



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

**MODELAMIENTO DE PROPIEDADES PRIMARIAS PARA LA
CONMINUCIÓN MEDIANTE CARACTERIZACIÓN AVANZADA Y
TÉCNICAS DE APRENDIZAJE AUTOMÁTICO**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS

SEBASTIÁN ALEJANDRO SAMUR ESTRADA

PROFESORA GUÍA:
PIA LOIS MORALES
PROFESOR CO-GUÍA
GONZALO DÍAZ RODRÍGUEZ

COMISIÓN:
MAGIN TORRES RUBILAR

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por:
Proyecto FONDECYT 11220631

SANTIAGO DE CHILE
2024

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL DE MINAS
POR: SEBASTIÁN ALEJANDRO SAMUR ESTRADA
FECHA: 2024
PROF. GUÍA: PIA LOIS MORALES

MODELAMIENTO DE PROPIEDADES PRIMARIAS PARA LA CONMINUCIÓN MEDIANTE CARACTERIZACIÓN AVANZADA Y TÉCNICAS DE APRENDIZAJE AUTOMÁTICO

En el presente trabajo, se desarrollaron modelos predictivos para obtener índices y parámetros de conminución de minerales, utilizando técnicas de aprendizaje automático. La investigación se centró en modelar las propiedades mecánicas, tales como la energía específica de fractura, basándose en datos geológicos y mineralógicos obtenidos a nivel microscópico. El objetivo es estimar el consumo de energía con el fin de optimizar la eficiencia en los procesos de conminución, principalmente en las etapas de chancado y molienda.

La problemática que se está extendiendo en los procesos de conminución radica en la alta variabilidad mineralógica de los yacimientos, lo cual genera ineficiencias operativas. En este contexto, la caracterización detallada de dicha variabilidad se presenta como una estrategia para contrarrestar estas ineficiencias y optimizar el proceso.

Los resultados obtenidos mostraron que los modelos predictivos lograron estimar con alta precisión, obteniendo un coeficiente de determinación de $R^2 = 0.8$, la energía específica necesaria para la fractura de diferentes tipos de texturas de roca. Se observó que la energía específica de fractura varía significativamente según las propiedades mineralógicas de las muestras, lo que indica la importancia de una caracterización detallada para cada tipo de material. Adicionalmente, los modelos probabilísticos aplicados fueron validados mediante datos experimentales, mostrando que la predicción de la energía específica media tiene fundamento experimental. El análisis de los resultados resalta la influencia de la variabilidad mineralógica en la eficiencia de los procesos de conminución. Los modelos basados en aprendizaje automático, como K-Means y la optimización bayesiana, permitieron capturar de manera efectiva las interacciones entre las características geológicas y propiedades mecánicas de las rocas. Esto subraya la necesidad de ajustar los parámetros de conminución a las propiedades específicas de cada tipo de roca de modo de predecir el consumo de energía y utilizar herramientas para optimizarlo.

En conclusión, la aplicación de técnicas de aprendizaje automático en el modelamiento de las propiedades mecánicas de las rocas se presenta como una herramienta potente para identificar las propiedades de conminución que permitan predecir y optimizar la eficiencia energética de los procesos de reducción de tamaño en el procesamiento de minerales. Los modelos desarrollados permiten predecir con precisión la energía específica de fractura, lo que contribuye a una mejor predicción del consumo específico de energía y consecuentemente de los costos de operación. Se recomienda la integración de más variables geológicas y operacionales para aumentar la robustez de los modelos y su aplicabilidad a mayor escala, destacando la importancia de una comprensión profunda de la variabilidad del mineral y su impacto en los procesos de fractura.

*Trate de no convertirse en un hombre de éxito,
sino tratar de convertirse en un hombre de valor*

Albert Einstein

Agradecimientos

A lo largo de mi carrera universitaria, ha habido personas cuyo apoyo ha sido fundamental para mi desarrollo personal y académico. En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis padres, quienes han estado a mi lado en todo momento. Me brindaron las herramientas necesarias para superar cada desafío y me enseñaron el valor del esfuerzo y la dedicación. Sin su amor, guía y constante apoyo, no sería la persona que soy hoy. Este logro es tanto mío como suyo, y lo comparto con ellos de todo corazón.

También quiero agradecer a mi bisabuela, quien, a pesar de la distancia, ha sido una figura crucial en mi vida desde la infancia. Su amor y sabiduría siempre me han acompañado, y su recuerdo sigue siendo un pilar en mi vida. Te quiero mucho, abuela, y siempre llevaré contigo un lugar especial en mi corazón.

A mi pareja, Elisa, quiero agradecerle profundamente por estar a mi lado desde el segundo año en la universidad. Su apoyo incondicional ha sido clave en cada una de las decisiones importantes que he tomado, desde atreverme a estudiar física, ingeniería y un magíster al mismo tiempo, hasta embarcarme en aventuras al otro lado del mundo. Gracias por ser parte de este viaje y por acompañarme en cada paso del camino.

Quiero agradecer a mis grandes amigos, Ricardo Contreras, Martín Gutiérrez, Diego Cortez y Christian Álvarez. Con ustedes las risas, las anécdotas y los buenos momentos nunca faltaron. Su amistad ha sido un refugio en los momentos difíciles y una fuente inagotable de alegría. Gracias por haber estado conmigo en este recorrido.

