

T
2001
C127
C-2

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

DISCRETIZACION DE 2^{do} ORDEN PARA RESOLUCION NUMERICA
DE PROBLEMAS CONDUCTIVO-CONVECTIVO EN FLUJOS
RECIRCULANTES

WILLIAMS RODRIGO CALDERON MUÑOZ



COMISION EXAMINADORA

CALIFICACIONES
NOTA(n°) (Letras)

FIRMA

PROFESOR GUIA
SR. RAMON FREDERICK G.

: 7°

siete

R. Frederick

PROFESOR CO-GUIA
SR. ALVARO VALENCIA M.

: 7°

siete

Alvario

PROFESOR INTEGRANTE
SR. RODRIGO HERNANDEZ P.

: 7.0

siete

Rodriguez

NOTA FINAL EXAMEN DE TITULO

: 7°

siete

Alvario

MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL MECANICO

981-7507

SANTIAGO DE CHILE
ENERO 2001

RESUMEN

El método de volúmenes de control finitos en su versión SIMPLER ha sido usado con éxito en la solución de problemas convectivos. Las versiones de este método usadas en el Departamento de Ingeniería Mecánica exhiben una truncación nominal de orden uno, sin haberse estudiado formas de elevar este orden.

La resolución numérica del sistema de ecuaciones de continuidad, movimiento y energía se basa en discretizar las ecuaciones diferenciales. El orden de truncación de las soluciones surge, entre otros factores, de la forma de discretización de los flujos de masa en las caras de los volúmenes de control.

El presente trabajo tuvo como objetivo implementar y validar un algoritmo para resolver los campos de velocidad y temperatura, número de Nusselt y velocidades máximas para la convección natural en recintos rectangulares bidimensionales, usando el método SIMPLER con una discretización de 2^{do} orden para los términos de inercia. Para un número de Rayleigh de 10^4 se estudió el efecto de esta discretización, respecto a una de primer orden, sobre la predicción de la transferencia de calor total, campos de flujo y temperatura, y orden empírico de truncación, para cuatro problemas de convección natural confinada, tres de ellos con gradiente térmico horizontal (cavidad cuadrada, alta y baja) y el cuarto con gradiente vertical (problema de Bénard).

Se considera un fluido incompresible que cumple la hipótesis de Boussinesq. Los tres primeros problemas se resolvieron en forma permanente y el cuarto en forma transiente, ya que no posee solución permanente. Se usaron mallas uniformes, de igual paso en ambas direcciones. Los pasos utilizados para los tres primeros problemas fueron 0.0125, 0.025 y 0.05. Para el cuarto problema el paso fue 0.025.

Se estudió la influencia en la precisión y orden de truncación de las soluciones para el problema de la cavidad cuadrada, producto del nivel de convergencia en los algoritmos internos de SIMPLER con discretización de primer orden. En base a este estudio se decidió fijar el número de iteraciones en los algoritmos internos, lo que se aplicó tanto para la discretización de 1er orden (Convencional) como la de 2° orden (QUICK), obteniendo buenos resultados. Usando SIMPLER Convencional en los primeros problemas, con 50 iteraciones en el algoritmo de temperatura, se determinó el número de iteraciones en los algoritmos de presión que minimiza el error en el número de Nusselt. Esto sólo se logró en SIMPLER QUICK con las mallas gruesa e intermedia del primer problema. En el cuarto problema coinciden los resultados de SIMPLER Convencional y SIMPLER QUICK a altos números de iteraciones en algoritmos de presión.

La precisión y orden de las soluciones entregadas por el método SIMPLER Convencional puede ser controlada fijando el nivel de convergencia en los algoritmos internos. La ventaja de SIMPLER QUICK se manifiesta solo en mallas gruesas, obteniéndose bajos errores tanto en el número de Nusselt como en las velocidades.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor guía de esta memoria, Sr. Ramón Frederick, por su excelente voluntad, buena disposición y dedicados consejos, lo que contribuyó de forma importante en el desarrollo y término de esta memoria. Así mismo, le agradezco a los profesores de la comisión, Sr. Alvaro Valencia y Sr. Rodrigo Hernández, por sus importantes aportes para enriquecer el trabajo realizado en esta memoria.

Atentamente,
Williams Calderón Muñoz

Índice

Nomenclatura	2
1. Introducción	3
1.1. Objetivo general	3
1.2. Objetivos específicos	3
2. Discusión Bibliográfica	6
2.1. Fenómeno físico	6
2.2. Método	11
3. Formulación	12
3.1. Ecuaciones de Convección Natural en un espacio cerrado (cavidad cerrada) Ecuaciones dimensionales	12
3.2. Geometría y otras condiciones de los problemas estudiados	13
3.3. Parámetros de adimensionalización	14
3.4. Definición de Número de Nusselt	15
3.5. Forma adimensional de las ecuaciones	18
3.6. Condiciones de borde	17
3.7. Condiciones iniciales ($t=0$)	17
4. Discretización y Método de Solución	19
4.1. Relaciones Generales de movimiento discretizadas	19
4.2. Evaluación de flujos en las ocasiones de Movimiento	20
4.3. Método de Solución	21
5. Metodología Específica	26
5.1. Criterio de detección de los algoritmos internos	28
6. Resultados Numéricos	36
6.1. SIMPLER Convencional con números fijos de iteraciones	37
6.2. SIMPLER QUICK	38
6.3. Efecto del número de Rayleigh en la determinación del óptimo N_p	39
6.4. Regla empírica para asignar un óptimo N_p	40
6.5. Magnitud relativa de los errores	41
6.6. Discrepancias Neta	43
6.7. Combinación de Criterio de detección en Temperature y N_p fijos	44
6.8. Problema de la cavidad de Bénard	51
7. Conclusiones	66
8. Bibliografía	73

*A mis Padres y Hermanas
A mis Tíos Adriana y Enrique*

Indice

Nomenclatura	2
1. Introducción	3
1.1 Objetivo general	4
1.2 Objetivos específicos	4
2 Discusión Bibliográfica	6
2.1 Fenómeno físico	6
2.2 Método	11
3 Formulación	12
3.1 Ecuaciones de Convección Natural en un espacio cerrado (cavidad cerrada) Ecuaciones dimensionales	12
3.2 Geometría y otras condiciones de los problemas estudiados	13
3.3 Parámetros de adimensionalización	14
3.4 Definición de Número de Nusselt	15
3.5 Forma adimensional de las ecuaciones	16
3.6 Condiciones de borde	17
3.7 Condiciones iniciales ($\tau=0$)	17
4 Discretización y Método de Solución	19
4.1 Ecuaciones Generales de movimiento discretizadas	19
4.2 Evaluación de flujos en las ecuaciones de Movimiento	20
4.3 Método de Solución	23
5 Metodología Específica	25
5.1 Criterio de detención de los algoritmos internos	28
6 Resultados Numéricos	30
6.1 SIMPLER Convencional con números fijos de iteraciones	32
6.2 SIMPLER QUICK	35
6.3 Efecto del número de Rayleigh en la determinación del óptimo N_p	39
6.4 Regla empírica para asignar un óptimo N_p	40
6.5 Magnitud relativa de los errores	41
6.6 Discretización Mixta	43
6.7 Combinación de Criterio de detención en Temperatura y N_p fijos	44
6.8 Problema de la cavidad de Bénard	51
7 Conclusiones	66
8 Bibliografía	73

Nomenclatura

- $e\%$: Error porcentual.
 g : Aceleración de gravedad [m/s^2].
 m : Número de nodos en eje vertical.
 n : Número de nodos en eje horizontal.
 Nu : Número de Nusselt global medio.
 Pr : Número de Prandtl.
 p_T : Presión total [N/m^2].
 P_T : Presión total adimensional.
 Ra : Número de Rayleigh.
 t : Tiempo [s].
 T : Temperatura [K].
 T_m : Temperatura media [K].
 T_o : Temperatura de referencia en aproximación de Boussinesq [K].
 u, v : Velocidades horizontal y vertical, respectivamente [m/s].
 U, V : Velocidades adimensionales horizontal y vertical, respectivamente.
 U_{max} : Velocidad horizontal máxima.
 V_{max} : Velocidad vertical máxima.
 x, y : Coordenadas horizontal y vertical, respectivamente.
 X, Y : Coordenadas adimensionales horizontal y vertical, respectivamente.

Letras Griegas

- α : Difusividad térmica del fluido [m^2/s].
 β : Coeficiente de expansión volumétrica del fluido [K^{-1}].
 ϕ_{ab} : Velocidad horizontal en el nodo a,b.
 ν : Coeficiente de viscosidad cinemática [m^2/s].
 ρ_o : Densidad del fluido [kg/m^3].
 Θ : Temperatura adimensional.
 $\Delta x, \Delta y$: Pasos de malla horizontal y vertical, respectivamente.
 τ : Tiempo adimensional.

1. Introducción

Durante las décadas de los 80 y 90 se produjo un gran auge en la investigación de fenómenos fluidodinámicos y de transferencia de calor. Esto se logró gracias a los avances en las metodologías de resolución numérica de las ecuaciones gobernantes, en paralelo con la aparición de computadores cada vez más poderosos.

Los problemas de flujo y transferencia de calor por convección se formulan mediante las ecuaciones de movimiento (Navier-Stokes), continuidad y energía, que son ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, distinguiéndose las formas parabólicas (para problemas de capa límite) y las formas elípticas para flujos recirculantes. Las ecuaciones de movimiento y energía contienen términos de inercia o convectivos, que son no lineales, términos difusivos o conductivos y términos fuente.

Para la resolución simultánea de las citadas ecuaciones en problemas elípticos existen métodos como el de función corriente y vorticidad, que son sencillos de aplicar gracias a la eliminación del campo de presión. Su mayor limitación es su habilidad para resolver solo casos bidimensionales.

Los métodos de volúmenes de control finitos, en cambio, que se originan en estudios de Patankar [1], resuelven las ecuaciones primitivas de movimiento, y son aptos para problemas bi o tridimensionales indistintamente.

El método de volúmenes de control finitos ha sido usado con éxito en la solución de problemas de transferencia de calor por convección. Por este método se resuelven las ecuaciones que gobiernan los campos de flujo y de temperatura. Las no linealidades inherentes a los términos de inercia y convectivos se resuelven por iteración. Gran parte de las investigaciones numéricas en esta área desde 1987 se han basado en el uso de estos métodos. Hasta el momento en el Departamento de Ingeniería Mecánica se han usado versiones de este método (SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC) que exhiben una truncación nominal de orden uno, y no se han explorado formas de elevar este orden.

La resolución numérica del sistema de ecuaciones resultante de la formulación matemática de un problema, se basa en discretizar las ecuaciones diferenciales para convertirlas en sistemas de ecuaciones algebraicas. El orden de truncación de las soluciones surge, entre otros factores, de la forma de discretización de los flujos de masa que ingresan o egresan de los volúmenes de control (provenientes de los términos de inercia y convectivos). Para efectuar esta discretización se han usado en general formas lineales de primer orden (que usan información de dos nodos para interpolar los flujos de masa en las caras de un volumen de control), con lo cual se obtienen en la mayoría de los casos soluciones estables, aunque se postula que la precisión puede ser mejorada por inclusión, dentro de la misma estructura del método, de esquemas de discretización de orden superior, que extraen información de un mayor número de nodos.

En el uso de métodos de función corriente y vorticidad para flujos altamente convectivos y recirculantes, se ha comprobado que introducir esquemas de orden superior ayuda a obtener grandes niveles de precisión con mallas relativamente gruesas. Esto es beneficioso tanto desde el punto de vista de economía computacional como por la posibilidad de abordar problemas de mayor magnitud y complejidad, dado que se postula que los métodos de bajo orden necesitan de mallas muy finas para lograr buena precisión.

Entre los fenómenos no lineales de convección que sirven para probar y validar métodos numéricos se cuentan los fenómenos de convección natural confinada. En tales fenómenos existe un acoplamiento entre los campos de flujo y temperatura, dado que la temperatura aparece en las ecuaciones de movimiento como término fuente (en las fuerzas de empuje que actúan sobre el fluido). Muchos problemas de convección natural poseen soluciones de referencia conocidas que permiten validar esquemas numéricos y programas. Por el hecho de generar altos gradientes de velocidad y temperatura en la vecindad de las paredes, estos problemas requieren de una alta precisión de los métodos de solución para describir las recirculaciones.

1.1 Objetivo general

Implementar y validar un algoritmo para resolver los campos de velocidad y temperatura en recintos rectangulares bidimensionales, usando el método de volúmenes de control finitos en su versión SIMPLER con una discretización de 2^{do} orden para los términos convectivos de las ecuaciones de movimiento.

1.2 Objetivos específicos

- Implementar la discretización de segundo orden para los flujos en las ecuaciones de movimiento resultantes de la convección natural de un fluido confinado en una región rectangular (2D).
- Adaptar y probar el programa resultante para cuatro problemas de convección natural confinada:
 1. Cavidad cuadrada con paredes verticales a temperaturas impuestas.
 2. Cavidad de alta razón de aspecto con paredes verticales a temperaturas impuestas.
 3. Cavidad de baja razón de aspecto con paredes verticales a temperaturas impuestas.
 4. Cavidad con condiciones de Bénard (con paredes horizontales a temperaturas impuestas).

- Evaluar la precisión obtenida en la descripción de estos problemas. Como estándar de comparación, se usarán soluciones de referencia (“benchmark”) conocidas, en los casos en que estas estén disponibles. Estas soluciones especifican valores de velocidades máximas, flujo de calor transferido (número de Nusselt) y función corriente (ψ).
- Precisar los rangos de convergencia de las soluciones.
- Obtener empíricamente el orden de truncación de las soluciones mediante el procedimiento denominado “extrapolación de Richardson”. (Dado que los términos de inercia, los términos viscosos y los términos fuente se discretizan separadamente, el orden total de discretización de las ecuaciones no corresponde al orden supuesto de discretización de cada término en forma individual).
- Comparar los resultados obtenidos de la discretización de segundo orden con los obtenidos con la discretización de primer orden (llamada en esta memoria “método SIMPLER Convencional”).

Los casos a estudiar corresponden a aproximaciones bidimensionales de casos que son esencialmente tridimensionales. La hipótesis de bidimensionalidad entrega resultados buenos en los tres primeros problemas, especialmente para números de Rayleigh hasta 10^5 . No ocurre lo mismo con el problema de Bénard, que es esencialmente tridimensional y para el cual, si bien existen buenas soluciones bidimensionales, es posible dudar de su realidad física.

El estudio se efectuará casi exclusivamente para un valor particular de número de Rayleigh, $Ra=10^4$, pero se realizarán algunas pruebas de las capacidades de ambos métodos de discretización para un número de Rayleigh superior.

2 Discusión Bibliográfica

Los antecedentes bibliográficos pueden ser divididos en dos ámbitos:

- Fenómeno físico.
- Método.

2.1 Fenómeno físico

Los trabajos relevantes acerca del fenómeno físico se mencionan y describen en forma breve a continuación:

Ostrach [2] describe algunos de los problemas más importantes de convección natural confinada, destacando su interés en ciencia y tecnología. Muestra que estos fenómenos plantean grandes desafíos, tanto físicos como matemáticos. Las complejidades del fenómeno se derivan del acoplamiento entre el flujo y la transferencia de calor, y también de la interacción entre zonas de pared (“capa límite”) y el flujo en el núcleo de la cavidad. Muestra las dificultades de una modelación numérica para detectar apropiadamente el comportamiento del flujo, caracterizado por celdas mayores y sub celdas, según sea la distribución de las fuentes térmicas.

Vahl Davis [3] en base al método de función corriente-vorticidad, y usando resultados para varios tamaños de malla, estableció un esquema de extrapolación (a paso de malla igual a cero) que puede ser usado para generar una solución de gran precisión. El problema abordado por Vahl Davis consistía en una cavidad cuadrada con temperaturas impuestas en las paredes verticales y con paredes horizontales adiabáticas, para el cual se obtuvieron soluciones (velocidades, temperaturas y tasas de transferencia de calor) usando distintas mallas y números de Rayleigh, de $Ra=10^3$ a $Ra=10^6$. Estas soluciones (que consideran sólo el régimen permanente) han sido usadas como referencia para validar procedimientos numéricos. La idea central aplicada por Vahl Davis corresponde a que si el error de truncación de las soluciones no es conocido, éste puede ser estimado desde los resultados de tres tamaños de malla diferentes, basado en el supuesto de que ellos tienen un set de puntos de malla en común. La solución obtenida por Vahl Davis ha sido un estándar de validación de algoritmos numéricos por casi dos décadas.

A continuación se da una descripción más detallada del esquema propuesto por Vahl Davis,

Sea

Xt: valor verdadero de una variable dependiente en un punto de la malla.

Xi: valor obtenido a partir de un tamaño de malla h_i entonces,

$$X_i = X_i + Ch_i^n$$

donde n es el orden del error de truncación y C se asume que es independiente de h . Luego, n es dado por la solución de:

$$\frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3} = \frac{h_1^n - h_2^n}{h_2^n - h_3^n}$$

para cada punto de la malla, si $\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3} = \lambda$,

$$n = \frac{\ln \frac{X_1 - X_2}{X_2 - X_3}}{\ln \lambda}$$

Con esta expresión se puede obtener el orden de truncación de la variable dependiente estudiada, a partir de soluciones para tres mallas diferentes.

La constante C puede así ser encontrada para cada punto de la malla y, por lo tanto, se puede obtener el valor verdadero de X_i .

Lee y Korpela [4] estudiaron el flujo en cavidades de alta razón de aspecto. Utilizaron el método de función corriente y vorticidad en su versión transiente. En estos casos el flujo para diferentes números de Rayleigh es predominantemente vertical, con dos flujos de direcciones opuestas que interactúan en el eje de simetría vertical. Para ciertas razones de aspecto ($A > 12$) y $Ra > 7000$, la interacción de estos flujos opuestos genera recirculaciones múltiples. Salvo los casos en que hay recirculaciones múltiples, el régimen de transferencia de calor es predominantemente conductivo, excepto en los extremos superior e inferior, en que el fluido gira. A medida que crece la razón de aspecto para un Ra dado, las velocidades verticales aumentan y, sin embargo, disminuye el número de Nusselt promedio en las paredes ya que la velocidad horizontal decrece con el aumento en la razón de aspecto. Este problema plantea dificultades mayores (desde el punto de vista numérico) que en las cavidades cuadradas. La mayoría de estos estudios usan la formulación basada en la función corriente y la vorticidad, en la cual, mediante la eliminación del campo de presión, se facilita la resolución numérica de problemas 2D.

En un estudio posterior, Ramanan y Korpela [5] aplican en forma directa la aproximación permanente para tratar este problema, considerando que conduce a soluciones estacionarias, en vista de los resultados de su trabajo [4].

Wang y Korpela [6] estudiaron las inestabilidades secundarias de convección natural en una cavidad baja calentada desde una pared. El análisis de las inestabilidades primarias por teoría lineal en mercurio con un número de Prandtl, $Pr=0.027$, muestra que un conjunto de inestabilidades aparecen como células transversales a un número Grashof, $Gr=9157.6$. A partir de $Gr=10608.4$ se originan inestabilidades que resultan en rollos longitudinales oscilatorios. Los resultados acerca de las inestabilidades secundarias de los estados de equilibrio de las células transversales, muestran que la inestabilidad como rollos oscilatorios longitudinales reaparece a los valores más grandes de número de Grashof, aunque ligeramente retardada por la presencia de las células transversales. El modo principal de flujo consiste en una recirculación básicamente horizontal, en que las dos velocidades máximas crecen con la razón de aspecto para un número de Rayleigh dado.

El problema de la Cavidad Cuadrada es el más importante, ya que presenta un caso resoluble con mayor facilidad. Predominan en este caso las fuerzas de empuje y las de inercia resultantes de estas, lográndose altas velocidades de flujo en las dos direcciones, las cuales aumentan con el número de Rayleigh.

Para las cavidades de razón de aspecto muy bajas o muy altas, las fuerzas viscosas inhiben la circulación y por lo tanto reducen el número de Nusselt. El punto de transición entre los dos tipos de flujo se sitúa, para bajos números de Rayleigh, en razones de aspecto entre 1 y 2 [7], y corresponde a la razón de aspecto en que la máxima velocidad horizontal comienza a disminuir con aumentos de la razón de aspecto, para un número de Rayleigh fijo. Los altos gradientes de velocidad presentes en los casos de alta razón de aspecto dificultan su resolución.

Ozoe y Hara [8] estudiaron la convección de Rayleigh-Bénard bidimensional, por resolución directa de las ecuaciones gobernantes, usando el método de función corriente - vorticidad. Las razones de aspecto fueron de 1 a 0.25, usando números de Prandtl de 0.1 a 0.01 y números de Rayleigh hasta 16000 (definido en términos de la altura de la cavidad).

El carácter oscilatorio de la configuración de flujo no se manifestó para la cavidad cuadrada. Al bajar progresivamente la razón de aspecto el comportamiento oscilatorio se presentó a números de Rayleigh cada vez más bajos. Para la cavidad más baja se forman entre 4 y 6 rollos paralelos, en los cuales su forma y la posición del eje de rotación varían levemente en el tiempo, observándose indicios de periodicidad espacial (ver Figura 1). Para obtener estos resultados los autores tuvieron que usar un paso de tiempo extremadamente pequeño (10^{-6}).

Figura 1. Campos de velocidad en las cavidades para $Ar=10$ en el centro de la cavidad.

