



Existencia de solitones en un plasma relativista con partículas de polvo

Tesis
entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Ciencias con mención en Física
Facultad de Ciencias

por

Maricarmen Andrea Castro Amaro

Octubre, 2021

Director de Tesis: **Dr. Víctor Muñoz Gálvez**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INFORME DE APROBACIÓN
TESIS DE DOCTORADO

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Doctorado presentada por el candidato

Maricarmen Andrea Castro Amaro

ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias con mención en Física, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 20 de Enero de 2022.

Director de Tesis

Dr. Víctor Muñoz

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Juan Alejandro Valdivia

Dr. Mario Riquelme

Dr. Mario Favre

Para mi familia y para los sueños.

BIOGRAFÍA



Nací un 22 de agosto de 1992 en Santiago de Chile, en una pequeña familia que llegaba a la capital desde el sur. Luego de cuatro años, llegó mi hermano Felipe, quien vendría a completar nuestra familia. Desde pequeña, siempre fui muy curiosa e inquisitiva, por lo que a nadie le sorprendió que me comenzara a llamar la atención la ciencia. El autobús mágico, AbraPalabra y Logo fueron mis grandes compañeros al crecer, de donde pude aprender mucho, generar preguntas y sueños. Quise ser médico, astronauta y bióloga marina, pero jamás se me cruzó por la mente estudiar física. Estando en enseñanza media, con todo lo que trae la adolescencia y sin saber qué estudiar, postulé a Licenciatura en Física y a Literatura Inglesa, aunque todo mi entorno ya sabía lo que elegiría finalmente, menos yo. Así fue como en el 2011 entré a estudiar Física en la Universidad de Chile. Diez años después y luego de varios altos y bajos, estoy terminando el doctorado y ansiosa de las posibilidades que pueda traer el futuro. Aún quiero ser astronauta, pero también quiero conocer de otras formas de vida, viajar en el tiempo y estar viva cuando se unifiquen las fuerzas de la naturaleza. Bueno, nunca se sabe.

AGRADECIMIENTOS

Me gustaría comenzar agradeciendo a mi familia, por su infinito apoyo, amor y paciencia. Sin ustedes, nada en este camino hubiese sido posible. Gracias a mi mamá Maritza, por siempre escucharme, aconsejarme, acompañarme en lo que ha podido y tener una respuesta para todo. A mi papá Rubén, por creer siempre en mí por mí, por aconsejarme con respecto al mundo “real” y por estar siempre pendiente. Gracias a ambos por agarrarme a abrazos, incluso cuando les decía que no los necesitaba, pero al mismo tiempo por darme mi espacio, por ser expertos en calmar la ansiedad y por tener toda la paciencia del mundo. A mi hermano Felipe, que de a poco se transformó en mi mejor amigo y que no cambiaría por nada del mundo. Mi pañuelo de lágrimas y filtro de tonteras. Gracias por tanto, hermanito. Estos años de pandemia, que no han sido para nada triviales, ustedes han sido la única constante que ha traído estabilidad emocional y mental. Ha costado, pero ¡lo logramos! Los amo mucho y les agradezco con todo mi corazón.

Quiero agradecerle de manera especial a Jaime Clark, por ser mi ancla en este proceso, por tenerme infinita fe y paciencia y, por darme todo el amor del mundo, digno de un gato. Eres mi compañero, cómplice de locuras, amigo y el físico que más me inspira. El Reinhardt de mi Zarya y el Lucio de mi Ana. Gracias por ser un apoyo incondicional, aun cuando tú también estás terminando el doctorado. Hemos recorrido este camino de la física juntos por casi diez años y terminará de la misma manera. ¡Vamos por más aventuras!

Todos estos años en el Departamento de Física me han permitido conocer mucha gente que me ha formado, brindado apoyo, inspiración y amistad. Quiero agradecer a todos los profesores que tuve en la Licenciatura y el Doctorado por la paciencia, dedicación y por mostrarme una parte de lo que significa la física y hacer ciencia. En

especial a mi tutor, el Dr. Víctor Muñoz, por guiarme, apoyarme en todo este proceso y, confiar ciegamente en mí y mis capacidades. Por siempre darme el consejo correcto o necesario en los momentos más difíciles y formarme como científica desde el inicio de mi carrera. También quiero agradecerle a Matías Sepúlveda, por ser mi amigo, por siempre estar y por soportarme. Sin querer se transformó en mi cotutor no oficial y siempre le estaré agradecida por mucho. También a Gregorio González, por esas largas conversaciones nocturnas en la casa de Jaime, por leerme y por inspirarme a su modo. A los hermosos amigos que hice en la Licenciatura, por ayudarme a crecer en todo aspecto, por las locuras, las infinitas risas y llantos. A Trinidad Novoa, por ser la mejor amiga que podría tener y por apoyarme a la distancia. ¡No sabes cuánto te extraño! Gracias por la amistad y el cariño a Rodrigo López, Roberto Navarro, Felipe Valencia, Francisco Castillo, Diego Hidalgo, José Mella, Fernando Vera, Fernando Vergara, Abiam Tamburrini, Javier Silva, Karol Raccoursier y a los que llegaron y se fueron. Nada habría sido igual sin Vicky y Norma, que me han aguantado y bancado un montón. Las extraño mucho.

En mi vida no todo se trata de la física y, honestamente, gracias a eso pude terminar la tesis. Es extremadamente necesario poder distraerse en este camino y en la diversidad, está la riqueza. Quiero agradecer a mis amigas Coni y Mery, que llegaron a alegrarme la vida de improviso y llenarme de cariño. No sé qué hacía antes de ustedes y de las panas Caro, Jesu, Susie y Jeremy. Los salvadores de mi salud mental con el baile, el cariño y la buena onda. A ti Pancho, por ser un sueño y mega apañador. A los amigos que he conocido en mi faceta de gamer profesional, los Black Cats, que me han enseñado un montón y que me hacen reír como nunca. Y a mis queridos Esteban y Brandon, los máximos de este planeta. Nunca verán tanques o sanadores como ellos, aunque uno cree que es muy buen francotirador.

Gracias a todas las personas que forman parte de mi vida y que me acompañan de una u otra manera, muchas gracias por ayudarme y estar conmigo en este proceso.
내 힘이 되어줘서 모두 고마워요. 오늘도 화이팅!

Finalmente, quiero agradecer a ANID por el financiamiento de mis estudios y por permitir mi permanencia en el programa de doctorado gracias a la Beca de Doctorado Nacional, Folio 21161594, que se me otorgó el año 2016. Este trabajo también ha sido parcialmente financiado por los proyectos FONDECYT de mi director de tesis, No. 1161711 y 1201967, que me han permitido ir a varios congresos y me han ayudado a sobrevivir económicamente estos últimos meses.

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Plasmas relativistas	6
1.2. Plasmas con partículas de polvo	8
1.3. Solitones	11
2. Ecuaciones que describen un plasma relativista con partículas de polvo	15
2.1. Ecuaciones de un plasma relativista con partículas de polvo	16
2.1.1. Normalización	17
3. Plasma relativista y no magnetizado con partículas de polvo	21
3.1. Ecuaciones	22
3.2. Perturbaciones no lineales	22
3.2.1. Cuasineutralidad del plasma	25
3.2.2. Expresiones proporcionales a ε	25
3.2.3. Expresiones proporcionales a ε^2	27
3.3. Ecuación de Korteweg-de Vries	29
3.4. Discusión y resumen	31
4. Solitones en un plasma relativista y no magnetizado con partículas	

de polvo	33
4.1. Velocidad de fase M	34
4.2. Coeficiente de dispersión	40
4.2.1. Plasma de electrones y positrones con partículas de polvo	43
4.3. Ancho y amplitud del solitón	47
4.4. Perfil del solitón y relevancia de los efectos relativistas	56
4.5. Discusión y resumen	62
5. Plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo	66
5.1. Ecuaciones	67
5.2. Perturbaciones no lineales	68
5.2.1. Expresiones independientes de ε y cuasineutralidad del plasma	75
5.2.2. Expresiones proporcionales a ε	76
5.2.3. Expresiones proporcionales a $\varepsilon^{3/2}$	79
5.2.4. Expresiones proporcionales a ε^2	81
5.2.5. Expresiones proporcionales a $\varepsilon^{5/2}$	86
5.3. Ecuación de KdV	87
5.4. Discusión y resumen	89
6. Solitones en un plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo	91
6.1. Velocidad de fase M	92
6.2. Coeficiente de dispersión y ancho del solitón	100
6.3. Amplitud del solitón	112
6.4. Perfil del solitón y relevancia de los efectos relativistas	115
6.5. Discusión y resumen	122

	1
7. Conclusiones	126
Apéndices	134
A. Ecuación de Poisson	135
B. Ecuación de KdV en un plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo	140
B.1. Expresiones proporcionales a ε^2	140
B.2. Expresiones proporcionales a $\varepsilon^{5/2}$	142

RESUMEN

Los plasmas con partículas de polvo han sido objeto de una gran cantidad de investigaciones debido a su relevancia y utilidad a la hora de modelar diferentes sistemas tanto en escenarios teóricos como experimentales. La presencia de partículas de polvo cargadas puede alterar las propiedades conocidas de un plasma e introducir nuevos fenómenos tanto en el régimen lineal como en el no lineal, lo que los hace muy interesantes de entender. En esta tesis abordamos este tipo de plasma en el contexto astrofísico, donde se espera que sean relevantes los efectos no lineales, las grandes velocidades y un campo magnético de fondo. Estudiamos los efectos no lineales en la propagación de perturbaciones en un plasma de iones y electrones con partículas de polvo, considerando efectos completamente relativistas en las velocidades iniciales de las especies. Utilizamos un modelo de múltiples fluidos para las partículas, a partir del cual se puede derivar una ecuación de KdV para estos plasmas. En general, podemos encontrar soluciones numéricas para la ecuación KdV, es decir, soluciones de tipo solitón. Encontramos que estos solitones están asociados a una velocidad de fase y dependen del valor de los parámetros del sistema, como la densidad de carga del polvo, las velocidades de las especies, el ángulo de propagación de las perturbaciones y la intensidad del campo magnético. Con esto, se pueden encontrar solitones compresivos y/o rarefactivos. También mostramos que los efectos relativistas en los iones son más relevantes que en los electrones. Por otro lado, obtenemos que la intensidad del campo magnético puede disminuir fuertemente el ancho del solitón y que los efectos relativistas pueden hacer lo mismo tanto con la amplitud como con el ancho del solitón. Estas características también pueden aumentar o disminuir, todo dependiendo del resto de parámetros del sistema, como la densidad de carga de polvo y el ángulo de propagación de la perturbación.

ABSTRACT

Dusty plasmas have been the subject of a large amount of research due to their relevance to model different systems in both theoretical and experimental scenarios. The presence of charged dust particles may alter the known properties of a plasma and introduce new phenomena in both the linear and nonlinear regimes, which makes them very interesting to understand. In this thesis we address this type of plasma in the astrophysical context, where nonlinear effects, large velocities and a background magnetic field are expected to be relevant. We study nonlinear effects in propagation of perturbations in a dusty electron-ion plasma, considering fully relativistic streaming velocities. A multi fluid model is considered for the particles, from which a KdV equation can be derived for both non magnetized and magnetized relativistic dusty plasmas. In general, we are able to find numerical solutions for the KdV equation, namely soliton type solutions. We find that these solitons are associated to a wave mode and depend on the value of the system parameters, such as dust charge density, species velocities, the perturbation propagation angle and the magnetic field strength. With this, compressive and/or rarefactive solitons can be found and we also show that relativistic effects for ions are much more relevant than for electrons. We found that the magnetic field strength can strongly decrease the soliton width and that relativistic effects can do the same with both the soliton amplitude and width. Those characteristics can also increase or decrease, all depending on the rest of the system parameters, such as dust charge density and the perturbation propagation angle.

Capítulo 1

Introducción

El plasma es un estado de la materia que se encuentra presente en la naturaleza y conforma gran parte del universo. Se estima que el 99% de la materia visible se encuentra en estado de plasma, lo que hace relevante su entendimiento en un amplio rango de contextos y aplicaciones. Los plasmas presentan una gran variedad de fenómenos que se caracterizan por ser colectivos y mediados por fuerzas electromagnéticas de largo alcance, haciendo interesante su estudio desde escalas subatómicas hasta los vastos ambientes astrofísicos. En 1928, Langmuir acuñó el concepto de plasma [1] y desde ese entonces, la investigación de las propiedades físicas de este estado de la materia ha permitido comprender procesos complejos que se han observado desde la antigüedad, manteniendo el interés por un área que aún posee bastantes misterios para la física, sea teórica o experimental, incluyendo las posibles aplicaciones tecnológicas que se pueden desarrollar en un futuro cercano.

El estudio de la física de plasmas naturales no se reduce a los que se encuentran en nuestro planeta, como en la ionósfera o magnetósfera terrestre, sino que se puede extender a la física espacial, estudiando otras magnetósferas de planetas [2, 3], la heliósfera [4, 5], el viento solar [6–8], cometas [9–11] y los anillos de Saturno [12]. En el contexto de la astrofísica se puede estudiar el plasma presente en los discos de acreción

[13, 14], núcleos activos de galaxias [15, 16], púlsares [17], plasmas de electrones y positrones [18, 19], y en modelos del universo primitivo [20]. También existen plasmas en ambientes controlados, como los que se producen en un laboratorio, en donde se pueden investigar los plasmas de fusión, diagnóstico y confinamiento [21–23], en la fabricación de dispositivos semiconductores y dispositivos tipo *pinch* [24–26], por solo nombrar algunos ejemplos.

Un plasma se entiende como un gas neutral a nivel macroscópico, que contiene distintos tipos de partículas cargadas y neutras que interactúan entre sí, y que presentan fenómenos colectivos. Los plasmas son particularmente complejos de analizar debido a que la densidad de las partículas cargadas que los componen se encuentra en un rango intermedio. En fluidos como el agua, que poseen una alta densidad de moléculas, no es necesario considerar la identidad de partículas individuales y sólo el movimiento de elementos de fluido. Por otro lado, en dispositivos de baja densidad como en un sincrotrón de gradiente alternado, el comportamiento promedio es menos importante que el de una partícula, haciendo relevante las trayectorias individuales. Los plasmas se comportan muchas veces como un fluido, y muchas otras veces como un conjunto de partículas individuales en donde la distribución de velocidades de cada especie es lo relevante, lo que hace que las ecuaciones de fluidos o la teoría cinética acopladas a las ecuaciones de Maxwell, respectivamente, sean las adecuadas para estudiar la dinámica de estos sistemas dependiendo de su comportamiento [27].

Muchas de estas poblaciones de partículas tienen distinta carga, masa, temperatura y densidad, lo que provoca la distinción de diversas escalas temporales y espaciales, dando origen a diferentes dinámicas [28–30]; es en este contexto que se hace relevante el tipo de partículas que componen un plasma. Las propiedades físicas del plasma cambiarán si, por ejemplo, las masas de las partículas que lo componen

son iguales o distintas. También se podrán observar, dependiendo de la temperatura o del movimiento de las partículas, efectos relativistas en la dinámica de estos sistemas, como por ejemplo en los plasmas producidos por un láser ultra intenso, en reconexión magnética en plasmas de pares y la vecindad de agujeros negros [31–33].

1.1. Plasmas relativistas

Como se ha mencionado anteriormente, se puede tratar un plasma como fluido ideal, compuesto de tantos fluidos independientes como especies existan en el plasma, moviéndose debido a un campo electromagnético. Las ecuaciones que describen a un plasma como fluido [27] son la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_j \vec{v}_j) = 0 \quad (1.1)$$

y la ecuación de movimiento

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_j = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_j}{c} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{m_j n_j} \vec{\nabla} p_j, \quad (1.2)$$

donde \vec{v}_j es la velocidad, q_j la carga, p_j la presión y n_j la densidad de número de cada fluido (j representa la especie). Estos fluidos están acoplados a través de las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{J} &= \sum_j q_j n_j \vec{v}_j & \rho &= \sum_j q_j n_j \end{aligned}$$

con \vec{E} y \vec{B} los campos eléctrico y magnético, respectivamente, \vec{J} la corriente total y ρ la densidad de carga total.

Cuando la velocidad de las especies que componen el plasma no es despreciable en comparación con la velocidad de la luz, es necesario considerar los efectos relativistas que puedan estar afectando al sistema. Estas velocidades pueden ser muy grandes debido al impulso que le da el campo electromagnético a las partículas, o bien, debido a la temperatura, que puede ser lo suficientemente alta como para que la energía interna del fluido sea comparable a la energía en reposo, haciendo que la velocidad térmica sea relativista. En ambos casos es necesario modificar las ecuaciones de continuidad y movimiento que describen el plasma, de tal manera que se dé cuenta de los efectos relativistas en el sistema. Esta discusión se realiza en detalle en el libro *Fluid Mechanics* de Landau y Lifschitz [34], en donde se muestran explícitamente los cálculos que se llevan a cabo para modificar las ecuaciones (1.1) y (1.2) de manera que puedan describir adecuadamente un plasma como un fluido relativista. Para esto, se establece la forma de la cuadrivelocidad u^μ , de la corriente J^μ , del cuadripotencial A^μ y del tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$. También, se determina la forma del tensor de energía y momento $T^{\mu\nu}$ para un fluido en movimiento en función de la entalpía y la presión, ambas medidas en el sistema de referencia en el cual el elemento de fluido se encuentra en reposo. Con estas definiciones y las ecuaciones de Maxwell, se puede trabajar algebraicamente de tal manera de obtener las ecuaciones de continuidad y movimiento modificadas, que se pueden escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_j n_j) + \vec{\nabla} \cdot (n_j \gamma_j \vec{v}_j) = 0 , \quad (1.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_j \vec{v}_j) = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_j}{c} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{m_j n_j \gamma_j} \vec{\nabla} p_j , \quad (1.4)$$

donde se introduce el factor de Lorentz γ_j . Hay que notar que este factor de Lorentz aparece acompañando a la densidad n_j , debido a que esa cantidad se mide en el sistema comóvil con el elemento de fluido. Esto quiere decir que en el laboratorio, la

densidad de número para las partículas se escribe como $n_L = \gamma n$.

Es relevante considerar el régimen completamente relativista en un plasma, ya que nuevos efectos pueden aparecer cuando la velocidad de las especies es arbitrariamente grande. Por ejemplo, las velocidades relativistas pueden aumentar la transparencia del plasma para las ondas electromagnéticas, e introducir cortes en la rama de Alfvén en plasmas de electrones y positrones, de modo que estas ondas sólo se pueden propagar para números de onda finitos [35]. Esto trae consecuencias en los fenómenos no lineales y la existencia de solitones asociados a esos modos de propagación [36,37]. En los trabajos mencionados, sin embargo, no se considera la posible presencia de partículas de polvo, cuya relevancia discutimos en la próxima sección.

1.2. Plasmas con partículas de polvo

Un *dusty plasma* o plasma con partículas de polvo se define como un plasma usual de iones y electrones que además posee un componente adicional cargado, con tamaños que son del orden de los micrones. Este componente extra aumenta considerablemente la complejidad del sistema, razón por la cual los plasmas polvorientos también se conocen como plasmas complejos. Los granos de polvo son masivos en comparación con cualquier otra especie que pueda estar presente en estos plasmas y pueden ser de materiales conductores, silicato o de partículas de hielo. Para ser más precisos, cuando se tienen partículas de polvo cargadas que participan en los procesos colectivos del plasma, se tiene el caso en que $r_d \ll d_a < \lambda_D$, donde r_d es el radio del grano de polvo, d_a es la distancia promedio entre granos y λ_D es la longitud de Debye. Esto es lo que se considera como un plasma con partículas de polvo y no simplemente un plasma con granos aislados, que sería el caso en donde se cumple $r_d \ll \lambda_D < d_a$ [38,39].

Los plasmas con partículas de polvo han sido el objeto de investigaciones por varias décadas debido a su relevancia en los plasmas de laboratorio, espaciales y astrofísicos. Observaciones directas hechas por la sonda Ulysses, a principios de los años noventa, confirmaron la existencia de granos interestelares en el Sistema Solar, como por ejemplo en la vecindad de la Luna [40], cometas [41–43], planetas [44–47] y en el medio interplanetario [48]. Ulysses entregó información acerca de la masa y la velocidad de estos granos, además de detectar un flujo tiempo dependiente de ellos cerca del Sol [49, 50], interactuando con el plasma en el ambiente la mayor parte del tiempo. Además, varios trabajos se han dedicado a discutir la relevancia de la presencia de partículas de polvo en la dinámica de objetos y eventos astrofísicos [51–54].

En otro contexto, las partículas de polvo también son relevantes en el estudio de los plasmas de fusión, ya que se ha detectado su presencia en esos sistemas y esto ha aumentado el interés en entender cómo el polvo interactúa con el plasma [55]. Los granos pueden impactar negativamente el desempeño de un dispositivo tokamak, aunque también existen trabajos en donde se investiga su posible impacto positivo [55, 56]. También pueden ser relevantes en el entendimiento de otros experimentos en plasmas magnetizados con partículas de polvo y confinamiento [57, 58], de tal manera de entenderlos bajo condiciones controladas.

Bajo ciertas condiciones de acoplamiento entre las partículas de polvo, un plasma polvoriento puede presentarse en fases definidas, como gas, líquido, e incluso en fase cristalina [59]. Cuando las interacciones de Coulomb entre las partículas son bajas, el plasma con polvo puede permanecer en fase gaseosa y los granos estarán débilmente acoplados. Por otro lado, los granos de polvo pueden llegar a adquirir una carga muy grande debido al flujo de las partículas cargadas que componen el plasma. Esto

tiene una directa consecuencia en el aumento de la interacción de Coulomb entre partículas de polvo vecinas, haciendo que supere la energía térmica del sistema. Esto se conoce como un plasma con partículas de polvo altamente acoplado [60,61], estado favorable para la formación de estructuras espacialmente ordenadas tipo líquido o cristal de Coulomb, que también pueden llegar a soportar la propagación de ondas lineales y no lineales [58,62]. En este régimen del plasma, las herramientas utilizadas para estudiar la estadística del estado líquido y la física de materia condensada se vuelven indispensables, desde las técnicas analíticas hasta las numéricas, como por ejemplo, las simulaciones de dinámica molecular [63,64].

La presencia de partículas de polvo cargadas no solo modifica las ondas de baja frecuencia existentes, sino que también introduce nuevos tipos de ondas estrictamente relacionadas con la presencia del polvo, que pueden llegar a dominar la forma en que se propagan las ondas en un plasma. Algunos ejemplos de estos modos modificados son electromagnéticos, como las ondas circularmente polarizadas, magnetosónicas, de Alfvén y *whistler* [65,66]. Otros modos son acústicos, en donde la presencia del polvo permite describir un nuevo tipo de onda sonora llamada *dust-acoustic wave* u onda acústica para los granos de polvo. Esta onda es producida por un balance entre la presión y la inercia del plasma, que ha sido estudiada ampliamente en ambientes espaciales y experimentales [67–70]. El estudio de la mayor parte de estas ondas asociadas a la presencia de las partículas de polvo, se ha llevado a cabo sin considerar la influencia que tiene el campo magnético de fondo en las interacciones del plasma con el polvo, ni cómo afecta dicho campo en la dinámica de los granos cargados. El acoplamiento entre el plasma, el polvo y el campo magnético podría ser útil para entender los ambientes astrofísicos [71], ya que las tres componentes son ubicuas en el universo. Por nombrar algunos ejemplos, se han podido estudiar mo-

delos cinéticos de plasmas polvorientos magnetizados [72], teoría de conos de Mach con campo magnético [73] y condiciones para poder tener un plasma completamente magnetizado en el laboratorio [74–76].

Al hablar de plasmas de modo general, las ecuaciones que rigen el comportamiento de estos sistemas son altamente no lineales, mostrando una de las consecuencias más notorias de la interacción de las partículas con el campo electromagnético, ya sea desde el punto de vista del plasma como un fluido o como partículas. Lo anterior hace necesario estudiar estos sistemas en el régimen no lineal, con el fin de tener una descripción más adecuada de los fenómenos que pueden presentarse en un plasma.

1.3. Solitones

Cuando la amplitud de las ondas que se propagan en un plasma es muy grande, puede que el medio ya no produzca una respuesta lineal para las perturbaciones, haciendo que el principio de superposición no sea válido. Esto obliga a extender el análisis de un plasma a la teoría no lineal para poder hacer una descripción más adecuada de estos sistemas [77]. En el caso para la propagación de ondas, aparecen diversos fenómenos en el medio, como inestabilidades no lineales [78, 79], decaimientos no lineales [80, 81], turbulencia [82, 83], ondas de choque [84–86] y estructuras localizadas como solitones [87, 88], perturbaciones de amplitud finita y localizada, estables, y que han atraído la atención durante los últimos años debido a sus características mixtas de onda y partícula.

Los solitones son versátiles, y han podido ser observados en distintos sistemas de la naturaleza, como por ejemplo en la óptica [89, 90], en fluidos [91], polímeros conductores [92], gravitación [93], e incluso en la biología [94], por nombrar algunos ejemplos. En estos casos en donde el régimen no lineal es el dominante, una onda de

gran amplitud puede cambiar las propiedades del medio en el que ella misma se propaga. Si la no linealidad se desarrolla en una escala temporal grande comparada con la de la propagación de la onda, entonces las propiedades de difusión y de localización en el sistema pueden lograr un balance, generando solitones. Como consecuencia de este balance, los solitones son estructuras muy robustas, ya que no cambian su forma en el tiempo, incluso luego de interactuar con otros solitones [95]. Estas estructuras localizadas se pueden estudiar de forma analítica por medio de varios modelos matemáticos, como por ejemplo la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS), pseudo-potenciales como el de Sagdeev y la ecuación de sine-Gordon, técnicas que en el contexto de la física de plasmas han sido ampliamente usadas para analizar este tipo fenómenos no lineales [96–99]. Cada una de estas ecuaciones genera soluciones solitónicas con diferentes propiedades y de distinta naturaleza. En el caso de los solitones tipo KdV, la amplitud y el ancho dependen de la velocidad del solitón, no son topológicos y pueden existir en sistemas débilmente no lineales y débilmente dispersivos [100], como el que se propone a estudiar en esta tesis.

Dentro de esta área de investigación, varios trabajos se han dedicado a estudiar la formación y evolución de solitones en plasmas con partículas de polvo [101, 102], incluyendo enfoques experimentales [103, 104] y analíticos en distintos regímenes, como bajo la presencia de un campo magnético de fondo [105], distribuciones generalizadas de partículas [106, 107] o en presencia de partículas de polvo cargadas positiva o negativamente [108, 109]. Si la velocidad de las partículas es muy grande, los efectos relativistas pueden modificar las propiedades de los solitones, en donde se ha estudiado la relevancia de dichos efectos [110, 111], incluyendo efectos no lineales para estudiar la existencia y propagación de solitones. Sin embargo, estos trabajos

no consideran partículas de polvo como una especie del plasma. Incorporando granos de polvo, se han estudiado plasmas espaciales como un sistema no lineal, pero no relativistas [105, 112–115]. Kalita y Choudhury estudian la existencia y propiedades de solitones en un plasma débilmente relativista con partículas de polvo y no magnetizado [116], en donde se muestra que estas estructuras pueden ser compresivas o rarefactivas dependiendo de la velocidad de las especies.

Dada la discusión presentada hasta este punto, es interesante considerar extensiones de trabajos previos para estudiar la existencia y propiedades de solitones tipo KdV en un plasma donde se consideren partículas de polvo y efectos completamente relativistas en la velocidad de las especies. Esto debido a la relevancia de estos plasmas en varios sistemas, en especial en ambientes astrofísicos, donde se esperan condiciones extremas. Por ejemplo, el colapso de una estrella o la explosión de una supernova pueden elevar las velocidades de las partículas a rangos relativistas, en donde el plasma es inyectado al medio interestelar que posee partículas de polvo [117–119]. También, en el entorno de un disco de acreción, cerca de un agujero negro [120–124], se pueden crear poblaciones de partículas que se mueven con velocidades relativistas [125].

De esta manera, en este trabajo proponemos el estudio de solitones en el régimen completamente relativista para las velocidades, usando las ecuaciones de fluido para un plasma con partículas de polvo, de donde se espera derivar una ecuación de KdV para perturbaciones débilmente no lineales y dispersivas. En el Capítulo 2 se plantea el modelo general con el que se trabajará, incluyendo su normalización para facilitar la exploración del espacio de parámetros de este plasma. En el Capítulo 3 se perturba de manera no lineal este modelo, sin considerar campo magnético, encontrando que los solitones KdV son posibles de acuerdo a las condiciones estudiadas en el Capítulo

4. Posterior a este análisis, se incluye un campo magnético de fondo en el Capítulo 5, donde se vuelven a perturbar no linealmente las ecuaciones del modelo para obtener una ecuación de KdV. En el Capítulo 6 se analiza bajo qué condiciones se pueden producir solitones de acuerdo a los parámetros asociados al campo magnético de fondo, que son los que producen el cambio con respecto a lo visto anteriormente. Finalmente, en el Capítulo 7 se resumen los principales resultados obtenidos y se elaboran conclusiones de este trabajo, mencionando posibles proyecciones de lo presentado.

Capítulo 2

Ecuaciones que describen un plasma relativista con partículas de polvo

En la Sección 1.1 de la Introducción, se describieron brevemente las ecuaciones de fluido para un plasma relativista, en donde cada especie presente en el sistema se describe como un fluido, acoplados por medio de las ecuaciones de Maxwell. Un plasma polvoriento puede estar compuesto de iones, electrones y partículas de polvo, que pueden agregarse al sistema considerándolas como otra especie de iones, pero muy masiva en comparación con la primera. Incluyendo esta tercera especie, en este capítulo se estudia cómo afecta su presencia en la ecuación de continuidad, de movimiento y la ley de Gauss de las ecuaciones de Maxwell de un fluido relativista. En la Sección 2.1 se aborda en detalle esta modificación a las ecuaciones (1.3) y (1.4) presentadas en el Capítulo 1, agregando partículas de polvo como tercer fluido. También se explica en detalle la normalización de estas ecuaciones, que permite trabajar con ellas de manera más conveniente.

2.1. Ecuaciones de un plasma relativista con partículas de polvo

De lo revisado en la Sección 1.1 de la Introducción, considerando la parte espacial de las ecuaciones covariantes para un plasma relativista, es posible describir la dinámica de un sistema con dichas características. Por lo tanto, para un plasma polvoriento y relativista, se utiliza la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_j \gamma_j) + \vec{\nabla} \cdot (n_j \gamma_j \vec{v}_j) = 0 , \quad (2.1)$$

y la ecuación de movimiento

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_j \vec{v}_j) = \frac{q_j}{m_j} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_j}{c} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{m_j n_j \gamma_j} \vec{\nabla} p_j , \quad (2.2)$$

donde \vec{v}_j , γ_j , q_j , p_j y n_j corresponden a la velocidad, el factor de Lorentz, la carga, la presión y densidad de número en el sistema de referencia en reposo de cada fluido, respectivamente. La masa de la especie j es m_j y c la velocidad de la luz. En este caso, se estudia un plasma de tres especies: iones ($j = i$), electrones ($j = e$) y partículas de polvo ($j = d$). Estas especies se relacionan entre sí a través de la ley de Gauss de las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e (n_i \gamma_i - n_e \gamma_e - Z_d n_d \gamma_d) , \quad (2.3)$$

donde se tiene e como la magnitud de la carga del electrón. Desde este punto en adelante se considerará que las partículas de polvo no son relativistas, es decir, $\gamma_d = 1$, ya que en primera instancia estos granos no se moverían con velocidades relativistas debido a su masa. De todas maneras, el caso más general es el presentado en (2.3).

Para cerrar el sistema de ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3), se considera este plasma como un gas ideal, por lo que se utiliza la ecuación de estado $p_j = n_j k_B T_j$, con un campo magnético de fondo $\vec{B} = B_0 \hat{z}$.

2.1.1. Normalización

Se define $q_j = -\eta_j e$ y $\alpha_j = T_j/T_e$, donde $\eta_i = -Z_i = -1$, $\eta_e = Z_e = 1$, $\eta_d = Z_d$ y $\alpha_d = 0$, lo que permite escribir las ecuaciones de las tres especies de una sola forma, haciendo la distinción solo con el índice j . De esto se desprende que $q_i = e$, $q_e = -e$ y $q_d = -Z_d e$, por lo tanto, se reescriben las ecuaciones (2.2) y (2.3)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_j \vec{v}_j) = \frac{-\eta_j e}{m_j} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_j}{c} \times \vec{B} \right) - \frac{1}{m_j n_j \gamma_j} \vec{\nabla} p_j, \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -4\pi e \sum_j \eta_j n_j \gamma_j. \quad (2.5)$$

Considerando que $p_j = n_j k_B T_j$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ y que $\vec{v}_j \times \vec{B} = -v_{jx} B_0 \hat{y} + v_{jy} B_0 \hat{x}$, es posible reescribir (2.4) y (2.5) como

$$m_j n_j \gamma_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_j \vec{v}_j) = -n_j \gamma_j \eta_j e \left(-\vec{\nabla} \phi + \frac{v_{jy} B_0}{c} \hat{x} - \frac{v_{jx} B_0}{c} \hat{y} \right) - k_B T_j \vec{\nabla} n_j, \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi e \sum_j \eta_j n_j \gamma_j. \quad (2.7)$$

Todas las densidades son normalizadas por la densidad de número de los iones en el equilibrio n_{i0} y el potencial por $\phi_e = k_B T_e / e$. Así, considerando que $n'_j = n_j / n_{i0}$ y $\phi' = \phi / \phi_e$, se tiene para (2.1)

$$\frac{1}{n_{i0}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (n_j \gamma_j) + \vec{\nabla} \cdot (n_j \gamma_j \vec{v}_j) \right] = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n'_j \gamma_j) + \vec{\nabla} \cdot (n'_j \gamma_j \vec{v}_j) = 0.$$

De igual manera, si se divide (2.6) por $n_{i0} \phi_e$ y considerando que $\alpha_j = T_j / T_e$, se obtiene

$$\frac{m_j n'_j \gamma_j}{k_B T_e} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla} \right) (\gamma_j \vec{v}_j) = \eta_j n'_j \gamma_j \vec{\nabla} \phi' - \frac{\eta_j n'_j \gamma_j e B_0}{k_B T_e c} (v_{jy} \hat{x} - v_{jx} \hat{y}) - \alpha_j \vec{\nabla} n'_j. \quad (2.9)$$

Análogamente, se divide el laplaciano de ϕ' , (2.7), por $n_{i0}\phi_e$. Así,

$$\vec{\nabla}^2 \phi' = \frac{4\pi n_{i0} e^2}{k_B T_e} \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j, \quad (2.10)$$

Notamos que el factor $4\pi e^2 n_{i0}/k_B T_e$ de la expresión (2.10) tiene dimensiones del inverso de la distancia al cuadrado y, por tanto, se puede utilizar para normalizar las distancias en el sistema de ecuaciones. De esta manera, se define una cantidad que puede entenderse de forma similar a lo que es la longitud de Debye, pero para este sistema en particular. Entonces,

$$\lambda = \left(\frac{k_B T_e}{4\pi n_{i0} e^2} \right)^{1/2}.$$

Así, utilizamos λ para redefinir las distancias como $\vec{r}' = \vec{r}/\lambda$ y tener así la derivada con respecto a \vec{r}' como

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \lambda \frac{\partial}{\partial \vec{r}'}.$$

Expresando las relaciones (2.8), (2.9) y (2.10) en función a la longitud λ , obtenemos

$$\lambda \frac{\partial}{\partial t} (n'_j \gamma_j) + \vec{\nabla}' \cdot (n'_j \gamma_j \vec{v}_j) = 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_j n'_j \gamma_j}{k_B T_e} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla}' \right) (\gamma_j \vec{v}_j) &= \eta_j n'_j \gamma_j \vec{\nabla}' \phi' - \frac{\eta_j n'_j \gamma_j e B_0}{k_B T_e c} \lambda (v_{jy} \hat{x} - v_{jx} \hat{y}) \\ &\quad - \alpha_j \vec{\nabla}' n'_j, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla}'^2 \phi' = \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j. \quad (2.13)$$

Como las partículas de polvo son más masivas que las otras especies, puede que esta diferencia de masa afecte la propagación de las ondas del plasma, aportando inercia al sistema. Para ver la incidencia de esto en las ecuaciones, se puede incluir un parámetro en (2.12) asociado a una razón de masas de las especies con respecto

a la masa de las partículas de polvo. Para esto, se multiplica (2.12) por m_d/m_d , de manera que se define el parámetro $Q_j = m_j/m_d$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{n'_j \gamma_j Q_j}{\frac{k_B T_e}{m_d}} \left(\lambda_D \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \vec{\nabla}' \right) (\gamma_j \vec{v}_j) &= \eta_j n'_j \gamma_j \vec{\nabla}' \phi' - \frac{\eta_j n'_j \gamma_j e B_0}{\frac{k_B T_e}{m_d} m_d c} \lambda_D (v_{jy} \hat{x} - v_{jx} \hat{y}) \\ &\quad - \alpha_j \vec{\nabla}' n'_j . \end{aligned} \quad (2.14)$$

De (2.14) se define

$$v_D = \left(\frac{k_B T_e}{m_d} \right)^{1/2} , \quad (2.15)$$

por lo que se normalizan las velocidades como $\vec{v}'_j = \vec{v}_j/v_D$. Al hacer esto, se puede definir una frecuencia

$$\omega_D = \left(\frac{4\pi n_{i0} e^2}{m_d} \right)^{1/2} , \quad (2.16)$$

de tal manera que $v_D = \lambda \omega_D$, obteniendo así una normalización para el tiempo de la forma $t' = \omega_D t$. Luego, de (2.11) y (2.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} (n'_j \gamma_j) + \vec{\nabla}' \cdot (n'_j \gamma_j \vec{v}'_j) &= 0 , \quad (2.17) \\ n'_j \gamma_j Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{v}'_j \cdot \vec{\nabla}' \right) (\gamma_j \vec{v}'_j) &= \eta_j n'_j \gamma_j \vec{\nabla}' \phi' - \eta_j n'_j \gamma_j \frac{e B_0}{m_d c \omega_D} (v_{jy} \hat{x} - v_{jx} \hat{y}) \\ &\quad - \alpha_j \vec{\nabla}' n'_j . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Finalmente, notamos de (2.18) que $\Omega_c = eB_0/m_d c$ se puede entender como la frecuencia ciclotrónica de las partículas de polvo cuando $Z_d = 1$. El caso $Z_d = 1$ se trata de una condición particular en este plasma, ya que la expresión general para la girofrecuencia del polvo está dada por $\Omega_D = Z_d e B_0 / m_d c$ [126]. De esta manera, se define $\Omega' = \Omega_c / \omega_D$, que es una cantidad adimensional. Así, de (2.13), (2.17) y (2.18)

se obtiene un conjunto de ecuaciones adimensional para este plasma:

$$\frac{\partial}{\partial t'} (n'_j \gamma_j) + \vec{\nabla}' \cdot (n'_j \gamma_j \vec{v}'_j) = 0 , \quad (2.19)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \vec{v}'_j \cdot \vec{\nabla}' \right) (\gamma_j \vec{v}'_j) = \eta_j n'_j \gamma_j \vec{\nabla}' \phi' - \eta_j n'_j \gamma_j \Omega' (v_{jy} \hat{x} - v_{jx} \hat{y}) - \alpha_j \vec{\nabla}' n'_j , \quad (2.20)$$

$$\vec{\nabla}'^2 \phi' = \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j . \quad (2.21)$$

Como consideraciones finales se puede decir que la parte espacial de las ecuaciones covariantes de un plasma relativista también pueden ser usadas para describir un plasma con polvo, compuesto por iones, electrones y partículas de polvo. Dichas partículas se describen como otra especie de iones, pero más masiva que la primera. Teniendo esto en cuenta, la estructura de las ecuaciones que describen un plasma polvoriento relativista como fluido, no es distinta a las de cualquier otro sistema similar. La diferencia se presenta en la normalización de dichas expresiones, ya que evidencia la presencia de otras cantidades características, como una longitud similar a la de Debye, la velocidad térmica de los electrones y la frecuencia de plasma de las partículas de polvo, lo que permite obtener un conjunto de expresiones adimensionales que describir este plasma.

Capítulo 3

Plasma relativista y no magnetizado con partículas de polvo

En el Capítulo 2 se presentaron las ecuaciones de fluido de un plasma relativista con partículas de polvo de manera general. Esta forma de las expresiones incluye la presencia de un campo magnético de fondo, de tal manera que las partículas que componen el plasma pueden moverse por el espacio, alterando sus trayectorias en comparación a cuando el sistema no está magnetizado. El campo magnético presente hace que el estudio de la dinámica a través del álgebra sea bastante más complejo, por lo que en primera instancia estudiamos este plasma cuando el campo magnético de fondo es nulo. De esta manera, las ecuaciones presentadas en el capítulo anterior se modifican, haciendo más sencillo su desarrollo y análisis.

En este capítulo, en la Sección 3.1, se revisa la forma de las ecuaciones de un plasma polvoriento no magnetizado y, en la Sección 3.2, cómo se escriben sus respectivas perturbaciones no lineales. Esto con el fin de estudiar si la existencia y propagación de solitones en este tipo de plasmas es posible, a través de una ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) y de su solución.

3.1. Ecuaciones

Para estudiar la dinámica de un plasma con partículas de polvo no magnetizado, homogéneo, compuesto de electrones, iones y partículas de polvo, se utilizan las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) en una dimensión. Esto, debido a que $\Omega' = 0$ en (2.20), haciendo que haya sólo una dirección de propagación para las ondas. Teniendo esto en cuenta, se considera la coordenada z' como la dirección de movimiento de dichas ondas de plasma. Gracias a esto, las ecuaciones que describen el sistema se simplifican como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t'} (n'_j \gamma_j) + \frac{\partial}{\partial z'} (n'_j \gamma_j v'_j) = 0 , \quad (3.1)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'_j \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\gamma_j v'_j) = \eta_j n'_j \gamma_j \frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \alpha_j \frac{\partial n'_j}{\partial z'} , \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z'^2} = \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j . \quad (3.3)$$

El factor relativista de Lorentz, γ_j , se define de la siguiente forma

$$\gamma_j = \left(1 - \frac{av_j'^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{av_j^2}{c^2} \right)^{-1/2} ,$$

donde la variable a representa la presencia de efectos relativistas en la expresión. Para $a = 0$ se tiene el caso no relativista y para $a = 1$, el caso relativista. Esto nos será útil en la Sección 3.2 al realizar perturbaciones, de manera que podremos identificar fácilmente los términos que aparecen exclusivamente debido a los efectos relativistas.

3.2. Perturbaciones no lineales

El sistema de ecuaciones (3.1)–(3.3) depende de cantidades asociadas a las especies que componen este plasma, acopladas a través del potencial eléctrico ϕ' . Entonces, es posible desacoplar este sistema para ϕ' si se introducen perturbaciones en

las expresiones. Así, se realizan perturbaciones no lineales pequeñas y finitas, donde se da cuenta de las ondas viajeras introduciendo un nuevo sistema de coordenadas que es solidario con la propagación dichas ondas. Este cambio de coordenadas es $\xi = \varepsilon^{1/2}(z' - Mt')$ para la parte espacial y $\tau = \varepsilon^{3/2}t'$ para la parte temporal [39], donde M es la velocidad de fase de la onda que se propaga y $\varepsilon \ll 1$ es un parámetro que cuantifica la no linealidad del sistema.

De acuerdo a esto, se expande el sistema con respecto al parámetro no lineal, ε , para ver cómo afecta en la propagación de la onda en sus cantidades a primer y segundo orden. Para esto, se escribe en función de ε el potencial eléctrico, y para cada especie, la densidad de número y la velocidad como sigue:

$$\begin{aligned}\phi' &= \varepsilon\phi'_1 + \varepsilon^2\phi'_2 + \dots, \\ n'_j &= n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2} + \dots, \\ v'_j &= v'_{j0} + \varepsilon v'_{j1} + \varepsilon^2 v'_{j2} + \dots.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Realizando el cambio de coordenadas descrito anteriormente en (3.1), (3.2) y (3.3), se tiene

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} - M\frac{\partial}{\partial\xi}\right)(n'_j\gamma_j) + \frac{\partial}{\partial\xi}(n'_j\gamma_j v'_j) = 0,\tag{3.5}$$

$$n'_j\gamma_j Q_j \left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau} + (v'_j - M)\frac{\partial}{\partial\xi}\right](\gamma_j v'_j) = \eta_j n'_j \gamma_j \frac{\partial\phi'}{\partial\xi} - \alpha_j \frac{\partial n'_j}{\partial\xi},\tag{3.6}$$

$$\varepsilon\frac{\partial^2\phi'}{\partial\xi^2} = \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j.\tag{3.7}$$

El cambio de coordenadas en el sistema de ecuaciones, en conjunto con (3.4), permite agrupar en (3.5), (3.6) y (3.7), las expresiones proporcionales a ε^0 , ε y ε^2 , lo que es útil para saber los efectos de la perturbación a primer y segundo orden de la densidad de número y la velocidad de cada especie. Para esto, se expande el factor de Lorentz γ_j hasta segundo orden de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\gamma_j &\approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c'^2}}} + \frac{\varepsilon}{\left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c'^2}\right)^{3/2}} \frac{av'_{j0}}{c'^2} v'_{j1} + \\
&\varepsilon^2 \frac{a}{\left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c'^2}\right)^{3/2}} \left[\left(1 + \frac{3av'_{j0}{}^2}{c'^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c'^2}\right)}\right) \frac{v'_{j1}{}^2}{2c'^2} + \frac{v'_{j0}}{c'^2} v'_{j2} \right] \\
&= \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j1} + \varepsilon^2 \left[\gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j2} + a \gamma_{j0}^3 \frac{v'_{j1}{}^2}{c'^2} \left(\frac{3}{2} \zeta_{j0} - 1\right) \right], \quad (3.8)
\end{aligned}$$

donde se definió $\beta_{j0} = v'_{j0}/c'$, $\gamma_{j0} = (1 - a\beta_{j0}^2)^{-1/2}$, $\rho_{j0} = a\beta_{j0}'\gamma_{j0}^2/c'$ y $\zeta_{j0} = 1 + a\beta_{j0}'^2\gamma_{j0}^2$.

