Fractales: Geometría de belleza infinita

Alumno: Fernando Poblete Gómez
Profesor Guía: Jorge Soto Andrade

Introducción

" ¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo <frío> y <seco>?". Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol." Las nubes y otras formas de la naturaleza no presentan la forma regular de la geometría tradicional. Nunca se ha visto una montaña cónica, una nube con forma esférica..
Este problema se soluciona, en 1975, gracias a la geometría fractal. Con ella se pueden entender un sin fin de fenómenos que antes no se podían explicar. Pero lo más increíble de ella es que uno puede representar en una imagen las formas que la geometría tradicional no podía.

A grandes rasgos un fractal es una formula matemática, o un patrón cualquiera que se repite una infinidad de veces. Algunos son, como los llama Mandelbrot, "polvos inconexos", otros curvas y planos. Un rasgo fundamental de estos objetos es que su dimensión no tiene porque ser entera.

Todas las formas de la naturaleza mencionadas arriba son fractálicas. Otros ejemplos pueden ser la red pulmonar, los árboles, etc.

Para ilustrar mejor la idea de fractal se tratará de medir la franja costera de Chile. La manera de medirla se hará de la siguiente forma. Con un avión recorremos la costa de norte a sur y miramos el tacómetro, que dará un valor y será el de la costa. Pero qué pasa si en vez de un avión, es un ser humano quien recorre el litoral. Descubriremos que la medida es mayor, más aún, si en vez de ser un hombre ahora es una hormiga. Veremos que la longitud vuelve a aumentar, y con gran sorpresa nuestra, si seguimos achicando el instrumento de medición descubriremos que la longitud se hace cada vez mayor sin tener un límite. Esto se debe a que mientras más fina es nuestra capacidad de medir, descubrimos que se nos presenta una cantidad mayor de detalles, y lo que nosotros creíamos una curva suave desde el avión, se nos transforma en algo fragmentado a medida que nos adentramos en ella, y lo que le parecía una curva fragmentada a la hormiga, le será más aún a una bacteria y podemos seguir así ad infinitum.

Concepto

En 1975 Benoit Mandelbrot publica un ensayo titulado "Les objects fractals: Forme, hasard et dimension", en este se acuña la palabra fractal, término que inventó a partir del latín "fractus".

Pero qué es realmente este extraño objeto matemático. Pues bien en 1985, el mismo Mandelbrot, publica "the fractal geometry of nature", libro en el cual aparece la siguiente definición "un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica". Sin embargo, esta definición no es definitiva, ya que un sin número de fractales queda fuera de ellos si aplicamos esta clasificación. Otras definiciones han sido propuestas, pero nunca han logrado agrupar a todos estos objetos. Por esto mismo creo que es conveniente dar ciertas características que permitan identificar un fractal. Estas son:

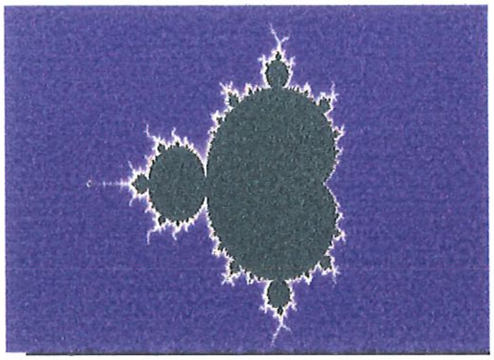
1.) Un fractal F posee detalle a todas las escalas de observación, es decir, si yo hago un zoom a éste nunca pierdo nitidez en la imagen.
2.) No se puede describir a F con geometría euclidiana.
3.) La dimensión fractal de F es mayor que su dimensión topológica.
4.) F posee autosemejanza, es decir la parte es parecida al todo. Un buen ejemplo de esto y de la vida real es el helecho.

Tipos de fractales

Existen 4 tipos básicos de fractales. Estos son:

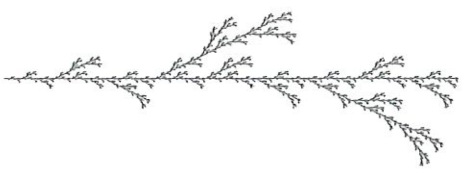
1- <u>Algoritmos de escape:</u> Para cada punto se calculan una serie de valores mediante la iteración de una formula, hasta que se cumple una condición de salida. Los fractales generados de esta manera necesitan millones de operaciones, es por eso que sólo se pueden generar con la ayuda de un PC. El conjunto de Mandelbrot pertenece a este tipo y su condición de salida es $Z <= 2$.

Conjunto de Mandelbrot



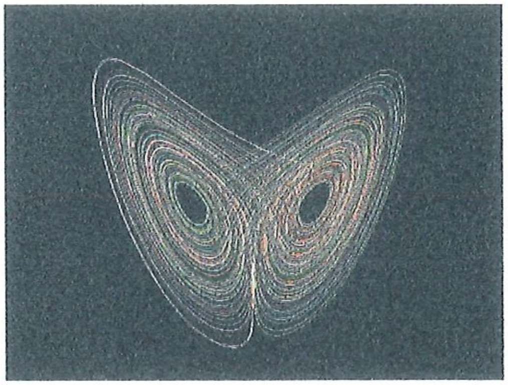
2- <u>Funciones iteradas:</u> Las ifs, diseñadas por M. Barnsley, se basa en el principio de autosemajanza. En un fractal, podemos observar que una parte de éste guarda relación con el todo. Un ejemplo de eso es el siguiente fractal.