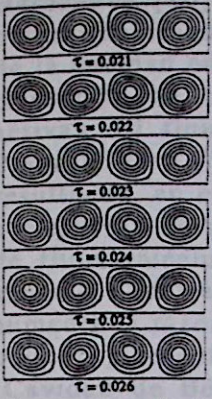


Figura 1. Serie de contornos de función corriente para dos periodos de oscilación, $A=0.25$, $Pr=0.01$ y $Ra=7000$.

Hernández y Frederick [9] estudiaron en forma tridimensional la convección natural en un paralelepípedo con condiciones de Bénard (pared inferior caliente y pared superior fría). Bajo un número de Rayleigh, $Ra=8 \times 10^3$, se rastreó la evolución de las estructuras de la convección, sólo en función de la razón de aspecto, A . Desde una razón de aspecto baja a una alta ($A=1$ a $A=5$), una estructura unicelular evoluciona a multicelular. Esta transición tiene las características de una bifurcación de flujos controlados por la razón de aspecto. La Figura 2 muestra la configuración de isotermas y vectores de velocidad para las razones de aspecto $A=2$ y $A=5$. Las mayores variaciones del número de Nusselt global ocurren cuando hay cambios en razones de aspecto bajas. Para la razón de aspecto unitaria el número de Nusselt global es levemente superior a uno (aproximadamente 1.12).

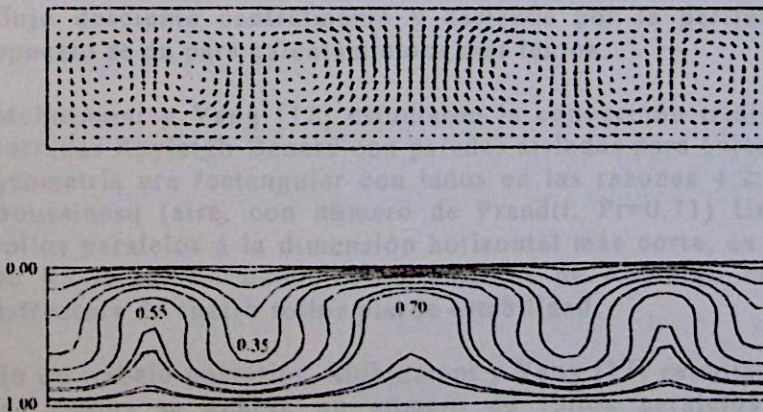


Figura 2. Campos de velocidad e isotermas para $A=5$ en el centro de la cavidad.

Hernández [10] estudió en forma tridimensional el fenómeno de convección natural confinada. Específicamente, estudió la influencia de la razón de aspecto de la cavidad en la formación de estructuras de flujo convectivo y en la tasa de transporte de calor en cavidades paralelepípedas con dos paredes opuestas activas. El fluido estaba sujeto a la hipótesis de Boussinesq, de número de Prandtl, $Pr=0.71$. Para un número de Rayleigh, $Ra=8 \times 10^3$, de acuerdo a los resultados, en el caso en que el gradiente de temperatura es perpendicular a la aceleración de gravedad las configuraciones se caracterizan por una estructura de flujo unicelular, la cual es estable frente a las variaciones en la razón de aspecto. Además, el flujo de calor en la cavidad disminuye a medida que aumenta la razón de aspecto (número de Nusselt total). En cambio en el caso en que el gradiente de temperatura es paralelo a la aceleración de gravedad (Cavidad de Bénard, $Ra=64000$), las configuraciones se caracterizan por una formación convectiva de tipo toroidal, con un eje de simetría vertical que pasa por el centro de la cavidad. Con la disminución de la razón de aspecto, la estructura de flujo se hace multicelular, por medio de sucesivas formaciones toroidales concéntricas. Las estructuras toroidales uniformizan el flujo de calor, originando un comportamiento asintótico de éste en función de la razón de aspecto. Cerca de las paredes verticales el flujo es siempre descendente.

Hernández [11] estudió en forma tridimensional la dinámica en el tiempo de la convección en una cavidad cerrada Rayleigh-Bénard originada por diferentes tasas de calentamiento, para un fluido de Boussinesq con número de Prandtl, $Pr=0.71$. Las razones de aspecto de la caja rectangular fueron $A=0.5$ y $A=0.8$. Se plantea que la tasa de calentamiento se introduce por medio de un aumento progresivo en el tiempo del número de Rayleigh (de forma lineal), que determina una transición en el flujo por lo menos en el rango de números de Rayleigh supercríticos considerados para resolver las ecuaciones gobernantes ($Rs=3.6 \times 10^3, 5 \times 10^3, 9 \times 10^3, 1.3 \times 10^4$ y 1.6×10^4 , definidos a partir de la altura de la cavidad). La transición en el flujo se identifica por un cambio en el sentido de rotación de un patrón de fluido con dos rollos. Para calentamientos rápidos, el flujo desciente centralmente y asciende por la periferia. El comportamiento opuesto se da para calentamientos más lentos.

Mukutmoni y Yang [12] estudiaron la convección tridimensional en cavidades cerradas Rayleigh-Bénard con paredes aisladas para bajas razones de aspecto. La geometría era rectangular con lados en las razones 4:2:1. Se asumió un fluido Boussinesq (aire, con número de Prandtl, $Pr=0.71$) Una estructura de cuatro rollos paralelos a la dimensión horizontal más corta, es estable para un número de Rayleigh, $Ra=64000$. Para números de Rayleigh entre 64000 y 80000 la estructura de cuatro rollos pierde estabilidad.

En un trabajo posterior, Mukutmoni y Yang [13] estudiaron las condiciones bajo las cuales se genera un número de rollos paralelos mayor que cuatro, y mostraron la transición de este régimen al de celdas poligonales.

Todos los estudios anteriores se basaron en la solución numérica directa de las ecuaciones gobernantes, sin otros medios matemáticos más avanzados. Lo anterior justifica el enfoque adoptado en el presente trabajo.

2.2 Método

Patankar [1] desarrolló un método para resolver las ecuaciones de transporte de una magnitud escalar (calor o masa) y también para resolver el campo de flujo en base a las ecuaciones primitivas (con término fuente de gradiente de presión). Divide la región de análisis en volúmenes de control disjuntos. Sobre estos volúmenes se integra cada una de las ecuaciones gobernantes para generar ecuaciones discretizadas.

El acoplamiento del término fuente de presión con las velocidades genera la necesidad de definir volúmenes de control desplazados para las componentes de la velocidad, con nodos especiales para velocidades, también desplazados en relación a los del volumen de control principal, que se reservan para las variables escalares: temperatura y presión.

Las ecuaciones de movimiento son no lineales, pero pueden ser resueltas por iteraciones sucesivas. La ecuación discretizada genérica entrega la dependencia de la variable estudiada en un nodo (ya sea velocidad o temperatura, por ejemplo) en función de las variables similares en nodos vecinos:

$$a_e U_e = \sum_{i=\text{vecinos}} a_i U_i + \text{Fuente}$$

en que U_e es la componente de velocidad correspondiente a la coordenada x en el volumen de control genérico, y los U_i son las cuatro velocidades correspondientes a los volúmenes de control vecinos a éste. El término Fuente contiene el gradiente de presión en la dirección de la velocidad considerada y eventualmente el término de empuje, en el caso en que esa velocidad sea paralela al vector aceleración de gravedad. La ecuación discretizada para la temperatura se reduce a una forma similar. Los coeficientes a constan de una parte difusiva y una convectiva. La parte convectiva es el flujo de masa a través de las caras del volumen de control.

La aproximación más común para calcular estos flujos es la lineal; es decir, se supone que el flujo de masa a través de las caras del VC (volumen de control) puede representarse como el promedio de los flujos en los nodos a ambos lados de la cara.

Se supone que una mejor aproximación de los flujos de masa se obtendría mediante una interpolación cuadrática, lo que implica usar velocidades en tres puntos alrededor de la cara del VC para definir el flujo de masa. Lo anterior constituye la base del método QUICK [14,15] (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics). La aplicación de este método genera términos de segundo orden en la discretización de las ecuaciones de movimiento, a partir de las componentes convectivas.

3 Formulación

El sistema de Ecuaciones para este problema es conocido, por lo tanto, no se deducirá.

Las ecuaciones son presentadas en forma Bidimensional, cartesiana, para flujo laminar incompresible, de propiedades físicas constantes y con la aproximación de Boussinesq.

3.1 Ecuaciones de Convección Natural en un espacio cerrado (cavidad cerrada) Ecuaciones dimensionales

- Ecuación de Continuidad o Conservación de la Masa, con Restricción de Incompresibilidad.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Esta ecuación, en términos matemáticos, impone un campo de velocidad "solenoidal", es decir, cuya divergencia es nula.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

- Ecuaciones de Cantidad de Movimiento o de Navier-Stokes.

Ecuación según "x":

$$\rho_o \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_T}{\partial x} + \rho_o \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Ecuación según "y":

$$\rho_o \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p_T}{\partial y} + \rho_o \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_o g \beta (T - T_o)$$

En estas ecuaciones, los términos del lado izquierdo se denominan “términos de inercia o convectivos”; los primeros del lado derecho son los “gradientes de presión”; los segundos del lado derecho son los “términos difusivos o viscosos” y el término $\rho_0 g \beta (T - T_0)$ es el “término de empuje térmico”. Además, vale la pena resaltar que se ha usado la aproximación de Boussinesq, para representar el término de empuje.

- Ecuación de Balance de Energía o Ecuación del Calor.

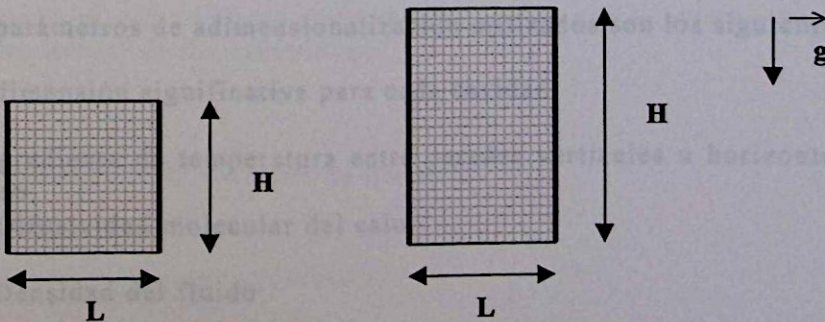
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

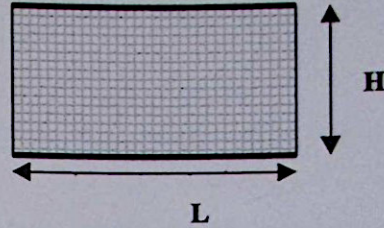
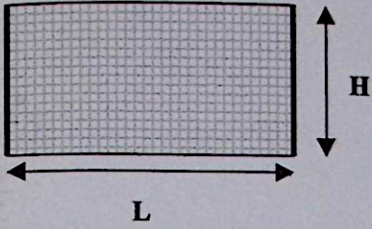
En forma similar a las ecuaciones de Navier-Stokes, el primer miembro representa a los “términos convectivos” y, el segundo, a los “términos difusivos o conductivos”. Se han despreciado los términos disipativos (ya que para aire en la forma adimensional de las ecuaciones quedan multiplicados por un factor muy pequeño), que constituirían un término fuente cuadrático en términos de gradientes de velocidad, y dependiente de la viscosidad.

Las ecuaciones anteriores están escritas bajo las siguientes hipótesis:

- Flujo Bidimensional.
- Fluido incompresible.
- Cumplimiento de la hipótesis de Boussinesq.

3.2 Geometría y otras condiciones de los problemas estudiados





Se indican con línea gruesa los bordes de temperatura impuesta. Los otros bordes se suponen adiabáticos.

Se consideran como:

Dimensión significativa: el ancho de la cavidad, L .

T_1, T_2 : temperaturas de paredes caliente (izquierda o inferior) y fría respectivamente.

H : altura cavidad.

$$\Delta T = T_1 - T_2.$$

Fluido: Aire ($Pr = \frac{\nu}{\alpha} = 0.71$).

El número de Rayleigh, $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$. (Se define en términos de L)

La razón de aspecto de la cavidad es $A = \frac{H}{L}$.

3.3 Parámetros de dimensionalización

Los parámetros de dimensionalización utilizados son los siguientes:

L : dimensión significativa para cada cavidad.

ΔT : gradiente de temperatura entre paredes verticales u horizontales, según sea el caso.

α : Difusividad molecular del calor.

ρ : Densidad del fluido.

$$X = \frac{x}{L}$$

$$U = \frac{u}{\alpha/L}$$

$$Y = \frac{y}{L}$$

$$V = \frac{v}{\alpha/L}$$

$$P_T = \frac{P_T}{\rho(\alpha/L)^2}$$

$$\Theta = \frac{T - T_m}{T_1 - T_2}$$

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Si bien es posible usar otros parámetros de adimensionalización, como ν (viscosidad cinemática) en lugar de α en las velocidades, tiempo y presión adimensionales, se adoptó la adimensionalización que usa Vahl Davis [3], para poder comparar directamente nuestros valores de velocidad con los que se especifican en [3] sin tener que aplicar factores. Los valores de Nu son invariantes con la adimensionalización usada.

La temperatura adimensional, Θ , varía entre +0.5 y -0.5 (en las paredes caliente y fría respectivamente). Los valores positivos indican empuje localmente hacia arriba. Otra alternativa de adimensionalización hace variar la temperatura adimensional entre 0 y 1. Si bien no hay ninguna diferencia entre los resultados de velocidad y número de Nusselt obtenidos con ambas adimensionalizaciones, se considera que la usada tiene mejor asidero que la otra en lo que respecta al planteo inicial de las ecuaciones.

3.4 Definición de Número de Nusselt

Para los tres primeros problemas:

El número de Nusselt local se define de la siguiente forma:

$$Nu_{local} = \left| U\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial X} \right|_{X=X^*}$$

para todos los nodos ubicados en el plano vertical medio de la cavidad ($X^*=0.5$), pudiendo definirse para otros planos.

Entonces, el número de Nusselt Global Medio se define de la siguiente manera:

$$Nu_{global\ medio} = \frac{1}{H} \int_0^H Nu_{local} dY$$

donde H es la altura de la cavidad.

Para resolver esta integral se efectúa un promedio aritmético entre los números de Nusselt locales.

Para el problema de la Cavidad de Bénard, las definiciones correspondientes de números de Nusselt local y Nusselt global medio son:

$$Nu_{local} = \left| V\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial Y} \right|_{Y=Y^*}$$

para todos los nodos ubicados en el plano horizontal medio de la cavidad ($Y^*=0.5$), pudiendo definirse para otros planos.

Entonces,

$$Nu_{global\ medio} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_{local} dX$$

donde L es el ancho de la cavidad.

3.5 Forma adimensional de las ecuaciones

Expresando las variables dimensionales en función de las adimensionales, sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones y reduciendo factores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales:

a) Ecuación de Continuidad o Restricción de Incompresibilidad:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

b) Ecuaciones de Cantidad de Movimiento o de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P_T}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P_T}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Pr} Ra \Theta$$

c) Ecuación de Balance de Energía:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right)$$

3.6 Condiciones de borde

Las condiciones de borde aplicadas a los cuatro problemas en estudio son las siguientes:

- Velocidad cero en todas las paredes, $U_i=0$.
- $\Theta = +0.5$ o -0.5 en la pared caliente y fría respectivamente.
- Condición de aislación térmica, $\frac{\partial \Theta}{\partial X_i} = 0$.

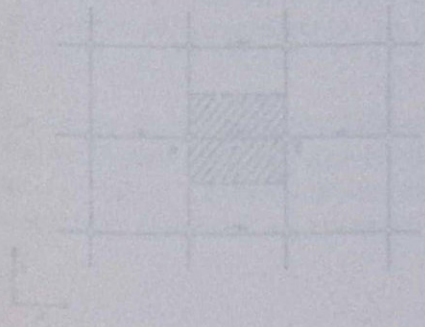
3.7 Condiciones iniciales ($\tau=0$)

Las condiciones iniciales aplicadas para la resolución de los problemas en estudio son las siguientes:

- Velocidad vertical y horizontal igual a cero en todos los nodos, $U_{ij}=V_{ij}=0$.
- Temperatura igual a cero en todos los nodos para los tres primeros problemas.
- Perfil lineal de temperatura en toda la región a lo largo de la coordenada Y (en cuyos extremos están las paredes caliente y fría), para la Cavity de Bénard.

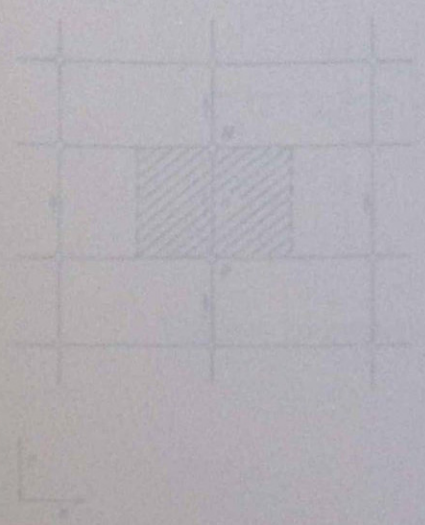
Se resuelve por integración sobre cada variable independiente de las ecuaciones de movimiento sobre volúmenes de control desplazados con respecto al volumen de control principal, en la dirección positiva de la coordenada correspondiente a cada velocidad.

Ecuación para u



$$a_u u_i = \sum a_{u,n} u_n + b + (p_p - p_s) A_i$$

Ecuación para v



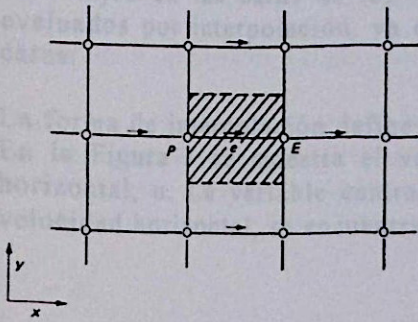
$$a_v v_i = \sum a_{v,n} v_n + b + (p_e - p_w) A_i$$

4 Discretización y Método de Solución

4.1 Ecuaciones Generales de movimiento discretizadas [1]

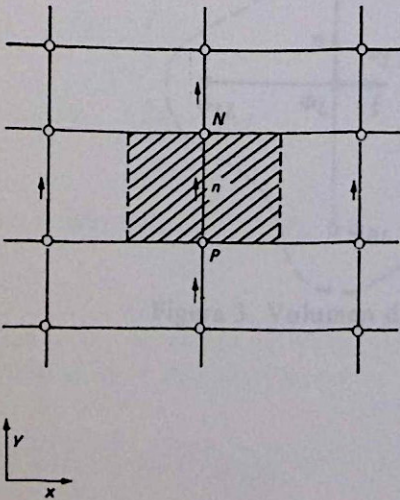
Se establecen por integración sobre cada variable independiente de las ecuaciones de movimiento sobre volúmenes de control desplazados con respecto al volumen de control principal, en la dirección positiva de la coordenada correspondiente a cada velocidad.

Ecuación según "x"



$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e$$

Ecuación según "v"



$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_P - p_N) A_n$$

Los coeficientes que aparecen en las ecuaciones discretizadas tienen una parte difusiva y una convectiva. Para la parte difusiva se utiliza la formulación upwind con coeficiente correctivo del tipo ley de potencia.

En la parte convectiva aparecen flujos de masa que deben ser evaluados por interpolación en las caras del Volumen de Control de velocidad. En la evaluación de estos flujos de Masa, se ensayarán dos formas de interpolación.

4.2 Evaluación de flujos en las ecuaciones de Movimiento [14]

Los flujos en las caras de los Volúmenes de Control de velocidad deben ser evaluados por interpolación, ya que no se tienen valores de velocidad en estas caras.

La forma de interpolación define la diferencia entre los dos métodos a estudiar. En la Figura 3 se muestra el volumen de control genérico para la velocidad horizontal, u . La variable central de este volumen de control, en este caso la velocidad horizontal, se encuentra representada por ϕ .

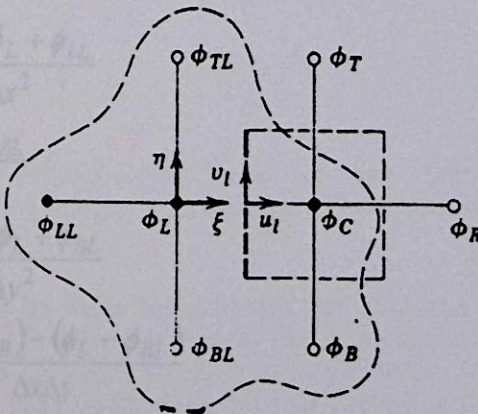


Figura 3. Volumen de Control

Flujos para la Ecuación de Movimiento según x: (Velocidad U)

- **SIMPLER Estándar (interpolación lineal).**

$$\phi_l = \frac{1}{2}(\phi_C + \phi_L) = \phi_{LIN}$$

- **SIMPLER QUICK (interpolación cuadrática).**

Se postula que la superficie de interpolación cuadrática tiene la siguiente forma:

$$\phi = C_1 + C_2\xi + C_3\xi^2 + C_4\eta + C_5\eta^2 + C_6\xi\eta$$

donde los coeficientes se obtienen por evaluación en siete nodos.