La expansión para el factor de Lorentz, mostrada en (3.8), se utiliza para desarrollar expresiones más complejas, como $n'_j\gamma_j$, $\gamma_j v'_j$ y $n'_j\gamma_j v'_j$. Por lo tanto, considerando la expansión de γ_j , y lo escrito en (3.4), se calcula

$$\begin{aligned}
n'_j\gamma_j &\approx (n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2}) \left\{ \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j1} + \varepsilon^2 \left[\gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j2} + a \gamma_{j0}^3 \frac{v'_{j1}{}^2}{c'^2} \left(\frac{3}{2} \zeta_{j0} - 1\right) \right] \right\} \\
&= n'_{j0} \gamma_{j0} + \varepsilon (\gamma_{j0} n'_{j1} + n'_{j0} \gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j1}) + \varepsilon^2 \left\{ \gamma_{j0} n'_{j2} + \gamma_{j0} \rho'_{j0} (n'_{j1} v'_{j1}) + \right. \\
&\quad \left. n'_{j0} \left[\gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j2} + a \gamma_{j0}^3 \frac{v'_{j1}{}^2}{c'^2} \left(\frac{3}{2} \zeta_{j0} - 1\right) \right] \right\}, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_j v'_j &\approx \left\{ \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j1} + \varepsilon^2 \left[\gamma_{j0} \rho_{j0} v'_{j2} + a \gamma_{j0}^3 \frac{v'_{j1}{}^2}{c'^2} \left(\frac{3}{2} \zeta_{j0} - 1\right) \right] \right\} (v'_{j0} + \varepsilon v'_{j1} + \varepsilon^2 v'_{j2}) \\
&\approx \gamma_{j0} c' \beta_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \zeta_{j0} v'_{j1} + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \zeta_{j0} \left(v'_{j2} + \frac{3}{2} \rho_{j0} v'_{j1}{}^2 \right), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

y por último

$$\begin{aligned}
n'_j \gamma_j v'_j &\approx (n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2}) \left[\gamma_{j0} c' \beta'_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \zeta_{j0} v'_{j1} + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \zeta_{j0} \left(v'_{j2} + \frac{3}{2} \rho_{j0} v'^2_{j1} \right) \right] \\
&= c' n'_{j0} \beta'_{j0} \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} (c' \beta'_{j0} n'_{j1} + n'_{j0} \zeta_{j0} v'_{j1}) + \varepsilon^2 \left[c' \gamma_{j0} \beta'_{j0} n'_{j2} + n'_{j0} \gamma_{j0} \zeta_{j0} v'_{j2} + \right. \\
&\quad \left. \gamma_{j0} \zeta_{j0} (n'_{j1} v'_{j1}) + \frac{3}{2} n'_{j0} \gamma_{j0} \zeta_{j0} \rho_{j0} v'^2_{j1} \right]. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

3.2.1. Cuasineutralidad del plasma

Utilizando la expresión para $n'_j \gamma_j$ dada en (3.9) y la expansión de la ecuación de Poisson, relación (3.7), se obtiene una expresión que da cuenta de la cuasineutralidad del plasma y que es independiente del parámetro ε ,

$$\begin{aligned}
\sum_j n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j &= 0, \\
n'_{e0} \gamma_{e0} - \gamma_{i0} + Z_d n'_{d0} &= 0,
\end{aligned}$$

de donde se tiene,

$$n'_{e0} = \frac{\gamma_{i0} - Z_d n'_{d0}}{\gamma_{e0}}. \tag{3.12}$$

3.2.2. Expresiones proporcionales a ε

Al reemplazar las expansiones de los factores $n'_j \gamma_j$, $\gamma_j v'_j$ y $n'_j \gamma_j v'_j$, dadas por (3.9)–(3.11), en las ecuaciones que describen el sistema (3.5), (3.6) y (3.7), y luego de reordenar los términos proporcionales a ε , se tienen tres ecuaciones que dan cuenta de las perturbaciones a primer orden en la ecuación de continuidad, de movimiento

y de Poisson, que respectivamente son

$$(v'_{j0} - M) \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} + n'_{j0} [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}] \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} = 0, \quad (3.13)$$

$$\alpha_j \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} + n'_{j0} Q_j (v'_{j0} - M) \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} = 0, \quad (3.14)$$

$$\sum_j \gamma_{j0} \eta_j (n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{j0} v'_{j1}) = 0. \quad (3.15)$$

Considerando (3.13)–(3.15), es posible resolver este sistema de ecuaciones para las derivadas de las perturbaciones a primer orden de n'_{j1} y v'_{j1} , así como también para sus respectivas cantidades sin derivar. De esta manera, de (3.13) y (3.14) se despeja

$$\frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} = - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} = \frac{\gamma_{j0} \eta_j (v'_{j0} - M)}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi}, \quad (3.17)$$

$$n'_{j1} = - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} \phi'_1, \quad (3.18)$$

$$v'_{j1} = \frac{\gamma_{j0} \eta_j (v'_{j0} - M)}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} \phi'_1. \quad (3.19)$$

Es necesario recordar que ϕ'_1 es una cantidad que depende de la variable espacial y de la variable temporal, por lo que también se puede obtener la derivada temporal de (3.18) y (3.19):

$$\frac{\partial n'_{j1}}{\partial \tau} = - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial v'_{j1}}{\partial \tau} = \frac{\gamma_{j0} \eta_j (v'_{j0} - M)}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau}. \quad (3.21)$$

Finalmente, al reemplazar (3.18) y (3.19) en la ecuación de Poisson (3.15), se obtiene una expresión para la velocidad de fase M ,

$$0 = \sum_j \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} . \quad (3.22)$$

3.2.3. Expresiones proporcionales a ε^2

Posterior a encontrar expresiones para las cantidades perturbadas a primer orden en función de ϕ'_1 , es necesario hacer lo mismo para las cantidades perturbadas a segundo orden, ya que se busca resolver el sistema de ecuaciones (3.13)–(3.15). Para esto, se reemplazan las expansiones de γ_j , $\gamma_j v'_j$ y $n'_j \gamma_j$ en el sistema de ecuaciones, se reordenan las expresiones y se agrupan los términos proporcionales a ε^2 , con el mismo procedimiento de la Sección 3.2.2. De esta manera, se obtienen tres ecuaciones que dan cuenta de las perturbaciones a segundo orden del sistema. Así, para la ecuación de continuidad se tiene

$$\begin{aligned} & (v'_{j0} - M) \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}] \frac{\partial v'_{j2}}{\partial \xi} + [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}] \frac{\partial}{\partial \xi} (n'_{j1} v'_{j1}) \\ & + n'_{j0} \left[2\rho_{j0} + \frac{a}{c'^2} \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M) (3\zeta_{j0} - 2) \right] v'_{j1} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} + \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \tau} + n'_{j0} \rho_{j0} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} & \alpha_j \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M) \zeta_{j0} \frac{\partial v'_{j2}}{\partial \xi} + Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M) \zeta_{j0} n'_{j1} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} \\ & + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \left[1 + 4(v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] v'_{j1} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} - \gamma_{j0} \eta_j (n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{j0} v'_{j1}) \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\ & + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \tau} - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

y para la ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi'_1}{\partial \xi^2} &= \sum_j \gamma_{j0} \eta_j n'_{j2} + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{j0} v'_{j2} + \gamma_{j0} \eta_j \rho_{j0} (n'_{j1} v'_{j1}) \\ & - a n'_{j0} \gamma_{j0}^3 \eta_j (2 - 3\zeta_{j0}) \frac{v'^2_{j1}}{2c'^2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Considerando lo obtenido en las expresiones a orden ε , se puede resolver el sistema de ecuaciones presentado en (3.23)–(3.25) para $\partial_\xi n'_{j2}$ y para $\partial_\xi v'_{j2}$ en función de ϕ'_1 . Así, reemplazando de (3.16) a (3.21) en la ecuación de continuidad de segundo orden mostrada en (3.23), se obtiene

$$\begin{aligned} & (v'_{j0} - M) \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] \frac{\partial v'_{j2}}{\partial \xi} - \frac{2n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2 (v'_{j0} - M)}{T_{j0}^2} \\ & \left\{ 1 + (v'_{j0} - M) \left[\rho_{j0} + (v'_{j0} - M) \left[\frac{a}{c'^2} \gamma_{j0}^2 \left(1 - \frac{3}{2} \zeta_{j0} \right) + \rho_{j0}^2 \right] \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\ & - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j}{T_{j0}} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

y en la ecuación de movimiento (3.24)

$$\begin{aligned} & \alpha_j \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} Q_j (v'_{j0} - M) \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \frac{\partial v'_{j2}}{\partial \xi} - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} + \frac{n'_{j0} \eta_j^2 \gamma_{j0}^2}{T_{j0}^2} \\ & \left\{ Q_j (v'_{j0} - M)^2 \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \left[1 + 3 (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] - \alpha_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\ & + \frac{n'_{j0} Q_j (v'_{j0} - M) \gamma_{j0}^3 \eta_j \zeta_{j0}}{T_{j0}} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde se define

$$T_{j0} = Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right]. \quad (3.28)$$

A partir de (3.26), (3.27) y (3.28), se despejan expresiones para $\partial_\xi n'_{j2}$ y $\partial_\xi v'_{j2}$, en función de la perturbación del potencial ϕ'_1 como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} = & -\frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2}{T_{j0}^3} \left\{ \alpha_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right]^2 - Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} \right. \\
& \left. \left[3 + 6 (v'_{j0} - M) \rho_{j0} - \frac{a}{c^2} \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 (3 - 2\zeta_{j0}) \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\
& + \frac{n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^3 \eta_j (v'_{j0} - M) \zeta_{j0} \left[2 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right]}{T_{j0}^2} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} \\
& - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right]}{T_{j0}} \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'_{j2}}{\partial \xi} = & -\frac{\gamma_{j0}^2 \eta_j^2 (v'_{j0} - M)}{T_{j0}^3} \left\{ \alpha_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} - \frac{a}{c^2} \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} \right] \right. \\
& - Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} \left[3 + \frac{a}{c^2} \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 (2\zeta_{j0} - 3) \right. \\
& \left. \left. + 6 (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + \frac{\gamma_{j0} \eta_j (v'_{j0} - M)}{T_{j0}} \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} \\
& - \frac{\gamma_{j0} \eta_j \left[Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} + \alpha_j \right]}{T_{j0}^2} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.3. Ecuación de Korteweg-de Vries

Si se analizan con mayor profundidad las ecuaciones de segundo orden en ε , podemos notar que (3.25) depende de cantidades que fueron encontradas en función de ϕ'_1 , es decir, se conoce la forma explícita que poseen. Esto es útil a la hora de manipular algebraicamente dicha expresión de Poisson, ya que por la forma que tiene, es candidata ser una ecuación de Korteweg-de Vries. Entonces, si se deriva (3.25) con

respecto a ξ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} = & \sum_j \gamma_{j0} \eta_j \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{j0} \frac{\partial v'_{j2}}{\partial \xi} + \gamma_{j0} \eta_j \rho_{j0} \frac{\partial}{\partial \xi} (n'_{j1} v'_{j1}) \\ & - a n'_{j0} \gamma_{j0}^3 \eta_j (2 - 3\zeta_{j0}) \frac{v'_{j1}}{c'^2} \frac{\partial v'_{j1}}{\partial \xi} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Luego, reemplazando (3.17), (3.18), (3.19), (3.29) y (3.30) en (3.31) y reordenando la ecuación resultante, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} + \sum_j \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^3 \eta_j^3}{T_{j0}^3} \left\{ \alpha_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} + \frac{a}{c'^2} \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \right. \right. \\ \left. \left. (v'_{j0} - M)^2 \right] - 3Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} (v'_{j0} - M)^2 \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\ + \sum_j \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2 \left[\alpha_j \rho_{j0} - 2Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M) \right]}{T_{j0}^2} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} + \sum_j \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2}{T_{j0}} \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} = 0 . \end{aligned} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) no es exactamente una ecuación de KdV, ya que posee un término extra, proporcional a $\partial_\xi \phi'_2$, lo cual no es propio de este tipo de ecuación no lineal. Por lo tanto, es conveniente encontrar una forma en que dicho término asociado a $\partial_\xi \phi'_2$ sea nulo, o bien, una manera de escribirlo en función de ϕ'_1 . Esto es posible considerando la expresión para la velocidad de fase M , relación (3.22), en donde se puede ver que es igual al término presente en (3.32). De dicha forma, se puede argumentar que la expresión proporcional a $\partial_\xi \phi'_2$ en (3.32) es nula y, por tanto, se tiene lo necesario para que (3.32) sea una ecuación de KdV de la forma

$$\frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} + p \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + q \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} = 0 , \quad (3.33)$$

donde $p = A/B$ es el coeficiente no lineal, $q = 1/B$ el coeficiente de dispersión, $A = \sum_j a_j$ y $B = \sum_j b_j$, con los términos a_j y b_j de la forma

$$a_j = \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^3 \eta_j^3}{T_{j0}^3} \left\{ \alpha_j \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} + \frac{a}{c'^2} \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} (v'_{j0} - M)^2 \right] - 3Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{j0} \right. \\ \left. (v'_{j0} - M)^2 \left[1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0} \right] \right\} , \quad (3.34)$$

$$b_j = \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2}{T_{j0}^2} [\alpha_j \rho_{j0} - 2Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)] . \quad (3.35)$$

La ecuación (3.33) tiene solución conocida y se trata de un solitón, cuya forma es

$$\phi'_1 = \phi_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right) , \quad (3.36)$$

con $\eta = \xi - V\tau$, $\phi_0 = 3V/p$ y $\Delta = \sqrt{4q/V}$, donde η corresponde a la coordenada solidaria con la propagación del solitón que se mueve con una rapidez V , ϕ_0 su amplitud y Δ su ancho. Dada la forma de (3.36) y en particular de Δ , se tendrá que esta solución solo existe si $q > 0$.

3.4. Discusión y resumen

En este capítulo se obtienen de manera teórica solitones que provienen de una ecuación de Korteweg-de Vries en un plasma con velocidades completamente relativistas, partículas de polvo y no magnetizado, mostrando que a través de una técnica perturbativa, también es posible estudiar estas estructuras localizadas para un plasma con las características presentadas. Esto representa un complemento a trabajos similares, en donde se ha demostrado la existencia de estas estructuras localizadas por medio de pseudo potenciales, la ecuaciones de KdV modificada, en plasmas ultra relativistas o en casos débilmente relativistas [116, 127–129]. Al introducir perturbaciones débilmente no lineales y dispersivas al modelo propuesto en la Sección 3.1

y expandir las ecuaciones que describen la dinámica del plasma en función de un parámetro que indica qué tan no lineal es el sistema, se encuentra una ecuación de Korteweg-de Vries para el potencial eléctrico de un plasma con granos de polvo, cuya solución es conocida y tiene la forma de un solitón.

Este solitón posee una amplitud y un ancho bien definidos y, ambas características dependen de cantidades asociadas a las especies que componen este plasma, como la masa, la carga o la densidad de número, pero principalmente, la velocidad de fase M y las velocidades v'_{j0} de cada especie. La existencia del solitón está condicionada al valor del coeficiente de dispersión q , que debe ser positivo para que esta solución sea posible. Esto debido a que el ancho de esta solución no puede ser una cantidad compleja, que es lo que sucede si q es negativo. De esta manera, se puede concluir que es necesario estudiar bajo qué condiciones es positivo el parámetro de dispersión y dónde posee soluciones reales la velocidad de fase M , que proviene de la ecuación de Poisson (3.22).

Capítulo 4

Solitones en un plasma relativista y no magnetizado con partículas de polvo

En el Capítulo 3 se mostró que al perturbar no linealmente las ecuaciones que describen la dinámica de un plasma relativista y no magnetizado con partículas de polvo, es posible encontrar una ecuación KdV. Esta ecuación permite afirmar la existencia de solitones cuando el coeficiente de dispersión q es positivo, estructura localizada que es estudiada en este capítulo. En la Sección 4.1 se analizan las soluciones de la ecuación de Poisson perturbada (3.22), para determinar cuáles permiten que $q > 0$ sea positivo y, por lo tanto, ver en la Sección 4.2 cómo se comporta el ancho Δ del solitón. Teniendo esto en mente, se revisa el coeficiente no lineal p y la amplitud del solitón en la Sección 4.3. Finalmente, se caracteriza la forma del solitón y la relevancia de los efectos relativistas en la Sección 4.4.

Para obtener soluciones numéricas del solitón visto en la ecuación (3.36), se fijan valores para los parámetros libres de este plasma asociados a las especies que lo componen. Esto para las cantidades normalizadas, como lo son la velocidad v'_{j0} , la velocidad del solitón V , la densidad de número n'_{j0} , la masa Q_j y la temperatura α_j .

Todas estas variables componen el coeficiente no lineal p , presente en la amplitud ϕ_0 y el coeficiente de dispersión q , que caracteriza el ancho Δ del solitón. Con esto, se puede resolver numéricamente la ecuación de Poisson (3.22) para la velocidad de fase M , ya que para poder evaluar p y q es necesario encontrar dicha velocidad, que permite que q sea positivo y así, que (3.36) exista. De acuerdo a esto, los valores de p posibles están acoplados a M y q . Luego, se puede caracterizar el solitón con su amplitud, ancho y forma.

4.1. Velocidad de fase M

En general, la ecuación (3.22) tiene cuatro soluciones para la velocidad de fase M . Dependiendo de los valores que pueda tener la densidad n'_{d0} , la carga Z_d y las velocidades v'_{j0} de cada especie, estas cuatro soluciones de M pueden ser reales, complejas, o dos reales y dos complejas. Esto se puede observar dada la forma que posee la ecuación de Poisson (3.22) al expandir la suma sobre las especies del plasma, en donde cómo es la solución dependerá del signo que posea cada término. Este cambio de signo se debe al impacto que puede tener el balance entre velocidad y la densidad de carga de las especies dada la cuasi-neutralidad (3.12), por lo que es necesario estudiar para qué parámetros las soluciones son reales, que son las que tienen sentido físico. En el apéndice A se desarrolla esta discusión con mayor detalle.

Para estudiar los parámetros que permiten soluciones físicas, destacamos que para todos los gráficos que se presentan en este y los próximos capítulos, se han fijado los siguientes valores: $n'_{i0} = 1$, $\alpha_i = 0.1$, $\alpha_e = 1$, $c' = 150$, $v'_{d0} = 0$, $e = -1.6022 \text{ C}$, $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ y $m_d = 1.67 \times 10^{-21} \text{ kg}$ [39, 130, 131]. El resto de las variables dependen de cantidades asociadas a las partículas de polvo, como la densidad de número n'_{d0} y el número de carga Z_d y, de las velocidades de las especies, que se

escriben en términos de la velocidad de la luz c' . Esto quiere decir que v'_{j0} se escribe en función de la variable β_{j0} ; así, $v'_{j0} = c'\beta_{j0}$ para la especie j .

Teniendo en cuenta lo mencionado hasta este punto, para partículas de polvo inicialmente quietas, identificamos cuatro casos para las velocidades de las otras especies de este plasma que se pueden estudiar: iones y electrones débilmente relativistas, iones y electrones relativistas, iones débilmente relativistas con electrones relativistas, iones relativistas con electrones débilmente relativistas. Todos estos casos pueden recopilarse en dos tipos de gráficos: uno en donde se mantenga la velocidad de los electrones fija y varíe la velocidad de los iones, y el caso opuesto, en donde la velocidad de los iones se mantiene fija y se varía la de los electrones. Diremos que la especie que mantiene su velocidad fija es la especie de fondo. Por lo tanto, se tiene el caso de electrones con velocidades débilmente relativistas o relativistas en el fondo, mientras la velocidad de los iones va aumentando y, otro con el caso opuesto, de tal manera de poder estudiar la relevancia de los efectos débilmente relativistas y relativistas en las especies. Así, se puede tener una idea de los casos posibles para las velocidades. Debemos notar, en todo caso, que el estudio sistemático de todas las velocidades posibles lo realizamos más bien por completitud y consistencia. En efecto, si hay diferencias muy grandes entre las velocidades de los electrones y los iones, es posible tener inestabilidades en este plasma, lo que puede impedir la existencia de los solitones que se quieren estudiar.

Para representar especies débilmente relativistas y relativistas de fondo en las figuras que siguen, se usan las líneas discontinuas cortas y largas, respectivamente. El cambio en el color de la línea representa un aumento en la velocidad de la especie que no está de fondo, es decir, un aumento del parámetro β_{j0} para la especie correspondiente. Esto se puede observar en la Figura 1, en donde se muestran las

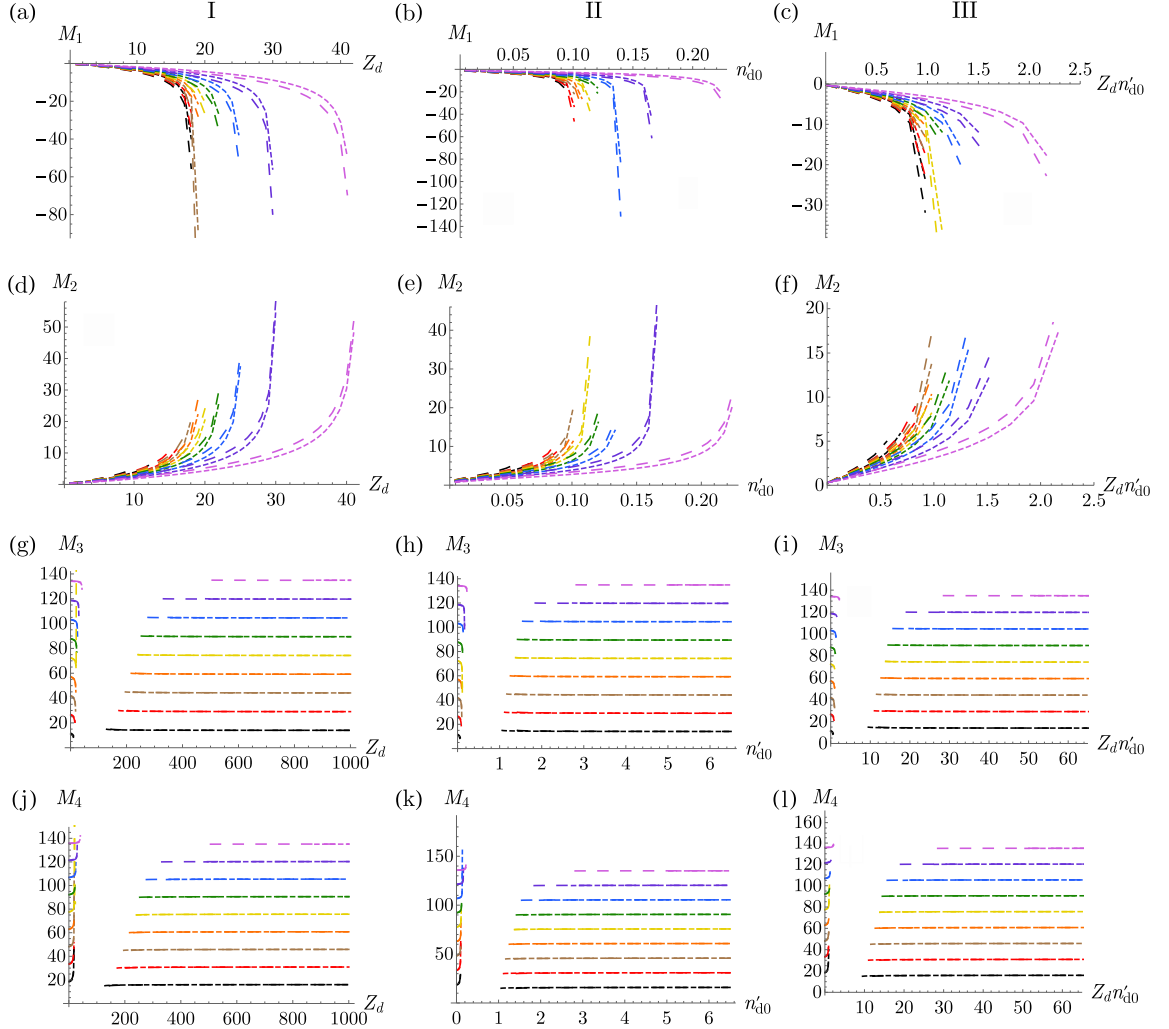


Figura 1: Cuatro modos de la velocidad de fase versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III). Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{e0} = 0.1$ ($\beta_{e0} = 0.75$), que representan electrones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{i0} = 0.1$ (negro), $\beta_{i0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{i0} = 0.3$ (café), $\beta_{i0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{i0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{i0} = 0.6$ (verde), $\beta_{i0} = 0.7$ (azul), $\beta_{i0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{i0} = 0.9$ (rosado).

cuatro soluciones que se obtienen de la ecuación (3.22) para la velocidad de fase M en función de la carga del polvo Z_d (columna I), en función de la densidad de número de las partículas de polvo n'_{d0} (columna II) y en función de la densidad de carga del polvo $Z_d n'_{d0}$ (columna III). En las tres columnas se puede observar que para todos estos casos, se obtienen cuatro soluciones para M , de las cuales dos se identifican como modos lentos, M_1 y M_2 , y dos como modos rápidos, M_3 y M_4 . En todos los modos, la línea discontinua corta define a los electrones como la especie de fondo con velocidad débilmente relativista, $\beta_{e0} = 0.1$, mientras que el cambio de color del mismo tipo de línea representa el cambio en velocidad de los iones, donde $\beta_{i0} = 0.1, \dots, 0.9$. Cuando el valor β_{e0} de fondo aumenta a $\beta_{e0} = 0.75$, se representa por la línea discontinua larga.

Se puede observar que para el modo más lento (M_1), en la Figura 1(a), (b) y (c), se tienen valores negativos para la velocidad de fase. También, los valores de M_1 son reales para un rango finito y definido de Z_d , n'_{d0} y, por lo tanto, de $Z_d n'_{d0}$, respectivamente. En los tres casos, tanto para electrones débilmente relativistas como relativistas, aumenta el rango en donde hay una solución real para M_1 a medida que crece β_{i0} , mientras que cuando los electrones cambian su velocidad de $\beta_{e0} = 0.1$ a $\beta_{e0} = 0.75$, disminuye este rango de existencia. Este efecto no es exagerado, pero se puede apreciar en las figuras, haciendo que las líneas se separen por color a medida que cambian las velocidades. Para el modo lento M_2 , se puede apreciar el mismo efecto que para M_1 , con la diferencia de que los valores de M_2 son todos positivos.

Los modos rápidos M_3 y M_4 , Figura 1(g)–(l), se comportan de manera similar entre sí. Ambos poseen dos zonas en donde los valores de M son reales y positivos, cuya separación consiste en soluciones complejas y va aumentando a medida que crece β_{i0} . Para los modos rápidos, esta zona de separación intermedia define rangos

de densidad de carga baja y alta para el polvo, como se puede observar en la columna III de la Figura 1 y es más notoria cuando $\beta_{e0} = 0.1$. Las líneas también se agrupan por tipo y se separan por color para los dos modos rápidos, lo que quiere decir que el impacto de aumentar la velocidad de los electrones de $\beta_{e0} = 0.1$ a $\beta_{e0} = 0.75$ no es muy notorio dado un valor fijo de β_{i0} , pero sí es detectable al aumentar β_{i0} , al igual como sucede en los modos lentos.

En la Figura 2 se tiene lo mismo que en la Figura 1, pero en el caso de las velocidades de fondo opuestas. Esto quiere decir que la especie de fondo son los iones en lugar de los electrones. En la Figura 2, las velocidades de los iones de fondo están dadas por $\beta_{i0} = 0.1$ para el caso débilmente relativista (línea discontinua corta) y $\beta_{i0} = 0.75$ para el caso relativista (línea discontinua larga). Al mismo tiempo, se varía la velocidad de los electrones entre $\beta_{e0} = 0.1, \dots, 0.9$, lo cual sigue siendo representado por el cambio de color en las líneas.

Para hacer el caso de la Figura 2 comparable al de la Figura 1, se grafican las misma tres columnas: la velocidad de fase M versus la carga del polvo Z_d (columna I), versus la densidad de número del polvo n'_{d0} (columna II) y versus la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ (columna III); cada columna con sus respectivas soluciones, que en este caso siguen siendo cuatro. La diferencia más notoria que se logra observar, es el hecho de que ahora las líneas se separan por tipo de línea y no por color como en el caso anterior. Esto es consistente con lo mostrado en la Figura 1, ya que implicaría que el aumento en la velocidad de los iones es lo que trae mayores cambios en la solución de la ecuación 3.22. Por otro lado, al comparar los modos lentos M_1 y M_2 en (a)–(f) de las Figuras 1 y 2, se observa que el valor de Z_d , n'_{j0} y $Z_d n'_{d0}$ para los cuales M es real, disminuye para ambos valores de β_{i0} . También los valores de M_1 y M_2 se hacen más pequeños a medida que β_{e0} aumenta, para ambos casos de β_{i0} .

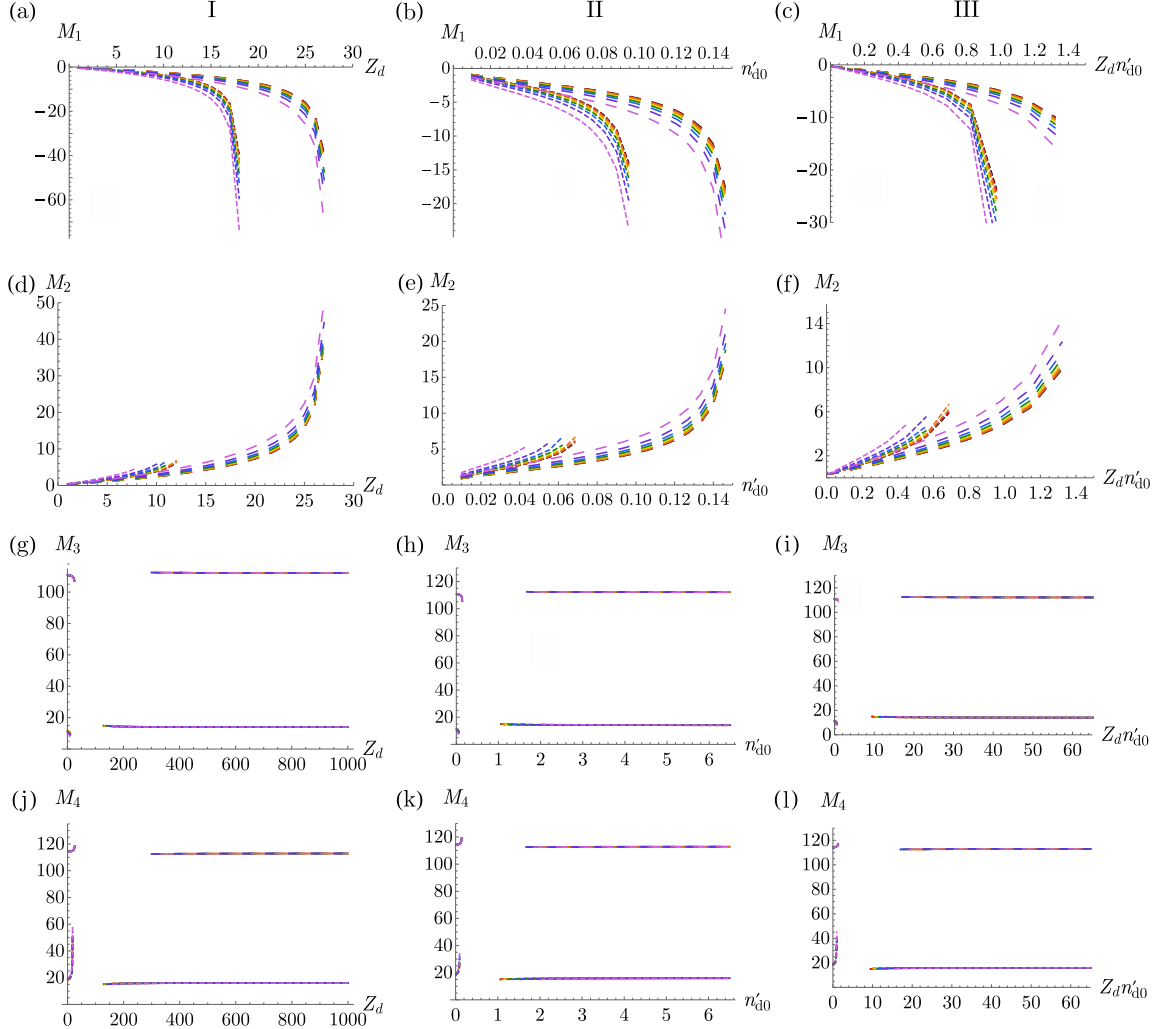


Figura 2: Cuatro modos de la velocidad de fase versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III). Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{i0} = 0.1$ ($\beta_{i0} = 0.75$), que representan electrones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{e0} = 0.1$ (negro), $\beta_{e0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{e0} = 0.3$ (café), $\beta_{e0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{e0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{e0} = 0.6$ (verde), $\beta_{e0} = 0.7$ (azul), $\beta_{e0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{e0} = 0.9$ (rosado).

Para los modos rápidos M_3 y M_4 en (g)–(l) de la Figura 2, no se distingue mucha diferencia entre las líneas de colores, es decir, no se observa un impacto considerable al variar la velocidad β_{e0} , pero sí al aumentar β_{i0} , lo cual es consistente con lo presentado en la Figura 1. La zona de separación entre densidad de carga baja y alta sigue estando presente, mostrando las soluciones complejas para este caso y que también se hace más grande para $\beta_{i0} = 0.75$.

Las Figuras 1 y 2 son consistentes entre sí y se puede decir que se observan los mismos fenómenos en ellas, donde el aumento de la velocidad de los iones es lo que hace que los cambios sean notorios.

4.2. Coeficiente de dispersión

Una vez que la velocidad de fase M ha sido caracterizada en función de parámetros asociados a las partículas de polvo, y las velocidades de los iones y electrones, estudiamos la existencia de los solitones dentro de este mismo espacio de parámetros. Para esto, usamos los modos lentos y rápidos obtenidos en la Sección 4.1 para estudiar, numéricamente, cuáles de estos valores de M hacen que el coeficiente de dispersión q sea positivo. Así, reemplazando los valores obtenidos para M en (3.35), calculamos q , obteniendo lo que se muestra en las Figuras 3 y 4.

Lo primero que hay que notar de dichas figuras es que sólo dos de los valores de M , obtenidos en la sección anterior, producen valores reales y positivos del coeficiente de dispersión q . Estos valores corresponden a uno de los modos lentos y uno de los modos rápidos de (3.22), en particular M_2 y M_4 , los cuales producen valores numéricos para q_2 y q_4 , respectivamente. También hay que destacar que las Figuras 3 y 4 están hechas en escala semi logarítmica, para que se pueda apreciar bien dónde q es positivo. En ambas gráficos se observa que siguen la misma tendencia

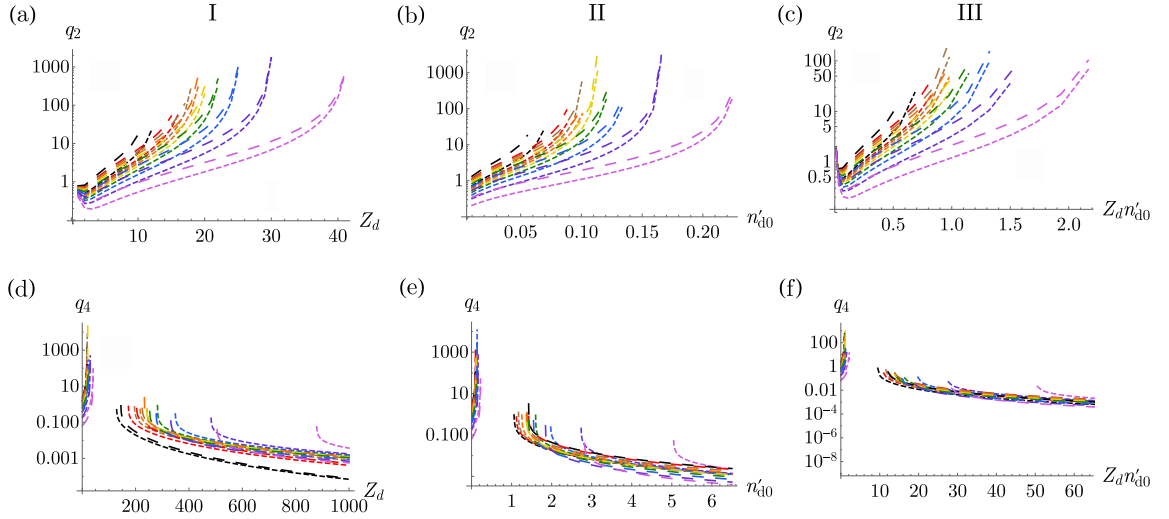


Figura 3: Coeficiente de dispersión q versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III). Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{e0} = 0.1$ ($\beta_{e0} = 0.75$), que representan electrones débilmente relativistas (relativistas) en el fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{i0} = 0.1$ (negro), $\beta_{i0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{i0} = 0.3$ (café), $\beta_{i0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{i0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{i0} = 0.6$ (verde), $\beta_{i0} = 0.7$ (azul), $\beta_{i0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{i0} = 0.9$ (rosado).

de las Figuras 1 y 2. El coeficiente de dispersión asociado al modo lento posee una rama, en donde los límites de existencia para Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$ son similares a los de la velocidad de fase M asociada. Además, la separación entre los tipos de línea y los colores que se pueden observar en las Figuras 1 y 3, y en las Figuras 2 y 4, son similares a los observados para M , tanto para iones, como electrones de fondo, lo que sigue mostrando que los efectos relativistas en los electrones no serían tan relevantes. Esto puede indicar que el coeficiente de dispersión está determinado por la velocidad de fase para el modo lento.

Para el coeficiente de dispersión asociado al modo rápido, con ambas especies de fondo, sigue existiendo una zona intermedia en donde q no es positivo, por lo que no puede haber soluciones solitónicas en esa región del espacio de parámetros. Para

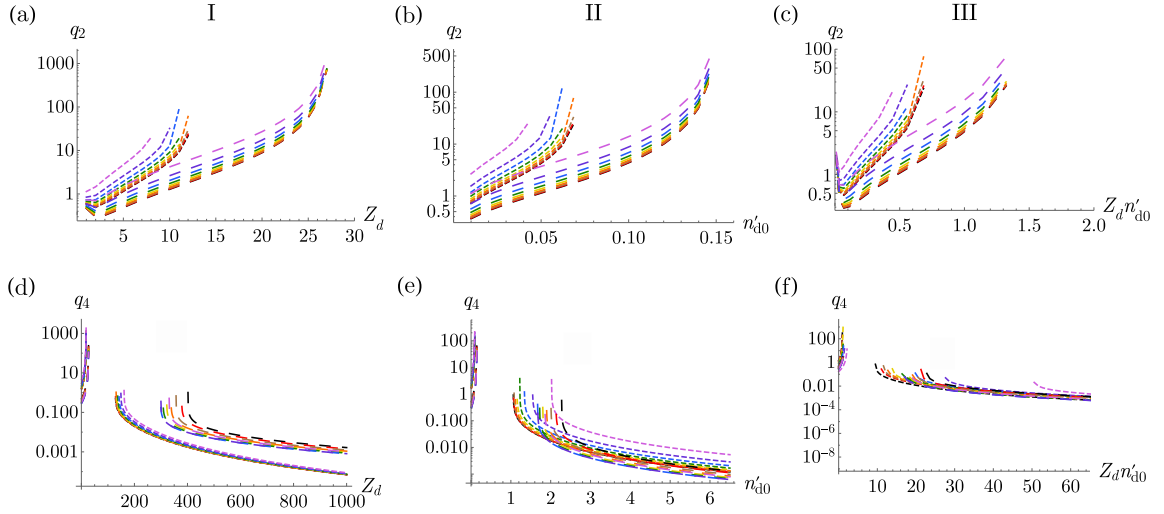


Figura 4: Coeficiente de dispersión q versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III). Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{i0} = 0.1$ ($\beta_{i0} = 0.75$), que representan iones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los electrones: $\beta_{e0} = 0.1$ (negro), $\beta_{e0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{e0} = 0.3$ (café), $\beta_{e0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{e0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{e0} = 0.6$ (verde), $\beta_{e0} = 0.7$ (azul), $\beta_{e0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{e0} = 0.9$ (rosado).

cargas, densidades y densidades de carga bajas, en las Figuras 3 y 4, se observa un comportamiento similar al visto en el modo lento, en donde el impacto de los efectos relativistas en los iones es observable en la separación por tipo de línea o por color de línea en cada figura, respectivamente. Para ambas especies de fondo, se tienen valores determinados de Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$ para los cuales existe una solución tipo solitón, y los valores para los cuales esto ocurre, son similares a los expuestos en las Figuras 1 y 2. Para las densidades de carga más altas, en el caso de la Figura 3, se observa que la separación entre tipo de línea y color es más difusa de lo que se ha visto anteriormente, lo que se repite en las columnas I, II y III. Esto muestra que existe un impacto debido a los efectos relativistas en los iones, pero no es tan claro como en los casos anteriores. En cambio en la Figuras 4(d), se logra diferenciar el tipo de

línea, pero no para el caso de las columnas II y III, en donde sigue siendo difuso. Para todo lo mostrado en las Figuras 3 y 4, se puede identificar claramente en qué región del espacio de parámetros asociados a las partículas de polvo existen solitones. Teniendo esto en mente, identificamos dos puntos, uno en la zona de baja densidad de carga ($Z_d n'_{d0} = 0.55$) y otro den la zona de alta densidad de carga ($Z_d n'_{d0} = 45$). Caracterizamos los solitones correspondientes a dichos valores.

4.2.1. Plasma de electrones y positrones con partículas de polvo

Uno de los parámetros que podemos explorar más a fondo es la razón de masas entre los iones y las partículas de polvo. Esto debido a que, hasta ahora, Q_i es un parámetro que se ha mantenido fijo en el estudio de la velocidad de fase y existencia de solitones, pero que puede tener un valor diferente sin ningún problema. A lo largo esta tesis siempre se ha hablado de iones o protones, pero otra partícula que también puede estar presente en un plasma polvoriento es el positrón. Este es el caso de los plasmas de pares con polvo, ya sean espaciales, astrofísicos o experimentales, en donde las tres especies siguen participando del comportamiendo colectivo del plasma [132–136]. Al haber positrones en vez de iones en el plasma polvoriento, el valor de Q_i cambia inevitablemente, siendo mucho más pequeño que el valor utilizado hasta ahora, que es $Q_i = 0.1$. Un positrón tiene la misma masa que un electrón, pero con carga opuesta, por lo que en este caso, $Q_i = Q_e$. Luego, en las Figuras 5 y 6 revisamos cómo cambian los rangos de existencia de solitones para los parámetros asociados al polvo, como la carga, la densidad de número y la densidad de carga, en comparación a cuando $Q_i = 0.1$.

