permea lo que Peirce considera como la labor del lógico:

> "Pienso que los lógicos deberían tener dos metas principales: primera, determinar la cantidad y tipo de seguridad (aproximación a la certeza) de cada clase de razonamiento, y segunda, determinar la fecundidad o valor en productividad, de cada clase que sea posible y pueda esperarse."(CP 8.384)

Expuesto de esta manera, podemos notar que hay una relación de compatibilidad y complementación de los distintos tipos de inferencia. Así, no deberíamos entender las distintas inferencias separadas entre sí, sino más bien relacionadas entre ellas. Pues un razonamiento puede contener distintas inferencias que lo constituyen, incluso un argumento se puede construir en base a distintos tipos de inferencias.

Este último punto lo encuentro interesante. Para el propio Peirce era objeto de estudio comprender de qué manera se relacionaban los tipos de inferencia en la investigación científica. Por espacio no corresponde profundizar en aquello acá, sin embargo quisiera presentar el siguiente diagrama para que se entienda la propuesta de Peirce al respecto:

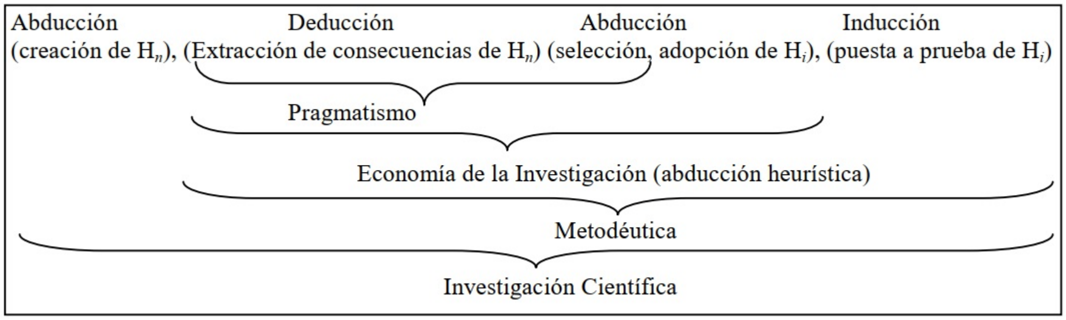


Figura 2.1: Diagrama sobre la relación entre los tipos de inferencia y la Investigación Científica. (Niño, 2007, p. 299)

## 2.4. La estructura de la abducción según Kapitan

Tomis Kapitan destaca cuatro tesis fundamentales que estructuran la abducción, tal como la concibe Peirce (Kaptian, 1998). Estas tesis proporcionan un marco conceptual esencial para entender la abducción como un proceso inferencial y explorar su relevancia en el contexto de la geometría euclidiana bidimensional.

- Tesis Inferencial: Kapitan establece que la abducción es inherentemente un proceso inferencial (CP 5.188-189, 7.202). La abducción, al igual que la deducción e inducción, sigue una estructura lógica para llegar a conclusiones. En nuestro contexto, esta tesis destaca cómo la abducción puede ser un instrumento valioso para generar razonamientos creativos y descubrir hipótesis cruciales en la geometría euclidiana bidimensional.

- Tesis de Objetivo: La abducción tiene un doble objetivo: la generación de nuevas hipótesis y la selección de las mejores para un análisis posterior (CP 6.525). Esto es de particular importancia en nuestra investigación, ya que buscamos representar razonamientos creativos para descubrir hipótesis cruciales en la resolución de problemas geométricos.

- Tesis de Comprensión: Kapitan propone que la abducción científica abarca todas las operaciones que conducen a la generación de teorías (CP 5.590). En el ámbito de la geometría euclidiana bidimensional, esta perspectiva resalta la amplitud de la abducción al incluir diversas operaciones cognitivas que contribuyen al desarrollo teórico.

- Tesis de Autonomía: La abducción es un razonamiento diferente e irreducible tanto a la deducción como a la inducción (CP 5.146). Aunque comparte similitudes con otros tipos de razonamiento, la abducción posee una autonomía lógica que, aunque debilitada en ciertos contextos, sigue siendo vital para comprender los razonamientos creativos en geometría euclidiana bidimensional.

Respecto a la tesis inferencial, es notoria la aceptación que ha tenido la abducción como una inferencia en la comunidad de expertos. Convirtiéndose en un inferencia de pleno derecho, a pesar de Peirce a lo largo de su obra es bastante laxo en cuanto a la vinculación entre abducción-deducción, o bien abducción-inducción. Pero no laxo en un sentido de ambiguedad, si no más bien que por ejemplo: conceptualmente hay diferencias entre la abducción como retroducción, y la abducción como una inducción de caracteres. Y en cuanto a esta relación, una de las razones claves por la que Niño(2000) separa las etapas de la abducción en Peirce, ya que, pareciera que el mismo Peirce mezcla en distintas etapas, distintos aspectos de la inferencia abductiva con las otras dos inferencias. Incluso para él es importante como se relacionan estas tres tipos de inferencias en la Investigación.

En relación a la cuarta tesis, la tesis de autonomía, senos presentan dificultades y quizá la critica más importante a este proyecto. Ya que, se puede objetar que nuestro marco teórico se basa en una lectura de la abducción, que considera una relación estrecha entre abducción y deducción. Esto último es cierto, se considera que existe una relación dual entre la abducción y la deducción, consideración que el propio Peirce tiene en cuenta, las hipótesis generadas deben ser testeadas. Y en el marco de enunciados formales, este testeo es deductivo.[7]

Hemos presentado las tesis de Kaptian, pues la idea en este trabajo, es que la abducción puede ser entendida como un fenómeno cognitivo, que puede ser descrito mediante

[7]Este es un punto crucial, ya que, permite la correspondencia entre la forma canónica de la abducción y la forma problema-solución (véase la sección de este trabajo

modelos lógicos que tienen en consideración las tesis presentadas por el autor. Lo importante radica en la fuerza con la que se toman estos enunciados. Pues como veremos, para ciertos contextos nos sería conveniente contar con un modelo lógico que atenúe la cuarta tesis, pero que en "cierta medida" gane poder explicativo en comparación a no tener un modelo con el cual explicar la incorporación de premisas.

## 2.5. Las cinco etapas de la abducción en el pensamiento de Peirce

Douglas Niño propone cinco períodos que trazan la evolución del pensamiento de Peirce acerca de la abducción. Estos períodos son de especial relevancia para nuestra investigación, la cual tiene como objetivo destacar la aplicabilidad de la abducción en el contexto de la geometría euclidiana bidimensional. A continuación haremos una breve demarcación para que el lector tenga en consideración que el estudio de la abducción tomó gran parte de la vida de Peirce y que la división en etapas hace referencia a diferencias terminológica, conceptuales y cronológicas del autor.

- Primer Período (1864-1881): Durante esta fase, Peirce desarrolla la abducción como el proceso de generación de hipótesis.

- Segundo Período (1881-1897): La conceptualización de la hipótesis como una inducción de caracteres es fundamental en esta etapa. En esta etapa Peirce explora las relaciones entre Hipótesis e Inducción. Considerando el estrecho vínculo entre abducción y semiótica.

- Tercer Período (1898): La aparición de la retroducción en esta etapa agrega complejidad al proceso abductivo. Explorar esta fase puede ofrecer perspectivas enriquecedoras sobre cómo la abducción, especialmente la retroducción, puede abordar problemas geométricos específicos.

- Cuarto Período (1900-1906): La aceptación de la CMA y la traducción tradicional de "apagoge" marca un hito en la evolución del pensamiento de Peirce sobre la abducción.

- Quinto Período (1906-1914): En esta fase, Peirce abandona la CMA y la retroducción reaparece como parte central de la abducción. Esta etapa es crucial para nuestra investigación, ya que adoptamos una concepción de la abducción como retroducción, debilitando la autonomía lógica y explorando su integración en la *lógica abductiva*.

De esta manera, podemos considerar que las distintas etapas de la abducción en Peirce no son distintas únicamente en terminología, estos cambios van acompañado de consideraciones conceptuales. Se han delineado las cinco etapas que se observan en el trabajo de Peirce con la intención de acotar las consideraciones conceptuales respecto a la abducción que nos parecen son relevantes a la hora de esquematizar formalmente razonamientos creativos en matemáticas, en particular en geometría.

En conjunto, tanto la estructura de la abducción según Kapitan como las etapas propuestas por Douglas Niño son fundamentales para enmarcar y contextualizar la aplicación de la abducción en el ámbito específico de la geometría euclidiana bidimensional. Para este trabajo, nos enfocaremos en la abducción como retroducción, considerando que esta etapa y conceptualización sobre la abducción son las que mejor se adecúan a la necesidad y consistencia de los enunciados de la geometría euclidiana bidimensional.

## 2.6. Enfoque de la abducción como retroducción en la geometría euclidiana bidimensional

Dentro del marco de nuestra investigación, se defiende la perspectiva de identificar la abducción en el quinto período según Douglas Niño, destacando especialmente la aparición de la retroducción en la obra de Peirce. Esta identificación se apoya en nuestra concepción específica de la abducción como retroducción, una característica crucial para abordar problemas geométricos en la geometría euclidiana bidimensional.

Contrariamente a la tesis de autonomía propuesta por Kapitan, que argumenta que la abducción es un razonamiento diferente e irreducible a la deducción e inducción, nuestra investigación adopta una postura que debilita esta autonomía en favor de una integración más estrecha con la retroducción. En el quinto período, Peirce abandona ciertos elementos de la abducción tradicional, y la retroducción emerge como parte esencial del proceso abductivo. Esta integración sugiere una interconexión más profunda entre la abducción y otros tipos de razonamiento.

