

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

LA CONJETURA 2-DIMENSIONAL DE LAZER Y MCKENNA
CON NO-LINEALIDAD EXPONENCIAL

CLAUDIO ANTONIO MUÑOZ CERÓN

2006

a502802.

T
2006
M929c
C.2

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

LA CONJETURA 2-DIMENSIONAL DE LAZER Y MCKENNA
CON NO-LINEALIDAD EXPONENCIAL

CLAUDIO ANTONIO MUÑOZ CERÓN



COMISIÓN EXAMINADORA	NOTA (n°)	CALIFICACIONES: (Letras)	FIRMA
PROFESOR GUÍA SR. MANUEL DEL PINO M.	: 7.0	Diez punto cero	
PROFESOR CO-GUÍA SR. PATRICIO FELMER A.	: 7.0	siete punto cero	Patricio Felmer
PROFESOR INTEGRANTE SR. JUAN DÁVILA B.	: 7.0	SIETE PUNTO CERO	Juan Dávila
PROFESOR INTEGRANTE SR. ROBERTO COMINETTI C.	: 7.0	siete punto cero.	Roberto Cominetti
NOTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO :	7.0	siete punto cero	

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SANTIAGO - CHILE
AGOSTO - 2006

35601155497187

LA CONJETURA 2-DIMENSIONAL DE LAZER Y MCKENNA CON NO-LINEALIDAD EXPONENCIAL

En este trabajo de memoria de título se presenta un estudio sobre la veracidad de la conjetura de Lazer y McKenna para un problema tipo Ambrosetti y Prodi

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = s\phi_1 + h(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde Ω es un dominio en \mathbb{R}^2 de frontera suave, ϕ_1 es una primera función propia positiva del operador Laplaciano bajo condiciones de borde Dirichlet homogéneas, s es un parámetro real que tiende a infinito, $h(x)$ es una función suave y $g(t) \equiv e^t$ corresponde a una no-linealidad crítica en dimensión dos en el sentido de la aparición de límites singulares, como muestra la literatura existente de principios de los años '90.

Más precisamente, la conjetura de Lazer y McKenna (1981) predice la existencia de un número no acotado de soluciones para (0.0.1) a medida que s crece a infinito. Sorprendentemente, no se produjeron avances generales en la verificación de tal conjetura –salvo el caso radial y el unidimensional– hasta los dos últimos años, con la identificación del caso N -dimensional y subcrítico de (0.0.1) como un problema de límites singulares, hecha por Dancer y Yan (2005).

Este estudio tiene como objetivo demostrar la veracidad de la conjetura antes expuesta para el Problema (0.0.1). Para ello, se probará –para s suficientemente grande– la existencia de una familia de soluciones indexadas por cada natural, que presentarán concentración múltiple en ciertos puntos de Ω caracterizados por ser máximos –posiblemente degenerados– de la función ϕ_1 . Este resultado está en concordancia con los trabajos recientes de Dancer y Yan (2005, 2006), Li, Yan y Yang (2006) y Yan y Wei (preprint), que verifican la conjetura en el caso de mayores dimensiones y no-linealidades subcríticas o críticas.

Para obtener tal resultado, se ha procedido siguiendo un esquema de reducción finito-dimensional de Liapunov-Schmidt en el espíritu del trabajo de Floer y Weinstein ('86). Este consiste, grosso modo, en buscar una solución de la forma $U + \psi$, donde U es una función escogida adecuadamente, de modo que se tenga la concentración anunciada, y donde ψ es un término de corrección, que se espera tienda a cero en algún sentido cuando s tiende a infinito. El marco analítico funcional que se plantea es el mismo introducido por del Pino, Kowalzyck y Musso ('05) en su estudio del problema de Liouville, pero siguiendo una variante realizada por Wei, Ye y Zhou ('06), quienes analizan el problema de Liouville anisotrópico.

El primer paso consiste en la elección de una buena aproximación inicial U , de modo que el error obtenido sea pequeño. A diferencia del trabajo de del Pino, Kowalzyck y Musso, se utiliza un espacio de configuración compatible con la existencia de concentración múltiple. Después de esto se reescribe el problema obteniendo una ecuación no-lineal para ψ . Para estudiar esta ecuación, el trabajo se divide principalmente en tres partes; primero se realiza un completo análisis a un problema lineal asociado, en donde se encuentran resultados de existencia, unicidad y cotas sobre dicha solución. Este problema es en sí complicado de abordar debido a la fuerte interacción entre las componentes de la aproximación U , y merece un análisis más detallado. En segundo lugar, se analiza un problema no-lineal auxiliar, vía un esquema de punto fijo, en donde nuevamente probamos existencia y que efectivamente la función solución resulta converger a cero cuando s tiende a infinito. Además entregamos las condiciones necesarias de regularidad de la solución para reducir el problema de existencia de soluciones del problema no-lineal original a un sistema finito-dimensional. Finalmente, se demuestra que dicho sistema finito-dimensional efectivamente admite al menos una solución, obteniendo por lo tanto, una solución para (0.0.1) con el comportamiento asintótico esperado.

Finalmente, se formulan algunas interrogantes respecto a posibles mejoras en el resultado obtenido. En particular, la obtención de resultados para el caso dos dimensional similares a los obtenidos por Li, Yan y Yang, y por Yan y Wei, mencionados anteriormente. También se conjeturan ciertos resultados de concentración múltiple que se podrían obtener para el problema crítico de Brezis-Nirenberg anisotrópico y un problema de curvatura escalar prescrita.

Agradecimientos

A través de estas líneas pretendo agradecer el apoyo que me han brindado cada una de las personas y entes durante estos últimos años.

En primer lugar, quisiera agradecer a Dios el haberme permitido estudiar en la Universidad, y estudiar lo que finalmente pienso será mi vocación de vida. También a mi familia, mis tíos y tías. Gracias a ellos. Agradezco a **K** por cambiar mi forma de pensar y mirar el mundo.

Durante mi permanencia en el Departamento de Ingeniería Matemática he conocido mucha gente valiosa. Quisiera agradecer al profesor Roberto Cominetti por ser un modelo para nuestra generación, a Carlos Conca por toda su ayuda en mi viaje a Francia y a Juan Dávila por estar siempre dispuesto a responder mis inquietudes, y por presentarme el problema de Liouville bilaplaciano. También quisiera agradecer a Patricio Felmer y a Salomé Martínez por toda la ayuda brindada durante estos últimos meses. Gracias también a los profesores Pablo Dartnell y Axel Osses; y a Luis Mella, María Rosa Cotta y Regina Mateluna por todos los favores concedidos.

Mención aparte merece Juncheng Wei, gracias *por su ayuda*. Gracias también a Mónica Musso por su ayuda en el problema del bilaplaciano.

Quisiera agradecer a mis compañeros de carrera por todas las proezas y sinsabores que vivimos: a René, André, Alonso, Anghello, José, Felipe, Lucho, Mario, Pancho, Carola, Camila, entre otros. También a Hernán por las infinitas horas de jugo dadas al comienzo de nuestros trabajos. Muy especialmente agradezco a mis grandes amigos en esta universidad, a Nicolás y Claudio; gracias por estar en las buenas y en especialmente en las malas junto a mí.

No puedo dejar pasar la oportunidad de agradecer a mi mentor, el profesor Manuel del Pino. Gracias por las infinitas horas de paciencia, conversación, anécdotas y conocimiento transmitido. Gracias por permitirme conocer los problemas de concentración en curvas, uno de mis más grandes gustos. En fin, le agradezco a él por haber hecho nacer en mí el amor por las EDP.

Cómo no agradecer también a los proyectos FONDECYT y FONDAP, por financiar este trabajo.

Finalmente, dedico este trabajo de título *a la memoria* de mi madre, María, esperando poder verla otra vez, algún día.

*A mi abuela, Luzmila,
y a mi madre, María.*

Índice general

Agradecimientos	10
1. Introducción: La conjetura de Lazer y McKeena	1
1.1. Primeros enunciados del problema	1
1.2. Contexto Histórico: El problema de Archimedes y Pappus	3
1.3. La conjetura de él	4
1.4. Descripción de las matemáticas participativas	5
1.5. Aportación de ciertos resultados	8
1.6. El método de reducción inductiva de Lazer y McKeena	8
1.7. Procedimiento a seguir	13
2. Fundamentos y Nociones básicas	16
2.1. Acerca de una versión del Problema (1.1)	16
2.2. Definiciones y lemas sobre el área del sector	17
2.3. El sector de un arco pequeño	18
3. Una teoría básica intermedia	23
3.1. Definición de un Problema Lineal	23
3.2. Existencia y Unicidad para un Problema Lineal	24

Índice general

Agradecimientos	IV
1. Introducción: La conjetura de Lazer y McKenna	1
1.1. Primeros elementos del problema	1
1.2. Contexto Histórico: El problema de Ambrosetti y Prodi	3
1.3. La conjetura en si	4
1.4. Descripción de los resultados principales	5
1.5. Aparición de límites singulares	6
1.6. El método de reducción variacional de Liapunov-Schmidt	8
1.7. Procedimiento a seguir	13
2. Preliminares y Nociones básicas	15
2.1. Ansatz para una solución del Problema (1.5.2)	15
2.2. Estimaciones y forma asintótica del ansatz	17
2.3. El tamaño del error cometido	18
3. Una teoría lineal intermedia	23
3.1. Definición de un Problema Linealizado	23
3.2. Existencia y Unicidad para un Problema Lineal	24

Capítulo 1

Introducción: La conjetura de Lazer y McKenna

Esta introducción tiene como objetivo explicitar el problema principal que motivó este trabajo de memoria, así como el contexto histórico en el que se enmarca y los resultados previamente obtenidos. A primer orden estaremos investigando un problema específico de *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, tópico inmensamente amplio en conceptos, resultados y por supuesto en notaciones. Es por ello que intentaremos explicitar –en la medida de lo posible– cada uno de los conceptos no triviales involucrados a través de estas hojas. Sin embargo, supondremos al lector familiarizado con los conceptos más básicos de Cálculo Multivariado, ya sea derivación e integración sobre subconjuntos adecuados en \mathbb{R}^N .

1.1. Primeros elementos del problema

Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un *dominio suave* y acotado. Por *dominio suave* entendemos un subconjunto *abierto y conexo* de frontera de clase C^∞ .¹ A través de este trabajo de memoria trabajaremos con el problema elíptico de valores de frontera sobre Ω

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = s\phi_1 + h(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

donde

$$\Delta u \equiv \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

¹El concepto de regularidad del dominio es complicado de expresar en pocas palabras, para una explicación detallada ver Apéndice C del libro de Evans [E00].

corresponde al Laplaciano de la función –razonablemente suave– u , h es una función dada perteneciente a una clase a precisar de funciones, s es un parámetro positivo y grande, y ϕ_1 es una primera función propia suave² y positiva³ del problema bajo condiciones de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \lambda\phi & \text{en } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

Denotemos sus autovalores⁴ como

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

La frase *trabajaremos* es bastante ambigua y debemos precisarla. Sin embargo, el simple enunciado anterior motiva recordar primero las siguientes definiciones.

Definición 1. Sea $\alpha \in [0, 1]$. Una función $f : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice Hölder continua de parámetro α si es continua en $\bar{\Omega}$ y la siguiente semi-norma

$$[f]_{0,\alpha} \equiv \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

es finita. Denotaremos como $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ el espacio de Banach de las funciones Hölder continuas en $\bar{\Omega}$ equipado con la norma estándar

$$\|f\|_{0,\alpha} \equiv \|f\|_\infty + [f]_{0,\alpha}.$$

Asimismo, para $k \geq 1$ entero podemos definir el espacio $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ como el de las funciones de clase $C^k(\bar{\Omega})$ cuyas derivadas parciales $\partial^\beta u$ cumplen $[\partial^\beta u]_{0,\alpha} < +\infty$ para cualquier multi-índice $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$ con $|\beta| \equiv \beta_1 + \beta_2 = k$.⁵

En este trabajo escogeremos $h \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. A modo de ejemplo de por qué motivo escogemos este espacio de funciones, recordemos que $\Delta : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ es un isomorfismo bajo condiciones de borde Dirichlet. Esto permitirá trabajar con el inverso de h para los cálculos que vienen.

Antes de introducir formalmente el problema que estudiaremos, expliquemos de manera breve el contexto matemático e histórico que llevó a la formulación de la conjetura de Lazer y McKenna.

²En todo lo que resta de la memoria, una función *suave* corresponderá a una función de clase C^∞ .

³Notar que ϕ_1 es realmente un s.e.v. de dimensión 1 y que no cambia de signo en Ω . Esto nos da un grado de libertad para escoger ϕ_1 que usaremos más adelante.

⁴El hecho que λ_1 sea estrictamente positivo será de vital importancia.

⁵Precisemos: Si $\beta \in \mathbb{N}^2$,

$$\partial^\beta u(x_1, x_2) = \frac{\partial^{|\beta|} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}}.$$

1.2. Contexto Histórico: El problema de Ambrosetti y Prodi

Los primeros trazos del origen de la conjetura de Lazer y McKenna⁶ provienen del *problema de Ambrosetti-Prodi*, esto es, la ecuación de *tipo funcional*

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es acotado y suave, $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, y los límites

$$\nu \equiv \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(t)}{t} < \mu \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t}$$

se asumen finitos. El problema (1.1.1) corresponde precisamente a un problema del tipo Ambrosetti-Prodi, pero en el cual $\nu = 0$ y $\mu = +\infty$.

En 1973, Ambrosetti y Prodi [AP73] asumieron

$$0 < \nu < \lambda_1 < \mu < \lambda_2$$

y adicionalmente que $g'' > 0$,⁷ para mostrar la existencia de una *variedad* \mathcal{M} de clase C^1 de codimensión 1 la cual separa $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ en dos regiones abiertas y disjuntas,

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{O}_2,$$

tal que el Problema (1.2.1) no posee solución para $f \in \mathcal{O}_0$, exactamente dos soluciones si $f \in \mathcal{O}_2$, y exactamente una solución si $f \in \mathcal{M}$.⁸

En 1975, Berger y Podolak [BPo75] obtuvieron una representación más explícita para el resultado en [AP73] al descomponer

$$f = s\phi_1 + h, \quad \int_{\Omega} h\phi_1 = 0,$$

y probando que para cada h ⁹ existe un número real $\alpha(h)$ tal que el problema

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = s\phi_1 + h & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

⁶Una descripción detallada de los primeros resultados aquí mencionados puede ser encontrada en el Capítulo 3 del apunte de Louis Nirenberg, [Ni00].

⁷Esto es, g estrictamente convexa.

⁸Reafirmamos nuevamente que el carácter del resultado de Ambrosetti y Prodi fue esencialmente *funcional*.

⁹Notar que el parámetro s queda bien definido y cumple

$$s = \frac{\int_{\Omega} f\phi_1}{\int_{\Omega} \phi_1^2}.$$

no tiene solución si $s < \alpha(h)$ y tiene exactamente dos soluciones si $s > \alpha(h)$. Escrito de esta manera, y dejando a s como un parámetro y a h fijo, es como comunmente se referencia el problema de Ambrosetti-Prodi.

La hipótesis de convexidad en el resultado de multiplicidad para s grande y positivo fue relajada posteriormente en [AH79, D78, KW75]. En [LM81], Lazer y McKenna obtuvieron una tercera solución para (1.2.2) bajo la hipótesis adicional

$$\nu < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu < \lambda_3,$$

mientras que una cuarta solución bajo esta hipótesis fue encontrada por Hofer [H82] y por Solimini [S83].

1.3. La conjetura en si

Precisamente en [LM81] Lazer y McKenna conjeturaron además que el número de soluciones de (1.2.2) para un valor grande $s > 0$ crece a medida que el intervalo (ν, μ) contiene *más y más* valores propios. En particular, si

$$\nu < \lambda_1 < \mu = +\infty \tag{1.3.1}$$

y g no crece “demasiado rápido” en infinito, entonces para todo $k \geq 1$ existe un número s_k tal que si $s > s_k$, entonces el Problema (1.2.2) debería tener al menos k soluciones. Esta afirmación es precisamente conocida como la *conjetura de Lazer y McKenna*.

Sorprendentemente,¹⁰ Dancer [D89] demostró que esta conjetura *es falsa* en el caso lineal asintótico con ν y μ finitos, exhibiendo un ejemplo en $N \geq 2$ en el cual el intervalo (ν, μ) contiene un gran número de valores propios pero *no más que cuatro soluciones* para s grande existen. La conjetura para los casos μ finito e infinito es cierta tanto en el caso uno-dimensional como en el radial, bajo varias situaciones, ver por ejemplo [CK89, HLM85, LM83, PMM92, RS86]. Ver también [BMP03, D84, DY99, S85] para otros resultados en el caso de ecuaciones en derivadas parciales.

¿Cuán rápido debería ser “no demasiado rápido” en el crecimiento de g bajo la situación (1.3.1)? Los autores de la conjetura tenían probablemente en mente un crecimiento del término no-lineal $g(s)$ no más allá del crítico para la inyección de Sobolev, esto es,

$$|g(s)| \leq C|s|^p, \quad \text{con } p \leq \frac{N+2}{N-2} \text{ para } N \geq 3, \tag{1.3.2}$$

o bien gracias a la inyección de Moser-Trudinger

$$|g(s)| \leq Ce^{s^2}, \quad \text{para } N = 2. \tag{1.3.3}$$

Estas restricciones fueron en efecto ocupada en [CK89] para el caso radial. Sin embargo, y sorprendentemente, *no se produjeron* grandes avances en busca de respuesta a la conjetura en dimensiones

¹⁰Pues en la mayoría de los casos estudiados la conjetura *es cierta*.

mayores y dominios arbitrarios hasta los últimos años. La principal razón –desde nuestro punto de vista– pudo haber sido el tardío descubrimiento de un fenómeno de concentración singular para el Problema (1.1.1). Los descubridores de este fenómeno fueron E. Dancer y S. Yan.

Seamos más específicos. Recientemente Dancer y Yan [DY05, DY06] probaron que la conjetura de Lazer-McKenna es verdadera si $N \geq 3$ y

$$g(t) = \lambda t + t_+^p, \quad 1 < p < \frac{N+2}{N-2}, \quad \lambda < \lambda_1,$$

construyendo y describiendo el comportamiento asintótico de las soluciones encontradas cuando $s \rightarrow +\infty$. En este caso $\nu = \lambda$ y $\mu = +\infty$. Esto también fue probado en el caso crítico para la inyección de Sobolev $p = \frac{N+2}{N-2}$ si, además, $0 < \lambda$ y $N \geq 7$, por Li, Yan y Yang en [LYY106]. Precisamente esta es la variante de mayores dimensiones de nuestro problema¹¹.