Dada las características de la implementación realizada, para $u_i \geq 0$ y $v_i \geq 0$ los coeficientes se obtienen aplicando la forma cuadrática a cada uno de los nodos involucrados, luego se resuelve el sistema de ecuaciones resultante, entregando los siguientes valores para los coeficientes:

$$C_1 = \phi_L$$

$$C_2 = \frac{\phi_C - \phi_{LL}}{2\Delta x}$$

$$C_3 = \frac{\phi_C - 2\phi_L + \phi_{LL}}{2\Delta x^2}$$

$$C_4 = \frac{\phi_{TL} - \phi_{BL}}{2\Delta y}$$

$$C_5 = \frac{\phi_{TL} - 2\phi_L + \phi_{BL}}{2\Delta y^2}$$

$$C_6 = \frac{(\phi_C - \phi_B) - (\phi_L - \phi_{BL})}{\Delta x \Delta y}$$

Con esto, se define el Valor Promedio del Flujo en la cara del Volumen de Control de la siguiente forma:

$$\phi_l = \frac{1}{\Delta y} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \phi\left(\frac{\Delta x}{2}, \eta\right) d\eta$$

resolviendo la integral, se obtiene la siguiente expresión:



$$\phi_i = \phi_{LIN} - \frac{1}{8}CURVN\Delta x^2 + \frac{1}{24}CURVT\Delta y^2$$

$CURVN$: curvatura normal.

$CURVT$: curvatura transversal.

$$\phi_{LIN} = \frac{1}{2}(\phi_C + \phi_L)$$

Los dos últimos términos de la expresión para ϕ_i dependen del sentido que tenga la velocidad en la cara, u_i .

Para $u_i > 0$

$$CURVN = \frac{\phi_C - 2\phi_L + \phi_{LL}}{\Delta x^2}$$

$$CURVT = \frac{\phi_{TL} - 2\phi_L + \phi_{BL}}{\Delta y^2}$$

Para $u_i < 0$

$$CURVN = \frac{\phi_R - 2\phi_C + \phi_L}{\Delta x^2}$$

$$CURVT = \frac{\phi_T - 2\phi_C + \phi_B}{\Delta y^2}$$

Mientras la interpolación lineal obtiene los flujos usando información proveniente de 2 nodos, la cuadrática lo hace usando información proveniente de 5 nodos.

Los flujos en las caras horizontales del volumen de control para la velocidad horizontal, u , involucran valores de velocidad vertical, v , y se especifican utilizando interpolación lineal a lo largo de los bordes horizontales ya que se dispone de nodos de velocidad vertical definidos en las caras superior e inferior del volumen de control para la velocidad horizontal.

Coefficientes para la Ecuación de Movimiento según γ :

Se procede en forma análoga al caso anterior.

Los coeficientes en la Ecuación de la Energía conservarán su forma estándar dado que en las caras del volumen de control para la temperatura se tienen nodos de velocidad. Debido a esto, la discretización de la Ecuación de Energía no sufre modificaciones respecto a su versión para el método SIMPLER Convencional. Esta estrategia ha sido empleada por Fusegi [17] y Janssen [18] en estudios de cavidades tridimensionales.

4.3 Método de Solución

Se utiliza el método de solución SIMPLER estándar, descrito por Patankar [1]. En la implementación concreta de este método se optó por las siguientes características:

1. Los Volúmenes de Control principales contienen los nodos para las variables escalares, temperatura y presión.
2. Los volúmenes de control para las velocidades u y v están desplazados en el ancho de medio volumen de control a la derecha y hacia arriba con respecto al volumen de control principal, respectivamente.
3. Se definen nodos de velocidad en los bordes físicos (de u en los bordes verticales y de v en los horizontales) de la cavidad. En consecuencia, no habrá nodos de temperatura y presión en esos bordes físicos.
4. Se definen nodos externos para las variables escalares, sobre cada lado de la cavidad a medio volumen de control de distancia de los bordes físicos.
5. Para una pared de temperatura impuesta, se imponen las temperaturas a los nodos externos, y se usa la regla de la media armónica para calcular las partes difusivas de los coeficientes que relacionan la temperatura externa con la primera temperatura interna. Para esto se supone que el material de la pared tiene conductividad infinita. La parte convectiva de este coeficiente es nula por depender de la velocidad en la pared, que es nula. De este modo se transfiere el valor de la temperatura impuesta externamente hasta el borde físico de la cavidad. Se usa un procedimiento similar para calcular las velocidades paralelas a los bordes físicos en el primer nodo interior.
6. Los coeficientes de la ecuación de presión corresponden a los recíprocos de los coeficientes totales de velocidad.
7. En el estudio se usan mallas de paso uniforme e igual en las dos direcciones. Esto tiene por objeto eliminar variables extras innecesarias. La igualdad de pasos Δx y Δy asegura obtener igual resolución de los campos de temperatura y velocidad en toda la región.

8. Para los tres primeros problemas, los cuales tienden naturalmente a soluciones permanentes, se adopta la forma permanente de las ecuaciones gobernantes. En cambio, para el problema de la cavidad de Bénard, el cual es muy dependiente del tiempo, se usa la forma transiente de las ecuaciones. Para resolver las ecuaciones en régimen transiente se adopta la forma implícita recomendada por Patankar [1] (capítulo 4). Con esto se logra una solución convergida para cada intervalo de tiempo, usando un criterio de detención basado en el número de Nusselt global. Los campos convergidos para un intervalo de tiempo se usan como "condición inicial" para el intervalo siguiente.

1. Calcular los coeficientes de la ecuación de presión y resolver ésta para obtener un campo de presión, p^* .
2. Considerando este campo de presión como imperfecto, p^* , resolver las ecuaciones de momento para obtener velocidades imperfectas u^* y v^* .
3. Calcular el término de fuerza de masa en cada volumen de control (sobre la base de las velocidades recién calculadas) y resolver la ecuación de corrección de presión (p').
4. Corregir el campo de velocidades mediante las correcciones de presión, sin corregir la presión.
5. Resolver la ecuación de discretización para temperatura.
6. Volver al punto 2 y repetir hasta que se obtenga una solución convergida.

En casos transientes una vez lograda la convergencia de las iteraciones generales en el punto 6 se incrementa el tiempo y se vuelve al punto 2 con los campos obtenidos del instante recién calculado.

La solución convergida se obtiene una vez cumplido un criterio de detención de las iteraciones generales. Para resolver todas las ecuaciones del problema se utiliza un esquema implícito, lo que incluye los casos transientes (ver caso de Bénard).

Para caracterizar la precisión de algoritmos basados en el Método SIMPLER hay que considerar:

- a) La naturaleza iterativa de éste.
- b) En todos los métodos numéricos el paso de malla determina la calidad de la solución. Dados los objetivos del presente trabajo, interesa explorar tres pasos de malla diferentes para los problemas en estudio.

5 Metodología Específica

Para la resolución de los problemas planteados, se utilizará el método SIMPLER, el cual consta de los siguientes pasos:

1. Estimar un campo de velocidades.
2. Calcular los coeficientes de la ecuación de momentum y calcular las pseudo velocidades u_s y v_s de las ecuaciones de momentum sin campo de presión, substituyendo los valores de velocidades en los puntos vecinos.
3. Calcular los coeficientes de la ecuación de presión y resolver ésta para obtener un campo de presión, p^* .
4. Considerando este campo de presión como imperfecto, p^* , resolver las ecuaciones de momentum para obtener velocidades imperfectas u^* y v^* .
5. Calcular el término de fuente de masa en cada volumen de control (sobre la base de las velocidades recién calculadas) y resolver la ecuación de corrección de presión (p').
6. Corregir el campo de velocidades mediante las correcciones de presión, sin corregir la presión.
7. Resolver la ecuación de discretización para temperatura.
8. Volver al punto 2 y repetir hasta que se obtenga una solución convergida.

En casos transientes una vez lograda la convergencia de las iteraciones generales en el punto 8 se incrementa el tiempo y se vuelve al punto 2 con los campos obtenidos del instante recién calculado.

La solución convergida se obtiene una vez cumplido un criterio de detención de las iteraciones generales. Para resolver todas las ecuaciones del problema se utiliza un esquema implícito, lo que incluye los casos transientes (cavidad de Bénard).

Para caracterizar la precisión de algoritmos basados en el Método SIMPLER hay que considerar:

- a) La naturaleza iterativa de éste.
- b) En todos los métodos numéricos el paso de malla determina la calidad de la solución. Dados los objetivos del presente trabajo, interesa explorar tres pasos de malla diferentes para los problemas en estudio.

- c) El hecho de que cada algoritmo interno que compone el algoritmo general puede ser llevado a distintos niveles de convergencia, con diferentes criterios. Por lo tanto, el tipo de criterio de convergencia y su implementación, influirá sobre la calidad y rapidez de la solución.

Patankar [1] sostiene que no es conveniente gastar mucho esfuerzo computacional en iteraciones internas, en que se trabaja con coeficientes provisionales. En la práctica esto no resulta ser válido en todos los casos, y especialmente en los casos de convección natural interna.

En la mayoría de las aplicaciones de éstos métodos se controla la convergencia de las resoluciones de los algoritmos internos (P, P', T) mediante un criterio de detención basado en alcanzar un nivel prefijado de variación de la variable entre dos iteraciones sucesivas.

Otro enfoque es fijar de antemano el número de iteraciones en cada algoritmo. Un enfoque mixto consiste en usar un criterio de detención pero con una restricción en el número de iteraciones. En esta memoria se estudiarán ambos criterios. Para resolver las ecuaciones de movimiento se utiliza solo una iteración para cada iteración general. Esto se debe a que la experiencia indica que al intentar llevar a convergencia estas ecuaciones con coeficientes provisorios se destruye la convergencia.

La metodología específica utilizada en cada uno de los problemas, abarcó las siguientes actividades:

1. Obtención de soluciones algoritmo SIMPLER Convencional: Las ecuaciones fueron resueltas utilizando el algoritmo SIMPLER sobre mallas desplazadas. Las mallas utilizadas fueron:
 - Cavidad Cuadrada: 22x22, 42x42 y 82x82.
 - Cavidad de Alta razón de aspecto: 22x202, 42x402 y 82x802.
 - Cavidad de Bénard: 82x42.

Las soluciones fueron determinadas utilizando un programa computacional existente, basado en una interpolación lineal de los flujos en las caras.

2. Implementación del algoritmo QUICK: se incorpora una discretización de segundo orden ($O(\Delta x)^2$) a los términos convectivos de las ecuaciones de movimiento. Para este efecto se debió modificar el programa computacional existente que expresa los términos convectivos en las caras de los volúmenes de control de velocidades por medio de una interpolación lineal, sustituyendo lo anterior por una interpolación cuadrática.
3. Obtención de Soluciones algoritmo QUICK: Las ecuaciones fueron resueltas utilizando el algoritmo QUICK sobre mallas desplazadas. Las mallas utilizadas fueron:

- Cavity Cuadrada: 22x22, 42x42 y 82x82.
- Cavity de Alta razón de aspecto: 22x202, 42x402 y 82x802.
- Cavity de Bénard: 82x42.

En todos los casos se parte de un campo de flujo estacionario (flujo inicialmente en reposo).

$$U_{ij} = V_{ij} = 0$$

Restricciones Aplicadas a los Problemas Estudiados:

- Número de Rayleigh, $Ra=10^4$, para el cual coexisten tanto convección como conducción.
- El Número de Prandtl para aire se fija en el valor $Pr=0.71$.
- Para el problema de la cavity de alto razón de aspecto, su valor será:

$$A = \frac{H}{L} = 10$$

Con este valor de A se espera obtener una circulación única en la cavity.

Supuestos y objetivos en la búsqueda de óptimos:

- Utilización de un criterio de convergencia de las iteraciones generales basado en el número de Nusselt global medio:

Para los tres primeros problemas

$$|Nu_{n+1} - Nu_n| \leq 1.5 * 10^{-5}$$

Para el problema de la cavity de Bénard

$$|Nu_{n+1} - Nu_n| \leq 1.0 * 10^{-5} \text{ en un intervalo de tiempo, y}$$

$$|Nu^{t+\Delta t} - Nu^t| \leq 1.0 * 10^{-5} \text{ de un intervalo de tiempo a otro.}$$

Con esto, se suponen despreciables las contribuciones al número de Nusselt producto de más iteraciones. Ensayos con un criterio de $1.5 * 10^{-6}$ resultaron, en general, en sólo dos iteraciones extras.

- El parámetro utilizado para evaluar la calidad del resultado y establecer la condición de óptimo es el error en el número de Nusselt, respecto de un valor de referencia (Nu_{ref}), definido de la siguiente manera:

$$e\% = \frac{Nu - Nu_{ref}}{Nu_{ref}} * 100$$

- Igualmente se calculan errores en las velocidades máximas respecto a una referencia, los cuales se definen de manera análoga al error en el número de Nusselt.

5.1 Criterio de detención de los algoritmos internos

Se ensayó primero con criterio de detención para los algoritmos internos, es decir, de presión, de corrección de presión y de temperatura. Los criterios de detención eran del tipo:

$$\sum_{ij} |P_{ij}^{n+1} - P_{ij}^n| < C$$

Donde P_{ij}^n corresponde ya sea a la presión, corrección de presión o la temperatura en el nodo ij en la iteración n .

Los resultados de estos ensayos para el problema de la cavidad cuadrada con paredes verticales a temperaturas impuestas, en donde $C=10^{-4}$ para el algoritmo de temperatura y $C=10^{-2}$ para los algoritmos de presión y corrección de presión, se muestran en las siguientes tablas.

Tabla 1. Resultados utilizando SIMPLER Convencional.

Malla	Nu	Um	Vm	Np final	Np' final	Nt final
22x22	2.296546	16.15317	19.54478	204	100	68
42x42	2.257639	16.12988	19.60348	733	191	52
82x82	2.24721	16.15366	19.61203	2505	1112	164
Orden = 1.899428						

Tabla 2. Resultados utilizando SIMPLER QUICK.

Malla	Nu	Um	Vm	Np final	Np' final	Nt final
22x22	2.296601	16.28274	19.56809	200	12	1
42x42	2.249956	16.14206	19.60377	735	157	31
82x82	2.235464	16.0518	19.45724	2536	808	120
Orden = 1.686465						

Donde:

Np final: número de iteraciones en el algoritmo de presión registrado en la última iteración general.

N_p' final: número de iteraciones en el algoritmo de corrección de presión registrado en la última iteración general.

N_t final: número de iteraciones en el algoritmo de temperatura registrado en la última iteración general.

De ambas tablas se desprende que a medida que aumenta la fineza de la malla, el número de iteraciones requeridas para cumplir el criterio de detención en los tres algoritmos internos aumenta.

Al utilizar SIMPLER Convencional se requiere un mayor número de iteraciones en corrección de presión y temperatura respecto a utilizar SIMPLER QUICK (para iguales criterios de detención). El número de iteraciones requeridas por el algoritmo de presión, es similar tanto en SIMPLER Convencional como en SIMPLER QUICK.

El orden de truncación de las soluciones para la variable número de Nusselt, es mayor utilizando SIMPLER Convencional respecto a utilizar SIMPLER QUICK. (ver Tablas 1 y 2). Esto puede deberse a que la determinación del orden obliga a usar distintos criterios de detención para todas las mallas. Para el caso de la malla fina, el método SIMPLER QUICK requeriría criterios de detención más severos.

Al usar SIMPLER QUICK con la malla 42x42 se obtiene un número de Nusselt mucho mejor que usando SIMPLER Convencional con la misma malla. Esto sugiere que con mallas relativamente gruesas, el uso de SIMPLER QUICK permite obtener mayor precisión que con SIMPLER Convencional.

Debido a que el número de iteraciones requeridas para cumplir los criterios de detención en la mayoría de los casos es elevado, y con intenciones de buscar un orden de truncación mayor a los ya obtenidos, se estudiará el enfoque en el cual se fija el número de iteraciones para los algoritmos internos.

6 Resultados Numéricos

A continuación son entregados los valores de referencia, en base a los cuales se realizó la búsqueda de los valores óptimos.

Valores de referencia para $Ra=10^4$, $Pr=0.71$.

Cavidad Cuadrada [3].

$$Nu = 2,243$$

$$Um = 16,178$$

$$Vm = 19,617$$

Um: velocidad horizontal máxima en el eje de simetría vertical.

Vm: velocidad vertical máxima en el eje de simetría horizontal.

Cavidad de Alta razón de aspecto, $A=10$.

$$Nu = 1,683565$$

$$Um = 11,41930$$

$$Vm = 68,19168$$

La referencia para la cavidad de alta razón de aspecto, $A=10$, se obtuvo de un Programa basado en la función corriente y vorticidad, que usa una discretización híbrida: Second upwind de 2° orden más Arakawa de 4° orden [16].

Para la cavidad de baja razón de aspecto se observa que para $A=0.1$, el problema se hace trivial en el sentido que sólo existe la solución conductiva para $Ra=10^4$ ($Nu=1$). Para otras razones de aspecto, tales como 0.5 y 0.8, el problema es muy similar al de la cavidad cuadrada. En el trabajo de R. Frederick [7] se constata que para $Ra=10^4$, el máximo número de Nusselt que indica el punto de transición entre cavidad baja y alta, se da para $A=1.58$. Luego, el caso de $A=1$ se comporta como uno de baja razón de aspecto, lo que hace innecesario estudiar más este caso.

Cavidad de Bénard, $A=0.5$ [10].

Solución Tridimensional para $Ra=64000$.

$$U_{max} = 28.819$$

$$V_{max} = 21.821$$

$$W_{max} = 21.812$$

Nomenclatura utilizada:

Nt : n° de iteraciones en algoritmo de temperatura.

Np : n° de iteraciones en algoritmos de presión y corrección de presión.

Npc : n° de iteraciones en algoritmo de corrección de presión.

Los resultados obtenidos para la cavidad cuadrada utilizando criterios de detención en algoritmos internos, se muestran en forma detallada en las Tablas 3 y 4. Se indican los números de iteraciones internas para la primera, segunda y última iteración general.

Tabla 3. Resultados utilizando SIMPLER Convencional.

Malla 22x22										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
1	1	592	1,000004							
209	236	307	1,264247							
204	100	68	2,296546	2,3872	16,15317	19,54478	16,15317	-0,15348	19,54478	-0,3681501

Malla 42x42										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
1	1	2106	1,000002							
773	915	1323	1,025157							
733	191	52	2,257639	0,6527	16,13727	19,66538	16,12988	-0,297441	19,60348	-0,0689198

Malla 82x82										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
1	1	7138	1,000001							
2625	3438	4361	1,001825							
2505	1112	164	2,24721	0,1877	16,17126	19,64979	16,15366	-0,1504512	19,61203	-0,0253352

Orden= 1,8994289

Tabla 4. Resultados utilizando SIMPLER QUICK.

Malla 22x22										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
1	1	592	1,000004							
209	236	307	1,264247							
200	12	1	2,296601	2,3897	16,28274	19,56809	16,28274	0,6474224	19,56809	-0,2493246

Malla 42x42										
np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
1	1	2106	1,000002							
773	915	1323	1,025157							
735	157	31	2,249956	0,3101	16,17641	19,60377	16,14206	-0,2221535	19,60377	-0,0674415

Malla 82x82										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
1	1	7138	1,000001							
2625	3438	4361	1,001825							
2536	808	120	2,235464	-0,3360	16,07395	19,45724	16,0518	-0,7800717	19,45724	-0,8143957

Orden= 1,6864657

El hecho de que el orden de truncación decrezca al pasar del algoritmo SIMPLER Convencional al SIMPLER QUICK ya ha sido comentado en el capítulo Metodología.

En general el algoritmo SIMPLER QUICK mejora la predicción de los campos de velocidad para las mallas más gruesas. En cambio, la predicción del número de Nusselt es mejorada sensiblemente sólo para la malla intermedia.

Las posibilidades del método utilizando criterio de detención para los algoritmos internos requiere de una exploración usando criterios de detención más severos. Debido a que el esfuerzo computacional con los criterios ya usados es muy grande, y en vista de que el fin último es buscar soluciones a problemas tridimensionales de convección natural, como los estudiados por Fusegi [17] y Janssen [18], se optará por utilizar la alternativa de un número fijo de iteraciones para cada algoritmo interno.

6.1 SIMPLER Convencional con números fijos de iteraciones

Estudio preliminar: consistió en determinar la variación del número de Nusselt con el paso de malla y los números de iteraciones fijados en los algoritmos de Temperatura, Presión y corrección de Presión. Los resultados de este estudio se encuentran en la siguiente tabla:

Tabla 5. Estudio preliminar Cavity Cuadrada.

	Nt=25 Np=40	Nt=40 Np=40	Nt=50 Np=40	Nt=25 Np=50	Nt=40 Np=50	Nt=50 Np=50	Nt=50 Np=46	Nt=50 Np=177
Un 82x82	2,179217	2,203351	2,203341	2,232378	2,213951	2,213915	2,210207	2,242953
Un 42x42	2,237789	2,237603	2,237631	2,245673	2,245519	2,245535	2,242916	2,257541
Un 22x22	2,295788	2,295815	2,295825	2,296161	2,296188	2,296198	2,296098	2,296504
Orden=	-0,01418	0,76512	0,76308	1,92505	0,68264	0,68009	0,70125	1,4107

Se observa que el orden de truncación no es inherente al algoritmo, sino que varía ampliamente con los parámetros de éste.

Los principales resultados mostrados en la tabla anterior se encuentran representados gráficamente en la siguiente figura.