Este enfoque específico es crucial para nuestra investigación centrada en la aplicabilidad de la *lógica abductiva* en problemas geométricos. Al considerar la abducción como retroducción, buscamos entender cómo este tipo de razonamiento puede ser instrumental en el descubrimiento de hipótesis cruciales para la resolución de problemas en la geometría euclidiana bidimensional. La integración de la retroducción en el proceso abductivo puede ofrecer una perspectiva más precisa y efectiva para abordar problemas geométricos específicos.

Al identificar la abducción en el quinto período de Peirce y al adoptar una concepción de la abducción como retroducción, nuestro trabajo busca desafiar la tesis de autonomía propuesta por Kapitan. Este enfoque no sólo contextualiza la abducción en el desarrollo del pensamiento de Peirce, sino que también ofrece una base teórica sólida para explorar razonamientos creativos en la geometría euclidiana bidimensional.

Quizá no sea claro por qué nos centramos en este aspecto conceptual de la abducción. Pero la razón radica exclusivamente en el método por excelencia utilizado en matemáticas a la hora de realizar una demostración: el método progresivo-regresivo.[8][9]

[8]Explicaremos el método progresivo-regresivo en 4.4.

[9]Para una mayor profundización entre la relación del método matemático y la abducción, se recomienda revisar Gabby y Woods (2005), Irvine (1989) y Russell (1997). Aunque este último no utiliza el termino abducción, pero si sirve como introducción a lo que él llama el método regresivo.

# Capítulo 3

# La elección del modelo AKM

Este capítulo busca justificar la elección del modelo AKM como la *forma lógica* de comprender la abducción en los términos que requiere el trabajo de esta tesis. Por la 'A' tenemos a Aliseda (2006)[1]; por la 'K' tenemos a Kowalski (1979), Kuipers (1999), Kakas et al.(1995); por la 'M' tenemos a Magnani (2001) y Meheus et al.(2002). Dicho modelo se caracteriza por entregar una descripción formal de la abducción, considerando definiciones que permiten un tratamiento formal de la forma canónica de la abducción. De esta manera, se permite la explicación de un hecho sorprendente dada una teoría base y una premisa inferida abductivamente. Es decir, la conclusión de la inferencia abductiva se corresponde con un enunciado que permite la resolución de un problema deductivo. Para realizar el objetivo del capítulo, dividiremos el contenido del mismo en cuatro secciones. La primera parte consiste en una breve introducción al capítulo. La finalidad de esta sección es contextualizar el desarrollo de los distintos modelos que buscan caracterizar formalmente lo que se considera como inferencia o proceso abductivo; la segunda parte consiste en una breve explicación del modelo AKM, haciendo una breve referencia histórica al desarrollo del mismo. También revisaremos las definiciones que propone este modelo. En particular nos interesa lograr precisar qué se entiende por

[1]Cabe destacar que este texto está principalmente motivado por Aliseda (1997)(2006) y si bien se exponen los desarrollos que la misma autora realiza en Soler et al.(2006), se considera que con los textos de la autora es posible para el lector tener una comprensión del algoritmo que se utiliza en este trabajo.

*problema abductivo* y por *solución abductiva.* También nos preocupa indagar y explicar de manera breve cómo es que dicho modelo no ha sido sistematizado por un solo autor, ni se ha mantenido -a mi juicio- invariable en el tiempo; la tercera parte se centra en la descripción del modelo GW, que en principio tiene fines muy parecidos con el primero, pero que a juicio de los propios autores se diferencia de forma sutil, pero significativamente de su contraparte; la cuarta parte, busca exponer las principales críticas que se realizan al modelo AKM. Algunas de ellas motivando el establecimiento del modelo GW, una propuesta por parte de Gabby y Woods (2005).

## 3.1. Introducción

Durante el último siglo, la abducción ha ganado un creciente interés en distintas disciplinas. Como se ha mencionado en el primer capítulo, la influencia peirceana ha sido vital para el desarrollo de las interpretaciones contemporáneas de la abducción. Sin embargo, han sido dos[2] los modelos formales que han sido postulados con la finalidad de dar una descripción de lo que Peirce consideraba como inferencia abductiva.

En la literatura contemporánea, el modelo AKM se define como un conjunto de definiciones y procedimientos formales diseñados para abordar problemas abductivos. En otras palabras, el modelo AKM se caracteriza por una serie de enunciados que representan objetos lógicos con correspondencia directa a los elementos del esquema abductivo propuesto por Peirce. Además, incluye un conjunto de operaciones que funcionan como un algoritmo para calcular uno o varios abducibles.

En este sentido la abducción puede ser descrita lógicamente por la relación:

$$\theta, \alpha \Rightarrow \varphi$$

De esta forma, $\theta$ es una *teoría de base*, $\alpha$ es el elemento *abducible* y $\varphi$ corresponde con una *observación*, un hecho sorprendente que no puede ser explicado con el conocimiento

[2]Cabe mencionar que hasta hace un tiempo se consideraba como dos los modelos que buscaban representar la abducción. Ahora se considera que son tres las propuestas que se diferencian entre sí. Para una exposición de este modelo se sugiere revisar Magnani (2023).

previo.

## 3.2. El modelo AKM

Podemos observar a simple vista en la diferencia de los años en que se publicaron las obras, que existe un desarrollo distante en tiempo entre un texto y otro. Sin embargo, este modelo no se encuentra acabado aquí, pues existen aportes recientes que vienen a complementar el modelo ya descrito, quienes han incorporado el cálculo mediante $\delta$-resolución y $C$-estructuras.[3]

### 3.2.1. El problema abductivo

Una de las peculiaridades de este modelo es definir un problema abductivo haciendo referencia al esquema de Peirce, la forma lógica de la abducción. De esta manera, el modelo AKM permite establecer una equivalencia formal del esquema de Peirce, y además el modelo da cuenta de la inferencia abductiva mediante un cálculo algorítmico. Esta consideración se debe a que un problema abductivo sería una manera *formal* de representar la imposibilidad de realizar un deducción desde un conjunto de enunciados hacia una fórmula (el hecho sorprendente). De esta forma, un problema abductivo es un problema en el cual un formula $\varphi$ no es consecuencia lógica de un conjunto de enunciados designado por (la teoría de base) $\theta$. Veamos ahora la definición formal presente en Kakas et al. (1998) y Aliseda (2006):

DEFINICIÓN 1.- Dado un lenguaje formal $L$ y una relación de consecuencia lógica $\models$ , se considera que $< \Theta, \varphi >$ es un *problema* abductivo, en donde $\Theta \subset L, \Theta \not\models \perp$ y $\varphi \in L$, si y sólo si[4]

[3]Este es un punto crucial dentro del desarrollo del modelo AKM. Ya que, se le dota de un $\lambda$-cálculo el cual vendría a sortear la principal critica realizada al modelo AKM: el uso de herramientas deductivas dentro de su propuesta para entender la abducción. Una exposición de esto se encuentra en Soler, et al. (2006).

[4]En Aliseda(2006) se distinguen dos problemas abductivos. La novedad consiste en 3.1, por su parte la anomalía exige, además, $\Theta \models -\varphi$.

$$\Theta \not\models \varphi \tag{3.1}$$

DEFINICIÓN 2.- La *solución* al problema abductivo $< \Theta, \varphi >$ es $\alpha \in L$ tal que:

$$\Theta \cup \{\alpha\} \models \varphi \tag{3.2}$$

Además tenemos tres condiciones para $\alpha$:

1. Requerimiento de *consistencia*: $\alpha$ debe ser **consistente** con $\Theta$; $\alpha$ debe ser **consistente** con $\varphi$. Esto es que $\Theta, \alpha \not\models \perp$ y $\varphi, \alpha \not\models \perp$ respectivamente.

2. Requerimiento de *explicación*: $\alpha$ debe ser **explicativa**. Esto es $\alpha \not\models \varphi$.

3. Requerimiento de *simplicidad*: $\alpha$ es más **simple** que, por ejemplo $\alpha \wedge \beta$.

Son dos las observaciones pertinentes a estas definiciones. La primera es sobre el uso del concepto de problema abductivo; la segunda es respecto a la relación dual que tiene esta definición con la deducción lógica.

La primera observación que surge de las definiciones presentadas se centra en el concepto de problema abductivo. La utilización de este término merece especial atención, aunque no se abordará de manera concisa en este texto debido a que no constituye el tema central de la presente investigación. No obstante, resulta un aspecto de relevancia que podría ser objeto de un estudio más detenido acerca de su validez y la pertinencia de su aplicación para referirse al esquema de Peirce.

La noción de problema abductivo, según las definiciones proporcionadas por Kakas et al. (1998) y Aliseda (2006), es esencial en el modelo AKM. Por problema abductivo se define la imposibilidad de realizar una deducción desde un conjunto de enunciados hacia una fórmula específica, es decir, hacia el hecho sorprendente. Esta formulación formal aporta claridad al proceso abductivo y permite establecer límites lógicos a la inferencia, contribuyendo así a la comprensión de la abducción en el ámbito de la geometría euclidiana bidimensional.

Aunque esta observación se aborda de manera breve en este contexto, la complejidad y riqueza del concepto de problema abductivo invitan a una reflexión más profunda sobre su aplicación y significado en el marco de la abducción peirceana. Este aspecto podría representar un área de investigación futura para aquellos interesados en explorar las implicaciones y limitaciones de este concepto en el contexto de la lógica abductiva.

La segunda observación se dirige hacia la aparente dualidad que se establece entre la definición del problema abductivo y el proceso de deducción lógica. A primera vista, la formulación de las definiciones podría sugerir que la abducción se define en términos de deducción, lo cual podría resultar en una interpretación equívoca. Sin embargo, es crucial destacar que esta aparente dualidad es particular a la propuesta del modelo AKM, ya que, a palabras de Woods 'no preserva la condición de ignorancia' (Woods, )

Además, es menester señalar que esto no es necesariamente un problema. Ya que, como se revisó en el capítulo anterior, la abducción como retroducción es parte de un momento del desarrollo peirceano de la abducción como inferencia a partir del consecuente. Y para el contexto del desarrollo de hipótesis en matemáticas, veremos que es de suma importancia una progresión-regresión a partir del enunciado que represente un problema abductivo.