Lo primero que se puede observar en las Figuras 5 y 6, es que para $Q_i = Q_e$,

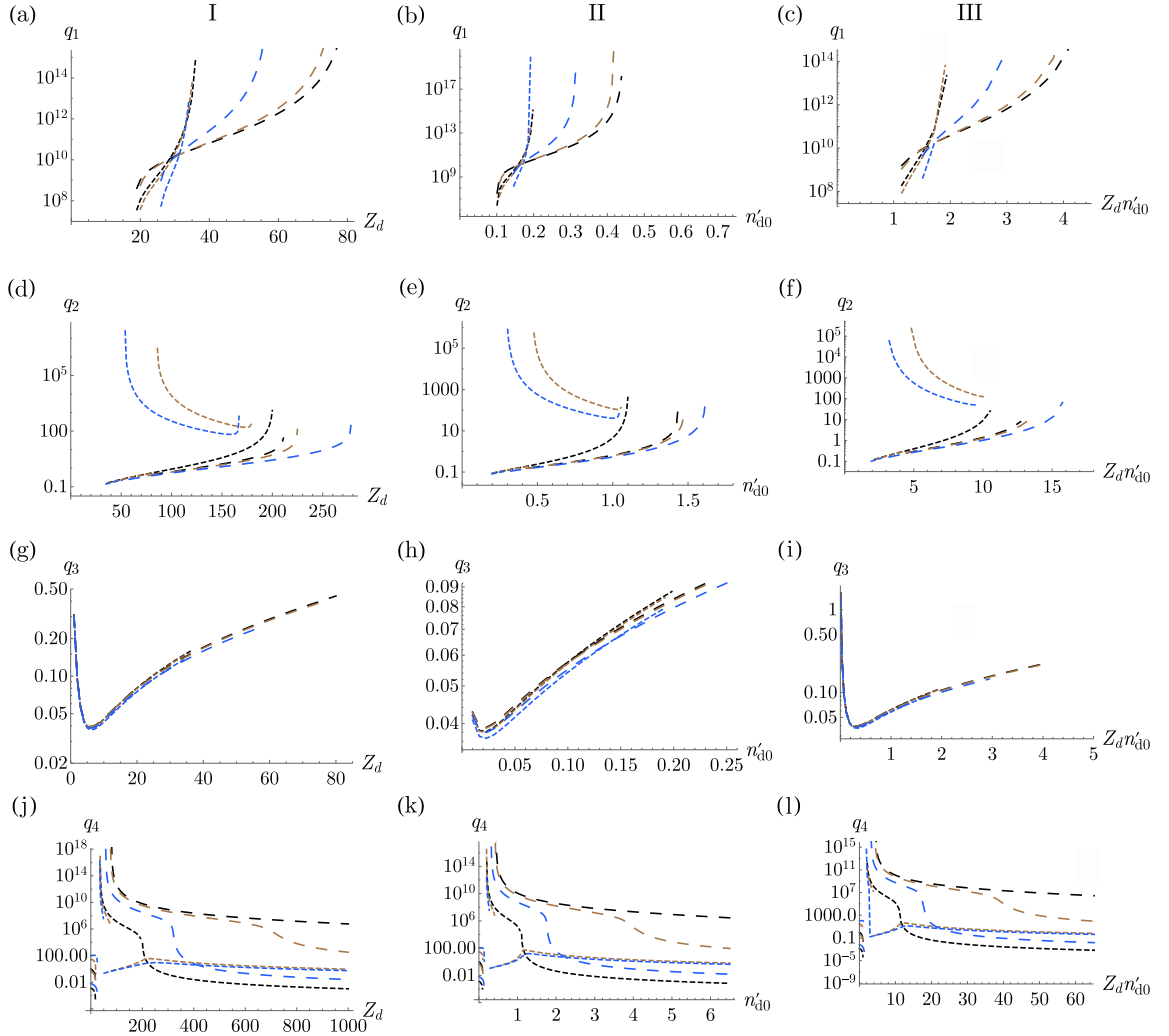


Figura 5: Coeficiente de dispersión q versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III) para $Q_i = Q_e$. Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{e0} = 0.1$ ($\beta_{e0} = 0.75$), que representan electrones débilmente relativistas (relativistas) en el fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades para los positrones: $\beta_{p0} = 0.1$ (negro), $\beta_{p0} = 0.3$ (café) y $\beta_{p0} = 0.7$ (azul).

las cuatro soluciones de la ecuación (3.22) producen un coeficiente de dispersión q positivo para algún rango definido de Z_d , n_{d0} y $Z_d n'_{d0}$, a diferencia del caso anterior, en donde sólo M_2 y M_4 producen coeficientes de dispersión positivos. También se

puede notar que no se ve una diferencia evidente entre tipo línea y color, como si lo es en las Figuras 3 y 4. En la Figura 5, los paneles (a)–(c) y (g)–(i) no existen en el caso con $Q_i = 0.1$. Para el coeficiente de dispersión q_1 , si los electrones de fondo son débilmente relativistas (línea discontinua corta), existen soluciones tipo solitón para valores cercanos a $Z_d \sim 35$, $n'_{d0} \sim 0.2$ y $Z_d n'_{d0} \sim 2$, a medida que la velocidad de los positrones se va haciendo cada vez más relativista (cambio de color en la línea discontinua corta). En el caso contrario, cuando los electrones en el fondo son relativistas (línea discontinua larga), el rango anterior en donde hay solitones aumenta a $Z_d \sim 80$, $n'_{d0} \sim 0.45$ y $Z_d n'_{d0} \sim 4$, a medida que los positrones adquieren velocidades relativistas (cambio de color en la línea discontinua larga). Hay que notar que este aumento en el rango se produce de manera más evidente para velocidades débilmente relativistas de positrones (línea discontinua larga de color negro), ya que en las tres columnas de la Figura 5 es la curva que llega más lejos, no así para velocidades más grandes (línea discontinua larga de color azul). Para los paneles (g)–(i), que también corresponden a un modo que antes no existía, se tiene una situación similar a la descrita para (a)–(c). Cuando los electrones de fondo son débilmente relativistas (línea discontinua corta) existe solución para la ecuación (3.22) hasta $Z_d \sim 38$, $n'_{d0} \sim 0.2$ y $Z_d n'_{d0} \sim 2$, que se mantiene más o menos igual a medida que los positrones alcanzan velocidades más grandes (cambio de color en la línea discontinua). Cuando los electrones de fondo son relativistas (línea discontinua larga), los rangos de existencia cambian a $Z_d \sim 82$, $n'_{d0} \sim 0.25$ y $Z_d n'_{d0} \sim 4$ para velocidades relativistas en los positrones (cambio de color en la línea discontinua larga).

En el caso del coeficiente de dispersión q_2 , al comparar las Figuras 3(a)–(c) y 5(d)–(f), se observa que para electrones no relativistas de fondo, el rango de existencia

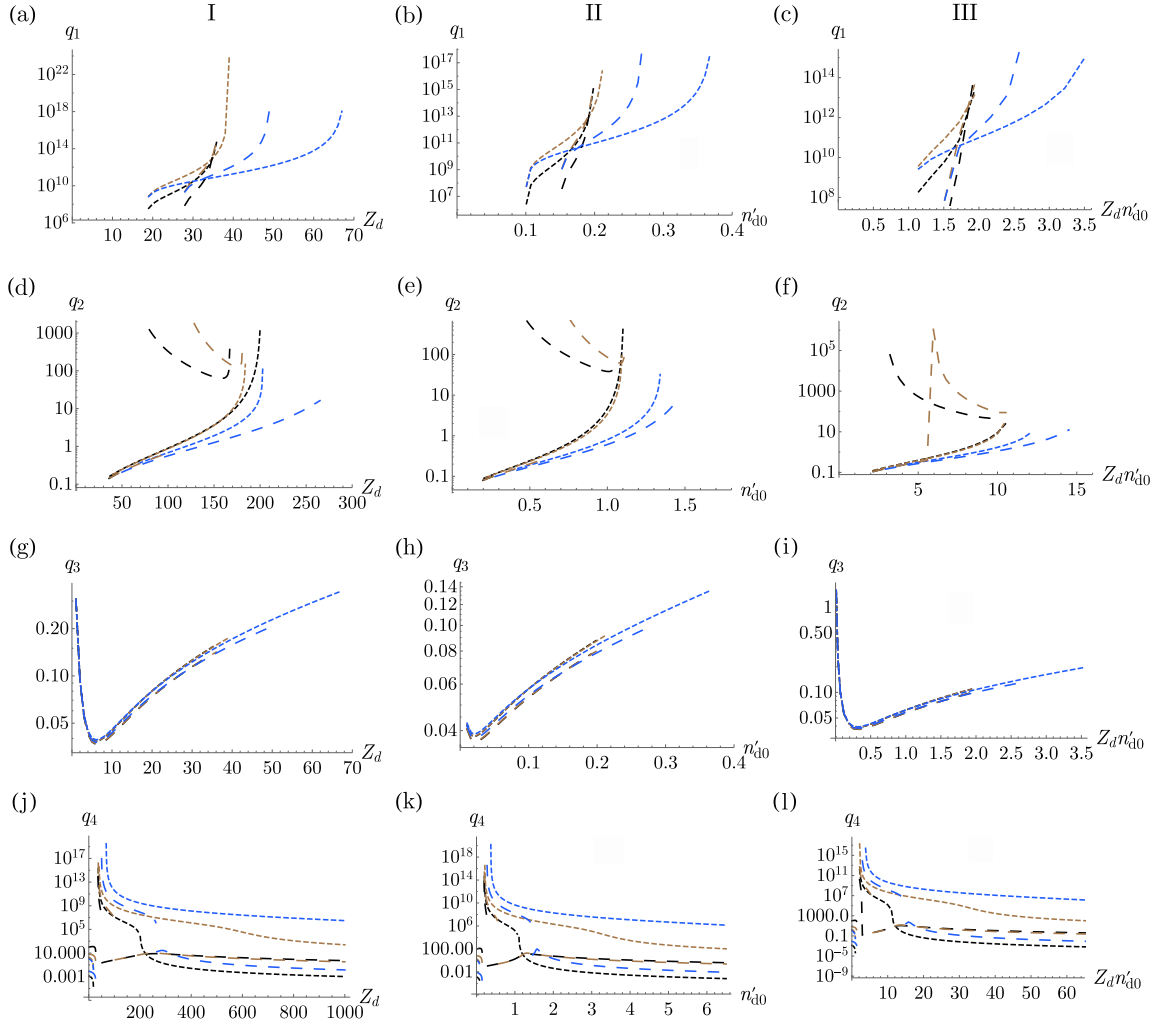


Figura 6: Coeficiente de dispersión q versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III) para $Q_i = Q_e$. Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{i0} = 0.1$ ($\beta_{i0} = 0.75$) de fondo, que representan electrones débilmente relativistas (relativistas). Los colores corresponden a diferentes velocidades de los positrones: $\beta_{e0} = 0.1$ (negro), $\beta_{e0} = 0.3$ (café) y $\beta_{e0} = 0.7$ (azul).

cambia de $Z_d \sim 40$ $n'_{d0} \sim 0.25$ y $Z_d n'_{d0} \sim 2$ a $Z_d \sim 200$ $n'_{d0} \sim 1.1$ y $Z_d n'_{d0} \sim 10$, esto debido al cambio de iones por positrones y la presencia de velocidades relativistas de estos últimos. Cuando los electrones de fondo son relativistas, el aumento del rango de existencia es más grande que el mencionado anteriormente, ya que en este caso

$Z_d \sim 280$, $n'_{d0} \sim 1.6$ y $Z_d n'_{d0} \sim 16$. El coeficiente de dispersión del modo rápido q_4 , también muestra cambios notorios, pero más bien en la forma de las curvas que en los rangos de existencia de solitones dados por Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$. Se siguen manteniendo estas zonas de densidad de carga baja y alta, pero esta vez, la separación es más pequeña que para el caso con $Q_i = 0.1$.

La Figura 6 es similar a la Figura 5, pero esta vez, son los positrones la especie de fondo. La forma de las curvas y los rangos de existencia son muy parecidos al del caso anterior, donde sigue habiendo solitones para las cuatro soluciones de (3.22). A grandes rasgos, no sucede nada más de lo que ya se ha descrito.

Las Figuras 5 y 6 muestran que la masa de las especies sí es relevante a la hora de estudiar la existencia de solitones con el modelo que se ha presentado en el Capítulo 3, por lo que representa un punto interesante en el cual podríamos continuar el estudio de la existencia y caracterización de solitones en un plasma polvoriento y relativista. Por ahora, se seguirá el análisis considerando iones y no positrones, pero es relevante tener conciencia de lo que sucede cuando dos de las especies no son tan masivas en comparación al polvo.

4.3. Ancho y amplitud del solitón

Una vez que se encuentran los posibles valores de q para un set de parámetros en específico, se pueden utilizar esos mismos valores para calcular el ancho Δ y la amplitud ϕ_0 de los solitones encontrados para este plasma.

La Figura 7, en los paneles (a)–(c), se muestra el ancho de un solitón para el modo lento de la velocidad de fase, es decir, está asociado al coeficiente de dispersión q_2 mostrado en la Figura 3. Se puede observar que, dependiendo de la velocidad de los iones y de Z_d y n'_{d0} , el solitón tiene un ancho definido y creciente. Cuando la

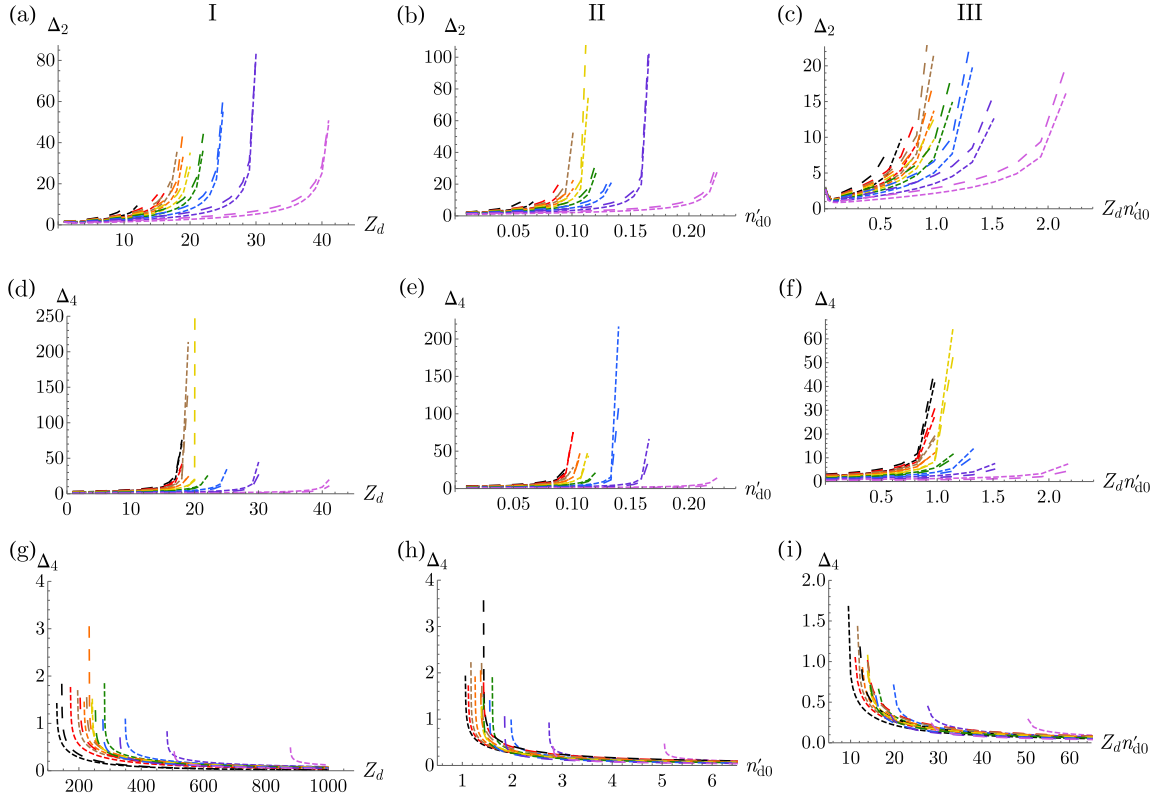


Figura 7: Ancho Δ del solitón (3.36) versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III). Los paneles (a)–(c) muestran el ancho asociado al modo lento, mientras que los paneles (d)–(i) representan el modo rápido. Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{e0} = 0.1$ ($\beta_{e0} = 0.75$), que representan electrones débilmente relativistas (relativistas) en el fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{i0} = 0.1$ (negro), $\beta_{i0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{i0} = 0.3$ (café), $\beta_{i0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{i0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{i0} = 0.6$ (verde), $\beta_{i0} = 0.7$ (azul), $\beta_{i0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{i0} = 0.9$ (rosado).

velocidad de los iones aumenta, y los electrones de fondo son débilmente relativistas, el rango para Z_d y n'_{d0} en el cual se sostienen los solitones crece también. Esto ocurre de igual manera al introducir efectos relativistas en los electrones de fondo, pero estos rangos para Z_d y n'_{d0} disminuyen sutilmente, mientras el solitón se hace levemente más ancho. En los paneles (d)–(f) correspondientes al ancho del solitón para el modo

rápido de propagación y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ baja, se observan efectos similares a los del modo lento, con la diferencia de que los solitones son más anchos cuando los electrones de fondo son relativistas y los iones tienen velocidad de hasta $\beta_{i0} = 0.4$ (color naranja). Para $\beta_{i0} = 0.5$ (color amarillo), el ancho se mantiene más o menos igual, independiente de los efectos relativistas en los electrones. Cuando los electrones de fondo son débilmente relativistas, los solitones son más anchos para velocidades desde $\beta_{i0} = 0.6$ hasta $\beta_{i0} = 0.9$.

En los paneles (g)–(i), se tiene el ancho del soliton para densidades de carga $Z_d n'_{d0}$ altas, en donde lo que sucede con el ancho es un poco más difuso. En este caso, los solitones empiezan a existir para densidades de carga más grandes cuando los electrones de fondo son débilmente relativistas mientras la velocidad de los iones crece. Con estas condiciones, el solitón es más ancho en comparación a cuando los electrones de fondo se mueven con velocidades relativistas.

El caso de velocidades contrarias está presente en la Figura 8, en donde la especie de fondo son los iones. En esta figura es más clara la diferencia entre iones débilmente relativistas (línea discontinua corta) e iones relativistas (línea discontinua larga) de fondo, en comparación con la anterior. Para el modo lento, se tiene el ancho del solitón en los paneles (a)–(c). Se observa un comportamiento similar al mostrado en la Figura 7, en donde los iones relativistas producen solitones más anchos, con la excepción del caso en que $\beta_{e0} = 0.4$, en donde el solitón es más ancho para iones de fondo débilmente relativistas.

Para el modo rápido y densidades de carga $Z_d n'_{d0}$ bajas y altas, ocurre lo opuesto, como se muestra en los paneles (d)–(i). Para estos parámetros, los iones débilmente relativistas son los que producen solitones más anchos.

Otra característica relevante de los solitones es su amplitud, que se analiza en

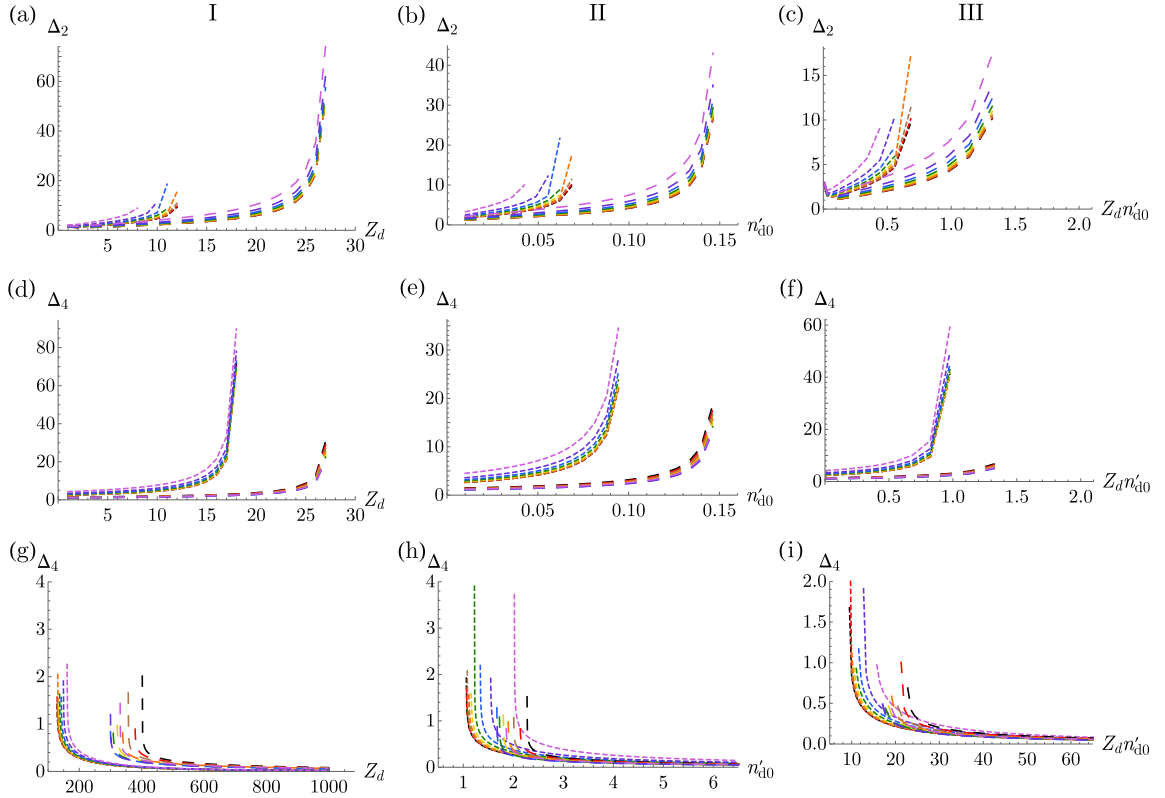


Figura 8: Ancho Δ del solitón (3.36) versus Z_d cuando $n'_{d0} = 0.055$ (columna I), versus n'_{d0} cuando $Z_d = 10$ (columna II) y versus $Z_d n'_{d0}$ (columna III). Los paneles (a)–(c) muestran el ancho asociado al modo lento, mientras que los paneles (d)–(i) representan el modo rápido. Las líneas discontinuas cortas (largas) corresponden a $\beta_{i0} = 0.1$ ($\beta_{i0} = 0.75$), que representan iones débilmente relativistas (relativistas) en el fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los electrones: $\beta_{e0} = 0.1$ (negro), $\beta_{e0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{e0} = 0.3$ (café), $\beta_{e0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{e0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{e0} = 0.6$ (verde), $\beta_{e0} = 0.7$ (azul), $\beta_{e0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{e0} = 0.9$ (rosado).

las Figuras 9 y 10 con respecto a Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$. En este caso los solitones son de potencial electrostático, cuya amplitud puede ser positiva o negativa. Esto da origen a solitones compresivos y rarefactivos, respectivamente.

Para el modo lento, se puede ver en los paneles (a)–(c) de la Figura 9, que para todos los valores posibles de densidad de carga $Z_d n'_{d0}$, los solitones que se producen

son rarefactivos. Dentro de esto mismo, son los electrones débilmente relativistas los que producen mayores hendiduras de potencial a medida que crece la velocidad de los iones, es decir, se hacen cada vez más negativos.

Por otro lado, para el modo rápido y baja densidad de carga $Z_d n'_{d0}$, se tienen los paneles (d)–(f) de la Figura 9. Bajo estas condiciones se manifiesta que los valores que pueda tomar la amplitud son muy sensibles a los cambios en la velocidad de los iones y los electrones. Se pueden observar discontinuidades que hacen que el solitón pase de ser compresivo a rarefactivo en diferentes puntos de la densidad de carga del polvo, y cada discontinuidad es distinta, dependiendo del valor de la velocidad de las especies. Este comportamiento es igual para los paneles (g)–(i), en donde la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ es mucho más alta.

Si se analiza la forma que tienen las expresiones que describen la amplitud y el ancho del solitón (3.36), se tiene que $\phi_0 = 3V/p$ y $\Delta = \sqrt{4q/V}$, respectivamente. Las discontinuidades presentes en las Figuras 9 y 10 se deben a que para alguna combinación de los parámetros estudiados, el coeficiente no lineal es $p = 0$. Este coeficiente se compone de expresiones que acompañan a la parte no lineal de la ecuación (3.33), A , y a expresiones que acompañan a la parte temporal B , de la misma ecuación. Con esto se tiene que $\phi_0 = 3VB/A$, por lo que en los puntos de discontinuidad de la amplitud, la parte no lineal de (3.33) es $A = 0$. Por otro lado, la amplitud del solitón no posee ninguna discontinuidad, ya que $\Delta = \sqrt{4/VB}$, y para este espacio de parámetros, los términos temporales de la eq. (3.33), en ningún momento son nulos. Esto quiere decir que la amplitud del solitón crece infinitamente mientras el ancho se mantiene finito.

En la Figura 10 se muestra lo mismo que en la Figura 9, pero esta vez la especie de fondo son los iones. El comportamiento es muy similar al descrito en la figura anterior,

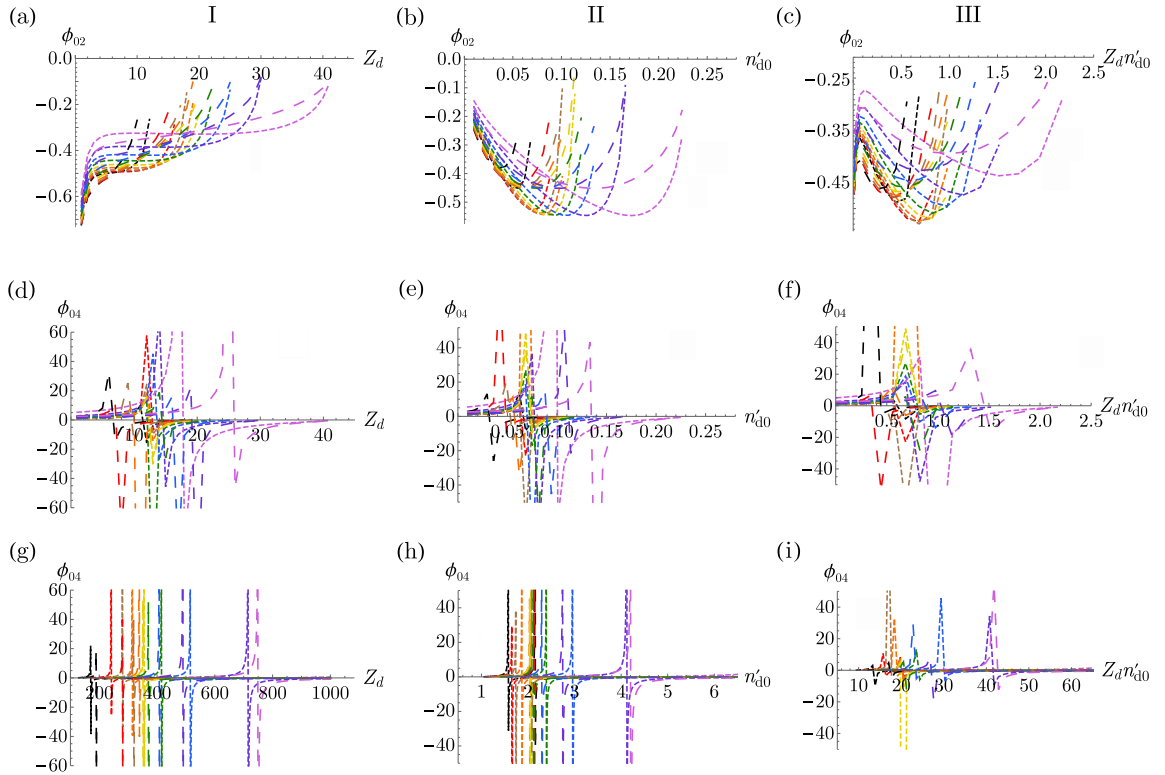


Figura 9: Igual que en la Fig. 7, pero para la amplitud del solitón (3.36).

en donde para el modo lento se tienen solitones rarefactivos, mientras que para el modo rápido pueden ser compresivos o rarefactivos dependiendo de la velocidad de las especies y del valor de la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$. En este caso se siguen presentando discontinuidades producidas por las mismas razones que lo visto en la Figura 9, y se sigue observando que la amplitud es sensible al cambio de velocidad de los iones y los electrones, por lo que se revisará con mayor detalle en las siguientes figuras.

Para estudiar cómo impacta el cambio de velocidades en la amplitud, se realizan dos tipos de gráficos: uno de la amplitud ϕ_0 versus β_{e0} y otro versus β_{i0} . El primer caso se tiene en la Figura 11, en donde se fija el valor de la densidad de carga y se grafica la amplitud mientras varía la velocidad de los electrones. En el panel (a) se tiene la amplitud para el modo lento y densidad de carga baja, en donde se tiene que

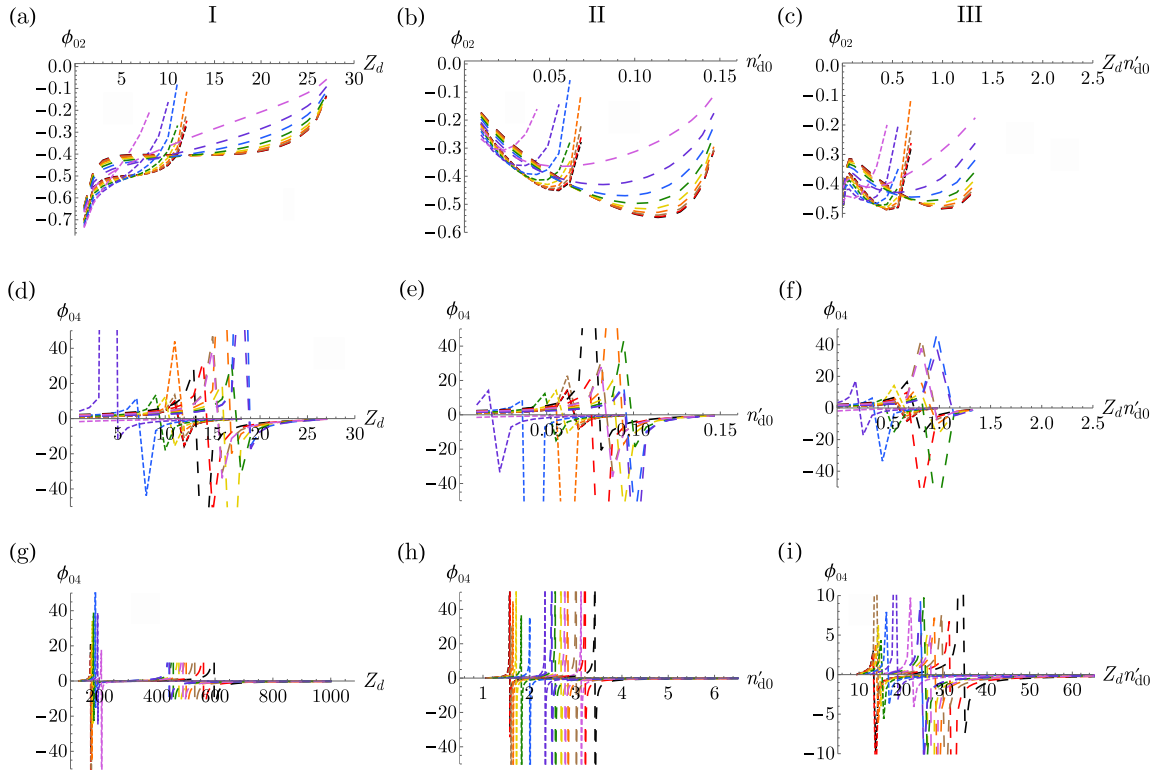


Figura 10: Igual que en la Fig. 8, pero para la amplitud del solitón (3.36).

los solitones son rarefactivos, independiente del valor de β_{e0} , para cierto valor de β_{i0} . Para velocidades débilmente relativistas de los electrones, se tiene que la amplitud del solitón se hace más negativa para iones débilmente relativistas (hasta $\beta_{i0} = 0.2$), para luego aumentar su amplitud, haciéndose menos negativa. Esta tendencia se mantiene para valores más grandes de β_{e0} , hasta que para valores más cercanos a $\beta_{e0} \sim 1.0$ se invierte. En el panel (b) se muestra la amplitud ϕ_0 del solitón para el modo rápido y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ baja. Para distintos valores de β_{i0} , se ven discontinuidades en la amplitud a medida que va creciendo β_{e0} . Estos solitones parten siendo compresivos y disminuyendo su amplitud, para luego de la discontinuidad, pasar a ser rarefactivos. Para este último caso, mientras más crece la velocidad de los electrones y de los iones, la amplitud se va más rápido a cero. En el panel (c) se

tiene la amplitud del solitón para el modo rápido, pero densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ alta. En este caso, el solitón es mayormente rarefactivo, salvo para $\beta_{i0} = 0.9$, en donde la amplitud del solitón es positiva desde $\beta_{e0} \sim 0.2$ hasta $\beta_{e0} \sim 0.75$, para luego tener amplitud negativa. Las discontinuidades que se muestran en los paneles (b) y (c) son consistentes con lo que se observa en las Figuras 9 y 10, ya que estas discontinuidades ocurren por las mismas razones anteriores, es decir, para $A = 0$.

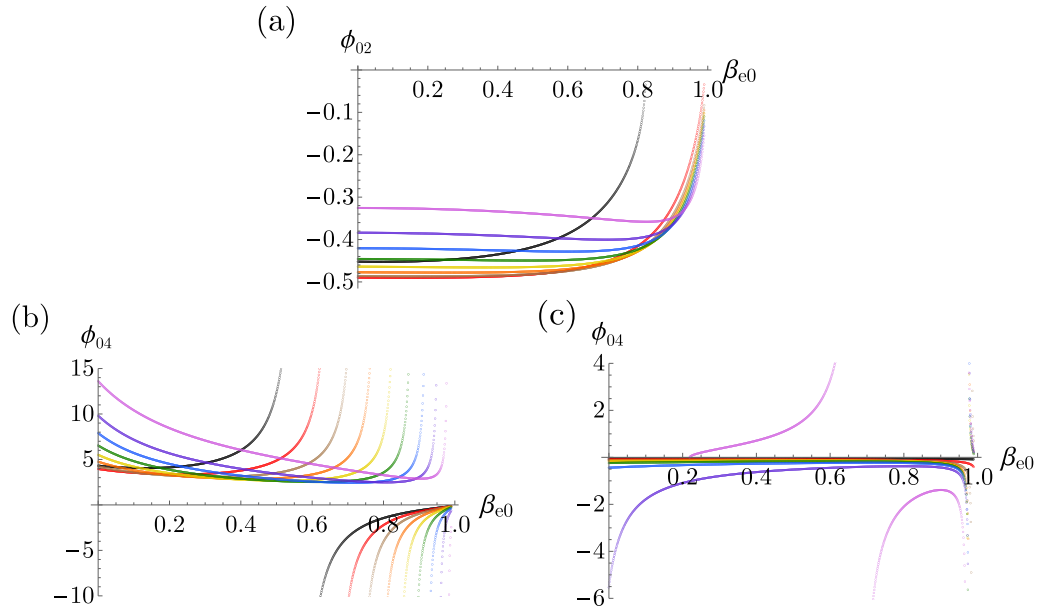


Figura 11: (a) Amplitud ϕ_0 del solitón versus β_{e0} para el modo lento y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ baja. (b) Amplitud ϕ_0 del solitón versus β_{e0} para el modo rápido y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ baja. (c) Amplitud ϕ_0 del solitón versus β_{e0} para el modo rápido y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ alta. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{i0} = 0.1$ (negro), $\beta_{i0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{i0} = 0.3$ (café), $\beta_{i0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{i0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{i0} = 0.6$ (verde), $\beta_{i0} = 0.7$ (azul), $\beta_{i0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{i0} = 0.9$ (rosado).

En la Figura 12 se tiene el caso contrario a el ya descrito, en donde la amplitud depende de la velocidad de los iones β_{i0} , para distintos valores de β_{e0} . El panel (a) es similar al de la Figura 11, en donde se muestra la amplitud del solitón para el modo

lento y densidad de carga baja. La amplitud sigue siendo negativa, haciendo que los

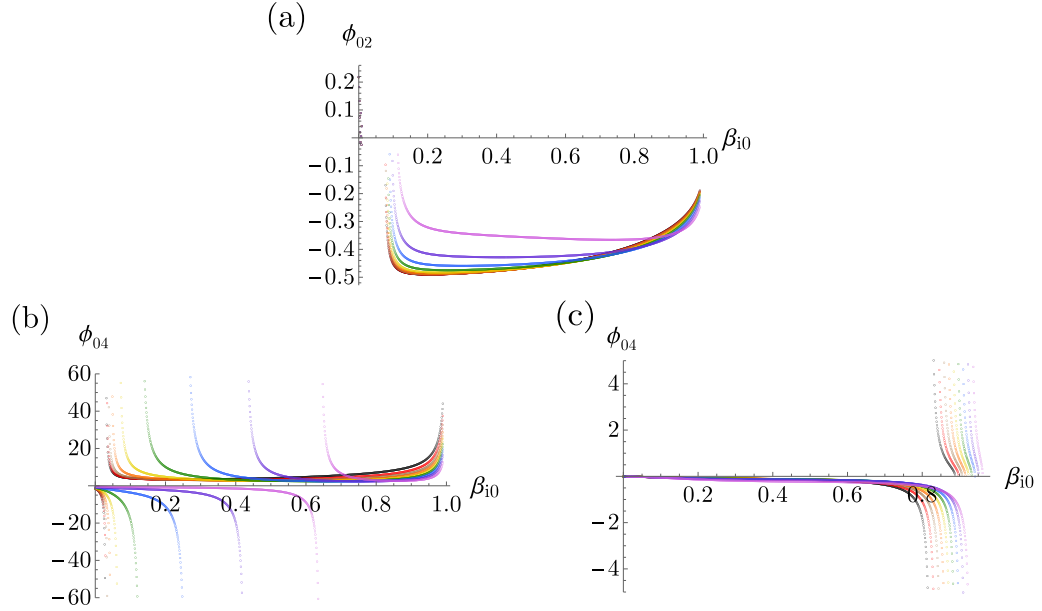


Figura 12: (a) Amplitud ϕ_0 del solitón versus β_{i0} para el modo lento y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ baja. (b) Amplitud ϕ_0 del solitón versus β_{i0} para el modo rápido y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ baja. (c) Amplitud ϕ_0 del solitón versus β_{i0} para el modo rápido y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ alta. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los electrones: $\beta_{e0} = 0.1$ (negro), $\beta_{e0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{e0} = 0.3$ (café), $\beta_{e0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{e0} = 0.5$ (amarillo), $\beta_{e0} = 0.6$ (verde), $\beta_{e0} = 0.7$ (azul), $\beta_{e0} = 0.8$ (violeta) y $\beta_{e0} = 0.9$ (rosado).

solitones sean rarefactivos. La amplitud es cada vez menos negativa para valores más grandes de β_{i0} , al mismo tiempo que va aumentando β_{e0} , hecho que se invierte para valores más grandes de β_{i0} . Para valores inferiores a $\beta_{i0} \sim 0.1$, se observa una zona en donde la amplitud toma valores complejos, y que es real muy cerca de cero.

En el panel (b) se presenta la amplitud para el modo rápido, pero densidad de carga baja. Al igual que en la Figura 11, los solitones pueden ser compresivos o rarefactivos dependiendo del valor de las velocidades de las especies. Para todos los valores revisados de β_{e0} , la amplitud parte siendo negativa, decrece infinitamente,

y luego se vuelve positiva a medida que crece β_{i0} . Luego de $\beta_{i0} \sim 0.8$, la amplitud del solitón es más grande para velocidades pequeñas de los electrones. El panel (c) muestra la amplitud para el modo rápido y densidad de carga $Z_d n'_{d0}$, que al igual que en el panel (b), los solitones comienzan siendo compresivos. Esto es cierto hasta valores cercanos a $\beta_{i0} \sim 0.8$, en donde luego de decrecer infinitamente, la amplitud se invierte. Los solitones tienen una amplitud más negativa para valores relativistas de la velocidad de los electrones, cosa que también se invierte pasado $\beta_{i0} \sim 0.6$, en donde son las velocidades más pequeñas las que producen solitones más negativos. Estas discontinuidades, al igual que las estudiadas en las Figuras 9–12, se deben a que en esos puntos las expresiones que acompañan al término no lineal de la ecuación (3.33) son nulas, es decir, $A = 0$.

4.4. Perfil del solitón y relevancia de los efectos relativistas

En esta sección se muestra la forma explícita que poseen los solitones que han sido encontrados bajo todas las condiciones de existencia que se han estudiado en este capítulo, además de revisar el impacto de los efectos relativistas en los iones y electrones en la forma de de estas estructuras localizadas.

En las siguientes figuras se definen como especies no relativistas a aquellas que las describen las ecuaciones de continuidad (3.1), movimiento (3.2) y de Poisson (3.3), cuando el parámetro a es nulo y cuando $\gamma_{j0} = 1$. También se considera una densidad de carga baja cuando $Z_d = 10$ y $n'_{d0} = 0.055$, y una alta cuando $Z_d = 300$ y $n'_{d0} = 0.15$.

Con esto en mente, realizamos la Figura 13, en donde se tiene el perfil del solitón que existe para el modo lento y densidad de carga baja. En el panel (a) se grafica

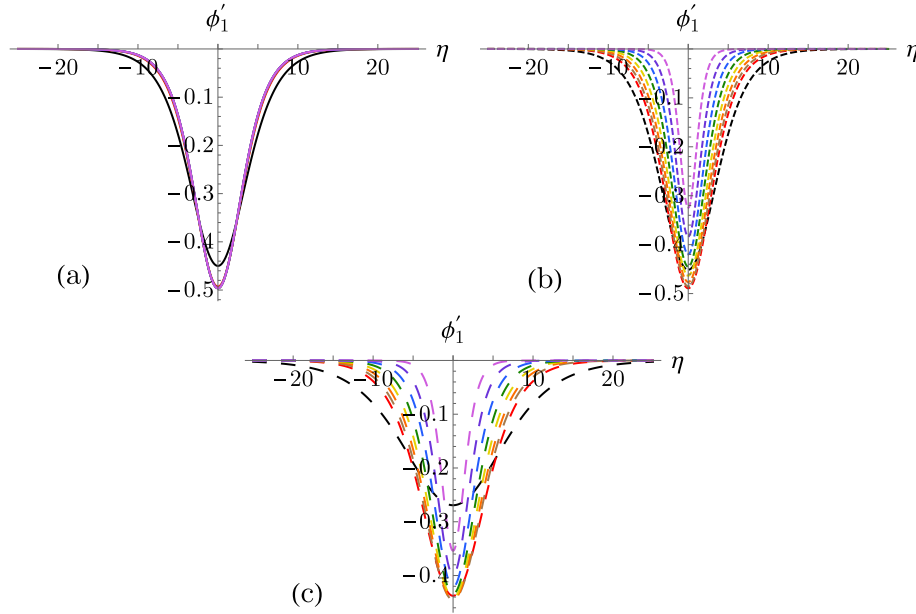


Figura 13: Perfil del solitón ϕ'_1 para el modo lento y densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$. El tipo de línea representa (a) especies sin efectos relativistas (línea continua), (b) efectos débilmente relativistas en los electrones de fondo con $\beta_{e0} = 0.1$ (línea discontinua corta) y (c) efectos relativistas en los electrones de fondo con $\beta_{e0} = 0.75$ (línea discontinua larga). Los colores representan distintos valores para la velocidad de los iones, al igual que en las otras figuras.

este perfil cuando los electrones y los iones son no relativistas. Salvo para velocidades muy pequeñas de iones y electrones (línea negra), la amplitud y el ancho del solitón es la misma, independiente del valor que tenga la velocidad de cualquiera de las especies. Se puede notar que esto cambia al incluir efectos relativistas en las especies, como se puede ver en los paneles (b) y (c). En el primer caso, se tienen electrones débilmente relativistas de fondo, en donde se ve que mientras aumenta la velocidad de los iones, la amplitud y ancho del solitón disminuyen, salvo para $\beta_{i0} = 0.1$ (línea discontinua corta negra), que comienza siendo menos negativo y más ancho que el solitón de la velocidad que sigue (color rojo). En el panel (c) se ve el perfil del solitón para electrones de fondo relativistas, en donde se puede ver que la amplitud de los

solitones se hace menos negativa hasta $\beta_{i0} = 0.6$ (color verde), para luego hacerse más negativa que en el caso del panel (b). Cuando los electrones de fondo son relativistas, los solitones son siempre más anchos en comparación al caso débilmente relativista, pero en ambos casos, son más angostos que cuando no hay ningún efecto relativista presente en las ecuaciones.

Posteriormente, se tienen los solitones para el modo rápido en la Figura 14. En los paneles (a)–(c) la densidad de carga es baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$, y en los paneles (d)–(f) la densidad de carga es alta $Z_d n'_{d0} = 45$. En el caso no relativista, a diferencia del modo lento, los solitones son positivos sin importar el valor que puedan tener las velocidades de las especies. Para valores de β_{i0} más pequeños, se obtienen solitones de mayor ancho y amplitud, características que van disminuyendo a medida que crece β_{i0} , para luego mantenerse sin cambios. Al introducir efectos relativistas en las ecuaciones, para electrones débilmente relativistas en el fondo, se aprecian cambios notorios en el ancho y la amplitud de los solitones del panel (b) en comparación a los del panel (a). En primer lugar, dependiendo del valor de la velocidad de los iones, se tienen solitones compresivos con mayor amplitud y más angostos. Para $\beta_{i0} = 0.1$ (negro) y $\beta_{i0} = 0.2$ (rojo), el solitón decrece su amplitud y su ancho, para luego crecer y enangostarse. Al aumentar la velocidad de los electrones a rangos relativistas, se ve que dependiendo del valor de la velocidad de los iones, se presentan solitones compresivos y rarefactivos, como se muestra en el panel (c). A diferencia del panel (b), las velocidades de iones más pequeñas producen solitones con amplitud negativa y más anchos (negro, rojo y café). Las velocidades de iones más grandes producen solitones compresivos de variadas amplitudes y anchos, que pueden crecer, igualar o ser más pequeños mientras β_{i0} sigue aumentando, lo cual es consistente con lo observado en las Figuras 7–12. Cuando la densidad de carga es alta, se ve en los

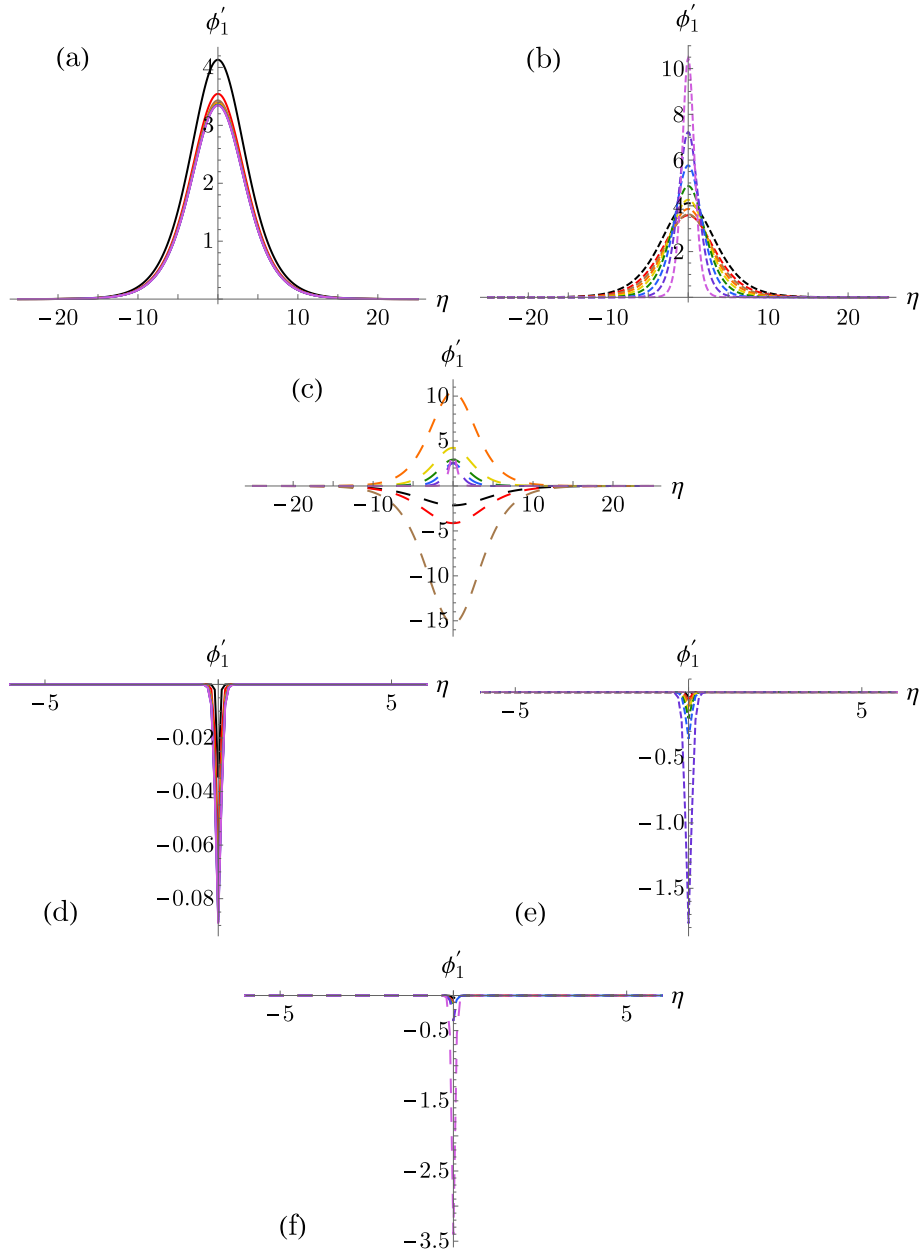


Figura 14: (a)–(c) Perfil del solitón ϕ_1' para el modo rápido y densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$. (d)–(f) Perfil del solitón ϕ_1' para el modo rápido y densidad de carga alta $Z_d n'_{d0} = 45$. El tipo de línea representa especies sin efectos relativistas (línea continua), efectos débilmente relativistas es los electrones de fondo con $\beta_{e0} = 0.1$ (línea discontinua corta) y efectos relativistas en los electrones de fondo con $\beta_{e0} = 0.75$ (línea discontinua larga). Los colores representan distintos valores para la velocidad de los iones, al igual que en las otras figuras.