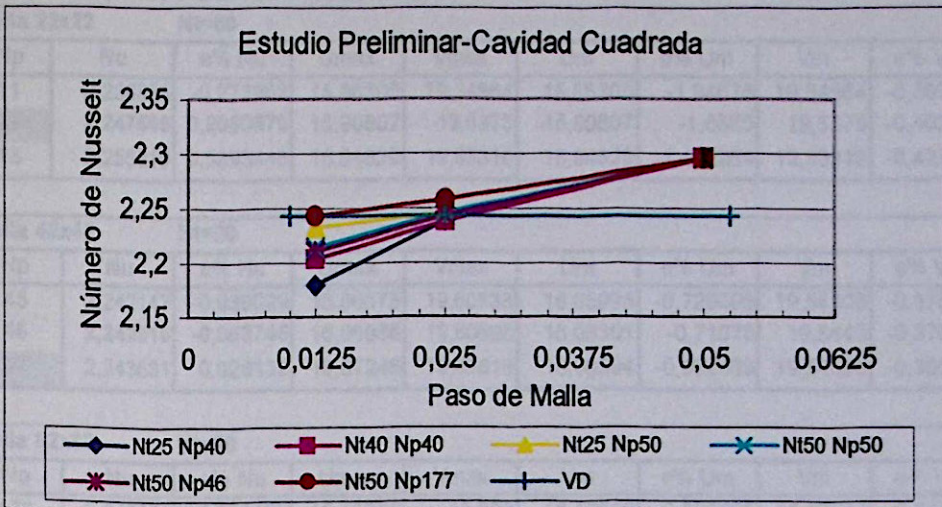


Figura 4. Estudio Preliminar

Los resultados del estudio preliminar para la malla de 22x22 son insensibles a los números de iteraciones, y coinciden bastante bien con los obtenidos utilizando criterios de detención. Como los errores en el número de Nusselt son bastante grandes, sólo serán útiles los resultados provenientes de las mallas más finas.

Los resultados para la malla de 42x42 son sensibles al número de iteraciones en presión y corrección de presión, pero no así al número de iteraciones en temperatura (ver Figura 4). En cambio, para la malla más fina existe sensibilidad a ambos parámetros. El número de iteraciones en temperatura que mejor representa los resultados es, $Nt=50$, el cual será usado en el resto del estudio.

Del estudio preliminar se infiere que para un determinado número de iteraciones en el algoritmo de temperatura, existe un número óptimo de iteraciones para los algoritmos de presión y de corrección de presión que permite obtener un mínimo error en la determinación del número de Nusselt.

Corriendo el programa con $Nt=50$ y variando Np , se puede encontrar el valor óptimo de Np , que permite obtener los menores errores en el número de Nusselt.

A continuación se presentan los valores óptimos de iteraciones en presión y corrección de presión para las diferentes razones de aspecto y mallas, utilizando el algoritmo SIMPLER Convencional.

Tabla 6. Optimos Cavidad Cuadrada.

Malla 22x22 Nt=50								
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
11	2,236855	-0,273963	15,86305	19,54564	15,86305	-1,94678	19,54564	-0,363766
12	2,247599	0,2050379	15,90807	19,5375	15,90807	-1,6685	19,5375	-0,405261
13	2,256219	0,5893446	15,94629	19,53316	15,94629	-1,432254	19,53316	-0,427384

Malla 42x42 Nt=50								
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
45	2,242147	-0,038029	16,06675	19,60538	16,05995	-0,729695	19,54306	-0,376918
46	2,242916	-0,003745	16,06966	19,60695	16,06301	-0,71078	19,5443	-0,370597
47	2,243631	0,028132	16,07246	19,60816	16,06594	-0,692669	19,54526	-0,365703

Malla 82x82 Nt=50								
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
176	2,242884	-0,005172	16,13958	19,608	16,12539	-0,325195	19,56974	-0,240913
177	2,242953	-0,002095	16,14051	19,60854	16,12627	-0,319755	19,57029	-0,23811
178	2,243051	0,0022737	16,14283	19,60967	16,12848	-0,306095	19,5715	-0,231942

Orden= 2,549055

Tabla 7. Optimos Cavidad de Alta razón de Aspecto, A=10.

Malla 22x202 Nt=50								
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
115	1,6835	-0,0039	13,99961	65,69435	11,31668	-0,898654	64,719	-5,092527
116	1,683574	0,0005	13,99515	65,67137	11,31761	-0,89051	64,72786	-5,079535
117	1,683648	0,0049	13,99077	65,64852	11,31851	-0,882629	64,73685	-5,066351

Malla 42x402 Nt=50								
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
238	1,683547	-0,0011	13,5935	64,13817	11,1315	-2,520295	64,09866	-6,002228
239	1,683565	0,0000	13,59208	64,1408	11,13086	-2,525899	64,09939	-6,001157
240	1,683581	0,0010	13,59067	64,1434	11,13037	-2,53019	64,09939	-6,001157

Malla 82x802 Nt=50								
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
680	1,683418	-0,0087	13,40259	64,76118	11,1232	-2,592979	64,31132	-5,690372
681	1,683436	-0,0077	13,40237	64,78098	11,12149	-2,607953	64,32922	-5,664122
688	1,683456	-0,0065	13,40108	64,78677	11,12103	-2,611981	64,33054	-5,662186
720	1,683549	-0,0010	13,39553	64,81205	11,11917	-2,628270	64,3363	-5,653740
726	1,683564	-0,0001	13,39455	64,81658	11,11886	-2,630984	64,33733	-5,652229
1760	1,684767	0,0714	13,33898	65,18119	11,12199	-2,603575	64,41518	-5,538066
1870	1,684806	0,0737	13,33785	65,17809	11,12591	-2,569247	64,40121	-5,558552
2500	1,685031	0,0871	13,33594	65,24117	11,14072	-2,439554	64,42123	-5,529194
4000	1,685479	0,1137	13,34771	65,6384	11,15802	-2,288056	64,75278	-5,042991

Orden= 3,169925

Para cada malla se encontró el número óptimo (N_p) de iteraciones, el cual aumenta con la fineza de la malla. Los números de Nusselt obtenidos para este N_p son de gran precisión.

Para la cavidad cuadrada, en la vecindad del N_p óptimo, se obtienen errores inferiores al 1% en las velocidades usando las mallas finas. El orden resultante de este algoritmo es de 2.549055. Con las tres mallas se obtiene el régimen esperado (ver Figura 10), formado por una sola recirculación [3].

Para la cavidad de alta razón de aspecto, $A=10$, se detectan también valores óptimos de N_p , los que son mayores que para la cavidad cuadrada con igual fineza de malla, debido al mayor número de nodos. Los óptimos N_p no son tan bien definidos para las mallas finas en este problema (altos errores en velocidades). El régimen que se obtiene es el esperado (ver Figura 11), compuesto por una sola recirculación [4]. Es importante notar que para la cavidad con $A=10$ la malla de 22×202 entrega muy bajos errores en el número de Nusselt, y también bajos errores en la velocidad U_m .

Una causa posible de esta buena predicción del número de Nusselt para la cavidad con $A=10$ está en la distribución de isotermas (ver Figura 11), ya que tienden a ser paralelas en la mayor parte del alto de la cavidad, excepto en los extremos donde el fluido gira. Estas isotermas indican que hay una distribución de temperatura aproximadamente lineal con la coordenada horizontal, en la mayor parte del alto de la cavidad (régimen más conductivo que en el caso de la cavidad cuadrada). Las mallas más gruesas son aptas para representar bien perfiles de temperatura lineales, no así para los perfiles menos lineales que se dan en la cavidad cuadrada. La buena predicción del número de Nusselt contrasta con los grandes errores en U_m . Esto se debe a que los máximos de la velocidad horizontal se ubican en una zona estrecha, donde se debe aproximar grandes gradientes de velocidad.

La obtención para la cavidad de alta razón de aspecto de un orden igual a 3.169925, el cual es superior al obtenido para la cavidad cuadrada, se debe a que las mallas gruesas se comportan muy bien respecto de la malla fina. Este hecho es explicado por la aproximada linealidad de la temperatura con la coordenada horizontal.

6.2 SIMPLER QUICK

Las conclusiones extraídas del estudio preliminar fueron también aplicadas en el algoritmo SIMPLER QUICK. En las siguientes tablas, se presentan los valores óptimos de iteraciones en presión y corrección de presión para las diferentes razones de aspecto y mallas.

Tabla 8. Optimos Cavidad Cuadrada.

Malla 22x22 Nt=50								
Np	Nu	e% Un	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
11	2,233422	-0,4270	15,84859	19,24723	15,84859	-2,03616	19,24723	-1,884947
12	2,245479	0,1105	15,92745	19,28024	15,92745	-1,548708	19,28024	-1,716674
13	2,255067	0,5380	15,99416	19,31219	15,99416	-1,136358	19,31219	-1,553805

Malla 42x42 Nt=50								
Np	Nu	e% Un	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
64	2,242684	-0,0141	16,12527	19,51593	16,10161	-0,472184	19,51593	-0,515216
65	2,243026	0,0012	16,1282	19,51893	16,10422	-0,456051	19,51893	-0,499924
66	2,243327	0,0146	16,13075	19,52105	16,10647	-0,442144	19,52105	-0,489117

Malla 82x82 Nt=50								
Np	Nu	e% Un	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
160	2,228934	-0,6271	16,02329	19,38446	16,0064	-1,0607	19,38446	-1,1854
170	2,229725	-0,5918	16,02908	19,38917	16,01188	-1,026827	19,38917	-1,161391
174	2,229993	-0,5799	16,03074	19,39064	16,01343	-1,017246	19,39064	-1,153897
176	2,230168	-0,5721	16,03292	19,39237	16,01555	-1,004141	19,39237	-1,145078
210	2,231868	-0,4963	16,04428	19,40354	16,02604	-0,9393	19,40354	-1,088138
250	2,233106	-0,4411	16,05378	19,41455	16,03476	-0,8854	19,41455	-1,032013
300	2,234093	-0,3971	16,0637	19,42688	16,04395	-0,828594	19,42688	-0,969159
354	2,234602	-0,3744	16,06672	19,43396	16,04644	-0,813203	19,43396	-0,933068
400	2,234904	-0,3609	16,06936	19,43943	16,04876	-0,798863	19,43943	-0,905184
420	2,23497	-0,3580	16,06927	19,44071	16,04856	-0,800099	19,44071	-0,898659
430	2,235004	-0,3565	16,06941	19,44145	16,04865	-0,799543	19,44145	-0,894887
450	2,235109	-0,3518	16,07101	19,44381	16,0501	-0,79058	19,44381	-0,882857
460	2,235119	-0,3514	16,07066	19,44407	16,04967	-0,793238	19,44407	-0,881531
470	2,235127	-0,3510	16,07028	19,44428	16,04921	-0,796081	19,44428	-0,880461
800	2,235344	-0,3413	16,06967	19,4517	16,04755	-0,806342	19,4517	-0,842636
900	2,235338	-0,3416	16,06906	19,45186	16,04687	-0,810545	19,45186	-0,841821
990	2,235356	-0,3408	16,06945	19,45246	16,04721	-0,808444	19,45246	-0,838762
995	2,235279	-0,3442	16,06703	19,4507	16,04479	-0,823402	19,4507	-0,847734
1000	2,235386	-0,3395	16,07034	19,45317	16,0481	-0,802942	19,45317	-0,835143
1005	2,235327	-0,3421	16,06851	19,4518	16,04627	-0,814254	19,4518	-0,842127
1010	2,235357	-0,3407	16,06944	19,4525	16,0472	-0,808505	19,4525	-0,838558
1200	2,235375	-0,3399	16,06984	19,45308	16,04756	-0,80628	19,45308	-0,835602

Orden no definido

Tabla 9. Optimos Cavidad de Alta razón de aspecto, A=10.

Malla 22x202		Nt=50						
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
100	1,695022	0,6805	14,52154	63,08205	14,30836	25,299799	61,55622	-9,730601
125	1,693863	0,6117	13,51781	62,69133	13,10334	14,747314	62,22813	-8,745275
132	1,69373	0,6038	13,41014	62,64359	12,85577	12,579317	62,39738	-8,497078
133	1,693715	0,6029	13,39636	62,63793	12,82294	12,291822	62,4209	-8,462587
150	1,693616	0,5970	13,20844	62,79786	12,34682	8,122389	62,79689	-7,911214
175	1,693801	0,6080	13,085	63,30312	11,88215	4,053226	63,27477	-7,210425
200	1,694192	0,6312	13,01655	63,76136	11,57816	1,391154	63,67734	-6,620074
215	1,694463	0,6473	12,98833	64,00495	11,44458	0,221380	63,8882	-6,310858
220	1,694558	0,6530	12,98038	64,08116	11,40613	-0,115331	63,95402	-6,214336
221	1,694578	0,6541	12,97888	64,09615	11,39878	-0,179696	63,96693	-6,195404
222	1,694596	0,6552	12,97738	64,11105	11,3915	-0,243447	63,97975	-6,176604
223	1,694616	0,6564	12,97591	64,12586	11,38433	-0,306236	63,99249	-6,157921
225	1,694654	0,6587	12,97304	64,15517	11,37031	-0,429011	64,01775	-6,120879
250	1,69514	0,6875	12,94351	64,49129	11,24608	-1,516906	64,30807	-5,695138
300	1,696105	0,7448	12,90683	65,03069	11,09593	-2,831785	64,77377	-5,012210

Malla 42x402		Nt=50						
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
250	1,690012	0,3829	13,62854	63,73566	12,58214	10,183111	63,73438	-6,536428
300	1,690191	0,3936	13,44667	64,11028	12,23039	7,102800	64,06314	-6,054316
350	1,690426	0,4075	13,3336	64,42181	12,00552	5,133590	64,30701	-5,696692
404	1,69069	0,4232	13,25362	64,69271	11,85307	3,798569	64,50652	-5,404120
414	1,69074	0,4262	13,24034	64,74249	11,8285	3,583407	64,54411	-5,348996
500	1,691134	0,4496	13,16352	65,06993	11,68882	2,360215	64,77818	-5,005743
550	1,691345	0,4621	13,12944	65,2372	11,63261	1,867978	64,90274	-4,823081
670	1,691772	0,4875	13,08599	65,51467	11,56239	1,253054	65,09772	-4,537152
900	1,692394	0,5244	13,03888	65,90334	11,49957	0,702933	65,3982	-4,096511
1200	1,692935	0,5566	13,01447	66,18953	11,48193	0,548457	65,62987	-3,756778
1300	1,693063	0,5642	13,01746	66,21332	11,4969	0,679551	65,63685	-3,746542
1400	1,693193	0,5719	13,00695	66,30375	11,48289	0,556864	65,72439	-3,618169
1500	1,693291	0,5777	13,01163	66,30658	11,49936	0,701094	65,71411	-3,633244
1600	1,693388	0,5835	13,00966	66,34068	11,50137	0,718696	65,74232	-3,591875
1700	1,693475	0,5886	13,00817	66,36823	11,50369	0,739012	65,76501	-3,558601
1800	1,693554	0,5933	13,00706	66,39028	11,50629	0,761780	65,78304	-3,532161
1900	1,693626	0,5976	13,00628	66,40769	11,5091	0,786388	65,79712	-3,511513
2000	1,693702	0,6021	12,99879	66,46056	11,49753	0,685068	65,8531	-3,429421
2100	1,693764	0,6058	12,99856	66,47074	11,50078	0,713529	65,861	-3,417836
2200	1,693823	0,6093	12,99857	66,47813	11,5042	0,743478	65,86649	-3,409785
2300	1,693878	0,6126	12,99877	66,48308	11,5078	0,775004	65,86994	-3,404726
2400	1,693929	0,6156	12,99916	66,48599	11,51155	0,807843	65,87167	-3,402189
2500	1,693977	0,6184	12,9997	66,48718	11,51543	0,841820	65,87194	-3,401793
2600	1,694023	0,6212	13,0004	66,48688	11,51944	0,876936	65,87097	-3,403216
2700	1,694067	0,6238	13,00122	66,48534	11,52355	0,912928	65,86897	-3,406149
3000	1,694188	0,6310	13,00429	66,47498	11,53632	1,024756	65,85829	-3,421810
5000	1,694716	0,6623	13,02942	66,35238	11,61279	1,694412	65,74773	-3,583942

Malla 82x802		Nt=50						
Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm
680	1,689009	0,3234	13,34693	64,87544	12,01882	5,250059	64,68058	-5,148869
700	1,689046	0,3256	13,33385	64,91108	11,99851	5,072202	64,70782	-5,108922

Orden no definido

Los resultados de la Tabla 9 para la malla 42x402 se muestran en la Figura 5.

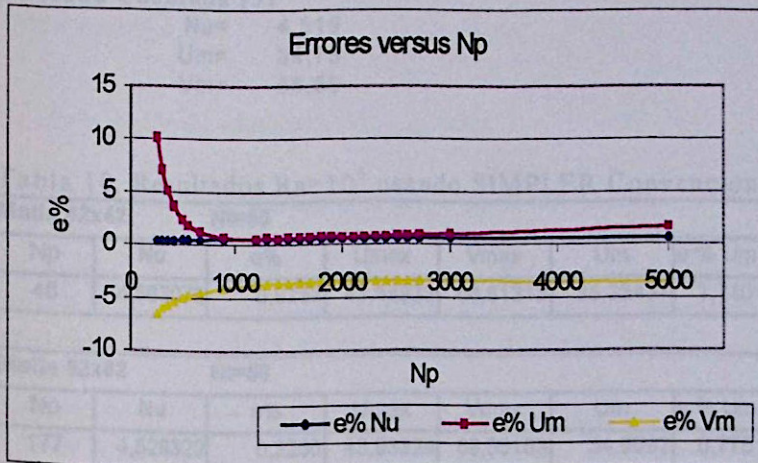


Figura 5. Errores versus Np en la malla 42x402.

En la cavidad cuadrada, los óptimos Np son mayores que usando SIMPLER Convencional (salvo en la malla gruesa). En estos óptimos, no hay una mejora importante de precisión en la determinación del número de Nusselt, salvo para las dos mallas más gruesas. Lo mismo ocurre para Um, mientras que para Vm hay un empeoramiento general de la precisión. El empeoramiento de la precisión en el número de Nusselt para la malla más fina impide calcular el orden en este caso. Con las tres mallas se obtiene el régimen esperado (ver Figura 12), formado por una sola recirculación.

Para la cavidad de alta razón de aspecto, A=10, el uso de la discretización QUICK produce un empeoramiento general de la precisión con respecto a la obtenida usando SIMPLER Convencional. No se puede definir óptimos claros en Np, y por lo tanto, no es posible determinar un orden.

Se aprecia una mejor predicción de Um. Esto se debe a la discretización QUICK. En este caso se obtiene el régimen esperado (ver Figura 13), compuesto por una sola recirculación.

6.3 Efecto del número de Rayleigh en la determinación del óptimo N_p

A continuación en las Tablas 10 y 11 se muestran algunos resultados para la cavidad cuadrada con número de Rayleigh, $Ra=10^5$.

Valores de referencia para $Ra=10^5$, $Pr=0.71$.

Cavidad Cuadrada [3]

Nu= 4,519
Um= 34,73
Vm= 68,59

Tabla 10. Resultados $Ra=10^5$ usando SIMPLER Convencional:

Malla 42x42		Nt=50							
Np	Nu	e%	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm	
46	4,563076	0,9753	43,58933	68,81313	35,33437	1,740196	68,81313	0,32531	

Malla 82x82		Nt=50							
Np	Nu	e%	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm	
177	4,529329	0,2286	43,93324	68,56183	34,9992	0,775122	68,51834	-0,104476	

Tabla 11. Resultados $Ra=10^5$ usando SIMPLER QUICK:

Malla 42x42		Nt=50							
Np	Nu	e%	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm	
46	4,52135	0,0520	44,76732	64,20702	37,57084	8,179787	64,98926	-5,249657	

Malla 42x42		Nt=50							
Np	Nu	e%	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm	
65	4,553029	0,7530	45,11205	65,37615	37,52286	8,041635	65,13168	-5,042018	

De estos resultados se desprende que a mayor número de Rayleigh el valor del óptimo N_p (para cada malla) disminuye en ambos algoritmos. Esto puede deberse a que en los casos altamente convectivos caracterizados por altas velocidades, la transferencia de información es más rápida que en los casos parcialmente convectivos. El aceleramiento de la convergencia con números de Rayleigh altos ha sido observado en estudios anteriores [19].

6.4 Regla empírica para asignar un óptimo N_p

Para determinar el valor del óptimo N_p en el caso de la cavidad cuadrada ocupando el algoritmo SIMPLER Convencional y $N_t=50$, se utilizó como regla empírica, obtenida a partir del óptimo N_p para la malla de 42×42 , la siguiente relación basada en el número de nodos:

$$N_p = \text{round}\left(\frac{n * m}{38}\right)$$

Si $N_p > \max(n, m)$ entonces $N_{p \text{ óptimo}} = N_p$

Si $N_p \leq \max(n, m)$ entonces $N_{p \text{ óptimo}} = N_p - 1$

Se observó que esta hipótesis se cumple para todas las mallas utilizadas en la cavidad cuadrada (inclusive 32×32 y 62×62), y también para la malla gruesa utilizada en la cavidad de alta razón de aspecto, 22×202 .

A continuación en la Tabla 12 se encuentran los óptimos N_p para las mallas 32×32 y 62×62 .

Tabla 12. Óptimos para las mallas 32×32 y 62×62 .