Planta en su iteración 5



3- <u>Orbitas caóticas:</u> Estos fractales tienen la particularidad que aunque su nombre indica que son caóticas, poseen un punto donde todas confluyen, un atractor. Una de las más famosas es el atractor de Lorentz, que se ilustra en la siguiente imagen.

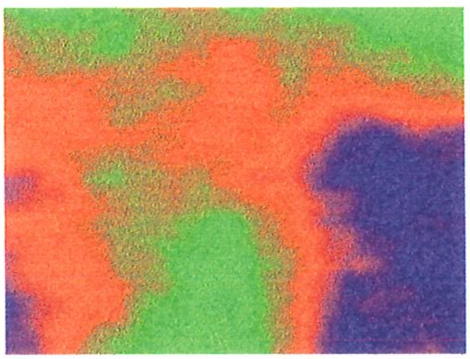
Atractor de Lorentz



4- Aleatorios y celulares: Los primeros funcionan mediante el azar, lo que les da la característica de únicos e irrepetibles. Un ejemplo de estos es el plasma.

Los autómatas celulares funcionan mediante reglas muy básicas que van coloreando una zona. Por ejemplo, si un pixel está rodeado por más de cuatro pixeles negros (vivos) este muere por sobrepoblación, quedando blanco, si esta entre cuatro y dos vive, dejando el pixel de color negro. Ahora, si tiene menos de dos muere por soledad, dejando el espacio de color blanco. Esto se puede aplicar como modelo a la ecología de poblaciones y otros campos. Un ejemplo de esto es el autómata celular

Plasma



Celular

Dimensión Fractal

Ahora, después de haber dado un pequeño pincelazo a lo que es un fractal, nos vamos a introducir en lo que se refiere a su dimensión. La dimensión fractal sirve para clasificar y caracterizar los objetos fractales.

Para esto debemos tener una idea de lo que es dimensión. El único problema es que no hay sólo una idea de dimensión. Por ejemplo, alguien puede decir que dimensión es la cantidad de número reales necesarios para describir a un punto en el espacio. Pero aquí nos encontramos con un problema. Según esta definición un número finito de puntos es unidimensional, al igual que un conjunto infinito de estos, la recta, que obviamente tiene una diferencia abismal con nuestro conjunto finito. Otro problema que encontramos con esta definición, y que está muy arraigada en el sentido común, es el siguiente caso: Imaginamos una figura formada por las aristas de un cubo. La gran mayoría de las personas responde automáticamente, que este objeto posee dimensión tres, lo que está de acuerdo con nuestra definición de arriba, pero lamentablemente, éste sólo posee dimensión uno, ya que esta construido sobre puras líneas. Ahora, si formamos al objeto por sus caras posee dimensión dos. Únicamente si se incluye su interior es tridimensional. Este error surge justamente porque las tres figuras solo pueden visualizarse en un espacio euclidiano de tres dimensiones.

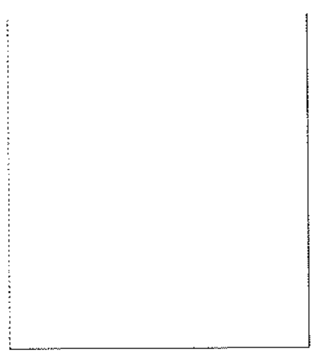
Otra manera de definir dimensión sería de acuerdo al grado de libertad de movimiento. Entendiéndose esto como el número de direcciones ortogonales que yo puedo tomar. Por ejemplo, un tren se mueve en una dimensión, sólo puede avanzar o retroceder, un barco en dos, puede avanzar y retroceder además de ir a izquierda o derecha. Por último, un avión vive en un espacio de tres dimensiones. Puede ir arriba o abajo, y además tomar las direcciones de los otros dos. Y si tomamos los puntos finitos anteriores observamos que poseen dimensión cero y resolvemos el problema. Al parecer, con ésta, encontramos una definición más adecuada. Sin embargo, tomemos a la figura formada por las aristas del cubo, ¿Cuál es la dimensión global de este espacio?, Vemos que tiene dos dimensiones diferentes, de acuerdo a donde estemos ubicados. Si estamos en una de sus aristas tenemos que la dimensión es dos, ahora si no es así, la dimensión es uno. Pero ¿cuál de las dos escogemos?. Difícil decisión.

Para solucionar esto, daremos una definición que de pautas fijas para establecer la dimensión global de un espacio a partir de sus diferentes valores locales. En realidad es su valor máximo, pero lo que cambia es la manera determinar la dimensión.