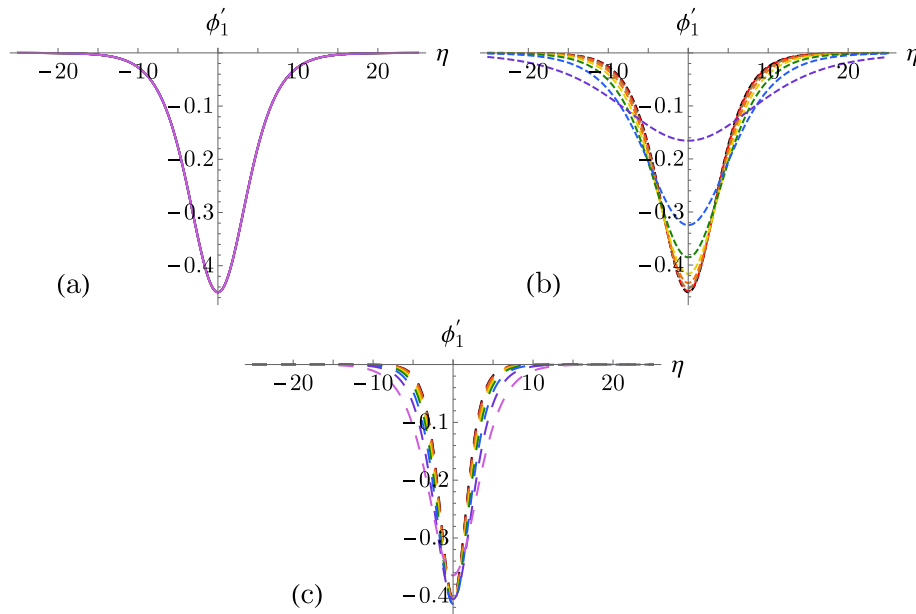


Figura 15: Igual que para la Figura 13, pero con los iones como especie de fondo.

paneles (d)–(f) que estas estructuras localizadas son notoriamente más angostas que lo que se ha revisado hasta ahora. También son rarefactivas y su amplitud es cada vez más negativa a medida que aumenta la velocidad de los iones y los electrones.

Se pueden realizar figuras similares para el caso en que los iones son la especie de fondo, en donde se muestran los solitones para el modo lento en la Figura 15 y para el modo rápido en la Figura 16. En ambas situaciones, el comportamiento general de la forma que poseen los solitones es el mismo que el presentado en las Figuras 13 y 14, en donde para el modo lento los solitones son rarefactivos y para el modo rápido dependen de manera sensible de la velocidad que poseen las especies, siendo consistente con lo estudiado en las Figuras 7–12.

Como los iones son una especie más masiva que los electrones, se observa en ambos modos que es menos notoria la diferencia entre perfiles al aumentar la velocidad de los electrones que de los iones. Esto mismo hace que no se detecten diferencias

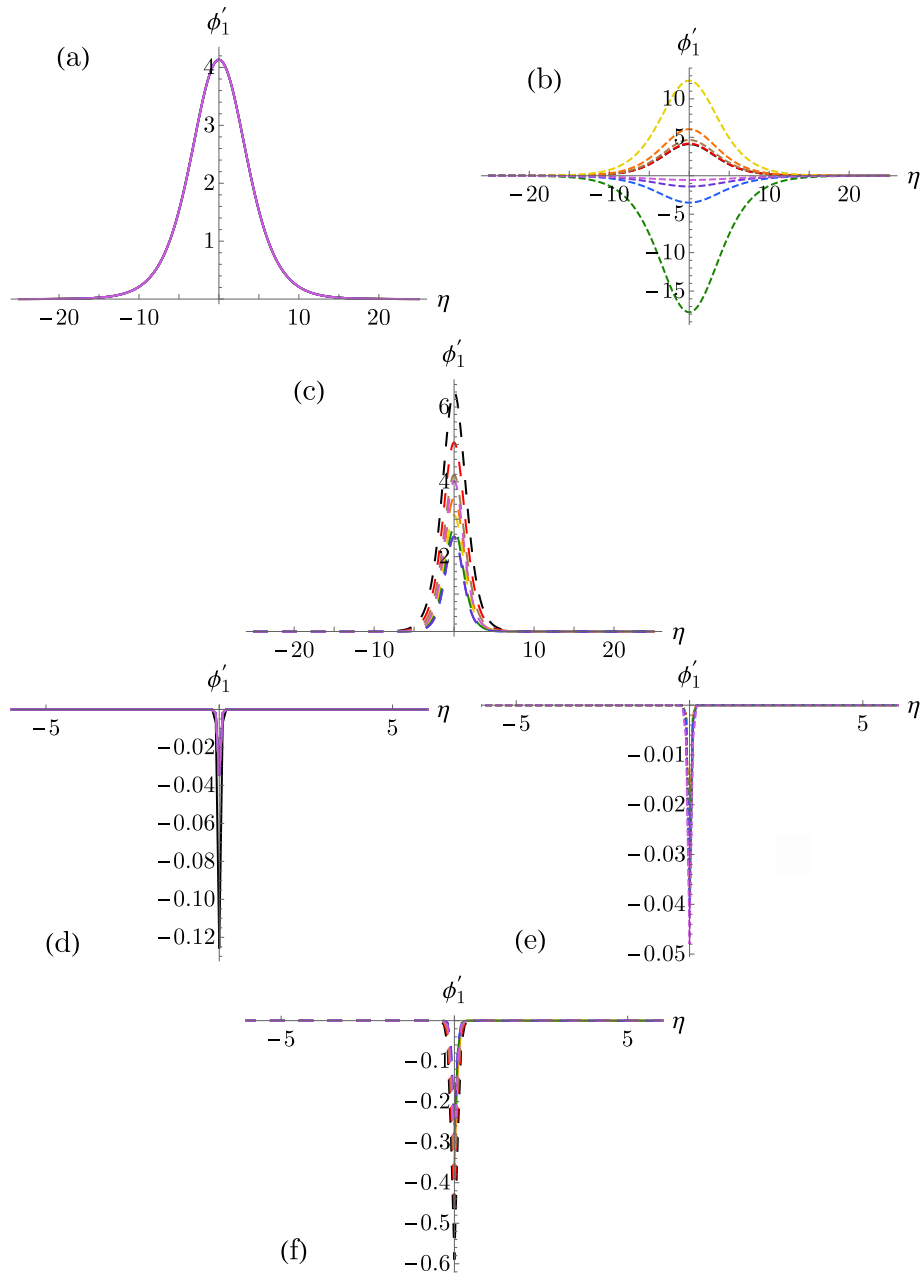


Figura 16: Igual que para la Figura 14, pero con los iones como especie en el fondo.

exageradas en la forma del solitón en los paneles (a) y (d) de las Figuras 15 y 16, en donde el modelo no posee efectos relativistas.

4.5. Discusión y resumen

Es este capítulo se estudia la existencia y forma de solitones en un plasma polvoriento y completamente relativista en la velocidad de las especies que lo componen. Para determinar la existencia de estas estructuras localizadas, es necesario que el coeficiente de dispersión q , de la ecuación KdV (3.33) sea positivo, ya que de esta manera el solitón (3.36) corresponde a una solución de dicha ecuación. El coeficiente de dispersión depende explícitamente de la velocidad de fase M de este plasma, por lo que en la Sección 4.1, se revisan las cuatro soluciones de la ecuación de Poisson (3.22), que proporcionan los modos de propagación que pueden hacer que q sea positivo. Estas cuatro soluciones existen para dos casos: uno en donde los electrones mantienen dos velocidades fijas, una con un valor débilmente relativista ($\beta_{e0} = 0.1$) y otra con un valor relativista ($\beta_{e0} = 0.75$), mientras aumenta de manera discreta la velocidad de los iones desde $\beta_{i0} = 0.1$ hasta $\beta_{i0} = 0.9$; el otro caso es completamente opuesto, en donde son los iones los que se mantienen con velocidades fijas de fondo ($\beta_{i0} = 0.1$ y $\beta_{i0} = 0.75$), y que los electrones aumentan discretamente su velocidad desde $\beta_{e0} = 0.1$ hasta $\beta_{e0} = 0.9$. Cuando los electrones están de fondo, se presenta la Figura 1, con las cuatro soluciones para la velocidad de fase M . Dos de ellas son llamadas los modos lentos, M_1 y M_2 , y las otras dos los modos rápidos, M_3 y M_4 . El modo más lento M_1 posee valores negativos para Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$ en donde M_1 es real, que dependerán de las velocidades de los electrones y los iones, ya que para cada tipo de línea y color, se tiene un número distinto de la densidad de carga. Estos valores son cercanos a $Z_d \sim 40$, $n'_{d0} \sim 0.24$ y $Z_d n'_{d0} \sim 2.3$ para las velocidades más

grandes. De igual manera sucede para M_2 , en donde esta vez, este modo lento son positivos. También posee los mismos valores para Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$, dependiendo de la velocidad de las especies para los cuales M_2 es real. Para los modos lentos, se puede observar una leve diferencia en el valor de M que depende de si los electrones de fondo son débilmente relativistas (línea discontinua corta) o relativistas (línea discontinua larga), para distintas velocidades de los iones (cambio de color en la línea). El caso de los modos rápidos es similar, con la diferencia de que existe una zona intermedia en donde M no es real, lo que separa las soluciones en dos rangos: densidad de carga baja y alta, con los valores de Z_d y n'_{d0} que le correspondan. Para la rama con los valores bajos, M_3 es decreciente y M_4 creciente, además de tener los mismos límites que se mostraron en el modo lento para la densidad y número de carga. Para la rama con los valores altos y velocidad pequeña de los iones (color negro), el modo empieza a existir a partir de $Z_d \sim 180$, $n'_{d0} \sim 1$ y $Z_d n'_{d0} \sim 10$. Mientras crece la velocidad de los iones (cambio de color), los rangos en donde empieza a existir la solución para M también crecen, en particular cuando los electrones de fondo son débilmente relativistas.

Cuando la especie de fondo se invierte, se tiene la Figura 2, en donde el comportamiento general para la velocidad de fase es muy parecido al ya descrito para la Figura 1. Se pueden apreciar dos diferencias de manera inmediata: la primera es que los rangos en que la velocidad de fase es real son notoriamente distintos para cuando los iones de fondo son débilmente relativistas y cuando son relativistas (cambio en el tipo de línea), y la otra es que las soluciones se agrupan por tipo de línea y no por color, como en el caso anterior. Esto indica que se puede apreciar un mayor impacto en la velocidad de fase cuando es la especie masiva la que cambia su velocidad desde rangos débilmente relativistas a relativistas, aunque ambos casos son consistentes

entre sí y muestran los mismos efectos de modo general.

Una vez que se tienen estas cuatro soluciones para la velocidad de fase, con ellas se estudia cuál de estos modos puede originar estructuras localizadas según la ecuación de KdV (3.33). Para que esto pase, el coeficiente de dispersión q debe ser positivo, lo que se muestra en las Figuras 3 y 4. El modo lento M_2 y el modo rápido M_4 , son las soluciones que producen $q > 0$, en donde se tiene en escala logarítmica, un comportamiento muy similar al de las Figuras 1 y 2. Esta escala es útil para poder identificar las zonas donde el coeficiente de dispersión es positivo, sin entorpecer la figura con escalas muy grandes. Los valores de existencia para Z_d , n'_{d0} y $Z_d n'_{d0}$ son los mismos que ya se han reportado.

Como se observa una clara diferencia en los efectos que tiene que los electrones o los iones sean la especie de fondo, se hace el análisis con positrones en la Subsección 4.2.1. Los positrones, al tener la misma masa que los electrones, quitan la asimetría que traen las masas distintas, como se observa en las Figuras 5 y 6. Estas figuras siguen presentando algunas diferencias con respecto al caso con iones en lugar de positrones, y entre sí, pero se puede quitar la variable masa como una de las causales. La existencia de los solitones se da para las cuatro velocidades de fase y no para dos como en el caso anterior, lo que permite ver que el caso con positrones es más profundo que lo que se estudia en este capítulo, dejando la posibilidad de continuar por este camino en un futuro.

Con respecto a los solitones en sí, se caracterizan en las figuras siguientes, en donde se estudia detalladamente su ancho y su amplitud según la información obtenida hasta ese punto, como cuáles velocidades de fase producen solitones, para qué valores de la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ y para qué velocidades de iones y electrones. El aumento en la densidad de carga de las partículas de polvo tiende a ensanchar

los solitones producidos del modo lento, al introducir especies relativistas al plasma, característica que se invierte para el modo rápido. Cuando la densidad de carga sigue aumentando en el modo rápido, los solitones vuelven a ser más anchos, como se aprecia en las Figuras 7 y 8. En cuanto a la amplitud de los solitones, es difícil generalizar su comportamiento ya que, como se ha visto detalladamente en las Figuras 9-12, su variación es altamente sensible al cambio en la velocidad de las especies cuando se introducen efectos relativistas. En las Figuras 13-16, se muestra que el modo rápido es más sensible a los cambios de velocidad que el modo lento.

Hay que notar que en este capítulo se explora de la manera más general posible los parámetros libres que posee este modelo de plasma polvoriento. Por esta razón hay que tener en mente que tal vez algunas combinaciones de parámetros no tienen mucho sentido físico, aunque las ecuaciones permitan que sea posible. Un ejemplo es la gran diferencia que existe entre las velocidades de los iones y los electrones en algunos casos, que puede llevar a inestabilidades en el plasma. Todo esto con el fin de ser rigurosos y por completitud. Por lo tanto, estos casos con menos sentido físico podrían ser discriminados en un futuro, al estudiar este plasma por medio de simulaciones numéricas.

Capítulo 5

Plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo

En el Capítulo 3 se estudió la forma de las ecuaciones para un plasma con partículas de polvo, homogéneo, relativista y no magnetizado. Dichas expresiones fueron perturbadas no linealmente, y luego de trabajo algebraico, se encuentra una ecuación de KdV. Esto implica que, dependiendo de los valores de los parámetros del sistema, existen solitones capaces de sostenerse en el plasma. El análisis de los coeficientes que permiten lo anterior, se realizó de manera numérica y gráfica en el Capítulo 4, donde se puede observar que dada una velocidad de fase determinada, el coeficiente de dispersión q es positivo, produciendo solitones. En conjunto a esto, se estudió que dicho solitón posee un ancho y una amplitud definidos, los cuales son sensibles a los efectos relativistas en los electrones y los iones.

El objetivo de este capítulo es mostrar y analizar los cambios que los resultados anteriores puedan presentar debido a la presencia de un campo magnético externo y homogéneo en este sistema, que debido a esto, es anisotrópico. Esto implica que las partículas se comportan de manera distinta si se mueven en dirección paralela al campo magnético o perpendicular. En la Sección 5.1 se hace una revisión de la nueva forma para las ecuaciones de continuidad, movimiento y de Poisson para este plasma

magnetizado y con partículas de polvo, que luego es perturbado no linealmente en la Sección 5.2, para posteriormente determinar la existencia de solitones en este sistema, en la Sección 5.3.

5.1. Ecuaciones

A diferencia de las ecuaciones presentadas en el Capítulo 3, para hacer el análisis en presencia un campo magnético, es necesario volver a la forma vectorial de las mismas. El campo magnético supone una ruptura en la simetría espacial del plasma, y por lo tanto, de sus ecuaciones y los posibles solitones que se puedan propagar.

Volviendo al Capítulo 2, revisamos la forma que tienen las ecuaciones adimensionales que describen la dinámica de un plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo en (2.19), (2.20) y (2.21). Si se supone un campo magnético de fondo en la dirección z' , $\vec{B} = B_0 \hat{z}'$ y que las perturbaciones pueden propagarse en el espacio de tres dimensiones, entonces el análisis que hay que desarrollar puede depender de un ángulo de propagación con respecto al campo magnético, debido a que no es igual la propagación perpendicular a la paralela al campo magnético. Este ángulo puede definirse en el plano (x', z') o (y', z') , ya que ambas alternativas son análogas. En esta ocasión se elige el plano (x', z') , lo que permite utilizar $\partial_{y'} = 0$, para la simplicidad de los cálculos.

Utilizando lo descrito anteriormente, escribimos la ecuación de continuidad, de movimiento y de Poisson como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t'} (n'_j \gamma_j) + \frac{\partial}{\partial x'} (n'_j \gamma_j v'_{jx'}) + \frac{\partial}{\partial z'} (n'_j \gamma_j v'_{jz'}) = 0 , \quad (5.1)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'_{jx'} \frac{\partial}{\partial x'} + v'_{jz'} \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\gamma_j v'_{jx'}) = \eta_j n'_j \gamma_j \frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \eta_j n'_j \gamma_j \Omega' v'_{jy'} - \alpha_j \frac{\partial n'_j}{\partial x'} , \quad (5.2)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'_{jx'} \frac{\partial}{\partial x'} + v'_{jz'} \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\gamma_j v'_{jy'}) = \eta_j n'_j \gamma_j \Omega' v'_{jx'} , \quad (5.3)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'_{jx'} \frac{\partial}{\partial x'} + v'_{jz'} \frac{\partial}{\partial z'} \right) (\gamma_j v'_{jz'}) = \eta_j n'_j \gamma_j \frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \alpha_j \frac{\partial n'_j}{\partial z'} , \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z'^2} = \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j . \quad (5.5)$$

En este caso, como el problema es en el espacio tridimensional, el factor relativista de Lorentz queda

$$\gamma_j = \left(1 - \frac{av_j'^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{av_j^2}{c^2} \right)^{-1/2} ,$$

considerando que $v_j'^2 = v_{jx'}^2 + v_{jy'}^2 + v_{jz'}^2$. De igual manera que en el caso no magnetizado, la variable a representa los efectos relativistas en la expresión, lo que facilita poder identificar los términos que provienen de dichos efectos. Para $a = 0$ se tiene el caso no relativista y para $a = 1$, el caso relativista.

5.2. Perturbaciones no lineales

De manera análoga a la metodología presentada en el Capítulo 3, resolvemos este sistema de ecuaciones para el potencial electrostático ϕ' , ya que es esta magnitud física la que acopla las cantidades características de este plasma polvoriento. Entonces, se comienza el estudio de este sistema magnetizado, definiendo un ángulo θ que permite analizar la propagación de las ondas con respecto al campo magnético en el plano. Esto se traduce en la dirección de propagación $\hat{k}' = \sin \theta \hat{x}' + \cos \theta \hat{z}'$,

donde si $\theta = 0$, se recupera el caso no magnetizado. Por lo tanto, se realizan perturbaciones no lineales finitas y pequeñas, en donde se introduce un sistema de coordenadas que es solidario con la propagación de las ondas en el plasma. Este nuevo sistema de coordenadas es similar al del caso no magnetizado, pero con la diferencia de que evidencia la proyección en el espacio debido a la presencia del campo magnético. Esto, a través de la dirección de propagación \hat{k}' de la forma $\xi = \varepsilon^{1/2} (\hat{k}' \cdot \vec{r}' - Mt')$ $= \varepsilon^{1/2} (x' \sin \theta + z' \cos \theta - Mt')$ para la coordenada espacial y $\tau = \varepsilon^{3/2} t'$ para la coordenada temporal. De igual manera que en el Capítulo 3, $\varepsilon \ll 1$ es un parámetro pequeño que representa la no linealidad del sistema y M la velocidad de fase de la onda que se propaga.

A partir de lo anterior, se reescriben las ecuaciones de continuidad (5.1), de movimiento en el espacio (5.2), (5.3) y (5.4), y de Poisson (5.5), en función de estas nuevas coordenadas como sigue:

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - M \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (n'_j \gamma_j) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} (n'_j \gamma_j v'_{jx'}) + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} (n'_j \gamma_j v'_{jz'}) = 0, \quad (5.6)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left[\varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^{1/2} (v'_{jp} - M) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] (\gamma_j v'_{jx'}) = \quad (5.7)$$

$$\varepsilon^{1/2} \eta_j n'_j \gamma_j \sin \theta \frac{\partial \phi'}{\partial \xi} - \eta_j n'_j \gamma_j \Omega' v'_{jy'} - \varepsilon^{1/2} \alpha_j \sin \theta \frac{\partial n'_j}{\partial \xi},$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left[\varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^{1/2} (v'_{jp} - M) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] (\gamma_j v'_{jy'}) = \eta_j n'_j \gamma_j \Omega' v'_{jx'}, \quad (5.8)$$

$$n'_j \gamma_j Q_j \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + (v'_{jp} - M) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] (\gamma_j v'_{jz'}) = \eta_j n'_j \gamma_j \cos \theta \frac{\partial \phi'}{\partial \xi} - \alpha_j \cos \theta \frac{\partial n'_j}{\partial \xi}, \quad (5.9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \xi^2} = \sum_j \eta_j n'_j \gamma_j, \quad (5.10)$$

en donde se define $v'_{jp} = v'_{jx'} \sin \theta + v'_{jz'} \cos \theta$.

El sistema de ecuaciones (5.6)–(5.10) puede ser desacoplado para ϕ' . Para esto, se perturba dicho sistema de ecuaciones con respecto al parámetro no lineal ε , de igual manera que se hizo en el Capítulo 3. Así, se expande el potencial eléctrico ϕ' , y para

cada especie, la densidad de número y la velocidad con respecto a ε :

$$\begin{aligned}
\phi' &= \varepsilon\phi'_1 + \varepsilon^2\phi'_2 + \dots , \\
n'_j &= n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2} + \dots , \\
v'_{jx'} &= v'_{jx'0} + \varepsilon^{3/2}v'_{jx'1} + \varepsilon^2 v'_{jx'2} + \dots , \\
v'_{jy'} &= v'_{jy'0} + \varepsilon^{3/2}v'_{jy'1} + \varepsilon^2 v'_{jy'2} + \dots , \\
v'_{jz'} &= v'_{jz'0} + \varepsilon v'_{jz'1} + \varepsilon^2 v'_{jz'2} + \dots .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Las ecuaciones de movimiento en el plano (x', y') , (5.7) y (5.8), respectivamente, poseen una dependencia explícita de la variable no lineal ε a una potencia no entera. Debido a esto, es útil que en las expansiones para las velocidades $v'_{jx'}$ y $v'_{jy'}$ en el plano, mostradas en (5.11), el primer término proporcional a ε de la expansión sea $\varepsilon^{3/2}$. De esta manera se balancean los exponentes de las potencias de ε y se evita que haya términos proporcionales a potencias negativas de la variable no lineal en las ecuaciones perturbadas. Con esto, se reemplaza (5.11) en (5.6)–(5.10), para luego reagrupar las expresiones proporcionales a potencias de ε , hasta el orden $5/2$.

Para escribir y desarrollar las expansiones de manera más sencilla analíticamente, primero se desarrolla el factor de Lorentz γ_j para el plasma magnetizado. Luego, definiendo $v'_{j0}{}^2 = v'_{jx'0}{}^2 + v'_{jy'0}{}^2 + v'_{jz'0}{}^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\gamma_j &\approx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c^2}}} + \frac{\varepsilon \frac{av'_{jz'0}v'_{jz'1}}{c^2}}{\left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c^2}\right)^{3/2}} + \frac{\varepsilon^{3/2} a}{\left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left[\frac{v'_{jx'0}v'_{jx'1}}{c^2} + \frac{v'_{jy'0}v'_{jy'1}}{c^2} \right] \\
&+ \frac{\varepsilon^2 a}{\left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left[\frac{v'_{jx'0}}{c^2}v'_{jx'2} + \frac{v'_{jy'0}}{c^2}v'_{jy'2} + \frac{v'_{jz'0}}{c^2}v'_{jz'2} + \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c^2} \left(1 + \frac{3av'_{jz'0}{}^2}{c^2 - av'_{j0}{}^2}\right) \right] \\
&+ \varepsilon^{5/2} \frac{3a^2 v'_{jz'0}}{c^2} \left(1 - \frac{av'_{j0}{}^2}{c^2}\right)^{-5/2} \left(\frac{v'_{jx'0}}{c^2}v'_{jx'1} + \frac{v'_{jy'0}}{c^2}v'_{jy'1} \right) v'_{jz'1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \gamma_{j0} + \varepsilon\gamma_{j0}\rho_{jz'0}v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2}\gamma_{j0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1}) \\
&+ \varepsilon^2\gamma_{j0}\left[\rho_{jx'0}v'_{jx'2} + \rho_{jy'0}v'_{jy'2} + \rho_{jz'0}v'_{jz'2} + a\gamma_{j0}^2\frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c'^2}(3\zeta_{jz'0} - 2)\right] \\
&+ \varepsilon^{5/2}3\gamma_{j0}\rho_{jz'0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1})v'_{jz'1},
\end{aligned} \tag{5.12}$$

considerando $\beta_{jn'0} = v'_{jn'0}/c'$, $\gamma_{j0} = (1 - av'_{j0}{}^2/c'^2)^{-1/2}$, $\rho_{jn'0} = a\beta_{jn'0}\gamma_{j0}^2/c'$ y $\zeta_{jn'0} = 1 + a\beta_{jn'0}^2\gamma_{j0}^2$, donde $n' = x', y', z'$.

Utilizando la expansión de γ_j (5.12), se expanden los términos para $n'_j\gamma_j$,

$$\begin{aligned}
n'_j\gamma_j &\approx (n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2}) \left\{ \gamma_{j0} + \varepsilon\gamma_{j0}\rho_{jz'0}v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2}\gamma_{j0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1}) \right. \\
&+ \varepsilon^2\gamma_{j0}\left[\rho_{jx'0}v'_{jx'2} + \rho_{jy'0}v'_{jy'2} + \rho_{jz'0}v'_{jz'2} + a\gamma_{j0}^2\frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c'^2}(3\zeta_{jz'0} - 2)\right] \\
&+ \left. \varepsilon^{5/2}3\gamma_{j0}\rho_{jz'0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1})v'_{jz'1} \right\} \\
&\approx n'_{j0}\gamma_{j0} + \varepsilon\gamma_{j0}(n'_{j1} + n'_{j0}\rho_{jz'0}v'_{jz'1}) + \varepsilon^{3/2}n'_{j0}\gamma_{j0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1}) \\
&+ \varepsilon^2\gamma_{j0}\left[n'_{j2} + n'_{j0}\rho_{jx'0}v'_{jx'2} + n'_{j0}\rho_{jy'0}v'_{jy'2} + n'_{j0}\rho_{jz'0}v'_{jz'2} + \rho_{jz'0}(n'_{j1}v'_{jz'1}) \right. \\
&+ \left. an'_{j0}\frac{\gamma_{j0}^2}{2c'^2}(3\zeta_{jz'0} - 2)v'_{jz'1}{}^2\right] + \varepsilon^{5/2}\gamma_{j0}\left\{ \left[n'_{j1} + 3n'_{j0}\rho_{jz'0}v'_{jz'1} \right] \left[\rho_{jx'0}v'_{jx'1} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \rho_{jy'0}v'_{jy'1} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

para $\gamma_j v'_{jx'}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_j v'_{jx'} &\approx \left\{ \gamma_{j0} + \varepsilon\gamma_{j0}\rho_{jz'0}v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2}\gamma_{j0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1}) \right. \\
&+ \varepsilon^2\gamma_{j0}\left[\rho_{jx'0}v'_{jx'2} + \rho_{jy'0}v'_{jy'2} + \rho_{jz'0}v'_{jz'2} + a\gamma_{j0}^2\frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c'^2}(3\zeta_{jz'0} - 2)\right] \\
&+ \left. \varepsilon^{5/2}3\gamma_{j0}\rho_{jz'0}(\rho_{jx'0}v'_{jx'1} + \rho_{jy'0}v'_{jy'1})v'_{jz'1} \right\} (v'_{jx'0} + \varepsilon^{3/2}v'_{jx'1} + \varepsilon^2v'_{jx'2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_j v'_{jx'} &\approx c' \gamma_{j0} \beta_{jx'0} + \varepsilon c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2} \left[\gamma_{j0} v'_{jx'1} + \gamma_{j0} (\zeta_{jx'0} - 1) v'_{jx'1} \right. \\
&\quad \left. + c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \right] + \varepsilon^2 \left\{ \gamma_{j0} \zeta_{jx'0} v'_{jx'2} + \gamma_{j0} \rho_{jx'0} \left[c' \beta_{jy'0} v'_{jy'2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c' \beta_{jz'0} v'_{jz'2} + (3\zeta_{jz'0} - 2) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} \right] \right\} + \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} \left[(3\zeta_{jx'0} - 2) v'_{jx'1} \right. \\
&\quad \left. + 3\beta_{jx'0} c' \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \right] v'_{jz'1} , \tag{5.14}
\end{aligned}$$

para $\gamma_j v'_{jy'}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_j v'_{jy'} &\approx \left\{ \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} (\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \left[\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \rho_{jy'0} v'_{jy'2} + \rho_{jz'0} v'_{jz'2} + a \gamma_{j0}^2 \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c'^2} (3\zeta_{jz'0} - 2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{5/2} 3\gamma_{j0} \rho_{jz'0} (\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) v'_{jz'1} \right\} (v'_{jy'0} + \varepsilon^{3/2} v'_{jy'1} + \varepsilon^2 v'_{jy'2}) \\
&\approx c' \gamma_{j0} \beta_{jy'0} + \varepsilon c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} (\beta_{jy'0} c' \rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \zeta_{jy'0} v'_{jy'1}) \\
&\quad + \varepsilon^2 \left\{ \beta_{jy'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \gamma_{j0} \zeta_{jy'0} v'_{jy'2} + \gamma_{j0} \rho_{jy'0} (3\zeta_{jz'0} - 2) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{jy'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jz'0} v'_{jz'2} \right\} + \varepsilon^{5/2} \left\{ \gamma_{j0} \rho_{jz'0} \left[(3\zeta_{jy'0} - 2) v'_{jy'1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3\beta_{jy'0} c' \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right] v'_{jz'1} \right\} , \tag{5.15}
\end{aligned}$$

y para $\gamma_j v'_{jz'}$,

$$\begin{aligned}
\gamma_j v'_{jz'} &\approx \left\{ \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} (\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \left[\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \rho_{jy'0} v'_{jy'2} + \rho_{jz'0} v'_{jz'2} + a \gamma_{j0}^2 \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c'^2} (3\zeta_{jz'0} - 2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon^{5/2} 3\gamma_{j0} \rho_{jz'0} (\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) v'_{jz'1} \right\} (v'_{jz'0} + \varepsilon v'_{jz'1} + \varepsilon^2 v'_{jz'2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_j v'_{jz'} &\approx c' \beta_{jz'0} \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \zeta_{jz'0} v'_{jz'1} + \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} c' (\beta_{jx'0} v'_{jx'1} + \beta_{jy'0} v'_{jy'1}) \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ \beta_{jz'0} \gamma_{j0} c' (\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \rho_{jy'0} v'_{jy'2}) + \gamma_{j0} \zeta_{jz'0} \left(v'_{jz'2} + \frac{3}{2} \rho_{jz'0} v'_{jz'1}{}^2 \right) \right\} \quad (5.16) \\
&+ \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} (3\zeta_{jz'0} - 2) (\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) v'_{jz'1} .
\end{aligned}$$

Considerando los desarrollos para $\gamma_j v'_{jx'}$, $\gamma_j v'_{jy'}$ y $\gamma_j v'_{jz'}$ mostrados en (5.14), (5.15) y (5.16), se puede multiplicar cada expresión por n'_j . De esta manera se calcula $n'_j \gamma_j v'_{jx'}$,

$$\begin{aligned}
n'_j \gamma_j v'_{jx'} &\approx (n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2}) \left\{ c' \gamma_{j0} \beta_{jx'0} + \varepsilon c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \right. \\
&+ \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} \left[v'_{jx'1} + (\zeta_{jx'0} - 1) v'_{jx'1} + c' \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \right] \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ \gamma_{j0} \rho_{jx'0} \left[c' \beta_{jy'0} v'_{jy'2} + c' \beta_{jz'0} v'_{jz'2} + (3\zeta_{jz'0} - 2) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} \right] + \gamma_{j0} \zeta_{jx'0} v'_{jx'2} \right\} \\
&+ \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \left[(3\zeta_{jx'0} - 2) v'_{jx'1} + 3\beta_{jx'0} c' \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \right] \left. \right\} \\
&\approx c' n'_{j0} \gamma_{j0} \beta_{jx'0} + \varepsilon c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} (n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1}) + \varepsilon^{3/2} n'_{j0} \gamma_{j0} \left[\zeta_{jx'0} v'_{jx'1} \right. \\
&+ c' \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \left. \right] + \varepsilon^2 \gamma_{j0} c' \left\{ \beta_{jx'0} n'_{j2} + \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} (n'_{j1} v'_{jz'1}) \right. \\
&+ n'_{j0} \zeta_{jx'0} \frac{v'_{jx'2}}{c'} + n'_{j0} \rho_{jx'0} \left[\beta_{jy'0} v'_{jy'2} + \beta_{jz'0} v'_{jz'2} + (3\zeta_{jz'0} - 2) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2c'} \right] \left. \right\} \\
&+ \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \left\{ n'_{j1} (\zeta_{jx'0} v'_{jx'1} + c' \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) \right. \quad (5.17) \\
&+ n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \left[(3\zeta_{jx'0} - 2) v'_{jx'1} + 3\beta_{jx'0} c' \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \right] \left. \right\} .
\end{aligned}$$

Luego, se tiene $n'_j \gamma_j v'_{jy'}$,

$$\begin{aligned}
n'_j \gamma_j v'_{jy'} &\approx (n'_{j0} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2}) \left\{ c' \gamma_{j0} \beta_{jy'0} + \varepsilon c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \right. \\
&\quad + \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} \left(\zeta_{jy'0} v'_{jy'1} + \beta_{jy'0} c' \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right) + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \left\{ \beta_{jy'0} c' \left(\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \rho_{jz'0} v'_{jz'2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \zeta_{jy'0} v'_{jy'2} + \rho_{jy'0} \left(3\zeta_{jz'0} - 2 \right) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} \right\} + \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \left[\left(3\zeta_{jy'0} - 2 \right) v'_{jy'1} \right. \\
&\quad \left. + 3\beta_{jy'0} c' \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right] \left. \right\} \\
&\approx c' n'_{j0} \gamma_{j0} \beta_{jy'0} + \varepsilon c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \left(n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \right) + \varepsilon^{3/2} n'_{j0} \gamma_{j0} \left[\zeta_{jy'0} v'_{jy'1} \right. \\
&\quad \left. + c' \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right] + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \left\{ c' \beta_{jy'0} n'_{j2} + n'_{j0} \zeta_{jy'0} v'_{jy'2} \right. \\
&\quad + c' n'_{j0} \beta_{jy'0} \left(\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + c' \rho_{jz'0} v'_{jz'2} \right) + \beta_{jy'0} \rho_{jz'0} \left(n'_{j1} v'_{jz'1} \right) \\
&\quad \left. + n'_{j0} \rho_{jy'0} \left(3\zeta_{jz'0} - 2 \right) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} \right\} + \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \left\{ n'_{j1} \left[c' \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \zeta_{jy'0} v'_{jy'1} \right] + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \left[\left(3\zeta_{jy'0} - 2 \right) v'_{jy'1} + 3c' \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right] \right\}. \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Por último, para $n'_j \gamma_j v'_{jz'}$,

$$\begin{aligned}
n'_j \gamma_j v'_{jz'} &\approx (n'_{j1} + \varepsilon n'_{j1} + \varepsilon^2 n'_{j2}) \left\{ c' \beta_{jz'0} \gamma_{j0} + \varepsilon \gamma_{j0} \zeta_{jz'0} v'_{jz'1} \right. \\
&\quad + \varepsilon^{3/2} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} c' \left(\beta_{jx'0} v'_{jx'1} + \beta_{jy'0} v'_{jy'1} \right) + \varepsilon^2 \left\{ \beta_{jz'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jx'0} v'_{jx'2} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{jz'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jy'0} v'_{jy'2} + \gamma_{j0} \zeta_{jz'0} \left(v'_{jz'2} + \frac{3}{2} \rho_{jz'0} v'_{jz'1}{}^2 \right) \right\} \\
&\quad \left. + \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \left(3\zeta_{jz'0} - 2 \right) \left(\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \right) v'_{jz'1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n'_j \gamma_j v'_{jz'} &\approx c' n'_{j0} \gamma_{j0} \beta_{jz'0} + \varepsilon (c' \beta_{jz'0} \gamma_{j0} n'_{j1} + n'_{j0} \gamma_{j0} \zeta_{jz'0} v'_{jz'1}) \\
&+ \varepsilon^{3/2} c' n'_{j0} \gamma_{j0} \rho_{jz'0} (\beta_{jx'0} v'_{jx'1} + \beta_{jy'0} v'_{jy'1}) + \varepsilon^2 \gamma_{j0} \left\{ c' \beta_{jz'0} n'_{j2} \right. \\
&+ \zeta_{jz'0} (n'_{j1} v'_{jz'1}) + n'_{j0} \zeta_{jz'0} v'_{jz'2} + c' n'_{j0} \beta_{jz'0} (\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \rho_{jy'0} v'_{jy'2}) \\
&+ \left. 3n'_{j0} \zeta_{jz'0} \rho_{jz'0} \frac{v'^2_{jz'1}}{2} \right\} + \varepsilon^{5/2} \gamma_{j0} \left\{ n'_{j0} v'_{jz'1} (3\zeta_{jz'0} - 2) [\rho_{jx'0} v'_{jx'1} \right. \\
&+ \left. \rho_{jy'0} v'_{jy'1}] + c' \rho_{jz'0} n'_{j1} (\beta_{jx'0} v'_{jx'1} + \beta_{jy'0} v'_{jy'1}) \right\} . \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Considerando las cantidades (5.13)–(5.19), se hace más sencilla y manejable algebraicamente la expansión con respecto a ε de la ecuación de continuidad (5.6), las de movimiento en el espacio (5.7)–(5.9) y de Poisson (5.10), de este plasma polvoriento magnetizado. Por lo tanto, se reemplaza y se reagrupa en factores de ε y sus potencias, obteniendo expresiones útiles para poder desacoplar el sistema de ecuaciones (5.6)–(5.10) para ϕ'_1 , tal como se hizo en el Capítulo 3. Esto, se revisa a continuación.

5.2.1. Expresiones independientes de ε y cuasineutralidad del plasma

Luego de reordenar y reagrupar términos de las ecuaciones de movimiento en la coordenada x' (5.7) y en la coordenada y' (5.8), se obtienen dos expresiones independientes de ε dadas por

$$0 = c' n'_{j0} \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' , \tag{5.20}$$

$$0 = -c' n'_{j0} \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' . \tag{5.21}$$

Las expresiones (5.20) y (5.21) muestran restricciones para los valores de cantidades iniciales de este plasma, como lo son la densidad de número por especie n'_{j0} , las velocidades en el plano $v'_{jx'0}$ y $v'_{jy'0}$ y, por lo tanto, el factor de Lorentz γ_{j0} . Ambas expresiones son iguales, sin contar la velocidad inicial involucrada, y en ambos

casos, ninguna cantidad puede ser nula, salvo por esas mismas velocidades iniciales. Entonces, las ecuaciones (5.20) y (5.21) nos indican que $v'_{jx'0}$ y $v'_{jy'0}$ pueden ser cero para este plasma. Estas condiciones se consideran como triviales, ya que si se permite que las velocidades iniciales en el plano $x'-y'$ sean nulas, se recupera el caso de las ecuaciones no magnetizadas, revisadas en el Capítulo 3. Por esta razón, desde este punto en adelante, se considera que $v'_{jx'0}$ y $v'_{jy'0}$ son cantidades no nulas, para así poder estudiar este plasma en donde se puedan apreciar los efectos del campo magnético en las perturbaciones.

Por otro lado, al perturbar la ecuación de Poisson (5.10), se encuentra una expresión independiente de ε , dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \\ &= n'_{e0} \gamma_{e0} - \gamma_{i0} + Z_d n'_{d0} , \end{aligned}$$

que se reescribe como

$$n'_{e0} = \frac{\gamma_{i0} - Z_d n'_{d0}}{\gamma_{e0}} . \quad (5.22)$$

En esta expresión se puede notar que la ecuación (5.22) es igual a (3.12), que da cuenta de la cuasineutralidad del plasma y que no se ve alterada dada la presencia del campo magnético.

5.2.2. Expresiones proporcionales a ε

Para mantener más ordenadas las expansiones de las ecuaciones de este plasma con granos de polvo, se define

$$v'_{jp0} = v'_{jx'0} \sin \theta + v'_{jz'0} \cos \theta$$

como la velocidad inicial proyectada en el plano $x'-z'$ para cada especie j . Teniendo esto en cuenta, se perturban las ecuaciones (5.6)–(5.10) con respecto a ε , se reordenan y reagrupan los términos correspondientes, para obtener las expresiones proporcionales a ε . Así, se tiene para la ecuación de continuidad (5.6)

$$(v'_{jp0} - M) \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} + n'_{j0} \left[\cos \theta + \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} = 0, \quad (5.23)$$

para la ecuación de movimiento en x' (5.7)

$$0 = c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' (n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1}), \quad (5.24)$$

para la ecuación de movimiento en y' (5.8)

$$0 = -c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' (n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1}), \quad (5.25)$$

para la ecuación de movimiento en z' (5.9)

$$\alpha_j \cos \theta \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} + n'_{j0} \gamma_{j0}^2 Q_j \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \cos \theta \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} = 0, \quad (5.26)$$

y para la ecuación de Poisson (5.10)

$$\sum_j \gamma_{j0} \eta_j (n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1}) = 0. \quad (5.27)$$

Las expresiones (5.23)–(5.27) dependen de n'_{j1} , $v'_{jz'1}$ y ϕ'_1 , de donde, en primera instancia, es útil despejar n'_{j1} y $v'_{jz'1}$ en función de ϕ'_1 para desacoplar el sistema de ecuaciones para el potencial eléctrico. Se puede notar de las ecuaciones (5.24) y (5.25) que, como $\beta_{jx'0}$, $\beta_{jy'0}$ y Ω' no son cero, entonces ambas expresiones son iguales. De cualquiera de las dos se puede deducir una relación entre n'_{j1} y $v'_{jz'1}$, pero será independiente de ϕ'_1 y de variables que indican presencia de un campo magnético de fondo. También se puede usar (5.24) o (5.25) en conjunto con (5.26) para poder encontrar n'_{j1} y $v'_{jz'1}$ en función de ϕ'_1 , pero al desacoplar dicho sistema de ecuaciones,

resulta que $n'_{j1} = 0$ y $v'_{jz'1} = 0$, lo cual no sería un caso interesante a estudiar. En cambio las ecuaciones (5.23) y (5.26), permiten relacionar n'_{j1} y $v'_{jz'1}$ en función de ϕ'_1 y θ , sin los problemas descritos anteriormente. Además, provienen de las mismas ecuaciones que en el caso no magnetizado, siendo un buen punto de partida. Por lo tanto, se resuelve ese sistema de ecuaciones, obteniendo

$$\frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} = -\frac{n'_{j0}\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}} [\cos \theta + \rho_{jz'0}(v'_{jp0} - M)] \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi}, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} = \frac{\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}} (v'_{j0} - M) \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi}. \quad (5.29)$$

Al igual que en el caso no magnetizado, ϕ'_1 es una cantidad que depende de la variable asociada al espacio y al tiempo, ξ y τ , respectivamente. Además, todas las cantidades en (5.28) y (5.29) son constantes, por lo tanto, se pueden integrar con respecto a ξ , de donde se obtiene

$$n'_{j1} = -\frac{n'_{j0}\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}} [\cos \theta + \rho_{jz'0}(v'_{jp0} - M)] \phi'_1, \quad (5.30)$$

$$v'_{jz'1} = \frac{\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}} (v'_{j0} - M) \phi'_1. \quad (5.31)$$

De la misma manera, se puede derivar (5.30) y (5.31) con respecto a τ como sigue:

$$\frac{\partial n'_{j1}}{\partial \tau} = -\frac{n'_{j0}\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}} [\cos \theta + \rho_{jz'0}(v'_{jp0} - M)] \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau}, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \tau} = \frac{\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}} (v'_{j0} - M) \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau}, \quad (5.33)$$

en donde se define R_{j0} para todas estas expresiones como

$$R_{j0} = Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M)^2 - \alpha_j \cos \theta [\cos \theta + \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M)]. \quad (5.34)$$

Por último, se obtiene una expresión para la velocidad de fase M , reemplazando (5.30) y (5.31) en (5.27). Así,

$$0 = \sum_j \frac{n'_{j0}\gamma_{j0}^2 \eta_j^2 \cos^2 \theta}{R_{j0}}. \quad (5.35)$$

Para recuperar el caso no magnetizado del Capítulo 3, basta considerar $\theta = 0$ y las velocidades iniciales en x' e y' como nulas en las ecuaciones (5.28)–(5.35). De esta manera se reobtienen (3.16)–(3.22).