Finalmente, quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a toda mi comisión de tesis por su constante apoyo a lo largo de este proyecto. En primer lugar, agradezco a la profesora Pia Lois por brindarme la oportunidad de trabajar en un tema de mi interés y por su respaldo en cada una de mis decisiones académicas. Su confianza y orientación fueron fundamentales en este proceso. A Gonzalo Díaz, le agradezco su disposición y buena voluntad para ayudarme en el desarrollo de los modelos, aportando siempre con su conocimiento y tiempo. Y a Magin Torres, mi más profundo agradecimiento por todo lo que me ha enseñado y por darme la oportunidad de demostrar mi potencial. Su guía ha sido invaluable en mi crecimiento académico y profesional.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Alcances	3
2. Estado del Arte	4
2.1. Modelos de Procesos de Conminución	4
2.1.1. Modelos Empíricos	4
2.1.2. Modelos Semi-Empíricos	6
2.1.2.1. Modelos Matriciales de Operaciones Unitarias de Chancado	8
2.1.2.2. Modelos Matriciales de Operaciones Unitarias de Molienda .	10
2.1.3. Modelos Iterativos	11
2.1.4. Caracterización y su Relación con la Variabilidad Mineralógica	13
2.2. Modelos Fenomenológicos de Quiebre de Partículas Singulares	17
2.2.1. Geología como medio entre conminución y mecánica de rocas	25
2.2.2. Propiedades Primarias de Ruptura	25
2.2.3. Efecto de las Variables Geológicas en Propiedades de la Roca	27
2.2.3.1. Efecto de la Mineralogía	27
2.2.3.2. Efecto de la Textura	28
2.2.3.3. Procesamiento de Minerales, Geología y Mecánica de Rocas	29
2.3. Modelos de IA aplicados a conminución	29
2.3.1. Fundamentos de IA	30
2.3.2. Modelos de Machine Learning	30
2.3.3. Redes Neuronales en Procesamiento de Minerales	31
2.3.4. Bag Of Words (BoW)	32
2.4. Gaps en el Conocimiento	34
3. Metodología	37
3.1. Antecedentes	37
3.1.1. Datos Provenientes de Imágenes QEMSCAN	37
3.2. Procesamiento de los Datos de Respuesta	42
3.3. Procesamiento de las Variables de Entrada	43
4. Resultados	46
4.1. Procesamiento de los Datos de Respuesta	46
4.2. Procesamiento de las Variables de Entrada	50
4.3. Modelo Planteado para la Energía Específica Media	62
5. Discusiones	65

6. Conclusiones	70
Bibliografía	73

Índice de Tablas

3.1.	Poblaciones de Datos	39
3.2.	Número de partículas ensayadas para cada tamaño.	41
4.1.	Parámetros para el Modelo de Energía Específica Media de Tavares et al. (1998)	47
4.2.	Estadística Descriptiva de Parámetros del Modelo de Tavares et al. (1998) . .	47
4.3.	Parámetros del Modelo Probabilístico por Textura	48
4.4.	Variabilidad del número de cluster y el mejor modelo para cada caso	52
4.5.	Espacio de búsqueda de hiperparámetros para la optimización bayesiana. . . .	62
4.6.	Valores óptimos de los hiperparámetros obtenidos	63

Índice de Ilustraciones

1.1.	Evolución en el consumo de electricidad por proceso, 2001 – 2021 (Extracto, COCHILCO, 2022)	1
2.1.	Varias funciones ruptura para un tamaño específico (Extracto, Broadbent y Callcott, 1955)	7
2.2.	Representación del modelo de Whiten (Extracto, Whiten, J., 1972)	9
2.3.	Aspecto general del área de la sección transversal horizontal de un Chancado (Extracto, Evertsson, M., 2000)	12
2.4.	Evento de chancado según el modelo de Evertsson (Extracto, Evertsson, M., 2000)	12
2.5.	Efecto de la granulometría Run-of-Mine (ROM) en Función de la Potencia del Chancador (Extracto, Selepe y Amandi-Echelu, 2023)	15
2.6.	Histograma de los coeficientes de variación de los valores de DWI (basado en valores de 650 depósitos) (Extracto, Bueno et al., 2015)	16
2.7.	Predicción del comportamiento de carga de partículas y bolas en un molino piloto Hardinge usando DEM con partículas esféricas que se colorean según la velocidad, siendo el rojo la alta velocidad y azul siendo baja velocidad (Extracto, Cleary, 2009)	18
2.8.	Comparación de valores de potencia y rendimiento simulados y experimentales para los HPGR a escala piloto (RPR y HRC) (Extracto, Rodriguez et al., 2022)	18
2.9.	Energía específica de Fractura en función de la curva de esfuerzo-deformación (Extracto, Lois-Morales et al., 2018)	19
2.10.	Distribución de la energía específica de fractura para: (a) Muestras irregulares (11.2-13mm) y cilíndricas (12mm) de un basalto de grano fino (0.3mm), (b) Muestras irregulares (8-11.2mm) y cilíndricas (9mm) de un Cuarzo-Monzonita (alteración filica) de grano mediano (1.4mm) y (c) Muestras irregulares (11.2-13mm) y cilíndricas (12mm) de un Cuarzo-Monzonita (Alteración potásica) de grano grueso (1.6mm) (Extracto, Lois et al., 2020)	21
2.11.	Comparación de la resistencia prevista de partículas de 5 [mm] versus valores experimentales reales y muestra de monzonita Qz con ligera alteración filica (Extracto, Lois-Morales, 2020)	22
2.12.	Variación de las energías medias de fractura de partículas de materiales seleccionados en función del tamaño de partícula representativo (Extracto, Tavares, 2021)	22
2.13.	Relación entre la energía de fractura de partícula específica y la resistencia de la partícula para esferas de vidrio de diferentes tamaños (Extracto, Tavares, 2007)	23
2.14.	Distribuciones de energía de fractura de partículas para partículas de cuarzo de varios tamaños (Extracto, Tavares et al., 1998)	24