La definición del problema abductivo, plasmada en las ecuaciones (3.1) y (3.2), establece condiciones lógicas y formales para la existencia y resolución de la abducción. En este contexto, se podría interpretar que la abducción está intrínsecamente vinculada a la deducción lógica, ya que las condiciones de consistencia, explicación y simplicidad guardan similitudes con principios lógicos deductivos.

No obstante, esta aparente conexión inicial es engañosa, y se abordará de manera más detallada en la sección 2.2.3. Allí, se evidenciará que, a pesar de las similitudes formales, la abducción como retroducción no se define ni se reduce a la deducción lógica. La relación entre ambas se revelará como más compleja, permitiendo una comprensión más precisa de la naturaleza única de la abducción en el contexto del modelo AKM y su aplicación a la geometría euclidiana bidimensional.

La primera observación se centra en la introducción del concepto de problema abductivo, delineando su definición y las condiciones para su solución según el modelo AKM. Por otro lado, la segunda observación aborda la aparente conexión entre la abducción, concebida como retroducción, y la deducción lógica, destacando la necesidad de una exploración más detallada sobre esta relación aparente.

Ambas observaciones comparten un hilo conductor al abordar aspectos fundamentales de la abducción, pero divergen en sus enfoques. La primera se concentra en establecer y comprender formalmente el problema abductivo y su solución, mientras que la segunda se adentra en una reflexión más conceptual sobre la relación de la abducción con la deducción.

En términos de su conexión, podríamos decir que la primera observación establece las bases formales de cómo se presenta y resuelve un problema abductivo, y la segunda observación plantea interrogantes sobre la aparente dependencia de la abducción de la deducción, abriendo la puerta a una discusión más profunda sobre la autonomía lógica de la abducción. Ambas observaciones, aunque aborden aspectos diferentes, contribuyen a una comprensión más completa y matizada del papel de la abducción en el marco lógico propuesto.

## 3.3. El modelo GW

En el contexto de la elección y consideración del modelo AKM en nuestro análisis, también surge la figura del modelo GW como un actor relevante. Aunque nos hemos inclinado hacia la adopción del modelo AKM en nuestra investigación, es crucial examinar brevemente el modelo GW propuesto por Gabby y Woods (2005)[5], ya que presenta contrastes significativos y plantea consideraciones importantes en el panorama de la abducción lógica.

El modelo GW, una alternativa al dominante modelo AKM, se distingue por ciertas características que merecen nuestra atención. A diferencia del modelo AKM, el esquema GW mantiene una relación de consecuencia subjuntiva. Esta distinción es esencial, ya que refleja de manera más precisa la naturaleza distintiva de la inferencia abductiva.

Una de las notables divergencias entre ambos modelos radica en la preservación de la ignorancia. Mientras que el modelo AKM no logra capturar esta propiedad de la abducción, es relevante señalar que el modelo GW si intenta rescatar este aspecto

[5]Una versión tipo resumen-introducción está disponible en Woods (2007).

de la abducción peirceana. Esta discrepancia plantea preguntas significativas sobre la representación y comprensión de la abducción en cada modelo.

Al explorar el modelo GW en este contexto, no buscamos desacreditar sus méritos ni subestimar su relevancia. Más bien, buscamos proporcionar una visión equilibrada de las opciones disponibles y destacar las consideraciones que influyen en nuestra elección del modelo AKM para la aplicación específica en el ámbito de la geometría euclidiana bidimensional. Dicha elección se justifica en dos aspectos principalmente: la definición del problema y de la solución abductiva; y la búsqueda por eliminar la condicción de ignoracia frente a un hecho sorprendente y no sólo 'sugerir' una posible explicación.

Hay que recordar, que el objetivo de la presente investigación es justamente dar cuenta de razonamientos creativos en geometría mediante el uso de las herramientas formales que ofrece el modelo AKM. Y en matemáticas, al igual como reconocen Gabby y Wood, la inferencias que introducen nuevas hipótesis son justamente 'en reversa' y precisamente sí nos buscan sacar de la condición de ignorancia.

## 3.4. Las críticas y la elección del modelo AKM

A medida que concluimos este capítulo dedicado a la exploración de modelos en el ámbito de la abducción lógica, es fundamental abordar las críticas y reflexiones que han surgido durante nuestra evaluación. En particular, estas críticas se centran en la elección del modelo AKM como el marco principal para nuestro análisis en la aplicación de la abducción a la geometría euclidiana bidimensional.

Una de las críticas fundamentales que se han planteado se relaciona con la especificidad y robustez de las condiciones impuestas por el modelo AKM. La dificultad de definir de manera precisa las condiciones $k_i$, especialmente en términos de consistencia y minimalidad, ha sido señalada como un desafío significativo en la teoría de la lógica abductiva. Aunque se reconoce que estas condiciones son esenciales, algunas voces sostienen que su formulación exacta puede ser objeto de debate y cuestionamiento.

Otra crítica que ha emergido se relaciona con la preservación de la ignorancia en el proceso abductivo. El modelo AKM parecen dejar de lado esta característica distintiva de la abducción. Esta omisión plantea interrogantes sobre la representación precisa de la abducción en ambos modelos y sus implicaciones en la práctica.

A pesar de estas críticas, hemos tomado la decisión de adoptar el modelo AKM como el marco principal para nuestra investigación. Esta elección se fundamenta en la relevancia y aceptación generalizada del modelo en la literatura especializada, así como en su capacidad para abordar problemas abductivos en contextos diversos. Reconocemos las críticas planteadas y, al mismo tiempo, buscamos utilizar el modelo AKM como un punto de partida sólido para nuestras exploraciones en la aplicación de la abducción a la geometría euclidiana bidimensional.

Es importante señalar que, si bien hemos optado por centrarnos en el modelo AKM, reconocemos que la aplicabilidad de otros modelos, como el GW u otros diseñados con fines similares, también puede ser un ámbito interesante de estudio. En futuras investigaciones, podría explorarse la eficacia y ventajas comparativas de diferentes modelos en contextos específicos, contribuyendo así a una comprensión más completa de la abducción lógica y su aplicación práctica.

# Capítulo 4

# La creatividad matemática y sus demostraciones

Este capítulo tiene por finalidad explicar qué vamos a considerar como un proceso creativo en matemáticas, para luego vincularlo con la idea de un problema abductivo. Para ello, presentaremos y explicaremos algunas definiciones que se podrán relacionar con la sección 4.4 sobre las matemáticas y sus demostraciones. En este sentido, la introducción trata sobre una descripción de cómo se articulan las secciones de este capítulo. La sección 4.2 trata sobre qué entenderemos por creatividad matemática, principalmente se realizará una breve descripción sobre la heurística y su relación con el proceso creativo en matemáticas. La sección 4.3 trata sobre una revisión del significado filosófico del *propium* como una característica propia de un ser, pero no esencial. También se estudiará de qué manera podemos buscar caracterizar a las matemáticas y el proceso de creación de la misma, teniendo a la vista la relación con la descripción del propium de las matemáticas. Para finalizar, en la sección 4.4 se entrega una descripción general sobre la estructura lógica de las demostraciones, tema que será relevante al momento de relacionar la creatividad mediante el proceso abductivo.[1]

[1]Este importante recordar que este punto, relacionar la creatividad en matemáticas con el proceso abductivo, se expone y desarrolla en el capítulo 5 de este trabajo, buscando ser la hipótesis central de este texto.

## 4.1. Introducción

El universo de las matemáticas se ha forjado a lo largo de los siglos como un terreno donde la creatividad humana ha dejado una impronta indeleble. En este capítulo, nos sumergiremos en las profundidades de la creatividad matemática, explorando su conexión intrínseca con las demostraciones, pilares fundamentales de esta disciplina.

Desde los antiguos Elementos de Euclides hasta las contribuciones revolucionarias de genios como Euler, Fermat, Gauss, muchos otros, cada teorema, cada demostración cuenta una historia de creatividad humana inigualable. Esta historia se basa -a mi juicio- en dos cosas fundamentales: por una parte se encuentra la capacidad de rescribir enunciados, por otra parte tenemos la capacidad de generar hipótesis.

En este viaje, examinaremos qué entendemos por creatividad en el contexto matemático. Exploraremos la heurística, la chispa que enciende la llama creativa en la mente del matemático, y cómo esta se entrelaza con el proceso creativo en el ámbito de las matemáticas.

Finalmente, revisaremos la estructura lógica de las demostraciones matemáticas, reconociendo su papel fundamental en el proceso creativo. A través de estas exploraciones, buscamos comprender cómo la creatividad, la abducción y la deducción convergen en el fascinante mundo de las matemáticas, revelando la complejidad y la belleza intrínseca de este campo. Este capítulo nos invita a apreciar no solo los resultados finales de la investigación matemática, sino también el proceso creativo que los hace posibles.

## 4.2. La creatividad matemática

En la cotidianidad las matemáticas no son estrictamente populares, y en el imaginario de la gran mayoría de las personas se concibe a las matemáticas como un conjunto de formulas que nos dicen cosas respecto al mundo. Y además, se tiene la percepción de que en la matemática todo está resuelto, siendo esto completamente errado. La incompletitud de la matemática es una verdad ineludible de la matemática.[2]

[2] Aquí la referencia principal es Gödel (1931), para una introducción a este tema puede consultarse Smullyan (1992).