5.2.3. Expresiones proporcionales a $\varepsilon^{3/2}$

Hasta ahora se han podido desacoplar expresiones para las perturbaciones a primer orden de n'_{j1} , v'_{jz1} y M , en función de ϕ'_1 . Para determinar por completo las perturbaciones a primer orden en función de ϕ'_1 , es necesario encontrar expresiones para $v'_{jx'1}$ y $v'_{jy'1}$. Para esto se utiliza la misma perturbación descrita en la sección 5.2, en donde se expanden las ecuaciones (5.6)–(5.10) con respecto a ε , pero esta vez se reagrupan y reordenan para obtener las cantidades proporcionales a $\varepsilon^{3/2}$. Así, se tiene para la ecuación de continuidad (5.6)

$$\left[\sin \theta + \rho_{jx'0} (v'_{jp0} - M) \right] \frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} + \rho_{jy'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} = 0, \quad (5.36)$$

para la ecuación de movimiento en x' (5.7),

$$\begin{aligned} c' n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} + c' n'_{j0} \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \rho_{jx'0} v'_{jx'1} \\ + \alpha_j \sin \theta \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \zeta_{jy'0} v'_{jy'1} - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \sin \theta \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

para la ecuación de movimiento en y' (5.8)

$$\begin{aligned} c' n'_{j0} Q_j \beta_{jy'0} \gamma_{j0}^2 \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} - c' n'_{j0} \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \rho_{jy'0} v'_{jy'1} \\ - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \zeta_{jx'0} v'_{jx'1} = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

para la ecuación de movimiento en z' (5.9)

$$c' n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \left[\beta_{jx'0} \frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} + \beta_{jy'0} \frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (5.39)$$

y, por último, para la ecuación de poisson (5.10)

$$\sum_j n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j (\rho_{jx'0} v'_{jx'1} + \rho_{jy'0} v'_{jy'1}) = 0 . \quad (5.40)$$

Notamos que las ecuaciones (5.36) y (5.39) dependen de las derivadas de $v'_{jx'1}$ y $v'_{jy'1}$, pero de nada más que no sea constante. Por lo que si se utilizan estas expresiones para desacoplar el sistema en función de ϕ'_1 , se llega a que $\partial_\xi v'_{jx'1} = 0$ y $\partial_\xi v'_{jy'1} = 0$. Esto no es ideal, ya que no entrega información al respecto de estas perturbaciones a primer orden, que es lo que se busca.

Por otro lado, las ecuaciones (5.37) y (5.38) dependen de n'_{j1} , $v'_{jz'1}$ y ϕ'_1 , por lo que son útiles para despejar $v'_{jx'1}$ y $v'_{jy'1}$ en función del potencial eléctrico. De esta manera,

$$\begin{aligned} v'_{jx'1} &= \frac{Q_j \beta_{jy'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M)}{\eta_j \Omega'} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} - \frac{c' \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} \sin \theta}{[\zeta_{jx'0} \zeta_{jy'0} - c'^2 \beta_{jx'0} \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} \rho_{jy'0}] \Omega'} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\ &\quad + \frac{c' \alpha_j \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} \sin \theta}{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j [\zeta_{jx'0} \zeta_{jy'0} - c'^2 \beta_{jx'0} \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} \rho_{jy'0}] \Omega'} \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} , \\ v'_{jy'1} &= \frac{Q_j \beta_{jx'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jz'0} (M - v'_{jp0})}{\eta_j \Omega'} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} + \frac{\zeta_{jx'0} \sin \theta}{[\zeta_{jx'0} \zeta_{jy'0} - c'^2 \beta_{jx'0} \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} \rho_{jy'0}] \Omega'} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\ &\quad - \frac{\alpha_j \zeta_{jx'0} \sin \theta}{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j [\zeta_{jx'0} \zeta_{jy'0} - c'^2 \beta_{jx'0} \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} \rho_{jy'0}] \Omega'} \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} . \end{aligned}$$

Considerando que $\gamma_{j0} = [1 - a (\beta_{jx'0}^2 + \beta_{jy'0}^2 + \beta_{jz'0}^2)]^{-1/2}$, se reescribe lo anterior como:

$$\begin{aligned} v'_{jx'1} &= \frac{Q_j \beta_{jy'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M)}{\eta_j \Omega'} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} + \frac{c' \alpha_j \beta_{jx'0} \sin \theta \rho_{jy'0}}{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j R_{j32} \Omega'} \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} \\ &\quad - \frac{c' \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} \sin \theta}{R_{j32} \Omega'} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} , \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$v'_{jy'1} = -\frac{Q_j \beta_{jx'0} \gamma_{j0} c' \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M)}{\eta_j \Omega'} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} - \frac{\alpha_j \zeta_{jx'0} \sin \theta}{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j R_{j32} \Omega'} \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \xi} + \frac{\zeta_{jx'0} \sin \theta}{R_{j32} \Omega'} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi}, \quad (5.42)$$

en donde se define $R_{j32} = \zeta_{jx'0} \zeta_{jy'0} - c'^2 \beta_{jx'0} \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} \rho_{jy'0} = 1 + a (\beta_{jx'0}^2 + \beta_{jy'0}^2) \gamma_{j0}^2$. Reemplazando $\partial_\xi n'_{j1}$ y $\partial_\xi v'_{jz'1}$ dadas por (5.28) y (5.29), se tienen expresiones para $v'_{jx'1}$ y $v'_{jy'1}$ en función de ϕ'_1 a partir de (5.41) y (5.42), respectivamente. De esta manera se observa,

$$v'_{jx'1} = \frac{c' Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2 \rho_{jy'0}}{R_{j0} R_{j32} \Omega'} \left\{ \beta_{jz'0} R_{j32} \cos \theta - \beta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta \right\} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi},$$

$$v'_{jy'1} = \frac{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2}{R_{j0} R_{j32} \Omega'} \left\{ \zeta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta - c' \beta_{jx'0} R_{j32} \rho_{jz'0} \cos \theta \right\} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi},$$

y sus derivadas asociadas

$$\frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} = \frac{c' Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2 \rho_{jy'0}}{R_{j0} R_{j32} \Omega'} \left\{ \beta_{jz'0} R_{j32} \cos \theta - \beta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta \right\} \frac{\partial^2 \phi'_1}{\partial \xi^2}, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} = \frac{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2}{R_{j0} R_{j32} \Omega'} \left\{ \zeta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta - c' \beta_{jx'0} R_{j32} \rho_{jz'0} \cos \theta \right\} \frac{\partial^2 \phi'_1}{\partial \xi^2}. \quad (5.44)$$

5.2.4. Expresiones proporcionales a ε^2

En las Subsecciones 5.2.2 y 5.2.3 se encontraron expresiones para las perturbaciones en primer orden de la velocidad en todas las direcciones, $v'_{jx'1}$, $v'_{jy'1}$ y $v'_{jz'1}$, y de la densidad de número n'_{j1} , para todas las especies y en función de ϕ'_1 . Las perturbaciones para estas cantidades van hasta el orden 2, por lo que es necesario seguir buscando una manera de obtener expresiones para dichas cantidades, que aún

se desconocen y así, desacoplar el sistema de ecuaciones en función de ϕ'_1 . Esto, con el objetivo de encontrar una ecuación de KdV para dicho potencial. Por lo tanto, volviendo a la expansión realizada en la sección 5.2, en donde se perturbaron las ecuaciones (5.6)–(5.10) con respecto a ε , esta vez se reagrupa y reordena con respecto a ε^2 . Así, para la ecuación de continuidad (5.6) se tiene

$$\begin{aligned} & (v'_{jp0} - M) \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} \left[\sin \theta + \rho_{jx'0} (v'_{jp0} - M) \right] \frac{\partial v'_{jx'2}}{\partial \xi} + n'_{j0} \rho_{jy'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jy'2}}{\partial \xi} \\ & + n'_{j0} \left[\cos \theta + \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] \frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} + \left[\cos \theta + \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} (n'_{j1} v'_{jz'1}) \quad (5.45) \\ & + \frac{\partial n'_{j1}}{\partial \tau} + n'_{j0} \rho_{jz'0} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \tau} + n'_{j0} \left[2\rho_{jz'0} \cos \theta + a \frac{\gamma_{j0}^2}{c'^2} (v'_{jp0} - M) (3\zeta_{jz'0} - 2) \right] v'_{jz'1} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} = 0 . \end{aligned}$$

Para la ecuación de movimiento en la dirección x' (5.7)

$$\begin{aligned} & n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[\zeta_{jx'0} \frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} + c' \beta_{jx'0} \rho_{jy'0} \frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} \right] + c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' n'_{j2} \\ & + c' n'_{j0} \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \rho_{jx'0} v'_{jx'2} + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \zeta_{jy'0} \Omega' v'_{jy'2} + c' n'_{j0} \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \rho_{jz'0} v'_{jz'2} \quad (5.46) \\ & + c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \rho_{jz'0} (n'_{j1} v'_{jz'1}) + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' \rho_{jy'0} (3\zeta_{jz'0} - 2) \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} = 0 , \end{aligned}$$

para la ecuación de movimiento en y' (5.8)

$$\begin{aligned} & n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[c' \beta_{jy'0} \rho_{jx'0} \frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} + \zeta_{jy'0} \frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} \right] - c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \eta_j \Omega' n'_{j2} \\ & - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \zeta_{jx'0} \Omega' v'_{jx'2} - c' n'_{j0} \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jx'0} \Omega' v'_{jy'2} - c' n'_{j0} \beta_{jz'0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jx'0} \Omega' v'_{jz'2} \quad (5.47) \\ & + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jx'0} (2 - 3\zeta_{jz'0}) \Omega' \frac{v'_{jz'1}{}^2}{2} - c' \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jz'0} \Omega' (n'_{j1} v'_{jz'1}) = 0 , \end{aligned}$$

para la ecuación de movimiento en z' (5.9)

$$\begin{aligned} & \alpha_j \cos \theta \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[c' \beta_{jz'0} \rho_{jx'0} \frac{\partial v'_{jx'2}}{\partial \xi} + c' \beta_{jz'0} \rho_{jy'0} \frac{\partial v'_{jy'2}}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \zeta_{jz'0} \frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} \right] + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} \left[\cos \theta + 4\rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] v'_{jz'1} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} \quad (5.48) \\ & - \gamma_{j0} \eta_j \cos \theta \left[n'_{j1} + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{z'1} \right] \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M) n'_{j1} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} \\ & - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \cos \theta \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \tau} = 0 , \end{aligned}$$

y por último, la ecuación de Poisson (5.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi'_1}{\partial \xi^2} = & \sum_j \gamma_{j0} \eta_j n'_{j2} + \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jz'0} (n'_{j1} v'_{jz'1}) + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \left[\rho_{jx'0} v'_{jx'2} + \rho_{jy'0} v'_{jy'2} \right. \\ & \left. + \rho_{jz'0} v'_{jz'2} + a \gamma_{j0}^2 (3\zeta_{jz'0} - 2) \frac{v'^2_{jz'1}}{2c'^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

De esta última expansión de la ecuación de Poisson, se puede notar que por la forma que tiene dicha expresión, es una posible candidata a ser una ecuación de KdV. Si se deriva (5.49) con respecto a ξ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} = & \sum_j \gamma_{j0} \eta_j \frac{n'_{j2}}{\partial \xi} + \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jz'0} \frac{\partial}{\partial \xi} (n'_{j1} v'_{jz'1}) + n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \left[\rho_{jx'0} \frac{\partial v'_{jx'2}}{\partial \xi} + \rho_{jy'0} \frac{\partial v'_{jy'2}}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \rho_{jz'0} \frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} + a \frac{\gamma_{j0}^2}{c'^2} (3\zeta_{jz'0} - 2) v'_{jz'1} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Se observa que (5.50) depende de las derivadas de perturbaciones de primer y segundo orden de la velocidad y la densidad de número, de las cuales ya se ha encontrado n'_{j1} y $v'_{jz'1}$ en función de ϕ'_1 . Por lo tanto, para poder tener una ecuación de KdV en (5.50) para el potencial eléctrico ϕ'_1 , se busca una manera de obtener $v'_{jx'2}$, $v'_{jy'2}$ y $v'_{jz'2}$ en función de $\partial_\xi \phi'_1$ y $\partial_\tau \phi'_1$, a partir del sistema de ecuaciones que describe (5.45)–(5.48). De esta manera, de las ecuaciones (5.46) y (5.47), se puede despejar $v'_{jx'2}$ y $v'_{jy'2}$, como muestra (5.51) y (5.52), respectivamente

$$\begin{aligned} v'_{jx'2} = & \frac{c' Q_j \beta_{jx'0} \gamma_{j0} \rho_{jy'0} (1 + R_{j32})}{\eta_j R_{j32} \Omega'} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} + \frac{Q_j \gamma_{j0}}{\eta_j R_{j32} \Omega'} \left[R_{j32} (\zeta_{jy'0} - 1) \right. \\ & \left. + \zeta_{jy'0} \right] (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} + \frac{(2 - 3\zeta_{jz'0}) \rho_{jx'0} v'^2_{jz'1}}{R_{j32} \cdot 2} - \frac{c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0}}{R_{j32}} v'_{jz'2} \\ & - \frac{c' \beta_{jx'0}}{n'_{j0} R_{j32}} n'_{j2} - \frac{c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0}}{n'_{j0} R_{j32}} (n'_{j1} v'_{jz'1}), \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned}
v'_{jy'2} = & \frac{c'Q_j\beta_{jx'0}\gamma_{j0}\rho_{jy'0}(1+R_{j32})}{\eta_j R_{j32}\Omega'} (M-v'_{jp0}) \frac{\partial v'_{jy'1}}{\partial \xi} - \frac{Q_j\gamma_{j0}}{\eta_j R_{j32}\Omega'} \left[R_{j32}(\zeta_{jx'0}-1) \right. \\
& \left. + \zeta_{jx'0} \right] (v'_{jp0}-M) \frac{\partial v'_{jx'1}}{\partial \xi} + \frac{(2-3\zeta_{jz'0})\rho_{jy'0}v'_{jz'1}{}^2}{R_{j32} \cdot 2} - \frac{c'\beta_{jy'0}\rho_{jz'0}}{R_{j32}} v'_{jz'2} \\
& - \frac{c'\beta_{jy'0}}{n'_{j0}R_{j32}} n'_{j2} - \frac{c'\beta_{jy'0}\rho_{jz'0}}{n'_{j0}R_{j32}} (n'_{j1}v'_{jz'1}) . \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones dependen de cantidades que ya fueron desacopladas y, por esta razón, se conoce su forma en función de ϕ'_1 . Por lo tanto, se reemplaza n'_{j1} dado por (5.30), $v'_{jz'1}$ de (5.31), $\partial_\xi v'_{jx'1}$ visto en (5.43) y $\partial_\xi v'_{jy'1}$ de (5.44) en (5.51) para $v'_{jx'2}$ y en (5.52) para $v'_{jy'2}$, obteniendo ecuaciones para $v'_{jx'2}$ y $v'_{jy'2}$ que dependen de n'_{j2} , $v'_{jz'2}$ y ϕ'_1 . Así, volviendo al sistema de ecuaciones (5.45)–(5.48), y considerando estas nuevas expresiones para $v'_{jx'2}$ y $v'_{jy'2}$, se puede encontrar $\partial_\xi n'_{j2}$ y $\partial_\xi v'_{jz'2}$, desacoplando (5.45) y (5.48). Para esto, primero se deriva (5.51) y (5.52) con respecto a ξ . Así, para $v'_{jx'2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'_{jx'2}}{\partial \xi} = & -\frac{c'\beta_{jx'0}}{n'_{j0}R_{j32}} \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} - \frac{c'\beta_{jx'0}\rho_{jz'0}}{R_{j32}} \frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} + \frac{\gamma_{j0}^2\eta_j^2\rho_{jx'0}\cos^2\theta}{R_{j0}^2R_{j32}} \left[2c'\beta_{jz'0}\cos\theta \right. \\
& \left. - (v'_{jp0}-M)\zeta_{jz'0} \right] (v'_{jp0}-M)\phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + \frac{Q_j^2\gamma_{j0}^3}{\eta_j R_{j0}R_{j32}\Omega'^2} \left[\zeta_{jy'0}\zeta_{jz'0}\sin\theta \right. \\
& \left. - c'\beta_{jx'0}\rho_{jz'0}\cos\theta \right] (v'_{jp0}-M)^3 \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} , \tag{5.53}
\end{aligned}$$

y para $v'_{jy'2}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'_{jy'2}}{\partial \xi} = & -\frac{c'\beta_{jy'0}}{n'_{j0}R_{j32}} \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} - \frac{c'\beta_{jy'0}\rho_{jz'0}}{R_{j32}} \frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} + \frac{\gamma_{j0}^2\eta_j^2\rho_{jy'0}\cos^2\theta}{R_{j0}^2R_{j32}} \left[2c'\beta_{jz'0}\cos\theta \right. \\
& \left. - (v'_{jp0}-M)\zeta_{jz'0} \right] (v'_{jp0}-M)\phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + \frac{c'Q_j^2\gamma_{j0}^3\rho_{jy'0}}{\eta_j R_{j0}R_{j32}\Omega'^2} \left[\beta_{jz'0}\cos\theta \right. \\
& \left. + \beta_{jx'0}\zeta_{jz'0}\sin\theta \right] (v'_{jp0}-M)^3 \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} , \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Una vez que se tienen estas derivadas, se utiliza n'_{j1} (5.30) y $v'_{jz'1}$ (5.31), en conjunto con (5.53) y (5.54) en las ecuaciones de continuidad y de movimiento en z' , (5.45) y (5.48), respectivamente. Esto, con el objetivo de poder desacoplar $\partial_\xi n'_{j2}$ y $\partial_\xi v'_{jz'2}$ en función de ϕ'_1 . Luego,

$$\frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} = f_1 \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + f_2 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} + \frac{f_3}{\Omega'^2} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} + f_4 \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi}, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} = g_1 \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + g_2 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} + \frac{g_3}{\Omega'^2} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} + g_4 \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi}, \quad (5.56)$$

en donde se define f_ℓ y g_ℓ , con $\ell = 1, \dots, 4$, como las cantidades que acompañan a las derivadas de cada expresión en (5.55) y (5.56). Esto, debido a que estas expresiones, al ser más grandes y contener más términos, son cada vez más intrincadas y complejas de escribir y simplificar. La forma de estas cantidades puede verse con mayor detalle en el Apéndice B de la sección de apéndices de esta tesis.

Suponiendo esta forma compacta de (5.55) y (5.56), se utilizan en (5.53) y (5.54). De esta manera se tienen expresiones que dependen de ϕ'_1 y ϕ'_2 como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_{jx'2}}{\partial \xi} = & \left\{ \frac{\gamma_{j0}^2 \eta_j^2 \cos^2 \theta (v'_{jp0} - M) \rho_{jx'0}}{R_{j0}^2 R_{j32}} \left[2c' \beta_{jz'0} \cos \theta - (v'_{jp0} - M) \zeta_{jz'0} \right] \right. \\ & \left. - \frac{c' \beta_{jx'0}}{n'_{j0} R_{j32}} \left[f_1 + n'_{j0} g_1 \rho_{jz'0} \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} - \frac{c' \beta_{jx'0} (f_2 + n'_{j0} g_2 \rho_{jz'0})}{n'_{j0} R_{j32}} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} \\ & + \left\{ \frac{Q_j^2 \gamma_{j0}^3 (v'_{jp0} - M)^3}{\eta_j R_{j0} R_{j32} \Omega'^2} \left[\zeta_{jy'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta - c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} \cos \theta \right] \right. \\ & \left. - \frac{c' \beta_{jx'0}}{n'_{j0} R_{j32} \Omega'^2} \left[f_3 + n'_{j0} g_3 \rho_{jz'0} \right] \right\} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} - \frac{c' \beta_{jx'0} (f_4 + n'_{j0} g_4 \rho_{jz'0})}{n'_{j0} R_{j32}} \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi}, \quad (5.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'_{jy'2}}{\partial \xi} = & \left\{ \frac{\gamma_{j0}^2 \eta_j^2 \cos^2 \theta (v'_{jp0} - M) \rho_{jy'0}}{R_{j0}^2 R_{j32}} \left[2c' \beta_{jz'0} \cos \theta - (v'_{jp0} - M) \zeta_{jz'0} \right] \right. \\
& - \left. \frac{c' \beta_{jy'0}}{n'_{j0} R_{j32}} \left[f_1 + n'_{j0} g_1 \rho_{jz'0} \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} - \frac{c' \beta_{jy'0} (f_2 + n'_{j0} g_2 \rho_{jz'0})}{n'_{j0} R_{j32}} \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} \\
& - \left\{ \frac{c' Q_j^2 \gamma_{j0}^3 (v'_{jp0} - M)^3 \rho_{jy'0}}{\eta_j R_{j0} R_{j32} \Omega'^2} \left[\beta_{jz'0} \cos \theta + \beta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta \right] \right. \\
& \left. + \frac{c' \beta_{jy'0}}{n'_{j0} R_{j32} \Omega'^2} \left[f_3 + n'_{j0} g_3 \rho_{jz'0} \right] \right\} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} - \frac{c' \beta_{jy'0} (f_4 + n'_{j0} g_4 \rho_{jz'0})}{n'_{j0} R_{j32}} \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi}. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Se puede notar que en las expresiones para $\partial_\xi n'_{j2}$, $\partial_\xi v'_{jx'2}$, $\partial_\xi v'_{jy'2}$ y $\partial_\xi v'_{jz'2}$ dadas por (5.55), (5.57), (5.58) y (5.56) respectivamente, existe una dependencia explícita de $\partial_\xi \phi'_2$. Esto no es lo ideal, ya que al usar estas cantidades en la derivada de la ecuación de Poisson (5.50), que es candidata a ser una ecuación de KdV, ya no tendría la forma buscada para ϕ'_1 producto de esta dependencia. Por esta razón, se hace necesario seguir explorando las expansiones de las ecuaciones del plasma (5.6)–(5.9) a ordenes superiores para poder desacoplar $\partial_\xi \phi'_2$ de ellas.

5.2.5. Expresiones proporcionales a $\varepsilon^{5/2}$

Luego de expandir y revisar las ecuaciones (5.6)–(5.9) de la misma forma en que se hizo en las Secciones 5.2.2–5.2.4, pero reuniendo y reordenando términos proporcionales a $\varepsilon^{5/2}$, se observa que la única ecuación que depende de $\partial_\xi \phi'_2$, es la ecuación de movimiento en x' (5.7),

$$\begin{aligned}
& \alpha_j \sin \theta \frac{\partial n'_{j2}}{\partial \xi} + c' \beta_{jy'0} \gamma_{j0} \eta_j \rho_{jx'0} \left(n'_{j1} + 3n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \right) \Omega' v'_{jx'1} + \gamma_{j0} \eta_j \left[\zeta_{jy'0} n'_{j1} \right. \\
& \quad \left. + n'_{j0} (3\zeta_{jy'0} - 2) \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \right] \Omega' v'_{jy'1} + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \zeta_{jx'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jx'2}}{\partial \xi} \\
& + c' n'_{j0} Q_j \beta_{jy'0} \gamma_{j0}^2 \rho_{jx'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jy'2}}{\partial \xi} + c' n'_{j0} Q_j \beta_{jz'0} \gamma_{j0}^2 \rho_{jx'0} (v'_{jp0} - M) \frac{\partial v'_{jz'2}}{\partial \xi} \\
& + c' Q_j \beta_{jx'0} \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \rho_{jz'0} n'_{j1} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} + n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^2 \left\{ (3\zeta_{jz'0} - 2) (v'_{jp0} - M) \rho_{jx'0} \right. \\
& \quad \left. + c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} \left[\cos \theta + \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] \right\} v'_{jz'1} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \xi} - \gamma_{j0} \eta_j \sin \theta \left[n'_{j1} \right. \\
& \quad \left. + n'_{j0} \rho_{jz'0} v'_{jz'1} \right] \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} - n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \sin \theta \frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} + c' n'_{j0} Q_j \beta_{jx'0} \gamma_{j0}^2 \rho_{jz'0} \frac{\partial v'_{jz'1}}{\partial \tau} = 0 .
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Todas las variables que componen (5.59) ya son cantidades conocidas en función de ϕ'_1 , por lo que se reemplaza (5.28)–(5.33) y (5.55)–(5.58) en (5.59). Luego de esto, se despeja $\partial_\xi \phi'_2$ como sigue

$$\frac{\partial \phi'_2}{\partial \xi} = -h_1 \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} - \frac{h_2}{\Omega'^2} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} - h_3 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} , \tag{5.60}$$

en donde nuevamente se definieron cantidades para hacer más sencilla la exposición de estos resultados. En este caso se trata de h_m , con $m = 1, 2, 3$, cuyo detalle se puede revisar en el Apéndice B.

5.3. Ecuación de KdV

Considerando (5.60), se tienen expresiones para todas la perturbaciones a segundo orden de este plasma. De esta manera, se usa (5.30), (5.31), (5.55)–(5.58) y (5.60) en la derivada de la ecuación de Poisson (5.50), para determinar si corresponde a una ecuación de KdV. Luego

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 + \sum_j \frac{1}{R_{j0}R_{j32}\Omega'^2} \left[n'_{j0}Q_j^2\gamma_{j0}^4 (v'_{jp0} - M)^3 \left[\rho_{jz'0} (R_{j32} - 1) \cos \theta \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \rho_{jx'0}\zeta_{jz'0} \sin \theta \right] + \gamma_{j0}\eta_j R_{j0} \left[h_2 (f_4 + n'_{j0}g_4\rho_{jz'0}) - f_3 - n'_{j0}g_3\rho_{jz'0} \right] \right\} \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} \\
& + \sum_j \left\{ \frac{n'_{j0}\gamma_{j0}^3\eta_j^3 \cos^2 \theta (v'_{jp0} - M)}{R_{j0}^2 R_{j32}} \left[2\rho_{jz'0} \cos \theta - \frac{a}{c'^2} \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_{j0}\eta_j}{R_{j32}} \left[n'_{j0}\rho_{jz'0} (g_4 h_1 - g_1) - f_1 + f_4 h_1 \right] \right\} \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} \\
& + \sum_j \frac{\gamma_{j0}\eta_j}{R_{j32}} \left[h_3 (f_4 + n'_{j0}g_4\rho_{jz'0}) - f_2 - n'_{j0}g_2\rho_{jz'0} \right] \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} = 0 .
\end{aligned} \tag{5.61}$$

La ecuación (5.61) muestra que, luego de reordenar los términos que provienen de las perturbaciones a todos los órdenes mostrados en este capítulo, efectivamente se tiene una ecuación de KdV, de la forma

$$\left(1 + \sum_j c_j \right) \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} + \sum_j a_j \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + \sum_j b_j \frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} = 0 ,$$

con

$$\begin{aligned}
c_j = \frac{1}{R_{j0}R_{j32}\Omega'^2} & \left\{ n'_{j0}Q_j^2\gamma_{j0}^4 (v'_{jp0} - M)^3 \left[\rho_{jz'0} (R_{j32} - 1) \cos \theta \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho_{jx'0}\zeta_{jz'0} \sin \theta \right] + \gamma_{j0}\eta_j R_{j0} \left[h_2 (f_4 + n'_{j0}g_4\rho_{jz'0}) - f_3 - n'_{j0}g_3\rho_{jz'0} \right] \right\} , \tag{5.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_j = \frac{n'_{j0}\gamma_{j0}^3\eta_j^3 \cos^2 \theta (v'_{jp0} - M)}{R_{j0}^2 R_{j32}} & \left[2\rho_{jz'0} \cos \theta - \frac{a}{c'^2} \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \right] \\
& + \frac{\gamma_{j0}\eta_j}{R_{j32}} \left[n'_{j0}\rho_{jz'0} (g_4 h_1 - g_1) - f_1 + f_4 h_1 \right] , \tag{5.63}
\end{aligned}$$

$$b_j = \frac{\gamma_{j0}\eta_j}{R_{j32}} \left[h_3 (f_4 + n'_{j0}g_4\rho_{jz'0}) - f_2 - n'_{j0}g_2\rho_{jz'0} \right] . \tag{5.64}$$

De manera más estándar, (5.61) se escribe como

$$\frac{\partial \phi'_1}{\partial \tau} + p \phi'_1 \frac{\partial \phi'_1}{\partial \xi} + q \frac{\partial^3 \phi'_1}{\partial \xi^3} = 0 , \tag{5.65}$$

donde se definen los coeficiente p y q , que al igual que en el Capítulo 3, corresponden a el coeficiente no lineal y el de dispersión, respectivamente. En este caso, $p = \sum_j a_j / \sum_j b_j$ y $q = \left(1 + \sum_j c_j\right) / \sum_j b_j$, que a diferencia del caso no magnetizado, q tiene los términos $1 + \sum_j c_j$ en el numerador.

La solución de la ecuación (5.65) es conocida y es de la forma

$$\phi'_1 = \phi_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\eta}{\Delta} \right). \quad (5.66)$$

Aquí, ϕ'_1 tiene la forma de un solitón, donde $\eta = \xi - V\tau$, $\phi_0 = 3V/p$ y $\Delta = \sqrt{4q/V}$. De igual manera que en el Capítulo 3, η corresponde a la coordenada solidaria con el movimiento del solitón cuya rapidez es V , ϕ'_0 es su amplitud y Δ su ancho. La forma de esta solución solitónica (5.66), permite que este fenómeno no lineal solo exista si $q > 0$.

5.4. Discusión y resumen

En este capítulo se logra mostrar de manera teórica que, aunque el plasma relativista con partículas de polvo esté magnetizado, de todas maneras, es capaz de sostener la propagación de solitones bajo ciertas condiciones. Estos solitones tienen la misma naturaleza que los encontrados en el Capítulo 3, y algebraicamente se encuentran de la misma manera, por lo que la diferencia entre este plasma relativista no magnetizado con partículas de polvo y el mismo magnetizado, no se observa de manera inmediata a través de la metodología para encontrar una ecuación de KdV. Estas soluciones del tipo solitón poseen una forma específica, con una amplitud y un ancho bien definidos, que siguen dependiendo de la densidad de número n'_{j0} y velocidades iniciales en el plano de cada especie $v'_{jx'0}$, $v'_{jy'0}$ y $v'_{jz'0}$, pero además, del campo magnético Ω' y del ángulo θ de propagación con respecto al mismo.

Al incluir campo magnético, aumenta el número de ecuaciones y de variables a perturbar no linealmente, por lo que es aquí donde se logran apreciar las principales diferencias con el caso más sencillo expuesto en el Capítulo 3. El impacto del campo magnético se aprecia principalmente en el coeficiente de dispersión q , y de esta manera en el ancho del solitón Δ , ya que son los únicos parámetros que depende de Ω' explícitamente. Por otro lado, el coeficiente no lineal p depende del ángulo θ , que no existiría no de haber un campo magnético de fondo. Ambos coeficientes poseen una forma mucho más compleja que la exhibida en la Sección 3.3, por lo que es necesario realizar un estudio en la región de parámetros de este plasma, para ver bajo qué condiciones esta solución solitónica es posible, es decir, cuando $q > 0$.

Dentro de la literatura existente, se tiene el trabajo de R. Malik y H. K. Malik [105], en donde se muestra una investigación teórica de solitones compresivos en un plasma de electrones, positrones y polvo, con campo magnético de fondo. En este trabajo, se realiza un procedimiento similar al mostrado en este capítulo, por lo que es útil a la hora de comparar los resultados obtenidos. Encontramos que el campo magnético es capaz de modificar las propiedades del parámetro de dispersión del plasma, por lo que sólo afecta al ancho del solitón. Como se ha mencionado anteriormente, esta característica también puede ser observada en nuestros cálculos, en particular, en la ecuación (5.62).

Capítulo 6

Solitones en un plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo

A lo largo de este trabajo se ha desarrollado una descripción teórica para la dinámica relacionada a un plasma relativista con partículas de polvo, en su régimen no lineal. En los Capítulos 3 y 4 se encuentra una ecuación de KdV para las perturbaciones no lineales de este sistema y en qué condiciones es capaz de sostener solitones. Se estudia en detalle cómo afectan a la existencia y forma de los solitones encontrados, los cambios de velocidad en las especies del plasma y de la densidad de carga de las partículas de polvo.

Al llevar este plasma polvoriento a un entorno en donde hay un campo magnético de fondo, se observa que la forma de describir este sistema, a través de las ecuaciones de continuidad y movimiento, cambia en comparación con lo presentado en el Capítulo 3. Como se rompe la simetría espacial, se necesita de más ecuaciones para poder representar este plasma, permitiendo que las perturbaciones no lineales se propaguen en más de una dirección, pero que de todas maneras se pueden describir a través de una ecuación de KdV. Esto indica que para un plasma magnetizado o

no, es posible encontrar solitones en él de todas maneras, aunque esto no indica que sea bajo las mismas condiciones.

En este capítulo se estudia y analiza, numéricamente, la existencia y características de las soluciones solitónicas encontradas teóricamente en el capítulo anterior. Esto, con el objetivo de determinar el impacto y ver los cambios a los resultados ya logrados debido a la presencia de un campo magnético de fondo.

Para obtener soluciones numéricas de este nuevo solitón, dado por la ecuación (5.66), se fijan valores para las cantidades normalizadas libres, de la misma forma en que se hizo en el Capítulo 4. Como ya se pudo mostrar un conjunto de parámetros en donde existen estas estructuras localizadas sin campo magnético, se proponen dichos parámetros como punto de partida para el estudio de los resultados encontrados en el Capítulo 5. De esta manera, se pueden explorar las características de estos nuevos solitones en regiones en donde ya se pudo determinar que existen y poseen ciertas características, aislando el estudio de las cantidades asociadas al campo magnético, como el ángulo de propagación θ y la intensidad del campo magnético B_0 . Teniendo esto en cuenta, se resuelve numéricamente la ecuación de Poisson (5.35) para la velocidad de fase M , que de la misma manera que en el caso no magnetizado, define qué valores del coeficiente de dispersión q son positivos, permitiendo que existan solitones en este caso.

6.1. Velocidad de fase M

La ecuación (5.35) posee la misma dependencia que (3.22) con respecto a la velocidad de fase M , por lo que en general, tiene cuatro soluciones también. Dichas soluciones pueden ser reales, imaginarias o dos reales y dos imaginarias, de las cuales se buscan las que tengan un sentido físico, que dependerán explícitamente del valor

del ángulo de propagación θ . Al igual que en el Capítulo 4, se han fijado los valores: $n'_{i0} = 1$, $\alpha_i = 0.1$, $\alpha_e = 1$, $c' = 150$, $v'_{d0} = 0$, $e = -1.6022 \text{ C}$, $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ y $m_d = 1.67 \times 10^{-27} \times 10^6 \text{ kg}$. Para las cantidades asociadas a las partículas de polvo, se considera la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ en dos rangos: densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y densidad de carga alta $Z_d n'_{d0} = 45$. Por último, se definen las velocidades iniciales de las especies en las tres direcciones de propagación, normalizadas a la velocidad de la luz c' , es decir, $v'_{jx'0} = c' \beta_{jx'0}$, $v'_{jy'0} = c' \beta_{jy'0}$ y $v'_{jz'0} = c' \beta_{jz'0}$. Hay que destacar que las partículas de polvo se encuentran en reposo inicialmente, donde $\beta_{dx'0} = \beta_{dy'0} = \beta_{dz'0} = 0$. También, se definen valores de β pequeños para iones y electrones en el plano, es decir, $\beta_{ix'0} = \beta_{ex'0} = 0.12$ y $\beta_{iy'0} = \beta_{ey'0} = 0.11$, de tal manera de no explorar zonas muy alejadas de las estudiadas en el caso no magnetizado.

Con esto en mente, se tienen las Figuras 17–20, en donde se grafican las soluciones de la ecuación (5.35), en función del ángulo θ , para ver cómo afecta la orientación de la propagación. Estas soluciones se clasifican en dos: los modos lentos, M_1 y M_2 (Figuras 17 y 19), y los modos rápidos M_3 y M_4 (Figuras 18 y 20).

La Figura 17 muestra la forma que poseen los dos modos lentos para densidades de carga baja en los paneles (a) y (c), y para densidades de carga alta en los paneles (b) y (d), cuando los electrones son la especie de fondo. Esto quiere decir que los electrones se mueven con $\beta_{e'z0} = 0.1$ cuando son débilmente relativistas (línea discontinua corta) y con $\beta_{e'z0} = 0.75$, cuando son relativistas (línea discontinua larga).

De manera general se observa que cambiar el ángulo en la ecuación (5.35), hace que se curve la línea que representa la solución para M , en comparación con lo estudiado en el Capítulo 4. Cuando la densidad de carga es baja, M_1 y M_2 existen para el rango completo del ángulo estudiado, es decir, para θ entre $-\pi$ y π . El

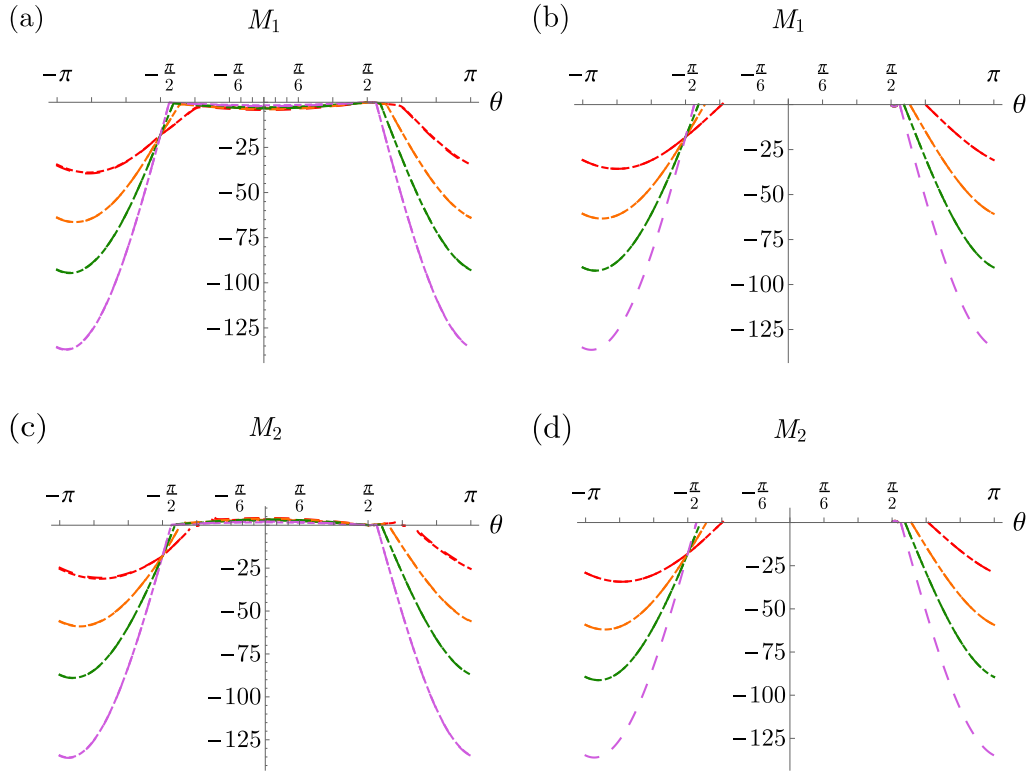


Figura 17: Modo lento M_1 y M_2 de la velocidad de fase versus θ para densidad de carga baja en (a) y (c), y para densidad de carga alta en (b) y (d). La línea discontinua corta (larga) corresponde a $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$), que representan electrones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{iz'0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{iz'0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{iz'0} = 0.6$ (verde) y $\beta_{iz'0} = 0.9$ (rosado).

comportamiento de ambas soluciones es similar para ángulos entre $\theta \sim -\pi$ y $\theta \sim -\pi/2$, y $\theta \sim \pi/2$ y $\theta \sim \pi$, en donde M_1 y M_2 posee valores grandes en comparación a la zona de ángulos intermedios y más pequeños. Entre $\theta \sim -\pi/2$ y $\theta \sim \pi/2$, la velocidad de fase M_1 es negativa en la Figura 17(a) y M_2 es positiva en la Figura 17(b). Para densidad de carga alta, M existe sólo para ángulos más grandes, como se observa en las Figuras 17(b) y (d). En ambos casos de la densidad, se ve que aumentar la velocidad de los iones (cambio de color en las líneas), produce un crecimiento

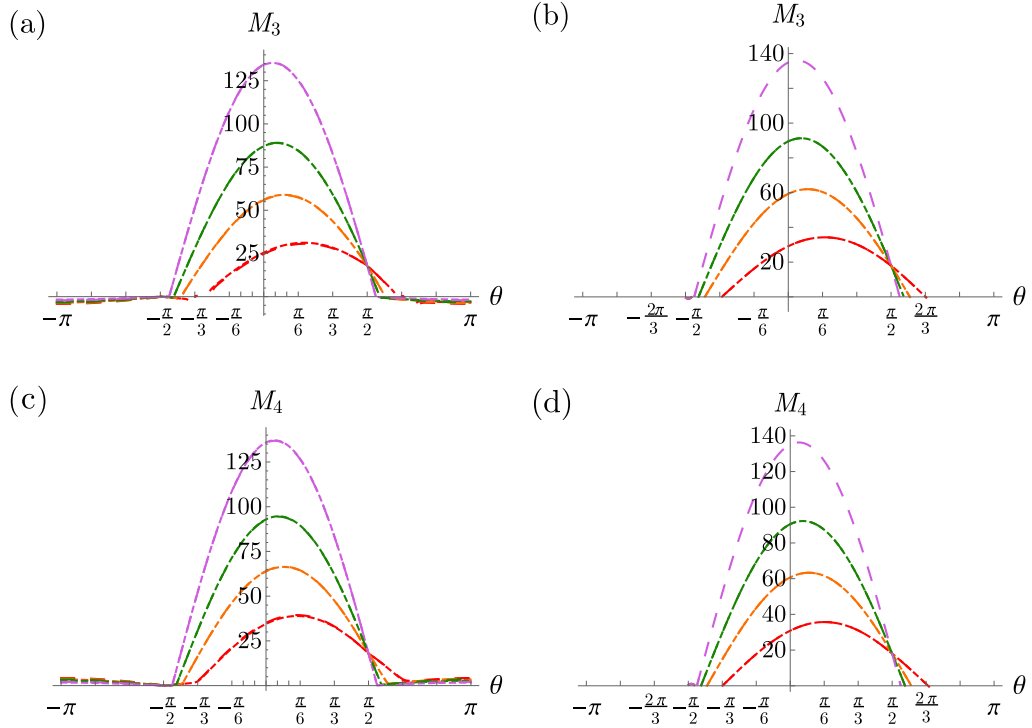


Figura 18: Modo rápido M_3 y M_4 de la velocidad de fase versus θ para densidad de carga baja en (a) y (c), y para densidad de carga alta en (b) y (d). La línea discontinua corta (larga) corresponde a $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$), que representa electrones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los iones: $\beta_{iz'0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{iz'0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{iz'0} = 0.6$ (verde) y $\beta_{iz'0} = 0.9$ (rosado).

en el valor de las soluciones, tanto para electrones débilmente relativistas, como relativistas.

El mismo análisis se puede realizar para las soluciones más grandes de la ecuación de Poisson (5.35). Estas soluciones corresponden a los modos más rápidos, M_3 y M_4 , mostrados en la Figura 18, en los cuales se observa un comportamiento similar al descrito para los modos lentos vistos en la Figura 17. En este sentido, las soluciones también se curvan a medida que cambia el ángulo, independiente de si la densidad de carga es baja o alta.

Por otro lado, se observa en la Figura 18 que el hecho de tener electrones débilmente relativistas (línea discontinua corta) o electrones relativistas (línea discontinua larga), no implica un mayor impacto en la solución, ya que una curva se encuentra casi por encima de la otra. No así el cambio de velocidades en los iones, que se representa con el cambio de color de las curvas, que se separan a medida que aumenta el valor de $\beta_{iz'0}$, efecto que es independiente del valor de $Z_d n'_{d0}$. En particular, en los paneles (b) y (d) de la Figura 18, la solución existe solo para electrones relativistas cuando los iones son relativistas, con $\beta_{iz'0} = 0.9$. Esto se manifiesta a través de la ausencia de una curva discontinua corta y rosada en la figura.

La diferencia más grande que se puede observar en este caso es que, para los ángulos más grandes, la solución es pequeña, y para los ángulos intermedios y más pequeños, la solución es muy grande en comparación con los extremos. Cuando la densidad de carga es baja, el modo M_3 es negativo entre $\theta \sim -\pi$ y $\theta \sim -\pi/2$, y $\theta \sim \pi/2$ y $\theta \sim \pi$. Estos límites se van modificando a medida que disminuye el valor de $\beta_{iz'0}$. Para los ángulos intermedios, la solución es positiva y de gran amplitud, descripciones que se pueden observar en Figura 18(a). Para el modo más rápido M_4 , se tiene un comportamiento contrario al de M_3 para los ángulos más grandes, en donde la solución ahora es positiva. Para los ángulos intermedios, sigue siendo muy grande y positiva como se observa en Figura 18(c). Cuando la densidad de carga es alta, la solución deja de ser real para los valores más grandes de los ángulos estudiados en M_3 y M_4 . Sólo permanece la solución para los ángulos intermedios, en donde sigue siendo positiva y su amplitud aumenta debido al crecimiento en $Z_d n'_{d0}$.