2.15.	Predicción de índices de conminución tradicionales utilizando propiedades de rotura primaria y función de conminución de rotura. A) Correlación entre los resultados de energía específica del tamaño calculados usando PRC y la energía calculada para moler material por debajo de 106 μm usando la prueba de enlace para seis minerales. B) Comparación de los valores de A_{xb} calculados utilizando la prueba de peso de caída estándar versus el A_{xb} calculado utilizando los datos del SILC (Extracto, 2017, Seidi)	26
2.16.	Relación entre la energía de fractura de partícula específica y la resistencia de la partícula para esferas de vidrio de diferentes tamaños (Extracto, Tavares et al., 1998)	27
2.17.	Resultados SILC de partículas con forma controlada (mininúcleo) frente a PAI (calculado utilizando los resultados de QXRD) (Extracto, Tildirim, 2016) . . .	28
2.18.	Comparación de Granulometría en la salida del Chancador para los datos reales y la red neuronal (Extracto, Fernandez, B. , 2023)	32
2.19.	Una ilustración de la representación visual de Bag-of-Words (BoW) para tres imágenes de entrada: la presencia de palabras visuales de un código (fila inferior) en las imágenes de entrada (fila superior) se cuantifica en un histograma. El histograma de conteo de palabras (fila central) se utiliza para representar la imagen (Extracto, Teva, M., 2015)	33
2.20.	Imagen a la que se le aplica una cuadrícula regular (Extracto, Pardo, S. (2009))	34
3.1.	Aplicación de ventanas móviles en la misma sección delgada. La flecha indica la dirección del remuestreo, (X) indica una parte de la sección que no se considera para el análisis (Extracto, Lois-Morales, 2022)	38
3.2.	Metodología para Imágenes Provenientes de QEMSCAN	41
3.3.	Caracterización del Modelo	42
3.4.	Base de Datos Con Variable de Respuesta Mecánica	42
3.5.	Ejemplo del Método del Codo	44
4.1.	Resultados para cada textura y ajuste del modelo de Tavares et al. (1998) . . .	46
4.3.	Distribución Acumulada de la Energía Específica para la Textura T8	48
4.2.	Distribuciones acumuladas de la energía específica por tamaño para cada textura.	49
4.4.	Variables que siguen una distribución normal	50
4.5.	Variables que siguen una distribución log-normal	51
4.6.	Método del Codo para el algoritmo de K-Means	52
4.7.	Varianza por Componentes del PCA	53
4.8.	Gráfico de Primera y Segunda Componente Principal	53
4.9.	Boxplots para los diferentes clusters.	54
4.10.	Histogramas para la Textura Ba en función del Tamaño	55
4.11.	Histogramas para la Textura K2 en función del Tamaño	56
4.12.	Histogramas para la Textura K4 en función del Tamaño	56
4.13.	Histogramas para la Textura SA en función del Tamaño	57
4.14.	Histogramas para la Textura T1 en función del Tamaño	58
4.15.	Histogramas para la Textura T2 en función del Tamaño	58
4.16.	Histogramas para la Textura T3 en función del Tamaño	59
4.17.	Histogramas para la Textura T4 en función del Tamaño	60
4.18.	Histogramas para la Textura T8 en función del Tamaño	60
4.19.	Proporción de Cluster por cada Imagen	61
4.20.	Resultados para la Energía Específica Media	64

Capítulo 1

Introducción

En la industria minera, los procesos de conminución son fundamentales para liberar las especies de interés económico, sin embargo enfrentan desafíos significativos debido a su elevado consumo de energía y su ineficiencia inherente a la energía utilizada por cada mecanismo de fractura. Esta investigación aborda dichos desafíos, proporcionando un análisis detallado sobre la eficiencia energética en la fragmentación del mineral.

El contexto actual, marcado por un incremento en el consumo energético, especialmente en procesos de conminución, ha sido resaltado en estudios recientes. Un ejemplo de esto es la disminución de la ley de los yacimientos, lo que implica que, para mantener el nivel de producción, se requiere procesar una mayor cantidad de mineral. Radziszewski (2013) y Ballantine G. y Powell M. (2014) han evidenciado que una gran proporción de la energía utilizada en estos procesos se disipa en forma de calor, lo que subraya la ineficiencia energética.

Además, la Corporación Chilena del Cobre (COCHILCO) (2022) ha proporcionado una visión detallada del aumento sostenido en el consumo energético de la industria minera en Chile, enfatizando la concentración de minerales que incluye la conminución. Se proyecta que el consumo eléctrico aumentará de 23,5 TWh en 2022 a 32,8 TWh en 2033, lo que implica un incremento del 39,5 %.