1.4. Descripción de los resultados principales

El Problema (1.1.1) es también un ejemplo de un problema de Ambrosetti-Prodi que envuelve criticalidad, pero en \mathbb{R}^2 . Mientras, estrictamente hablando, la no-linealidad permanece por debajo del límite de compacidad dado por la inyección de Moser-Trudinger (1.3.3), para la cual e^{u^2} es crítico, ecuaciones en dos dimensiones con la no-linealidad e^u exhiben un fenómeno de concentración en peaks, similar a aquel encontrado en el exponente crítico de (1.3.2) pero en dimensiones mayores. Esto ha sido sujeto de amplio tratamiento en la literatura, en lo que respecta a la construcción y clasificación de familias no acotadas de soluciones para este tipo de no-linealidades exponenciales.

El principal resultado de este trabajo es una respuesta positiva a la conjetura de Lazer-McKenna para el Problema (1.1.1). Esto es, dada cualquier $m \geq 1$, existen al menos m soluciones de (1.1.1) para $s > 0$ suficientemente grande. Más aún, estas soluciones pueden ser descritas de manera explícita: ellas presentan concentración múltiple alrededor de los puntos de valor máximo de ϕ_1 . Escrito a modo de teorema:

Teorema 1.1. [PM06] *Dado cualquier entero $m \geq 1$ y cualquier s real suficientemente grande, existe una solución u_s del Problema (1.1.1) tal que*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} e^{u_s} = 8\pi m.$$

Más precisamente, dado cualquier subconjunto Λ de Ω para el cual

$$\sup_{\partial\Lambda} \phi_1 < \sup_{\Lambda} \phi_1$$

¹¹ Recientemente, Li, Yan y Yang probaron que la conjetura también era cierta mostrando concentración de soluciones con peaks cercanos al borde, ver [LYY206].

y una sucesión $s \rightarrow +\infty$, existe una subsucesión y m puntos $\xi_i \in \Lambda$ con

$$\phi_1(\xi_i) = \sup_{\Lambda} \phi_1$$

tales que cuando $s \rightarrow +\infty$

$$e^{u_s} \rightarrow 8\pi \sum_{i=1}^m \delta_{\xi_i}.$$

En particular, a modo de ejemplo, observemos que asociado a *cualquier* punto aislado de máximo local ξ_0 de ϕ_1 , tendremos el fenómeno de múltiples peaks en torno a este punto, es decir $e^{u_s} \rightarrow 8\pi m \delta_{\xi_0}$.

Como una simple lectura de este resultado, tenemos el siguiente

Corolario 1.2. *La conjetura de Lazer-McKenna para el Problema (1.1.1) es verdadera, es decir, a medida que $s \rightarrow +\infty$, el número de soluciones u_s de (1.1.1) es no acotado.*

1.5. Aparición de límites singulares

El problema (1.5.2) es en realidad un problema de límites singulares. La construcción realizada da información mucho más específica y certera del perfil asintótico de las soluciones. En particular tendremos la aparición de fenómenos de concentración singular¹², como lo mostrará la expansión de la solución

$$u_s = -\frac{s}{\lambda_1} \phi_1 - \rho + \sum_{j=1}^m G(x, \xi_j) + o(1)$$

donde $o(1) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow +\infty$ de manera uniforme sobre subconjuntos compactos de $\bar{\Omega} \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, y donde $\rho = (-\Delta)^{-1}h$ en $H_0^1(\Omega)$,¹³ y $G(x, \xi)$ denota la función de Green del problema de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta_x G(x, \xi) = 8\pi \delta_{\xi}(x), & x \in \Omega, \\ G(x, \xi) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

En orden a reescribir el problema de una manera más familiar, reemplacemos u en la ecuación (1.1.1) por $u - \frac{s}{\lambda_1} \phi_1 - \rho$, el parámetro s por $\lambda_1 s$ y definamos $k(x) = e^{-\rho}$. Entonces (1.1.1) es equivalente al siguiente problema singular cuando $s \rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \Delta u + k(x) e^{-s\phi_1} e^u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.2)$$

¹² Esto es, soluciones cuya no-linealidad converge en el sentido de las medidas a combinaciones de deltas de Dirac, ver enunciado del Teorema 1.1

¹³ En realidad, $\rho \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, pues $h \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ y Ω es un dominio suave.

por lo que uno esperaría que las soluciones u_s de (1.5.2) tengan el perfil

$$u_s(x) \sim \sum_{j=1}^k m_j G(\xi_j, x),$$

con $m_j > 1$, y donde los ξ_j 's son puntos de máximo de ϕ_1 . Sin embargo, este fenómeno de concentración múltiple *está en fuerte contraposición* al ligeramente distinto y ampliamente estudiado problema

$$\begin{cases} \Delta u + \varepsilon^2 k(x)e^u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5.3)$$

con $k \in C^2(\bar{\Omega})$, $\inf_{\Omega} k > 0$ y $\varepsilon \rightarrow 0$, donde concentración de soluciones con

$$\int_{\Omega} \varepsilon^2 k(x)e^u = O_{\varepsilon}(1)$$

está forzado a ser simple, es decir con todos los m_j 's iguales a uno, como sigue de los resultados en [BM91, LS94, MW01, NS90]. Concentración de familias de soluciones en este problema han sido construidas en [BP98, CL03, PKM05, EGP05]. Por ejemplo, en [PKM05] se encontró la presencia de soluciones con un *número arbitrario* de puntos de concentración siempre que Ω sea *no simplemente conexo*, ver también [EMP06] para un fenómeno similar para exponentes grandes en una no-linealidad del tipo potencia. Concentración múltiple fue construida recientemente en [WYZ06], para el problema *anisotrópico*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + \varepsilon^2 k(x)e^u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

alrededor de cualquier máximo aislado del (uniformemente positivo) coeficiente a . La moraleja detrás de nuestro resultado es que la concentración múltiple en el caso isotrópico¹⁴ puede ser gatillada por el hecho que *el coeficiente frente a e^u no converge a cero uniformemente sobre $\bar{\Omega}$* . En otras palabras, la múltiple concentración "quiere tomar lugar" donde el coeficiente precisamente se anule más rápido en s ¹⁵. A modo de ejemplo, en nuestro resultado,

$$e^{-s\phi_1(x)} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ 1 & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{cuando } s \rightarrow +\infty.$$

Esto debiese estar de alguna medida conectado con el fenómeno asociado a (1.5.3) pero donde $k(x)$ se reemplaza por $|x|^{\alpha}k(x)$, peso que resulta de ecuaciones tipo Liouville con fuentes singulares.¹⁶ Avances importantes han sido obtenidos en materia de entender soluciones con peaks, ver por ejemplo [T05] y las referencias contenidas allí.

¹⁴Es decir, cuando $a(x) \equiv 1$ y recuperamos el Laplaciano.

¹⁵A primer orden, la no-homogeneidad induce concentración múltiple, ver por ejemplo [KW00].

¹⁶Esto es, puntos del dominio Ω donde la no-linealidad se anula.

El resto de este trabajo estará dedicado a la demostración de Teorema 1.1. Realmente, daremos una versión más precisa de este resultado en términos del Problema (1.5.2) en el Teorema 5.1 desarrollado en el Capítulo 5.

Como ya hemos mencionado, no es nuestra intención expresar los resultados obtenidos de la manera más general. Por ejemplo la elección de ϕ_1 como la función positiva en el lado derecho de (1.1.1) es hecha sólo por razones históricas pero es ciertamente no esencial. Podríamos en principio reemplazarla por ejemplo por cualquier función positiva ϕ , donde ahora la concentración tomará lugar alrededor de máximos locales de la función $(-\Delta)^{-1}\phi$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por otro lado notemos que un resultado similar al Teorema 1.1 es también válido para el problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u + e^u = s\phi_1 + h(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

siempre que $\lambda < \lambda_1$. En este caso, $\nu = \lambda$ y $\mu = +\infty$. La razón básica de la veracidad de este resultado descansa en que $\Delta + \lambda$ satisface el *Principio del Máximo*. La función de Green debería ser consistentemente reemplazada por la asociada a este último operador, esto es, para $y \in \Omega$,

$$\begin{cases} \Delta G_\lambda(x, y) + \lambda G_\lambda(x, y) = \delta(x - y), & x \text{ en } \Omega, \\ G_\lambda(x, y) = 0 & x \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

1.6. El método de reducción variacional de Liapunov-Schmidt

Una herramienta primordial en la resolución del Problema (1.5.2) será el llamado método de reducción variacional de Liapunov-Schmidt. Una exposición detallada de este procedimiento puede ser encontrada en [Ni00].

A primer orden, el método es una aplicación avanzada del **Teorema de la Función Implícita**. Para ser más precisos, escribamos uno de sus enunciados clásicos.

Teorema 1.3. [Ni00] *Consideremos X, Y, Z espacios de Banach y $f = f(x, y)$ un funcional de clase C^p , $p \geq 1$, definido en una vecindad del $(0, 0)$ en $X \times Y$ y con valores en Z tal que*

1. $f(0, 0) = 0$,
2. $\text{Im } f_x(0, 0) = Z$, y
3. $\ker f_x(0, 0) = X_1$ tiene un subespacio complementario cerrado X_2 en X ; esto es, X es una suma directa $X = X_1 \oplus X_2$.

Entonces para cada $x_1 \in X_1$ con $\|x_1\| \leq \delta$ e $y \in Y$ con $\|y\| \leq r$ con $\delta, r > 0$ suficientemente pequeños, existe una única solución $x_2 = u(x_1, y)$ de clase C^p de

$$f(x_1 + u(x_1, y), y) \equiv 0,$$

con $u(0, 0) = 0$.

Ahora bien, apliquemos este resultado para deducir el método de reducción variacional de Liapunov-Schmidt.

Sean ahora X, Λ, Y espacios de Banach¹⁷ y $f = f(x, \lambda)$ un funcional de clase C^p , con $p \geq 1$, desde una vecindad de $(0, 0)$ en $X \times \Lambda$ en Y y con $f(0, 0) = 0$. Nuestro objetivo será estudiar el conjunto de soluciones cerca del $(0, 0)$ de

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (1.6.1)$$

Para ello, vamos a asumir que $f_x(0, 0)$ es *Fredholm*, esto es

1. $\ker f_x(0, 0)$ es finito dimensional, y
2. $\text{Im } f_x(0, 0)$ es cerrado en Y y tiene codimensión finita.

Entonces si el espacio de parámetros Λ es finito dimensional el estudio local de las soluciones de (1.6.1) se reduce a estudiar un número finito de ecuaciones para un número finito de incógnitas.

En efecto, podemos descomponer $Y = Y_1 \oplus Y_2$ como una suma directa con $\dim Y_2 < +\infty$, y sea Q el operador de proyección sobre Y_1 asociado. Asimismo, también podemos descomponer $X = X_1 \oplus X_2$ como una suma directa. Aplicando Q e $(I - Q)$ a la ecuación (1.6.1), tenemos que (1.6.1) es equivalente a las ecuaciones

$$Qf(x, \lambda) = 0, \quad (I - Q)f(x, \lambda) = 0. \quad (1.6.2)$$

Aplicando el Teorema 1.3 a la función $g : X_2 \times (X_1 \times \Lambda) \rightarrow Y_1$ definida por

$$g(x_2, x_1, \lambda) \equiv Qf(x_1 + x_2, \lambda),$$

se tiene que existe una única solución $x_2 = u(x_1, \lambda)$ en la cercanía de $(x_1, \lambda) = (0, 0)$ de

$$g(u(x_1, \lambda), x_1, \lambda) = 0. \quad (1.6.3)$$

Luego, $x_1 + u(x_1, \lambda)$ es una solución de (1.6.1) sí y sólo sí

$$(I - Q)f(x_1 + u(x_1, \lambda), \lambda) = 0,$$

el cual es un conjunto finito de ecuaciones $-(I - Q)$ es de rango finito pues es la proyección sobre Y_2 con un número finito de incógnitas.

Uno de los ejemplos más notables sobre el uso del método de Liapunov-Schmidt está en el paper de Floer y Weinstein [FW86], basado a su vez en ciertos trabajos de búsqueda de *instantones*¹⁸ para ecuaciones del tipo Yang-Mills. Presentamos un resumen de la demostración de tal trabajo como un

¹⁷Pensaremos a Λ como un *espacio de parámetros*.

¹⁸Es decir, soluciones concentradas en un corto período de tiempo.

Ejemplo 1. [FW86] Consideremos la ecuación unidimensional no-lineal de Schrödinger en $\mathbb{R} \times \{t \geq 0\}$

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi - \psi^3, \quad (1.6.3)$$

donde $V = V(x)$ es un potencial que posee a $x_0 = 0$ como mínimo local *no degenerado*,¹⁹ $i = \sqrt{-1}$, m corresponde a la masa del objeto en estudio y \hbar la constante de Plank, que asumimos pequeña. Buscaremos soluciones de (1.6.3) del tipo *onda viajera*,²⁰ esto es

$$\psi(x, t) = u(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right),$$

y donde u es a valores reales. En términos de u , y después de reescalar variables, debemos resolver la siguiente ecuación para $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}u''(y) - \tilde{V}_\hbar(y)u(y) + u^3(y) = 0, \quad (1.6.4)$$

con $\tilde{V}_\hbar(y) \equiv V(\hbar y) - V(0) - \lambda$ y $\lambda = E - V(0)$ y $x = \hbar y$. Aquí y en lo que sigue siempre supondremos V_\hbar está acotada inferiormente por una constante positiva independiente del punto $x \in \mathbb{R}$.

De aquí en adelante el procedimiento es estándar. En efecto,

1. Se define el operador –para $\hbar > 0$ pequeño– $S_\hbar : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ por

$$S_\hbar[u] \equiv \frac{1}{2}u'' - \tilde{V}_\hbar u + u^3, \quad (1.6.5)$$

y el operador *límite*²¹ $S_0 : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ por

$$S_0[u] \equiv \frac{1}{2}u'' + \lambda u + u^3. \quad (1.6.6)$$

Nuestro problema a resolver es precisamente

$$S_\hbar[u] = 0. \quad (1.6.7)$$

Facilmente se ve que para cualquier $\hbar > 0$ el operador S_\hbar es Frechet-diferenciable con derivada

$$S'_\hbar[u](v) \equiv \frac{1}{2}v'' - \tilde{V}_\hbar v + 3u^2v.$$

2. El problema no-lineal de segundo orden $S_0[u] = 0$ posee exactamente dos familias 1-paramétricas de soluciones las cuales decaen exponencialmente cuando $|y| \rightarrow +\infty$. Más precisamente,

$$u_{0,\beta}(y) = \frac{\alpha}{\cosh(\alpha y + \beta)}, \quad y \quad u_{1,\beta}(y) = -u_{0,\beta}(y), \quad (1.6.8)$$

¹⁹Esto es, $V''(0) \neq 0$.

²⁰En inglés *standing waves*.

²¹Notar que \tilde{V}_\hbar converge uniformemente a $-\lambda$ sobre compactos.

para $\alpha = (-2\lambda)^{1/2}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ corresponden a tales familias.

Más aún, el operador S_0 posee la propiedad fundamental de ser *no degenerado*, es decir, su operador linealizado en $u_0 \equiv u_{0,0}$

$$v \in H^2(\mathbb{R}) \mapsto S'_0[u_0](v) \equiv \frac{1}{2}v'' + \lambda v + 3u_0^2 v \quad (1.6.9)$$

posee como kernel *solamente* al generado por la función u'_0 . Esta solución representa la invarianza de la solución de $S_0[u] = 0$ ante traslaciones.²²

3. Busquemos un ansatz²³ para la solución de (1.6.7) para \hbar pequeño. Formalmente éste debería ser similar a la solución de S_0 salvo traslaciones, de donde definimos nuestra primera aproximación como la familia uni-paramétrica

$$U_{z,\hbar}(y) \equiv u_0\left(y - \frac{z}{\hbar}\right), \quad (1.6.10)$$

por lo que $u = U_{z,\hbar} + \phi_{z,\hbar}$ es solución de (1.6.7) sí y sólo sí

$$0 \equiv S_\hbar[U_{z,\hbar} + \psi_{z,\hbar}] = S_\hbar[U_{z,\hbar}] + S'_\hbar[U_{z,\hbar}](\psi_{z,\hbar}) + N_{z,\hbar}[\psi_{z,\hbar}],$$

donde $N_{z,\hbar}[\psi] \equiv 3U_{z,\hbar}\psi^2 + \psi^3$. Esta última ecuación para el término corrector $\psi_{z,\hbar}$ se puede escribir como la siguiente ecuación no-lineal

$$S'_\hbar[U_{z,\hbar}](\psi_{z,\hbar}) = -S_\hbar[U_{z,\hbar}] - N_{z,\hbar}[\psi_{z,\hbar}]. \quad (1.6.11)$$

Al término $S_\hbar[U_{z,\hbar}]$ se le denomina comúnmente el *error de la aproximación*, y se referencia con la letra R . De esta última ecuación se deduce que para encontrar una solución de (1.6.7) por medio de un teorema tipo punto fijo debemos invertir el operador lineal $S'_\hbar[U_{z,\hbar}]$, sin embargo, este último *no* es invertible pues es similar al operador S'_0 que tiene kernel no nulo. Sin embargo, bajo razonables condiciones de ortogonalidad, este operador sí será invertible.

4. Es fácil notar que $K_{z,\hbar} \equiv \ker S'_0[U_{z,\hbar}]$ está generado por $U'_{z,\hbar}$. Luego, vamos a buscar soluciones de (1.6.11) en un razonable subespacio ortogonal a $K_{z,\hbar}$ donde las soluciones estén bien definidas. Definamos

$$M_{z,\hbar} \equiv K_{z,\hbar}^\perp \cap H^2(\mathbb{R}),$$

donde $K_{z,\hbar}^\perp$ es el subespacio ortogonal a $K_{z,\hbar}$ en $L^2(\mathbb{R})$. Denotemos además por $\pi_{z,\hbar}^\perp : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow K_{z,\hbar}^\perp$ la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ tal que para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_{z,\hbar}^\perp(\psi) U'_{z,\hbar} = 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}, \hbar > 0.$$

Finalmente, definimos $L_{z,\hbar} : M_{z,\hbar} \rightarrow K_{z,\hbar}^\perp$ por

$$L_{z,\hbar}(\psi) \equiv \pi_{z,\hbar}^\perp S'_\hbar[U_{z,\hbar}](\psi).$$

²²Generalmente ecuaciones tipo Schrödinger poseen sólo invarianza traslacional, al contrario de nuestro problema, que posee además una invarianza ante cierto tipo de dilataciones.

²³O *adivinanza, comienzo*, del alemán.