Las matemáticas son una ciencia autoreferente. Es decir, en un sentido abstracto, los objetos de las matemáticas no hacen referencia a otra cosa más que a su propio significado. Sin embargo, a lo largo de la historia, esta disciplina se ha visto influenciada por otras ciencias. Pues otras ciencias han planteado problemas que no tienen solución con las herramientas matemáticas de dicho tiempo. De esta forma, las matemáticas crecen por una necesidad propia y externa. Dada la necesidad de independencia que busca la disciplina y la coherencia de los resultados obtenidos: cada sistema formal, o axiomático toma en consideración que la matemática se apoya en la rigurosidad del razonamiento deductivo para llevar a cabo sus enunciados. En este sentido, las matemáticas en sentido peirceano son por excelencia la ciencia del razonamiento deductivo. Así, él escribe:'*La deducción es el único razonamiento necesario. Este es el razonamiento de las matemáticas*' [CP, 4.145]. Brindando a las matemáticas esa característica de proyectar el razonamiento deductivo, el razonamiento de la necesidad *a priori* de los enunciados.

Imaginemos a esta ciencia como un edificio. Un edificio necesariamente verdadero, cuyos pilares son su lenguaje: los símbolos y la gramática; y las nociones fundamentales de cada área: axiomas. Cada piso está perfectamente *diseñado* con el cuidado de no contradecir el diseño del anterior. Cada estructura nueva es agregada tanto con la finalidad de hacer compatible un piso con el otro, como porque dicho piso sea soporte de una disciplina externa. Existen pisos que no están siendo ocupados, pues la aplicación de dichos contenidos aún no son encontrados.

De esta forma, quienes se dedican a las matemáticas son albañiles de este edificio. En sus manos están las herramientas que les permiten construir nuevos apartados en tan magnífica estructura. Sin embargo, dichos diseños son a menudo muy difíciles de encontrar, pues requieren de imaginación y en algunos casos años de reflexión con tal de hacer coherente dichos diseños con la estructura completa. A estos diseños, se les llama demostraciones.

## 4.3. Las matemáticas y sus demostraciones

Todas las áreas de las matemáticas tienen la misma finalidad: descubrir y comunicar enunciados necesariamente ciertos. A un enunciado de estas características se le llama teorema, y a sus justificaciones se les llama demostración. Un teorema puede tener más de una demostración diferente. Sin embargo, toda demostración debe ser rigurosa, no se debe prestar para ambigüedades. A un enunciado que se intuye que es válido, pero carece de demostración, se le llama conjetura. Una forma de demostrar que una conjetura es falsa es mostrando un contraejemplo, es decir, enunciando un ejemplo que muestra que la conjetura es falsa.

En este trabajo de investigación se afirma que el proceso creativo en matemáticas se encuentra en los dos puntos que mencionamos al comienzo: la capacidad de rescribir enunciados y la capacidad de generar hipótesis. Es aquí donde radica la creatividad del sujeto que resuelve un problema utilizando matemáticas. De esta manera, la creatividad matemática se encuentra allí donde alguien es capaz de reescribir un enunciado formal, como también donde alguien genera una hipótesis que podría permitir realizar una demostración. Esto último tiene una estrecha relación con la abducción, ya que, como hemos revisado a esta inferencia le corresponde la capacidad de generación y selección de hipótesis.

El proceso de creación matemática, en sentido general, consiste en una constante realización de conjeturas, para luego tras prueba y error dar con el enunciado que es demostrable y es necesariamente cierto: un teorema. Dicho esto, observemos que dice Solow(1993) al respecto:

> "Dados dos proposiciones, A y B, cada uno de los cuales puede ser verdadero o falso, un problema de interés fundamental en matemáticas es el de demostrar que si A es verdadero, entonces B es verdadero." (Solow, 1993, p. 18)

De esta forma, podemos decir que un enunciado matemático tiene la forma lógica del condicional, esto es $A \to B$.[3] Los requerimientos de validez del condicional lógico, son expresados por el mismo autor, haciendo referencia al caso $A \to B$, más adelante en el

[3] Es importante mencionar que .$^{A}$z "B" también son enunciados matemáticos. El tema es que los enunciados matemáticos que representan un teorema tienen la forma lógica del condicional.

mismo texto:

> "Parece razonable que las condiciones bajo las cuales '$A$ implica $B$' es verdadero dependerán de si $A$ y $B$ son verdaderos. Consecuentemente, hay cuatro posibles casos a considerar:
>
> 1. $A$ es verdadero y $B$ es verdadero.
> 2. $A$ es verdadero y $B$ es falso.
> 3. $A$ es falso y $B$ es verdadero.
> 4. $A$ es falso y $B$ es falso."
>
> (Solow, 1993, p. 20)

Tal como advierte Solow (1993), es muy importante tener en cuenta, que la demostración del condicional no es una demostración de la verdad o falsedad de $A$ ni de $B$, sino más bien demostrar que que si suponemos que $A$ es verdadero, entonces $B$ es consecuencia lógica de $A$.

Explicado esto, al lector perspicaz le podría surgir la pregunta: ¿dónde radica la creatividad de la demostración? Pues la creatividad se encuentra en *descubrir* la relación que existe entre $A$ y $B$. El aprecio de dicha relación requiere conocimiento, comprensión, y como les gusta referirse a nuestros albañiles científicos: *madurez matemática.* Gran parte de los textos de matemáticas contemporáneos, influenciados por la obra de Hilbert, son por lo general escritos bajo un sistema axiomático, con reglas de inferencia, con independencia de otros sistemas. De esta forma, los autores señalanqno se requieren conocimientos previos, por el contrario sólo se requiere de conocer la simbología y de poseer dicha madurez.

En las secciones que siguen, intentaremos mostrar resumidamente cuáles son las técnicas de demostración más utilizadas, de forma que cualquier persona que quiera entender y quiera adentrarse en el arte de demostrar deberá conocer.

### 4.3.1. Método progresivo-regresivo

Esta sección se encarga de explicar presentar y explicar *el método progresivo-regresivo*, método utilizado por lo menos desde la antigua Grecia, en donde se hace referencia a él con el nombre de *analysis/synthesis*. De acuerdo a Pappus de Alejandría:

> "El análisis es el camino que parte de lo que se busca, considerándolo como si se diera por hecho; se extraen consecuencias ($\alpha\kappa o\lambda o\upsilon\theta o\nu$) de ello, y consecuencias de consecuencias, hasta llegar a algo que se establece mediante la síntesis. Es decir, en el análisis asumimos lo que se busca como si ya se hubiera encontrado; indagamos desde qué antecedente podría derivarse el resultado deseado; luego indagamos nuevamente qué podría ser el antecedente de ese antecedente, y así sucesivamente, hasta que finalmente llegamos a algo que ya se conoce o se considera verdadero de manera admitida. (...) En la síntesis, invirtiendo el proceso, partimos desde el punto en el que llegamos al final del análisis, desde la cosa ya conocida o admitida como verdadera. Derivamos a partir de ello lo que precedió en el análisis y continuamos haciendo derivaciones hasta, retrocediendo nuestros pasos, finalmente logramos llegar a lo que se requiere."
>
> (Pappus, 1986, p. 82)

De esta forma, este método consiste en desprender las *subpremisas* que se desprenden al asumir $A$ como verdadero, y en desfragmentar cuales son las condiciones que se requieren para que $B$ sea verdadero. Cuando intentamos determinar cómo llegar a la conclusión $B$ lo que estos haciendo es el proceso regresivo. Por otra parte cuando revisamos la información contenida en $A$, lo que estamos haciendo es el proceso progresivo.

Al comenzar el proceso regresivo, lo que estamos realizando es la pregunta "¿cómo o cuándo puedo concluir que la proposición $B$ es verdadera?" (Solow, 1993, p. 24). Al ir respondiendo esta pregunta obtendremos un conjunto de encunciados de la forma $B_n$, tal que $B_n \to B_{n-1} \to ... \to B_2 \to B_1 \to B$.

Por su parte, el proceso progresivo comienza suponiendo que $A$ es verdadera, de esta forma dado el contenido de $A$ obtenemos que $A_1$ es verdadera, a su vez este enunciado nos debería dar como resultado de su veracidad, así sucesivamente hasta llegar a un enunciado $A_n$. Análogamente al proceso regresivo, estos enunciados deben cumplir con

$A \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_{n-1} \to A_n$. El establecimiento de estas proposiciones de la forma $A_n$ no es al azar, se deben perfilar con tal de que el enunciado $A_n$ se pueda reescribir de la forma $B_n$.

De esta forma, se debe cumplir que:$A \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_{n-1} \to A_n \to B_n \to B_{n-1} \to ... \to B_2 \to B_1 \to B$.

### 4.3.2. Método por reducción al absurdo

El método progresivo-regresivo es muy útil, y en rigor una demostración sigue esa forma. Es necesario tener en consideración que este método a veces nos puede permitir una demostración de un teorema, pero no necesariamente proporciona bastante información con tal de clarificar las relaciones entre un enunciado y otro (el enunciado de tipo A y su conclusión del tipo B). Por otra parte, una demostración puede buscar ser lo más simple y directa posible[4], o bien puede buscar esclarecer describir la relación condicional entre enunciados del tipo A y B. Sin embargo, hay ocasiones en las que demostrar deductivamente un enunciado condicional es muy difícil, por ejemplo: "existen infinitos número primos". Siendo este el caso, es más fácil demostrar *indirectamente* que $A \to B$, es decir, demostrar que no puede ser de otra forma.

### 4.3.3. Método contrapositivo

En el método anterior comenzamos asumiendo que tanto $A$ como $-B$ son verdaderas, para obtener una contradicción. Pero ese método presenta una dificultad, pues ¿cuál es la contradicción que debemos encontrar? En este sentido el método contrapositivo es más *fuerte*, ya que, consiste en asumir que $A$ y $-B$ son verdaderas, para obtener como resultado $-A$, de lo que se deduce una contradicción. ¡Pero que maravilla, que mejor contradicción que esta!, ¿bajo qué condiciones $A$ podría ser verdadera y falsa al mismo tiempo? Dicho esto, el método consiste en analizar progresivamente $A \cup \{-B\}$ y regresivamente $-A$.