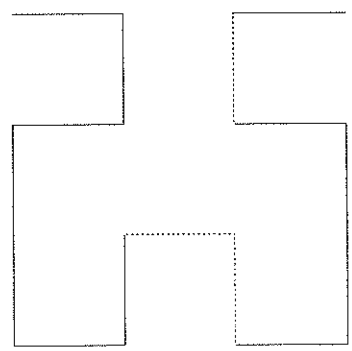
Para calcular la dimensión local de un espacio debemos encontrar el objeto de menor dimensión que posea la capacidad de dividir el espacio que se estudia en dos. A este objeto se le suma uno y encontramos la dimensión del espacio. Así, una recta posee dimensión 1, ya que con un punto, dimensión 0, podemos dividirla en dos. Para que todo concuerde definimos al espacio vacío con dimensión –1, y nuestro conjunto de puntos posee dimensión 0 (-1 + 1 = 0). Esta forma de entender la dimensión se conoce como "Dimensión Topológica". Acerca de esto, Geral Edgar en su libro "Measure, topology and fractal geometry", lo ilustra muy bien: *"Si tenemos un punto en un espacio tridimensional, podemos usar un pequeño cubo como* *prisión. El cubo esta formado por seis caras planas. Necesitamos saber que estas caras son bidimensionales. Un punto que vive en estas caras puede ser sometido a presión usando una pequeña circunferencia. Así, decir que las caras de un cubo son bidimensionales requiere saber que una circunferencia es unidimensional. Un punto que vive en una de las circunferencias, puede ser aprisionado haciendo uso de dos puntos como muros de la prisión. Necesitamos saber que un conjunto reducido a dos puntos es de dimensión cero. Finalmente un punto que vive en el conjunto de dos puntos es ya incapaz de moverse. No necesitamos muros para aprisionarlos. Estamos, por definición ante un conjunto de dimensión cero."*

Una propiedad interesante en topología es la conservación del valor de la dimensión cuando se realiza una transformación homotópica. Es decir si deformamos un objeto sin romperlo, perforarlo o soldarlo, este conserva su dimensión. Las siguientes figuras son un ejemplo de esto

Primera Iteración

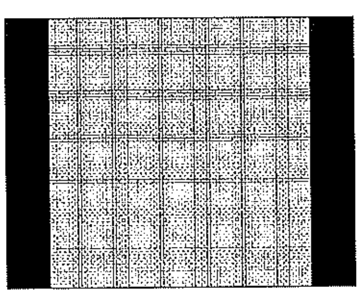


Segunda Iteración

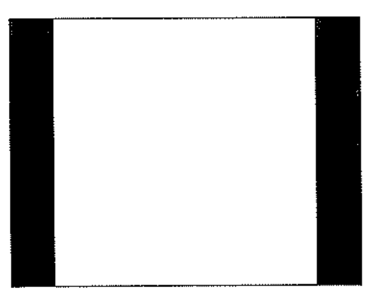


Pero aquí ocurre un hecho curioso, si iteramos hasta el infinito el patrón de esta curva nos damos cuenta que logra llenar todo el espacio como si fuese una superficie, es decir, los puntos de esta curva pasan por todos los puntos de la superficie, entonces no seria más lógico considerar a este objeto con dimensión dos. En la siguiente figura se ilustra lo dicho anteriormente.

Novena Iteración



Décima Iteración



Luego de ver lo que era dimensión topológica, pasaremos a la dimensión Fractal o de Hausdorff-Besicovitch, válida solo para objetos estrictamente autosemejantes.
Un segmento de longitud l se puede construir con dos segmentos de longitud l/2 cada uno. Un cuadrado de lado l se puede construir con 2^2 cuadrados de lado l/2. Un cubo de lado l se puede construir con 2^3 objetos cúbicos de lado l/2.

Generalizando, una estructura autosemejante de tamaño Tse puede construir con N objetos de tamaño más pequeño t. De aquí obtenemos que $\mathbf{N=(T/t)^D}$.

En general podemos permitir que N y t sean números enteros cualesquiera. Esto implica que no necesariamente D debe ser un número entero.

Ahora si despejamos D de la formula de arriba obtenemos:

$$\mathbf{N = (T/t)^D}$$

$$\mathbf{Log\ N = D * Log\ T/t}$$

$$\mathbf{D = Log\ N/Log\ T/t}$$

Pero si consideramos que el tamaño T es la unidad, tenemos que:

$$\mathbf{D = log(N)/log(1/t)}$$

Fractales más comunes

Existe un gran número de fractales, de los cuales algunos poseen características muy interesantes. Aparte de la dimensión no entera, muchos de ellos poseen área finita, pero perímetro infinito, así la distancia entre dos puntos cualesquiera de la frontera una curva es infinita. Otra característica interesante es que alguna curvas ocupan todo el espacio del plano. Para entender mejor estas características daremos algunos ejemplos de fractales.

Conjunto triádico de Cantor

Este fractal fue descrito en 1883 por Georg Cantor y probablemente sea el fractal clásico más conocido e importante. Muchos otros fractales de alguna forma tiene relación con él.