Con estos datos, se prueba que existen números reales positivos $\gamma, \alpha_1, \hbar_1$ tales que si $|z| < \alpha_1$, $0 < \hbar < \hbar_1$ y $\psi \in M_{z, \hbar}$, entonces

$$\|\psi\|_{H^2} \leq \gamma \|L_{z, \hbar}(\psi)\|_{L^2}, \quad (1.6.12)$$

es decir, un resultado de inversión para el operador linealizado $S'_\hbar[U_{z, \hbar}]$ en un razonable espacio ortogonal.

5. Nuestro propósito ahora es encontrar –para cada z y \hbar suficientemente pequeños– un elemento $\psi_{z, \hbar} \in M_{z, \hbar}$ tal que

$$\pi_{z, \hbar}^\perp S_\hbar[U_{z, \hbar} + \psi_{z, \hbar}] = 0, \quad (1.6.13)$$

esto es, $S_\hbar[U_{z, \hbar} + \psi_{z, \hbar}] \in K_{z, \hbar}$. Como $K_{z, \hbar}$ es unidimensional, estaremos implicando que $\psi_{z, \hbar}$ resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$S_\hbar[U_{z, \hbar} + \psi_{z, \hbar}] = c_{z, \hbar} U'_{z, \hbar}, \quad (1.6.14)$$

para alguna constante $c_{z, \hbar} \in \mathbb{R}$. Pero resolver (1.6.13) equivale a encontrar $\psi = \psi_{z, \hbar} \in M_{z, \hbar}$ tal que²⁴

$$\psi_{z, \hbar} = F_{z, \hbar}[\psi_{z, \hbar}] \equiv -L_{z, \hbar}^{-1} \left\{ \pi_{z, \hbar}^\perp S_\hbar[U_{z, \hbar}] + \pi_{z, \hbar}^\perp N_{z, \hbar}[\psi_{z, \hbar}] \right\}, \quad (1.6.15)$$

es decir, un problema de punto fijo. Se puede probar que $F_{z, \hbar}$ es una contracción en un razonable subconjunto acotado de $M_{z, \hbar}$.

6. Finalmente, debemos resolver la reducción variacional, esto es

$$\pi_{z, \hbar} S_\hbar[U_{z, \hbar} + \psi_{z, \hbar}] = 0. \quad (1.6.16)$$

Gracias a (1.6.14), esto equivale al *simple* problema unidimensional de encontrar z pequeño tal que para todo $\hbar > 0$ suficientemente pequeño

$$c_{z, \hbar} = 0. \quad (1.6.17)$$

Notemos que

$$c_{z, \hbar} \int_{\mathbb{R}} U_{z, \hbar}'^2 = \int_{\mathbb{R}} S_\hbar[U_{z, \hbar} + \psi_{z, \hbar}] U_{z, \hbar}', \quad (1.6.18)$$

así como $\int_{\mathbb{R}} U_{z, \hbar}'^2 = C > 0$ independiente de z, \hbar . Luego, debemos estudiar los ceros de la función

$$v_\hbar(z) = \frac{1}{\hbar} \int_{\mathbb{R}} S_\hbar[U_{z, \hbar} + \psi_{z, \hbar}] U_{z, \hbar}'.$$

Para ello, se puede probar que para $1 < \nu < 2$ y \hbar suficientemente pequeño

$$\hbar^{-\nu} v_\hbar(\hbar^\nu z) = -\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 V''(0)z + o(1),$$

uniformemente para $z \in [-K_0, K_0]$, K_0 fijo. Luego, como 0 es punto crítico de V no degenerado, tenemos $V''(0) \neq 0$ y por ende la función que a z le asocia $\hbar^{-\nu} v_\hbar(\hbar^\nu z)$ es una función

²⁴Recordemos que $L_{z, \hbar}$ es invertible sobre $M_{z, \hbar}$, para z, \hbar pequeños.

continua que cambia de signo en los extremos del intervalo $[-K_0, K_0]$ para todo \hbar suficientemente pequeño. Gracias al Teorema del Valor Intermedio y a la aproximación anterior, tenemos que

$$\text{existe } \bar{z} \text{ pequeño tal que } c_{\bar{z}, \hbar} = 0,$$

que era lo deseado.

7. Resumiendo, hemos encontrado $\psi = \psi_{\bar{z}, \hbar} \in M_{\bar{z}, \hbar}$ tal que $S_{\bar{z}, \hbar}[U_{\bar{z}, \hbar} + \psi_{\bar{z}, \hbar}] = 0$ para \hbar pequeño. Más aún, se puede probar que esta solución decae exponencialmente como u_0 .

Otra aplicación notable del método de Liapunov-Schmidt puede ser encontrada en [KW00]. En este trabajo, los autores prueban que cerca de cualquier punto x_0 de máximo local de la función V y cualquier constante entera $K \geq 1$ existe una solución positiva de (1.6.4) con K peaks concentrándose en torno a x_0 .

1.7. Procedimiento a seguir

En este trabajo, sin embargo, usaremos una versión ligeramente distinta al método usual desarrollado por los primeros trabajos que usan el método de Liapunov-Schmidt. El motivo de estas modificaciones obedece a que este último **procedimiento** debe ser adaptado a cada tipo diferente de problema. En este sentido, el trabajar en un subconjunto de \mathbb{R}^2 proporcionará –Capítulo 2– la ventaja de estimaciones **uniformes** de nuestros resultados, no necesariamente ciertas en dimensiones mayores. Sin embargo, el carácter **altamente singular** del operador lineal jugará en contra nuestra en el Capítulo 3.

En el siguiente capítulo buscaremos una aproximación o *ansatz* razonable para la solución de (1.5.2), consistente en una familia de funciones dependiente de tres parámetros tomados de un subconjunto adecuado de $\mathbb{R}_+ \times \Omega^2$. El conjunto de parámetros que tomaremos revelará la **interacción** no despreciable entre los peaks de las soluciones. Mediremos –por medio de **normas adaptadas**– el tamaño del error en nuestra aproximación en un **dominio expandido**, usado esencialmente para facilitar las estimaciones. En el transcurso de este cálculo **fijaremos** el valor de un conjunto de parámetros para hacer nuestro error ínfimo.

Posteriormente, en el Capítulo 3 trabajaremos con un problema linealizado asociado a nuestro problema. Para ello encontraremos primero el kernel de este operador lineal y plantearemos el problema de inversión en el subespacio ortogonal a este kernel. Sin embargo, tendremos que levantar –a posteriori– ciertas condiciones de ortogonalidad para poder resolver la reducción variacional. La inversión de este operador –casi singular– tomará gran parte de este capítulo.

Ya resuelto el problema lineal, el proceso no-lineal es muy similar al expuesto en el ejemplo de Floer y Weinstein. En el Capítulo 4 probaremos un teorema tipo punto fijo para luego hacer la reducción variacional. El problema finito dimensional equivalente será la optimización de una función de

Capítulo 2

Preeliminarios y Nociones básicas

2.1. Ansatz para una solución del Problema (1.5.2)

En lo subsiguiente de este trabajo fijaremos un conjunto Λ como en el enunciado del Teorema 1.1, esto es, un subconjunto abierto de Ω tal que

$$\sup_{\partial\Lambda} \phi_1 < \sup_{\Lambda} \phi_1.$$

Por simplicidad notacional¹ asumiremos que

$$\max_{x \in \bar{\Lambda}} \phi_1(x) = 1.$$

Queremos ahora construir una aproximación U razonable de una solución de (1.5.2) la cual tendrá como parámetros –a ser ajustados– los puntos ξ_i donde los peaks tomarán lugar. Como veremos después, un conjunto conveniente para seleccionar el punto $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ es

$$\mathcal{O}_s \equiv \left\{ \xi \in \bar{\Lambda}^m : 1 - \phi_1(\xi_j) \leq \frac{1}{\sqrt{s}}, \forall j = 1, \dots, m, \text{ y } \min_{i \neq j} |\xi_i - \xi_j| \geq \frac{1}{s^\beta} \right\}, \quad (2.1.1)$$

donde el número $\beta > 1$ será especificado después. Luego, fijemos $\xi \in \mathcal{O}_s$.

Observación 2.1. *A diferencia de [PKM05], donde la distancia entre los puntos ξ_j en los cuales la concentración tomaba forma era uniformemente lejana, en este trabajo asumiremos que los puntos ξ_j pueden estar acercándose a tasa $s^{-\beta}$, lo que en el análisis posterior conllevará a nuevas dificultades y por ende el uso de un nuevo método para atacar un problema lineal vital para la resolución del Problema (1.5.2), el cual es una variante del recientemente introducido en [WYZ06].*

¹Recordar que ϕ_1 posee un grado de libertad de dilatación constante.

Para números $\mu_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, a ser escogidos más adelante, definamos

$$u_j(x) = u_{j,s}(x) = \log \frac{8\mu_j^2 \delta_j^2}{(\mu_j^2 \delta_j^2 + |x - \xi_j|^2)^2} + s\phi_1(\xi_j) - \log k(\xi_j), \quad (2.1.2)$$

tal que u_j resuelve

$$\Delta u + k(\xi_j) \delta_j^2 e^u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2, \quad \int_{\mathbb{R}^2} k(\xi_j) \delta_j^2 e^u = 8\pi, \quad (2.1.3)$$

donde, como estamos tratando de aproximar una solución de (1.5.2), naturalmente escogeremos

$$\delta_j = \delta_j(s) \equiv \exp \left\{ -\frac{s}{2} \phi_1(\xi_j) \right\}. \quad (2.1.4)$$

Observación 2.2. *Es interesante hacer notar que todas las soluciones del problema*

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^u < +\infty, \end{cases}$$

son radiales en torno a un punto de \mathbb{R}^2 y tienen la forma

$$\log \frac{8\mu^2}{(\mu^2 + |x - x_0|^2)^2},$$

para cualquier $\mu > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Ver [CL91] para la demostración. Esta familia de funciones es precisamente la base para escoger nuestra primera aproximación de la solución a (1.5.2).

Como u_j es no nula en la frontera de Ω , adicionaremos una corrección armónica a ella para que la condición de borde sea satisfecha. Sea $H_j(x)$ la función *armónica*² solución de

$$\begin{cases} \Delta H_j = 0 & \text{en } \Omega, \\ H_j = -u_j & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definimos nuestra primera aproximación $U(\xi)$ como

$$U(\xi) \equiv \sum_{j=1}^m U_j, \quad U_j \equiv u_j + H_j. \quad (2.1.5)$$

A saber, nuestro ansatz U posee como parámetros libres el conjunto de puntos $\xi \in \mathcal{O}_s$ y de parámetros positivos μ_j , $j = 1, \dots, m$. Por otra parte, U_j es llamada la *proyección* de u_j sobre $H_0^1(\Omega)$, pues cumple

$$\begin{cases} \Delta U_j = \Delta u_j & \text{en } \Omega, \\ U_j = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

²Recordemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *armónica* si es suave y $\Delta u = 0$ en Ω .

Como precisaremos después, $u_j + H_j \sim G(x, \xi_j)$ donde $G(x, \xi)$ es la función de Green definida en (1.5.1). Consideraremos también a $H(x, \xi)$, su *parte regular*, es decir la solución –suave– de

$$\begin{cases} -\Delta_x H(x, \xi) = 0 & x \in \Omega, \\ H(x, y) = \Gamma(x - y) = -4 \log \frac{1}{|x - y|}, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

tal que

$$G(x, y) = H(x, y) - \Gamma(x - y).$$

A modo de recuerdo, para $y \in \partial\Omega$ tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow y} H(x, y) = -\infty.$$

Sin embargo, si $y \in \Omega$ es fijo, entonces $x \rightarrow H(x, y)$ es suave en $\bar{\Omega}$ y la función $x \rightarrow H(x, x)$ es suave en subconjuntos compactos de Ω . Este hecho será de vital importancia durante todo el análisis *a posteriori*.

Si u_j es una buena aproximación de la solución de (1.5.2) cerca de ξ_j , también lo será U , esto es

$$U = u_j + \left\{ H_j + \sum_{k \neq j} U_k \right\},$$

siempre que el resto entre paréntesis sea nulo a orden principal cerca de ξ_j . Esto puede ser logrado con la elección precisa de los parámetros μ_k :

$$\log 8\mu_j^2 = \log k(\xi_j) + H(\xi_j, \xi_j) + \sum_{i \neq j} G(\xi_i, \xi_j). \quad (2.1.7)$$

Notemos que dado $\xi \in \mathcal{O}_s$, tal elección de los μ_j es siempre posible. Más aún, como $\xi \in \mathcal{O}_s$,

$$\frac{1}{C} \leq \mu_k \leq Cs^{2\beta}, \quad \text{para todo } k = 1, \dots, m. \quad (2.1.8)$$

y alguna constante $C > 0$ independiente del punto $\xi \in \mathcal{O}_s$ escogido.

Como veremos al final de este capítulo – Lema 2.6 – la principal ventaja de escoger el valor de los parámetros μ_j en función de los puntos ξ será la disminución del tamaño del error cometido por nuestra aproximación U .

2.2. Estimaciones y forma asintótica del ansatz

El próximo paso a seguir es estimar la forma del ansatz U sobre Ω a medida que el parámetro s crece. Como primer paso, el siguiente lema nos muestra la forma de U_j en Ω .

Lema 2.3. Asumamos $\xi \in \mathcal{O}_s$. Entonces se tiene

$$H_j(x) = H(x, \xi_j) - \log 8\mu_j^2 + \log k(\xi_j) + O(\mu_j^2 \delta_j^2), \quad (2.2.1)$$

uniformemente en Ω , y

$$u_j(x) = \log 8\mu_j^2 - \log k(\xi_j) - \Gamma(x - \xi_j) + O(\mu_j^2 s^{2\beta} \delta_j^2), \quad (2.2.2)$$

uniformemente en la región exterior $|x - \xi_j| \geq \frac{1}{2s^\beta}$, tal que sobre esta región,

$$U_j(x) = G(x, \xi_j) + O(\mu_j^2 s^{2\beta} \delta_j^2). \quad (2.2.3)$$

Observación 2.4. Precisamente como resultado de este Lema se tiene la similitud del ansatz U con la función de Green del dominio Ω centrada en los puntos ξ_j , $j = 1, \dots, m$. La aparición de esta última función es un primer paso para intuir la aparición de límites singulares en la solución del Problema (1.5.2).

Demostración. Probemos (2.2.1). Definamos $z(x) = H_j(x) + \log 8\mu_j^2 - \log k(\xi_j) - H(x, \xi_j)$. Como z es armónica tenemos que

$$\begin{aligned} \max_{\bar{\Omega}} |z| &= \max_{\partial\Omega} |z| \\ &= \max_{\partial\Omega} | -u_j + \log 8\mu_j^2 - \log k(\xi_j) - \Gamma(\cdot - \xi_j) | \\ &= \max_{x \in \partial\Omega} \left| \log \frac{1}{|x - \xi_j|^4} - \log \frac{1}{(\mu_j^2 \delta_j^2 + |x - \xi_j|^2)^2} \right| \\ &= O(\mu_j^2 \delta_j^2), \end{aligned}$$

uniformemente en Ω , cuando $s \rightarrow \infty$. La expansión (2.2.2) se obtiene directamente de la definición de u_j y μ_j , con cálculos similares a los anteriores. ■

2.3. El tamaño del error cometido

Como habíamos anunciado anteriormente, el próximo paso será estimar qué tan correctamente nuestra solución U resuelve la ecuación (1.5.2). Sin embargo, para ello necesitaremos cambiarnos de coordenadas y definir un concepto apropiado de norma, para facilitar cálculos.

Primeramente escribamos el *parámetro de expansión del dominio* Ω , esto es,

$$\delta = \delta(s) = e^{-s/2}, \quad \Omega_s = \delta^{-1}\Omega \quad \text{y} \quad \xi_j = \delta \xi'_j. \quad (2.3.1)$$

Un hecho *fundamental* es el siguiente: u resuelve (1.5.2) sí y sólo sí

$$v(y) \equiv u(\delta y) - 2s$$

satisface

$$\begin{cases} \Delta v + q(y, s)e^v = 0, & \text{en } \Omega_s, \\ v(y) = -2s, & y \in \partial\Omega_s, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

donde

$$q(y, s) \equiv k(\delta y) \exp \left\{ -s(\phi_1(\delta y) - 1) \right\}.$$

Precisamente, este será el problema real que trabajaremos.

Observación 2.5. *A primer orden se puede notar que fijado $y_0 \in \Omega_s$ con $\phi_1(y_0) = 1$, el resto del conjunto Ω_s se aproxima a medida que $s \rightarrow +\infty$ al espacio completo \mathbb{R}^2 ; esto es,*

$$\Omega_s - y_0 \nearrow \mathbb{R}^2 \quad \text{cuando } s \rightarrow +\infty.$$

Por otro lado la condición de borde de (2.3.2) diverge a $-\infty$ mientras que en una vecindad fija de y_0

$$q(y, s) \approx k(\delta y_0) \exp(O(s\delta|y - y_0|)) = O(1),$$

por lo que formalmente podemos decir que nuestro problema límite será

$$\begin{cases} \Delta v + O(1)e^v = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ v(y) \searrow -\infty, & |y| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

que corrobora la elección de nuestra aproximación u_j como solución de (2.1.3).

Definamos $V(y) = U(\delta y) - 2s$, con U nuestra solución aproximada de (2.1.5). Queremos estimar el tamaño del error en la aproximación

$$R \equiv \Delta V + q(y, s)e^V, \quad (2.3.4)$$

esto es, el valor de la ecuación (2.3.2) en la aproximación V que consideramos. Como veremos, será conveniente hacer esto en términos de la siguiente norma L^∞ con un peso adecuado:

$$\|v\|_* = \sup_{y \in \Omega_s} \left| \left[\sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^{3/2}} + \delta^2 \right]^{-1} v(y) \right| \quad (2.3.5)$$

donde

$$\gamma_j = \mu_j \delta_j \delta^{-1} = \mu_j \exp \left\{ \frac{s}{2}(1 - \phi_1(\xi_j)) \right\}. \quad (2.3.6)$$

Una observación importante en el análisis posterior son las siguientes estimaciones

$$\frac{1}{C} \leq \gamma_j \leq Cs^{2\beta} e^{\sqrt{s}/2}, \quad \delta \gamma_j \leq Cs^{2\beta} e^{-s/4}, \quad (2.3.7)$$

que nos permiten tener una idea del tamaño de las constantes γ_j . *Grosso modo*, γ_j crece a lo más de manera exponencial, pero a una tasa menor que el parámetro de expansión del dominio, δ^{-1} .

En lo subsiguiente, C denotará una constante genérica independiente de s ó $\xi \in \mathcal{O}_s$.