Por otro lado, se tienen los cuatro modos de propagación de este plasma cuando son los iones la especie de fondo (Figuras 19 y 20). A diferencia de cuando los electrones están en el fondo, en este caso las curvas se separan por tipo de línea en

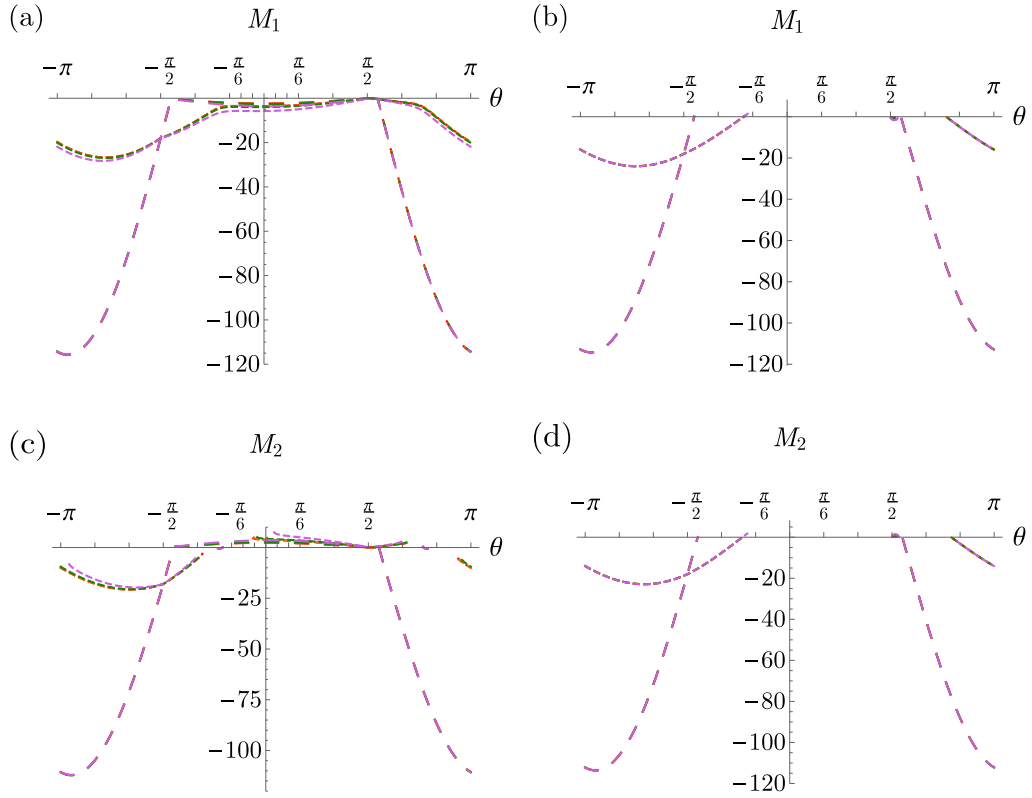


Figura 19: Modo lento M_1 y M_2 de la velocidad de fase versus θ para densidad de carga baja en (a) y (c), y para densidad alta en (b) y (d). La línea discontinua corta (larga) corresponde a $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$), que representa iones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los electrones: $\beta_{ez'0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{ez'0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{ez'0} = 0.6$ (verde) y $\beta_{ez'0} = 0.9$ (rosado).

vez de hacerlo por color, como se ha visto anteriormente. Esto muestra que, para los modos lentos y rápidos, se tiene un mayor impacto en la solución al modificar el valor de $\beta_{iz'0}$ de débilmente relativista (línea discontinua corta) a relativista (línea discontinua larga), que al modificar el valor de $\beta_{ez'0}$ (cambio de color en la línea), mostrando nuevamente que los efectos relativistas son más relevantes en los iones que en los electrones.

La Figura 19 muestra los modos lentos M_1 y M_2 provenientes de la ecuación (5.35)

para las condiciones de velocidades descritas. Cuando la densidad de carga es baja, se puede observar para el modo M_1 que la solución es negativa para todos los ángulos entre $-\pi$ y π . Esta solución es más negativa para los ángulos grandes en comparación con los ángulos más pequeños. Al tratarse de iones débilmente relativistas, línea discontinua corta en la Figura 19(a), esta solución es negativa y se acerca a a cero en $\theta \sim \pi/2$. Luego decrece nuevamente hasta $\theta \sim -5\pi/6$, para posteriormente crecer levemente hasta $\theta \sim -\pi$. Para iones relativistas de fondo, línea discontinua larga en la misma figura, se observa el mismo comportamiento general, con la diferencia de que la solución se acerca notoriamente a cero en $\theta \sim -\pi/2$ y $\theta \sim \pi/2$. Luego de esos ángulos, la solución es mucho más grande que en el centro. El modo M_2 también se presenta como el modo M_1 , pero es positivo para los ángulos positivos pequeños e intermedios. La solución existe y es negativa hasta $\theta \sim -\pi/3$, en donde deja de ser real mientras se acerca a $\theta \sim 0$, dependiendo del valor de $\beta_{ez'0}$ para iones de fondo débilmente relativistas. Esta solución no se pierde cuando $\beta_{iz'0} = 0.75$, como se puede ver en la Figura 19(c).

Cuando la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ es alta, los modos M_1 y M_2 son muy similares. En ambos casos la solución deja de existir para ángulos entre $\theta \sim -\pi/6$ y $\theta \sim 5\pi/6$ si los iones de fondo son débilmente relativistas, y entre $\theta \sim -\pi/2$ y $\theta \sim \pi/2$ si los iones son relativistas, como se tiene en la Figura 19(b) y (d).

En la Figura 20 se observan los modos rápidos M_3 y M_4 de este plasma para densidad de carga baja y alta. Al igual que en la Figura 18, cuando la densidad de carga es baja, el modo M_3 es negativo para un rango de ángulos negativos y positivo para otros, mientras que el modo M_4 es siempre positivo. Para ángulos entre $\theta \sim -\pi/3$ y $\theta \sim -\pi/18$, el valor de M_3 deja de ser real, para luego reaparecer con valores positivos hasta $\theta \sim 2\pi/3$, en donde vuelve a ser imaginario cuando los

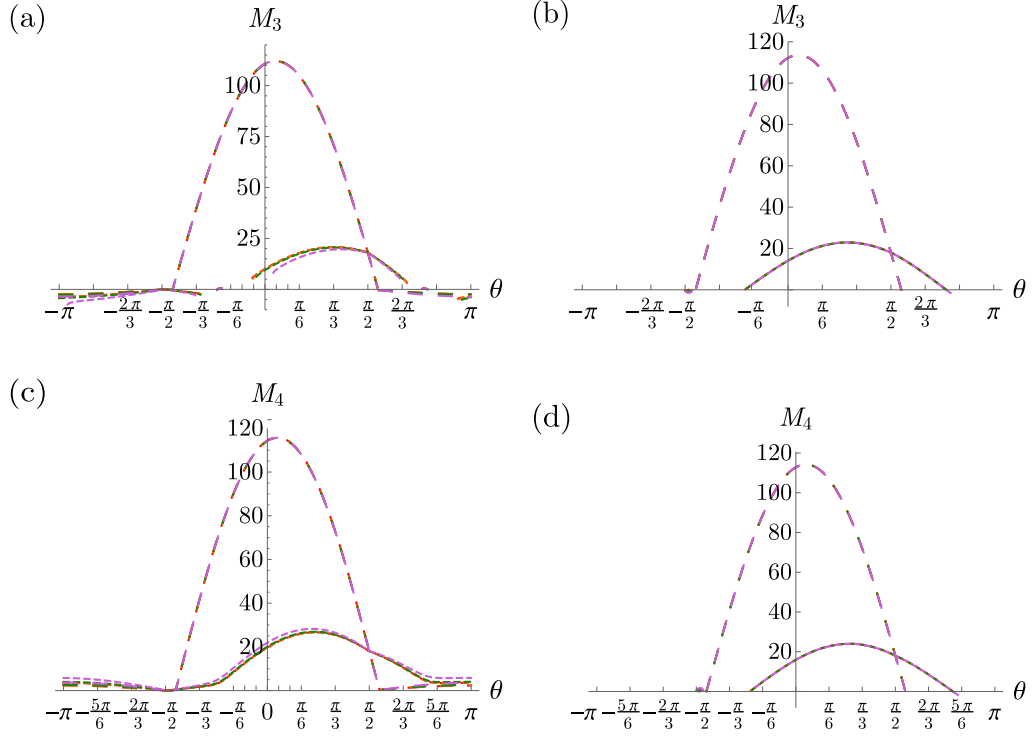


Figura 20: Modo rápido M_3 y M_4 de la velocidad de fase versus θ para densidad de carga baja en (a) y (c), y para densidad alta en (b) y (d). La línea discontinua corta (larga) corresponde a $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$), que representa iones débilmente relativistas (relativistas) de fondo. Los colores corresponden a diferentes velocidades de los electrones: $\beta_{ez'0} = 0.2$ (rojo), $\beta_{ez'0} = 0.4$ (naranja), $\beta_{ez'0} = 0.6$ (verde) y $\beta_{ez'0} = 0.9$ (rosado).

iones de fondo son débilmente relativistas. Esto no ocurre para valores grandes de $\beta_{iz'0}$, en donde la solución es negativa entre $\theta \sim -\pi$ y $\theta \sim -\pi/2$, y $\theta \sim \pi/2$ y $\theta \sim \pi$. Para todos los valores de θ intermedios, M es positivo y de gran amplitud, según la Figura 20(a).

La solución M_4 es positiva para todos los valores del ángulo entre $-\pi$ y π . Cuando los iones de fondo son débilmente relativistas, la solución se acerca a cero para $\theta \sim -\pi/2$, y alcanza su máximo entre $\pi/6$ y $\pi/3$. M_4 se acerca a cero cuando $\theta \sim -\pi/2$ y $\theta \sim \pi/2$, y el máximo lo alcanza en $\theta \sim \pi/18$ para iones de fondo

relativistas, visto en la Figura 20(c).

Al aumentar la densidad de carga, M_3 y M_4 son muy similares, en donde ocurre lo opuesto a lo visto en la Figura 18. Si los iones de fondo son débilmente relativistas, la solución deja de existir para ángulos más negativos que $\theta \sim -\pi/4$ y más grandes $\theta \sim 5\pi/6$. Si los iones de fondo son relativistas, estos límites se trasladan hacia la izquierda en el gráfico, lo que se puede apreciar en las Figuras 20(c) y (d).

6.2. Coeficiente de dispersión y ancho del solitón

Una vez que se conoce para qué ángulos la ecuación (5.35) posee soluciones reales, se pueden utilizar esos mismos rangos para estudiar la existencia de solitones en este plasma magnetizado con partículas de polvo. Usando las soluciones lentas y rápidas estudiadas en las Figuras 17–20, para densidades de carga $Z_d n'_{d0}$ baja y alta, buscamos establecer los valores de M que permiten que el coeficiente de dispersión q sea positivo para este plasma en el espacio de parámetros propuesto.

En el Capítulo 5, se encuentra una expresión para el coeficiente de dispersión q , en donde se establece que depende explícitamente de θ y de B_0 , a través de Ω' en el coeficiente c_j , como muestra (5.62). El coeficiente c_j es la única cantidad que depende explícitamente de Ω' , ya que el coeficiente no lineal p sólo depende del ángulo, como se observa en (5.63) y (5.64).

De esta manera, primero se fija el ángulo θ en un valor pequeño, $\theta = \pi/60$, para estudiar los efectos de su existencia cerca de las condiciones establecidas en el caso no magnetizado del Capítulo 4, y poder evaluar el impacto de B_0 en q , recordando que $\Omega' = B_0 (1/4\pi n_{i0} m_d c^2)^{1/2}$. En función de esto, se tiene q en las Figuras 21–23. En cada una de estas figuras, se revisan dos casos: cuando los iones son la especie de fondo y cuando los electrones son la especie de fondo. En el primer caso, cuando

los iones son la especie de fondo, se grafican los puntos con los colores morado (iones débilmente relativistas) y amarillo (iones relativistas). De igual manera en el segundo caso, pero con los colores rojo (electrones débilmente relativistas) y celeste (electrones relativistas). Así, se analiza q en función de $\beta_{iz'0}$ y $\beta_{ez'0}$ para distintos valores del campo magnético: $B_{01} = 0.0001\text{T}$, $B_{02} = 0.001\text{T}$, $B_{03} = 0.01\text{T}$, $B_{04} = 0.1\text{T}$, $B_{05} = 1\text{T}$, cuando $\theta = \pi/60$ es un valor fijo y pequeño. Estos valores de la intensidad del campo magnético son elegidos para poder mostrar en qué rangos se observa algún impacto debido a B_0 , por la forma que posee la expresión (5.62) y por los posibles contextos astrofísicos en que se pueda estudiar y aplicar el análisis de este plasma, como muestra Malik y Malik en [105], Jafari en [137], y O'Sullivan y Gabuzda en [138], por mencionar algunos ejemplos. Teniendo todo esto en consideración, para

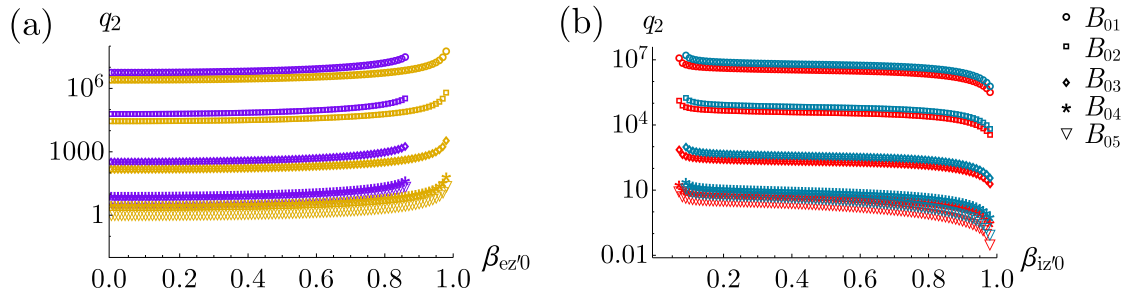


Figura 21: Coeficiente de dispersión q_2 versus (a) $\beta_{ez'0}$ y (b) $\beta_{iz'0}$, para $\theta = \pi/60$ y $Z_d n'_{d0} = 0.55$. El tipo de punto representa un valor para el campo magnético de fondo: $B_{01} = 0.0001\text{ T}$, $B_{02} = 0.001\text{ T}$, $B_{03} = 0.01\text{ T}$, $B_{04} = 0.1\text{ T}$, $B_{05} = 1\text{ T}$. En (a), los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$). En (b), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$).

$\theta = \pi/60$, las velocidades de fase que producen solitones son M_2 , M_3 y M_4 , como se observa en las Figuras 21–23.

En el caso del modo lento M_2 , se tiene q_2 en la Figura 21. Independiente de si los electrones o los iones son la especie de fondo, el comportamiento general del

coeficiente de dispersión es disminuir a medida que el campo magnético B_0 crece, lo que implica que el ancho del solitón también decrece según (5.66). Cuando los iones son la especie de fondo, q_2 aumenta a mientras que crece $\beta_{ez'0}$, pero disminuye cuando los iones cambian su velocidad de $\beta_{iz'0} = 0.1$ (puntos morados) a $\beta_{iz'0} = 0.75$ (puntos amarillos), aunque este cambio no es muy exagerado, como se ve en la Figura 21(a). El caso contrario se tiene en la Figura 21(b), en donde son los electrones la especie de fondo. En esta oportunidad, el coeficiente de dispersión disminuye mientras que $\beta_{iz'0}$ crece, pero aumenta cuando el valor de $\beta_{ez'0} = 0.1$ pasa a $\beta_{ez'0} = 0.75$. Esto se ve reflejado en el cambio de color de los puntos, cuando van del rojo (electrones débilmente relativistas) al celeste (electrones relativistas).

Se tiene una situación similar para los coeficientes q_3 y q_4 , que provienen de las velocidades M_3 y M_4 , respectivamente. En las Figuras 22 y 23, también se tiene que q disminuye a cuando aumenta el campo magnético. Esto, nuevamente se traduce en que el ancho del solitón disminuye para campos magnéticos más intensos, para densidades de carga $Z_d n'_{d0}$ baja y alta.

Para el coeficiente q_3 , cuando los iones en el fondo son débilmente relativistas (puntos morados) y la densidad de carga es baja, q tiende a disminuir cuando $\beta_{ez'0}$ crece hasta $\beta_{ez'0} \sim 0.85$. Para valores mayores de $\beta_{ez'0}$, q_3 deja de ser positivo, por lo que ya no existen solitones. Para iones de fondo relativistas (puntos amarillos), q_3 existe desde $\beta_{ez'0} \sim 0.75$, en donde decrece su valor hasta llegar a $\beta_{ez'0} \sim 0.99$, como se puede apreciar en la Figura 22(a). También, el valor de q_3 es más grande en comparación a cuando los iones son débilmente relativistas. Para densidades de carga más altas, ocurre lo contrario: q_3 crece. Para iones débilmente relativistas en el fondo, el crecimiento es sutil y existe para todos los valores de $\beta_{ez'0}$. Cuando los iones de fondo son relativistas, q_3 es más grande en comparación a cuando los iones poseen

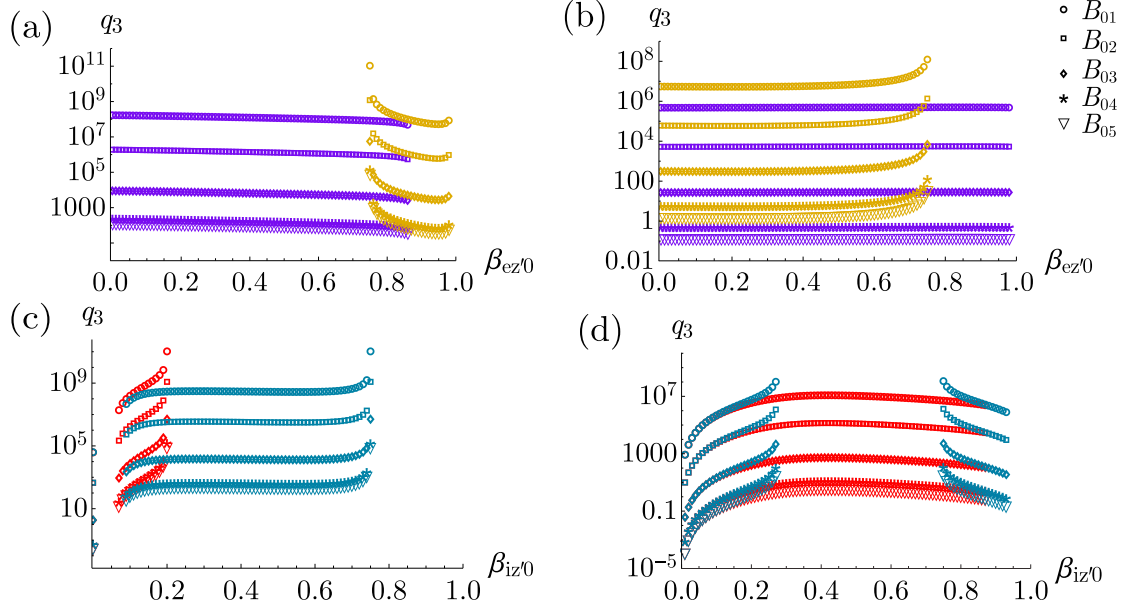


Figura 22: Coeficiente de dispersión q_3 versus $\beta_{ez'0}$ en (a) y (b), y versus $\beta_{iz'0}$ en (c) y (d), para $\theta = \pi/60$. En (a) y (c), $Z_d n'_{d0} = 0.55$. En (b) y (d), $Z_d n'_{d0} = 45$. El tipo de punto representa un valor para el campo magnético de fondo: $B_{01} = 0.0001$ T, $B_{02} = 0.001$ T, $B_{03} = 0.01$ T, $B_{04} = 0.1$ T, $B_{05} = 1$ T. En (a), los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$). En (b), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$).

velocidades más bajas, y crece mientras $\beta_{ez'0}$ aumenta. El coeficiente de dispersión existe hasta $\beta_{ez'0} \sim 0.75$ cuando $\beta_{iz'0} = 0.75$.

En las Figuras 22(c) y (d), se tiene el caso en que los electrones son la especie de fondo para densidades de carga baja y alta, respectivamente. En (c) se observa que, cuando los electrones de fondo son débilmente relativistas (puntos rojos), los solitones existen en un rango muy acotado de valores de $\beta_{iz'0}$, mientras que para electrones de fondo relativistas (puntos celestes) existen para un rango más amplio, llegando hasta $\beta_{iz'0} \sim 0.75$. Cuando aumenta la densidad de carga, para electrones débilmente relativistas (puntos rojos), los solitones existen para casi todos los valores

de $\beta_{iz'0}$. Al aumentar la velocidad de los electrones (puntos celestes), se aprecia en (d) que los solitones existen hasta $\beta_{iz'0} \sim 0.35$, luego q_3 deja de ser positivo, para reaparecer entre $\beta_{iz'0} \sim 0.75$ y $\beta_{iz'0} \sim 0.95$. El coeficiente de dispersión q_4 , que

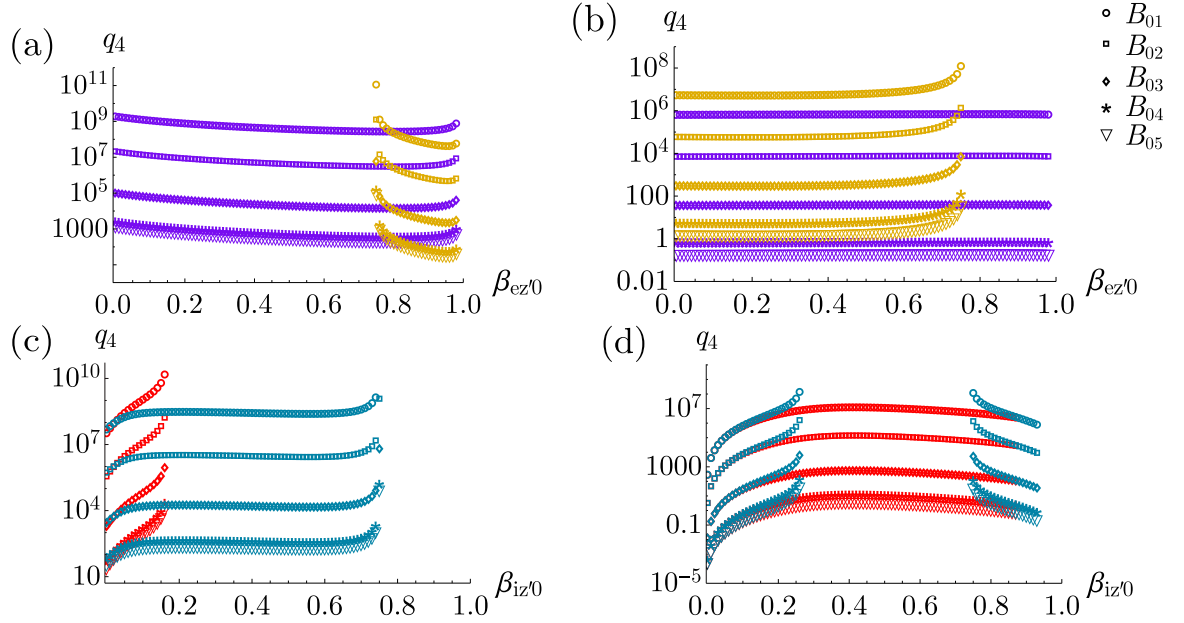


Figura 23: Coeficiente de dispersión q_4 versus $\beta_{ez'0}$ en (a) y (b), y versus $\beta_{iz'0}$ en (c) y (d), para $\theta = \pi/60$. En (a) y (c), $Z_d n'_{d0} = 0.55$. En (b) y (d), $Z_d n'_{d0} = 45$. El tipo de punto representa un valor para el campo magnético de fondo: $B_{01} = 0.0001$ T, $B_{02} = 0.001$ T, $B_{03} = 0.01$ T, $B_{04} = 0.1$ T, $B_{05} = 1$ T. En (a), los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$). En (b), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$).

proviene de la velocidad M_4 , muestra un comportamiento similar al descrito para q_3 . Esto se ve explícitamente en la Figura 23, cuando los iones son la especie de fondo en (a) y (b) y cuando los electrones son la especie de fondo en (c) y (d).

Ya habiendo establecido que al aumentar la intensidad del campo magnético B_0 disminuye el ancho del solitón que existe según los parámetros estudiados, es necesario revisar cómo afectan distintos valores para el ángulo de propagación en la

existencia y el ancho de estas estructuras. Fijando el valor de la intensidad del campo magnético en $B_0 = 0.1$ T, en las Figuras 24–26, se ve cómo afectan distintos valores de θ en la existencia y el ancho. El cambio en los ángulos es pequeño: $\theta_1 = \pi/60$ (3°), $\theta_2 = \pi/36$ (5°) y $\theta_3 = \pi/18$ (10°). Esto con el objetivo de no desviar mucho el espacio de parámetros con respecto a lo estudiado en el Capítulo 4, como se ha mencionado anteriormente.

Lo primero que se logra observar cambiando los ángulos es que aparece una solución en la ecuación (5.35), menor que M_2 , que produce valores positivos del coeficiente de dispersión. Esta solución es el modo más lento M_1 , que para $\theta_3 = \pi/18$, produce valores positivos de q_1 entre $\beta_{iz'0} \sim 0.35$ y $\beta_{iz'0} \sim 0.7$ para electrones en el fondo. Esto se aprecia en la Figura 24(a), en donde los electrones de fondo relativistas (puntos celestes), producen solitones más anchos que los electrones de fondo débilmente relativistas (puntos rojos). En los paneles (b) y (c) de la misma figura, se tiene el coeficiente de dispersión q_2 cuando los iones están en el fondo y cuando los electrones están en el fondo, respectivamente. A diferencia de lo que se observa al cambiar los valores de B_0 para un ángulo fijo, cambiar el valor de θ para B_0 fijo tiene un efecto más pronunciado. En el caso de los iones como la especie de fondo, cuando son débilmente relativistas (color morado), θ_1 (círculos) y θ_2 (cuadrados), producen q_2 muy similares que tienden a crecer con $\beta_{ez'0}$. Esto implica que el ancho del solitón crece con q_2 hasta $\beta_{ez'0} \sim 0.9$. Esto también ocurre para θ_3 (diamantes), con la diferencia de que presenta una discontinuidad cerca de $\beta_{ez'0} \sim 0.7$. Cuando los iones de fondo son relativistas (color amarillo), q_2 existe para todo el rango de $\beta_{ez'0}$ estudiado, pero para valores más pequeños, lo que se traduce en solitones más angostos para θ_1 y θ_2 . Para θ_3 ocurre lo contrario: q_2 crece, produciendo solitones más anchos, manteniendo la discontinuidad en $\beta_{ez'0}$, como se

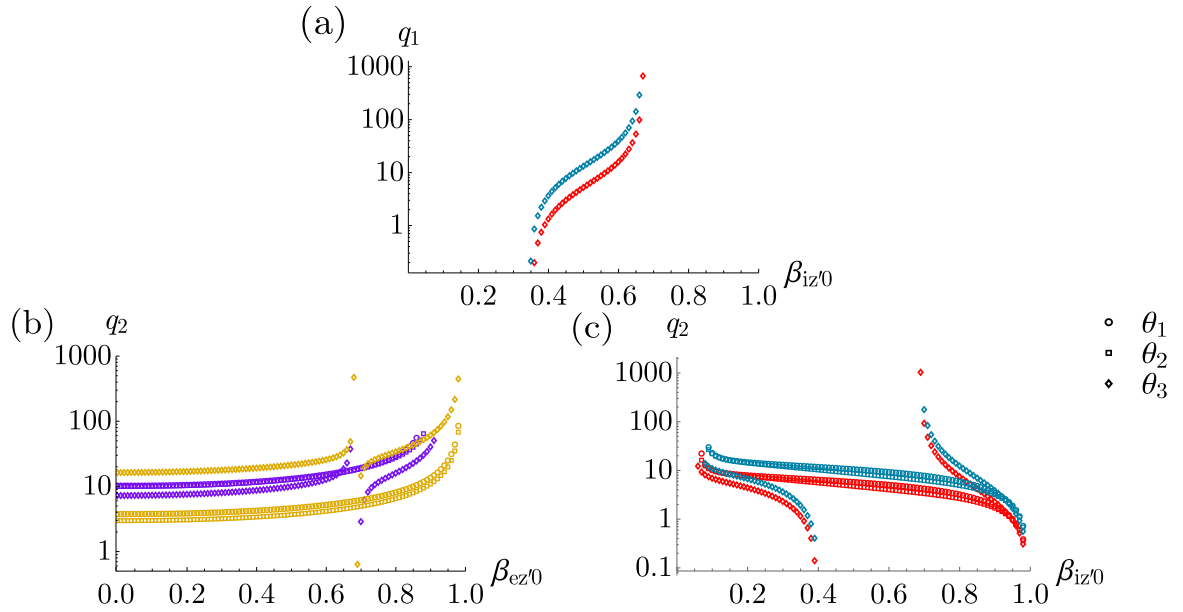


Figura 24: (a) Coeficiente de dispersión q_1 versus $\beta_{iz'0}$, (b) q_2 versus $\beta_{ez'0}$ y (c) q_2 versus $\beta_{iz'0}$, para $B_0 = 0.1$ T y $Z_d n'_{d0} = 0.55$. El tipo de punto representa un valor para θ . En (a) y (c), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$). En (b), los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$).

puede observar en la Figura 24(b).

De igual manera, en la Figura 24(c) para electrones de fondo, la solución existe para la mayoría de los valores de $\beta_{iz'0}$ en θ_1 y θ_2 . Cuando el ángulo es θ_3 , q_2 existe hasta $\beta_{iz'0} \sim 0.4$ y luego desde $\beta_{iz'0} \sim 0.7$, de manera independiente al valor de $\beta_{ez'0}$ de fondo. En este caso, el ancho del solitón disminuye cuando θ crece, y cuando los electrones de fondo pasan a ser relativistas (cambio del rojo al celeste), el valor de q_2 crece, aumentando el ancho del solitón.

De manera general, en las Figuras 25 y 26, se muestra el coeficiente de dispersión q_3 y q_4 en función de $\beta_{ez'0}$ y $\beta_{iz'0}$, para θ_1 , θ_2 y θ_3 , cuando $B_0 = 0.1$ T. El comportamiento general de este modo es bastante similar al que se ha descrito para los

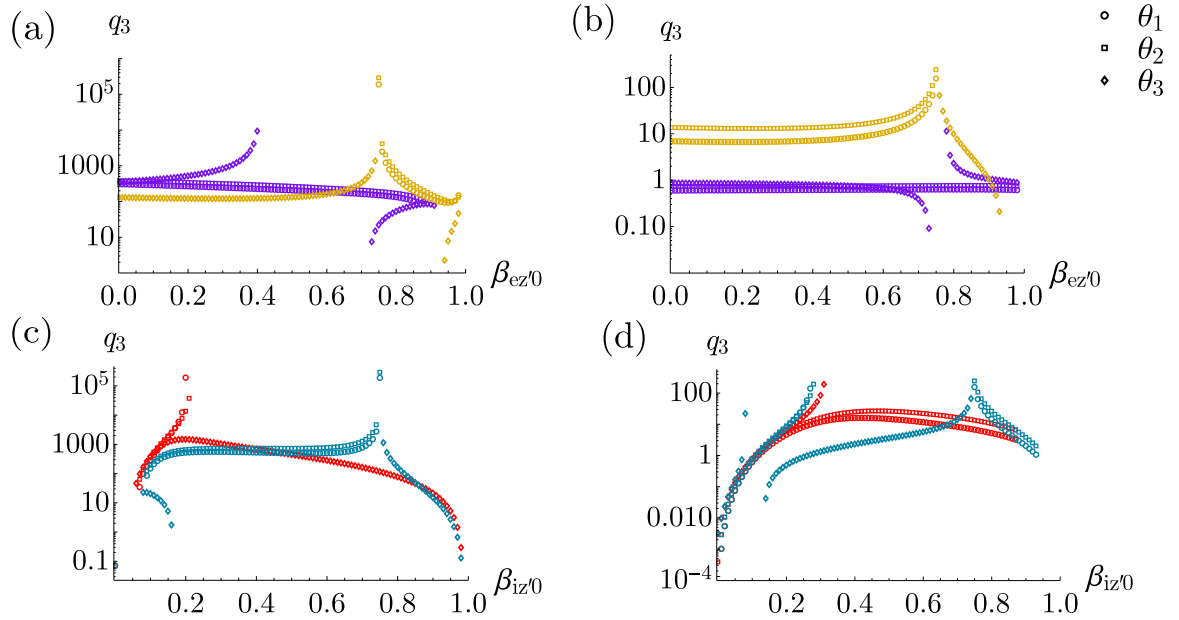


Figura 25: (a) Coeficiente de dispersión q_3 versus $\beta_{ez'0}$ cuando $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (b) cuando $Z_d n'_{d0} = 45$. (c) Coeficiente de dispersión q_3 versus $\beta_{iz'0}$ cuando $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (d) cuando $Z_d n'_{d0} = 45$. En esta figura, $B_0 = 0.1$ T y el tipo de punto representa un valor para θ . En (a) y (b), los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$). En (c) y (d), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$).

otros coeficientes de dispersión. El valor de q_3 y q_4 es positivo dependiendo de si los electrones o los iones son la especie de fondo, de si son débilmente relativistas o relativistas y de si la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ es baja o alta.

Cuando los iones son la especie de fondo, el valor de q_3 y q_4 crece levemente al aumentar el ángulo de θ_1 a θ_2 . Cuando el ángulo aumenta de θ_2 a θ_3 , q_3 crece hasta $\beta_{ez'0} \sim 0.4$, en donde deja de existir para valores más grandes de $\beta_{ez'0}$, reapareciendo cerca de $\beta_{ez'0} \sim 0.7$ como se muestra en la Figura 25(a). Para q_4 sucede lo mismo, con la diferencia de que los valores de $\beta_{ez'0}$ para los cuales existen solitones se trasladan, como se observa en la Figura 26(a). En ambos casos, el comportamiento del

coeficiente de dispersión cambia cuando los iones de fondo son relativistas, ya que q_3 y q_4 ya no son positivos entre $\beta_{ez'0} \sim 0$ y $\beta_{ez'0} \sim 0.75$ para θ_1 y θ_2 . Para θ_3 si lo son, y el rango de $\beta_{ez'0}$ en que existen solitones crece en comparación a cuando los iones de fondo son débilmente relativistas. Los coeficientes de dispersión q_3 y q_4 vuelven a ser positivos luego de $\beta_{ez'0} \sim 0.75$, en donde hace que disminuya el ancho del solitón hasta $\beta_{ez'0} \sim 0.99$, siendo más ancho para θ_2 . Al aumentar la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$, los valores de q_3 y q_4 se hacen más pequeños. Para iones de fondo débilmente relativistas, q_3 y q_4 se mantienen a lo largo de $\beta_{ez'0}$ en θ_1 y θ_2 , mientras que en θ_3 tiende a disminuir. Cuando los iones de fondo son relativistas, ocurre lo opuesto: existen solitones para θ_1 y θ_2 , cuyo ancho aumenta con el ángulo, mientras que para θ_3 disminuye, como se aprecia en la Figuras 25(b) y 26(b).

En el caso en que son los electrones la especie de fondo y $Z_d n'_{d0}$ es bajo, cuando son débilmente relativistas, q_3 es positivo para valores pequeños de $\beta_{iz'0}$. Esto ocurre cuando el ángulo de propagación es θ_1 o θ_2 , mientras que para θ_3 existen solitones para todo valor de $\beta_{iz'0}$ mayor a $\beta_{iz'0} \sim 0.05$. Al aumentar la densidad de carga, las condiciones de la existencia se invierten: para estos parámetros existen solitones en θ_1 y θ_2 en la mayor parte del rango de $\beta_{iz'0}$ y hasta $\beta_{iz'0} \sim 0.3$ para θ_3 . Por otro lado, los electrones de fondo al ser relativistas, revierten la situación para densidades de carga bajas. Esto quiere decir que para θ_1 y θ_2 , crece el rango de velocidades en donde existen solitones, mientras que para θ_3 , decrece. Cuando la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ es alta, existe una zona entre $\beta_{iz'0} \sim 0.3$ y $\beta_{iz'0} \sim 0.75$ en donde no existen solitones para θ_1 y θ_2 , pero sí para θ_3 , como es posible observar en los paneles (c) y (d) de la Figura 25.

El comportamiento de q_4 es muy similar al ya descrito para q_3 cuando los electrones son la especie de fondo, como muestran la Figuras 26(c) y (d).

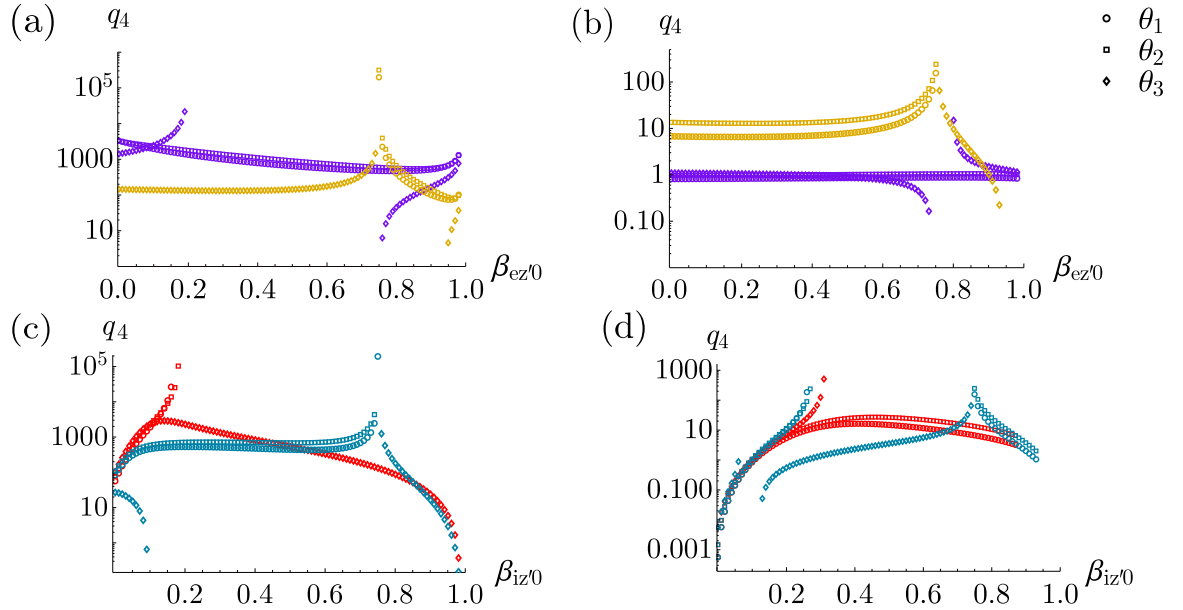


Figura 26: (a) Coeficiente de dispersión q_4 versus $\beta_{ez'0}$ cuando $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (b) cuando $Z_d n'_{d0} = 45$. (c) Coeficiente de dispersión q_3 versus $\beta_{iz'0}$ cuando $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (d) cuando $Z_d n'_{d0} = 45$. En esta figura, $B_0 = 0.1$ T y el tipo de punto representa un valor para θ . En (a) y (b), los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$). En (c) y (d), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$).

Todos los casos presentados hasta ahora describen en detalle las condiciones en que se da la existencia de solitones, a través del parámetro q , y en qué región del espacio de parámetros ocurre. Esta existencia también describe lo que ocurre con el ancho del solitón, que a través del coeficiente de dispersión q , lo impacta directamente. Recordando que el ancho Δ de la estructura localizada depende de q de la forma $\Delta = \sqrt{4q/V}$, se pueden tomar tres valores de $\beta_{iz'0}$ y $\beta_{ez'0}$, de tal manera de ejemplificar las situaciones descritas hasta ahora para el ancho, según la existencia, en función de B_0 y θ y de manera más general.

En la Figura 27 se observa el ancho del solitón Δ_2 que proviene de q_2 en función

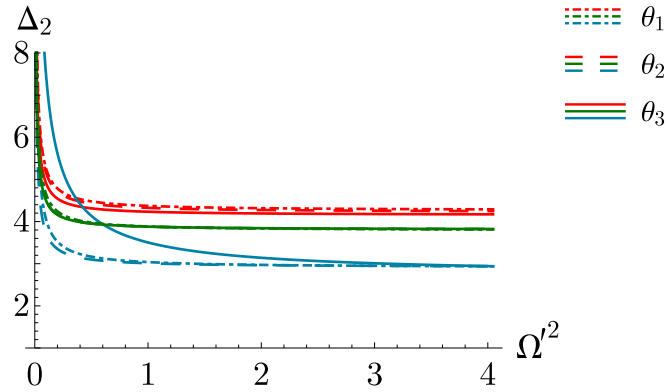


Figura 27: Ancho del solitón versus Ω'^2 para q_2 y $Z_d n'_{d0} = 0.55$. El color rojo representa especies débilmente relativistas, $\beta_{iz'0} = \beta_{ez'0} = 0.2$, el color verde representa $\beta_{iz'0} = 0.3$ y $\beta_{ez'0} = 0.4$, y el color celeste especies relativistas $\beta_{iz'0} = \beta_{ez'0} = 0.75$. El tipo de línea indica el ángulo de propagación.

de Ω'^2 . El rango de Ω'^2 estudiado es consistente con los valores de B_0 revisados en las Figuras 21–26, según $\Omega' = B_0 (1/4\pi n_{i0} m_d c^2)^{1/2}$. Se puede apreciar claramente que, independiente del ángulo y del valor de $\beta_{iz'0}$ y $\beta_{ez'0}$, el ancho del solitón disminuye cuando Ω'^2 crece, lo que se traduce en un aumento de B_0 . Este efecto es bastante exagerado para valores más pequeños de Ω'^2 , convergiendo rápidamente a un valor fijo de Δ_2 para valores de Ω'^2 más grandes. El impacto en el cambio del ángulo es tal como se mostró en las figuras anteriores. No tiene un comportamiento bien definido, ya que puede aumentar o disminuir el ancho, y este efecto no depende necesariamente del valor de $\beta_{iz'0}$ y/o $\beta_{ez'0}$, como se puede observar en el cambio del tipo de línea. El efecto más notorio se tiene en θ_3 , $\beta_{iz'0} = 0.3$ y $\beta_{ez'0} = 0.4$ (línea verde), en donde el ancho aumenta para luego converger a un valor fijo. En el resto de los casos sucede al revés: el ancho disminuye para converger a un valor fijo.

Lo mismo ocurre para el ancho de los solitones que provienen de los coeficientes de dispersión de velocidades de fase más grandes, como es el caso de q_3 y q_4 . En ambas situaciones, el ancho Δ_3 y Δ_4 disminuye notoria y rápidamente para valores

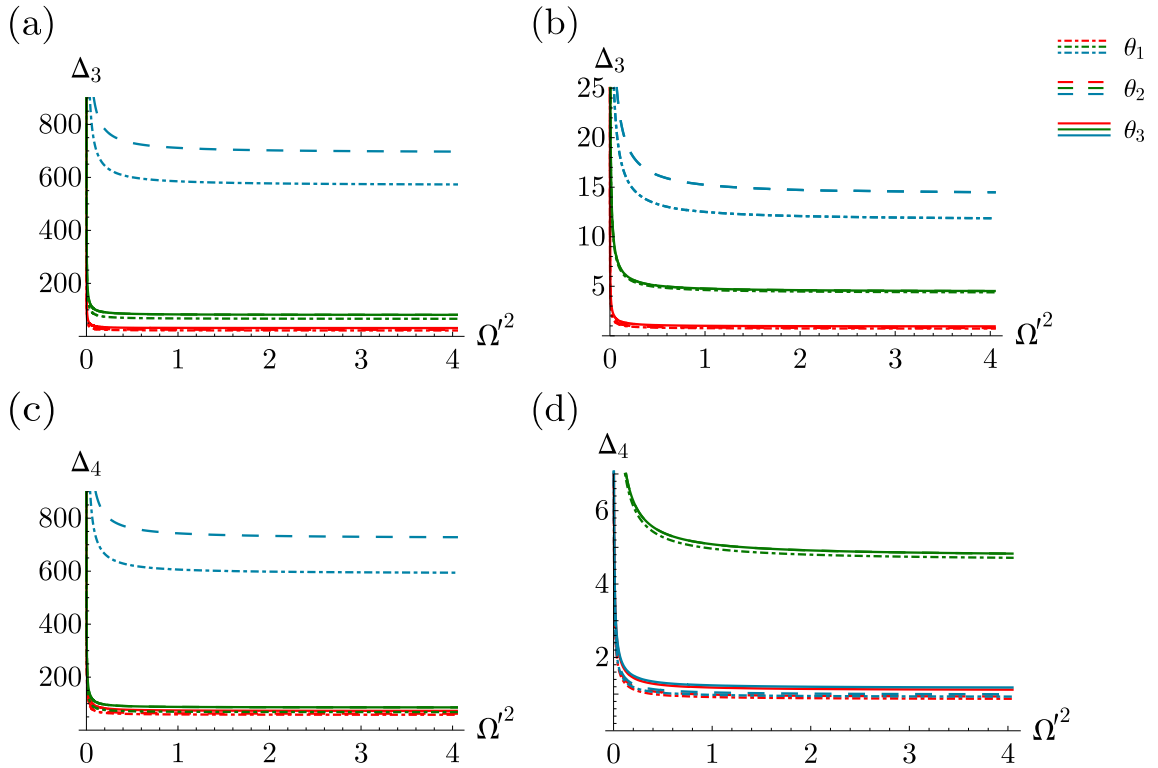


Figura 28: Ancho del solitón versus Ω'^2 para (a) q_3 y $Z_d n'_{d0} = 0.55$, para (b) q_3 y $Z_d n'_{d0} = 45$, para (c) q_4 y $Z_d n'_{d0} = 0.55$, y para (d) q_4 y $Z_d n'_{d0} = 45$. El color rojo representa especies débilmente relativistas, $\beta_{iz'0} = \beta_{ez'0} = 0.2$, el color verde representa $\beta_{iz'0} = 0.3$ y $\beta_{ez'0} = 0.4$, y el color celeste especies relativistas $\beta_{iz'0} = \beta_{ez'0} = 0.75$. El tipo de línea indica el ángulo de propagación.

más grandes de Ω'^2 y, por lo tanto, de B_0 , sin importar si la densidad de carga es baja o alta, como se tiene en la Figura 28. Dependiendo del valor del ángulo θ , pueden existir o no soluciones para ciertos valores de $\beta_{iz'0}$ y $\beta_{ez'0}$, o dependiendo del valor de la densidad de carga. Este último caso, se observa comparando los paneles (a) y (b) de Δ_3 , y los paneles (c) y (d) de Δ_4 de la Figura 28, en donde el ancho disminuye considerablemente al aumentar el valor de $Z_d n'_{d0}$.