[4]Estos son los criterios que hacen más bella una demostración comparada con otra: ingenio, simplicidad, extensión.

### 4.3.4. Algunas consideraciones finales

La primera observación a realizar es que el método contrapositivo es un caso particular de progresión-regresión. En segundo lugar es importante recordar que a palabras de Peirce cualquier cosa que de una regla a la abducción, que ponga condiciones a las hipótesis, posibilitará la reducción al absurdo (CP 5.196).

Ahora bien, quisiera destacar la relación que existe entre el método de demostración que llamamos progresivo-regresivo y nuestra disposición a utilizar el modelo AKM a la hora de representar razonamientos creativos en geometría. Para precisar el punto quisiera exponer brevemente un pasaje de Aliseda a propósito de la heurística como legado griego y las tablas semánticas:

> "En particular, proponen el método de Beth de tablas semánticas como un método de análisis.[a] Como es bien conocido, las tablas semánticas son principalmente un método de refutación (cf. capítulo 4); cuando no se cumple una implicación, las ramas abiertas de la tabla son registros de contraejemplos. De lo contrario, la tabla misma proporciona información para construir una prueba en estilo secuente. Por lo tanto, el método de análisis proporciona una prueba definitiva (por reducción al absurdo) de la falsedad de la 'cosa buscada' en el caso de la refutación (cuando se han encontrado contraejemplos). Como veremos (cf. capítulo 4), nuestro enfoque para la abducción también toma las tablas semánticas como su marco matemático para una reconstrucción lógica de este tipo de razonamiento. Por lo tanto, el trabajo de Hintikka y Remes puede considerarse como un precursor del nuestro."
>
> (Aliseda, 2006, p. 6)
>
> [a]Aunque Beth mismo se inspiró en los métodos de análisis y síntesis para desarrollar su método de tablas semánticas, él no conectó explícitamente esta idea lógica con el antiguo análisis geométrico ni aplicó su enfoque a la elucidación de problemas históricos [HR76, p. 254].

En definitiva, esto expone brevemente la relación que hay entre el pragmatismo, la abducción, las demostraciones matemáticas y la propuesta del modelo AKM. De esta forma, se justifica el uso del modelo AKM en un contexto como el de la geometría, pues el proceso de generación y selección de hipótesis en un problema abductivo geométrico es equivalente[5] a la clausura de ramas de un árbol semántico que se corresponde con el problema abductivo.

[5] Sería interesante la investigación sobre si aquí podemos hablar de un isomorfismo de Grupos. Lo cual, involucra una profundización en la discusión con las herramientas que presenta el Álgebra Abstracta.

# Capítulo 5

# Problemas abductivos en geometría

Ahora que ya hemos revisado qué consideramos por abducción, que nos inclinamos por la etapa peircena de designar a la abducción como un proceso retroductivo (hacia atrás), el cual se define dualmente a la deducción. Destacamos las definiciones de problema abductivo y de solución abductiva, conceptos que se encuentran estrechamente relacionados con esta forma de comprender a la abducción como un cambio epistémico. Luego revisamos brevemente las demostraciones matemáticas, haciendo enfásis en que se considera que la creatividad matemática se encuentra en la capacidad de reescribir enunciados y en generar hipótesis. Así, estas consideraciones se encuentran estrechamente relacionadas, ya que, el proceso regresivo es conocido desde tiempos antiguos y ha estado presente en la literatura matemática y lo sigue estando hasta el día de hoy. Lo que quiero destacar con esto, es que para esta investigación la definición de problema abductivo tal como se ha presentado es totalmente aplicable a situaciones de ignorancia frente a un hecho geométrico sorprendente. De esta forma, el proceso creativo puede ser representado mediante el desarrollo formal de la búsqueda de la solución abductiva que corresponde.

En este capítulo, buscaremos explicar qué se considera como un problema de suficiencia de datos en matemáticas. En particular, cuáles son los problemas de suficiencia de datos de índole geométrico[1]. Una vez que se realiza esto, es preciso y fundamental para la tarea de este trabajo: exponer de qué forma los problemas de este tipo pueden

[1]Revisar la sección (5.1) del presente capítulo.

ser entendidos como un problema abductivo.

Al establecer una correspondencia única entre los enunciados de un problema de suficiencia de datos fuerte y su *forma lógica*[2], queda patente el hecho de que el problema abductivo se corresponde con un tipo particular de problema de suficiencia de datos, el problema en el cual $\alpha$ está, en principio, vacío. Es decir, no contamos con uno o más enunciados que unidos a la teoría de base permiten probar la afirmación $\varphi$.

Este capítulo consta de tres partes: la introducción, en donde se explica qué se considera como un problema de suficiencia de datos; el segundo capítulo que consiste en un caso más general de los problemas de suficiencia de datos: el problema de la suficiencia de datos fuerte, el caso en donde no tenemos enunciados a evaluar, sino que debemos *abducir* un enunciado que tenga coherencia a la hora de permitir *completar* la deducción del problema central; en la tercera y última parte, se desarrolla la tesis central de este trabajo, formalizar *post hoc* un proceso creativo de cierto tipo de problema en la geometría. Esta última sección, consiste en la aplicación del modelo AKM a un problema de suficiencia de dato fuerte de la geometría. Dicho esto, pasemos a revisar qué se va a considerar como un problema de suficiencia de datos.

## 5.1. Introducción

En matemáticas, especialmente en la enseñanza y evaluación escolar[3] son conocidos los problemas de suficiencia de datos, pues se consideran una buena forma de familiarizar al estudiante con los enunciados que permiten que un problema se pueda resolver. En este sentido, lo primordial no es resolver (demostrar) algo, sino decidir si cierta información adicional permite dicha demostración.

Para aclarar lo anterior, presentaremos una breve descripción de un caso particular, un problema de suficiencia de datos con dos enunciados por relacionar. En este problema

[2]Me refiero a lo revisado en (3.2.1).

[3]Esto se ve manifestado particularmente en el método chileno de acceso a la universidad. Las pruebas de matemáticas de ingreso a la educación superior, tenían, una sección importante sobre preguntas de este tipo. Hoy en día los modelos de prueba, constan con apenas unas preguntas de ello. Incluso el modelo del proceso de admisión 2022 no incluye preguntas de este tipo.

el estudiante debe evaluar si la situación inicial (premisa y conclusión) se puede resolver (demostrar), esto teniendo en consideración dos enunciados auxiliares ($e_1$, y $e_2$). De esta forma, el estudiante debe escoger si la situación inicial puede ser resuelta bajo las siguientes condiciones: (a) se puede resolver al considerar $e_1$ como verdadero; (b) se puede resolver al considerar $e2$ como verdadero; (c) se puede resolver al considerar $e_1$ y $e2$ como verdadero; (d) se puede resolver al considerar $e_1$ o $e2$ como verdadero, es decir, cada una por sí sola; (e) no se puede resolver con la información entregada. Dicho esto, veamos un ejemplo[4] geométrico de un problema de este tipo:

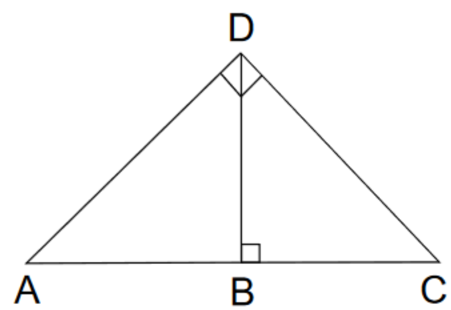


Figura 5.1: Diagrama correspondiente a la fig. 14 del problema número 78 del modelo de prueba DEMRE (2015).

En el triángulo ACD de la figura 4.1, se puede determinar la medida del segmento BC, si:

(1) AB = 3cm

(2) Se conoce la medida del segmento DC.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

[4]Este ejemplo (ejercicio 78) es tomado del modelo 2015 de la prueba de matemáticas del DEMRE. Disponible en https://demre.cl/publicaciones/2015/modelo-prueba-matematica

E) se requiere información adicional.

Presentado este ejemplo, ahora consideremos un problema de suficiencia de datos que involucra dos enunciados, $A$ y $B$, donde se presenta una situación inicial $S$ y una conclusión $C$. La tarea del estudiante es determinar si la información proporcionada es suficiente para demostrar la conclusión. Formalmente, el problema se estructura en función de identificar la relación correcta entre:

$$S \cup \{A\} \models_L C$$

$$S \cup \{B\} \models_L C$$

$$S \cup \{A, B\} \models_L C$$

Aquí, $S$ representa la situación inicial, $\{A, B\}$ son los enunciados auxiliares, $C$ es la conclusión, y $\models_L$ denota la relación de consecuencia lógica. Finalmente, la alternativa correspondiente a que se requiera información adicional se ve representada por conjunción de los siguientes enunciados:

$$S \cup \{A\} \not\models_L C$$

$$S \cup \{B\} \not\models_L C$$

$$S \cup \{A, B\} \not\models_L C$$

## 5.2. El problema de la suficiencia (fuerte) de datos

Ahora, que ya hemos descrito lo que se considera como un problema de suficiencia de datos, pasaremos a definir brevemente lo que se considera como un problema de suficiencia de fuerte.

Podemos considerar que un problema de suficiencia de datos fuerte en geometría consiste en un problema deductivo que sabemos que es cierto pero que no es demostrable con el conjunto de enunciados que determinan el conocimiento a tener en cuenta a la hora de resolver dicho problema. De esta forma, resolver el problema consiste en justificar cuales son las condiciones o enunciados que son necesarios suponer como ciertos a la hora de demostrar la conclusión.