Lema 2.6. *El error R en (2.3.4) satisface*

$$\|R\|_* \leq C s^{2\beta+1} e^{-s/4} \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty.$$

Demostración. Asumamos primero que estamos en la vecindad de un punto ξ'_k , precisando, en la región $|y - \xi'_k| \leq \frac{1}{2s^\beta\delta}$, para algún índice k fijo. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \Delta V(y) &= -\delta^2 \sum_{j=1}^m k(\xi_j) e^{-s\phi_1(\xi_j)} e^{u_j(\delta y)} = -\sum_{j=1}^m \frac{8\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^2} \\ &= -\frac{8\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2} + \sum_{j \neq k} O(\mu_j^2 s^{4\beta} \delta^2 \delta_j^2). \end{aligned}$$

Estimemos ahora $q(y, s)e^V(y)$. Por (2.2.1) y la definición de los $\mu'_j s$,

$$\begin{aligned} H_k(x) &= H(\xi_k, \xi_k) - \log 8\mu_k^2 + \log k(\xi_j) + O(\mu_k^2 \delta_k^2) + O(|x - \xi_k|) \\ &= -\sum_{j \neq k} G(\xi_j, \xi_k) + O(\mu_k^2 \delta_k^2) + O(\delta|y - \xi'_k|), \end{aligned}$$

y si $j \neq k$, por (2.2.3)

$$U_j(x) = u_j(x) + H_j(x) = G(\xi_j, \xi_k) + O(\delta|y - \xi'_k|) + O(\mu_j^2 s^{2\beta} \delta_j^2).$$

Luego,

$$H_k(x) + \sum_{j \neq k} U_j(x) = \sum_j O(\mu_j^2 s^{2\beta} \delta_j^2) + O(\delta|y - \xi'_k|). \quad (2.3.8)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} q(y, s)e^{V(y)} &= q(y, s)\delta^4 \exp \left\{ u_k(\delta y) + H_k(\delta y) + \sum_{j \neq k} U_j(\delta y) \right\} \\ &= \frac{8\mu_k^2 q(y, s)}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2 k(\xi_k)} \left\{ 1 + \sum_{j \neq k} O(\mu_j^2 s^{2\beta} \delta_j^2) + O(\delta|y - \xi'_k|) \right\} \\ &= \frac{8\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2} \left\{ 1 + O(s\delta|y - \xi'_k|) \right\} \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que en esta región

$$|R(y)| \leq C \frac{s\gamma_k^2 \delta|y - \xi'_k|}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2} + \sum_{j \neq k} O(\mu_j^2 s^{4\beta} \delta^2 \delta_j^2).$$

Veamos cómo se comporta R en la región exterior de Ω_s . En efecto, si $|y - \xi'_j| > \frac{1}{2s^\beta\delta}$ para todo j , usando (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3) obtenemos

$$\Delta V = \sum_j O(\mu_j^2 s^{4\beta} \delta^2 \delta_j^2)$$

y

$$q(y, s)e^{V(y)} = O\left(\delta^4 \exp\left\{-\sum_{j=1}^m \Gamma(x - \xi_j)\right\}\right) = O(s^{4m(m-1)\beta} \delta^4).$$

De aquí,

$$|R(y)| = \sum_j O(s^K \delta^2 \delta_j^2)$$

para alguna constante $K > 0$ tal que finalmente

$$\|R\|_* = \sum_k O(s\gamma_k \delta)$$

y por la estimación (2.3.7) la demostración se concluye. ■

Observación 2.7. La elección de la norma- $*$ en (2.3.5) no fue casualidad. Precisamente la escogimos en base al tamaño del error R tal que ésta decreciese a orden exponencial en s . Como veremos más adelante, el tamaño de esta norma nos dirá que la aproximación U es excelente cerca de los puntos ξ_j , $j = 1, \dots, m$.

En el análisis subsiguiente nos quedaremos en la variable *expandida* $y \in \Omega_s$, tanto así que buscaremos soluciones del problema (2.3.2) de la forma $v = V + \psi$, donde ψ representará un término de corrección de menor orden que V . En términos de ψ , el Problema (2.3.2) se lee ahora como

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi) \equiv \Delta\psi + W\psi = -[R + N(\psi)] & \text{en } \Omega_s, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_s, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

donde N

$$N(\psi) = W[e^\psi - 1 - \psi], \quad W = q(y, s)e^V, \quad (2.3.10)$$

y R como fue definido precisamente en (2.3.4).

Notemos que

$$W(y) = \sum_{j=1}^m \frac{8\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^2} (1 + O(s\delta|y - \xi_j'|)) \quad \text{para } |y - \xi_j'| \leq \frac{1}{2s^\beta \delta}, \quad (2.3.11)$$

de donde

$$\|W\|_* \leq C.$$

Por otro lado, de la definición de N y usando el Teorema del Valor Medio, podemos concluir que para $\|\psi\|_\infty \rightarrow 0$

$$\|N(\psi)\|_* \leq C\|W\|_*\|\psi\|_\infty^2,$$

todo lo cual puede ser escrito de la siguiente forma



Lema 2.8. Para $y \in \Omega_s$ y $\xi \in \mathcal{O}_s$, $W(y) = O(\delta^2 \sum_{j=1}^m \delta_j^2 e^{u_j(\delta y)})$, y por ende $\|W\|_* = O(1)$. Asimismo, $\|N(\psi)\|_* \leq C\|\psi\|_\infty^2$ para $\|\psi\|_\infty$ suficientemente pequeña.

Dejaremos por un momento al lado las estimaciones de los términos N , W y R para luego retomarlas en el Capítulo 3 de esta memoria. Por el momento, nuestro objetivo será estudiar de manera precisa una *adaptación lineal* del Problema (2.3.9), en el espíritu de la Alternativa de Fredholm, para luego resolver el Problema no-lineal (2.3.9) por medio del Teorema de Punto Fijo de Banach y el método de Liapunov-Schmidt (Capítulo 4).

Una teoría lineal intermedia

3.1. Definición de un Problema Linealizado

En esta sección desarrollaremos una teoría para el operador lineal \mathcal{L} definido en (2.3.9) bajo condiciones razonables de ortogonalidad e integrabilidad más adelante. A manera de recordatorio,

$$\mathcal{L}(v) = \Delta v + W(y)v, \tag{3.1.1}$$

donde $W(y)$ fue introducido en (2.3.10). La complicación aquí es formular correctamente el problema a resolver en el cual intervenga el operador \mathcal{L} . Una forma de incluir el hecho de que v sea a grandes rasgos el operador \mathcal{L} . Gracias al Lema 2.8, este operador formalmente es similar a

$$\mathcal{L}_\delta(v) = \Delta v + \left(\delta^2 \sum_{j=1}^m \delta_j^2 v^j \right) v, \tag{3.1.2}$$

el cual es esencialmente una superposición de operadores lineales los cuales, después de traslaciones y dilataciones, se aproximan cuando $\delta \rightarrow +\infty$ al operador sobre todo \mathbb{R}^n

$$\mathcal{L}_\delta(v) = \Delta v + \frac{\delta}{(1 + |\delta y|^2)^{\frac{n+2}{2}}} v, \tag{3.1.3}$$

es decir, la ecuación

$$\Delta v + v = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^n$$

linealizada en torno a la solución radial $v(y) = \frac{1}{(1 + |y|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$. De aquí se puede notar que un ingrediente primordial para desarrollar una teoría de oscilación satisfactoria para el operador \mathcal{L} es la no-degeneración de la solución v de $\mathcal{L}_\delta(v) = 0$ sobre los invariantes naturales de esta última ecuación

¹ De decir, existencia y unicidad.
² O sea, radial.

Capítulo 3

Una teoría lineal intermedia

3.1. Definición de un Problema Linealizado

En esta sección desarrollaremos una breve teoría para el operador lineal \mathcal{L} definido en (2.3.9) bajo condiciones razonables de ortogonalidad a introducir más adelante. A manera de recuerdo,

$$\mathcal{L}(\psi) \equiv \Delta\psi + W(y)\psi, \quad (3.1.1)$$

donde $W(y)$ fue introducido en (2.3.10). La complicación aquí es formular correctamente el problema a resolver en el cual interviene el operador \mathcal{L} . Una forma de intuir el buen problema proviene de ver a qué se parece el operador \mathcal{L} . Gracias al Lema 2.6, este operador *formalmente* es similar a

$$\mathcal{L}_0(\psi) \equiv \Delta\psi + \left(\delta^2 \sum_{j=1}^m \delta_j^2 e^{u_j} \right) \psi, \quad (3.1.2)$$

el cual es esencialmente una superposición de operadores lineales los cuales, después de traslaciones y dilataciones, se aproximan cuando $s \rightarrow \infty$ al operador sobre todo \mathbb{R}^2

$$\mathcal{L}_*(\psi) \equiv \Delta\psi + \frac{8}{(1+|z|^2)^2} \psi, \quad (3.1.3)$$

es decir, la ecuación

$$\Delta v + e^v = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2,$$

linealizada en torno a la solución radial $v(y) = \log \frac{8}{(1+|y|^2)^2}$. De aquí se puede notar que un ingrediente primordial para desarrollar una teoría de resolución satisfactoria¹ para el operador \mathcal{L} es la no-degenerancia² de la solución v de $\mathcal{L}_*(\psi) = 0$ salvo las invarianzas naturales de esta última ecuación

¹Es decir, existencia y unicidad.

²O unicidad.

bajo traslaciones y dilataciones. En efecto, si definimos

$$Z_0(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad (3.1.4)$$

$$Z_i(z) = \frac{4z_i}{1 + |z|^2}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.5)$$

entonces las únicas soluciones acotadas de $\mathcal{L}_*(\psi) = 0$ en \mathbb{R}^2 son combinaciones lineales de Z_i , $i = 0, 1, 2$; ver [BP98] para una demostración.

Observación 3.1. *Otra observación importante a notar con respecto a la ecuación $\Delta v + e^v = 0$ en \mathbb{R}^2 es la siguiente. Sabemos que*

$$v(y) = \log \frac{8}{(1 + |y|^2)^2}$$

es una solución radial de esta última ecuación. Entonces v_{y_1} y v_{y_2} , las derivadas parciales de v , son respectivamente soluciones de la ecuación linealizada $\mathcal{L}_*(\psi) = 0$ en \mathbb{R}^2 . Pero

$$v_{y_j}(y) = -Z_j(y), \quad j = 1, 2,$$

esto es, los elementos acotados del $\ker \mathcal{L}_*$ asociados a traslaciones.

Pregunta para el lector. *¿Cómo obtenemos entonces Z_0 , el elemento del $\ker \mathcal{L}_*$ asociado a dilataciones?*

Tomaremos los elementos necesarios para construir un conjunto razonable de funciones ortogonales a la “solución” del problema lineal. Definamos, para $i = 0, 1, 2$ y $j = 1, \dots, m$,

$$Z_{ij}(y) \equiv \frac{1}{\gamma_j} Z_i \left(\frac{y - \xi'_j}{\gamma_j} \right), \quad i = 0, 1, 2.$$

Adicionalmente, consideremos R_0 una constante grande pero fija y χ una función de corte radial y suave con $\chi \equiv 1$ en $B(0, R_0)$ y $\chi \equiv 0$ en $B(0, R_0 + 1)^c$. Sea

$$\chi_j(y) = \chi \left(\frac{|y - \xi'_j|}{\gamma_j} \right), \quad j = 1, \dots, m.$$

3.2. Existencia y Unicidad para un Problema Lineal

Ya tenemos todos los ingredientes para plantear el Problema Lineal asociado al Problema (2.3.9). Dado $h \in L^\infty(\Omega_s)$, consideremos el problema de encontrar una función ψ en un espacio razonable³

³Por regularidad elíptica, esta función será en efecto suave en Ω_s . Ver [GT01].

tal que para ciertos escalares c_{ij} se cumpla la ecuación

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi) = h + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m c_{ij} \chi_j Z_{ij}, & \text{en } \Omega_s, \\ \psi = 0, & \text{en } \partial\Omega_s, \\ \int_{\Omega_s} \chi_j(y) Z_{ij} \psi = 0, & \text{para todo } i = 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Para este problema probaremos a través de este capítulo la siguiente

Proposición 3.2. *Existen constantes positivas $s_0 > 0$ y $C > 0$ tales que para cualquier $h \in L^\infty(\Omega_s)$ y cualquier $\xi \in \mathcal{O}_s$, existe una única solución $\psi = T(h)$ al problema (3.2.1) para todo $s > s_0$, la cual define un operador lineal de h . Además, tenemos la estimación*

$$\|T(h)\|_\infty \leq C s \|h\|_*. \quad (3.2.2)$$

Observación 3.3. *Nótese del Problema (3.2.1) que están sólo presentes las condiciones de ortogonalidad debidas a traslaciones, esto es, ortogonalidad con respecto a los elementos Z_{ij} , $i = 1, 2$. Sin embargo, ¡los Z_{0j} también son elementos del kernel del operador linealizado \mathcal{L} ! ⁴ Las razones de esta elección se pueden ver en la Observación 3.8 y en el Lema 4.2. Este novedoso elemento funcional fue introducido en [PKM05].*

La demostración de la Proposición 3.2 está dividida en una serie de lemas que desarrollaremos en subsecciones que detallamos a continuación.

1. **Principio de Máximo.** Probaremos aquí que el operador \mathcal{L} satisface el Principio del Máximo lejos de los puntos ξ_j , $j = 1, \dots, m$.
2. **Estimaciones interiores versus estimaciones exteriores.** En esta subsección trataremos de estimar la solución ψ_s de (3.2.1) cerca de los puntos ξ_j por el valor de ψ lejos de los puntos ξ_j y el lado derecho h .
3. **Cotas a priori para un problema lineal sobreestimado.** Aunque natural debido a que el kernel del operador lineal
4. **Cotas a priori para un problema lineal.** A diferencia de la parte anterior, aquí levantamos la condición de ortogonalidad correspondiente a las dilataciones –que a posteriori revelará ser superflua– para probar una estimación para la solución de un problema lineal.
5. **Demostración de la cota a priori (3.2.2).** En el espíritu de Fredholm y usando el resultado de la parte anterior, podemos estimar la cota a priori (3.2.2).
6. **Existencia y Unicidad.** Precisamente gracias a la estimación anterior y a los Teoremas de Riesz y de la Alternativa de Fredholm podemos demostrar la parte de existencia y unicidad de la Proposición 3.2.

⁴Deberían estar presentes de acuerdo a las exigencias del método de Liapunov-Schmidt.

3.2.1. Principio del Máximo

En esta subsección probaremos el siguiente

Lema 3.4. *El operador \mathcal{L} satisface el principio del máximo en $\Omega_R \equiv \Omega_s \setminus \cup_{j=1}^m B(\xi'_j, R\gamma_j)$, para R grande pero independiente de s . Esto es, si $\mathcal{L}(\psi) \leq 0$ en Ω_R y $\psi \geq 0$ en $\partial\Omega_R$, entonces $\psi \geq 0$ en Ω_R .*

Demostración. Notemos que para s suficientemente grande, $\gamma_j \leq \delta^{-1}$, para todo j . Esto asegura que Ω_R está bien definido. Ahora, es suficiente encontrar una función suave $f = f(y)$ tal que $f > 0$ en $\bar{\Omega}_R$ y $\mathcal{L}(f) \leq 0$ en $\bar{\Omega}_R$.

Para este propósito, usaremos el siguiente Lema, cuya demostración está contenida en [WYZ06], pero cuya demostración incluiremos por completitud:

Lema 3.5. *Existen constantes $R_1 > 0$, $C > 0$ tales que para cualquier $s > 0$ suficientemente grande, existe $f : \Omega_{R_1} \rightarrow [1, \infty)$ suave y positiva verificando*

$$\mathcal{L}(f) \leq -\sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{|y - \xi'_j|^3} - \delta^2$$

en Ω_{R_1} , y $1 < f \leq C$ uniformemente en Ω_{R_1} .

Demostración. Consideremos R_1 , s suficientemente grandes y definamos

$$f(y) = f_0(\delta y) - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^\alpha}{|y - \xi'_j|^\alpha},$$

con f_0 la solución de $-\Delta f_0 = 1$ en Ω , $f_0 = 2$ en $\partial\Omega$ y $\alpha \in (0, 1)$. Es claro, gracias al Principio del Máximo, que $f_0 \geq 2$ en Ω , por lo que si R_1 es grande e $y \in \Omega_{R_1}$

$$1 \leq f \leq C.$$

Por otro lado,

$$\mathcal{L}(f)(y) = \left\{ -\delta^2 - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha^2 \gamma_j^\alpha}{|y - \xi'_j|^{\alpha+2}} \right\} + \left\{ W f_0 - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^\alpha}{|y - \xi'_j|^\alpha} \right\}.$$

De aquí, si $\gamma_k R_1 \leq |y - \xi'_k| \leq \frac{1}{2\delta s^\beta}$ para algún $k \in \{1, \dots, m\}$ y usando la expansión de W explicitada en (2.3.11),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(y) &\leq -\delta^2 - \frac{\alpha^2 \gamma_k^\alpha}{|y - \xi'_k|^{\alpha+2}} + \frac{C \gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2} - \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j^\alpha}{|y - \xi'_j|^\alpha} + o(\delta^2) \\ &\leq -\delta^2 - \frac{\alpha^2 \gamma_k^\alpha}{|y - \xi'_k|^{\alpha+2}} + \frac{C \gamma_k^2}{|y - \xi'_k|^4} + o(\delta^2) \\ &\leq -\delta^2 + \frac{\gamma_k^\alpha}{4|y - \xi'_k|^{\alpha+2}} \leq -\delta^2 + \frac{\gamma_k}{|y - \xi'_k|^3}, \end{aligned}$$

si R_1 es suficientemente grande.