6.3. Amplitud del solitón

Otra característica importante de los solitones que también puede ser estudiada es la amplitud ϕ_0 . En la Sección 6.2 se establece en detalle la región de parámetros en donde existen solitones para este plasma relativista, magnetizado y con partículas de polvo, y a partir de ella, cómo se comporta el ancho de la estructura. Por lo tanto, se puede utilizar el mismo conjunto de parámetros para determinar si los solitones existentes son compresivos ($\phi_0 > 0$) o rarefactivos ($\phi_0 < 0$).

La expresión algebraica derivada en la Sección 5.3 para la amplitud, depende del coeficiente no lineal p de la forma $\phi_0 = 3V/p$. A su vez, este coeficiente no depende explícitamente de Ω'^2 , pero sí de θ , como muestran las ecuaciones (5.63) y (5.64). Por lo tanto, no importa el valor que se fije para Ω'^2 o B_0 , este no afecta a la amplitud, por lo que se puede estudiar el impacto de θ de manera independiente.

Según lo mostrado en la Figura 24, para $B_0 = 0.1\text{T}$ fijo y $\theta_3 = \pi/18$, se tiene que existen solitones para el modo más lento M_1 en un rango definido de valores de $\beta_{iz'0}$. En la Figura 29(a) se puede apreciar la amplitud de dicho caso. Los solitones son compresivos, donde ϕ_{01} es mayor cuando los electrones en el fondo son débilmente relativistas (diamantes rojos) que cuando son relativistas (diamantes celestes). En el primer caso, la amplitud disminuye cuando $\beta_{iz'0}$ aumenta, mientras que en el segundo caso la amplitud crece con $\beta_{iz'0}$.

En los paneles (b) y (c) de la Figura 29 se tiene la amplitud de los solitones que provienen del modo lento M_2 , para densidad de carga baja cuando los iones son la especie de fondo y cuando los electrones son la especie de fondo, respectivamente. En el primer caso, se tiene que ϕ_{02} posee valores mayormente negativos, salvo una región entre $\beta_{ez'0} \sim 0.4$ y $\beta_{ez'0} \sim 0.65$ para θ_3 (diamantes morados y amarillos). Para

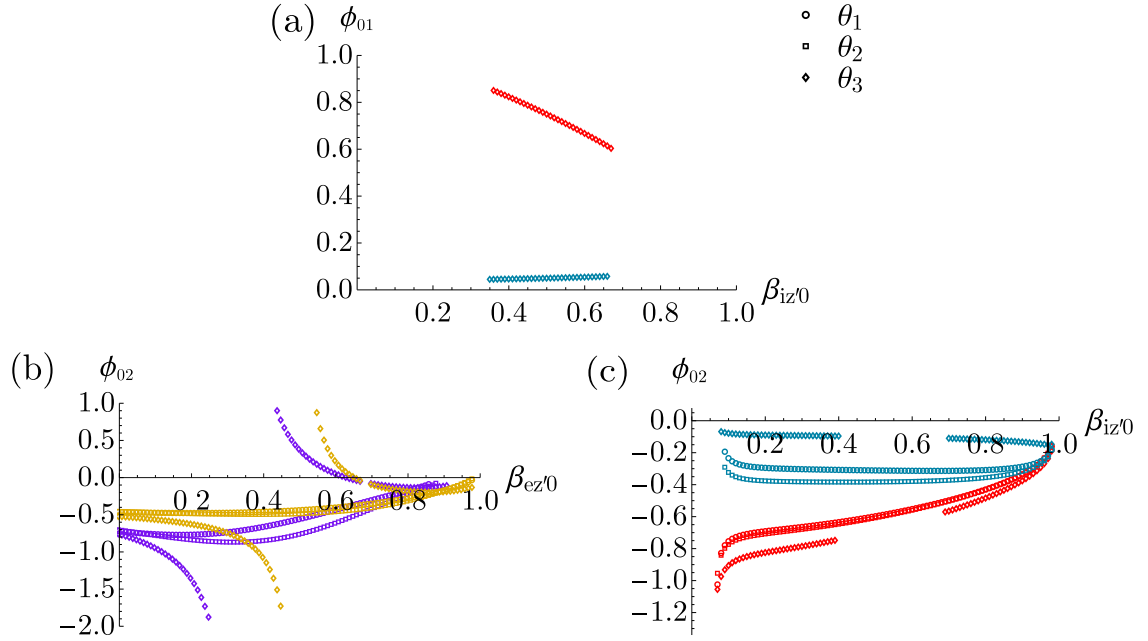


Figura 29: (a) Amplitud ϕ_{01} versus $\beta_{iz'0}$, (b) amplitud ϕ_{02} versus $\beta_{ez'0}$ y (c) amplitud ϕ_{02} versus $\beta_{iz'0}$. En esta figura, $B_0 = 0.1\text{T}$, $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y el tipo de punto representa un valor distinto de θ . En (a) y (c), los puntos rojos (celestes), representan electrones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{ez'0} = 0.75$). En (b) los puntos morados (amarillos), representan iones de fondo débilmente relativistas (relativistas), con $\beta_{iz'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$).

iones de fondo débilmente relativistas (color morado), θ_1 produce solitones menos negativos que θ_2 y θ_3 . Al mismo tiempo, θ_2 produce solitones menos negativos que θ_3 , los cuales poseen amplitud finita hasta $\beta_{ez'0} \sim 0.2$. Cuando los iones de fondo son relativistas (color amarillo), este comportamiento se repite, pero la diferencia en ϕ_{02} generada por θ_1 y θ_2 , es muy pequeña. El ángulo θ_3 diverge cerca de $\beta_{ez'0} \sim 0.4$, valor que es más grande que el descrito para iones de fondo débilmente relativistas.

El segundo caso se tiene para electrones de fondo débilmente relativistas (color rojo) y relativistas (color celeste), donde los solitones son completamente rarefactivos, es decir, $\phi_{02} < 0$. El ángulo θ hace que la amplitud se haga más negativa para $\beta_{ez'0}$

pequeños, mientras que para $\beta_{ez'0}$ grandes esto se revierte. El ángulo θ_3 produce solitones con menor amplitud.

Los solitones que provienen de q_3 son negativos para valores muy pequeños de $\beta_{ez'0}$ y desde $\beta_{ez'0} \sim 0.35$ en adelante, para los tres valores de θ estudiados y $Z_d n'_{d0} = 0.55$. Entre $\beta_{ez'0} \sim 0.05$ y $\beta_{ez'0} \sim 0.35$, el solitón es compresivo. Esta descripción corresponde a los solitones que existen cuando los iones son la especie de fondo (color morado) en la Figura 30(a). Cuando estos iones de fondo son relativistas (color amarillo), el solitón es negativo para todos los valores de $\beta_{ez'0}$ estudiados. El impacto del ángulo se aprecia en el aumento o disminución de la amplitud, según la Figura 30(a). Al aumentar la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$, este comportamiento se invierte de manera general. Cuando los iones de fondo son débilmente relativistas, el solitón posee amplitud negativa y cuando los iones de fondo son relativistas, la amplitud es positiva. Esto con la excepción de algunos valores de $\beta_{ez'0}$, dependiendo del valor de θ , como se puede apreciar en el panel (b) de la Figura 30.

En las Figuras 30(c) y (d), se muestra la amplitud ϕ_{03} cuando los electrones son la especie de fondo, para densidad de carga baja y alta, respectivamente. En el panel (c) se ve que los solitones son rarefactivos para los tres ángulos estudiados en q_3 y que la amplitud se hace más negativa para ángulos más grandes cuando los electrones de fondo son relativistas (color celeste). En el panel (d) el valor de $Z_d n'_{d0}$ es más grande que en (c), y de inmediato se observa que hay algunos solitones con amplitud positiva, dependiendo del valor de $\beta_{iz'0}$, $\beta_{ez'0}$ y θ .

La Figura 31 presenta la amplitud para los solitones que provienen de q_4 . En los paneles (a) y (b), los iones son la especie de fondo para densidad de carga baja y alta, respectivamente. El comportamiento general de la amplitud ϕ_{04} es muy similar al descrito en la Figura 30 para ϕ_{03} . Los solitones son compresivos o rarefactivos,

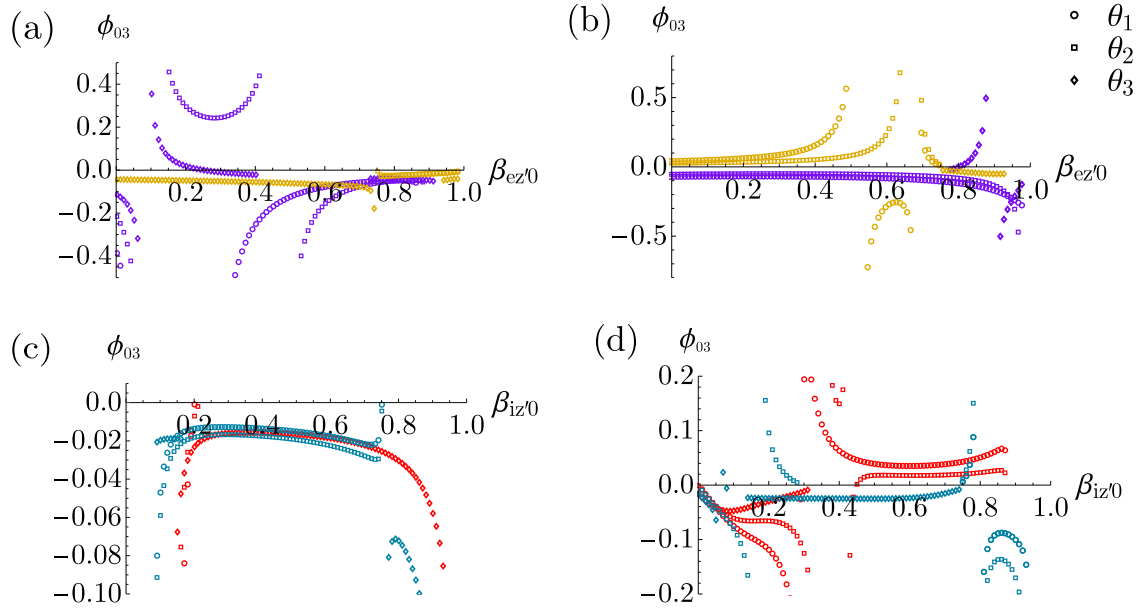


Figura 30: Amplitud ϕ_{03} versus $\beta_{ez'0}$ para (a) $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (b) $Z_d n'_{d0} = 45$. Amplitud ϕ_{03} versus $\beta_{iz'0}$ para (c) $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (d) $Z_d n'_{d0} = 45$. El resto de los parámetros se fijan de la misma manera que en la Figura 29.

dependiendo de algunos valores de θ , como por ejemplo θ_3 en el panel (b). El cambio más notorio es que aumentan las zonas de $\beta_{ez'0}$ o $\beta_{iz'0}$ en que el solitón mantiene el signo de su amplitud, en comparación a lo mostrado para ϕ_{03} .

6.4. Perfil del solitón y relevancia de los efectos relativistas

En esta sección se recopila toda la información obtenida de lo estudiado anteriormente para el ancho y la amplitud de los solitones existentes, y se grafica su perfil de manera explícita.

Al igual que en la Sección 4.4, en las siguientes figuras se definen especies no relativistas como aquellas que las describen las ecuaciones de continuidad (5.1), movimiento (5.2)–(5.4) y de Poisson (5.5), cuando $a = 0$ y $\gamma_{j0} = 1$. Luego, se grafica el perfil

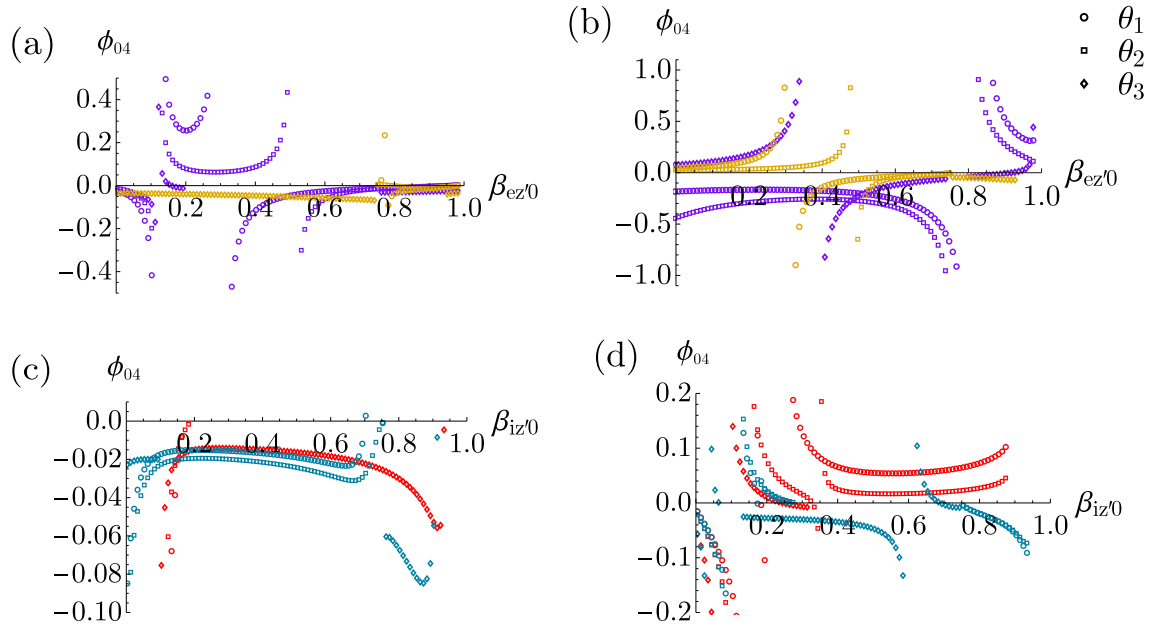


Figura 31: Amplitud ϕ_{04} versus $\beta_{ez/0}$ para (a) $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (b) $Z_d n'_{d0} = 45$. Amplitud ϕ_{04} versus $\beta_{iz/0}$ para (c) $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y (d) $Z_d n'_{d0} = 45$. El resto de los parámetros se fijan de la misma manera que en la Figura 29.

del solitón para dos valores de la intensidad del campo magnético, $B_0 = 0.0001\text{T}$ y $B_0 = 0.1\text{T}$, cuando el ángulo se fija en θ_3 . La elección de B_0 y θ se realiza de tal manera que se puedan observar solitones según lo visto en las Secciones 6.2 y 6.3. De modo general se grafica un solitón no relativista ($a = 0$) con una línea continua y uno que considera efectos relativistas ($a = 1$) con una línea discontinua con puntos. Los colores de dichos perfiles representan lo mismo que en las secciones anteriores. Rojo para electrones de fondo débilmente relativistas, celeste para electrones de fondo relativistas, morado para iones de fondo débilmente relativistas y amarillo para los mismos, pero relativistas.

A partir de esto y según lo visto en la Figura 24(a), se tiene el perfil del solitón para el modo M_1 en la Figura 32. Se observa que cuando $a = 0$, los solitones son positivos, más anchos y con mayor amplitud para velocidades bajas. Cuando las

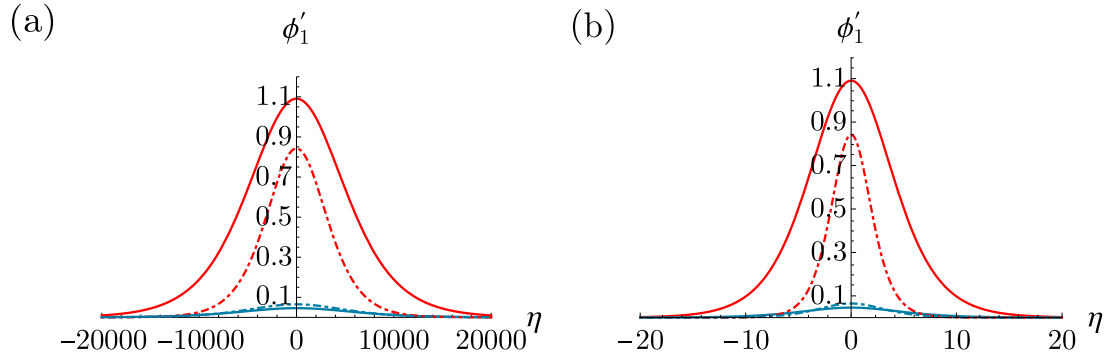


Figura 32: Perfil del solitón ϕ'_1 para el modo M_1 y densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$, cuando (a) $B_0 = 0.0001\text{T}$ y (b) $B_0 = 0.1\text{T}$. La línea continua (discontinua con puntos) representa especies sin (con) efectos relativistas. El color rojo muestra electrones de fondo con $\beta_{ez'0} = 0.1$ y el celeste con $\beta_{ez'0} = 0.75$. El valor de la velocidad de los iones es $\beta_{iz'0} = 0.4$ y está fijo.

velocidades son más grandes, el solitón disminuye su amplitud y disminuye su ancho. Al permitir efectos relativistas en el modelo, para electrones de fondo débilmente relativistas, el solitón es más pequeño y menos ancho. Cuando los electrones de fondo son relativistas, la amplitud disminuye considerablemente y el ancho también, pero aumenta en comparación a cuando no hay efectos relativistas en el modelo. La diferencia entre el panel (a) y (b) es el valor de B_0 de cada perfil, en donde se aprecia cómo disminuye notablemente el ancho entre un caso y otro.

En la Figura 33 se muestra el perfil de los solitones que provienen del modo M_2 . Estos solitones son rarefactivos, independiente de si hay efectos relativistas en el modelo o no. Para $B_0 = 0.0001\text{T}$ en el panel (a), cuando $a = 0$ en el modelo (línea continua), estas estructuras localizadas poseen mayor amplitud y ancho que cuando $a = 1$, salvo cuando los iones de fondo poseen velocidades relativistas (color amarillo), en donde el solitón es más angosto. En el panel (b), cuando $B_0 = 0.1\text{T}$, se aprecia cómo disminuye notoriamente el ancho de estas estructuras a modo general, mientras

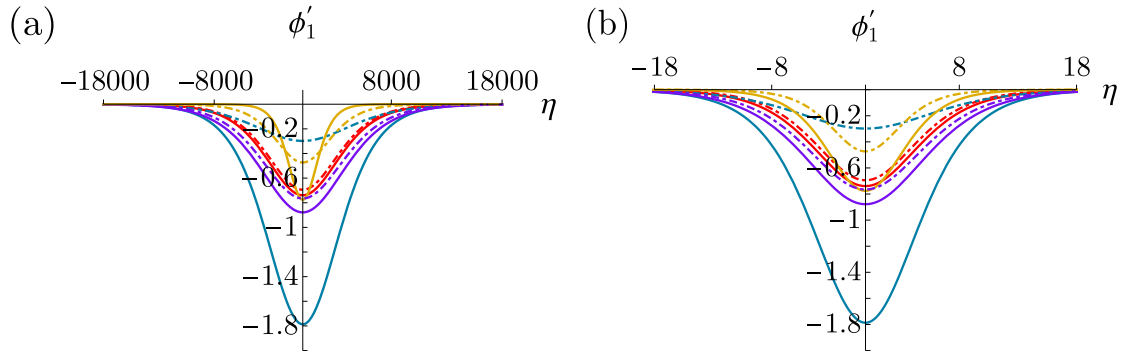


Figura 33: Perfil del solitón ϕ'_1 para el modo M_2 y densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$, cuando (a) $B_0 = 0.0001\text{T}$ y (b) $B_0 = 0.1\text{T}$. La línea continua (discontinua con puntos) representa especies sin (con) efectos relativistas. El color rojo (morado) muestra electrones (iones) de fondo con $\beta_{ez'0} = 0.1$ ($\beta_{iz'0} = 0.1$) y el celeste (amarillo) con $\beta_{ez'0} = 0.75$ ($\beta_{iz'0} = 0.75$). El valor de la velocidad de los iones (electrones) es $\beta_{iz'0} = 0.2$ ($\beta_{ez'0} = 0.2$) y está fijo.

se mantiene la amplitud para todas las velocidades estudiadas. El único solitón que posee un comportamiento diferente es el que existe cuando los iones relativistas son la especie de fondo, el cual se ve con color amarillo para ambos tipos de línea. En este caso, cuando $a = 0$, el solitón es más ancho y tiene una mayor amplitud que cuando $a = 1$.

El solitón que proviene de M_3 para densidades de carga baja, se grafica en la Figura 34. Lo primero que notamos es la gran diferencia en la amplitud de las estructuras cuando los iones son la especie de fondo (morado y amarillo) en los paneles (a) y (c) en comparación a los paneles (b) y (d), donde los electrones son la especie de fondo. Entre (a) y (c) disminuye el valor de B_0 , que se ve reflejado en la gran diferencia de ancho entre un par de solitones y el otro. También se destaca que sólo se tienen solitones para iones de fondo con velocidades bajas cuando $a = 0$ y cuando $a = 1$ en el modelo. En el primer caso, el solitón con línea continua es muy pequeño en comparación con el solitón del segundo caso, con línea discontinua y puntos, ten-

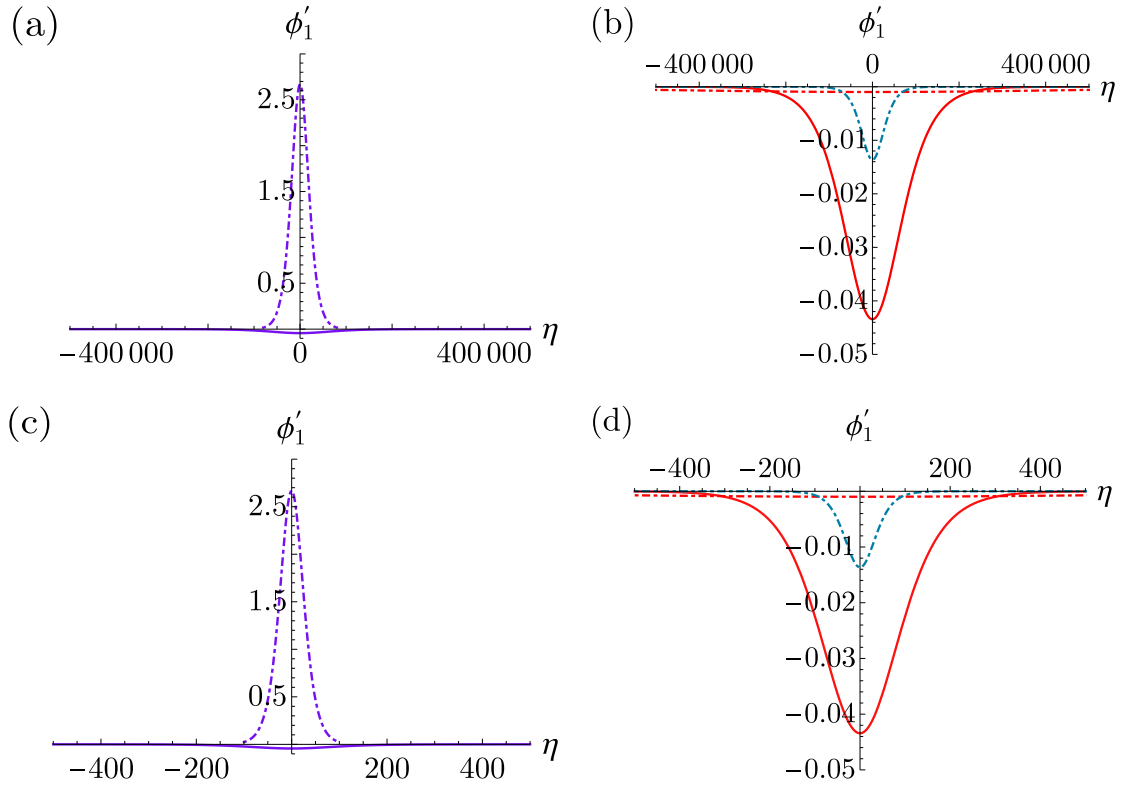


Figura 34: Perfil del solitón ϕ'_1 para el modo M_3 y densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$. En (a) y (c), los iones son la especie de fondo y en (b) y (d) los electrones. El valor de B_0 en (a) y (c) es $B_0 = 0.0001\text{T}$, y en (b) y (d) es $B_0 = 0.1\text{T}$. El tipo de línea y los colores de ellas representan lo mismo descrito en la Figura 33

diendo ambos a un ancho similar. Cuando los electrones son la especie de fondo, se tienen los perfiles en los paneles (b) y (d), cuya diferencia es el valor de B_0 que, al igual que en casos anteriores, para valores más pequeños de B_0 el ancho es mucho más grande. En ambos paneles los solitones poseen amplitud negativa, siendo más grande para valores de $\beta_{iz'0}$ pequeños cuando no se consideran efectos relativistas en el modelo. Al permitir que estos efectos estén presentes por medio de $a = 1$, para $\beta_{iz'0}$ pequeño la amplitud disminuye considerablemente, como se aprecia en la línea discontinua con puntos. Si aumenta el valor de $\beta_{iz'0}$ a rangos relativistas, la amplitud

aumenta para $a = 1$, mientras que para $a = 0$ deja de existir esta estructura.

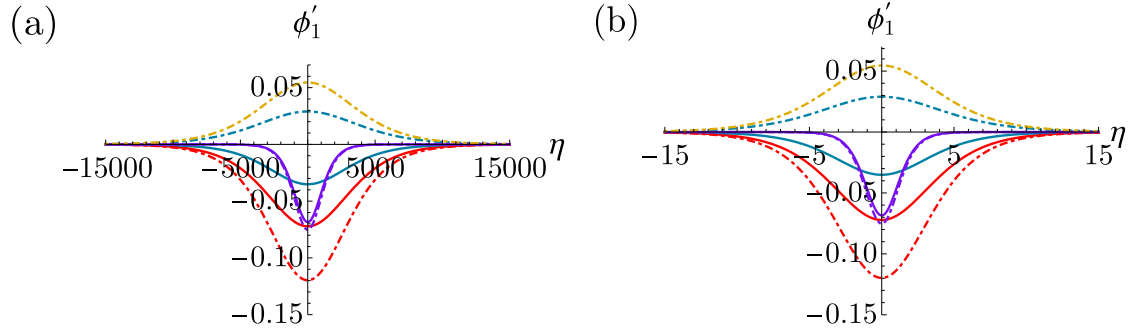


Figura 35: Perfil del solitón ϕ_1' para el modo M_3 y densidad de carga alta $Z_d n'_{d0} = 45$. En (a) $B_0 = 0.0001\text{T}$ y en (b) $B_0 = 0.1\text{T}$. El tipo de línea y los colores de ellas representan lo mismo descrito en la Figura 33, al igual que los valores de $\beta_{ez'0}$ y $\beta_{iz'0}$.

Cuando aumenta la densidad de carga $Z_d n'_{d0}$ y no hay efectos relativistas en el modelo, sólo existen solitones para electrones de fondo (color rojo y celeste) e iones de fondo, pero sólo para valores de $\beta_{iz'0}$ bajos (color morado). Para estas condiciones, los solitones son rarefactivos en los paneles (a) y (b) de la Figura 35. Al existir efectos relativistas en el modelo, los solitones aumentan su amplitud. En el caso de electrones relativistas en el fondo (color celeste), el solitón invierte su amplitud, pasando de rarefactivo para $a = 0$ a compresivo para $a = 1$. Esto se observa en el panel (a) y (b), en donde cambia el valor de B_0 también.

Por último, los perfiles de los solitones que provienen de M_4 se grafican en las Figuras 36 y 37, para $Z_d n'_{d0} = 0.55$ y $Z_d n'_{d0} = 45$, respectivamente. En la Figura 36 se observa que los solitones son rarefactivos y de menor amplitud, salvo para valores pequeños de $\beta_{iz'0}$ cuando los iones son la especie de fondo, independiente de si hay efectos relativistas en el modelo o no (ambas líneas moradas). En este caso, la estructura es compresiva y la amplitud del perfil aumenta cuando $a = 1$. Este efecto se mantiene cuando aumenta el valor de B_0 , mientras disminuye el ancho de

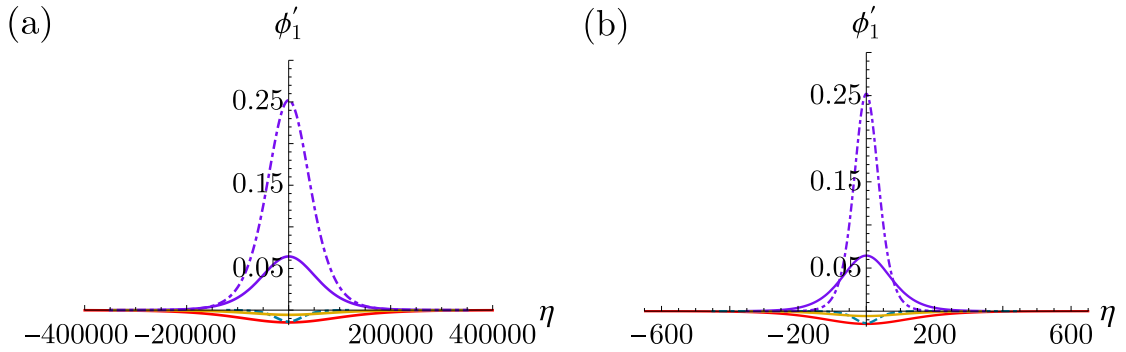


Figura 36: Perfil del solitón ϕ'_1 para el modo M_4 y densidad de carga baja $Z_d n'_{d0} = 0.55$. En (a) $B_0 = 0.0001\text{T}$ y en (b) $B_0 = 0.1\text{T}$. El tipo de línea y los colores de ellas representan lo mismo descrito en la Figura 33, al igual que los valores de $\beta_{ez'0}$ y $\beta_{iz'0}$.

los solitones, como se ve comparando los paneles (a) y (b) de la Figura 36.

En la Figura 37, cuando aumenta la densidad de carga, la amplitud de los solitones disminuye para los que son compresivos y aumenta para los que son rarefactivos con respecto a lo visto en la Figura 36. En este caso, cuando $a = 0$, los solitones rojos

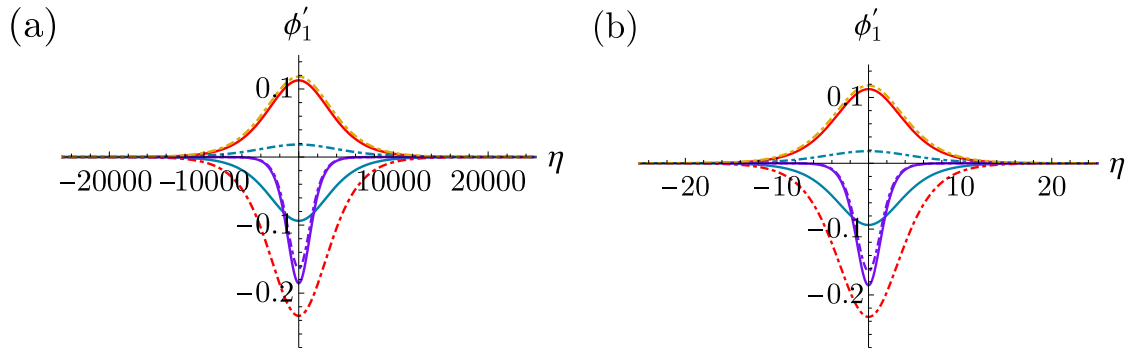


Figura 37: Perfil del solitón ϕ'_1 para el modo M_4 y densidad de carga alta $Z_d n'_{d0} = 45$. En (a) $B_0 = 0.0001\text{T}$ y en (b) $B_0 = 0.1\text{T}$. El tipo de línea y los colores de ellas representan lo mismo descrito en la Figura 33, al igual que los valores de $\beta_{ez'0}$ y $\beta_{iz'0}$.

y morados invierten su amplitud y aparece uno para valores más grandes de $\beta_{ez'0}$ (color celeste). Al permitir $a = 1$, la amplitud de los solitones que existen cuando la densidad de carga es baja también se invierte, mientras que otros aparecen. El

ancho de estos fenómenos no lineales disminuye cuando aumenta B_0 , como se ve comparando los paneles (a) y (b).

Finalmente, notamos que para todos estos solitones, la amplitud de cada uno se mantiene constante entre un panel y otro, ya que el cambio de B_0 no tiene ningún impacto en la amplitud, como se menciona en la Sección 6.3.

6.5. Discusión y resumen

Es este capítulo se estudia y analiza cómo afecta la presencia de un campo magnético externo en la existencia y forma de solitones en un plasma con velocidades completamente relativista y con partículas de polvo. Para realizar este análisis, se obtuvieron soluciones numéricas para este plasma a partir de la ecuación (5.66), resultado algebraico que se logra al incluir un campo magnético externo en el modelo dado por (5.2)–(5.4). Estas soluciones numéricas se tienen al fijar un conjunto de valores para las cantidades normalizadas libres de acuerdo con lo que se muestra en el Capítulo 4, ya que para esos parámetros se muestra que existen solitones en el caso no magnetizado, siendo un punto de partida en la exploración de la existencia para los resultados encontrados en el Capítulo 5. El objetivo de esto fue explorar las características de los solitones que aparecen cuando hay campo magnético, de tal manera de identificar los nuevos efectos que surgen debido a la presencia de un ángulo de propagación θ y la intensidad del campo magnético B_0 .

La existencia de estos solitones se estudia explorando la velocidad de fase del plasma en función del ángulo de propagación de las perturbaciones, que se obtiene al resolver la ecuación (5.35), como se indica en la Sección 6.1. Esta ecuación posee cuatro soluciones que van cambiando con el ángulo de propagación entre $\theta = -\pi$ y $\theta = \pi$. Dependiendo del valor del ángulo y de la densidad de carga, M puede ser

positivo o negativo, de pequeña o gran amplitud, y real o complejo. En las Figuras 17–20 se muestra en detalle cómo se comporta M , lo que entrega una idea de qué valores de θ permiten que exista un solitón. Como se utiliza de punto de partida el espacio de parámetros que sugiere el caso no magnetizado, se eligen tres ángulos pequeños para estudiar el coeficiente de dispersión y la existencia de estos fenómenos no lineales, de tal manera de no desviarse mucho de ese caso conocido.

Una vez que se determina para qué ángulos pequeños M es real, se utiliza $\theta_1 = \pi/60$, $\theta_2 = \pi/36$ y $\theta_3 = \pi/18$ para ver dónde es positivo el coeficiente de dispersión q . Este coeficiente indica la existencia de solitones en este plasma cuando es positivo, y también afecta directamente en el ancho del solitón, por lo que se busca esta condición en función del valor de la intensidad del campo magnético B_0 y el ángulo θ , como se hace en detalle en la Sección 6.2. Para los parámetros en que q es positivo, incluyendo las soluciones encontradas y estudiadas de la ecuación de Poisson (5.35), se observa que de manera general, la intensidad del campo magnético B_0 disminuye el ancho de los solitones que existen. El ancho de la estructura disminuye progresiva y rápidamente mientras aumenta la intensidad del campo magnético hasta converger a un valor fijo. Luego de eso, B_0 puede seguir creciendo, pero no tendrá ningún impacto sobre el ancho del solitón, independiente del valor de β para ambas especies, de la densidad de carga y del ángulo de propagación. Estableciendo esto, para un valor fijo de B_0 se estudia cómo impacta θ en la existencia y el ancho del solitón, observando que el efecto no es tan definido como lo es el cambio de B_0 . Dependiendo de θ pueden aparecer valores positivos de q que provienen de modos que antes no generaban solitones, como es el caso de M_1 en la Figura 24. También, el ángulo puede cambiar el rango de valores de β para cualquier especie de fondo en donde q es positivo, y por lo tanto, donde existen solitones.

En cuanto a la amplitud de los solitones que existen bajo todas las condiciones mencionadas hasta ahora, a diferencia del ancho, a la amplitud sólo le afecta directamente el ángulo de propagación y no la intensidad del campo magnético, debido a la forma que posee su expresión algebraica derivada en la Sección 5.3. Esta expresión se escribe en función del coeficiente no lineal p , que solo depende explícitamente de θ y no de B_0 . Teniendo esto presente, en la Sección 6.3 se grafica el impacto de θ en la amplitud de los solitones existentes, en donde se puede concluir que su rol principal es el de aumentar o disminuir la amplitud. Dependiendo del ángulo de propagación, los solitones pueden ser compresivos o rarefactivos, como se muestra en las Figuras 29–31.

Finalmente, al recopilar toda la información obtenida de la existencia, el ancho y la amplitud de los solitones de este plasma magnetizado, se grafica el perfil de algunos de los casos en donde se obtienen solitones, como se muestra en la Sección 6.4. Se puede apreciar cómo cambia el ancho del solitón con la disminución de B_0 , y cómo para un valor de θ fijo, el solitón es compresivo o rarefactivo. A la vez, se destaca el impacto de los efectos relativistas en el modelo de este plasma, graficando los solitones que se obtienen cuando estos efectos no están presentes y comparando lo que sucede cuando sí están presentes. En las Figuras 32–37, se muestra que para algún conjunto de parámetros, los efectos relativistas disminuyen el ancho y la amplitud de los solitones que existen, mientras que para otros, estas dos características aumentan.

Al igual que en el caso no magnetizado, el estudio y análisis realizado en este capítulo se realiza de manera extensa y detallada, con el fin de revisar todos los casos que sean posibles según el modelo algebraico derivado en el Capítulo 5, de la manera más completa y rigurosa posible. Esto abre la posibilidad de que existan combinaciones de casos y de parámetros que no sean posibles, debido a procesos

tales como inestabilidades. En trabajo futuro, estos casos podrían ser discriminados a través de simulaciones numéricas, de la misma manera que se mencionó en el Capítulo 4. También se puede estudiar este sistema y el mismo conjunto de parámetros cuando el plasma es de pares, ya que este caso se dejó fuera en este capítulo para poder identificar con mayor detalle los efectos de B_0 y θ en los solitones.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se han estudiado solitones en un plasma relativista con partículas de polvo, considerando efectos completamente relativistas en las velocidades de iones y electrones, con partículas de polvo no relativistas, al igual que la temperatura de las tres especies que componen este sistema.

Este estudio se realizó para el caso en que no hay un campo magnético de fondo y el caso en que sí lo hay, considerando efectos relativistas en las especies de manera consistente en las ecuaciones que describen este plasma en ambas ocasiones. Esto se muestra en el Capítulo 2, donde se proponen las ecuaciones de continuidad, de movimiento y la ley de Gauss de las ecuaciones de Maxwell para estudiar este sistema como un fluido relativista. Teniendo esto en cuenta, se determina que las ecuaciones que describen un plasma relativista con partículas de polvo como un fluido, son generales mientras se considere el polvo como una especie de iones adicional y muy masiva. La normalización de estas ecuaciones cambia dependiendo de las especies que componen cada sistema, dando cuenta de las cantidades características de cada uno. En este caso se tiene una longitud similar a la de Debye, la velocidad térmica de los electrones y la frecuencia de plasma de las partículas de polvo.

El caso sin campo magnético se estudió en el Capítulo 3, en donde se tomaron

los resultados del Capítulo 2, adaptándolos a un plasma sin campo magnético de fondo. Esto con la finalidad de explorar a fondo un caso más sencillo primero y poder generar intuición de lo que ocurre en el sistema. Se logra mostrar de manera teórica que la existencia de solitones tipo KdV es posible para un plasma relativista, no magnetizado y con partículas de polvo. Este resultado se obtuvo perturbando no linealmente las ecuaciones que describen este plasma (3.1)–(3.3), en donde luego de un extenso trabajo algebraico descrito en detalle en la Sección 3.2 del mismo capítulo, se encuentra una ecuación de KdV para el potencial eléctrico de este sistema. Esta ecuación posee una solución conocida, la cual corresponde a un solitón, estructura localizada buscada a lo largo de esta tesis. Esta solución posee un ancho y una amplitud bien definidos, que se describen de manera teórica a partir los coeficientes de dispersión y no lineal, respectivamente. Es el coeficiente de dispersión el que entrega la información de la existencia de estas soluciones, que depende de los parámetros libres del plasma y de la velocidad de fase del mismo.

Una vez que se establece la capacidad de este plasma para sostener este tipo de estructuras no lineales, se obtienen resultados numéricos con respecto a la existencia y las características de estos solitones, como se mostró en el Capítulo 4. De manera general, se encontró que el coeficiente de dispersión depende de la velocidad de fase del plasma, cuyas soluciones también fueron estudiadas. Estos resultados se obtienen al resolver la ecuación de Poisson (3.22), en donde se encontró que posee cuatro soluciones que pueden ser reales o complejas, dependiendo de los parámetros del plasma. Se concluyó que las soluciones reales son las que aportan sentido físico al sistema, por lo que se utilizaron esos resultados para explorar la existencia del solitón en función de la densidad de carga de las partículas de polvo y de la velocidad inicial de los electrones y los iones. De estas cuatro velocidades de fase, se encontró que dos

de ellas, un modo lento y un modo rápido, permiten que el coeficiente de dispersión sea positivo, produciendo solitones. El coeficiente de dispersión que proviene del modo lento es positivo para densidades de carga bajas de las partículas de polvo, mientras que el coeficiente de dispersión que proviene del modo rápido es positivo en dos zonas: una de densidades de carga bajas y otra de densidades de carga altas, como se mostró en las Figuras 3 y 4. La diferencia entre estas dos figuras recae en la especie que se encuentra con velocidad fija en el fondo, donde se logra apreciar y concluir que los efectos relativistas en los iones son más relevantes que en los electrones.

Algo importante que hay que notar es que la masa de los iones en comparación con la de las partículas de polvo tiene un impacto que también puede ser estudiado en la existencia de los solitones, como se hizo en la Subsección 4.2.1, en donde se consideró un plasma de electrones, positrones y polvo. Aquí se demostró que la razón de masas obtenida de la normalización de las ecuaciones, afecta en las velocidades de fase que producen coeficientes de dispersión positivos. En el caso del plasma de pares con partículas de polvo, todas las soluciones de la ecuación de Poisson (3.22) producen solitones, dependiendo de si la densidad de carga es baja o alta, para los dos modos de propagación lentos y los dos rápidos. En este caso, es difícil determinar si los efectos relativistas son más relevantes para positrones que para electrones, ya que no existe una diferencia de masas que permita identificar una especie de otra, sólo la carga, como se vio al comparar las Figuras 5–6.

Una vez que se estableció para qué parámetros del plasma existen solitones cuando las especies son electrones, iones y partículas de polvo, se estudió en detalle el comportamiento del ancho y la amplitud de dichas estructuras en la Sección 4.3. Se logra concluir que el aumento en la densidad de carga de las partículas de polvo

hace que crezca el ancho de los solitones que provienen del modo lento al aumentar la velocidad de las especies, característica que se invierte en el modo rápido. Para densidades de carga aun más grandes, los solitones del modo rápido vuelven a ser más anchos, como se estudió en las Figuras 7 y 8. Con respecto a la amplitud de los solitones, se concluye que es difícil generalizar su comportamiento, ya que su variación es altamente sensible al cambio en la velocidad de las especies, que puede ser muy pequeña o tener valores relativistas, como se estudió en detalle en las Figuras 9-12. En la Sección 4.4 se graficaron los perfiles de estos solitones, con el fin de observar todos estos efectos de manera explícita. También se exploró el impacto de los efectos relativistas en el modelo propuesto a través del factor a , y se comparó qué sucede cuando es nulo y cuando no. Cuando es nulo, no hay efectos relativistas en el modelo, es decir, en las ecuaciones propuestas en el Capítulo 2, situación en la cual también se pueden encontrar solitones. Estas estructuras poseen una forma definida, y su ancho y amplitud dependen, principalmente, del modo de propagación del cual provienen y de si la densidad de carga es baja o alta, pero no son altamente sensibles al cambio en la velocidad inicial de las especies. En el modo lento de propagación y densidades bajas, estos solitones son rarefactivos y todos poseen amplitud y ancho muy similares, independiente del valor de la velocidad que puedan tener las especies. Esta situación es similar en el modo rápido y densidades bajas, con la diferencia que en este caso los solitones son compresivos. Al aumentar la densidad de carga en el modo rápido, estas estructuras son rarefactivas y se vuelven más sensibles al cambio en el ancho y la amplitud para velocidades más grandes de las especies. Cuando se admiten efectos relativistas en el modelo, la mayor parte de los solitones modifica su ancho y su amplitud, incluso cambiando de compresivo a rarefactivo, lo que nos permite concluir que son los efectos relativistas lo que producen este cambio en los

solitones, como se mostró en las Figuras 13–16, en donde de todas maneras se observa que el efecto es más relevante sobre los iones.

En el contexto de los plasmas astrofísicos, la presencia de un campo magnético de fondo hace relevante el estudio de nuestro modelo bajo esas condiciones. Por esta razón, se retomó la discusión del modelo que incluye un campo magnético de fondo en el Capítulo 5, una vez que se ha ganado intuición de lo que sucede en este plasma polvoriento no magnetizado. De esta manera, se utiliza lo aprendido en el Capítulo 3 como punto de partida para el estudio incluyendo un campo magnético de fondo, lo que implica volver al modelo propuesto en el Capítulo 2. De este estudio analítico se logró concluir que el método de reducción perturbativa utilizado en el modelo sin campo magnético, es lo suficientemente robusto como para ser útil cuando las ecuaciones que describen el plasma son vectoriales y más complejas. Esto permite obtener una ecuación de KdV para el plasma, aun cuando es magnetizado, de donde se encontraron otros coeficientes de dispersión y no lineal capaces de describir la existencia, el ancho y la amplitud del solitón en función de la intensidad del campo magnético y del ángulo de propagación de las perturbaciones. Estas dos variables impactan directamente a las características del solitón, siendo vistas en las expresiones que describen el ancho y la amplitud.