El conjunto triádico de Cantor es un subconjunto de puntos del intervalo [0,1] para el cual definimos un algoritmo recursivo de construcción. Esto es, tomamos el intervalo [0,1] y eliminamos el segundo tercio de este, después tomamos los dos tercios restantes y con cada uno hacemos lo mismo que al primero. Entonces en la primera iteración tenemos
C_0 = [0,1], en la segunda iteración C_1= [0,1/3]U[2/3,1], en la tercera iteración el conjunto queda C_2=[0,1/9]U[2/9,1/3]U[2/3,7/9]U[8/9,1] y así sucesivamente quitamos el tercio central de cada nuevo subintervalo generado.

Conjunto de cantor en su tercera iteración.

La dimensión topológica de este conjunto es 0. ¿Pero qué sucede con la dimensión de Hausdorff?. Como se ve, este conjunto de cantor C puede obtenerse como reunión de dos semejantes. Cada uno de ellos versión reducida de C en la proporción t = 1/3. Por lo tanto su dimensión queda:

$$D = \log(N)/\log(1/t)$$

$$D = \log(2)/\log(3) = 0{,}63092.$$

Acá nos damos cuenta que su dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica, lo que parece muy razonable ya que si el conjunto posee la capacidad del continuo, esta mas cerca del segmento [0,1], que el de un conjunto finito de este.

Sus características más especiales son que la longitud del conjunto es 0, pero el número de puntos que lo formas es infinito.

La curva de Peano

El fractal siguiente tienen la propiedad muy especial de llenar el espacio que ocupa en su iteración infinita.

El algoritmo de construcción de la curva de Peano es el siguiente. Partimos de un segmento de longitud unidad y deducimos 9 segmentos de un tercio.

Esta curva tiene dimensión topológica 1, pero si llena el espacio que ocupa, ¿no sería más lógico asignarle la dimensión de una superficie?. Pues bien, tenemos que en la etapa p, obtenemos un conjunto de 9^p cuadrados, cada uno de ellos de lado 3^{-p}. Este objeto es estrictamente auto semejante y puede obtenerse de la reunión de 9 conjuntos semejantes a p, cada uno de ellos reducido en la proporción t = 1/3.

Calculando su dimensión fractal tenemos que:

$$D = \log(N)/\log(1/t)$$

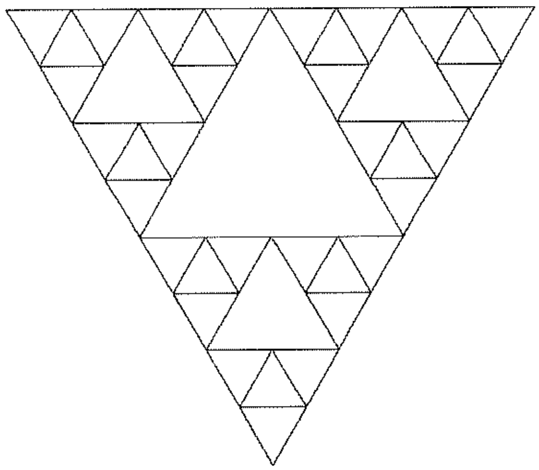
$$D = \log(9)/\log(3) = 2$$

Sus características más singulares son que posee dimensión 2 y su perímetro es infinito.

Triángulo de Sierpinski

Este fractal es uno de los mas conocidos del mundo y uno de los más fáciles de construir. Debido a esto se hará un estudio más detallado del fractal. Para éste su algoritmo de construcción es el siguiente: Se toma un triángulo equilátero de lado unidad, luego tomamos los puntos medios de este triángulo y los unimos. En esta parte se forman 4 triángulos equiláteros de los cuales excluimos al que esta invertido con respecto al principal.

Triángulo de Sierpinski en su tercera iteración



Primero calculamos el número de triángulos de la n-ésima iteración.

Iteración	**Numero de triángulos**
0	$1=3^0$
1	$3=3^1$
2	$9 = 3^2$
n	3^n

Ahora calculamos la longitud del lado de un triángulo en su n-ésima iteración.

Iteración	**Longitud**
0	1
1	$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^1$
2	$\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$
n	$(\frac{1}{2})^n$

Finalmente hacemos lo mismo con el área de los triángulos, partiendo de uno de área A_0.

Iteración	**Área**
0	$A_0 = A_0 * (3/4)^0$
1	$A_0 * (3/4)^1$
2	$A_0 * (3/4)^2$
n	$A_n = A_0 * (3/4)^n$

Para obtener el área final del triángulo, tomamos el término general y aplicamos límite para n infinito.

Lim $A_0*(3/4)^n = A_0*\text{Lim } (3/4)^n = A_0*0=0$

Su dimensión topología es 1

Y su dimensión fractal es:

$$D = \text{Log}(N)/\text{Log}(1/t)$$

$$D = \log(3)/\text{Log}(2) = 1{,}58496.$$

Sus principales características son que posee superficie 0 y perímetro infinito.

Isla triadica de Koch

Al igual que el triángulo de Sierpinski, este es otro monstruo matemático, con características realmente sorprendentes:

1- Su área es infinita pero el perímetro de ésta es infinito.

2- Es una curva continua. En su trazado no existe ningún punto de intersección.

3- No es posible trazar una tangente en su perímetro. Es decir, no es posible derivarla en ningún punto.