Por otro lado, si $|y - \xi'_k| \geq \frac{1}{2\delta s^\beta}$ para todo k ,

$$\mathcal{L}(f)(y) \leq -\delta^2.$$

De aquí, $f(y)$ cumple las propiedades requeridas. ■

Gracias a esta función se tiene que \mathcal{L} satisface el Principio del Máximo en Ω_R , R grande. ■

3.2.2. Estimaciones interiores versus estimaciones exteriores

Para comenzar consideremos la siguiente *norma interior*:

$$\|\psi\|_i \equiv \sup_{\Omega_R^c} |\psi|$$

donde entendemos que $\Omega_R^c \equiv \Omega_s \setminus \Omega_R = \cup_{j=1}^m B(\xi'_j, R\gamma_j)$. Nuestro objetivo ahora es poder estimar el tamaño de la *norma exterior* $\|\psi\|_e \equiv \sup_{\Omega_R} |\psi|$ en términos de la norma-* de h , para $\psi = \psi(h)$ solución del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi) = h, & \text{en } \Omega_s, \\ \psi = 0, & \text{en } \partial\Omega_s. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Lema 3.6. *Existe una constante $C = C(R, m) > 0$ tal que si ψ resuelve (3.2.3) con $h \in L^\infty(\Omega_s)$, y s es suficientemente grande, entonces*

$$\|\psi\|_\infty \leq C\{\|\psi\|_i + \|h\|_*\}. \quad (3.2.4)$$

Demostración. Estableceremos esta cota con ayuda de los Lemas 3.4 y 3.5. Sea f la función definida en el último resultado. Consideremos

$$\hat{\psi} \equiv (\|\psi\|_i + \|h\|_*)f.$$

Afirmamos que $\hat{\psi} \geq |\psi|$ en $\partial\Omega_R$ si R es suficientemente grande. En efecto, si $y \in \partial\Omega_s$, por la positividad de f , tenemos que

$$\hat{\psi}(y) \geq 0 = |\psi(y)|.$$

Por otro lado, si $|y - \xi'_k| = R\gamma_k$ para algún $k = 1, \dots, m$,

$$\hat{\psi}(y) \geq \|\psi\|_i f \geq \|\psi\|_i \geq |\psi(y)|, \quad \text{for } |y - \xi'_k| = R\gamma_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Finalmente, usando que $|h(y)| \leq \left(\sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^{3/2}} + \delta^2 \right) \|h\|_*$, tenemos para $y \in \Omega_R$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\psi})(y) &\leq (\|\psi\|_i + \|h\|_*) \mathcal{L}(f) \leq -\|h\|_* \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{|y - \xi_j'|^3} + \delta^2 \right\} \\ &\leq -\|h\|_* \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^{3/2}} + \delta^2 \right\} \\ &\leq -|h(y)| \leq -|\mathcal{L}(\psi)(y)|, \end{aligned}$$

siempre que R sea suficientemente grande. En particular, tenemos $\mathcal{L}(\hat{\psi}) \leq -\mathcal{L}(\psi)$ y $\mathcal{L}(\hat{\psi}) \leq \mathcal{L}(\psi)$, en Ω_R . Luego, por el Principio del Máximo del Lema 3.4 tenemos $|\psi(y)| \leq \hat{\psi}(y)$, para $y \in \Omega_R$. De esto obtenemos

$$\|\psi\|_\infty \leq \|\hat{\psi}\|_\infty \leq C \{ \|\psi\|_i + \|h\|_* \}$$

como era deseado. ■

3.2.3. Cotas a priori para un Problema sobreestimado

El próximo paso consiste en obtener estimaciones *a priori* para el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi) = h, & \text{en } \Omega_s, \\ \psi = 0, & \text{en } \partial\Omega_s, \\ \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \psi = 0, & \text{para todo } i = 0, 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

el cual envuelve las condiciones de ortogonalidad correspondientes a dilataciones en adición a las ya usadas en (3.2.1), esto es estamos pidiendo adicionalmente que la solución ψ satisfaga

$$\int_{\Omega_s} \chi_j Z_{0j} \psi = 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, m.$$

Como consecuencia de esta restricción adicional, tenemos directamente la siguiente estimación.

Lema 3.7. *Sea ψ una solución del Problema (3.2.5) con $\xi \in \mathcal{O}_s$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|\psi\|_\infty \leq C \|h\|_* \quad (3.2.6)$$

para todo $s > 0$ suficientemente grande.

Demostración. Probaremos este resultado vía un argumento de contradicción. Si el resultado fuese falso, debería existir una sucesión $s_n \rightarrow \infty$, puntos $\xi^n \in \mathcal{O}_{s_n}$, funciones h_n con $\|h_n\|_* \rightarrow 0$ y soluciones asociadas ψ_n con $\|\psi_n\|_\infty = 1$ tales que

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi_n) = h_n, & \text{en } \Omega_{s_n}, \\ \psi_n = 0, & \text{en } \partial\Omega_{s_n}, \\ \int_{\Omega_{s_n}} \chi_j Z_{ij} \psi_n = 0, & \text{para todo } i = 0, 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

En virtud del Lema 3.6 y que $\|\psi_n\|_\infty = 1$ tenemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_i \geq \alpha > 0. \quad (3.2.8)$$

Sea $\hat{\psi}_n(z) = \psi_n((\xi_j^n)^n + \gamma_j^n z)$, donde el índice $j = j(n)$ lo escogemos tal que $\sup_{B(\xi_j^n, R\gamma_j)} |\psi_n| \geq \alpha$, y que podemos asumir el mismo para todo n . Notemos que $\hat{\psi}_n$ satisface

$$\Delta \hat{\psi}_n + (\gamma_j^n)^2 W \hat{\psi}_n = (\gamma_j^n)^2 h_n, \quad \text{en } \Omega_n \equiv \gamma_j^{-1}(\Omega_s - (\xi_j^n)^n).$$

Estimaciones elípticas nos permiten asumir que $\hat{\psi}_n$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 a una solución acotada y no-nula $\hat{\psi}$ de

$$\Delta \psi + \frac{8}{(1 + |z|^2)^2} \psi = 0.$$

Gracias al resultado de [BP98], esto implica que $\hat{\psi}$ es una combinación lineal de las funciones Z_i , $i = 0, 1, 2$, es decir, $\hat{\psi} = \sum_{k=0}^2 \alpha_k Z_k$. Pero las condiciones de ortogonalidad sobre $\hat{\psi}_n$ pasan al límite gracias a que $\|\hat{\psi}_n\|_\infty \leq 1$. El Teorema de Convergencia Dominada implica

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{s_n}} \chi_j Z_{ij} \psi_n = \int_{\mathbb{R}^2} \chi Z_i \hat{\psi}_n + o(1) \\ &= \sum_{k=0}^2 \alpha_k \int_{\mathbb{R}^2} \chi Z_i Z_k + o(1), \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

donde $o(1) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Pero $\int_{\mathbb{R}^2} \chi Z_i Z_k = 0$ para $i \neq k$ e $\int_{\mathbb{R}^2} \chi Z_i^2 > 0$. Luego $\alpha_k = 0$ para todo $k = 0, 1, 2$ y de aquí $\hat{\psi} \equiv 0$, una contradicción con (3.2.8). ■

Observación 3.8. *El lector podría pensar que la invertibilidad del operador lineal está completamente resuelta pues –valga la redundancia– hemos invertido en el espacio ortogonal al kernel aproximado del operador lineal \mathcal{L} . Lamentablemente la respuesta es negativa pues como lo revelará el Lema 4.2 del Capítulo 4, el haber hecho la elección de los μ_j elimina el grado de libertad dado por dilataciones⁵ que seguiría presente si no hubiésemos fijado con anticipación sus valores. A*

⁵Esto es, la ortogonalidad con respecto a los elementos Z_{0j} , $j = 1, \dots, m$.

grosso modo, la invertibilidad sería directa de verificar, sin embargo, nuestra aproximación también dependería de las constantes μ_j , lo que causaría problemas, por ejemplo, al estimar la energía de la solución en el Lema 4.3. Un ejemplo de este fenómeno puede encontrarse en [PFM03].

3.2.4. Cotas *a priori* para un problema lineal

Es hora de tratar el Problema (3.2.5) levantando las condiciones de ortogonalidad

$$\int_{\Omega_s} \chi_j Z_{0j} \psi = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

esto es, el Problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi) = h, & \text{en } \Omega_s, \\ \psi = 0, & \text{en } \partial\Omega_s, \\ \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \psi = 0, & \text{para todo } i = 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Para esto tenemos la siguiente estimación *a priori* para la solución de este problema.

Lema 3.9. *Sea ψ la solución de (3.2.9) con $\xi \in \mathcal{O}_s$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|\psi\|_\infty \leq C s \|h\|_* \quad (3.2.10)$$

para todo s suficientemente grande.

Demostración. La demostración de este resultado es larga y engorrosa, por lo que la dividiremos en partes. La idea primordial es usar el resultado anterior, esto es, el Lema 3.7.

Primera Parte. Sea $R > R_0 + 1$ un número real fijo y grande. El primer objetivo es construir una perturbación a soporte compacto de las funciones Z_{0j} que represente la ortogonalidad levantada. Más específicamente, consideremos primero la función

$$\hat{Z}_{0j} = Z_{0j}(y) - \frac{1}{\gamma_j} + a_{0j} G(\delta y, \xi_j), \quad (3.2.11)$$

donde

$$a_{0j} \equiv \frac{1}{\gamma_j \{H(\xi_j, \xi_j) - 4 \log(\delta \gamma_j R)\}}. \quad (3.2.12)$$

De la estimación (2.1.8) tenemos que existen constantes C_1, C_2 positivas tales que

$$C_1 |\log \delta_j| \leq \log(\delta \gamma_j R) \leq C_2 |\log \delta_j|$$

y que

$$\hat{Z}_{0j}(y) = O\left(\frac{G(\delta y, \xi_j)}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right). \quad (3.2.13)$$

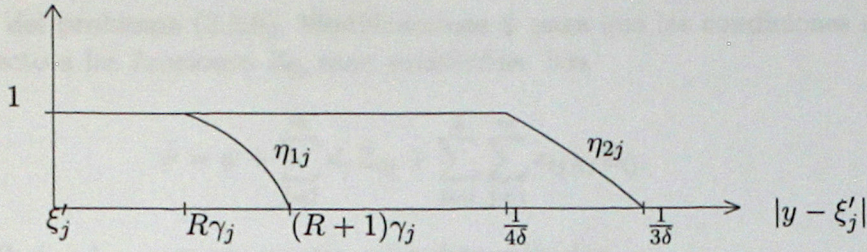


Figura 3.1: Decaimiento radial de las funciones η_{1j} y η_{2j} .

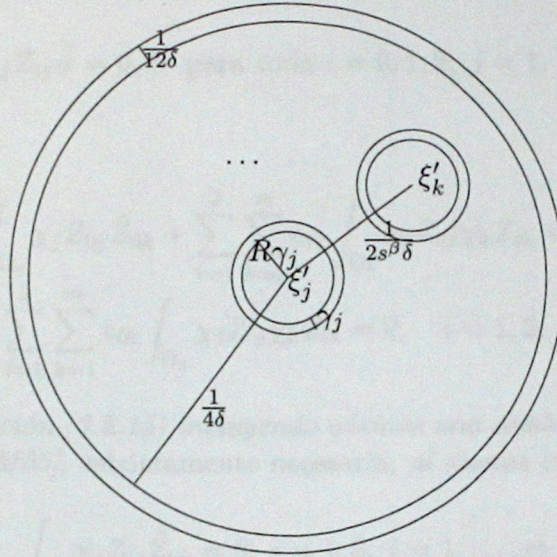


Figura 3.2: La posible intersección entre los soportes de las funciones η_{1j}, η_{1k} y η_{2j}, η_{2k} para $k \neq j$.

Tomemos ahora funciones de corte radiales y suaves η_1 y η_2 con las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_1 \leq 1, & \eta_1 \equiv 1 \text{ en } B(0, R), & \eta_1 \equiv 0 \text{ en } B(0, R+1)^c; \text{ y} \\ 0 \leq \eta_2 \leq 1, & \eta_2 \equiv 1 \text{ en } B(0, 1), & \eta_2 \equiv 0 \text{ en } B(0, \frac{4}{3})^c. \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $B(0, \frac{4}{3}) \subseteq \Omega$, o si no reducimos el radio $\frac{4}{3}$ a uno suficientemente pequeño. Coloquemos

$$\eta_{1j}(y) = \eta_1\left(\frac{|y - \xi'_j|}{\gamma_j}\right), \quad \eta_{2j}(y) = \eta_2(4\delta|y - \xi'_j|), \quad (3.2.14)$$

La figura 3.2.4 muestra el decaimiento de estas funciones en Ω_s . Más aún, los correspondientes soportes de estas funciones *podrían* intersectarse debido a que los puntos ξ'_j *podrían* estar acercándose, como lo muestra la figura 3.2.4. Definamos finalmente la función test

$$\tilde{Z}_{0j} = \eta_{1j}Z_{0j} + (1 - \eta_{1j})\eta_{2j}\hat{Z}_{0j}.$$

Esta función se asemeja a Z_{0j} a distancia menor que $R\gamma_j$ del punto ξ'_j , mientras que a orden δ^{-1} decae a orden γ_j^{-1} veces la función de Green centrada en ξ'_j , gracias a la cota (3.2.13).

Sea ψ una solución del problema (3.2.9). Modificaremos ψ para que las condiciones extras de ortogonalidad con respecto a las funciones Z_{0j} sean satisfechas. Sea

$$\tilde{\psi} = \psi + \sum_{j=1}^m d_j \tilde{Z}_{0j} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m e_{ij} \chi_j Z_{ij}, \quad (3.2.15)$$

con d_j y e_{ij} , $i = 1, 2$; $j = 1, \dots, m$ constantes a ser determinadas.

Ajustemos pues $\tilde{\psi}$ para satisfacer la condición de ortogonalidad

$$\int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \tilde{\psi} = 0, \quad \text{para todo } i = 0, 1, 2; j = 1, \dots, m, \quad (3.2.16)$$

esto es

$$\begin{cases} \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{0j} \psi + \sum_{k=1}^m d_k \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{0j} \tilde{Z}_{0k} + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^m e_{lk} \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{0j} \chi_k Z_{lk} = 0, & j = 1, \dots, m. \\ \sum_{k=1}^m d_k \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \tilde{Z}_{0k} + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^m e_{lk} \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \chi_k Z_{lk} = 0, & i = 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2.17)$$

Observación 3.10. La elección (3.2.15) incluyendo además una combinación lineal de las funciones Z_{ij} es, a diferencia de [PKM05], estrictamente necesaria, al menos en nuestro razonamiento. Esto se debe que la condición

$$\int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \tilde{Z}_{0k} = 0, \quad i = 1, 2, j = 1, \dots, m,$$

no se cumple necesariamente pues $\text{supp } \chi_j \eta_{1k} \neq \emptyset$ para $j \neq k$ debido a que los puntos ξ'_j y ξ'_k pueden estar acercándose. La pregunta obvia es si tales constantes d_j, e_{ij} efectivamente están bien definidas. Esto lo probaremos más adelante.

Luego, de (3.2.15)

$$\mathcal{L}(\tilde{\psi}) = h + \sum_{j=1}^m d_j \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m e_{ij} \mathcal{L}(\chi_j Z_{ij}). \quad (3.2.18)$$

Si (3.2.16) se cumple, el Lema previo nos permite concluir que

$$\|\tilde{\psi}\|_\infty \leq C \left\{ \|h\|_* + \sum_{j=1}^m |d_j| \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m |e_{ij}| \|\mathcal{L}(\chi_j \tilde{Z}_{ij})\|_* \right\}. \quad (3.2.19)$$

Por último, la estimación (3.2.10) es una consecuencia directa de las dos afirmaciones siguientes:

Afirmación 3.11. Las constantes d_j y e_{ij} están bien definidas y

$$\|\mathcal{L}(\chi_j Z_{ij})\|_* \leq \frac{C}{\gamma_j}, \quad \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* \leq \frac{C \log s}{\gamma_j |\log \delta_j|}, \quad i = 1, 2; j = 1, \dots, m. \quad (3.2.20)$$

Afirmación 3.12. *Se tienen las siguientes estimaciones*

$$|d_j| \leq C\gamma_j |\log \delta_j| \|h\|_*, \quad |e_{ij}| \leq C\gamma_j \log s \|h\|_*, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.2.21)$$

Asumiendo la validez de estas estimaciones, usando el hecho que

$$\|\tilde{Z}_{0j}\|_\infty \leq \frac{C}{\gamma_j} \text{ y que } \|\chi_j Z_{ij}\|_\infty \leq \frac{C}{\gamma_j},$$

y la definición (3.2.15) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_\infty &\leq \|\tilde{\psi}\|_\infty + \sum_{j=1}^m |d_j| \|\tilde{Z}_{0j}\|_\infty + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m |e_{ij}| \|\chi_j Z_{ij}\|_\infty \\ &\leq C \left\{ \|h\|_* + \sum_{j=1}^m |d_j| \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m |e_{ij}| \|\mathcal{L}(\chi_j \tilde{Z}_{ij})\|_* \right\} + \\ &\quad + C \sum_{j=1}^m |\log \delta_j| \|h\|_* + C \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m \log s \|h\|_* \\ &\leq C s \|h\|_*, \end{aligned}$$

que es precisamente (3.2.10), como deseábamos.

Segunda Parte. Probemos la Afirmación 3.11. Primero partamos encontrando d_j y e_{ij} de manera más específica. De la Definición (3.2.15), las condiciones de ortogonalidad (3.2.17) y el hecho que $\text{supp } \chi_j \chi_k = \emptyset$ if $j \neq k$, podemos escribir

$$e_{ij} = - \frac{\sum_{k=1}^m d_k \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \tilde{Z}_{0k}}{\int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij}^2}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.2.22)$$

Notar que $\int_{\Omega_s} Z_{ij}^2 \chi_j^2 = c > 0$, para todo i, j , e

$$\int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \tilde{Z}_{0l} = O\left(\frac{\gamma_j \log s}{\gamma_l |\log \delta_l|}\right), \quad j \neq l.$$

Luego, usando (3.2.22)

$$|e_{ij}| \leq C \sum_{l \neq j} |d_l| \frac{\gamma_j \log s}{\gamma_l |\log \delta_l|}. \quad (3.2.23)$$

Necesitamos demostrar que los d_j 's están bien definidos. En efecto, multiplicando la Definición (3.2.15) por $Z_{0k} \chi_k$, integrando y usando la condición de ortogonalidad (3.2.16) para $i = 0$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^m d_j \int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k} \tilde{Z}_{0j} = - \int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k} \psi, \quad \forall k = 1, \dots, m. \quad (3.2.24)$$

Pero $\int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k} \tilde{Z}_{0k} = \int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k}^2 = C$, para todo k , e

$$\int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k} \tilde{Z}_{0j} = O\left(\frac{\gamma_k \log s}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right),$$

si $k \neq j$. Luego, si definimos

$$m_{kj} = \int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k} \tilde{Z}_{0j}, \text{ y } f_k = - \int_{\Omega_s} \chi_k Z_{0k} \psi,$$

el sistema (3.2.24) puede ser escrito como

$$\sum_{j=1}^m m_{kj} d_j = f_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Pero la matriz con coeficientes $\gamma_j m_{kj} \gamma_k^{-1}$ es diagonal dominante,⁶ pues

$$\gamma_j m_{kj} \gamma_k^{-1} = \begin{cases} O(1), & \text{si } k = j, \\ O\left(\frac{\log s}{|\log \delta_j|}\right), & \text{si } k \neq j, \end{cases}$$

luego invertible, y por ende la matriz de coeficientes m_{kj} es también invertible. Por lo tanto los d_j 's están bien definidos.