Malla 32×32		Nt=50							
N_p	Nu	e%	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm	
25	2,240392	-0,116273	16,01971	19,58402	16,01971	-0,978427	19,57713	-0,203242	
26	2,242732	-0,011948	16,0292	19,58562	16,0292	-0,919768	19,57764	-0,200642	
27	2,244848	0,082390	16,03806	19,5874	16,03806	-0,865002	19,57849	-0,196309	

Malla 62×62		Nt=50							
N_p	Nu	e%	Umax	Vmax	Um	e % Um	Vm	e% Vm	
100	2,242789	-0,009407	16,15788	19,55936	16,13984	-0,235876	19,53482	-0,418922	
101	2,242965	-0,001560	16,15895	19,56016	16,14081	-0,229880	19,53557	-0,415099	
102	2,243062	0,002764	16,15763	19,55959	16,13956	-0,237607	19,5345	-0,420554	

La regla empírica desarrollada es de utilidad para asignar parámetros adecuados de cálculo a los algoritmos para el problema considerado y también para problemas nuevos con geometría cuadrada o rectangular.

De la regla se desprende que el número total de nodos determina el óptimo N_p . La validez de la fórmula se extiende hasta aproximadamente $n * m = 6742$ nodos. Para mayor número de nodos la curva de óptimo N_p versus número de nodos tiene menor pendiente, por lo cual resulta difícil ubicar un óptimo. Una forma cualitativa de la dependencia se indica en la Figura 6.

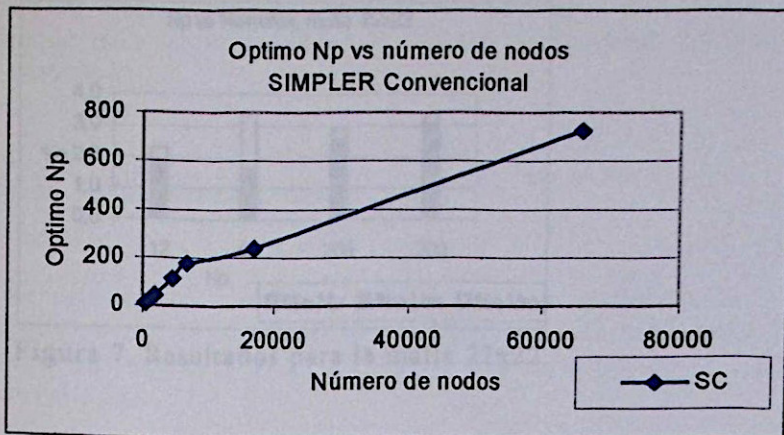


Figura 6. Optimo Np versus número de nodos.

6.5 Magnitud relativa de los errores

Con los resultados obtenidos para la cavidad cuadrada utilizando ambos algoritmos (con y sin criterios de detención), se elaboró la siguiente tabla con los módulos de los errores en el número de Nusselt, U_m y V_m . (ver Figuras 7, 8 y 9).

Tabla 13. Resultados utilizando ambos algoritmos

Malla 22x22						
Algoritmo	Np final	Npc final	Nt final	%e Nusselt	%e U_m	%e V_m
S. Convencional	12	12	50	0,205	1,669	0,405
S. QUICK	12	12	50	0,111	1,549	1,717
S. Convencional (C. D.)	204	100	68	2,387	0,153	0,368
S. QUICK (C. D.)	200	12	1	2,390	0,647	0,249
Malla 42x42						
Algoritmo	Np final	Npc final	Nt final	%e Nusselt	%e U_m	%e V_m
S. Convencional	46	46	50	0,004	0,711	0,371
S. QUICK	65	65	50	0,001	0,456	0,500
S. Convencional (C. D.)	733	191	52	0,653	0,297	0,069
S. QUICK (C. D.)	735	157	31	0,310	0,222	0,070
Malla 82x82						
Algoritmo	Np final	Npc final	Nt final	%e Nusselt	%e U_m	%e V_m
S. Convencional	177	177	50	0,002	0,320	0,238
S. QUICK	1000	1000	50	0,340	0,803	0,835
S. Convencional (C. D.)	2505	1112	164	0,188	0,151	0,025
S. QUICK (C. D.)	2536	808	120	0,336	0,780	0,814

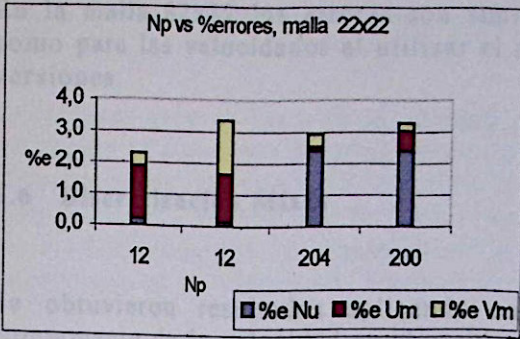


Figura 7. Resultados para la malla 22x22.

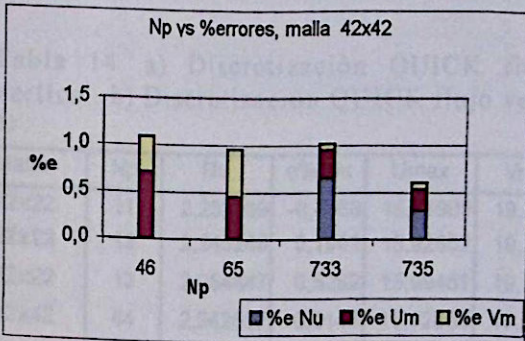


Figura 8. Resultados para la malla 42x42.

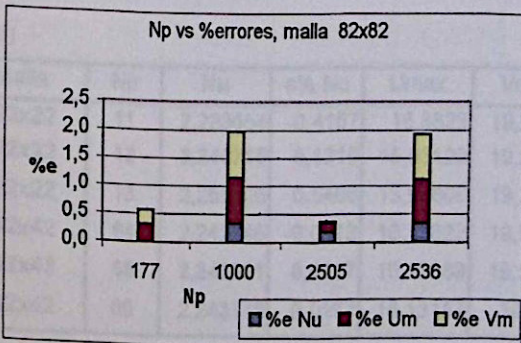


Figura 9. Resultados para la malla 82x82.

En estos gráficos se observa que en las mallas de 22x22 y 42x42 el menor error en el número de Nusselt con mayores errores en las velocidades se obtiene en los algoritmos implementados con números fijos de iteraciones en los algoritmos internos. En cambio en los algoritmos implementados con criterios de detención en los algoritmos internos, se obtienen mayores errores en el número de Nusselt y menores errores en las velocidades.

En la malla 82x82 los errores son similares tanto para el número de Nusselt como para las velocidades al utilizar el algoritmo SIMPLER QUICK en sus dos versiones.

6.6 Discretización Mixta

Se obtuvieron resultados aplicando una determinada discretización a cada componente de la velocidad en el problema de la cavidad cuadrada. Esto se hizo para las mallas 22x22 y 42x42. A continuación, en la Tabla 14 se muestran los resultados:

Tabla 14. a) Discretización QUICK flujo horizontal y Convencional flujo vertical. b) Discretización QUICK flujo vertical y Convencional flujo horizontal.

a)

Malla	Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
22x22	11	2,233169	-0,4383	15,84905	19,23754	15,84905	-2,033317	19,23754	-1,934343
22x22	12	2,245245	0,1001	15,92802	19,27067	15,92802	-1,545185	19,27067	-1,765459
22x22	13	2,254847	0,5282	15,99481	19,30271	15,99481	-1,13234	19,30271	-1,602131
42x42	64	2,242667	-0,0148	16,12604	19,51371	16,10217	-0,468723	19,51371	-0,526533
42x42	65	2,242984	-0,0007	16,12871	19,5159	16,10454	-0,454073	19,5159	-0,515369
42x42	66	2,243297	0,0132	16,13139	19,51842	16,10691	-0,439424	19,51842	-0,502523

b)

Malla	Np	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
22x22	11	2,233654	-0,4167	15,8523	19,25022	15,8523	-2,013228	19,25022	-1,869705
22x22	12	2,245715	0,1210	15,93128	19,28333	15,93128	-1,525034	19,28333	-1,700923
22x22	13	2,255306	0,5486	15,99808	19,31537	15,99808	-1,112128	19,31537	-1,537595
42x42	64	2,242746	-0,0113	16,12622	19,51709	16,10259	-0,466127	19,51709	-0,509303
42x42	65	2,243061	0,0027	16,12889	19,51928	16,10496	-0,451477	19,51928	-0,498139
42x42	66	2,243375	0,0167	16,13157	19,5218	16,10734	-0,436766	19,5218	-0,485293

En ambos casos, los óptimos Np resultan ser iguales a los obtenidos utilizando para ambas componentes de velocidad la discretización QUICK.

Estos resultados indican que hay mejores efectos al usar la discretización QUICK para la componente de flujo horizontal. Los efectos beneficiosos de ésta para el flujo vertical se ven minimizados por la presencia del término de empuje, que es dominante.

6.7 Combinación de Criterio de detención en Temperatura y Np fijos

Resultados para el caso de la cavidad cuadrada aplicando sólo un criterio de detención al algoritmo de temperatura y fijando el número de iteraciones en los algoritmos de presión y corrección de presión en el algoritmo SIMPLER Convencional, poseen un Orden = 8.49, el cual es bastante elevado. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 15. Se indican los números de iteraciones en los algoritmos internos para la primera y última iteración general.

Tabla 15. Resultados aplicando criterio de detención en Temperatura y Np fijos.

Malla 22x22										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
12	12	592	1,000004							
12	12	32	2,247631	0,2064646	15,91547	19,53664	15,91547	-1,622759	19,53664	-0,409645

Malla 42x42										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
46	46	2106	1,000002							
46	46	42	2,242966	-0,001516	16,06929	19,60765	16,06274	-0,712449	19,54484	-0,367844

Malla 82x82										
Np	Npc	Nt	Nu	e% Nu	Umax	Vmax	Um	e% Um	Vm	e% Vm
177	177	7138	1,000001							
177	177	170	2,242953	-0,002095	16,15278	19,61202	16,138	-0,247249	19,57424	-0,217974

Orden= 8,4872216

El criterio de detención aplicado sobre el algoritmo de temperatura corresponde al utilizado en el capítulo Metodología.

Esta forma de hacer converger la Ecuación de la Energía asegura una buena evaluación del término de empuje, lo cual incide sobre los campos de velocidad.

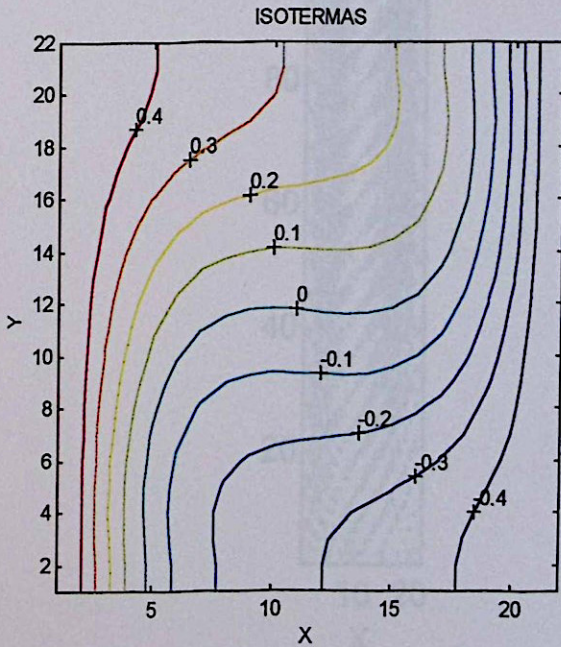
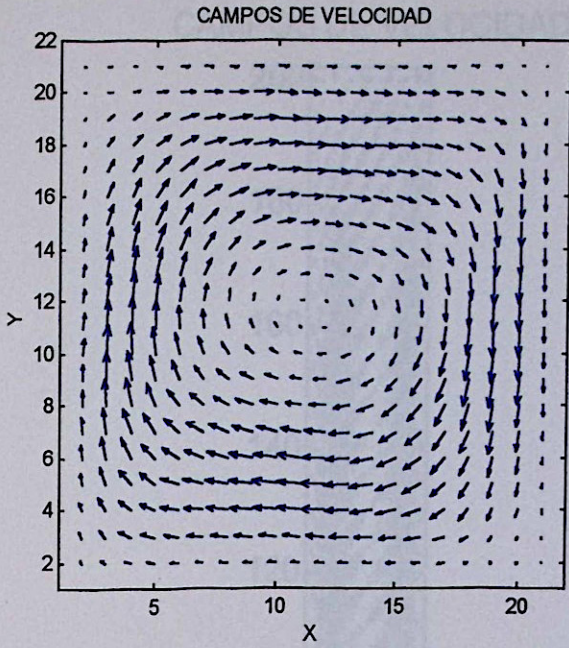


Figura 10. Cavity Cuadrada, malla 22x22, $N_p=12$, SIMPLER Convencional. (a) Campos de velocidad, (b) Isotermas.

CAMPOS DE VELOCIDAD

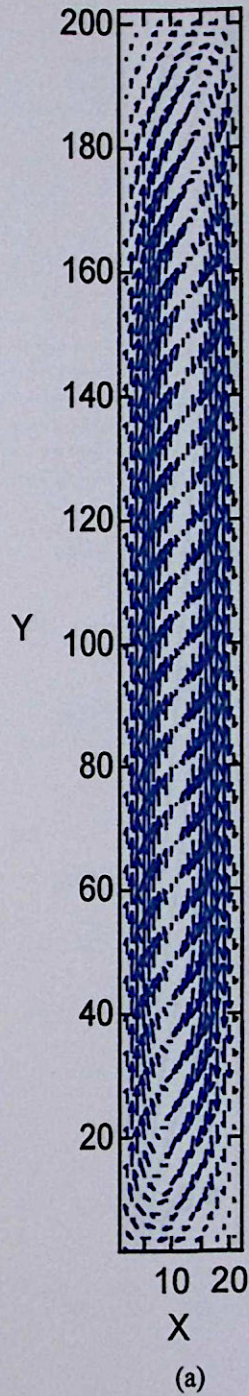
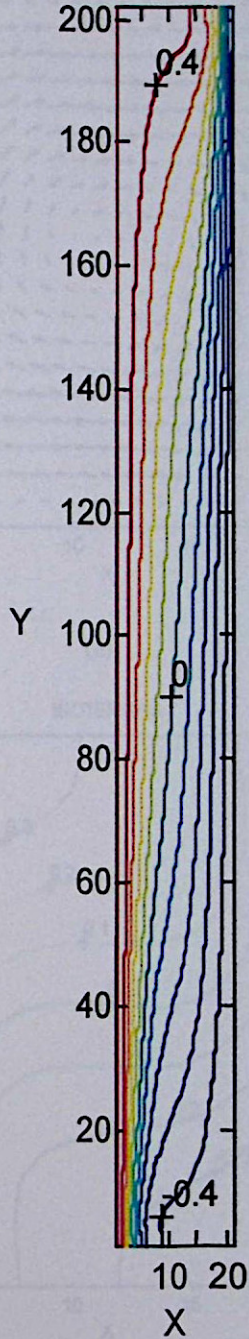


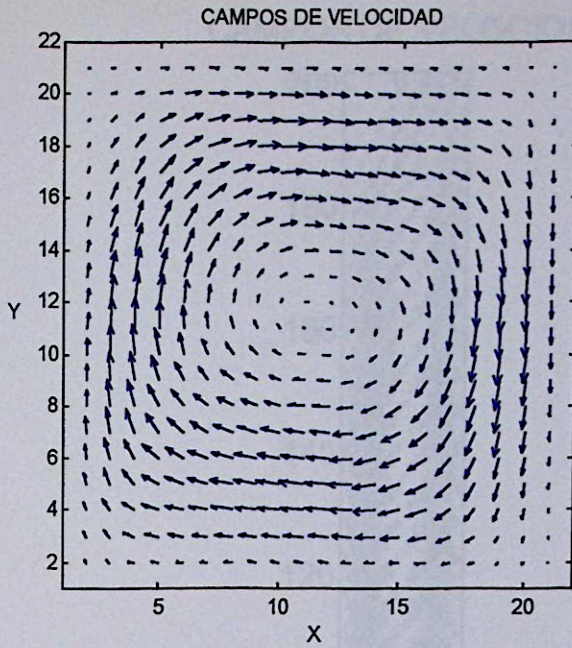
Figura 11. Control de flujo espina, valle 2X202, perfil, SIMPLE Dimensional (a) Campos de Velocidad, (b) Isocotas ($\Delta\theta = 0.1$)

ISOTERMAS

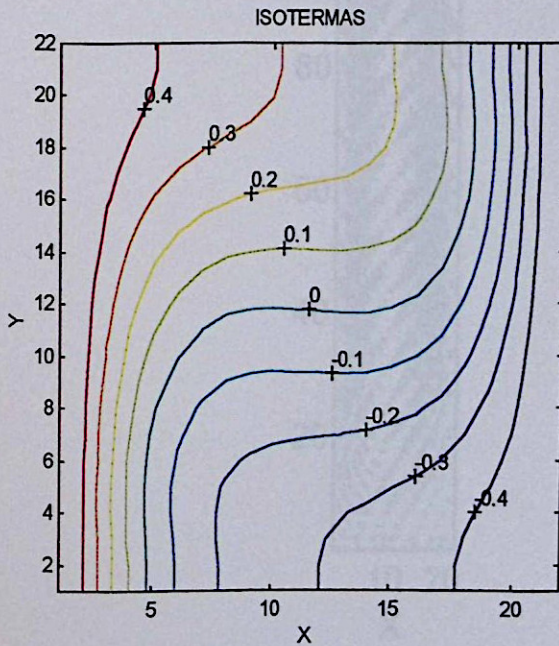


(b)

Figura 11. Cavity de Alto aspecto, malla 22x202, $N_p=116$, SIMPLER Convencional. (a) Campos de Velocidad, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).



(a)



(b)

Figura 12. Cavity Cuadrada, malla 22x22, $N_p=12$, SIMPLER QUICK. (a) Campos de Velocidad, (b) Isotermas.

CAMPOS DE VELOCIDAD

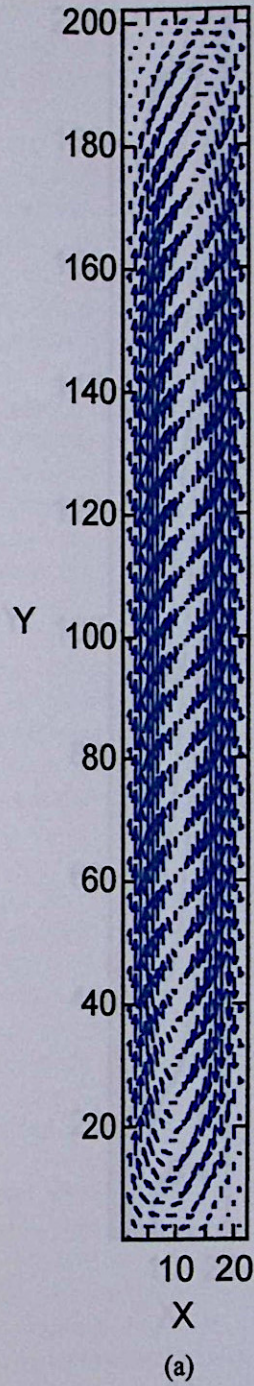
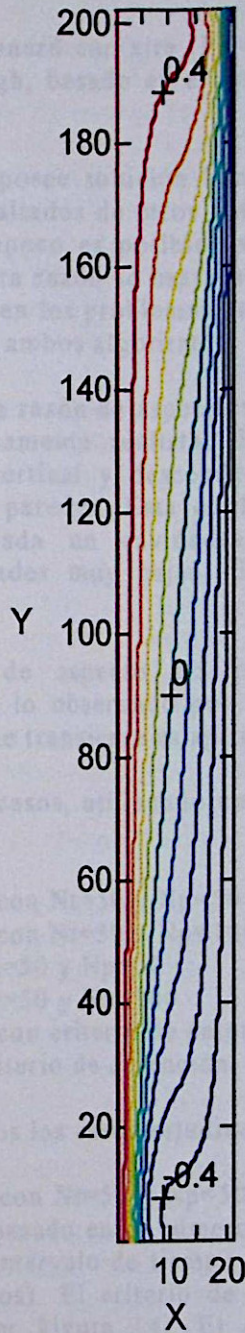


Figura 13- Campos de velocidad, flujo turbulento (Re = 2000) en un canal de 10 cm de altura. (a) Campos de velocidad. (b) líneas de corriente ($u/v = 0.1$).

ISOTERMAS



(b)

Figura 13. Cavity de Alto aspecto, malla 22x202, $N_p=220$, SIMPLER QUICK. (a) Campos de Velocidad, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

6.8 Problema de la cavidad de Bénard

Se estudió el problema de Bénard con aire ($Pr=0.71$) para una razón de aspecto de 0,5. El número de Rayleigh, basado en el ancho de la cavidad, se fijó en el valor 64000.

Dado que este problema no posee solución benchmark conocida, no es posible evaluar, con referencia a resultados de otros autores, la precisión de la solución obtenida, y por lo tanto tampoco es posible evaluar la influencia del paso de malla en la precisión. Por esta razón se usará una malla única, de paso igual al de la malla intermedia usada en los problemas anteriores. En base a esta malla se compararán los resultados de ambos algoritmos.

Ensayos preliminares con una razón de aspecto unitaria no pudieron generar una configuración de flujo físicamente realista, debido a la existencia de flujo ascendente por una pared vertical y descendente por la otra en ausencia de fuerzas de empuje en estas paredes. Esta configuración tiene una circulación única similar a la observada en cavidades con gradiente horizontal de temperatura, y con velocidades muy bajas. El número de Nusselt resultaba unitario.