En particular, la intensidad del campo magnético afecta sólo al ancho, mientras que el ángulo de propagación impacta al ancho y la amplitud. Como los resultados algebraicos son distintos a los ya tratados en el caso no magnetizado, fue necesario volver a explorar el espacio de parámetros, pero tomando lo aprendido en el caso no magnetizado como base y de esta manera no alejarnos mucho del caso conocido. Así, en el Capítulo 6 se explora numéricamente el impacto del campo magnético en estos solitones, fijando velocidades pequeñas en el plano perpendicular y usando

las mismas velocidades del caso anterior como las velocidades paralelas al campo magnético. También se usaron los mismos valores de la densidad de carga, de tal manera de lograr aislar de alguna forma los efectos nuevos. En primer lugar, al igual que en el caso no magnetizado, es necesario identificar la velocidad de fase del plasma en este nuevo contexto, como se muestra en la Sección 6.1. La ecuación de Poisson (5.35) posee la misma forma del caso anterior, por lo que también posee cuatro velocidades de fase como solución, que dependen explícitamente del ángulo de propagación de las perturbaciones. En general, el ángulo de propagación curva las soluciones de la ecuación de Poisson (5.35) para distintas velocidades, que pueden ser reales o complejas dependiendo de la densidad de carga. A diferencia del caso no magnetizado, tres de las cuatro velocidades de fase permiten que el coeficiente de dispersión sea positivo. Dependiendo del valor del ángulo y de las velocidades paralelas al campo magnético, las cuatro velocidades de fase pueden producir solitones, por lo que se puede decir que el ángulo de propagación ayuda a que existan soluciones solitónicas donde antes no las había.

Por otro lado, se puede concluir de modo general que el impacto de un campo magnético de fondo es disminuir el ancho del solitón. Esto se estudió en detalle en las Figuras 21–23, en donde se observa que aumentar la intensidad del campo magnético, disminuye rápidamente la amplitud del solitón, convergiendo a un valor fijo que depende de los otros parámetros del plasma. Como el ángulo de propagación afecta en la existencia, también lo hace en el ancho del solitón, pero su impacto es menos claro en comparación con el de la intensidad del campo magnético. En el caso de la amplitud, el ángulo de propagación se encarga de que crezca o disminuya, mientras que la velocidad de las especies hace que los solitones sean compresivos o rarefactivos.

En la Sección 6.4 se vieron estos efectos explícitamente al graficar el perfil de los solitones encontrados en este plasma relativista, magnetizado y con partículas de polvo. También se analizó el impacto de los efectos relativistas en el modelo con campo magnético, en donde se puede concluir que, dependiendo de la velocidad de las especies y de la densidad de carga, los efectos relativistas disminuyen el ancho y la amplitud del solitón para los modos de propagación más lentos. Para los modos de propagación más rápidos, esto sucedería de manera contraria, como se estudió en detalle en las Figuras 32–37. En comparación con el caso no magnetizado, los efectos relativistas, la intensidad del campo magnético de fondo y el ángulo de propagación, aportan mayor variedad de casos en que pueden existir y estudiar solitones. El impacto de estos parámetros es más notorio, pero no pareciera seguir un patrón, salvo en el caso de la intensidad del campo magnético.

Finalmente, hay que considerar que los plasmas pueden sufrir el efecto de muchas inestabilidades de distintas naturalezas, las cuales pueden afectar la verdadera existencia de solitones en este sistema, ya sea magnetizado o no. Considerar esta situación requiere de un estudio y análisis distinto del espacio de parámetros, como por ejemplo, por medio de simulaciones numéricas. Esto debido a que, a lo largo de esta tesis, puede que se hayan considerado casos y combinaciones de parámetros posibles dentro del modelo, pero que no serían relevantes en situaciones físicas concretas debido al predominio de otros efectos. Un ejemplo de esto puede ser la gran diferencia que existe entre las velocidades de los iones y los electrones en algunos casos que puede llevar a inestabilidades en el plasma. Por lo tanto, estas situaciones con menos sentido físico podrían ser discriminadas en un futuro al estudiar este plasma por medio de simulaciones numéricas.

Por otro lado, en esta tesis se han considerado efectos relativistas en las velocida-

des iniciales de las especies, pero las velocidades térmicas también pueden alcanzar velocidades cercanas a la de la luz para grandes temperaturas. Esto sería relevante considerarlo en trabajos futuros, en donde sería necesario incluir los efectos de temperaturas relativistas, lo cual modificaría el modelo al tener que incluir la entalpía para reemplazar la masa como es sugerido por Asenjo, Muñoz y Valdivia en [35].

Todas estas consideraciones permiten entender este trabajo como un punto de partida para retomar la discusión de los plasmas con partículas de polvo, aplicados a un contexto astrofísico, ampliando el estudio en esta área a análisis más complejos y desde distintos puntos de vista, ya sea en la física de plasmas o los sistemas dinámicos y no lineales.

Apéndices

Apéndice A

Ecuación de Poisson

En el Capítulo 3, se presentan las ecuaciones para un plasma no magnetizado, relativista y con partículas de polvo, en donde se introduce un nuevo sistema de coordenadas que incluyen el impacto de efectos no lineales en el plasma. Estas nuevas ecuaciones son perturbadas en función del parámetro no lineal ε , para poder ver si es posible obtener una ecuación de KdV para ϕ'_1 . Esto se puede realizar luego de un extenso trabajo algebraico, en donde también se logra encontrar una expresión para la ecuación de Poisson perturbada (3.22), que es útil para encontrar la velocidad de fase M . Es necesario conocer esta velocidad para poder analizar la existencia de solitones dado el coeficiente de dispersión q , el cual nos permite determinar bajo qué condiciones pueden existir solitones del tipo KdV (3.33).

En este apéndice, nos concentramos en estudiar gráficamente la forma que posee la ecuación de Poisson (3.22), para poder observar las zonas en donde se tienen soluciones reales para M . Para esto, definimos la función $f(M)$, a partir de (3.22) como sigue:

$$f(M) = \sum_j \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2}{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{j0} - M)^2 \zeta_{j0} - \alpha_j [1 + (v'_{j0} - M) \rho_{j0}]} . \quad (\text{A.1})$$

La ecuación (A.1) se puede escribir expandiendo la suma por especie, para poder apreciar el impacto de cada término. Considerando la cuasi-neutralidad (3.12) y las definiciones del Capítulo 4, se tiene

$$f(M) = \frac{n'_{d0} Z_d^2}{M^2} + \frac{\gamma_{i0}^2}{Q_i \gamma_{i0}^2 (v'_{i0} - M)^2 \zeta_{i0} - \alpha_i [1 + (v'_{i0} - M) \rho_{i0}]} + \frac{(\gamma_{i0} - Z_d n'_{d0}) \gamma_{e0}}{Q_e \gamma_{e0}^2 (v'_{e0} - M)^2 \zeta_{e0} - \alpha_e [1 + (v'_{e0} - M) \rho_{e0}]} . \quad (\text{A.2})$$

Para el caso en que $n'_{d0} = 0.055$, $Z_d = 10$, $Q_i = 0.1$, $Q_e = 5.45 \times 10^{-10}$, $\alpha_i = 0.1$, $\alpha_e = 1$, $c' = 150$ y los electrones o los iones están en el fondo, (A.2) se puede graficar como muestran la Figuras 38 – 41. En estas figuras se grafica la función (A.2) (línea azul), en conjunto a la contribución de las partículas de polvo (línea amarilla), de los iones (línea verde) y de los electrones (línea roja). De esta manera se puede apreciar cómo afecta en la función $f(M)$ (línea azul) los términos de cada especie. Este efecto

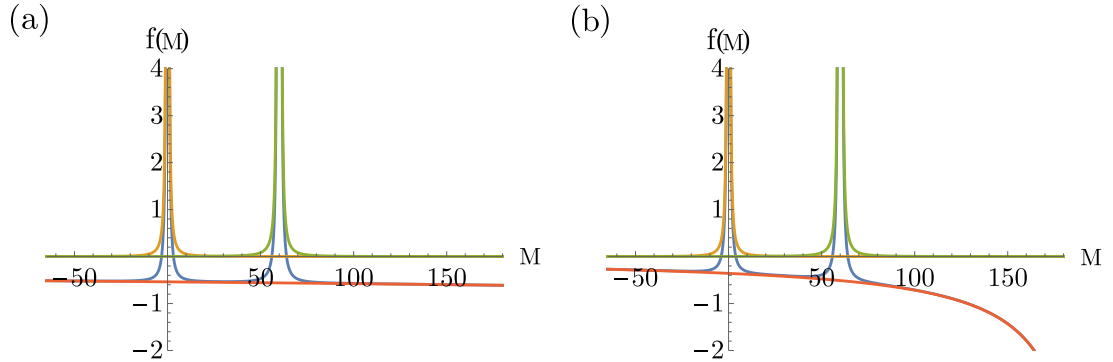


Figura 38: $f(M)$ para electrones en el fondo cuando (a) $\beta_{e0} = 0.1$ y $\beta_{i0} = 0.4$ y cuando (b) $\beta_{e0} = 0.75$ y $\beta_{i0} = 0.4$.

puede apreciarse al comparar los paneles (a) y (b) de las Figuras 38 y 39. En general se logra observar que los términos de las partículas de polvo (línea amarilla), de los iones (línea verde) y de los electrones (línea roja), son los encargados de que se generen discontinuidades en la función cerca de donde cada uno de los denominadores en (A.2) se anula. Para el polvo se tiene una discontinuidad cerca de $M = 0$, para los

iones otra para $M > 0$, cuyo valor dependerá del ancho que tenga la zona intermedia de la función y, para los electrones para $M > 0$ más grande que el de los iones. El término de los electrones, al tener su discontinuidad en valores de M mayores, hace que la función completa genere valores más grandes o más pequeños de $f(M)$, lo que se traduce en que la función sube o baja en el eje vertical, generando soluciones complejas o reales.

En ambas figuras se tienen cuatro soluciones reales para M , ya que el término asociado a los electrones es negativo (línea roja). En la Figura 38, los electrones están en el fondo y, al aumentar el valor de $\beta_{e0} = 0.1$ a $\beta_{e0} = 0.75$, la zona intermedia se mantiene del mismo ancho. Esto mismo se aprecia en la Figura 39, donde los iones están en el fondo. Cuando se tiene que $\beta_{i0} = 0.1$ aumenta a $\beta_{i0} = 0.75$, la zona intermedia crece. Un par de estas soluciones posee valores pequeños, mientras que el otro par posee valores más grandes que en el caso mostrado en la Figura 38, debido al aumento de la zona intermedia que se produce al crecer β_{i0} .

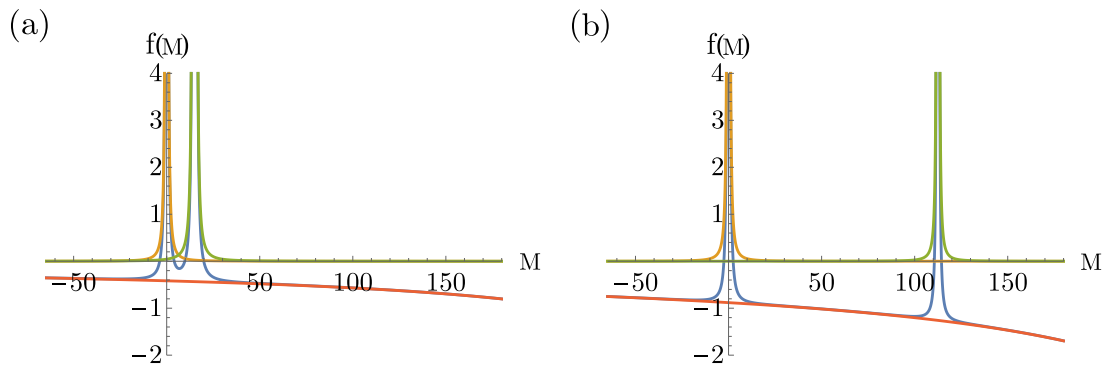


Figura 39: $f(M)$ para iones en el fondo cuando (a) $\beta_{i0} = 0.1$ y $\beta_{e0} = 0.4$ y cuando (b) $\beta_{i0} = 0.75$ y $\beta_{e0} = 0.4$.

Cuando el valor de la carga de las partículas de polvo aumenta de $Z_d = 10$ a $Z_d = 30$, podemos ver qué ocurre con $f(M)$ en las Figuras 40 y 41. En este caso se puede ver que las soluciones para M son todas complejas, ya que al aumentar el valor

de Z_d , se tiene que el término asociado a los electrones es positivo. Esto hace que la función no logre pasar por el eje M y, por lo tanto, no tener soluciones reales. En la Figura 40, donde los electrones están en el fondo, se observa que el aumento en β_{e0} tiene un impacto poco notorio en el ancho de la zona intermedia, pero en conjunto con el aumento de Z_d , se producen soluciones complejas. En la Figura 41, los iones

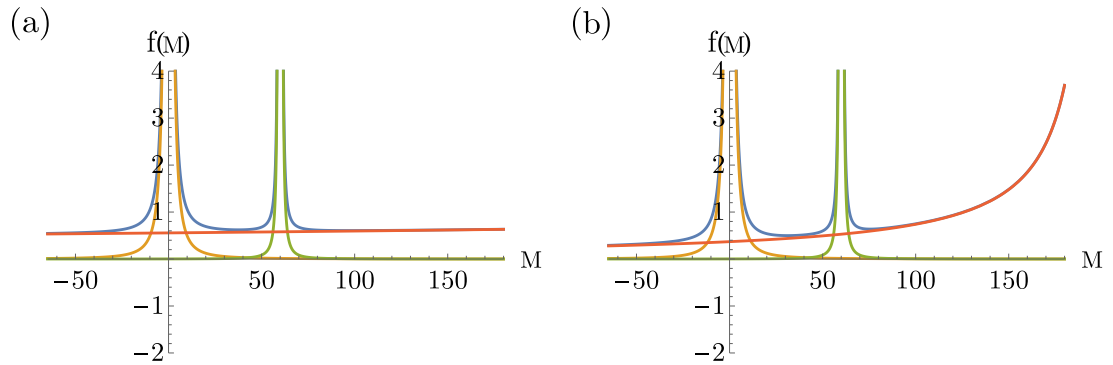


Figura 40: $f(M)$ para electrones en el fondo con $Z_d = 30$, cuando (a) $\beta_{e0} = 0.1$ y $\beta_{i0} = 0.4$ y cuando (b) $\beta_{e0} = 0.75$ y $\beta_{i0} = 0.4$

están en el fondo y, al igual que en la Figura 39, el aumento de β_{i0} hace que crezca el ancho de la zona intermedia. En esta figura también se observa que el aumento de Z_d produce soluciones complejas, ya que el término asociado a los electrones es positivo.

Luego de analizar estas figuras, podemos decir que se pueden tener valores reales para la velocidad de fase M , mientras el término asociado a los electrones sea negativo en la ecuación (3.22). Esto ocurre dado el balance entre β_{i0} y $Z_d n'_{d0}$ producto de la cuasi-neutralidad en el plasma. También podemos decir que los valores de M serán grandes si la velocidad de los iones es grande. En este punto, podemos decir que el impacto en el cambio de la velocidad de los iones es más relevante que el cambio de la velocidad de los electrones.

Las características descritas hasta aquí son heredadas por el coeficiente de dis-

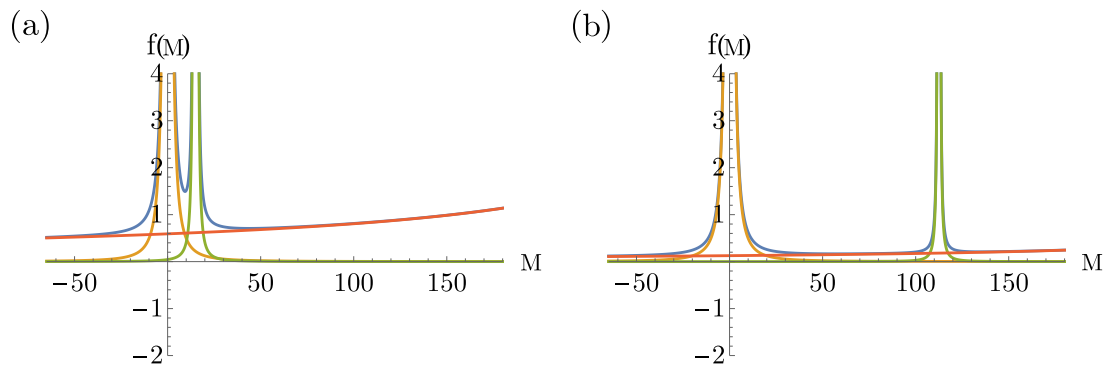


Figura 41: $f(M)$ para iones en el fondo con $Z_d = 30$, cuando (a) $\beta_{i0} = 0.1$ y $\beta_{e0} = 0.4$ y cuando (b) $\beta_{i0} = 0.75$ y $\beta_{e0} = 0.4$

persión q , que se calcula a partir de (3.35). Esto quiere decir que si M es complejo, q también lo será. Si M es real, se debe determinar bajo qué condiciones esas soluciones generan $q > 0$ para afirmar la existencia de solitones del tipo KdV, tal como se hizo en la Sección 4.2 del Capítulo 4.

Apéndice B

Ecuación de KdV en un plasma relativista y magnetizado con partículas de polvo

En el Capítulo 5 se presenta un plasma relativista con partículas de polvo y magnetizado, en donde se estudia y analiza cómo cambian las ecuaciones que describen dicho plasma bajo la influencia de un campo magnético de fondo, a diferencia de lo que se muestra en el Capítulo 3.

El campo magnético complejiza la forma de las ecuaciones de continuidad, movimiento y de Poisson de este plasma, como se puede ver en las Secciones 5.1, 5.2 y 5.3, lo que hace necesario poder compactar su escritura, para no perder de vista en el álgebra el objetivo de lo que se quiere mostrar y estudiar. Por esta razón, desde la Subsección 5.2.4 en adelante se utilizan definiciones de cantidades que son descritas a continuación.

B.1. Expresiones proporcionales a ε^2

En la ecuación (5.55) para $\partial_\xi n'_{j2}$ se define

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2 \cos^2 \theta}{c'^2 R_{j0}^2 R_{j2}} \left\{ c'^2 \cos \theta R_{j0} [\cos \theta R_{j32} + (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \rho_{jz'0}] \right. \\
&\quad + Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2 \zeta_{jz'0} \left[a c' \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) (3 \beta_{jx'0} \sin \theta + 3 \beta_{jz'0} \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - 2 \beta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta) + a \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2 (2 \zeta_{jz'0} - 3) - c'^3 \beta_{jx'0} \sin (2\theta) \rho_{jz'0} \right. \\
&\quad \left. + c'^2 \cos \theta R_{j32} [\cos \theta + \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M)] \right\} , \\
f_2 &= \frac{n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^3 \eta_j \cos \theta (v'_{jp0} - M)}{R_{j0} R_{j2}} \left\{ [c' \beta_{jz'0} \cos \theta + (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \zeta_{jz'0}] \rho_{jz'0} \right. \\
&\quad \left. - R_{j32} \cos \theta [c' \beta_{jz'0} \rho_{jz'0} - 2 \zeta_{jz'0}] \right\} , \\
f_3 &= \frac{n'_{j0} Q_j^3 \gamma_{j0}^5 (v'_{jp0} - M)^4}{\eta_j R_{j0} R_{j2}} \left\{ - \zeta_{jz'0}^2 \sin^2 \theta + \zeta_{jz'0} \sin \theta [(1 - R_{j32}) \sin \theta \right. \\
&\quad \left. + (c' \beta_{jz'0} \cos \theta + M) \rho_{jx'0}] - \cos \theta (1 - R_{j32}) (c' \beta_{jx'0} \sin \theta - M) \rho_{jz'0} \right\} , \\
f_4 &= - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0} \eta_j \cos \theta}{R_{j2}} \left\{ R_{j32} \cos \theta + (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \rho_{jz'0} \right\} ,
\end{aligned}$$

donde se usa R_{j2} como

$$\begin{aligned}
R_{j2} &= Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[c' \beta_{jz'0} \cos \theta (R_{j32} - 1) + (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \zeta_{jz'0} \right] \\
&\quad - \alpha_j \cos \theta \left[R_{j32} \cos \theta + (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \rho_{jz'0} \right] .
\end{aligned}$$

También, para $\partial_\xi v'_{jz'2}$ en la ecuación (5.56), se define

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\gamma_{j0}^2 \eta_j^2 \cos^2 \theta}{c'^2 R_{j0}^2 R_{j2}} \left\{ c' Q_j \beta_{jz'0} \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)^2 \left[2c'^2 \cos^2 \theta (R_{j32} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3 (v'_{jp0} - M) \zeta_{jz'0} (a \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) - c'^2 \rho_{jx'0} \sin \theta) \right] \right. \\
&\quad \left. - \alpha_j (v'_{jp0} - M) \cos \theta \left[2c'^2 R_{j32} \cos^2 \theta + a \gamma_{j0}^2 (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) (2c' \beta_{jz'0} \cos \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (v'_{jp0} - M) \zeta_{jz'0}) \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= \frac{\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta}{R_{j0}R_{j2}} \left\{ Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[c' \beta_{jz'0} \cos \theta (R_{j32} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \zeta_{jz'0} \right] - \alpha_j R_{j32} \cos^2 \theta \right\} , \\
g_3 &= -\frac{Q_j^2 \gamma_{j0}^3 (v'_{jp0} - M)^3}{\eta_j R_{j0} R_{j2}} \left\{ c' Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[c' \beta_{jy'0}^2 \zeta_{jz'0} \sin^2 \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (v'_{jp0} - M) \rho_{jz'0} [\beta_{jz'0} \cos \theta (1 - R_{j32}) + \beta_{jx'0} \zeta_{jz'0} \sin \theta] \right] \right. \\
&\quad \left. + \alpha_j \cos \theta \left[\sin \theta [c' \beta_{jz'0} \cos \theta - (v'_{jp0} - M) \zeta_{jz'0}] \rho_{jx'0} - \zeta_{jy'0} \zeta_{jz'0} \sin^2 \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \theta (R_{j32} - 1) (v'_{jp0} - M) \rho_{jz'0} \right] \right\} , \\
g_4 &= \frac{\gamma_{j0}\eta_j \cos \theta (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M)}{R_{j2}} .
\end{aligned}$$

B.2. Expresiones proporcionales a $\varepsilon^{5/2}$

Por otro lado, en la ecuación (5.60) para $\partial_\xi \phi'_2$, se usa

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M)}{R_{j3}} \left\{ c' \beta_{jx'0} f_1 R_{j2} + \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2 R_{j2} (v'_{jp0} - M)}{R_{j0}^2 R_{j32}} \left[R_{j32} \cos^2 \theta \left[\sin \theta \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + c' \rho_{jz'0} [\beta_{jz'0} \sin \theta - 3\beta_{jx'0} \cos \theta - 2\beta_{jx'0} \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M)] \right] - \right. \\
&\quad \left. \left. - (\zeta_{jy'0} - 1) \zeta_{jz'0} \rho_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \sin (2\theta) \right] \right\} - \frac{n'_{j0} \gamma_{j0}^2 \eta_j^2 R_{j2} \cos^2 \theta \sin \theta}{R_{j0} R_{j3}} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 = & \frac{n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^5 (v'_{jp0} - M)^4}{\eta_j R_{j0} R_{j3}} \left\{ Q_j \gamma_{j0}^2 (v'_{jp0} - M) \left[\zeta_{jz'0} \sin \theta \left[v'_{jp0} (1 - R_{j32}) \right. \right. \right. \\
& + M (\zeta_{jx'0} - 1) + c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \cos \theta \left. \left. \left. \right] - \zeta_{jz'0}^2 (v'_{jp0} - M) \sin \theta \right. \right. \\
& + c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} \cos \theta (R_{j32} - 1) (v'_{jp0} - M) \left. \left. \right] + \alpha_j \left[\zeta_{jz'0}^2 \sin^3 \theta + R_{j32} \left[\zeta_{jz'0} \sin \theta \right. \right. \right. \\
& - (c' \beta_{jx'0} - M \sin \theta) \rho_{jz'0} \cos \theta \left. \left. \left. \right] + \rho_{jz'0} \cos \theta \left[(c' \beta_{jx'0} \sin \theta - M) \sin \theta \right. \right. \right. \\
& - c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} \cos \theta (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \left. \left. \left. \right] - \zeta_{jz'0} \sin \theta \left[\sin^2 \theta + M \rho_{jx'0} \sin \theta \right. \right. \right. \\
& + \rho_{jz'0} \cos \theta \left. \left. \left. \left[2c' \beta_{jx'0} \sin \theta - (v'_{jp0} - M) \right] \right] \right] \right\} , \\
h_3 = & \frac{n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^3 \eta_j \cos \theta (v'_{jp0} - M)}{R_{j0} R_{j3}} \left\{ 2c' Q_j \beta_{jx'0} \gamma_{j0}^2 \zeta_{jz'0} (v'_{jp0} - M) \left[R_{j32} \cos \theta \right. \right. \\
& + \rho_{jz'0} (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \left. \left. \right] - \alpha_j \left[R_{j32} \cos \theta \left[\sin \theta (1 + \zeta_{jz'0}) + c' \beta_{jz'0} \rho_{jx'0} \cos \theta \right] \right. \right. \\
& + \rho_{jz'0} \left[\zeta_{jz'0} \sin \theta (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) + c' \cos \theta \left[\beta_{jz'0} \sin \theta \right. \right. \\
& + \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} (c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) \left. \left. \right] \right] \left. \right\} ,
\end{aligned}$$

donde se define por simplicidad

$$\begin{aligned}
R_{j3} = & n'_{j0} Q_j \gamma_{j0}^3 \eta_j (v'_{jp0} - M) \left[(c' \beta_{jz'0} \cos \theta - M) (\zeta_{jz'0} \sin \theta - c' \beta_{jx'0} \rho_{jz'0} \cos \theta) \right. \\
& \left. - c' \beta_{jz'0} \cos \theta \sin \theta - c' R_{j32} \cos \theta (\beta_{jx'0} \cos \theta - \beta_{jz'0} \sin \theta) \right] .
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] I. Langmuir, Proceedings of the National Academy of Sciences **14**, 627 (1928).
- [2] B. H. Mauk, S. M. Krimigis, E. P. Keath, A. F. Cheng, T. P. Armstrong, L. J. Lanzerotti, G. Gloeckler y D. C. Hamilton, J. Geophys. Res. **92**, 15283 (1987).
- [3] S. Chandra y M. K. Sharma, Optik **203**, 163955 (2020).
- [4] J. D. Scudder, E. C. Sittler Jr. y H. S. Bridge, J. Geophys. Res. **86**, 8157 (1981).
- [5] K. Liou y C.-C. Wu, Astrophys. J. **920**, 39 (2021).
- [6] J. E. Borovsky, M. F. Thomsen y R. C. Elphic, J. Geophys. Res. **103**, 17617 (1998).
- [7] E. Marsch, Living Rev. Sol. Phys. **3**, 1 (2006).
- [8] M. Piersanti, M. Pezzopane, Z. Zhima, P. Diego, C. Xiong, R. Tozzi, A. Pignalberi, G. D'Ángelo, R. Battiston, J. Huang, P. Picozza, Y. Rui, X. Shen, R. Sparvoli, P. Ubertini, Y. Yang y S. Zoffoli, Advances in Space Research **67**, 35 (2021).
- [9] S. Wyckoff, R. S. Heyd y R. Fox, Astrophys. J. **512**, L73 (1999).
- [10] L. Cheng, Q. Zhang, Y. Wang, X. Li y R. Liu, Astrophys. J. **897**, 87 (2020).

- [11] J. He, B. Cui, L. Yang, C. Hou, L. Zhang, W.-H. Ip, Y.-D. Jia, C. Dong, D. Duan, Q. Zong, S. D. Bale, M. Pulupa, J. W. Bonnell, T. D. D. Wit, K. Goetz, P. R. Harvey, R. J. MacDowall y D. M. Malaspina, *Astrophys. J.* **910**, 7 (2021).
- [12] R. L. Tokar, R. E. Johnson, M. F. Thomsen, D. M. Delapp, R. A. Baragiola, M. F. Francis, D. B. Reisenfeld, B. A. Fish, D. T. Young, F. J. Crary, A. J. Coates, D. A. Gurnett y W. S. Kurth, *Geophys. Res. Lett.* **32** (2005).
- [13] G. Björnsson, M. A. Abramowicz, X. Chen y J.-P. Lasota, *Astrophys. J.* **467**, 99 (1996).
- [14] T. R. White y A. P. Lightman, *Astrophys. J.* **340**, 1024 (1989).
- [15] Q. Wu, X. Cao, L. C. Ho y D.-X. Wang, *Astrophys. J.* **770**, 31 (2013).
- [16] M. Petropoulou, L. Sironi, A. Spitkovsky y D. Giannios, *Astrophys. J.* **880**, 37 (2019).
- [17] T. Roy, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **504**, 5001 (2021).
- [18] Y. N. Istomin y D. N. Sobyanin, *Astron. Lett.* **33**, 660 (2007).
- [19] K. Hirotani, S. Iguchi, M. Kimura y K. Wajima, *Astrophys. J.* **545**, 100 (2000).
- [20] U. A. Mofiz, G. M. Bhuiyan, Z. Ahmed y M. A. Asgar, *Phys. Rev. A* **38**, 5935 (1988).
- [21] M. Sherlock, J. P. Brodrick y C. P. Ridgers, *Physics of Plasmas* **24**, 082706 (2017).

- [22] J. Mlynar, T. Craciunescu, D. R. Ferreira, P. Carvalho, O. Ficker, O. Grover, M. Imrisek, J. Svoboda y J. contributors, *J. Fusion Energ.* **38**, 458 (2019).
- [23] L. Wang, H. Q. Wang, S. Ding, A. M. Garofalo, X. Z. Gong, D. Eldon, H. Y. Guo, A. W. Leonard, A. W. Hyatt, J. P. Qian, D. B. Weisberg, J. McClenaghan, M. E. Fenstermacher, C. J. Lasnier, J. G. Watkins, M. W. Shafer, G. S. Xu, J. Huang, Q. L. Ren, R. J. Buttery, D. A. Humphreys, D. M. Thomas, B. Zhang y J. B. Liu, *Nature Communications* **12**, 1365 (2021).
- [24] M. Sekine, *Applied Surface Science* **192**, 270 (2002). Advance in Low Temperature RF Plasmas.
- [25] P. Kumar, K. S. Figueroa, A. C. Foucher, K. Jo, N. Acero, E. A. Stach y D. Jariwala, *Journal of Vacuum Science & Technology A* **39**, 032201 (2021).
- [26] J. B. Titus, A. F. Almagri, P. W. Terry, J. S. Sarff, E. D. Mezonlin y J. A. Johnson, *Physics of Plasmas* **28**, 062504 (2021).
- [27] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Springer International Publishing, Cham, 2016).
- [28] S. Zenitani y M. Hoshino, *Astrophys. J.* **677**, 530 (2008).
- [29] E. N. Nerush, I. Y. Kostyukov, A. M. Fedotov, N. B. Narozhny, N. V. Elkina y H. Ruhl, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 035001 (2011).
- [30] T. Yeashna, R. K. Shikha, N. A. Chowdhury, A. Mannan, S. Sultana y A. A. Mamun, *Eur. Phys. J. D* **75**, 135 (2021).
- [31] D. Umstadter, *Phys. Plasmas* **8**, 1774 (2001).

- [32] D. Kagan, L. Sironi, B. Cerutti y D. Giannios, *Space Sci. Rev.* **191**, 545 (2015).
- [33] R. Ruffini y J. R. Wilson, *Phys. Rev. D* **12**, 2959 (1975).
- [34] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica de fluidos*, nº v. 6 en *Curso de física teórica* (Reverté, 1991).
- [35] F. A. Asenjo, V. Muñoz, J. A. Valdivia y T. Hada, *Phys. Plasmas* **16**, 122108 (2009).
- [36] F. A. Asenjo, F. Borotto, A. C.-L. Chian, V. Muñoz, J. A. Valdivia y E. Rempel, *Phys. Rev. E* **85**, 046406 (2012).
- [37] R. A. López, F. Asenjo, V. Muñoz, A. C.-L. Chian y J. A. Valdivia, *Phys. Plasmas* **88**, 023105 (2013).
- [38] P. K. Shukla y A. A. Mamun, *Introduction to Dusty Plasma Physics*, Vol. 10 de *Series in Plasma Physics* (Institute of Physics Publishing, London, 2002).
- [39] F. Verheest, *Waves in Dusty Space Plasmas Astrophysics and Space Science Library* (Kluwer Academic Publishers, 2000), primera edición.
- [40] J. Vaverka, I. Richterova, J. Pavlu, J. Safrankova y Z. Nemecek, *Astrophys. J.* **825**, 133 (2016).
- [41] M. Horanyi y D. A. Mendis, *Astrophys. J.* **307**, 800 (1986).
- [42] G. Cremonese, M. Fulle, P. Cambianica, G. Munaretto, M. T. Capria, F. La Forgia, M. Lazzarin, A. Migliorini, W. Boschin, G. Milani, A. Aletti, G. Arlic, P. Bacci, R. Bacci, E. Bryssinck, D. Carosati, D. Castellano, L. Buzzi, S. Di

- Rubbo, M. Facchini, E. Guido, F. Kugel, R. Ligustri, M. Maestripieri, A. Mantero, J. Nicolas, P. Ochner, C. Perrella, R. Trabatti y A. Valvasori, *Astrophys. J. Lett.* **893**, L12 (apr 2020).
- [43] C. Chen, J. A. Davies, G. Zhang y J. S. Wurtele, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 73 (1992).
- [44] O. Havnes, J. Trøim, T. Blix, W. Mortensen, E. T. L. I. Næsheim y T. Tønnesen, *J. Geophys. Res.* **100**, 1731 (1996).
- [45] E. Khalisi, *Adv. Space Res.* **59**, 1614 (2017).
- [46] H. Kruger, E. Grun, A. Graps y S. Lammers, *Astrophys. Space Sci.* **264**, 247 (1998).
- [47] M. Horanyi, *Astrophys. Space Sci.* **13**, 231 (1993).
- [48] I. Mann, N. Meyer-Vernet y A. Czechowski, *Phys. Rev.* **536**, 1 (2014).
- [49] N. Altobelli, S. Kempf, M. Landgraf, R. Srama, V. Dikarev, H. Krüger, G. Moragas-Klostermeyer y E. Grün, *J. Geophys. Res.* **108**, 8032 (2003).
- [50] I. Mann, *Adv. Space Res.* **41**, 160 (2008).
- [51] M.-J. Lee, N. Ashikawa y Y.-D. Jung, *Astroparticle Phys.* **114**, 30 (2020).
- [52] B. T. Draine, *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*, (Princeton University Press, 2011).
- [53] J. Mahmoodi, P. K. Shukla, N. L. Tsintsadze y D. D. Tshakaya, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2626 (2000).

- [54] B. J. Fry, B. D. Fields y J. R. Ellis, *Astrophys. J.* **894**, 109 (2020).
- [55] M. Bacharis, M. Coppins y J. E. Allen, *Phys. Rev. E* **82**, 026403 (2010).
- [56] D. L. Rudakov, J. H. Yu, J. A. Boedo, E. M. H. S. I. Krasheninnikov, R. A. Moyer, S. H. Muller, A. Y. Pigarov, M. Rosenberg, R. D. Smirnov, W. P. West, R. L. Boivin, B. D. Bray, N. H. Brooks, A. W. Hyatt, C. P. C. Wong, A. L. Roquemore, C. H. Skinner, W. M. Solomon, S. Ratynskaia, M. E. Fenstermacher, M. Groth, C. J. Lasnier, A. G. McLean, y P. C. Stangeby, *Rev. Sci. Instrum.* **79**, 10F303 (2008).
- [57] E. Thomas Jr., R. L. Merlino y M. Rosenberg, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **54**, 124034 (2012).
- [58] V. E. Fortov, O. F. Petrov y O. S. Vaulina, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 195003 (2008).
- [59] B. Steinmüller, C. Dietz, M. Kretschmer y M. H. Thoma, *Phys. Plasmas* **24**, 033705 (2017).
- [60] J.-M. Liu, W.-T. Juan, J.-W. Hsu, Z.-H. Huang y L. I, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **41**, A47 (1999).
- [61] M. Bonitz, N. Horing y P. Ludwig, *Introduction to Complex Plasmas*, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics (Springer Berlin Heidelberg, 2010).
- [62] S. V. Vladimirov, K. Ostrikov y A. A. Samarian, *Physics and Applications of Complex Plasmas* (London : Imperial College Press, 2005).

- [63] S. Hamaguchi, *Dusty Plasmas and Coulomb Crystals* (Springer US, Boston, MA, 2000), págs. 51–57.
- [64] S. Kumar, S. K. Tiwari y A. Das., *Phys. Plasmas* **24**, 033711 (2017).
- [65] P. K. Shukla, *Phys. Scripta* **45**, 504 (1992).
- [66] R. Gaelzer, M. C. de Juli, R. S. Schneider y L. F. Ziebell, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **51**, 015011 (2009).
- [67] N. N. Rao, P. K. Shukla y M. Yu, *Planet. Space Sci.* **38**, 543 (1990).
- [68] R. K. Varma, P. K. Shukla y V. Krishan, *Phys. Rev. E* **47**, 3612 (1993).
- [69] M. R. Jana, A. Sen y P. K. Kaw, *Phys. Rev. E* **48**, 3930 (1993).
- [70] R. L. Merlino, A. Barkan, C. Thompson y N. D'Ángelo, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **39**, A421 (1997).
- [71] L. Mestel y J. L. Spitzer, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* **116**, 503 (1956).
- [72] R. A. Galvão y L. F. Ziebell, *Phys. Plasmas* **19**, 093702 (2012).
- [73] A. A. Mamun, P. K. Shukla y G. E. Morfill, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 095005 (2004).
- [74] E. Thomas, U. Konopka, D. Artis, B. Lynch, S. Leblanc, S. Adams, R. L. Merlino y M. Rosenberg, *Journal of Plasma Physics* **81**, 345810206 (2015).
- [75] E. Thomas, U. Konopka, R. L. Merlino y M. Rosenberg, *Physics of Plasmas* **23**, 055701 (2016).
- [76] E. Thomas, R. L. Merlino y M. Rosenberg, *IEEE Transactions on Plasma Science* **41**, 811 (2013).

- [77] C. Horton y Y. Ichikawa, *Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas* (World Scientific, 1996).
- [78] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Physics and Chemistry in Space (Springer Berlin Heidelberg, 2012).
- [79] C. S. Kueny y P. J. Morrison, *Phys. Plasmas* **2**, 1926 (1995).
- [80] J. Soucek, V. Krasnoselskikh, T. Dudok de Wit, J. Pickett y C. Kletzing, *J. Geophys. Res. Space Phys.* **110** (2005).
- [81] Z. Qiu, L. Chen, F. Zonca y M. V. Falessi, *New J. Phys.* **23**, 063045 (2021).
- [82] T. Yamada, S.-I. Itoh, T. Maruta, N. Kasuya, Y. Nagashima, S. Shinohara, K. Terasaka, M. Yagi, S. Inagaki, Y. Kawai, A. Fujisawa y K. Itoh, *Nature Phys.* **4**, 721 (2008).
- [83] V. Roytershteyn y G. L. Delzanno, *Phys. Plasmas* **28**, 042903 (2021).
- [84] Y. Nakamura, H. Bailung y P. K. Shukla, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1602 (Aug 1999).
- [85] D. Trotta, F. Valentini, D. Burgess y S. Servidio, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **118** (2021).
- [86] J. Goswami, S. Chandra, J. Sarkar y B. Ghosh, *Radiat. Eff. Defect S.* **175**, 961 (2020).
- [87] K. Singh, P. Sethi y N. S. Saini, *Physics of Plasmas* **25**, 033705 (2018).
- [88] G.-F. Deng, Y.-T. Gao, C.-C. Ding y J.-J. Su, *Chaos, Solitons & Fractals* **140**, 110085 (2020).

- [89] C. R. Rosberg, D. N. Neshev, W. Krolikowski, A. Mitchell, R. A. Vicencio, M. I. Molina y Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 083901 (2006).
- [90] D. Y. Tang, L. M. Zhao, X. Wu y H. Zhang, *Phys. Rev. A* **80**, 023806 (2009).
- [91] J. Boussinesq, *Bibliothèque nationale de France* **1 vol. (XXII-680-61 p.)**, 680 (1877).
- [92] W. P. Su, J. R. Schrieffer y A. J. Heeger, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1698 (1979).
- [93] V. A. Belinski, *Phys. Rev. D* **91**, 125041 (2015).
- [94] H. Kuwayama y S. Ishida, *Sci. Rep.* **3**, 2272 EP (2013).
- [95] Y. Yousefi y K. Muminov, *A simple classification of solitons* (2012).
- [96] A. Biswas, *Phys. Plasmas* **12**, 022306 (2005).
- [97] I. Spassovska y P. H. Sakanaka, *AIP Conference Proceedings* **784**, 506 (2005).
- [98] R. S. Tiwari, S. L. Jain y M. K. Mishra, *Phys. Plasmas* **18**, 083702 (2011).
- [99] W. Feng, J. Q. Li y Y. Kishimoto, *Phys. Plasmas* **23**, 092115 (2016).
- [100] M. Wadati, *Pramana* **57**, 841 (Nov 2001).
- [101] F. Verheest y M. A. Hellberg, *Phys. Scr.* **T82**, 98 (1999).
- [102] J. X. Ma y J. Y. Liu, *Phys. Plasmas* **4**, 253 (1997).
- [103] Y. Nakamura y A. Sarma, *Phys. Plasmas* **8**, 3921 (2001).
- [104] P. Bandyopadhyay, G. Prasad, A. Sen y P. K. Kaw, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 065006 (2008).

- [105] R. Malik y H. K. Malik, J. Theor. Appl. Phys. **7**, 65 (2013).
- [106] T. K. Baluku y M. A. Hellberg, Phys. Plasmas **15**, 123705 (2008).
- [107] N. A. El-Bedwehy y W. F. El-Taibany, pop **27**, 012107 (2020).
- [108] F. Sayed y A. A. Mamun, Phys. Plasmas **14**, 014501 (2007).
- [109] A. Mannan y A. A. Mamun, Phys. Rev. E **84**, 026408 (2011).
- [110] F. C. Michel, *Theory of neutron star magnetospheres* (Chicago : University of Chicago Press, 1991).
- [111] J. F. C. Wardle, D. C. Homan, R. Ojha y D. H. Roberts, Nature **395**, 457 (1998).
- [112] A. A. Mamun, R. A. Cairns y P. K. Shukla, Phys. Plasmas **3**, 702 (1996).
- [113] R. Malik, H. K. Malik y S. C. Kaushik, Phys. Plasmas **19**, 032107 (2012).
- [114] F. Verheest, f. A. Hellberg y I. Kourakis, Phys. Rev. E **87**, 043107 (2013).
- [115] M. M. Hossen, M. S. Alam, S. Sultana y A. A. Mamun, Phys. Plasmas **23**, 023703 (2016).
- [116] B. C. Kalita y M. Choudhury, Plasma Phys. Rep. **42**, 996 (2016).
- [117] M. Taherimoghadam, I. Motie, A. Bakhshayeshi y T. Mirzaye, Phys. Plasmas **26**, 113704 (2019).
- [118] J. C. Higdon, R. E. Lingenfelter y R. E. Rothschild, Astrophys. J. **698**, 350 (2009).
- [119] N. S. Saini y K. Singh, Phys. Plasmas **23**, 103701 (2016).

- [120] J. M. Mehlhaff, G. R. Werner, D. A. Uzdensky y M. C. Begelman, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **498**, 799 (2020).
- [121] M. Nenkova, M. M. Sirocky, Ž. Ivezić, y M. Elitzur, *Astrophys. J.* **685**, 147159 (2008).
- [122] W. C. Muller, D. Biskamp y R. Grappin, *Phys. Rev. E* **67**, 066302 (2003).
- [123] K. Singh, P. Meintjes y F. Ramamonjisoa, *Astrophys. Space Sci.* **365**, 33 (2020).
- [124] D. Kynoch, H. Landt, M. J. Ward, C. Done, E. Gardner, C. Boisson, M. Arrieta-Lobo, A. Zech, K. Steenbrugge y M. P. Santaella, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **475**, 404 (2018).
- [125] J.-M. Wang, *Astrophys. J.* **614**, L21 (2004).
- [126] N. D'Ángelo, *Planet. Space Sci.* **38**, 1143 (1990).
- [127] A. Mamun y P. Shukla, *Phys. Lett. A* **374**, 4238 (2010).
- [128] N. Roy, S. Tasnim y A. A. Mamun, *Phys. Plasmas* **19**, 033705 (2012).
- [129] H.-F. Liu, S.-Q. Wang, Z. long Wang, F.-Z. Yang, Yao-Liu y Sili-Li, *Adv. Space Res.* **51**, 2368 (2013).
- [130] B. C. Kalita y S. Das, *Astrophys. Space Sci.* **352**, 585 (2014).
- [131] P. J. Mohr, D. B. Newell y B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016).
- [132] G. Sarri, K. Poder, J. M. Cole, W. Schumaker, A. Di Piazza, B. Reville, T. Dzelzainis, D. Doria, L. A. Gizzi, G. Grittani, S. Kar, C. H. Keitel, K. Krushelnick, S. Kuschel, S. P. D. Mangles, Z. Najmudin, N. Shukla, L. O. Silva, D. Symes,

- A. G. R. Thomas, M. Vargas, J. Vieira y M. Zepf, *Nat. Commun.* **6**, 6747 (2015).
- [133] J. Huang, S. M. Weng, X. L. Zhu, X. F. Li, M. Chen, M. Murakami y Z. M. Sheng, *Plasma Phys. Control. Fusion* **63**, 045010 (2021).
- [134] S. Stepney y P. W. Guilbert, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **204**, 1269 (10 1983).
- [135] T. S. Pedersen, J. R. Danielson, C. Hugenschmidt, G. Marx, X. Sarasola, F. Schauer, L. Schweikhard, C. M. Surko y E. Winkler, *New J. Phys.* **14**, 035010 (2012).
- [136] M. R. Stoneking, T. S. Pedersen, P. Helander, H. Chen, U. Hergenbahn, E. V. Stenson, G. Fiksel, J. von der Linden, H. Saitoh, C. M. Surko y et al., *J. Plasma Phys.* **86**, 155860601 (2020).
- [137] A. Jafari, *Magnetic fields in accretion disks: A review* (2019).
- [138] S. P. O'Sullivan y D. C. Gabuzda, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **400**, 26 (2009).