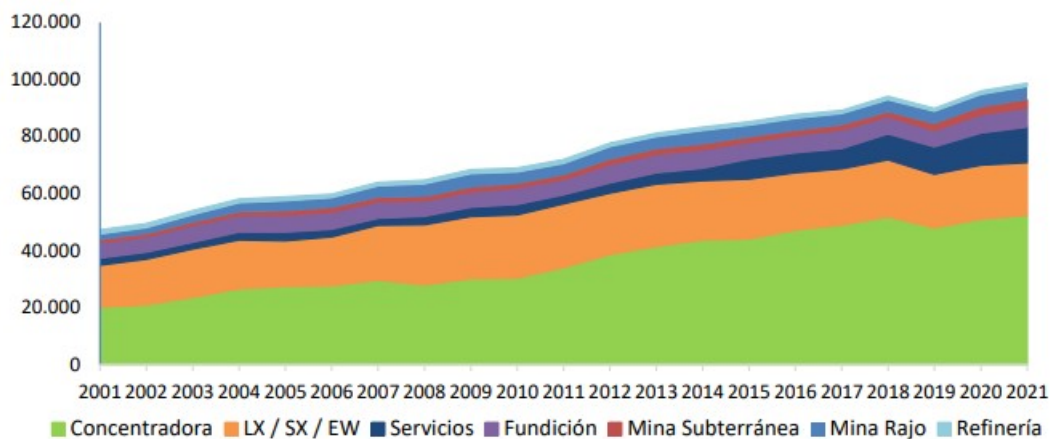


Figura 1.1: Evolución en el consumo de electricidad por proceso, 2001 – 2021 (Extracto, COCHILCO, 2022)

Esta situación evidencia la necesidad urgente de optimizar el consumo energético y consecuentemente reducir los costos asociados a los procesos de conminución. Curry, J. (2014) identifica que los procesos de conminución representan una parte significativa de los costos operativos en minería, destacando la importancia crítica de mejorar su eficiencia. En particular, se identifica que el costo de operación de la planta es en promedio el 45 % del OPEX.

En el presente trabajo de tesis, se ha realizado una investigación exhaustiva sobre los procesos de fractura para un mecanismo de impacto en la conminución de minerales a escalas milimétricas y micrométricas. A diferencia de las investigaciones más comunes a nivel macroscópico, este estudio se enfoca en escalas más finas, donde el conocimiento es aún limitado. Se han analizado las propiedades mecánicas, la energía específica de fractura, características intrínsecas de cada yacimiento, que han sido medidas y correlacionadas con eventos de fractura a nivel microscópico.

Según Yahyaei, M. et al. (2016), una propiedad primaria de fractura en la conminución se refiere a las características inherentes de un material que influyen directamente en su comportamiento cuando se somete a fuerzas mecánicas durante la reducción de tamaño. Estas propiedades incluyen atributos como la dureza, la tenacidad, la fragilidad y la elasticidad. Determinan la energía necesaria para la fractura y cómo se rompe el material bajo estrés. A diferencia de factores externos como los ajustes del equipo, las propiedades primarias son intrínsecas al material y juegan un papel fundamental en la predicción y optimización del proceso de conminución.

Reconocer el efecto de la variabilidad mineralógica y su relación con las variables del proceso es indispensable, ya que dicha variabilidad influye significativamente en el comportamiento de los minerales durante los procesos de conminución. Las propiedades mineralógicas, como la dureza, textura y distribución de fases, afectan directamente la eficiencia energética y los resultados de fragmentación. Por tanto, comprender esta relación permite ajustar los parámetros operacionales de manera más precisa, optimizando el consumo energético y mejorando el rendimiento global del proceso. Este estudio busca abordar esa relación, proporcionando una base para el diseño de procesos más eficientes y sostenibles en la industria minera.

1.1. Objetivos

El presente trabajo de tesis ofrece un análisis integral de la conminución a escalas relevantes, integrando estudios recientes y datos experimentales. Se explora cómo la variabilidad mineralógica afecta los procesos de conminución y la eficiencia energética, culminando en un modelo que relaciona la mineralogía y textura con las propiedades de fractura en una etapa de chancado. El objetivo es proporcionar una comprensión profunda que permita optimizar estos procesos críticos en la industria minera. Debido a ello, se define el siguiente **objetivo general** para el trabajo de tesis:

- Desarrollar un modelo capaz de capturar la variabilidad mineralógica para predecir la energía específica media relevante para simulaciones de los procesos de chancado exceptuando el HPGR debido su distinto mecanismo de fractura.

Por lo tanto, para cumplir con el objetivo general descrito se definen los siguientes **objetivos específicos**:

- Definir una metodología para el tratamiento de los datos provenientes de la caracterización geológica y mineralógica.
- Predecir propiedades primarias de fractura a partir de características geológicas y mineralógicas a nivel microscópico.
- Desarrollar un modelo que permita correlacionar estas características y validarlo mediante herramientas estadísticas.

1.2. Alcances

Al definir los objetivos generales y específicos del trabajo, se definen los **alcances** del estudio. Se recibirán datos de artículos publicados por Lois-Morales (2023). Esto implica que no se generarán datos experimentales y sólo se limitará a realizar análisis a los datos generados a partir de los resultados del modelo. Según los objetivos generales, se trabajará en una escala milimétrica, por lo tanto, se limitará el trabajo a la escala mencionada. Por último, la propiedad primaria de ruptura que se estudiará es la energía específica de fractura frente a mecanismos de impacto.

Capítulo 2

Estado del Arte

En la sección del estado del arte, se aborda cómo la conminución es fundamental en el negocio minero, centrada en la reducción del tamaño de partículas a través de trituración y molienda. La sección destaca la influencia de los parámetros geológicos, que actúa como un nexo entre la conminución y la mecánica de rocas o partículas, determinando la eficiencia y efectividad del proceso de conminución. Además, se explora el uso de modelos de inteligencia artificial, que están revolucionando la forma en que se simulan y optimizan los procesos de conminución. Estos modelos permiten analizar grandes volúmenes de datos para identificar patrones y predecir el rendimiento de los equipos bajo diversas condiciones operativas. Las técnicas de análisis y simulación que utilizan inteligencia artificial, tales como redes neuronales, facilitan la optimización en tiempo real de los parámetros de operación, mejorando la eficiencia energética y la productividad. También se aborda cómo los algoritmos de aprendizaje automático pueden ajustar automáticamente las configuraciones del equipo para maximizar la eficiencia y reducir los costos operativos. En conjunto, los avances en inteligencia artificial proporcionan una comprensión más profunda de la interacción entre las propiedades físicas de las partículas, controladas por la geología, y el funcionamiento de los equipos de conminución, ofreciendo una herramienta poderosa para mejorar los resultados en la industria minera.