La cavidad bidimensional de aspecto 0,5 permite la aparición de flujos multicelulares, de acuerdo a lo observado por Ozoe y Hara [8]. Como se dijo anteriormente, solo el enfoque transiente es aplicable a este problema.

Se estudiaron los siguientes casos, utilizando un paso de tiempo igual a la mitad del espaciado de malla:

- a) SIMPLER Convencional, con $Nt=50$ y $Np=50$
- b) SIMPLER Convencional, con $Nt=50$ y $Np=100$
- c) SIMPLER QUICK, con $Nt=50$ y $Np=50$
- d) SIMPLER QUICK, con $Nt=50$ y $Np=100$
- e) SIMPLER Convencional, con criterio de detención
- f) SIMPLER QUICK, con criterio de detención

A continuación serán descritos los casos estudiados:

- a) SIMPLER Convencional, con $Nt=50$ y $Np=50$: Este caso se estudió aplicando un criterio de detención basado en el número de Nusselt para las iteraciones generales, tanto en cada intervalo de tiempo como entre intervalos de tiempo (el mismo en ambos casos). El criterio de detención se cumplió a los 26 intervalos temporales (ver Figura 14). El comportamiento del número de Nusselt, presenta las siguientes características:

- Peak en el quinto intervalo de tiempo (máximo). Existe un régimen en el que se observan cuatro rollos con ejes alineados según la dirección Z (perpendicular al plano X-Y), tres de los cuales predominan en tamaño sobre un cuarto que se encuentra en la esquina inferior derecha. En la pared

izquierda existe un ascenso del flujo, en cambio en la pared derecha coexisten ascenso y estancamiento (parte superior). En la parte central de la cavidad se encuentra un rollo levemente inclinado que provoca tanto flujo horizontal como ascendente (ver Figura 18).

- Peak en el décimo intervalo de tiempo (mínimo). Existe un régimen en el que se observan tres rollos de distinto tamaño. El más pequeño se encuentra en la parte central inferior de la cavidad. El más grande es inclinado al igual que el mediano, y se encuentra en la parte izquierda de la cavidad. En ambas paredes existe un flujo ascendente. En el centro predomina un flujo descendente sobre uno ascendente que tiene su origen en el movimiento del rollo más pequeño (ver Figura 19).
 - Estabilización en torno al valor final a partir del intervalo de tiempo número 15. Existe un régimen en el que se observan dos rollos, distribuidos en forma simétrica con respecto al eje de simetría vertical. En ambas paredes existe un flujo ascendente. En la parte central de la cavidad existe un flujo descendente (ver Figura 20).
- b) SIMPLER Convencional con $Nt=50$ y $Np=100$: Este caso se estudió aplicando un criterio de detención sobre el número de Nusselt para las iteraciones generales, tanto en cada intervalo de tiempo como entre intervalos de tiempo (el mismo en ambos casos). El criterio de detención se cumplió a los 45 intervalos temporales (ver Figura 14). El comportamiento del número de Nusselt, presenta las siguientes características:
- Peak en el sexto intervalo de tiempo (máximo).
 - Estabilización (con un leve aumento) entre los intervalos de tiempo 10 y 24. En el intervalo de tiempo número 20 existe un régimen en el que se observan tres rollos. El más pequeño de los rollos está ubicado en el centro de la cavidad, levemente inclinado y estrecho. Los dos rollos restantes son de igual tamaño, el izquierdo tiene su centro por debajo del eje de simetría horizontal, en cambio el derecho tiene su centro sobre este mismo eje. En la pared izquierda existe flujo ascendente y en la pared derecha flujo descendente. En el centro de la cavidad coexisten tanto flujo horizontal como ascendente y descendente producto del giro del rollo pequeño.
 - Peak en el intervalo de tiempo número 26 (mínimo). Estabilización en torno al valor final a partir del intervalo de tiempo número 33. Existe un régimen en el que se observa un rollo inclinado. En la pared izquierda existe flujo ascendente y en la derecha descendente. En la parte central de la cavidad existe un flujo horizontal (ver Figura 21).

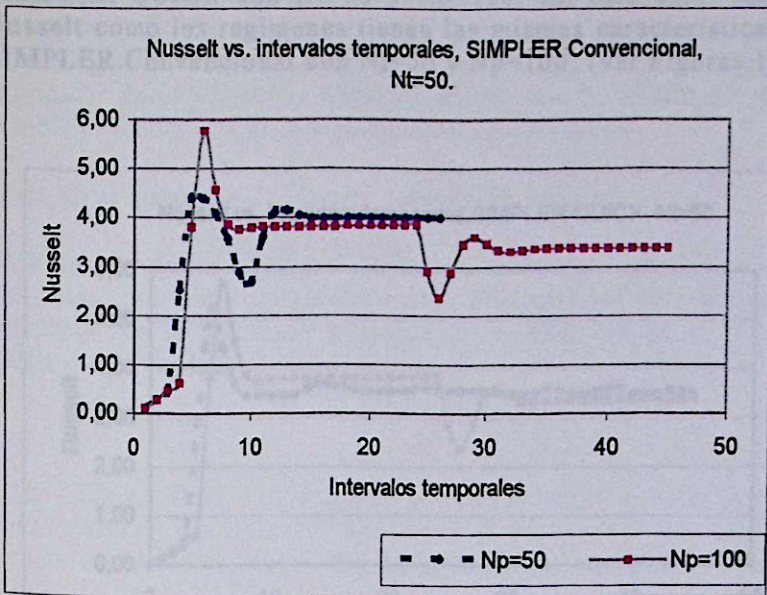


Figura 14. Evolución temporal del número de Nusselt casos a) y b).

c) SIMPLER QUICK con $Nt=50$ y $Np=50$: Este caso se estudió aplicando un criterio de detención sobre el número de Nusselt para las iteraciones generales, tanto en cada intervalo de tiempo como entre intervalos de tiempo (el mismo en ambos casos). El criterio de detención no se logró cumplir en al menos 500 intervalos temporales. En la Figura 15 se muestran 45 intervalos de tiempo. El comportamiento del número de Nusselt, presenta las siguientes características:

- Peak en el quinto intervalo de tiempo (máximo).
- Oscilación de amplitud pequeña y frecuencia variable, que se transforma en ruido, en torno a un valor aproximado de Nusselt, $Nu=3.5$. Esto ocurre a partir del décimo intervalo de tiempo. En el intervalo de tiempo número 20 existe un régimen formado por cuatro rollos (ver Figura 22). Dos centrales de tamaño similar y dos laterales, en donde el izquierdo tiene un tamaño levemente mayor al derecho. Los laterales son inclinados y los centrales son estrechos. En ambas paredes existe flujo ascendente. En el centro de la cavidad existe flujo ascendente producto de los rollos centrales.

- d) SIMPLER QUICK con $Nt=50$ y $Np=100$: En este caso, tanto el número de Nusselt como los regímenes tienen las mismas características que las caso b) SIMPLER Convencional con $Nt=50$ y $Np=100$. (ver Figuras 15 y 23)

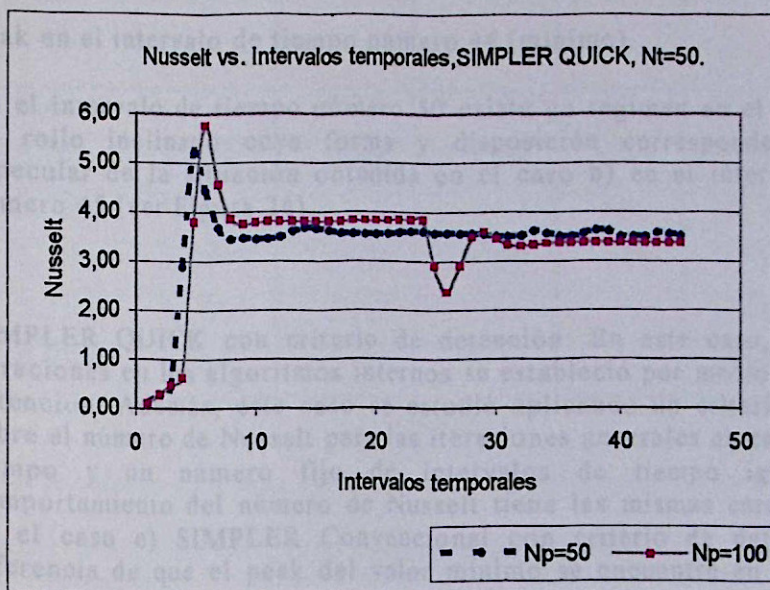


Figura 15. Evolución temporal del número de Nusselt casos c) y d).

- e) SIMPLER Convencional con criterio de detención: En este caso, el número de iteraciones en los algoritmos internos se estableció por medio de criterios de detención del tipo:

$$\sum_{ij} |P_{ij}^{n+1} - P_{ij}^n| < C$$

Donde P_{ij}^n corresponde ya sea a la presión, presión corregida o la temperatura en el nodo ij en la iteración n . En este caso se utilizó $C=10^{-2}$ para el algoritmo de temperatura y $C=10^{-1}$ para los algoritmos de presión y corrección de presión. Lo anterior también fue aplicado al caso f) SIMPLER QUICK con criterio de detención.

Además, este caso se estudió aplicando un criterio de detención sobre el número de Nusselt para las iteraciones generales en cada intervalo de tiempo y un número fijo de intervalos de tiempo igual a 50 (ver Figura 16). El comportamiento del número de Nusselt, presenta las siguientes características:

- Peak en el sexto intervalo de tiempo (máximo).

- Estabilización (con un leve aumento) entre los intervalos de tiempo 10 y 42. En el intervalo de tiempo número 20 existe un régimen en el que se observan tres rollos. La disposición y forma de estos rollos corresponde a la imagen especular de la situación obtenida en el caso b) SIMPLER Convencional con $Nt=50$ y $Np=100$ en el mismo intervalo de tiempo.
 - Peak en el intervalo de tiempo número 44 (mínimo).
 - En el intervalo de tiempo número 50 existe un régimen en el que se observa un rollo inclinado cuya forma y disposición corresponde a la imagen especular de la situación obtenida en el caso b) en el intervalo de tiempo número 45 (ver Figura 24)
- f) SIMPLER QUICK con criterio de detención: En este caso, el número de iteraciones en los algoritmos internos se estableció por medio de criterios de detención. Además, este caso se estudió aplicando un criterio de detención sobre el número de Nusselt para las iteraciones generales en cada intervalo de tiempo y un número fijo de intervalos de tiempo igual a 50. El comportamiento del número de Nusselt tiene las mismas características que en el caso e) SIMPLER Convencional con criterio de detención, con la diferencia de que el peak del valor mínimo se encuentra en el intervalo de tiempo número 40 (ver Figuras 16 y 25).

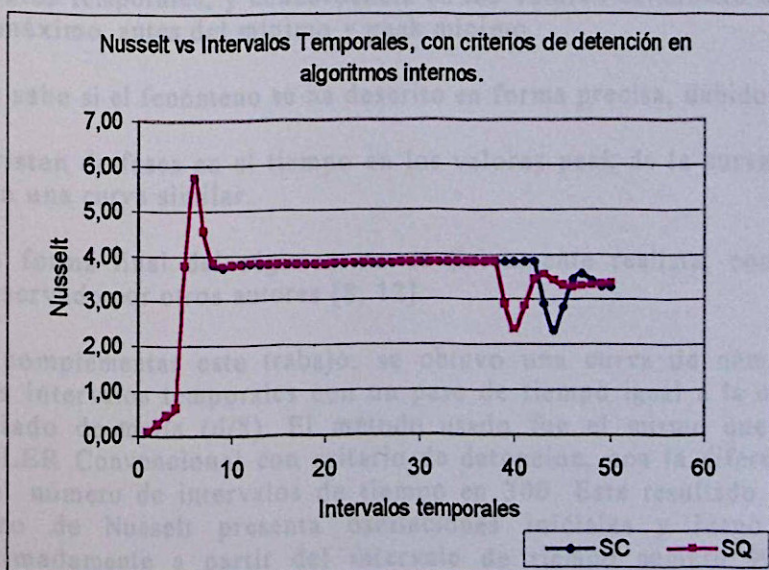


Figura 16. Evolución temporal del número de Nusselt casos e) y f).

A continuación en la Tabla 16. se encuentran las características tanto del número de Nusselt como de los algoritmos internos en los distintos casos estudiados:

Tabla 16. Valores del número de Nusselt y características de algoritmos internos.

Caso	Nu Peak Máximo	Nu Antes del mínimo	Nu Peak Mínimo	Nu Final	Nt final	Np final	Npc final
a	4.4147	-----	2.6789	4.0010	50	50	50
b	5.7703	3.8435	2.3595	3.3726	50	100	100
c	5.2263	3.4982	-----	-----	50	50	50
d	5.7697	3.8427	2.3608	3.3729	50	100	100
e	5.7538	3.8605	2.3317	3.2839	1	2742	2759
f	5.7531	3.8551	2.3405	3.3710	1	2725	2770

Se aprecia valores similares del número de Nusselt en los casos b), d) y f).

Los casos tanto SIMPLER Convencional como QUICK con $Nt=50$ no describen bien el fenómeno.

Los casos b), d), e) y f) muestran una curva similar de número de Nusselt versus intervalos temporales, y concordancia en los valores de número de Nusselt en el peak máximo, antes del mínimo y peak mínimo.

No se sabe si el fenómeno se ha descrito en forma precisa, debido a que:

- Existen desfases en el tiempo en los valores peak de la curva para los casos con una curva similar.
- La forma final del régimen no es físicamente realista, con respecto a lo observado por otros autores [8, 12].

Para complementar este trabajo, se obtuvo una curva de número de Nusselt versus intervalos temporales con un paso de tiempo igual a la octava parte del espaciado de malla ($d/8$). El método usado fue el mismo que en el caso e) SIMPLER Convencional con criterio de detención, con la diferencia de que se fijó el número de intervalos de tiempo en 300. Este resultado muestra que el número de Nusselt presenta oscilaciones iniciales y luego se estabiliza, aproximadamente a partir del intervalo de tiempo número 90, en un valor cercano a 3.97 (ver Figura 17).

Debido a la naturaleza del fenómeno, es difícil encontrar valores del número de Nusselt y velocidades con absoluta certeza, por lo tanto, no hay una solución benchmark.

La aplicación de la Metodología a este problema indica en cierto modo como optimizar el algoritmo.

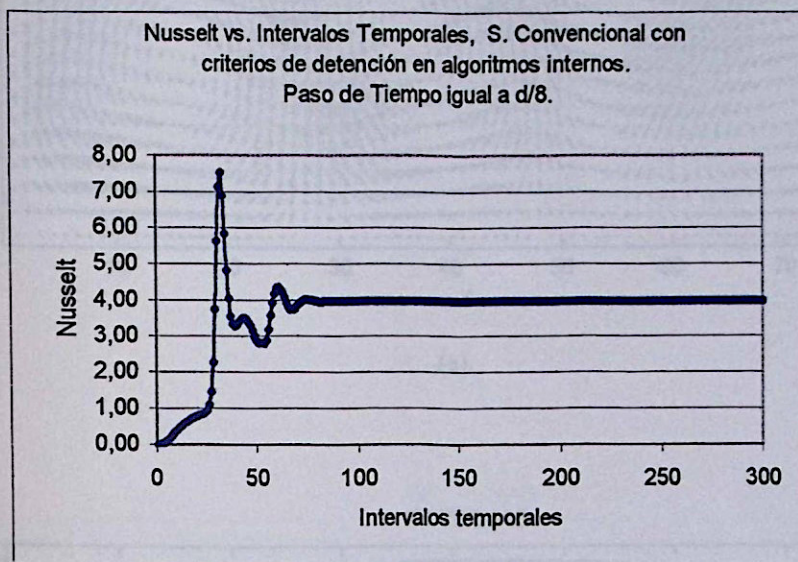


Figura 17. Evolución temporal del número de Nusselt con Paso de tiempo igual a $d/8$.

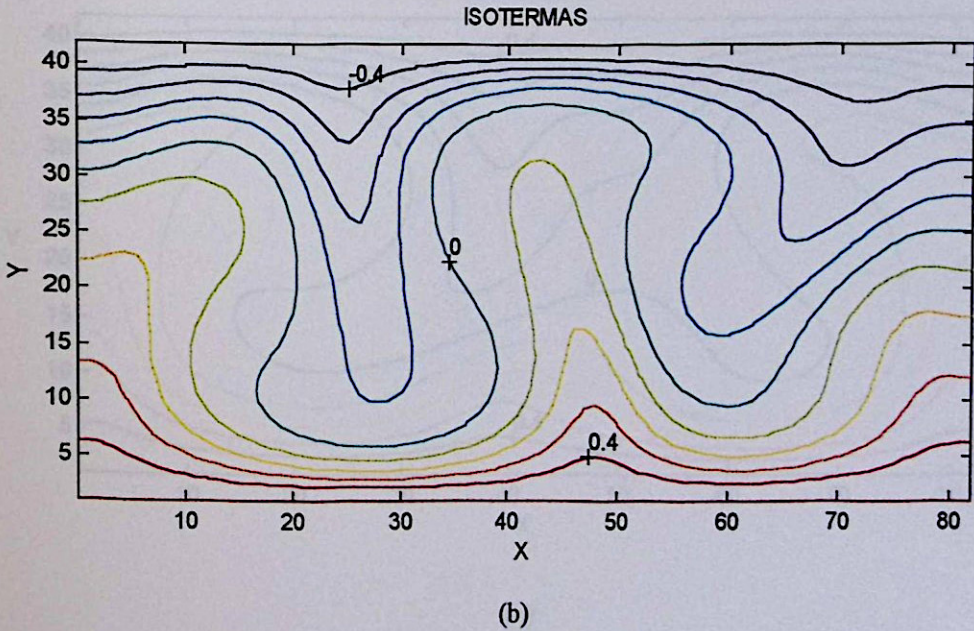
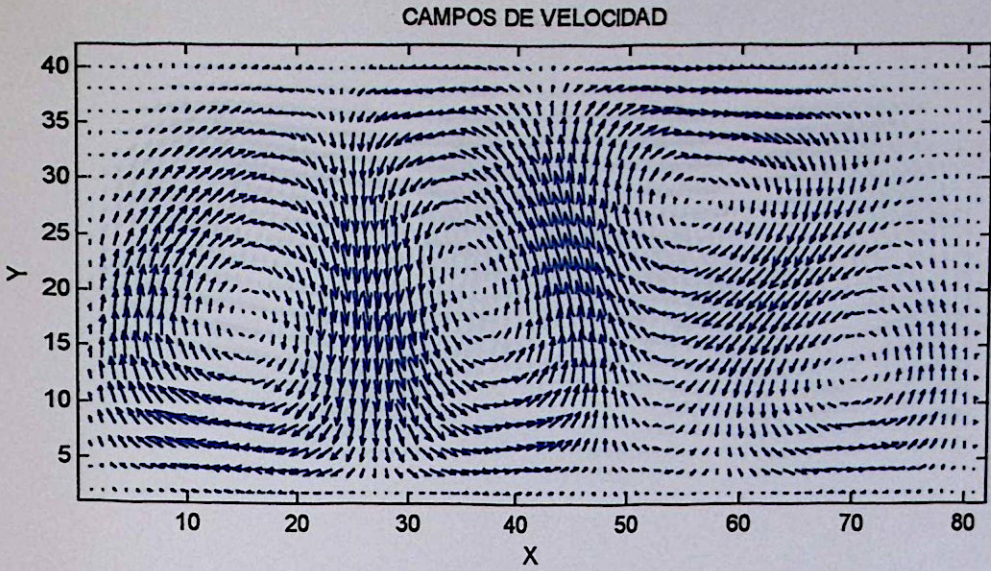
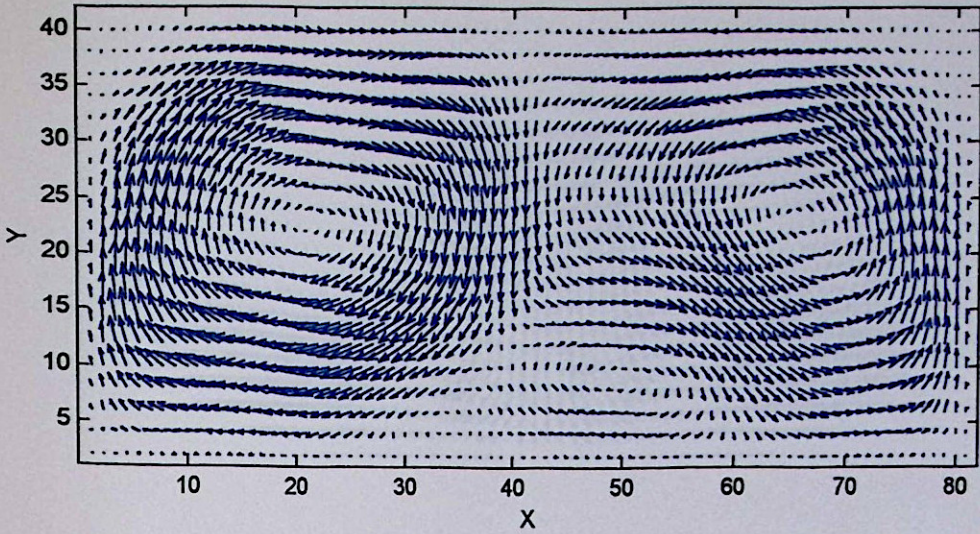