Probemos ahora las desigualdades (3.2.20). Notemos que en la región $|y - \xi'_j| \leq (R + 1)\gamma_j$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\chi_j Z_{ij}) &= \chi_j \mathcal{L}(Z_{ij}) + \Delta \chi_j Z_{ij} + 2\nabla \chi_j \cdot \nabla Z_{ij} \\ &= O\left(\frac{s\delta_j \gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^2}\right) + O\left(\frac{\gamma_j^{-1}}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{1/2}}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

y luego $\|\mathcal{L}(\chi_j Z_{ij})\|_* = O(\gamma_j^{-1})$. Probemos ahora la segunda desigualdad en (3.2.20). En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) &= \Delta \eta_{1j}(Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) + 2\nabla \eta_{1j} \cdot \nabla(Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) + 2\nabla \eta_{2j} \cdot \nabla \hat{Z}_{0j} + \Delta \eta_{2j} \hat{Z}_{0j} + \\ &\quad + \eta_{1j} \{\mathcal{L}(Z_{0j}) - \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j})\} + \eta_{2j} \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}), \end{aligned}$$

Lamentablemente, estimar de manera global el tamaño de estos elementos no es simple. Por ello, vamos a considerar las cuatro regiones siguientes

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \{|y - \xi'_j| \leq \gamma_j R\}, \quad \Omega_2 \equiv \{\gamma_j R < |y - \xi'_j| \leq \gamma_j (R + 1)\}, \\ \Omega_3 &\equiv \left\{ \gamma_j (R + 1) < |y - \xi'_j| \leq \frac{1}{4\delta} \right\}, \text{ y } \Omega_4 \equiv \left\{ \frac{1}{4\delta} < |y - \xi'_j| \leq \frac{1}{3\delta} \right\}. \end{aligned}$$

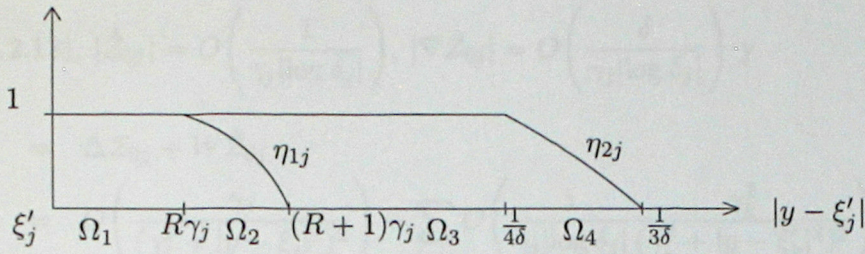


Figura 3.3: Las regiones Ω_i para $i = 1, \dots, 4$.

Estas regiones pueden ser distinguidas en la figura 3.2.4.

Primeramente, notemos que (2.3.9) y (3.1.3) implican

$$\eta_{1j} \{ \mathcal{L}(Z_{0j}) - \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) \} + \eta_{2j} \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) = O \left(\frac{s\delta\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{3/2}} \right) \quad (3.2.25)$$

para todo $y \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. De aquí, podemos escribir una primera estimación $\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})$ a través de Ω_s ⁷

$$\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) = \begin{cases} O \left(\frac{s\delta\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{3/2}} \right), & y \in \Omega_1, \\ \Delta\eta_{1j}(Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) + 2\nabla\eta_{1j} \cdot \nabla(Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) + O \left(\frac{s\delta\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{3/2}} \right), & y \in \Omega_2, \\ \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}), & \text{en } \Omega_3, \\ 2\nabla\eta_{2j} \cdot \nabla\hat{Z}_{0j} + \Delta\eta_{2j}\hat{Z}_{0j} + \eta_{2j}\mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}), & \text{en } \Omega_4, \end{cases} \quad (3.2.26)$$

Nuestra idea ahora es estimar los restantes términos de esta última relación. Por ejemplo, en Ω_2 ,

$$Z_{0j} - \hat{Z}_{0j} = \frac{1}{\gamma_j} - a_{0j}G(\delta y, \chi_j) = -a_{0j} \left\{ 4 \log \frac{\gamma_j R}{|y - \xi'_j|} + O(\delta\gamma_j) \right\}. \quad (3.2.27)$$

De aquí concluimos que

$$|Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}| = O \left(\frac{1}{\gamma_j |\log \delta_j|} \right) \quad \text{y} \quad |\nabla(Z_{0j} - \hat{Z}_{0j})| = O \left(\frac{1}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|} \right), \quad (3.2.28)$$

y luego

$$\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) = O \left(\frac{1}{\gamma_j^3 |\log \delta_j|} \right), \quad (3.2.29)$$

sobre Ω_2 .

⁶Por (γ_j) denotamos a la matriz diagonal $m \times m$ de coeficientes no nulos γ_j , $j = 1, \dots, m$.

⁷Notar que $\nabla\eta_{1j}$, $\Delta\eta_{1j} \equiv 0$ sobre Ω_1 , Ω_3 y Ω_4 , mientras que $\nabla\eta_{2j}$, $\Delta\eta_{2j} \equiv 0$ sobre Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 .

En Ω_4 , gracias a (3.2.13), $|\hat{Z}_{0j}| = O\left(\frac{1}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right)$, $|\nabla \hat{Z}_{0j}| = O\left(\frac{\delta}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right)$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) &= \Delta Z_{0j} + W \hat{Z}_{0j} \\ &= O\left(\frac{\gamma_j}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^2}\right) + \sum_{k \neq j} O\left(\frac{1}{\gamma_j |\log \delta_j|} \frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi_k'|^2)^2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, consideremos $y \in \Omega_3$. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) &= \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) \\ &= \left\{ W - \frac{8\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^2} \right\} Z_{0j} + W \left\{ a_{0j} G(\delta y, \xi_j) - \frac{1}{\gamma_j} \right\} \\ &\equiv A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Para estimar estos dos términos, necesitamos separar Ω_3 en varias subregiones. Sean

$$\begin{aligned} \Omega_{3,j} &\equiv \left\{ \gamma_j(R+1) < |y - \xi_j'| \leq \frac{1}{2s^\beta \delta} \right\}, \\ \Omega_{3,k} &\equiv \left\{ y \in \Omega_3 \mid |y - \xi_k'| \leq \frac{1}{2s^\beta \delta} \right\}, \quad k \neq j, \\ \text{y } \tilde{\Omega}_3 &\equiv \left\{ y \in \Omega_3 \mid |y - \xi_l'| \geq \frac{1}{2s^\beta \delta}, \quad \forall l \right\}. \end{aligned}$$

Del Lema 2.6, $A_1 = O\left(\frac{s\gamma_j\delta}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^{3/2}}\right)$ en $\Omega_{3,j}$, y $A_1 = O(s^K \delta^2 \delta_j^2 \gamma_j^{-1})$ en $\tilde{\Omega}_3$.

Si $y \in \Omega_{3,j}$,

$$\begin{aligned} A_2 &= O\left(\frac{\gamma_j^2 a_{0j}}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^2} \left\{ -\log \gamma_j R + \log |y - \xi_j'| + \delta |y - \xi_j'| \right\}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{|\log \delta_j|} \frac{1}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^{3/2}}\right), \end{aligned}$$

y $A_2 = O(s^K \delta^2 \delta_j^2)$, para algún K grande. Finalmente obtenemos que para todo $y \in \Omega_{3,j} \cup \tilde{\Omega}_3$,

$$|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})| = O\left(\frac{1}{|\log \delta_j|} \frac{1}{(\gamma_j^2 + |y - \xi_j'|^2)^{3/2}}\right). \quad (3.2.30)$$

En $\Omega_{3,k}$, $k \neq j$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) &= \Delta Z_{0j} + W \hat{Z}_{0j} \\
 &= \frac{-8\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^2} Z_{0j} + W \hat{Z}_{0j} \\
 &= O(s^K \delta_j \delta^3) + O\left(\frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2} \frac{G(\delta y, \xi_j)}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right) \\
 &= O\left(\frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2} \frac{\log s}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right),
 \end{aligned}$$

y luego, combinando (3.2.25)-(3.2.30) y la estimación previa, podemos escribir nuevamente (3.2.26)

$$\|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* = \begin{cases} O(s\delta\gamma_j), & \text{en } \Omega_1, \\ O\left(\frac{1}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right), & \text{en } \Omega_2, \\ O\left(\frac{\log s}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right), & \text{en } \Omega_3, \\ O\left(\frac{1}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right), & \text{en } \Omega_4. \end{cases} \quad (3.2.31)$$

De aquí,

$$\|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* = O\left(\frac{\log s}{\gamma_j |\log \delta_j|}\right).$$

Tercera Parte. Por último, probemos la Afirmación 3.12. Testeando la ecuación (3.2.18) con \tilde{Z}_{0j} y usando las relaciones (3.2.19), (3.2.20), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m d_k \int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0k}) \tilde{Z}_{0j} &= - \int_{\Omega_s} h \tilde{Z}_{0j} - \int_{\Omega_s} \tilde{\psi} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^m e_{lk} \int_{\Omega_s} \chi_k Z_{lk} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \\
 &\leq C \frac{\|h\|_*}{\gamma_j} + C \|\tilde{\psi}\|_\infty \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* + C \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^m |e_{lk}| \frac{\|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_*}{\gamma_k} \\
 &\leq C \|h\|_* \left\{ \frac{1}{\gamma_j} + \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* \right\} + C \sum_{k=1}^m |d_k| \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0k})\|_* \|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_* + \\
 &\quad + C \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^m |e_{lk}| \frac{\|\mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j})\|_*}{\gamma_k}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\int_{\Omega_s} \frac{\gamma_j}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{3/2}} \leq C \quad \text{para todo } j.$$

Pero la estimación (3.2.23) y la Afirmación 3.11 permiten concluir que

$$|d_j| \left| \int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0j} \right| \leq C \frac{\|h\|_*}{\gamma_j} + C \sum_{k=1}^m \frac{|d_k| \log^2 s}{\gamma_j \gamma_k |\log \delta_j| |\log \delta_k|} + C \sum_{k \neq j} |d_k| \left| \int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0k} \right|. \quad (3.2.32)$$

Sólo necesitamos estimar los términos $\int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0k}$, para todo k . Para ello tenemos la siguiente

Afirmación 3.13. *Si R es suficientemente grande,*

$$\int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0j} = \frac{E}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|} (1 + o(1)), \quad (3.2.33)$$

donde E es una constante positiva independiente de s y R . Además, si $k \neq j$

$$\int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0k} = O\left(\frac{\log^2 s}{\gamma_j \gamma_k |\log \delta_j| |\log \delta_k|}\right). \quad (3.2.34)$$

Asumiendo por el momento la validez de esta afirmación, y reemplazando (3.2.33) y (3.2.34) en (3.2.32), obtenemos

$$\frac{|d_j|}{\gamma_j} \leq C |\log \delta_j| \|h\|_* + C \sum_{k=1}^m \frac{|d_k| \log^2 s}{\gamma_k |\log \delta_k|}, \quad (3.2.35)$$

esto es

$$\frac{|d_j|}{\gamma_j} \leq C |\log \delta_j| \|h\|_* + o(1) \sum_{k=1}^m \frac{|d_k|}{\gamma_k},$$

y luego, gracias a un argumento de álgebra lineal

$$|d_j| \leq C \gamma_j |\log \delta_j| \|h\|_*.$$

Finalmente, usando la estimación (3.2.23), concluimos que

$$|e_{ij}| \leq C \gamma_j \log s \|h\|_*$$

y la Afirmación 3.12 se tiene.

Probemos la Afirmación 3.13. Intentemos con el primer término (3.2.33). Para ello podemos descomponer la integral en las mismas regiones anteriores

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0j} &= O(s\delta_j) + \int_{\Omega_2} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0j} + \int_{\Omega_3} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0j} + \int_{\Omega_4} \mathcal{L}(\tilde{Z}_{0j}) \tilde{Z}_{0j} \\ &\equiv O(s\delta_j) + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Primero estimemos I_3 . De (3.2.30),

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\Omega_3} \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) \hat{Z}_{0j} \\ &= \int_{\Omega_{3,j} \cup \bar{\Omega}_3} \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) \hat{Z}_{0j} + \sum_{k \neq j} \int_{\Omega_{3,k}} \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) \hat{Z}_{0j} \\ &= O\left(\frac{1}{R\gamma_j^2 |\log \delta_j|}\right) + O\left(\frac{\log^2 s}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|^2}\right). \end{aligned}$$

Ahora tratemos con I_4 . De las estimaciones sobre Ω_4 , $|I_4| = O\left(\frac{1}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|^2}\right)$. Por otro lado,

$$I_2 = \int_{\Omega_2} \left\{ \Delta \eta_{1l} (Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) + 2\nabla \eta_{1j} \cdot \nabla (Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) \right\} \hat{Z}_{0j} + O\left(\frac{s\delta}{\gamma_j R^2}\right).$$

Luego, integrando por partes el primer término en la igualdad anterior encontramos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2} \nabla \eta_{1j} \cdot \nabla (Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) \hat{Z}_{0j} - \int_{\Omega_2} |\nabla \eta_{1l}|^2 (Z_{0j} - \hat{Z}_{0j})^2 + \\ &\quad - \int_{\Omega_2} \nabla \eta_{1j} \cdot \nabla \hat{Z}_{0j} (Z_{0j} - \hat{Z}_{0j}) + \int_{\Omega_2} \{ \eta_{1j} \mathcal{L}(Z_{0j}) + (1 - \eta_{1j}) \mathcal{L}(\hat{Z}_{0j}) \} \\ &\equiv I_{2,a} + I_{2,b} + I_{2,c} + I_{2,d}. \end{aligned}$$

Usando (3.2.27) y (3.2.13), obtenemos que⁸ $|\nabla \hat{Z}_{0l}| = O\left(\frac{1}{R^3 \gamma_j^2}\right)$ en Ω_2 ,

$$\begin{aligned} I_{2,b} &= O\left(\frac{R}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|^2}\right), \quad I_{2,c} = O\left(\frac{1}{R^2 \gamma_j^2 |\log \delta_j|}\right), \\ &\quad \text{e } I_{2,d} = O\left(\frac{\delta}{R^3 \gamma_j^2 |\log \delta_j|}\right). \end{aligned}$$

Ahora, como $\hat{Z}_{0j} = Z_{0j} \left(1 + O\left(\frac{\gamma_j \delta R}{|\log \delta_j|}\right)\right)$, concluimos que

$$\begin{aligned} I_{2,a} &= \frac{1}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|} \int_R^{R+1} r \eta_1'(r) \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right) (1 + o(1)) dr \\ &= \frac{E}{\gamma_j^2 |\log \delta_j|} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

donde E es una constante positiva independiente de s y R . Por lo tanto, para R fijo pero grande y s pequeño, obtenemos (3.2.33). El segundo resultado puede obtenerse usando similares argumentos. ■

Ahora podemos tratar con el problema original (3.2.1).

⁸Es un cálculo simple pero tedioso.

3.2.5. Demostración de la cota *a priori* (3.2.2)

Estableceremos primero la validez de la estimación *a priori* (3.2.2) para soluciones $\psi \in L^\infty(\Omega)$ del problema (3.2.1), con $h \in L^\infty(\Omega)$. Gracias al Lema (3.9)

$$\|\psi\|_\infty \leq Cs \left\{ \|h\|_* + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m |c_{ij}| \|\chi_j Z_{ij}\|_* \right\}, \quad (3.2.36)$$

pero

$$\|\chi_j Z_{ij}\|_* \leq C\gamma_j,$$

de aquí, es suficiente estimar las constantes c_{ij} . Con este fin, multipliquemos la primera ecuación en (3.2.1) por $Z_{ij}\eta_{2j}$, con η_{2j} la función de corte introducida en (3.2.14), e integremos por partes. Encontramos que

$$\int_{\Omega_s} \psi \mathcal{L}(Z_{ij}\eta_{2j}) = \int_{\Omega_s} h Z_{ij}\eta_{2j} + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^m c_{kl} \int_{\Omega_s} \eta_{2j} Z_{ij} \chi_l Z_{kl}, \quad (3.2.37)$$

Es fácil ver que $\int_{\Omega_s} h \eta_{2j} Z_{ij} = O(\gamma_j^{-1} \|h\|_*)$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta_{2j} Z_{ij}) &= \Delta \eta_{2j} Z_{ij} + 2\nabla \eta_{2j} \cdot \nabla Z_{ij} + \eta_{2j} \mathcal{L}(Z_{ij}) \\ &= O(\delta^3) + \left\{ W - \frac{8\gamma_j^2}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^2} \right\} \eta_{2j} Z_{ij} \equiv O(\delta^3) + B_j. \end{aligned}$$

Para estimar B_j , necesitamos dividir el soporte de η_{2j} en varias regiones. Si j es fijo, coloquemos

$$\hat{\Omega}_{1k} \equiv \left\{ |y - \xi'_k| \leq \frac{1}{2s\beta\delta} \right\},$$

para cualquier $k = 1, \dots, m$, y

$$\hat{\Omega}_2 \equiv \left\{ |y - \xi'_j| \leq \frac{1}{3\delta}, |y - \xi'_k| \geq \frac{1}{2s\beta\delta}, \forall k \right\}.$$

En $\hat{\Omega}_{1j}$, usando el Lema 2.6, $B_j = O\left(\frac{s\delta\gamma_j}{(\gamma_j^2 + |y - \xi'_j|^2)^{3/2}}\right)$. En $\hat{\Omega}_{1k}$, $k \neq j$,

$$B_j = O\left(\frac{s^\beta\delta\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + |y - \xi'_k|^2)^2}\right).$$

Finalmente, en $\hat{\Omega}_2$, $B_j = O(s^K \delta_j^2 \delta^3)$, para alguna constante $K > 0$ grande. Luego,

$$\left| \int_{\Omega_s} \psi \mathcal{L}(\eta_{2j} Z_{ij}) \right| \leq Cs^\beta \delta \|\psi\|_\infty$$

Ahora,

$$\int_{\Omega_s} \eta_{2j} \chi_j Z_{ij} Z_{kl} = C \delta_{ik}$$

y si $j \neq l$, y s es suficientemente grande,

$$\int_{\Omega_s} \eta_{2j} \chi_l Z_{ij} Z_{kl} = O(\gamma_l s^\beta \delta).$$

Usando las estimaciones anteriores en (3.2.37), obtenemos

$$|c_{ij}| \leq C s^\beta \delta \|\psi\|_\infty + \frac{C}{\gamma_j} \|h\|_* + C \sum_{k=1}^2 \sum_{l \neq j} |c_{kl}| \gamma_l s^\beta \delta \quad (3.2.38)$$

y luego

$$|c_{ij}| \leq C s^\beta \delta \|\psi\|_\infty + \frac{C}{\gamma_j} \|h\|_*.$$

Colocando esta estimación en (3.2.36), concluimos la validez de (3.2.10).