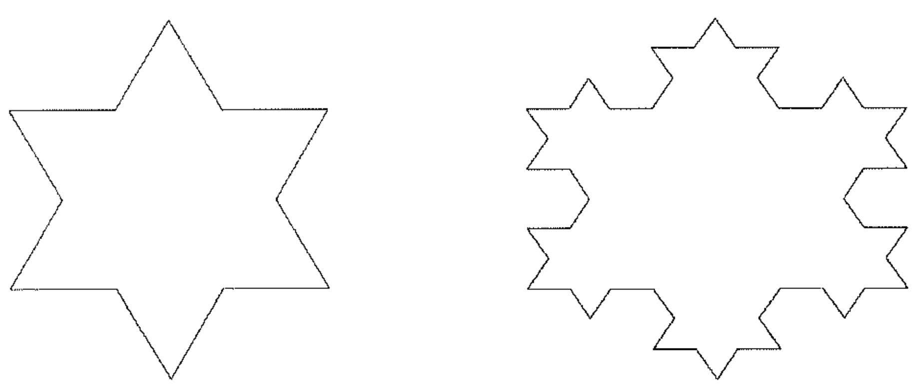
4- La curva infinita limita en su interior con un círculo al igual que su exterior.

5- La longitud entre dos puntos es infinita.

Para entender mejor estas propiedades analizaremos de manera detallada su construcción.

El algoritmo de creación es el siguiente. Tomamos un triángulo equilátero de longitud unidad. A cada lado se añade un nuevo triángulo de lado 1/3 del triángulo anterior.

Isla de koch para n igual 1 y 2.



Ahora comenzamos con el estudio de este algunas iteraciones para obtener una formula general para el numero de lados, longitud de un lado,.

Iteración	Lados	Longitud	N de triángulos
0	$3{*}4^0$	$(1/3)^0$	1
1	$3{*}4^1$	$(1/3)^1$	$12 = 9{*}1 + 3$
2	$3{*}4^2$	$(1/3)^2$	$120 = 9{*}12 + 12$
3	$3{*}4^3$	$(1/3)^3$	$1.128 = 9{*}120 + 48$
n	$3{*}4^n$	$(1/3)n$	$9{*}a_{(n-1)} + 3{*}4^n$

Obtenidas todas las formulas vamos a obtener el área total.

1- Calculamos la altura de un triángulo cualquiera en función de su lado:

$$h = (l^2 - (l/2)^2)^{1/2} = (3/4{*}l^2) = 3^{1/2}{*}l/2.$$

2- Ahora calculamos el área del triángulo:

$$A = B{*}h/2 = l{*}l{*}3^{1/2}/4 = l^2{*}3^{1/2}/4$$

Ahora sustituyo en l, la formula para n-ésima iteración.

$$A_{(n)} = 3^{1/2}/9^n{*}4$$

Ahora si multiplicamos la ecuación por el número de triángulos que se forman en la n-ésima iteración y le sumamos $A_{(0)}$ que no forma parte de la serie, obtenemos la ecuación de recurrencia del área del copo de Koch.

$$A_{(0)} + \Sigma[A_n{*}n^\circ \text{ de triángulo}] \text{ para n desde 1 a infinito}$$

$$3^{1/2}/4\Sigma[3^{1/2}/9^n{*}4{*}(9{*}a_{(n-1)}+\{3{*}4^{n-1}\})]$$

Calculando el límite de la serie anterior para obtener su área final y sumándole el área del triángulo original:

$$S_{(l)} = 8/5{*}A_{(l)} = 8/5{*}\, l^2{*}3^{1/2}/4$$

Es decir, ocho quintos del área del triángulo original, que como es de lado 1:

$$8/5{*}A_{(0)} = 8/5{*}\, 1{*}3^{1/2}/4 = 8{*}3^{1/2}/20$$

El copo de nieve de koch proviene de la curva de Koch. El algoritmo de ésta es igual al del copo sólo que en vez de tomar un triángulo tomamos una línea.

La dimensión topológica de la curva es 1 y su dimensión fractal es:

$$D = \log(N)/\log(t)$$

$$D = \mathrm{Log}(4)/\log(3) = 1.2619.$$

Conjunto de Mandelbrot

A pesar que este fractal no es del tipo autosemejante, se hará un estudio de él ya que es uno de los elementos matemáticos más espectaculares y complicados que se conocen. Es el emblema del caos, el orden dentro del desorden.

El conjunto de Mandelbrot proviene de otro conjunto, llamado conjunto de Julia. El conjunto de Julia se genera de la siguiente manera, $Z_{(n+1)} = (Z^2_{(n)} + c)$.Pues bien el Mandelbrot está formado por todos los valores de c que forman conjuntos de Julia conexos.