2.1. Modelos de Procesos de Conminución

La conminución es un proceso fundamental en el campo de procesamiento de minerales, enfocado en la reducción del tamaño de partículas. Los modelos clásicos de conminución se basan en principios de la energía específica de fractura y la relación de tamaño de las partículas. Estos modelos buscan entender cómo la energía aplicada en el proceso de trituración y molienda se relaciona con el tamaño final de las partículas.

2.1.1. Modelos Empíricos

Un modelo empírico es un modelo basado exclusivamente en datos observacionales y experimentales. Se construye a partir de la observación directa de los fenómenos y la recolección de datos, sin considerar necesariamente los principios teóricos que gobiernan el fenómeno físico a modelar.

El postulado de Rittinger, formulado en 1867, representa el primer modelo que establece una relación entre la energía específica consumida y el tamaño de partícula en procesos de

conminución. Según Sepúlveda, J. (1986), este modelo postula que la energía específica requerida para la reducción del tamaño de un sólido es directamente proporcional a la nueva superficie específica generada. La fórmula propuesta por Rittinger se expresa matemáticamente como sigue:

$$E_R = K_R \cdot \left(\frac{1}{d_p} - \frac{1}{d_f} \right) \quad (2.1)$$

Con K_R la constante de Rittinger y $d_{p,f}$ el tamaño característico del producto y alimentación. Es importante destacar, tal como señala Sepúlveda, J. (1986), que este modelo se ajusta más adecuadamente a procesos de fragmentación fina que a la fragmentación gruesa. Por consiguiente, su aplicación para predecir la energía específica de fractura en escalas milimétricas puede no ser la más adecuada. Esta limitación es crucial en el diseño y optimización de operaciones de conminución, especialmente cuando se trabaja con materiales que requieren una reducción de tamaño a escalas más finas.

El modelo de Kick, propuesto en 1885, representa un avance significativo en la comprensión de los procesos de conminución. Este modelo sostiene que la energía necesaria para fragmentar un cuerpo geométrico es proporcional a su volumen. Según esta teoría, una cantidad determinada de energía provocará cambios geométricos equivalentes en una partícula, independientemente de su tamaño inicial. Al desarrollar esta teoría, Kick asumió que el material a fragmentar es homogéneo, isotrópico y exento de imperfecciones, como describe Sepúlveda, J. (1986). Esta suposición, sin embargo, no toma en cuenta la variabilidad mineralógica inherente a las rocas.

$$E_K = K_K \cdot \ln \left(\frac{d_f}{d_p} \right) \quad (2.2)$$

Con K_K la constante de Kick. Es importante destacar, tal como indica Sepúlveda (1986), que el modelo de Kick es más eficaz al predecir la energía específica de fractura en procesos de molienda de partículas gruesas. Por lo tanto, no es aplicable a todos los procesos de reducción de tamaño.

El postulado de Bond, formulado en 1952, es el estándar predominante para caracterizar procesos de conminución. Este enfoque innovador propone que la energía necesaria para reducir el tamaño de un material hasta un 80 % de su tamaño inicial es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de dicho tamaño. La ecuación de Bond se presenta de la siguiente manera:

$$W = W_i \cdot \left(\frac{10}{\sqrt{P_{80}}} - \frac{10}{\sqrt{F_{80}}} \right) \quad (2.3)$$

Con W_i el índice de trabajo del material, el tamaño del 80 % pasante del producto P_{80} y el tamaño del 80 % pasante de la alimentación F_{80} . Una de las fortalezas clave del modelo de Bond es su realismo y aplicabilidad en la industria; reconoce la inexistencia de rocas ideales o uniformes en forma, lo que refleja mejor la variabilidad encontrada en prácticas de conminución reales. Bond, F. (1952) indica que este modelo es adecuado tanto para procesos de chancado como de molienda, con un margen de error que generalmente no excede el $\pm 20\%$. En particular, el índice de trabajo del material (W_i) varía según el tipo de material y el equipo empleado, lo que hace necesario su determinación mediante ensayos de laboratorio específicos. Estos ensayos pueden requerir una cantidad considerable de tiempo y material.

Como señala Man, Y.T. (2012), la realización del test de Bond implica iterar a través de N ciclos hasta alcanzar una carga circulante del 250 %. Esta metodología, puede resultar en un proceso bastante extenso tanto en términos de consumo de tiempo como de uso de material.

Tras entender cómo se modela la energía específica en relación con el tamaño de las partículas, emergen modelos que se enfocan en predecir cómo se fragmenta una partícula. Estos modelos buscan responder al fundamentalismo de cómo se produce la fragmentación de la roca, proporcionando una perspectiva detallada y analítica sobre el proceso de fragmentación de los materiales sólidos en partículas más pequeñas.

2.1.2. Modelos Semi-Empíricos

Según Torres, M. (2023) un modelo semi-empírico combina principios teóricos y datos empíricos. Integra conocimientos teóricos sobre el fenómeno con ajustes basados en datos experimentales para mejorar la precisión y la aplicabilidad del modelo.