Manteniendo la nomenclatura de la sección anterior, podemos esquematizar el problema de suficiencia de datos fuerte como sigue:

$$S \nvDash_L C$$

En este punto, es menester mostrar que este tipo de problema, se corresponde en cuanto a forma lógica con 3.1 sobre problema abductivo. Estableciendo de esta forma una equivalencia entre un problema de suficiencia de datos fuertes y un problema abductivo. En donde la teoría de base se corresponde con el conjunto de enunciados dados como ciertos, lo que se quiere demostrar se corresponde con el fenómeno novedoso, y el abducible se corresponde con el conjunto de enunciados que son necesarios de unir al conjunto teoría de base para lograr demostrar el enunciado que representa al hecho sorprendente.

Para concluir, podemos decir que si $S \nvDash_L C$ representa a un problema de suficiencia de datos fuerte, entonces por definición de 3.1 y 3.2, podemos concluir que estamos frente a un problema abductivo, cuyas soluciones son enunciados que siguen los criterios de consistencia, explicación y simplicidad.

## 5.3. Un ejemplo: aplicando la abducción

### 5.3.1. Introducción

Esta sección del capítulo se encuentra dividida en seis subsecciones, la presente introducción y las cinco siguientes que permiten representar la solución de un problema geométrico de índole geométrico. En la segunda parte de esta sección se presenta un problema de suficiencia de datos fuerte, se presenta como el problema se corresponde con la forma expresada en (2.3) con respecto al fenómeno abductivo, esto siempre que consideremos a el enunciado a demostrar como un novedoso frente a nuestra teoría de base. En la subsección (5.3.3) se procede a ahondar en una clarificacción de la teoría de base, es decir, en analizar y sintetizar nuestro conocimiento a la hora de enfrentar el problema. Luego, en la siguiente subsección se ahonda sobre la correspondencia con la definición de *problema abductivo* expuesta en (3.2.1), estableciendo que si el . La siguiente subsección

### 5.3.2. Un ejemplo de problema de suficiencia de datos fuerte en geometría

A continuación presentaremos un ejemplo.[5] Podemos observar que este ejemplo se corresponde con la definición de problema de suficiencia de datos fuerte revisada en la sección anterior.

Primero, analizaremos si se trata de un problema abductivo, y si fuera este el caso intentaremos concluir si existen abducibles posibles. Para esto utilizaremos las herramientas que nos brinda lo que hemos caracterizado como método abductivo. En primera instancia, clarificaremos la teoría de base con la intención de determinar si estamos frente a un problema abductivo. Luego, tendremos que realizar la inferencia abductiva: es decir, encontrar el abducible. Finalmente tendremos que demostrar que el abducible se cumple la definición de solución abductiva, es decir, resolver el problema deductivo con

[5]Este ejemplo es tomado de Solow(1993), en donde el autor explica el método progresivo-regresivo. Sin embargo, quitamos dos datos entregados (el triángulo ABC es rectángulo en A y $z$ es hipotenusa) para que la conclusión no se siga de las premisas.

la nueva información. Es importante recalcar que en este sentido estamos demostrando que la solución al problema de suficiencia de datos fuerte que brinda el ejemplo, es un conjunto de enunciados. De la unión de dicho conjunto de enunciados con nuestra teoría de base, se obtiene una nueva teoría de base $\theta'$ de la cual el fenómeno (el problema abductivo), es consecuencia lógica.

De esta forma, tendremos que enunciar algunas propiedades geométricas con las que el lector puede no estar familiarizado. Además, de esta forma explicitamos de mejor manera lo que sería nuestra *teoría de base*. Este paso importante, y se refuerza en la idea peirceana de que cuando un sujeto realiza una inferencia abductiva: él busca en fenómenos similares patrones o analogías con el fenómeno observado, con la finalidad de formular una hipótesis que permita dar cuenta que: teniendo en consideración dicha hipótesis, entonces el fenómeno ahora sería una cosa corriente. Vale decir, este fenómeno es ahora una verdad de hecho, en nuestra nueva teoría de base el fenómeno se puede describir como una consecuencia lógica

Pasemos a ver el ejemplo que consiste en dos enunciados cuya relación (se conjetura[6]) se corresponde con la forma lógica del condicional

$$\text{ABC es un triángulo, de lados } a, z, c, \text{tal que su área es } \triangle(ABC) = z^2/4. \tag{5.1}$$

$$\text{El triángulo ABC es isóceles.} \tag{5.2}$$

Se puede observar que 5.1 corresponde con A y que 5.2 a B en un esquema del tipo del capítulo 3.4. Es importante notar que, en general, los enunciados pueden ser verdaderos o falsos dependiendo del contexto en el que se utiliza, por sí solos enuncian un hecho, recordemos que para realizar una demostración debemos suponer que A es verdadero y llegar a la veracidad de B. De esta forma para ver si se trata de un problema

[6]Como hemos revisado en el capítulo anterior, podemos asociar al proceso de construcción de teoremas mediante enunciados con la forma lógica del condicional. La creatividad, según este trabajo, radica en la capacidad de descubrir y justificar la incorporación de enunciados que permitan obtener el antecedente mínimo que permiten justificar la inferencia deductiva desde la teoría de base y el abducible, hacia la conclusión.

abductivo, tenemos que ver si $A \vdash B$. ¿Cómo podemos saber si B es conclusión lógica de A?

### 5.3.3. Clarificando la teoría base: dada un área T, ¿cuántos triángulos existen cuya área sea T?

La respuesta corta: infinitos. Con esta información ya podemos concluir que 5.2 no se deduce de 5.1. Sin embargo, demos un breve paseo por algunas definiciones y propiedades[7] geométricas que nos serán útiles:

DEFINICIÓN 1.- Un triángulo $ABC$ queda definido por tres segmentos de la forma $\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CA}}$. Dichos segmentos, cuyos valores reales son $a, b, c$ respectivamente, son los lados del triángulo, y los tres puntos $A, B, C$ son su vértices.

DEFINICIÓN 2.- El área de un triángulo $ABC$ cuya base es $b$ y altura $h$ [8] queda establecida por:

$$\triangle(ABC) = \frac{b \cdot h}{2} \tag{5.3}$$

LEMMA 1.- Si dos triángulos tienen igual altura, sus áreas son entre sí como las bases respectivas.

*Demostración.* Sea un triángulo $ABC$ de altura $h$ y $DEF$ otro triángulo con la misma altura. Por 5.3 tenemos que $\triangle(ABC) = (\overline{\mathrm{AB}} \cdot h)/2$ y $\triangle(DEF) = (\overline{\mathrm{DE}} \cdot h)/2$. Cuocientando ambas expresiones , obtenemos que:

$$\frac{\triangle(ABC)}{\triangle(DEF)} = \frac{(\overline{\mathrm{AB}} \cdot h)/2}{(\overline{\mathrm{DE}} \cdot h)/2}$$

Simplificando:

$$\frac{\triangle(ABC)}{\triangle(DEF)} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{DE}}}. \tag{5.4}$$

□

[7] Debe tomarse como referencia la geometría euclideana, o bien los axiomas de Hilbert.

[8] Es importante notar que un triángulo tiene tres bases y tres alturas. Dará igual cual base tomemos, (siempre y cuando, sea la altura correspondiente) y viceversa.

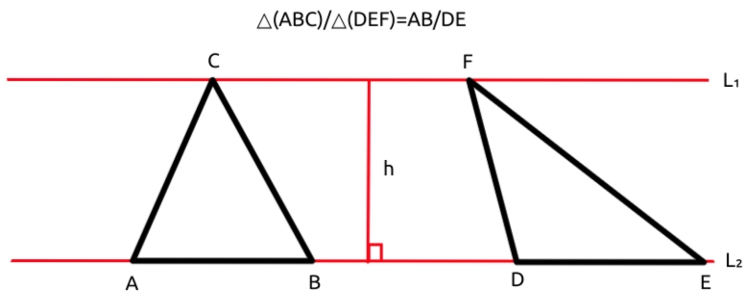


Figura 5.2: Relación entre la área de dos triángulos , con la misma altura $h$.

En la Figura 4.2 se puede observar una representación de lo establecido. Sin embargo, no nos quedaremos con esto. Es importante realizar la siguiente pregunta: ¿qué sucede cuando los valores de las bases de ambos triángulos coinciden?¿qué sucede cuando $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DE}}$? Al reemplazar esto en 5.4, obtenmos que $\triangle(ABC) = \triangle(DEF)$. Lo cual nos dice algo "intuitivo", dos triángulos que poseen la misma base y altura, poseen el mismo área.

Ahora bien, dada un área $A$ y una altura $h$ ¿cuántos triángulos diferentes existen que comparten estos valores? La respuesta: infinitos. La Figura 4.3 ilustra esto de una forma sencilla. Dado un triángulo $ABC$ con base $\overline{\mathrm{AB}}$ y altura $h$, al *desplazar* $C$, paralelamente a $\overline{\mathrm{AB}}$, obtenemos un nuevo triángulo $ABC'$ cuya área es igual al triángulo inicial. Repitiendo el proceso, obtenemos $C''$,$C'''$,..., siendo cada triángulo con distintos ángulos interiores respecto al anterior, pero con la misma área. Dado que todos los triángulos trazados poseen la misma altura y la misma base. Lo que nos lleva al siguiente resultado.

LEMMA 1.1.- Existen infinitos triángulos que tienen misma medida de altura y base, que poseen la misma área. Estos triángulos difieren en la medida de sus dos lados restantes, y en sus ángulos interiores.