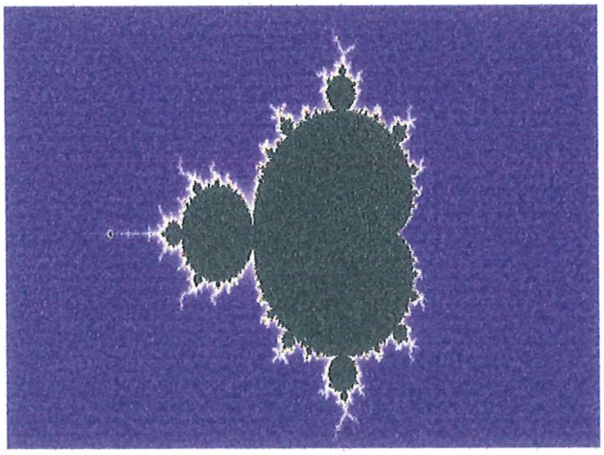
Por esto el conjunto de Mandelbrot es único.

La Fórmula que genera al conjunto de Mandelbrot es $Z_{(0)} = c$

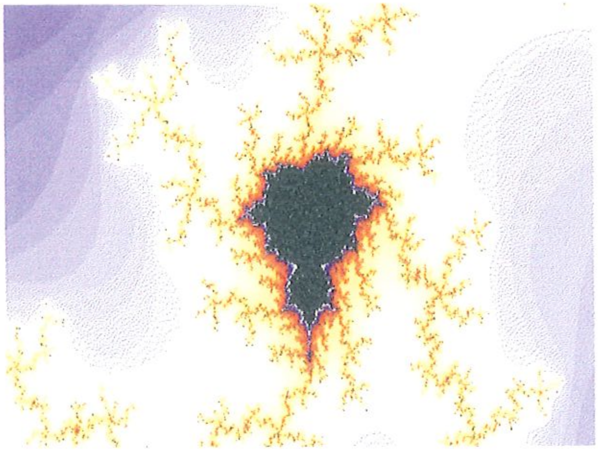
$Z_{(n+1)} = Z^2_{(n)} + c$, donde Z y c son complejos.

Una de las características de este fractal es que da la impresión, si uno da una rápida mirada, que posee una determinada estructura. Pero si uno hace un zoom, todo cambia, las formas se suceden, pero mantienen un parecido con el original.

Imagen del conjunto inicial



zoom en uno de los vertices.



Aplicaciones de la geometría fractal

Hasta ahora sólo se ha visto a la geometría fractal como un mundo que nace de caprichos matemáticos y el ingenio de algunos. Sin ninguna aplicación a la vida real. Pues bien, ahora veremos que estos objetos poseen un sin fin de utilidades, sísmica, facturación y fragmentación, meteorología, ecología, fisiología, planificación urbana, medicina, minería, astronomía, física, química, computación, y un largo etcétera, centrando el estudio en las aplicaciones a computación y ecología

Aplicación a la computación.

Compresión de imágenes

Una de las principales aplicaciones de los fractales a la computación tiene que ver con la compresión de imágenes.

La compresión fractal de imágenes se basa en un tipo de transformación afín, las llamadas contractivas y opera a través de un sistema de ecuaciones que trabajan en el plano, rotándolo trasladándolo y escalándolo. El conjunto de los coeficientes de estas ecuaciones se llama "mapa afín". Su principal característica es que el resultado en el plano euclideo es más pequeño que la imagen a la que se le aplicó la transformación.

El mapa de afinidad siempre converge en un punto fijo, al que se le llama atractor. El atractor, independiente de la imagen original siempre es el mismo.

Un tipo de transformaciones son las llamadas "ifs" (iterated function systems) y sucede lo mismo que con las otras, sólo que ahora en vez de converger en un punto lo hace en una imagen predefinida.

Hallar las transformaciones afines que definan una imagen del mundo real es utópico. Por eso se trabaja con lo que se llama "proceso de transformación fractal", que busca repeticiones en la imagen, a través de un mapeado con ifs locales.

Básicamente el proceso se puede resumir de la siguiente manera:

1- La imagen original se divide en subconjunto llamados regiones de dominio. En ellas se buscan las repeticiones.

2- Para cada región se escoge una región de rango.

3- A todas las regiones de rango se les aplica la transformación afín, eligiendo la región de rango y la transformación que más se aproximen a la región de dominio.

4- Los datos obtenidos, región de rango y transformación, son guardados en un fichero, ya que serán el patrón que se ocupara para la descompresión.

El proceso de descompresión es simplemente iterar un número de veces suficientes todas las transformaciones afines para lograr la imagen, que tendrá menor definición que la original ya que no es una réplica pixel a pixel de ésta.

Las ventajas de esta técnica son:

1- Menor espacio de almacenamiento y una mayor velocidad de transferencia de archivos en Internet.

2- Debido a la característica fractal de las imágenes, éstas no sufren la característica perdida de nitidez de la imagen al hacer un zoom.

3- Superior al método jpeg.

Generación de paisajes

Otra importante aplicación de la geometría fractal a la computación es la simulación de paisajes mediante fractales. Nubes, montañas, lagos, plantas, soles y un sin fin de objetos mas que pueden ser modelados mediante diferentes técnicas. Se analizara a grandes rasgos la técnica que ocupa a los "mbf" o movimiento browniano fraccionario.

Para poder comprender esto se necesita una reseña de lo que es el movimiento browniano.