Los modelos más utilizados en los procesos de conminución son los modelos de balance poblacional. Los modelos de balance poblacional responden a la interrogante de cómo se obtiene una granulometría en particular. Según King, R.P. (2003) la ecuación general de balance poblacional de un proceso de conminución es:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} (V \bar{\Psi}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \psi_j} (v_j \bar{\Psi}) + \bar{D} - \bar{B} = \frac{1}{V} [Q_{in} \Psi_{in} - Q_{out} \Psi_{out}] \quad (2.4)$$

Con V el volumen infinitesimal, $\bar{\Psi}$ la distribución de partículas promedio, v_j la velocidad de variación de la propiedad ψ_j , \bar{B} la tasa de nacimiento de partículas promedios, \bar{D} la tasa de muerte de partículas promedios, Q_{in} el caudal que entra al volumen y Q_{out} el caudal que sale del volumen.

Los modelos probabilísticos utilizados en procesos de conminución, como el balance poblacional, se basan en dos funciones clave: la función de selección y la función de clasificación. Según King, R.P. (2003), la función de selección determina la probabilidad de que una partícula de un tamaño particular sea seleccionada para sufrir fractura o reducción de tamaño. Esta probabilidad está en función de características del material, el tamaño de las partículas y las condiciones operativas del proceso. Por otro lado, la función de selección describe la probabilidad de que las partículas seleccionadas continúen a la siguiente etapa del proceso o sean separadas como producto final, dependiendo de su tamaño. Ambas funciones son fundamentales para modelar y predecir con precisión el comportamiento del material en operaciones de trituración y molienda.

Varios autores han intentado modelar la fragmentación, selección y clasificación de partículas. En particular, Broadbent y Callcott (1955) propusieron un modelo para describir la conminución de partículas, introduciendo una función especial conocida como la función de ruptura. Esta función calcula la proporción de partículas que se reducen a un tamaño menor a partir de un tamaño mayor durante el proceso de trituración. Matemáticamente, la función de ruptura de Broadbent y Callcott se expresa como:

$$B(x, y) = \frac{1 - \exp\left\{\frac{-x}{y}\right\}}{1 - \exp\{-1\}} \quad (2.5)$$

En la Ecuación 2.5, y representa el tamaño original de la partícula, a menudo referido como el tamaño "padre", mientras que x es un tamaño más pequeño, denominado tamaño "hijo", que resulta de la partición de la partícula y . La función $B(x, y)$ entonces proporciona la fracción de las partículas de tamaño y que se rompen hasta alcanzar un tamaño menor o igual a x .

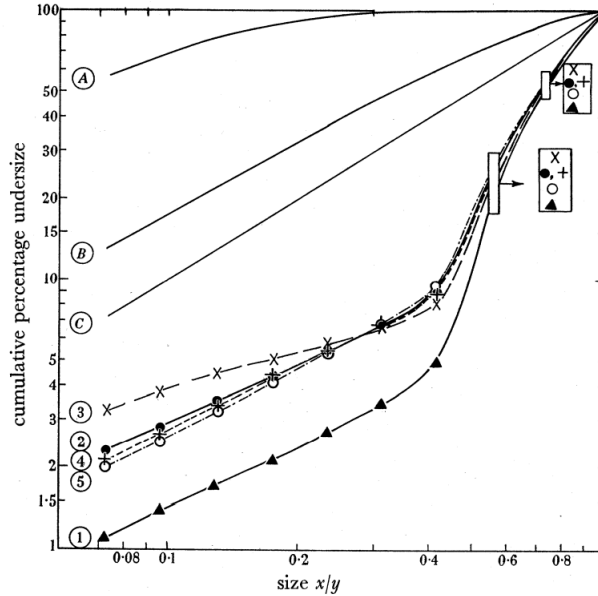


FIGURE 3. Comparison of three breakage functions. Products from breakage of single particles: A, $B(x/y) = 1 - \exp(-10x/y)$; B, $B(x/y) = [1 - \exp(-x/y)]/[1 - \exp(-1)]$; C, $B(x/y) = x/y$. 1, feed to cone mill; 2, product from cone mill; 3, product calculated from A, $\pi = 3.3\%$; 4, product calculated from B, $\pi = 6.1\%$; 5, product calculated from C, $\pi = 7.6\%$.

Figura 2.1: Varias funciones ruptura para un tamaño específico (Extracto, Broadbent y Callcott, 1955)

En la Figura 2.1, se puede apreciar que las funciones de ruptura propuestas por Broadbent y Callcott muestran un comportamiento similar a los datos observados en la realidad. Esto indica que la función de ruptura es efectiva para simular los procesos de fracturamiento. Sin embargo, es importante destacar que este modelo no toma en cuenta la variabilidad mineralógica y las diferencias en las propiedades mecánicas que caracterizan a las rocas en procesos reales de conminución.

Por otro lado, Austin, L. (2002) postula una función de ruptura que predice los mecanismos de ruptura por impacto e incluso para los mecanismos de compresión debido a que la función ruptura es doble pendiente lo que permite que pueda predecir ambos eventos. La expresión matemática es:

$$B(x, y) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)^\gamma + (1 - \Phi)\left(\frac{x}{y}\right)^\beta \quad (2.6)$$