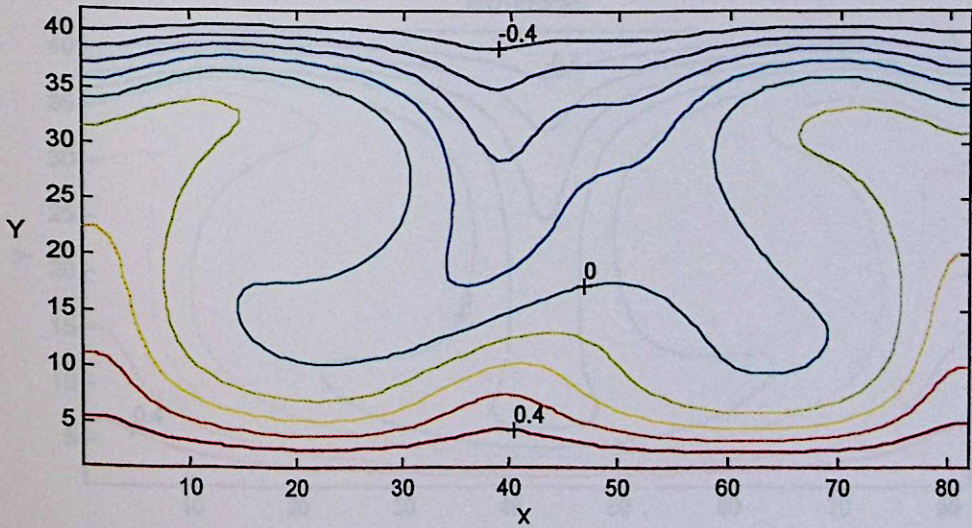
Figura 18. Cavity de Bénard, SIMPLER Convencional con $Nt=50$ y $Np=50$. Resultados en el quinto intervalo de tiempo. (a) Campos de Velocidades, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

CAMPOS DE VELOCIDAD



(a)

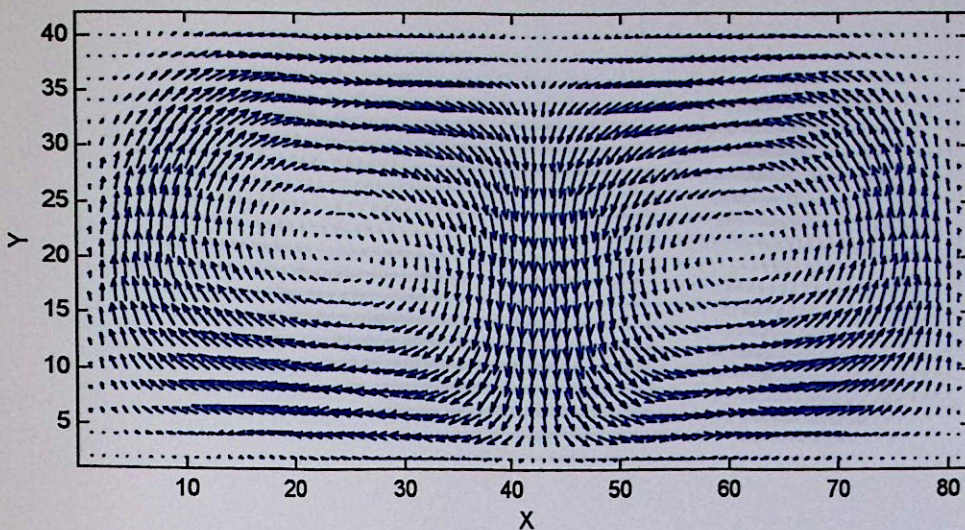
ISOTERMAS



(b)

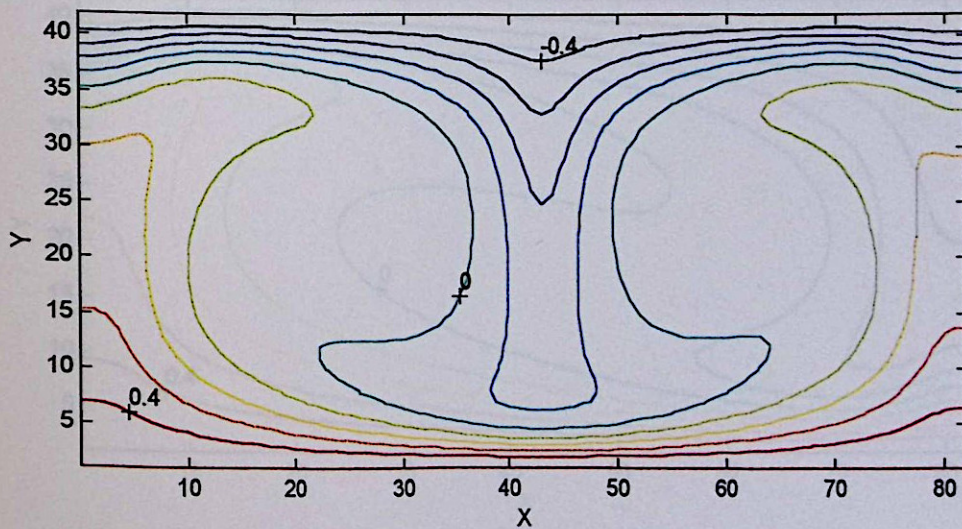
Figura 19. Cavity de Bénard, SIMPLER Convencional con $N_t=50$ y $N_p=50$. Resultados en el décimo intervalo de tiempo. (a) Campos de velocidades, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

CAMPOS DE VELOCIDAD



(a)

ISOTERMAS



(b)

Figura 20. Cavity de Bénard, SIMPLER Convencional con $N_t=50$ y $N_p=50$. Criterio de detención. (a) Campos de Velocidades, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

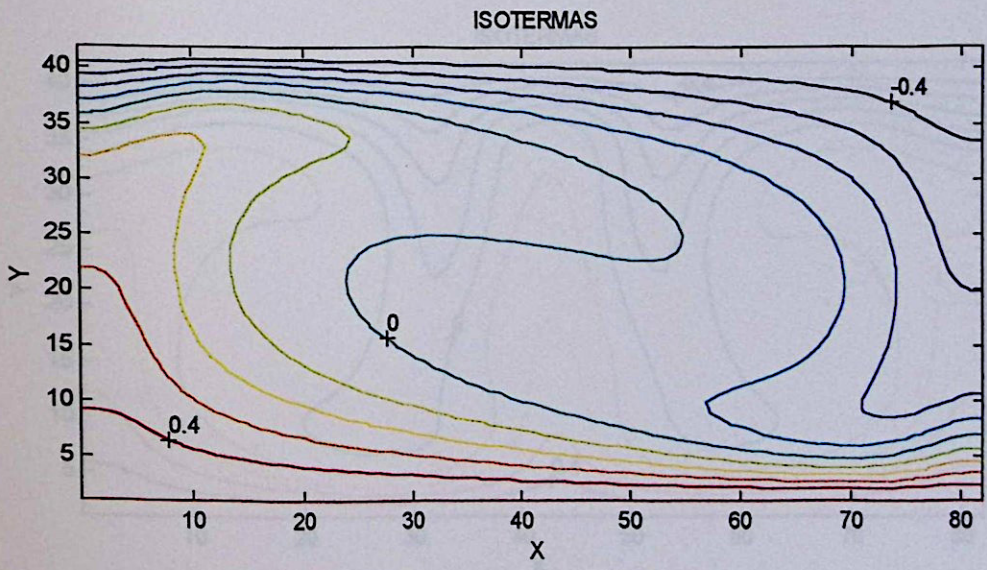
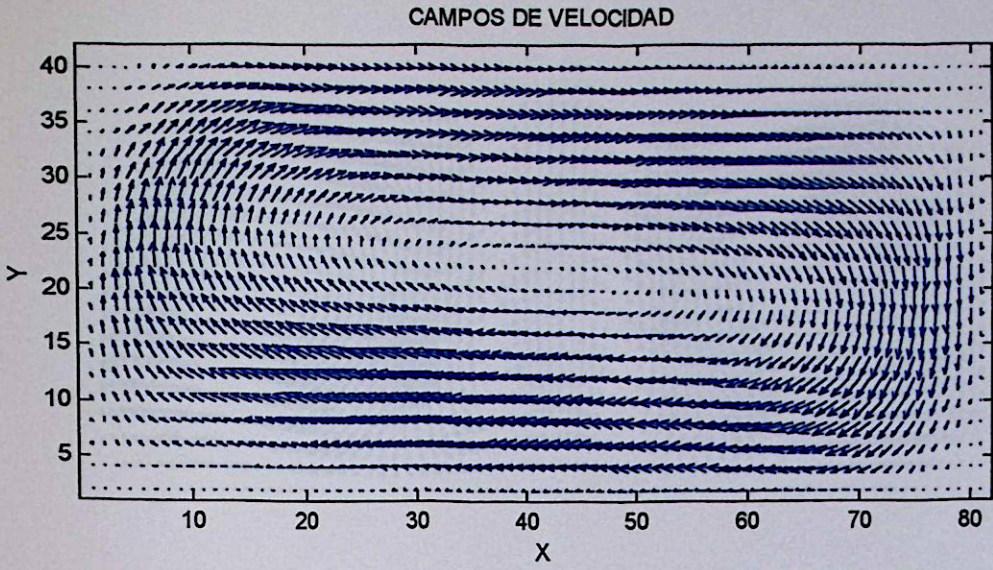
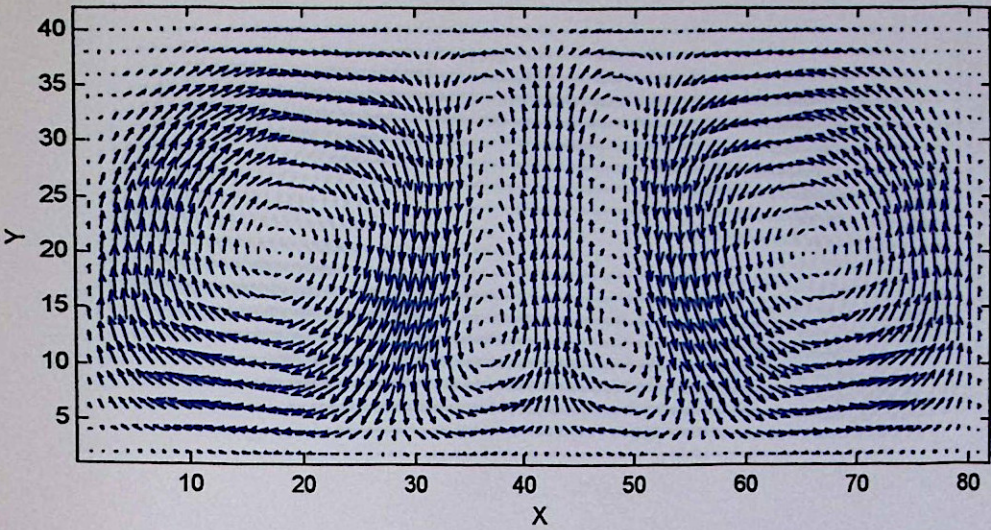


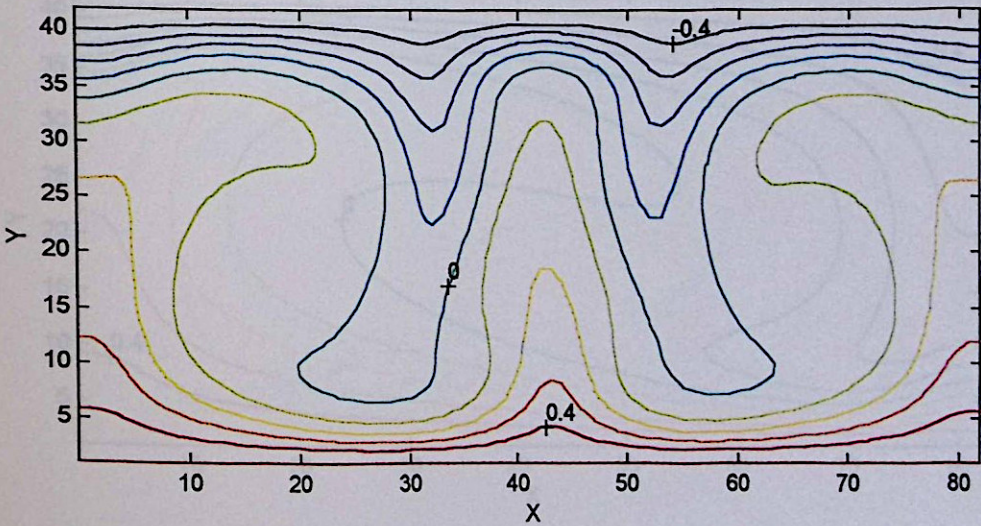
Figura 21. Cavity de Bénard. SIMPLER Convencional con $N_t=50$ y $N_p=100$. Criterio de detención. (a) Campos de Velocidades, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

CAMPOS DE VELOCIDAD



(a)

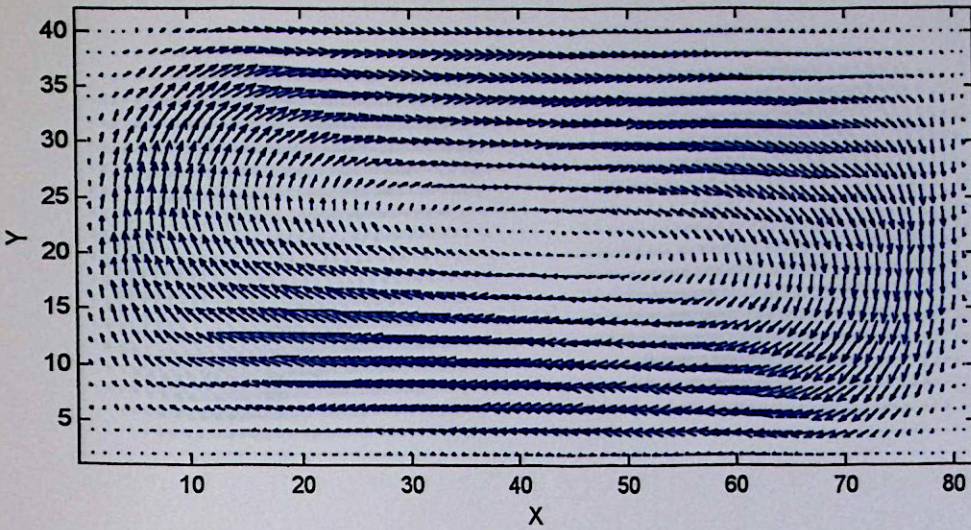
ISOTERMAS



(b)

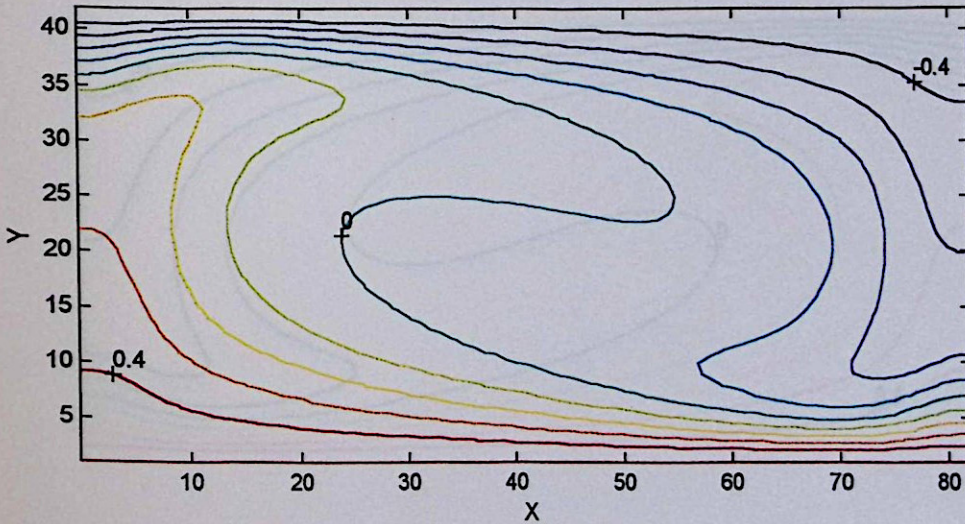
Figura 22. Cavity de Bénard, SIMPLER QUICK con $Nt=50$ y $Np=50$. 20 intervalos de tiempo. (a) Campos de Velocidad, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

CAMPOS DE VELOCIDAD



(a)

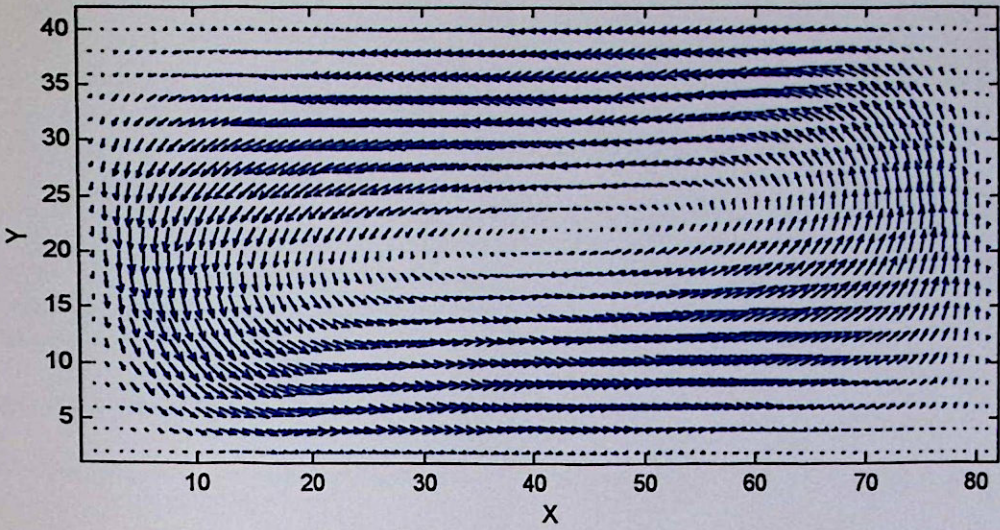
ISOTERMAS



(b)

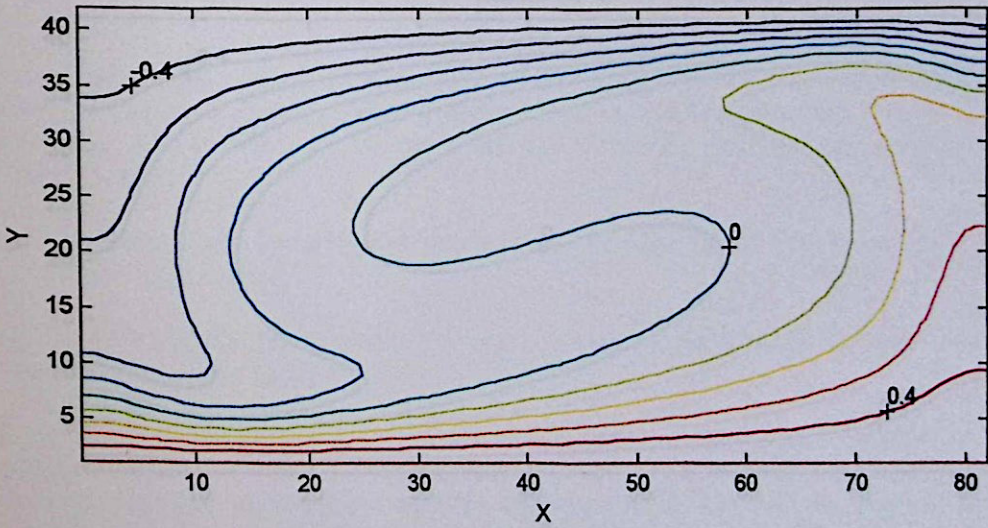
Figura 23. Cavity de Bénard. SIMPLER QUICK con $N_t=50$ y $N_p=100$. Criterio de detención. (a) Campos de Velocidades, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

CAMPOS DE VELOCIDAD



(a)

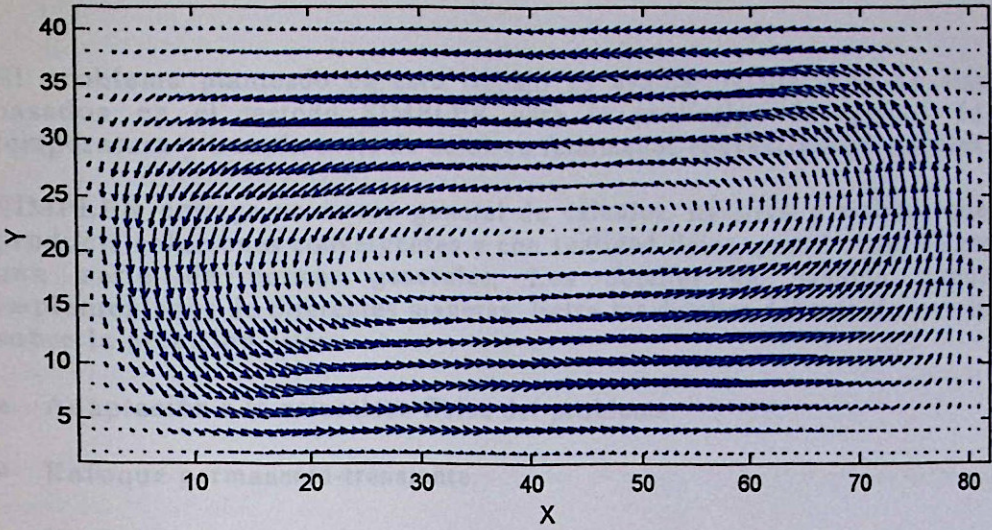
ISOTERMAS



(b)

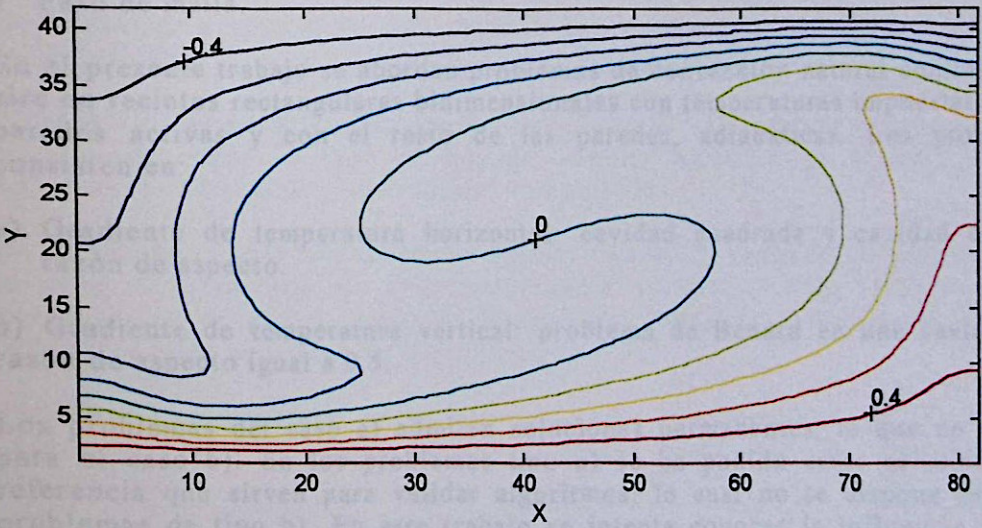
Figura 24. Cavity de Bénard, SIMPLER Convencional con criterios de detención. 50 intervalos de tiempo. (a) Campos de Velocidad, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

CAMPOS DE VELOCIDAD



(a)

ISOTERMAS



(b)

Figura 25. Cavity de Bénard, SIMPLER QUICK con criterios de detención. 50 intervalos de tiempo. (a) Campos de Velocidad, (b) Isotermas ($\Delta\Theta = 0.1$).