El botánico ingles Robert Brown observó, con la ayuda de un microscopio el comportamiento de polen en agua, y se dio cuenta del intrincado movimiento de estas. En 1909 Perrin dio la siguiente descripción del movimiento browniano: " En una masa de fluido en equilibrio, por ejemplo el agua de una vaso, todas las partes están aparentemente en reposo. Si introducimos en ella, un objeto más denso, cae. Es cierto que cuanto menor es el objeto más lenta es la caída; pero cualquier objeto visible siempre acaba en el fondo de la vasija y por ningún motivo tiende a ascender de nuevo. Sin embargo, sería difícil observar durante mucho rato una preparación de partículas muy finas en un liquido sin observar un movimiento totalmente irregular. Se mueven, se detienen, vuelven a arrancar, suben, bajan, vuelven a subir, sin tender al reposo en lo mas mínimo"

Perrin también intuyó que las trayectorias que forman son continuas y no diferenciables. Intuición que fue comprobada luego por Norbert Wiener.

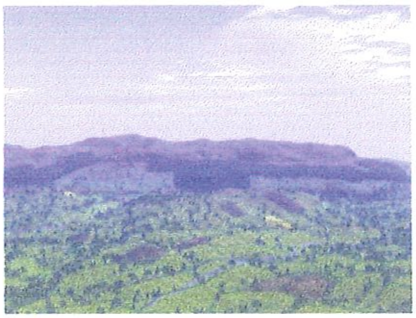
Ahora pasaremos a los mbf que se denotaran por $B_h(t)$, y que nacen del estudio de los caudales fluviales.

En la generación de imágenes el termino mas importante es el exponente H, gracias a el se puede modificar la forma de la curva del mbf. Él porque de esto requiere de una larga explicación que no viene al caso, pero que tiene gran importancia para el estudio de caudales, crecidas de los ríos, etc. lo importante es que existe una relación entre el termino H y la dimensión de la curva. Esta es $D = 1/H$. Es por eso que al modificar H, también modificamos la forma de la curva. Por ejemplo el movimiento browniano tiene $H=½$. A partir de este valor podemos definir tres tipos de mbf:

1- Persistentes: su H varía entre (1/2,1)
2- Sin persistencia: $H=½$.
3- Antipersistentes: H varía en el intervalo (0,1/2)

Si aumentamos el valor de H las curvas presentan mayor detalle que las que poseen un H menor. Estas curvas se asemejan mucho a las franjas costeras. Entonces si queremos tener una franja costera más lisa, ponemos un H chico. Por el contrario si queremos una franja costera, que asemeje por ejemplo al sur de chile, hacemos que el H sea alto.

Si llevamos esto mismo a tres dimensiones podemos controlar la rugosidad del terreno de la misma forma que controlábamos las líneas costeras, variando el valor de H. Mediante esta técnica se logran efectos realmente sorprendentes. Ahora si, por ejemplo, queremos hacer nubes, basta crear una montaña muy suave (H pequeño) y ponerle una textura parecida a la de una nube. Para ver la capacidad de esta técnica lo mejor es ver unas imágenes.




Aplicación a la ecología

Relación de escala de los seres vivos

Basta dar un simple vistazo al paisaje que nos rodea para darnos cuenta del enorme número de formas que existen en la naturaleza. Para una misma especie, por ejemplo el álamo, vemos que estas formas se suceden unas a otras, sin repetirse nunca. Ahora, si observamos con más sutileza nos daremos cuenta que si bien, las formas son muchas y diversas, estas presentan un patrón de comportamiento. Para nuestro ejemplo cada uno tiene algo en común con el otro. Entre árboles de distintas especies también sucede lo mismo. En los hombres y mamíferos en general también sucede. Pero ¿qué tienen en común mamíferos, vegetales y otros elementos de la naturaleza?. La respuesta a esta interrogante es una función matemática que relaciona el tamaño de su cuerpo con lo que son y hacen.

Esta función se basa en que el organismo debe alimentar a todas sus células. Lo interesante de esto es que si los seres vivos se rigiera solo por la geometría tridimensional, éstos no podrían obtener todo el potencial de su mundo.

Bien, esta "cuarta dimensión especial" sería también la responsable de la gran cantidad de formas que se extienden a través del globo.

En la tierra las relaciones, como por ejemplo, fuerza y peso, no aumentan linealmente. El hombre es un millón de veces mas pesado que una hormiga, pero solo somos 15 mil veces más fuertes. Otro ejemplo muy interesante es la tasa metabólica (TM.) y el tamaño. Si ésta aumentara linealmente un animal cien veces mas grande que un ratón, tendría un TM cien veces más grande y como la TM genera calor, el animal seria una chimenea.

El porqué de esto es muy simple. La superficie del animal, que es por donde disipa el calor, no crece tan rápido como su masa. De hecho, la superficie lo hace al cuadrado y el volumen al cubo. Entonces lo que sucede es que el radiador (piel por ejemplo), no puede disipar todo el calor generado por el metabolismo.

A fines del siglo pasado, usando de base a la geometría euclidiana y la relación que hay entre superficie y volumen, Max Rubner, fisiólogo alemán, propuso que el crecimiento de la tasa metabólica era aproximadamente la masa elevada a dos tercios $m^{2/3}$.