En la Ecuación 2.6, los parámetros a determinar del modelo son Φ , γ y β . La función de ruptura de Austin (2002) es destacada por su aplicabilidad en una variedad de contextos

industriales, donde los mecanismos de ruptura pueden variar significativamente. La capacidad de ajustar los parámetros del modelo según los datos experimentales permite que esta función se adapte a diferentes materiales y condiciones operativas. De igual manera, la probabilidad de que una partícula se quiebre se encuentra caracterizado por una la función selección. La función de selección define la fracción de partículas de un tamaño específico que se seleccionan para romperse o cambiar de tamaño en un intervalo de tiempo dado. Herbst (1980) propone que el cambio de quiebre de tamaño i es escalable por la potencia del molino:

$$k_i = S_i^E \frac{P}{M} \quad (2.7)$$

Con k_i la tasa específica de fractura para el tamaño i , S_i^E la tasa de energía específica de fractura, P la potencia neta del molino y M la masa de la carga. De igual manera, Herbst (1980) postula que la variación de la tasa de ruptura de la energía específica se relaciona con el tamaño de la siguiente manera:

$$\ln\left(\frac{S_i^E}{S_1^E}\right) = \zeta_1 \ln\left(\frac{d_i}{d_1}\right) + \zeta_2 \ln\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^2 \quad (2.8)$$

Con S_1^E , ζ_1 , ζ_2 parámetros del modelo. Otra característica de los modelos de balance poblacional es la función clasificación. Esta función determina la probabilidad de que las partículas de diferentes tamaños sean seleccionadas para seguir al siguiente paso en el proceso, ya sea para una mayor reducción de tamaño o para ser clasificadas como producto final. La precisión en la definición de la función de clasificación permite una mejor predicción de la distribución de tamaños de las partículas resultantes y optimiza la eficiencia del proceso. Comprender y modelar adecuadamente esta función es esencial para mejorar el rendimiento y la eficacia de las operaciones de chancado y molienda. Según King, R.P (2003) la función clasificación más utilizada es:

$$c_i = BPF + (1 - BPF) \cdot (1 - \exp\left(-\ln(0.5) \cdot \left(\frac{d_i}{d_{50}}\right)^\alpha\right)) \quad (2.9)$$

Con d_{50} como el diámetro al 50 por ciento pasante, BPF una constante que es interpretada como el bypass de finos y α la pendiente de la curva. Con las funciones fenomenológicas presentadas se desarrollan modelos matriciales de energía y ruptura al integrar diversas herramientas matemáticas. Estos modelos son fundamentales en el campo del procesamiento de minerales y la ingeniería de materiales, especialmente para implementar modelos de operaciones unitarias de fragmentación, como el chancado y la molienda. Permiten a los ingenieros predecir y cuantificar el comportamiento de distintos materiales bajo condiciones específicas de procesamiento, lo cual es crucial para la optimización de estas operaciones unitarias. Al comprender cómo la energía aplicada se traduce en la fractura de las partículas y cómo se distribuyen los tamaños de las partículas resultantes, es posible ajustar eficientemente el diseño de los equipos y los parámetros operativos. Esto no solo mejora la eficiencia y efectividad de los procesos de fragmentación, sino que también puede conducir a ahorros significativos en energía y costos operativos.

2.1.2.1. Modelos Matriciales de Operaciones Unitarias de Chancado

De los modelos más utilizados para los procesos de chancado es el modelo de Whiten (1972). Este modelo fue desarrollado para ofrecer una mejor comprensión de cómo los mine-

rales se descomponen y se reducen a tamaños más pequeños bajo fuerzas mecánicas en las operaciones de chancado. La relevancia del modelo de Whiten radica en su capacidad para incorporar varios aspectos críticos del proceso de chancado, que van desde las características mecánicas y físicas de los minerales hasta las condiciones operativas de los equipos de chancado. En su estudio de 1972, propone un modelo detallado para el balance de masa en procesos de trituración de minerales. Este modelo se visualiza en la siguiente figura:

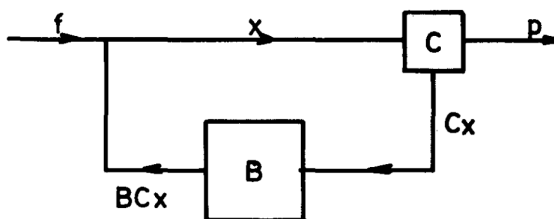


Fig. 2—Symbolic representation of crusher model

Figura 2.2: Representación del modelo de Whiten (Extracto, Whiten, J., 1972)

De acuerdo con la Figura 2.2, Whiten sugiere que la distribución del tamaño de partícula del producto, p , puede modelarse mediante la siguiente relación matemática:

$$p = (I - C) \cdot (I - B \times C)^{-1} \cdot f \quad (2.10)$$

En la Ecuación 2.10, I representa la matriz identidad, que sirve como referencia para las transformaciones lineales. La matriz C simboliza la matriz de clasificación, que describe cómo las partículas son categorizadas en el proceso. La matriz B es la matriz de ruptura, que refleja el efecto del proceso de trituración en el tamaño de las partículas. Finalmente, f denota la granulometría de la alimentación, es decir, la distribución inicial del tamaño de las partículas que entran al proceso. Este modelo de Whitten proporciona un marco robusto para comprender y predecir los cambios en la distribución del tamaño de las partículas como resultado de las operaciones de chancado.

Sin embargo, una limitación importante de este modelo es que no incorpora explícitamente parámetros relacionados con la variabilidad mineralógica. La variabilidad mineralógica implica diferencias en las propiedades físicas de los minerales, como la dureza y la abrasividad, las cuales pueden afectar significativamente el comportamiento de los minerales durante la fragmentación.