7 Conclusiones

El problema planteado en este trabajo es evaluar la precisión de algoritmos basados en el método SIMPLER para la predicción de campos de flujo, temperatura y transferencia de calor en fenómenos convectivos no lineales.

SIMPLER entrega un marco general de cálculos, iterativo y cíclico, que busca producir soluciones convergentes y con realidad física, para lo cual se establece una serie de normas generales. Los detalles del método pueden ser implementados de diferentes maneras. Entre los detalles del método que influyen sobre la precisión están:

- Adaptación a la naturaleza física del problema.
- Enfoque permanente-transiente.
- Definición de las mallas en la región de estudio.
- Forma de discretización de los diferentes términos.
- Modo de asegurar la convergencia de los algoritmos internos y del ciclo total.
- Paso de malla.

En el presente trabajo se abordan problemas de convección natural confinada de aire en recintos rectangulares bidimensionales con temperaturas impuestas en las paredes activas y con el resto de las paredes, adiabáticas. Los problemas consisten en:

- a) Gradiente de temperatura horizontal: cavidad cuadrada y cavidad de alta razón de aspecto.
- b) Gradiente de temperatura vertical: problema de Bénard en una cavidad de razón de aspecto igual a 0.5.

Los problemas del caso a) admiten soluciones permanentes, lo que no ocurre para el caso b). En los problemas tipo a) se ha podido crear soluciones de referencia que sirven para validar algoritmos, lo cual no se dispone para los problemas de tipo b). En este trabajo se intenta conocer la influencia de los diferentes factores indicados sobre la precisión de las soluciones. La precisión se juzga con tres criterios:

- Orden de truncación de las soluciones, determinado por extrapolación de Richardson basada en soluciones para una misma situación, obtenidas con tres mallas diferentes.

- Comparación con una solución de referencia (errores porcentuales en las variables dependientes más importantes).
- Realismo físico de las soluciones, teniendo como base el despliegue gráfico de campos de temperatura y velocidad.

El primer criterio corresponde a una validación interna del algoritmo, y los otros dos lo comparan con datos externos al algoritmo.

La problemática abordada en esta memoria comprendió la implementación y validación de dos versiones del método SIMPLER: una con la discretización convencional y otra con una discretización de segundo orden. Esto consiste en calcular utilizando una interpolación cuadrática, los flujos de masa de la parte convectiva de los coeficientes de las ecuaciones de Navier-Stokes discretizadas, dejando inalterados los coeficientes de la ecuación de la energía.

Para cumplir con lo anterior, se estudiaron los siguientes problemas aplicando el método SIMPLER:

- a) Convección natural en una cavidad cuadrada con paredes verticales a temperaturas impuestas ($Ra=10^4$).
- b) Convección natural en una cavidad de alta razón de aspecto, $A=10$, con paredes verticales a temperaturas impuestas ($Ra=10^4$).
- c) Convección natural en una cavidad con condiciones de Bénard ($A=0.5$ y $Ra=64000$).

El problema a) permite el desarrollo de flujos recirculantes sin excesivo roce en las paredes, por lo cual es posible obtener números de Nusselt altos y velocidades verticales y horizontales comparables.

En el problema b) la imposición de fuerzas de empuje mediante paredes extensas permite el desarrollo de altas velocidades verticales, pero las velocidades horizontales (y por lo tanto el número de Nusselt) están limitadas y son inferiores a las obtenidas en el problema a).

Por último, el problema c) es intrínsecamente tridimensional, por lo cual las soluciones bidimensionales obtenidas pueden estar lejos de representar la realidad física.

El estudio realizado comprendió etapas que permitieron obtener conclusiones, las cuales fueron aplicadas en las etapas posteriores. Dentro de este marco, las conclusiones serán referidas a la etapa del estudio en la cual fueron obtenidas.

Etapas : Criterio de detención de los algoritmos internos:

Inicialmente se planteó obtener la convergencia de los algoritmos de presión, corrección de presión y temperatura aplicando un criterio de detención del tipo:

$$\sum_{ij} |V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n| < A$$

En que V_{ij} es la variable considerada en un nodo dado (i,j) siendo A una cantidad suficientemente pequeña. Aunque en el problema a) este criterio puede llevar a órdenes de truncación cercanos a 1.89 usando SIMPLER Convencional y 1.68 usando SIMPLER QUICK, el número de iteraciones en los algoritmos de presión y corrección de presión es demasiado alto, especialmente cuando el número de nodos es grande (cavidad de alta razón de aspecto). Esto sugiere la necesidad de aplicar criterios alternativos, con vista a la aplicación del algoritmo SIMPLER a casos tridimensionales [17,18].

Por esta razón se decidió explorar la precisión del algoritmo especificando números fijos de iteraciones en cada algoritmo interno.

Etapa. Estudio Preliminar:

A continuación se indican las conclusiones más importantes obtenidas en esta etapa del estudio:

- Para un número de Rayleigh, $Ra=10^4$, el número de Nusselt varía con el número de iteraciones en el algoritmo de temperatura (N_t) y el número de iteraciones en los algoritmos de presión y corrección de presión (N_p), y la variación es mayor para mallas más finas. El número de Nusselt es más sensible a N_p que a N_t .
- La variación del número de iteraciones en los algoritmos de presión y corrección de presión, contribuye en mayor medida a lograr una convergencia de los resultados respecto a los valores de referencia, que variar el número de iteraciones en el algoritmo de temperatura. De manera importante, esto se aprecia en la variación del número de Nusselt.
- Para $n_t=50$, se logra mayor aproximación a los valores de referencia para las mallas 42×42 y 82×82 . Por lo tanto, se fija N_t en 50.

Etapa. Algoritmo SIMPLER Convencional (Problemas permanentes).

- Para $N_t=50$, existe un número óptimo de iteraciones en los algoritmos de presión y corrección de presión, el cual permite obtener mínimos errores en la determinación de las variables en estudio respecto a valores de referencia.
- El número óptimo de iteraciones en los algoritmos de presión y corrección de presión (N_p) aumenta con el aumento de la fineza de la malla.

- En el caso de la cavidad cuadrada, el orden de truncación (empírico) para el número de Nusselt con $Ra=10^4$, es superior a 2. Para la cavidad de alta razón de aspecto este orden es superior a 3.
- En la cavidad cuadrada, el aumento de la fineza de la malla permite obtener mayor precisión en el número de Nusselt, U_m y V_m .
- En la cavidad de alta razón de aspecto, el aumento de la fineza de la malla empeora la precisión en U_m . Con la malla intermedia se obtiene la mayor precisión en el número de Nusselt y la menor en V_m . Por el tipo de perfiles de temperatura, el mejor resultado se obtiene con la malla gruesa.

Etapas. Algoritmo SIMPLER QUICK (Problemas permanentes).

- Con el aumento de la fineza de la malla, el número óptimo N_p aumenta y se hace menos definido.
- Para cada malla, el óptimo N_p es mayor que en el caso del algoritmo SIMPLER Convencional.
- Con respecto a lo obtenido usando SIMPLER Convencional (en las mismas mallas), en la cavidad cuadrada con las mallas gruesa e intermedia se obtienen menores errores tanto para el número de Nusselt como para la velocidad U_m y mayores errores en la velocidad V_m . En las mallas gruesa e intermedia, al aumentar N_p , crecen tanto el número de Nusselt como ambas velocidades, U_m y V_m . Para la malla fina la contribución que entrega una variación de N_p al número de Nusselt, es marginal. Debido a esto la determinación de un N_p óptimo para la malla fina se hace más difícil.
- Con respecto a lo obtenido usando SIMPLER Convencional (en las mismas mallas), en la cavidad de alta razón de aspecto con las mallas gruesa e intermedia se obtienen mayores errores en el número de Nusselt, pero menores errores en la velocidad U_m . Sólo con las mallas intermedia y fina se obtienen menores errores en la velocidad V_m . Con la malla fina se obtienen mayores errores tanto en el número de Nusselt como en la velocidad U_m .
- Tanto en el caso de la cavidad cuadrada como en el de la cavidad de alta razón de aspecto, el orden de truncación (empírico) para el número de Nusselt con $Ra=10^4$ es no definido.

Etapas. Exploración de otros efectos.

- En SIMPLER Convencional y en SIMPLER QUICK, al aumentar el número de Rayleigh el valor del óptimo N_p disminuye.

- Se encontró una relación empírica entre el óptimo N_p y el número de nodos para el caso en que $N_t=50$, la cual puede aplicarse tanto a la cavidad cuadrada como a la de alta razón de aspecto con un máximo de 6724 nodos.
- Para la cavidad cuadrada, en las mallas gruesa e intermedia utilizando SIMPLER QUICK con N_p fijo se obtienen simultáneamente los menores errores tanto en el número de Nusselt como en la velocidad U_m . Los menores errores en la velocidad V_m se obtienen con N_p determinado por un criterio de detención. Para la cavidad cuadrada, en la malla fina utilizando SIMPLER Convencional con N_p fijo se obtienen simultáneamente los menores errores en el número de Nusselt y en la velocidad U_m . Los menores errores en la velocidad V_m se obtienen con N_p determinado por un criterio de detención. Con esto se concluye que la mayor ventaja del método SIMPLER QUICK está en mejorar la precisión de cálculo en mallas gruesas.
- En el caso de la cavidad cuadrada con las mallas gruesa e intermedia, existe un efecto positivo (menor error en el número de Nusselt) al usar la discretización QUICK sólo para la componente de flujo horizontal.
- El orden de truncación de las soluciones para la cavidad cuadrada usando SIMPLER Convencional con N_p fijo en el valor óptimo para cada malla y N_t determinado por un criterio de detención, es elevado (8.49). Esto se explica por una mejor estimación del término de empuje en cada iteración general, y puede ser usado para optimizar algoritmos cuyo fin es resolver problemas de Convección Natural.

Etapa. Cavidad con condiciones de Bénard.

Los valores del número de Nusselt, su progresión en el tiempo y los modos de flujo son similares ya sea cuando se usa un $N_p=100$ o cuando se usa un criterio de detención. En cambio, usando $N_p=50$ los resultados difieren notablemente. Esto indica que es muy importante el nivel de convergencia de los algoritmos de presión y corrección de presión en este problema. La razón de esto es que un buen campo de presión permite describir bien los campos de velocidad, en un problema en que tanto la dirección y magnitud de la velocidad entre puntos como en el tiempo cambian mucho.

Las soluciones en todos los casos parecen estabilizarse en un número de Nusselt aproximadamente constante, correspondiente a un régimen en el que se observan tres rollos. Sin embargo, este estado se hace inestable produciéndose una transición a un rollo único. Esta transición aparece en diferentes tiempos de acuerdo al algoritmo y sus parámetros.

Para un paso de tiempo más pequeño, se obtiene una curva de número de Nusselt estable después de oscilaciones iniciales.

En general, la aplicación del algoritmo SIMPLER QUICK a los casos estudiados no produce mejoras notables en la precisión de los cálculos, salvo en muy pocos casos. Con el algoritmo SIMPLER Convencional es posible obtener altas precisiones (y altos órdenes de truncación) manejando adecuadamente los parámetros del algoritmo. Con el algoritmo SIMPLER QUICK no es posible determinar un orden empírico.

Si bien en problemas con gradiente térmico horizontal el enfoque permanente con N_p impuesto es favorable, lo opuesto ocurre en casos con gradiente térmico vertical. En estos casos parece ser indiferente la aplicación del algoritmo SIMPLER Convencional o SIMPLER QUICK. Sin embargo, el método de convergencia preferible para los algoritmos internos es el de criterio de detención en las iteraciones. En el problema de la cavidad de Bénard el factor más crítico es el paso de tiempo utilizado, el cual debe ser suficientemente pequeño para detectar periodicidades o fluctuaciones temporales.

Los resultados entregados corresponden a una implementación particular del método QUICK, pudiendo haber otras. En este caso la discretización de segundo orden se aplicó solo a las caras del volumen de control perpendiculares a la velocidad considerada, manteniendo una discretización de primer orden en las caras paralelas, dado que se disponía de valores de velocidad sobre estas caras. Dado que la discretización QUICK fue desarrollada originalmente para el método de función corriente y vorticidad, el cual no usa mallas alternadas, se necesitarían mayores estudios para producir discretizaciones cuadráticas en todas las caras de los volúmenes de control.

En vista a los resultados obtenidos, un paso de malla más pequeño no siempre asegura mayor precisión. En cada caso nuevo a estudiar la naturaleza del problema dictará la elección de los parámetros de la malla y del algoritmo. La mayor contribución de esta memoria es aportar criterios útiles en este sentido.

Resulta necesario encontrar una explicación al hecho de que el algoritmo QUICK no mejora efectivamente la precisión de los resultados obtenidos con las mallas más finas en los problemas estacionarios. Es lógico pensar que las causas de este comportamiento se derivan tanto de la naturaleza del método QUICK como de la implementación que se hizo de él en este trabajo.

La precisión mejora al usar el método QUICK con mallas gruesas, requiriéndose mayor número de iteraciones en presión que en el método SIMPLER Convencional. En caso de usar mallas con un gran número de nodos, sin embargo, el esfuerzo extra empleado en la resolución de los algoritmos de presión no resulta fructífero.

El método QUICK se propone lograr incrementos de precisión con respecto a esquemas lineales a través de una mejor evaluación de los términos convectivos, es decir, a través de una mejor estimación de los campos de velocidades en las caras del volumen de control. Inicialmente fue concebido para uso con el método de función corriente-vorticidad, en el cual no interviene el campo de presión, y el único término fuente es el de empuje. La resolución del campo de velocidades

en ese método se basa en la iteración sobre la ecuación de transporte de vorticidad, que tiene términos correspondientes a los de las ecuaciones de movimiento pero es bastante estable al no poseer el término fuente de gradiente de presión. Un intenso trabajo iterativo sobre esta ecuación hace que se logre ventaja en el uso de coeficientes mejorados para los flujos de masa que entran y salen de los volúmenes de control.

En cambio, en el método SIMPLER, que trabaja con variables primitivas, la ecuación de momentum se hace inestable por efecto del término de gradiente de presión. Las causas de esa desestabilización están en el hecho de que el campo de presión proviene de una derivada de 1er orden. Un campo de presión muy lejos de la convergencia hace inestables las ecuaciones de momentum a menos que se usen muy pocas iteraciones en las ecuaciones de momentum. El número de iteraciones usado en este trabajo es de 1, y el enfoque del cálculo se basa en desplazar el esfuerzo computacional hacia la obtención de campos de presión convergidos, que proporcionen una buena estimación de los gradientes de presión. Para esto se cuenta con el hecho de que las ecuaciones de presión y corrección de presión linealizadas son muy estables. Este método impide, por lo tanto, hacer uso intensivo y directo de la buena estimación de los coeficientes de las ecuaciones de movimiento.

La implementación de QUICK usada en este trabajo continuó usando la estrategia básica de SIMPLER Convencional. Una mejor predicción de los coeficientes de velocidad y de las pseudo velocidades, utilizando un número mayor de nodos con relación al caso convencional, influye negativamente en la predicción de la presión, debido a que se necesitan tres nodos consecutivos para estimar los coeficientes de las ecuaciones de velocidad, de los cuales salen los coeficientes de la ecuación de presión, la cual tiene variaciones drásticas de un punto a otro y de iteración en iteración. El campo de presión se deteriora al usar tres puntos para estimar estos coeficientes, cuando el número de nodos es alto. Este deterioro se manifiesta de manera embrionaria aún en los casos en que el método QUICK entrega alta precisión, a través de un aumento en el número de iteraciones en presión necesarias para lograrla.

Después de realizado el trabajo y con la experiencia obtenida, es posible pensar que la mejora esperada en la precisión por el uso del método QUICK se podría lograr estableciendo un mayor grado de balance entre el esfuerzo computacional gastado en las ecuaciones de movimiento y en las de presión. Esto no se ha podido verificar por falta de tiempo, sin embargo es posible intuir que es de esta manera como el método QUICK daría los beneficios esperados.

8 Bibliografía

- [1] S. V. Patankar, "*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*", M^cGraw-Hill, 1980.
- [2] S. Ostrach, "*Natural Convection in Enclosures*", Journal of Heat Transfer, Vol. 110, pp. 1175-1190, 1988.
- [3] G. De Vahl Davis, "*Natural Convection of Air in a Square Cavity: A bench Mark Numerical Solution*", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, pp. 249-264, 1983.
- [4] Yee Lee & S. P. Korpela, "*Multicellular natural convection in a vertical slot*", J. Fluid Mech., Vol. 126, pp. 91-121, 1983.
- [5] N. Ramanan and S. A. Korpela, "*Multigrid Solution of Natural Convection in a Vertical Slot*", Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 15, pp.323-339, 1989.
- [6] Tzyy-Ming Wang & S. A. Korpela, "*Secondary instabilities of convection in a shallow cavity*", J. Fluid Mech., Vol. 234, pp. 147-170, 1992.
- [7] R. Frederick, "*On the Aspect Ratio for which the Heat Transfer in Differentially Heated Cavities is Maximum*", Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 26, pp. 549-558, 1999.
- [8] H. Ozoe, T. Hara, "*Numerical Analysis for oscillatory natural convection of low Prandtl number fluid heated from below*", Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 27, pp. 307-317, 1995.
- [9] R. Hernández & R. Frederick, "*Spatial and thermal features of three dimensional Rayleigh-Bénard convection*", International Journal Heat Mass Transfer, Vol. 37, pp. 411-424, 1994.

- [10] R. Hernández “*Modelación Numérica Tridimensional del Fenómeno de Convección Natural en Cavidades de razón de Aspecto Variable*”, Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil Mecánico y Grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería mención Mecánica, 1992.
- [11] R. Hernández, “*Influence of the heating rate on supercritical Rayleigh-Bénard convection*”, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 38, pp.3035-3051, 1995.
- [12] D. Mukutmoni & K.T. Yang, “*Wavenumber selection for Rayleigh-Bénard convection in a small aspect ratio box*”, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, pp. 2145-2159, 1992.
- [13] D. Mukutmoni & K.T. Yang, “*Pattern selection for Rayleigh-Bénard Convection in intermediate aspect ratio boxes*”, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 27, pp. 621-637, 1995.
- [14] B.P. Leonard, “*Elliptic Systems: Finite-Difference Method IV*” in W. J. Minkowycz, E.M. Sparrow, G.E. Schneider & R. H. Pletcher, Handbook of Numerical Heat Transfer, pp. 347-378, John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [15] B.P. Leonard, “*A Convectively Stable, Third-Order Accurate Finite-Difference Method for Steady Two-Dimensional Flow and Heat Transfer*”, in T.M. Shih (ed.), Numerical Properties and Methodologies in Heat Transfer, pp. 211-226, Hemisphere, Washington, D.C., 1983.
- [16] R.Scozia & R.Frederick, “*Natural Convection in Slender Cavities with Multiple Fins Attached to an Active Wall*”, Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 20, pp. 127-158, 1991.
- [17] T. Fusegi, J.M. Hyun, K. Kuwahara, and B. Farouk, “*A Numerical Study of Three-Dimensional natural Convection in a Differentially Heated Cubical Enclosure*”, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, pp. 1543-1557, 1991.

[18] R.J.A. Janssen, R.A.W. Henkes, and C.J. Hoogendoorn, "*Transition to Time-Periodicity of a Natural-Convection Flow in a 3D Differentially Heated Cavity*", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, pp. 2927-2940, 1993.

[19] R. Frederick, "*Natural Convection Heat Transfer in a Cubical Enclosure with two active sectors on one vertical wall*", Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 507-540, 1997.