*Demostración.* Aplicando el lemma 1 para dos triangulos $ABC$ y $DEF$, tal que, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DE}}$. □

Por otra parte, ¿cuántos triángulos rectangulos en A existen que poseen el mismo

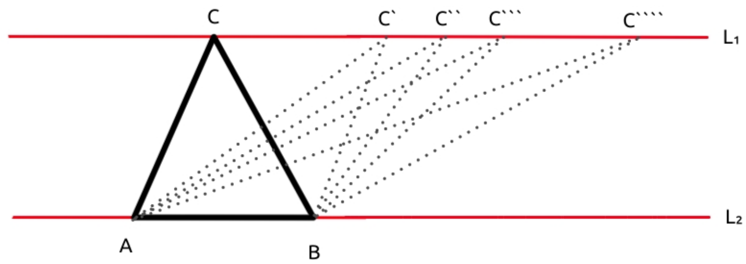


Figura 5.3: Área dada y base fija, infinitos triángulos posibles.

área que el triángulo $ABC$? La respuesta: existen cuatro triángulos. Sin embargo, estos triángulos son semejantes entre sí, por lo tanto nos quedaremos con uno denotado por $ABC^*$ como representa la figura 4.4.

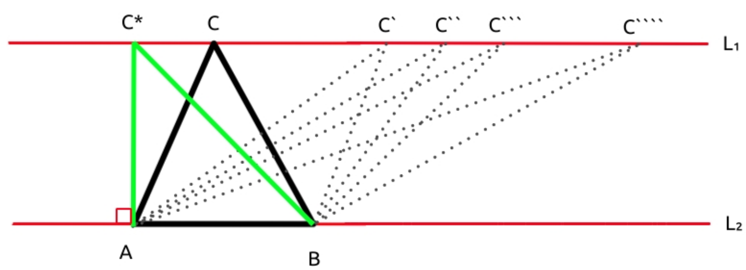


Figura 5.4: Área dada y base fija, un triángulo rectángulo posible.

Lo cual nos lleva a una tercera afirmación importante:

LEMMA 1.2.- Existe un único triángulo rectángulo $ABC^*$ que posee la misma base y la misma altura que el triángulo $ABC$. Tal que sus áreas respectivas son iguales.

*Demostración.* [9] La demostración se deja al lector. □

[9] Dado que la finalidad de este artículo no es realizar demostraciones geométricas, nos saltaremos esta demostración, pues se extendería en más de lo necesario este trabajo

### 5.3.4. ¿Es $< \Theta, \varphi >$ un problema abductivo?

Para comprobar si nos encontramos ante un problema abductivo, debemos ver si se cumple que $\Theta \not\models \varphi$.

COROLARIO 1.- $< \Theta, \varphi >$ es un problema abductivo.

*Demostración.* Tomando 5.1 y el lemma 1, obtenemos que existen infinitos triángulos cuyas áreas son $z^2/4$. En partiular, existe un triángulo equilátero con lado $a = z/\sqrt[4]{3}$, tal que su área [10] es $z^2/4$. De esta forma, obtenemos $\Theta \not\models \psi$.

$\square$

### 5.3.5. La inferencia abductiva: encontrando el abducible $\alpha$

El proceso de encontrar un abducible es a menudo tedioso y requiere de imaginación. O bien, de poder asociar correctamentes nuestras proposiciones con tal de representar el *tableau* que nos indique los posibles abducible.

Dado que tanto en 5.1 y 5.2 estamos hablando de triángulos [11], entonces expondremos cuáles son las propiedades posibles que podemos enunciar de un triángulo en función de sus lados y sus ángulos.

Revisemos las condiciones que tenemos para $\alpha$. En primer lugar, tenemos por *consistencia* que $\alpha$ no puede ser un enunciado que entre en conflicto con nuestra teoría de base. Es decir, $\alpha$ no puede ser "el polígono $ABC$ no es un triángulo", o bien "el área del triángulo es $A$ (con $A \neq z^2/4$)". En segundo lugar, dada el requerimiento de *explicación* $\alpha$ no puede ser el enunciado "el triángulo $ABC$ es isóceles", o cualquier otro cuyo significado sea equivalente a el anterior, por ejemplo: "el triángulo $ABC$ tiene al menos dos lados iguales".

De esta forma $\alpha$ podría ser $\alpha_1$: "el triángulo $ABC$ es rectángulo", $\alpha_2$: "el triángulo $ABC$ es acutángulo", $\alpha_3$: "el triángulo $ABC$ es obstusángulo", $\alpha_4$: "el triángulo $ABC$ es

[10]Para todo triángulo equilatero $ABC$ de lado $a$, se tiene que $\triangle(ABC) = \frac{\sqrt[2]{3}}{4}a$

[11]Esta parte es importante, pues podríamos incluir demasiadas -si es que no infinitas- relaciones que nos digan algo sobre el triángulo $ABC$. Como por ejemplo, establecer otro polígono regular (cuyos lados sean valores en función de z) en el cual el triángulo inicial esté circunscrito.

escaleno", $\alpha_5$: "el triángulo $ABC$ es equilatero". Es importante notar que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son contradictorios entre sí, y $\alpha_4, \alpha_5$ son contradictorios. Por otra parte, $\alpha_1$ es compatible con $\alpha_4$, $\alpha_2$ es compatible con $\alpha_5$ y con $\alpha_4$, y $\alpha_3$ es compatible con $\alpha_4$. Veamos que resulta de evaluar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 \wedge \alpha_4$, $\alpha_2 \wedge \alpha_4$ $\alpha_2 \wedge \alpha_5$, $\alpha_3 \wedge \alpha_4$.

Tenemos por *consistencia* que $\alpha_2 \wedge \alpha_5$ no puede ser solución de nuestro problema.

*Demostración.* Sea 5.1 y $\alpha_2 \wedge \alpha_5$, obtenemos que el área del triángulo $ABC$ está determinado por $(\triangle(ABC) = z^2/4 \wedge \triangle(ABC) = \sqrt[2]{3}z/4; z \neq 0)$ $\perp$. □

Por otra parte, considerando $\alpha_3 \wedge \alpha_4$ podemos ver nuevamente que por *consistencia* esta conjunción no puede ser solución de nuestro problema.

*Demostración.* Sea 5.1 y $\alpha_3 \wedge \alpha_4$, obtenemos que $\Theta \cup \{\alpha_3 \wedge \alpha_4\} \not\models \varphi$. Ya que, $\alpha_4$ es contradictorio con $\varphi$. □

De esta forma, nos quedan como candidatos a abducibles: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 \wedge \alpha_4$. Sin embargo, $\alpha_1 \wedge \alpha_4$ no es posible como abducible.

*Demostración.* Sea 5.1 y $\alpha_1 \wedge \alpha_4$, obtenemos que $\Theta \cup \{\alpha_1 \wedge \alpha_1\} \not\models \varphi$. Ya que, $\alpha_4$ es contradictorio con $\varphi$. □

Además, considerando $\alpha_2, \alpha_3$ tenemos por requerimiento de *explicación* que estos no pueden ser abducibles.

*Demostración.* Sea 5.1 y $\alpha_2$, como ya mostramos que no puede ser el caso de que $\alpha_5 \vee \alpha_4$ , entonces[12] sólo nos queda el caso de que el triángulo $ABC$ sea isóceles. Esto es lo que se encuentra en 5.2, por *explicación* tenemos que $\alpha_2$ no es abducible. □

*Demostración.* Sea 5.1 y $\alpha_3$, como ya mostramos que no puede ser el caso de que $\alpha_4$ sea verdad, entonces[13] sólo nos queda el caso de que el triángulo $ABC$ sea isóceles. Esto es lo que se encuentra en 5.2, por *explicación* tenemos que $\alpha_3$ no es abducible. □

[12]Un triángulo acutángulo, puede ser equilátero, isóceles o escaleno.
[13]Un triángulo obtusángulo, puede ser isóceles o escaleno.

Llegados a este punto, nos queda solo un candidato: $\alpha_1$.

Veamos qué sucede si $\Theta \cup \{\alpha_1\}$. Tendríamos dos posibilidades, que $z$ sea cateto, o bien, que $z$ sea hipotenusa. El primer caso, considerando $x, z$ catetos e $y$ hipotenusa nos lleva a que $x = z/2$ [14], lo cual nos lleva al caso en que $\alpha_1 \wedge \alpha_4$ es verdad, lo cual entra en contradicción con $\varphi$. De esta forma, obtenemos $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_*$ es nuestro candidato a abducible, en donde $\alpha_*$: "z es hipótenusa".

### 5.3.6. Comprobando la solución abductiva: ¿es cierto que $\Theta, \alpha \models \varphi$?

Por la definición presentada de abducción tenemos que si $\Theta, \alpha \models \varphi$, entonces $\alpha$ es solución abductiva de $< \Theta, \varphi >$. Dicho esto, pordemos aventurarnos a decir:
CONJETURA 1.- $\alpha$ es solución abductiva de $< \Theta, \varphi >$.

*Demostración.* Sea 5.1 y $\alpha$, tenemos por 5.3 que:

$$\triangle(ABC) = \frac{xy}{2} \tag{5.5}$$

Además por $\alpha_*$ y Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ \frac{x^2 + y^2}{4} &= \frac{z^2}{4} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Igualando 5.1 con 5.5 y 5.6, obtenemos que:

$$\frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{xy}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2xy$$

$$x^2 - 2xy - y^2$$

$$(x - y)^2 = 0$$

$$x - y = 0$$

[14]Por Teorema de Pitágoras: $x^2 + z^2 = y^2$.

$$x = y \tag{5.7}$$

Lo que nos dice 5.7 es que los catetos del triángulo $ABC$ son iguales. Además por $\alpha$ tenemos que $x \neq z$. Por lo tanto, el triángulo $ABC$ es isóceles.

$\square$

Hemos demostrado que la conjetura 1 es cierta, por ende $\Theta, \alpha \models \varphi$. Por lo tanto $\alpha$ es abducido de $< \Theta, \varphi >$.