Todo marchaba bien hasta 1930 en que un veterinario estadounidense, Max Kleiber descubrió que la relación no era la dicha por Rubner si no que era la masa elevada a los tres cuartos $m^{3/4}$. Y para esto no había una explicación coherente.

Durante 50 años esta relación permaneció sin respuesta, pero a principios de esta década, James Brown y Brian Enquist, dos ecólogos de la universidad de Nuevo México, que descubrieron que la ley de Kleiber también se cumple para los vegetales, y Geoffrey West, físico de partículas de la universidad de los Alamos, comenzaron a conectar la ley de Kleiber con la distribución de alimentos y la eliminación de basura en los seres vivos. Creando un esquema muy grotesco, podemos decir que en casi todos los seres vivos la estructura es casi la misma. Una red de tubos que se ramifica.

El grupo diseñó un modelo que cumplía con tres propiedades básicas. La red de tubos se dividía una y otra ves para llegar a todas partes del organismo. El tamaño de los tubos más chicos (capilares) es el mismo para cualquier especie, esto se debe a que las células de un elefante son prácticamente del mismo porte que las de un ratón. Por último se supone que el sistema es lo más eficiente que se pueda.

Después de arduos esfuerzos, llegaron a la conclusión que la distribución de estos tubos debía ser fractal. Si uno mira la red de vasos sanguíneos que hay en la palma de la mano, se da cuenta que es muy parecido al todo. Lo mismo sucede con los pulmones, los alvéolos son una especie de pulmones en miniatura. Con esta consideración el modelo funcionó de manera espléndida, ajustándose a todos los datos que se tenían. Lo que es más importante, haciéndole solo unas pequeñas modificaciones, este modelo también se pudo aplicar a las plantas.

Este grupo calculó la dimensión fractal y llegó al numero 3,7, es decir, vivimos en un mundo exterior tridimensional, y uno interior de 3,7. Esto puede resultar ridículo, pero si observamos la curva de Peano, vemos que esta tiene la capacidad de llenar el espacio, lo que la hace más eficiente. Si lo extrapolamos a nuestra red de tubos, vemos que al tener una dimensión fractal, y una adecuada organización pueden llenar mejor el espacio finito en que viven que si su dimensión fuese euclidiana.

Conclusión

Durante mucho tiempo el mundo de la matemáticas se a regido por la geometría clásica. A explicado los fenómenos a través de está. Sin embargo, a medida que el conocimiento ha ido avanzando han surgido fenómenos que no han podido ser explicado. Hay entra la geometría fractal, y este maravilloso mundo. Con ella, el entendimiento de fenómenos que antes no tenían explicación pueden ser comprendidos.

Los fractales no solo rigen al mundo de las matemáticas, las aplicaciones de estos son tan diversas y sus cualidades para explicar hechos, tan sorprendente que esto no es de extrañar. La naturaleza nos da una muestra todos los días. Ella trata de asemejarse a al ser mítico que es un fractal para así captar las propiedades increíbles de estos. Como el rey que buscaba el cuerno de un unicornio para lograr la inmortalidad. ¿Por qué un ser mítico el fractal?, porque este nunca se va a poder encontrar en la naturaleza. La madre tierra sólo puede llegar a un cierto grado de iteración, nunca lograra el infinito que se necesita para obtener todo el potencial de los fractales. Imaginen un pulmón con las propiedades del copo de Koch en 3d, Tendría un área finita, ¡pero una superficie infinita! Logrando un intercambio extremadamente eficiente.

La geometría fractal deja de ser una herramienta más de las matemáticas, es una nueva forma de observar al mundo.

Bibliografía

1- Mandelbrot Benoit, La geometría fractal de la naturaleza, 1983, Tusquets editores.

2- Peitgen H.O, Richter P.H, The beauty of fractals: images of complex dynamical systems, 1986.

3- Barnsley M.F, Mandelbrot B.B, Peitgen H.O. The science of fractal images.

4- Bassingthwaighte James B, Fractal Phisiology, Oxford University editores

5- http://agujero.com/tierramedia/fractales

6- http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal

nota: Imágenes de fractales generadas por fractint para dos, versión 1.2, ultrafractal 2.05
Imágenes de los paisajes generadas por génesis II

12/oct. 01

Allen 6

Indice

Prm

PROGRAMA ACADEMICO DE BACHILLERATO
Vicerrectoría de Asuntos Académicos
Universidad de Chile
LM/anv.

INFORME DE EVALUACION

ENSAYO MONOGRAFICO

2001

Nombre del Estudiante Fernando POBLETE GOMEZ

Título del Ensayo Fractales: Geometría de Belleza Infinita

1. ¿Se ciñe el ensayo al esquema de trabajo acordado inicialmente?

SI ☒ NO ☐

Comentario Sí, con mejoras.

2. ¿Frente a lecturas recomendadas, ha demostrado el estudiante capacidad reflexiva?

SI ☒ NO ☐

Comentario Claramente, además de encontrar muy eficazmente otras fuentes

3. ¿Ha elaborado en el trabajo una síntesis personal?

SI ☒ NO ☐

Comentario Sin lugar a dudas, como se trasluce en la Introducción y la Conclusión