3.2.6. Existencia y Unicidad

Probemos la afirmación de existencia de soluciones de (3.2.9). Esta afirmación es estándar pero la incluiremos por completitud. Ver [PKM05]. Para este propósito consideremos el espacio de Banach

$$\mathcal{H} = \left\{ \psi \in H_0^1(\Omega_s) \mid \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \psi = 0, \quad \text{para todo } i = 1, 2; j = 1, \dots, m \right\},$$

equipado con el producto interno usual de $L^2(\Omega_s)$:

$$(\psi, \varphi) = \int_{\Omega_s} \nabla \psi \cdot \nabla \varphi.$$

El Problema (3.2.9) expresada en su forma débil es equivalente a encontrar una función $\psi \in \mathcal{H}$, tal que

$$(\psi, \varphi) = \int_{\Omega_s} \{h - W\psi\} \varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Con la ayuda del Teorema de Representación de Riesz, esta ecuación puede ser reescrita en \mathcal{H} en la forma operacional $\psi = K(-W\psi) + K(h)$, donde K es un operador compacto en \mathcal{H} . La alternativa de Fredholm garantiza la existencia y unicidad de las soluciones para este problema para cualquier h siempre que la ecuación homogénea $\psi = K(-W\psi)$ tenga sólo la solución trivial en \mathcal{H} . Esta última ecuación es equivalente a (3.2.9) con $h \equiv 0$. Luego, la existencia de una única solución sigue de la estimación a priori (3.2.10). Esto concluye finalmente la demostración. ■

Observación 3.14. El operador T recientemente definido es en realidad diferenciable con respecto a las variables ξ' . En efecto, cálculos similares a los ya hechos en [PKM05] conllevan a la estimación

$$\|\partial_{\xi'} T(h)\|_{\infty} \leq Cs^2 \|h\|_*, \quad \text{para todo } l = 1, 2; k = 1, \dots, m. \quad (3.2.39)$$

Un elemento importante en estos cálculos proviene del hecho que $\frac{1}{\gamma_j} \leq C$, uniformemente en s .

Capítulo 4

La reducción variacional de Liapunov-Schmidt

4.1. Un problema no-lineal intermedio

La idea a resolver el Problema (3.18) reduciéndolo primero al siguiente problema no-lineal más sencillo (3.19), solve por el método de los grados, por los α_j . Como usual, este problema corresponde a la proyección del Problema (3.18) sobre el subespacio vectorial ortogonal al conjunto $\{e_j, j = 1, 2, \dots, m\}$. De hecho, tomamos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = -\mu + N(u) + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^m \alpha_{kj} \delta_{kj} & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \chi_j \Delta u = 0, \text{ para toda } j = 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (4.1)$$

Para este problema, y usando el Teorema de Punto Fijo de Banach, probaremos la siguiente

Proposición 4.1. Sea $\mu \in C_0$. Entonces, existen $\alpha_j > 0$ y $C > 0$ tales que para todo $\mu \in \mathcal{B}_\mu$ el problema no-lineal (4.1) tiene una única solución $u \in C(\bar{\Omega})$ que satisface

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C \|\mu\|_{C_0}^{1+\alpha} \quad (4.2)$$

Además, si consideramos la función

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_2 - \mu \in C(\bar{\Omega})$$

la función \mathcal{F} es única y define una familia continua en \mathcal{F} . Además, tenemos la siguiente cota

$$\|\mathcal{F}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C \|\mu\|_{C_0}^{1+\alpha} \quad (4.3)$$

Ver por ejemplo las ecuaciones (3.13) y (3.14).

Capítulo 4

La reducción variacional de Liapunov-Schmidt

4.1. Un problema no-lineal intermedio

En orden a resolver el Problema (2.3.9) consideremos primero el siguiente problema no-lineal muy similar a (2.3.9), salvo por el término lineal formado por los c_{ij} . *Grosso modo*, este problema corresponde a la proyección del Problema (2.3.9) sobre el subespacio vectorial ortogonal al conjunto $\{Z_{ij}\}$, $i = 1, 2; j = 1, \dots, m$.¹ En efecto, tomemos el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\psi) = -[R + N(\psi)] + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m c_{ij} \chi_j Z_{ij}, & \text{en } \Omega_s, \\ \psi = 0, & \text{en } \partial\Omega_s, \\ \int_{\Omega_s} \chi_j Z_{ij} \psi = 0, & \text{para todo } i = 1, 2, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Para este problema, y usando el Teorema de Punto Fijo de Banach, probaremos la siguiente

Proposición 4.1. *Sea $\xi \in \mathcal{O}_s$. Entonces, existen $s_0 > 0$ y $C > 0$ tales que para todo $s \geq s_0$ el problema no-lineal (4.1.1) tiene una única solución $\psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_s)$ que satisface*

$$\|\psi\|_{\infty} \leq C s^{2\beta+1} e^{-s/4}. \quad (4.1.2)$$

Más aún, si consideramos la función

$$\xi' \in \mathcal{O}_s \rightarrow \psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_s),$$

la derivada $D_{\xi'} \psi$ existe y define una función continua en ξ' . Además tenemos la siguiente cota

$$\|D_{\xi'} \psi\|_{\infty} \leq C s^{2\beta+2} e^{-s/4}. \quad (4.1.3)$$

¹Ver por ejemplo las ecuaciones 1.6.13 y 1.6.14.

Demostración. En términos del operador lineal T definido en la Proposición 3.2, el Problema (4.1.1) se escribe como el problema de *punto fijo* siguiente

$$\psi = \mathcal{B}(\psi) \equiv -T(N(\psi) + R).$$

Precisemos las hipótesis del Teorema de Punto Fijo de Banach. Para ello, consideremos la región

$$\mathcal{K} \equiv \{\psi \in C(\bar{\Omega}_s) \mid \|\psi\|_\infty \leq s^{2\beta+1}e^{-s/4}\}.$$

De la Proposición 3.2,

$$\|\mathcal{B}(\psi)\|_\infty \leq Cs \{ \|N(\psi)\|_* + \|R\|_* \},$$

mientras que el Lema 2.6 nos da la cota

$$\|R\|_* \leq Cs^{2\beta+1}e^{-s/4}.$$

También, del Lema 2.8

$$\|N(\psi)\|_* \leq \|W\|_* \|\psi\|_\infty^2 \leq C\|\psi\|_\infty^2.$$

De aquí, si $\psi \in \mathcal{K}$, $\|\mathcal{B}(\psi)\|_\infty \leq Cs^{2\beta+2}e^{-s/4}$. De la misma forma obtenemos

$$\|N(\psi_1) - N(\psi_2)\|_* \leq C \max_{i=1,2} \|\psi_i\|_\infty \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

para cualquier $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}$. Luego concluimos

$$\|\mathcal{B}(\psi_1) - \mathcal{B}(\psi_2)\|_\infty \leq Cs \|N(\psi_1) - N(\psi_2)\|_* \leq Cs^{2\beta+2}e^{-s/4} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty.$$

De aquí sigue que para todo s suficientemente grande \mathcal{B} es contractante en \mathcal{K} , y luego existe un único punto fijo de \mathcal{B} en esta región. La demostración de (4.1.3) es similar a la que está incluida en [PKM05] y la omitiremos. ■

4.2. Reducción Variacional: El método de Liapunov-Schmidt

Ya hemos resuelto el problema no-lineal (4.1.1). En orden de encontrar una solución del problema original (2.3.9) necesitamos encontrar un punto ξ en \mathcal{O}_s tal que

$$c_{ij} = c_{ij}(\xi') = 0, \quad \text{para todo } i, j, \tag{4.2.1}$$

donde $c_{ij}(\xi')$ son las constantes en (4.1.1). El Problema (4.2.1) es –notablemente– de índice variacional: corresponde a *encontrar puntos críticos de una función de ξ'* . Para ser más específicos, consideremos primero el funcional de energía asociado con (1.5.2), esto es,

$$J_s[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} k(x) e^{-s\phi_1} e^u, \tag{4.2.2}$$

y definamos el funcional que a $\xi \in \mathcal{O}_s$ le asocia

$$\mathcal{F}_s(\xi) \equiv J_s[U(\xi) + \hat{\psi}_\xi] \quad (4.2.3)$$

donde $U(\xi)$ es nuestra solución aproximada de (2.1.5) y $\hat{\psi}_\xi = \psi(\frac{x}{\delta}, \frac{\xi}{\delta})$, $x \in \Omega$, con $\psi = \psi_{\xi'}$ la única solución del problema (4.1.1) dada por la Proposición 4.1. De aquí obtenemos que puntos críticos de \mathcal{F}_s corresponden a soluciones de (4.2.1) para s grande. En efecto,

Lema 4.2. $\mathcal{F}_s : \mathcal{O}_s \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 . Más aún, para todo s suficientemente grande, si $D_\xi \mathcal{F}_s(\xi) = 0$ entonces ξ satisface (4.2.1).

Demostración. Definamos para $v \in H^1(\Omega_s)$

$$I_s[v] \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega_s} q(s, y) e^v.$$

Claramente este funcional es diferenciable por lo que \mathcal{F}_s lo será siempre que la función

$$\xi \in \mathcal{O}_s \mapsto U(\xi) + \hat{\psi}_\xi$$

lo sea; esto es precisamente cierto por la cota (4.1.3).

Diferenciemos pues la función \mathcal{F}_s con respecto a ξ . Como $J_s[U(\xi) + \hat{\psi}_\xi] = I_s[V(\xi') + \psi_{\xi'}$], podemos derivar directamente bajo el signo integral, tal que

$$\begin{aligned} \partial_{(\xi_k)_l} \mathcal{F}_s(\xi) &= \delta^{-1} D I_s[V + \psi] \left(\partial_{(\xi'_k)_l} V + \partial_{(\xi'_k)_l} \psi \right) \\ &= \delta^{-1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_s} c_{ij} \chi_j Z_{ij} \left(\partial_{(\xi'_k)_l} V + \partial_{(\xi'_k)_l} \psi \right). \end{aligned}$$

De los resultados de la sección anterior, esta expresión es continua como función de ξ' , y por ende de los ξ . Asumamos pues que $D_\xi \mathcal{F}_s(\xi) = 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m \int_{\Omega_\varepsilon} c_{ij} \chi_j Z_{ij} \left(\partial_{(\xi'_k)_l} V + \partial_{(\xi'_k)_l} \psi \right) = 0, \quad \text{para } k = 1, 2; \quad l = 1, \dots, m.$$

Como $\|D_{\xi'} \psi\|_\infty \leq C s^{2\beta+2} e^{-s/4}$, tenemos que

$$\partial_{(\xi'_k)_l} V + \partial_{(\xi'_k)_l} \psi = Z_{kl} + o(1),$$

donde $o(1)$ es uniformemente pequeño cuando $s \rightarrow +\infty$. De aquí, tenemos el siguiente sistema lineal de ecuaciones para los c_{ij}

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^m c_{ij} \int_{\Omega_\varepsilon} \chi_j Z_{ij} (Z_{kl} + o(1)) = 0, \quad \text{para } k = 1, 2; \quad l = 1, \dots, m.$$

Este sistema es diagonal dominante, luego $c_{ij} = 0$ para todo i, j . Esto concluye la demostración. ■

4.3. La forma asintótica del funcional de energía

4.3.1. La energía de la solución aproximada

Consideremos el funcional de energía (4.2.2). Nuestro siguiente objetivo será dar una estimación asintótica de $J_s[U]$, donde $U(\xi)$ es la aproximación de (2.1.5). **La elección** de los parámetros μ_j como en (2.1.7) y cálculos contenidos esencialmente en [PKM05] muestran que la siguiente expansión es cierta

Lema 4.3. *Con la elección de los μ_j 's dada por (2.1.7),*

$$J_s[U] = 16\pi \sum_{i \neq j} \log|\xi_i - \xi_j| + 8\pi s \sum_{j=1}^m \phi_1(\xi_j) + O(1), \quad (4.3.1)$$

donde $O(1)$ es uniforme para $\xi \in \mathcal{O}_s$ cuando $s \rightarrow +\infty$.

Demostración. Primero estimaremos la parte cuadrática de la energía evaluada en la aproximación U , esto es

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{\Omega} |\nabla U_j|^2 + \sum_{i \neq j} \int_{\Omega} \nabla U_j \cdot \nabla U_i \right\},$$

donde la última suma se realiza sobre todos los índices $i, j = 1, \dots, m$ con $i \neq j$.

Escojamos j fijo. Primero notemos que $\Delta U_j = \Delta u_j + \Delta H_j = -\delta_j^2 e^{u_j}$ y que $U_j = 0$ sobre $\partial\Omega$. Luego,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla U_j|^2 = \frac{1}{2} \delta_j^2 \int_{\Omega} e^{u_j} U_j.$$

Asimismo,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla U_i \cdot \nabla U_j = \frac{1}{2} \delta_j^2 \int_{\Omega} e^{u_j} U_i.$$

De aquí, colocando $y = (\delta_j)^{-1}(x - \xi_j)$, y $\Omega_j = (\delta_j)^{-1}(\Omega - \xi_j)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_j^2 \int_{\Omega} e^{u_j} U_j &= \int_{\Omega_j} \frac{8}{(1+|y|^2)^2} \left\{ \log \frac{8}{(1+|y|^2)^2} + H(\xi_j + \delta_j y, \xi_j) - 2 \log 8\mu_j^2 + 2s\phi_1(\xi_j) \right\} + O(\delta_j^2) \\ &= 8 \left\{ H(\xi_j, \xi_j) - 2 \log 8\mu_j^2 + 2s\phi_1(\xi_j) \right\} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|y|^2)^2} + O(1) \\ &= 8\pi \left\{ H(\xi_j, \xi_j) - 2 \log 8\mu_j^2 + 2s\phi_1(\xi_j) \right\} + O(1), \end{aligned}$$

y gracias a (2.2.1), (2.2.2) y (2.2.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \delta_j^2 \int_{\Omega} e^{u_j} U_i &= \int_{\Omega_j} \frac{8}{(1+|y|^2)^2} \left\{ u_i(\xi_j + \delta_j y) + H_i(\xi_j + \delta_j y) \right\} \\
 &= \int_{\Omega_j} \frac{8}{(1+|y|^2)^2} \left\{ (u_i(\xi_j + \delta_j y) - \log 8\mu_i^2 + \Gamma(\xi_j, \xi_i)) + (H_i(\xi_j + \delta_j y) - H_i(\xi_j)) \right\} \\
 &\quad + \int_{\Omega_j} \frac{8}{(1+|y|^2)^2} \left\{ (H_i(\xi_j) - H(\xi_j, \xi_i) + \log 8\mu_i^2) + G(\xi_j, \xi_i) \right\} \\
 &= 8\pi G(\xi_i, \xi_j) + 8\pi \log \frac{|\xi_i - \xi_j|^4}{(\delta_i^2 + |\xi_i - \xi_j|^2)^2} + O(1) \\
 &= 8\pi G(\xi_i, \xi_j) + O(1).
 \end{aligned}$$

Evaluemos ahora el último término en $J_s[U]$. Se tiene

$$\int_{\Omega} e^{-s\phi_1} e^U = \sum_{j=1}^m \int_{A_j} e^{-s\phi_1} e^U + O(s^{4\beta m} \delta^2),$$

donde $A_j \equiv B(\xi_j, \frac{1}{2s^\beta})$. Ahora, de igual manera que en el Lema 2.6

$$\begin{aligned}
 \int_{A_j} e^{-s\phi_1} e^U &= \int_{A_j} e^{-s\phi_1} \exp \left\{ u_j + H_j + \sum_{k \neq j} (G(\cdot, \xi_k) + O(s^{4\beta} \delta_j^2)) \right\} \\
 &= \int_{A_j} e^{-s\phi_1(x)} e^{s\phi_1(\xi_j)} \frac{8\delta_j^2}{(\delta_j^2 + |x - \xi_j|^2)^2} (1 + O(|x - \xi_j|)) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{8}{(1+|y|^2)^2} (1 + O(s\delta_j|y|)) + o(1) \\
 &= 8\pi + o(1).
 \end{aligned}$$

Finalmente, usando la elección de los μ_j hecha en (2.1.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
 J_s[U] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla U|^2 - \int_{\Omega} e^{-s\phi_1} e^U \\
 &= 4\pi \sum_{j=1}^m \left\{ H(\xi_j, \xi_j) + \sum_{i \neq j} G(\xi_i, \xi_j) - 2 \log 8\mu_j^2 + 2s\phi_1(\xi_j) \right\} + O(1) \\
 &= 4\pi\varphi_m(\xi) + 8\pi s \sum_{j=1}^m \phi_1(\xi_j) + O(1),
 \end{aligned}$$

uniformemente para $\xi \in \mathcal{O}_s$ si $s \rightarrow +\infty$. Esto completa la demostración de (4.3.1). ■

4.3.2. Forma Asintótica de la Energía

Las cotas para la solución ψ_{ξ} del Problema (4.1.1) en la Proposición 4.1 y una expansión de Taylor de \mathcal{F}_s en el dominio expandido Ω_s similar al hecho en [PKM05] no arroja la siguiente cercanía de

\mathcal{F}_s con la función $J_s[U]$.

Lema 4.4. Para puntos $\xi \in \mathcal{O}_s$ tenemos la siguiente expansión

$$\mathcal{F}_s(\xi) = J_s[U(\xi)] + \theta_s(\xi), \quad (4.3.2)$$

donde $|\theta_s| = O(s^K e^{-s/2})$, para una constante fija $K > 0$, de manera uniforme en s .

Demostración. Notemos que $I_s[V] = J_s[U]$ e $I_s[V + \psi_{\xi'}] = J_s[U + \hat{\psi}_{\xi}] = \mathcal{F}_s(\xi)$.² Luego,

$$\theta_s(\xi) = I_s[V + \psi_{\xi'}] - I_s[V].$$

Tomando en cuenta que $DI_s[V + \psi](\psi) = 0$, donde $\psi = \psi_{\xi'}$, una expansión integral de Taylor nos arroja

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) &= \int_0^1 D^2 I_s[V + \psi](\psi)(\psi)(1-t) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega_s} \{N(\psi)\psi + R\psi + W(1 - e^{t\psi})\psi^2\} dy \right) (1-t) dt \end{aligned}$$

Pero

$$\|N(\psi)\|_{\infty} \leq C\|\psi\|_{\infty}^2, \quad \int_{\Omega_s} R\psi \leq \|R\|_* \|\psi\|_{\infty} \quad \text{y} \quad \|\psi\|_{\infty} \leq Cs^{2\beta+1}e^{-s/4},$$

de donde para alguna constante $K > 0$ fija,

$$|\theta_s(\xi)| \leq Cs^K e^{-s/2},$$

que era lo deseado. ■

²Recordemos que $V(y) = U(\delta y) - 2s$.

Capítulo 5

La veracidad de la conjetura

5.1. Un enunciado más preciso

Estamos *ad-portas* de poder demostrar el resultado principal de este trabajo. Para ello, recurriremos a los Lemas anteriormente demostrados. Sin embargo, primero estableceremos un resultado más detallado para el Teorema 1.1. Para ello, consideremos el conjunto

$$S \equiv \{x \in \Lambda \mid \phi_1(x) = 1\}. \quad (5.1.1)$$

El resultado del Teorema 1.1 es una consecuencia directa del resultado siguiente, más preciso.