## 5.4. Conclusión

A través de la aplicación del método abductivo, hemos explorado diversas posibilidades y evaluado múltiples escenarios, buscando explicaciones lógicas que justifiquen la conclusión a la que deseamos llegar. Nuestro enfoque meticuloso ha revelado la importancia de considerar no solo la información proporcionada inicialmente, sino también las posibles relaciones y condiciones que podrían subyacer en el problema. Al examinar detenidamente las hipótesis y abducibles, hemos logrado identificar patrones significativos y, finalmente, seleccionar la explicación más coherente y congruente con nuestros objetivos. A medida que hemos avanzado en este proceso, hemos consolidado nuestra comprensión de cómo el método abductivo puede ser una herramienta poderosa en el campo geométrico. Ha demostrado ser capaz de abordar problemas de suficiencia de datos, revelando conexiones no evidentes y proporcionando una nueva perspectiva para el análisis geométrico. No obstante, es crucial reconocer las limitaciones de nuestro enfoque y comprender que la abducción, aunque valiosa, no es una panacea universal. Algunos problemas pueden requerir ajustes en la metodología o consideraciones adicionales para abordar complejidades específicas. En última instancia, este capítulo no solo ha ofrecido una solución al problema geométrico planteado, sino que también ha allanado el camino para futuras investigaciones en el ámbito de la abducción aplicada a la geometría. Las lecciones aprendidas y los resultados obtenidos aquí sirven como un punto de partida sólido para exploraciones posteriores y para avanzar en nuestra comprensión de cómo la abducción puede enriquecer el análisis geométrico. Con el cierre de este capítulo, nos preparamos para consolidar nuestras conclusiones generales y reflexionar sobre la contribución de la abducción a la resolución de problemas geométricos en el marco de toda nuestra investigación. En el siguiente capítulo, uniremos los hilos de nuestro estudio para ofrecer una conclusión integral que destaque los logros, las implicaciones y las posibles direcciones futuras de nuestra investigación.

# Capítulo 6

# Conclusión

Este trabajo ha explorado con detenimiento la abducción como una herramienta fundamental en el ámbito de la creatividad matemática. A lo largo de las distintas secciones, hemos trazado una ruta que nos ha llevado desde las motivaciones filosóficas que respaldan la investigación hasta la aplicación concreta de la abducción en problemas geométricos específicos. En la primera sección, introducimos la hipótesis central que guía nuestro trabajo: la abducción desempeña un papel crucial en el proceso creativo matemático. Establecimos la estructura general de la tesis, delineando cómo cada sección contribuiría a la comprensión de este fenómeno complejo. La inmersión en la filosofía de Charles Sanders Peirce nos proporcionó un marco sólido para comprender la abducción. Analizamos el fenómeno abductivo, exploramos distintos tipos de inferencias y desglosamos las cinco etapas de la abducción en Peirce. Este análisis filosófico nos preparó para aplicar la abducción en un contexto matemático más específico. En la elección del modelo AKM, consideramos diferentes enfoques y críticas antes de decidirnos por un modelo específico. Este paso crucial estableció las bases para la aplicación práctica de la abducción en problemas matemáticos. La sección sobre la creatividad matemática exploró el propium de las matemáticas y examinó las demostraciones matemáticas como manifestaciones tangibles de la creatividad. Analizamos diversos métodos de demostración, destacando la complejidad y riqueza del pensamiento creativo en el ámbito matemático. Luego, nos sumergimos en problemas abductivos en geometría, utilizando un ejemplo específico para ilustrar el proceso. A través del análisis detallado de un problema de suficiencia fuerte de datos, clarificamos la teoría base y aplicamos la abducción para encontrar una solución lógica. Finalmente, la conclusión del capítulo cinco resumió los hallazgos y demostró la validez de la solución abductiva propuesta, afirmando el papel efectivo de la abducción en la resolución de problemas geométricos.

La conclusión general de este trabajo es que la abducción emerge como una herramienta lógica y creativa fundamental en el contexto de la creatividad matemática. Desde la filosofía de Peirce hasta la aplicación práctica en problemas geométricos, hemos explorado cómo este proceso lógico puede desentrañar complejidades matemáticas y ofrecer soluciones significativas. Este estudio sienta las bases para futuras investigaciones que pueden extender y refinar nuestra comprensión de la abducción en el ámbito matemático. La intersección entre la filosofía, la lógica y la creatividad matemática ofrece un terreno fértil para la exploración continua, y este trabajo busca inspirar y motivar investigaciones futuras en esta fascinante intersección de disciplinas. La abducción, con su capacidad para revelar conexiones inesperadas y ofrecer soluciones innovadoras, sigue siendo un tema de gran relevancia y promesa en el vasto campo de las matemáticas y la creatividad intelectual.

De esta investigación logramos concluir que la formalización de la abducción nos brinda las herramientas necesarias para abordar problemas abductivos de la geometría. Problemas que siguen la forma del problema de suficiencia fuerte de datos. De esta manera, podemos utilizar las herramientas de la *lógica abductiva* para representar de mejor manera un proceso creativo en geometría.

# Bibliografía


Aliseda, A. (1997). *Seeking Explanations: Abduction in logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence*. (Tesis de doctorado, Stanford University).

Aliseda, A. (2003). Mathematical Reasoning vs. Abductive Reasoning: A Structural Approach. *Synthese, 134*(1/2), 25-44.

Aliseda, A. (2006). *Abductive Reasoning. Logical Investigations into Discovery and Explanation*. Synthese Library, 330. Springer, Berlín.

Aliseda, A. (2007). Abductive Reasoning: Challenges Ahead. *Theoria, Segunda Epoca, 60*.

Beth, E. W. (1969). Semantic Entailment and Formal Derivability. En Hintikka J. (Ed.), *The Philosophy of Mathematics*, 9-41. Oxford University Press.

Fann, K.T. (1970). *Peirce's Theory of Abduction*. Martinus Nijhoff, La Haya.

Gabbay, D.M., y Woods, J. (2005). *A Practical Logic of Cognitive Systems. The Reach of Abduction: Insight and Trial* (Volumen 2). North-Holland, Ámsterdam.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatsh. f. Mathematik und Physik, 38*, 173–198.

Haack, S. (1991). *Filosofía de las Lógicas*. Ediciones Cátedra, Madrid.

Hintikka, J., y Remes, U. (1976). Ancient Geometrical Analysis and Modern Logic. En Cohen, R.S. (Ed.), *Essays in Memory of Imre Lakatos*, 253–276. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holanda.

Hintikka, J., y Remes, U. (1974). *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holanda.

Irvine, A.D. (1989). Epistemic Logicism and Russell's Regressive Method. *Philosophical Studies, 55*, 303-327.

Kakas, A.C., Kowalski, R.A., Toni, F. (1995). Abductive Logic Programming. *Journal of Logic and Computation, 2*(6), 719-770.

Kapitan, T. (1990). In What Way is Abductive Inference Creative? *Transactions of the Charles S. Peirce Society, 26*(4), 499–512.

Kaptian, T. (1997). Peirce and the structure of abductive inference. En Houser, N., Roberts, D.D., y Evra, J.V. (Eds.), *Studies in the Logic of Charles Sanders Peirce*. Indiana U.P., Bloomington and Indianapolis.

Kuipers, T. (1999). Abduction Aiming at Empirical Progress or Even Truth Approximation Leading to a Challenge for Computational Modelling. *Foundations of Science, 4*, 307–323.

Kuipers, T. (2001). *Structures in Science. Heuristic Patterns Based on Cognitive Structures*. Synthese Library 301, Kluwer AP, Dordrecht. Países Bajos.

Kowalski, R.A. (1979). *Logic for problem solving*. Elsevier, Nueva York.

Magnani, L. (2001). *Abduction, Reason, and Science: Processes of Discovery and Explanation*. Kluwer-Plenum, Nueva York.

Magnani, L. (2023). Discoverability in the Perspective of the EC-Model of Abduction. En: Magnani, L. (eds) *Handbook of Abductive Cognition*. Springer, Cham.

Mayer, M.C., y Pirri, F. (1993). First order abduction via tableau and sequent calculi. *Bulletin of the IGPL, 1*, 99-117.

Meheus J., y Nickles T. (1999). The methodological study of discovery and creativity – Some background. *Foundations of Science, 4*(3), 231-235.

Niño, D. (2007). *ABDUCTING ABDUCTION Avatares sobre la comprensión de la Abducción de Charles S. Peirce* (Tesis de doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Colombia).

Pappus, de Alejandría (1986). *Book 7 of the Collection*, Springer Science+Business Media, New York.

Peirce, Ch. S. (1931–1935). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Volumes 1–6, editado por C. Hartshorne, P. Weiss. Harvard University Press.

Russell, B. (1973). *Essays in Analysis*. London: George Allen and Unwin, D. Lackey (Ed.).

Smullyan, R. (1968). *First Order Logic*. Springer Verlag.

Smullyan, R. (1992). *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford University Press.

Soler, F. (2005). *Modelos Formales de Explicación en Lógica e Inteligencia Artificial* (Tesis de doctorado, Universidad de Sevilla).

Soler, F., Nepomuceno, F., y Aliseda, A. (2006). Model-Based Abduction via Dual Resolution. *Logic Journal of the IGPL, 14*(2), 305-319.

Soler, F., Nepomuceno, F., y Aliseda, A. (2009). Abduction via C-tableaux and D-resolution. *Journal of Applied Non-Classical Logics, 19*, 211-225.

Soler, F., y Nepomuceno, F. (2008). Deducción y abducción. *Teorema, xxxvii*(1), 5-16.

Woods J. (2007). Ignorance and Semantic Tableaux: Aliseda on Abduction. *THEORIA, 2*(3), 305-318.