Teorema 5.1. *Dado cualquier entero m existe $s_0 > 0$ suficientemente grande tal que el Problema (1.5.2) tiene una solución u_s positiva en Ω de la forma*

$$u_s(x) = U(\xi^s) + \tilde{\psi}_s, \quad (5.1.2)$$

la cual posee exactamente m puntos de máximo local $\xi_1^s, \dots, \xi_m^s \in \Lambda$, satisfaciendo cuando $s \rightarrow \infty$

(i) $\text{dist}(\xi_j^s, S) \rightarrow 0$ y $|\xi_i^s - \xi_j^s| \geq \frac{1}{s^{m(m+1)}}$ si $i \neq j$;

(ii) $\|\tilde{\psi}_s\|_\infty \rightarrow 0$.

Observación 5.2. *Esta construcción realmente arroja que $1 - \phi_1(\xi_j^s) \leq s^{-\frac{1}{2}}$. Luego si S está constituido sólo por un punto de máximo \bar{x} no-degenerado¹ obtendremos que*

$$|\xi_j^s - \bar{x}| \leq Cs^{-\frac{1}{4}}. \quad (5.1.3)$$

¹Esto es, la matriz Hessiana de ϕ_1 en el punto crítico \bar{x} es invertible.

Esta es precisamente una cota superior para las distancias de los puntos de máximo ξ_j^s de la solución u_s , y se basa en que la matriz Hessiana de u_s es definida negativa. Luego, para s grande,

$$\phi_1(\xi_j^s) = 1 + D^2\phi_1(\bar{x})[\bar{x} - \xi_j^s]^2 + o(|\bar{x} - \xi_j^s|^2) \leq 1 - \alpha|\bar{x} - \xi_j^s|^2 + o(|\bar{x} - \xi_j^s|^2),$$

para una constante pequeña y fija $\alpha > 0$. De aquí,

$$|\bar{x} - \xi_j^s|^2 \leq Cs^{-1/2},$$

de donde obtenemos (5.1.3).

5.2. La demostración del Teorema 5.1

Demostración. De acuerdo al Lema 4.2, $U(\xi^s) + \hat{\psi}_{\xi^s}$ es una solución del problema (1.5.2) si $\xi^s \in \mathcal{O}_s$ es un punto crítico del funcional \mathcal{F}_s definido en (4.2.3). Notemos que en particular

$$\|\hat{\psi}_{\xi^s}\| \rightarrow 0$$

como conclusión de la cota (4.1.2). Esto prueba (ii). Luego es suficiente establecer que \mathcal{F}_s alcanza su valor máximo en el interior de \mathcal{O}_s para todo s suficientemente grande. Para esto probaremos que

$$\sup_{\xi \in \partial\mathcal{O}_s} \mathcal{F}_s(\xi) < \sup_{\xi \in \mathcal{O}_s} \mathcal{F}_s(\xi). \quad (5.2.1)$$

Primera Parte. Primero obtengamos una cota inferior para $\sup_{\xi \in \mathcal{O}_s} \mathcal{F}_s(\xi)$. Fijemos un punto $\bar{x} \in S$ y definamos

$$\xi_j^0 \equiv \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{s}}\hat{\xi}_j,$$

donde $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m)$ es un polígono m -regular en \mathbb{R}^2 . Claramente $\xi^0 \in \mathcal{O}_s$ pues $\phi_1(\xi_j^0) = 1 + O(s^{-1})$. Luego

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathcal{O}_s} \mathcal{F}_s(\xi) &\geq J_s(U(\xi^0)) + \theta_s(\xi^0) \\ &= 8\pi \left\{ \sum_{i \neq j}^m 2 \log |\xi_i^0 - \xi_j^0| + s \sum_{j=1}^m \phi_1(\xi_j^0) \right\} + O(1) \\ &\geq 8\pi m \left\{ -(m-1) \log s + s \right\} + O(1) \end{aligned}$$

Así,

$$\sup_{\xi \in \mathcal{O}_s} \mathcal{F}_s(\xi) \geq 8\pi ms - 8\pi m(m-1) \log s + O(1). \quad (5.2.2)$$

Segunda Parte. Establezcamos una *cota superior* para $\mathcal{F}_s(\xi)$ si $\xi \in \partial\mathcal{O}_s$. Aquí hay solamente dos posibilidades: o bien (1) existen índices $i_0, j_0, i_0 \neq j_0$ tales que $|\xi_{i_0} - \xi_{j_0}| = s^{-\beta}$, o bien (2) existe i_0 tal que $1 - \phi_1(\xi_{i_0}) = \frac{1}{\sqrt{s}} > 0$.

Para el primer caso, tenemos la siguiente cota superior

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(\xi) &\leq 8\pi \left\{ -2\beta \log s + s \sum_{j=1}^m \phi_1(\xi_j) \right\} + O(1) \\ &\leq 8\pi m \left\{ s - \frac{2}{m} \beta \log s \right\} + O(1) \end{aligned}$$

Para el segundo caso, $1 - \phi_1(\xi_{i_0}^s) \leq \frac{1}{2\sqrt{s}}$. Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(\xi) &\leq 8\pi \left\{ O(\log s) + s \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{s}} + (m-1) \right) \right\} \\ &\leq 8\pi s \left(m - \frac{1}{2s^{1/2}} \right) + O(\log s). \end{aligned}$$

A esta altura *haremos la elección* $\beta > m^2 + m$ en la definición de \mathcal{O}_s . La relación (5.2.1) sigue inmediatamente combinando las estimaciones (5.2.2), (5.2.3), (5.2.3) y tomando s suficientemente grande. Esto concluye la demostración. \blacksquare

Capítulo 6

Conclusiones, problemas abiertos

6.1. Conclusiones

A través del desarrollo de este trabajo de memoria hemos podido apreciar de manera concluyente que el Problema (1.1.1) es *también* un ejemplo de un problema de Ambrosetti-Prodi que envuelve criticalidad en dimensión dos. La razón queda expresada en la aparición de límites singulares, pues si u es solución de (1.1.1) entonces $u - \frac{s}{\lambda_1} \phi_1 - \rho$ satisface

$$\begin{cases} \Delta u + k(x) \exp \left\{ -\frac{s}{\lambda_1} \phi_1 \right\} e^u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\rho = (-\Delta)^{-1}h$ en $H_0^1(\Omega)$ y $k(x) = e^{-\rho}$. Esta corresponde precisamente a una ecuación tipo Liouville pero con un coeficiente isotrópico de convergencia *no uniforme*, pero aún así presenta concentración singular múltiple cuando el parámetro s tiende a infinito. Esto debiese estar de alguna medida conectado con el fenómeno asociado a (1.5.3) pero donde $k(x)$ se reemplaza por $|x|^\alpha k(x)$, peso que resulta de ecuaciones tipo Liouville con fuentes singulares. Avances importantes han sido obtenidos en materia de entender soluciones con peaks, ver por ejemplo [T05] y las referencias contenidas allí.

Pero principalmente, hemos podido dar **una respuesta positiva a la conjetura de Lazer-McKenna** para el Problema (1.1.1). Esto es, dada cualquier $m \geq 1$, existen al menos m soluciones de (1.1.1) para $s > 0$ suficientemente grande. Más aún, estas soluciones pueden ser descritas de manera explícita: ellas presentan concentración **múltiple** alrededor de los puntos de valor máximo de ϕ_1 . En particular, asociado a *cualquier* punto aislado de máximo local ξ_0 de ϕ_1 , tendremos el fenómeno de múltiples peaks en torno a este punto, es decir $e^{u_s} \rightarrow 8\pi m \delta_{\xi_0}$. En este sentido, hemos podido dar una respuesta completa del problema en términos de concentración interior en peaks.

Por otro lado, notemos que el análisis realizado es casi completamente análogo a lo realizado en [PKM05]. Si bien es cierto, ambos problemas son de naturaleza totalmente distinta, en el fondo,

estos dos problemas comparten características de similitud notables. Como se ve a lo largo de este trabajo, las ideas usadas son las mismas, sin embargo hay pequeñas diferencias, que se producen por tratarse de un problema de concentración múltiple, pero que son estándares, ver [KW00], [WYZ06]. Por ejemplo, las demostraciones se dificultan, especialmente la inversión del operador linealizado, debido a la fuerte interacción entre las componentes del ansatz U que se encuentran razonablemente cercanas. Más aún, nuestros cálculos son absolutamente novedosos con respecto a los hechos para demostrar la conjetura de Lazer-McKenna en más dimensiones. En cierta forma, la dimensión dos permite dar más regularidad a las soluciones y por lo tanto permite estimarlas de manera más precisa, como se puede apreciar en nuestra elección de las normas involucradas en el problema lineal.

La moraleja detrás de nuestro resultado es que la concentración múltiple en el caso isotrópico puede ser gatillada por el hecho que *el coeficiente frente a e^u no converge a cero uniformemente sobre $\bar{\Omega}$* . En otras palabras, la múltiple concentración “quiere tomar lugar” donde el coeficiente precisamente se anule más rápido en s . A modo de ejemplo, en nuestro resultado,

$$e^{-s\phi_1(x)} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ 1 & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{cuando } s \rightarrow +\infty,$$

y converge más rápidamente en los puntos de máximo de ϕ_1 , donde precisamente se produce la concentración.

6.2. Últimas consideraciones, problemas abiertos

A través de estas líneas pretendemos bosquejar la gama de observaciones y problemas abiertos que quedaron después de probar nuestros resultados.

Para partir, y como ya habíamos mencionado anteriormente, la elección de ϕ_1 como la función positiva en el lado derecho de (1.1.1) es hecha sólo por razones históricas pero es ciertamente no esencial. Podríamos en principio reemplazarla por ejemplo por cualquier función positiva ϕ , donde ahora la concentración tomará lugar alrededor de máximos locales de la función $(-\Delta)^{-1}\phi$ en $H_0^1(\Omega)$.

Notemos también que un resultado similar al Teorema 1.1 es también válido para el problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u + e^u = s\phi_1 + h(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

siempre que $\lambda < \lambda_1$. En este caso, $\nu = \lambda$ y $\mu = +\infty$. La razón básica de la veracidad de este resultado descansa en que $\Delta + \lambda$ satisface el *Principio del Máximo*. La función de Green debería ser consistentemente reemplazada por la asociada a este último operador, esto es, para $y \in \Omega$,

$$\begin{cases} \Delta G_\lambda(x, y) + \lambda G_\lambda(x, y) = \delta(x - y), & x \text{ en } \Omega, \\ G_\lambda(x, y) = 0 & x \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sin embargo, este procedimiento no es cierto en el caso $\lambda \geq \lambda_1$, por la posible bifurcación en $\lambda = \lambda_1$. Esta es una de las razones por las que quisiésemos formular los siguientes problemas abiertos.

1. **Otras soluciones que verifican la conjetura de Lazer-McKenna.** En efecto, la resolución de (6.2.1) en el caso dos dimensional y no-linealidades subcrítica y crítica, para $\lambda \geq \lambda_1$, está aún abierta. El caso de dimensión $N \geq 3$ fue resuelto por Dancer y Yan en [DY05].
Por otro lado, Li, Yan y Yang [LYY206] mostraron la existencia de soluciones para (1.1.1) concentrándose cerca del borde de Ω . El caso dos dimensional de este resultado –ya sea crítico o subcrítico– no ha sido resuelto aún.
2. **Concentración múltiple en el problema de Brezis-Nirenberg anisotrópico.** La técnica desarrollada durante este trabajo posee en el fondo una columna vertebral propia de los problemas de concentración múltiple. En este sentido, para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 4$, nos gustaría resolver el problema

$$\begin{cases} \nabla \cdot (a(x)\nabla u) + \lambda a(x)u + a(x)u^p = 0, & \text{en } \Omega, \\ u > 0, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.2.2)$$

donde $a(x) \geq a_0 > 0$ es una función positiva $\bar{\Omega}$, $p = \frac{N+2}{N-2}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro pequeño. Más específicamente, nos gustaría encontrar soluciones con peaks que se concentren en torno a puntos de máximo o mínimo de la función $a(x)$ cuando $\lambda \rightarrow 0$, ya sea positivo o negativo. El problema aquí es encontrar una buena aproximación de la solución de (6.2.2). Más aún, se puede ver que la dimensión del dominio jugará un rol importante en la regularidad de las soluciones y las aproximaciones, de donde las aproximaciones tipo [PKM05] no tendrán sentido.

Bibliografía

- [AH79] Amann, H., y Hess, P., *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Royal Soc. Edinburg **84A** (1979), 145–151.
- [AP73] Ambrosetti, A., y Prodi, G., *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl., **93** (1973), 231–247.
- [BPa98] Baraket, S., y Pacard, F., *Construction of singular limits for a semilinear elliptic equation in dimension 2*, Calc. Var., **6** (1998), No. 1, 1–38.
- [BPo75] Berger, M., y Podolak, E., *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1975), 837–846.
- [BMP03] Breuer, B., McKenna, P. J., y Plum, M., *Multiple solutions for a semilinear boundary value problem: a computational multiplicity proof*, J. Differential Equations **195** (2003), 243–269.
- [BM91] Brezis, H., y Merle, F., *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions*, Comm. Partial Diff. Equations, **16** (1991), No. 8-9, 1223–1253.
- [CL91] Chen, W., y Li, C., *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*. Duke Math. J. **63** (1991), No. 3, 615–622.
- [CL03] Chen, C.C., y Lin, C.S., *Topological degree for a mean field equation on Riemann surfaces*. Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), No. 12, 1667–1727.
- [CK89] A. Castro, A., y Kurepa A., *Radially symmetric solutions to a superlinear Dirichlet problem in a ball with jumping nonlinearities*, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 353–372.
- [D78] Dancer, E., *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures et Appl. **57** (1978), 351–366.
- [D89] Dancer, E., *A Counterexample to the Lazer-McKenna Conjecture*, Nonlinear Anal., **13** (1989), 19–21.
- [DY05] Dancer, E. N., y Yan, S., *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture*, J. Diff. Equations, **210** (2005), 317–351.
- [DY06] Dancer, E. N., y Yan, S., *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture II*, Comm. PDE, **30** (2005), 1331–1358.

- [D84] De Figueiredo, D., *On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem*, *Nonlinear Anal.*, **8** (1984), 655–665.
- [DY99] De Figueiredo, D., y Yang, J., *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems* *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **14** (1999), 59–80.
- [PFM03] del Pino, M., Felmer, P., y Musso, M., *Two-bubble solutions in the super-critical Bahri-Coron's problem*, *Calc. Var.*, **16** (2003), 113–145.
- [PKM05] del Pino, M., Kowalczyk M., y Musso, M., *Singular limits in Liouville-type equations*, *Calc. Var.*, **24** (2005), 47–81.
- [PMM92] del Pino, M., Manásevich, R., y Murúa, A., *On the number of 2π -periodic solutions for $u'' + g(u) = s(1 + h(t))$ using the Poincaré-Birkhoff theorem*, *J. Differential Equations*, **95** (1992), No. 2, 240–258.
- [PM06] del Pino, M., y Muñoz, C., *The two-dimensional Lazer-McKenna conjecture for an exponential nonlinearity*, *J. Differential Equations*, por aparecer.
- [EGP05] Esposito, P., Grossi, M., y Pistoia, A., *On the existence of blowing-up solutions for a mean field equation*, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlineaire* **22** (2005) 227–257.
- [EMP06] Esposito, P., Musso, M., y Pistoia, A., *Concentrating solutions for a planar elliptic problem involving nonlinearities with large exponent*, *J. Differential Equations*, **227** No.1 (2006) 29–68.
- [E00] Evans, L., *Partial Differential Equations*, *Grad. Stud. Math.* 19 AMS, Providence RI, 1998.
- [FW86] Floer, A., y Weinstein, A., *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, *J. Funct. Anal.*, **69** (1986), 379–408.
- [GT01] Gilbarg, D., y Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [HLM85] Hart, D., Lazer, A., y McKenna, P., *Multiple solutions of two-point boundary value problems with jumping nonlinearities.*, *J. Differential Equations* **59** (1985), No. 2, 266–281.
- [H82] Hofer, H., *Variational and topological methods in partial ordered Hilbert spaces*, *Math. Ann.*, **261** (1982), 493–514.
- [KW00] Kang, X., y Wei, J., *On interacting bumps of semi-classical states of nonlinear Schrödinger equations*, *Adv. Differential Equations* **5** (2000), No. 7-9, 899–928.
- [KW75] Kazdan, J.L., y Warner, F.W., *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **XXVIII** (1975), 567–597.
- [LM81] Lazer, A.C., y McKenna, P.J., *On the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, *J. Math. Anal. Appl.* **84** (1981), 282–294.
- [LM83] Lazer, A.C., y McKenna, P.J., *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **95A** (1983), 275–283.

- [LYY106] Li, G., Yan, S., y Yang, J., *The Lazer-McKenna conjecture for an elliptic problem with critical growth*, Calc. Var., por aparecer.
- [LYY206] Li, G., Yan, S., y Yang, J., *The Lazer-McKenna conjecture for an elliptic problem with critical growth, part II*, J. Differential Equations, **227** No. 1 (2006) 301–332.
- [LS94] Li, Y., y Shafrir, I., *Blow-up analysis for solutions of $-\Delta u = Ve^u$ in dimension two*, Ind. Univ. Math. J., **43** (1994), No. 4, 1255–1270.
- [MW01] Ma, L., y Wei, J., *Convergence for a Liouville equation*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), no. 3, 506–514.
- [NS90] Nagasaki, K., y Suzuki, T., *Asymptotic analysis for two-dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially dominated nonlinearities*, Asymp. Anal. **3** (1990) 173–188.
- [Ni00] Nirenberg, L., *Topics in Nonlinear Analysis*, Courant Lecture Notes in Math., **6**, Providence RI, 2a. ed., 2000.
- [RS86] Ruf, B., y Solimini, S., *On a class of superlinear Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions*, SIAM J. Math. Anal., **17** (1986), No. 4, 761–771.
- [S83] Solimini, S., *Existence of a third solution for a class of BVP with jumping nonlinearities*. Nonlinear Anal. **7** (1983), No. 8, 917–927.
- [S85] Solimini, S., *Some remarks on the number of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **2** (1985), 143–156.
- [T05] Tarantello, G., *A quantization property for blow up solutions of singular Liouville-type equations*. J. Funct. Anal. **219** (2005), No. 2, 368–399.
- [WYZ06] Wei, J., Ye, D., y Zhou, F., *Bubbling solutions for an anisotropic Emden-Fowler equation*, Calc. Var., por aparecer.