Después de explorar los modelos de probabilidad, que proporcionan una comprensión detallada de la distribución del tamaño de partículas resultante de los procesos de conminución, es esencial abordar otro aspecto crítico: el consumo de energía. La eficiencia energética, medida a través de modelos de potencia, es un factor clave en la optimización de estos procesos. Estos modelos de potencia no solo complementan nuestra comprensión de la granulometría, sino que también nos permiten evaluar y mejorar la eficiencia operativa. Debido a ello, Morrell, S. (1996) propone un modelo para calcular la potencia consumida por un proceso de conminución de la siguiente manera:

$$P_{crusher} = TPH \times M_{IC} \times K \times (P_{80}^{f(P_{80})} - F_{80}^{f(F_{80})}) \quad (2.11)$$

$$f(P_x) = -0,295 + \frac{P_x}{1.000.000} \quad (2.12)$$

Con TPH las toneladas por hora a tratar, M_{IC} el índice de chancado de Morrell y K parámetro que depende del circuito. Similar a la ecuación de Bond 2.3, en este modelo también es necesario determinar experimentalmente un parámetro crítico, en este caso, el índice de chancado de Morrell. Esto implica que la implementación del modelo puede verse ralentizada debido a la necesidad de realizar pruebas de laboratorio asociadas para obtener este parámetro y un error asociado al muestreo del material. Estas pruebas son fundamentales para asegurar la precisión y la aplicabilidad del modelo en contextos de conminución.

El enfoque de balance poblacional puede ser aplicada a la etapa de molienda; sin embargo, también existen modelos específicos diseñados para optimizar esta etapa. Estos modelos de operaciones unitarias en molienda abordan el proceso de manera integral, enfocándose en la interacción entre las distintas etapas y su impacto en el rendimiento global. Considerando variables clave como la velocidad de rotación y el tamaño de las bolas de molienda, estos modelos son esenciales para mejorar la eficiencia y la calidad del producto final en la molienda.

2.1.2.2. Modelos Matriciales de Operaciones Unitarias de Molienda

Las operaciones de molienda son relevantes en los procesos de conminución, ya que, permiten a las operaciones mineras entregar un producto desde la escala milimétrica hasta micrométrica y generalmente utilizan agua en esta parte del proceso. Debido a ello, existen modelos para caracterizar las operaciones de molienda y es así, lo que propone Sepulveda, J. et al. (1983) con un modelo simplificado para la molienda SAG:

$$F_i^{IN} - F_i^{OUT} + S_i^E \bar{E}(1 - F_i^C) = 0 \quad (2.13)$$

Con F_i^{IN} y F_i^{OUT} la granulometría de entrada y salida del molino, F_i^C la granulometría de la carga contenida en el molino, S_i^E la función de selección aparente y \bar{E} el consumo específico de energía.

Es importante destacar que la función de selección, un componente clave en este modelo, requiere una calibración precisa a través de ensayos de escalamiento del laboratorio en pruebas piloto (Sepulveda, J. , 1986). Esta necesidad de calibración implica una extensión en los tiempos de aplicación del modelo, lo que puede conllevar a desafíos adicionales como errores en el muestreo y un uso extensivo de material. Estos factores son críticos, ya que cualquier inexactitud en la calibración puede afectar significativamente la precisión y la eficacia del modelo en la predicción del comportamiento de la molienda en condiciones operativas reales.

Por otro lado, Rowland y Kjos (1978) proponen una metodología desarrollada para predecir el consumo de energía y la eficiencia de la molienda en molinos de bolas a partir de la metodología propuesta por Bond en 1952. Este modelo se basa en la comprensión de que la eficiencia de la molienda está influenciada por varios factores, incluyendo las características del material a moler, el diseño y las condiciones operativas del molino. El modelo puede expresarse formalmente a través de varias ecuaciones matemáticas. Una de las ecuaciones clave

es la que describe el consumo específico de energía en términos de la carga del molino y las propiedades del material. Esta ecuación se puede expresar como:

$$E = k \cdot (d^{0,5} \cdot n \cdot D^{2,5}) \quad (2.14)$$

Con E el consumo específico de energía, k una constante que depende del material, d el tamaño de partículas del material antes de entrar al proceso de molienda, n las RPM del molino y D el diámetro del molino. El modelo de Rowland y Kjos proporciona una base para entender y predecir el comportamiento de los molinos de bolas, pero es importante recordar que los resultados reales pueden variar debido a una multitud de factores operativos y de diseño. Además, este modelo se basa en datos empíricos y observaciones, por lo que su aplicabilidad puede depender del contexto específico y de las condiciones del material y del molino.

Debido a ello, Narayan, S. (1987) introduce inicialmente la prueba del péndulo y perfeccionó la técnica mediante el desarrollo del Drop Weight Test. Según Mwanga, A. (2014) , el Drop Weight Test, un peso se eleva a una altura específica y luego se deja caer sobre una muestra de mineral que está colocada en una superficie rígida, con el fin de medir la granulometría resultante. Por lo tanto, se puede caracterizar un proceso de molienda SAG con parámetros como el $A \times b$ y el t_{10} utilizando el Drop Weight Test. El parámetro $A \times b$ es la resistencia del material a la ruptura por impacto y es intrínseca de cada material. Mientras que, el t_{10} es el porcentaje de partículas pasantes del producto que menores al 10% pasante de alimentación. La relación entre los parámetros y el Drop Weight Test es de la siguiente manera:

$$t_{10} = A \cdot (1 - \exp\{-b \cdot E_{cs}\}) \quad (2.15)$$

Con E_{cs} la energía específica de ruptura como respuesta al mecanismo de impacto. El Drop Weight Test, es muy utilizado por la industria para predecir el comportamiento de los procesos de Chancado y molienda SAG utilizando la herramienta JKSimMet y el modelo de Morrell (2006).

A pesar de ser los métodos convencionales de caracterización, han sido cuestionados por distintos autores, ya que, los modelos convencionales no predicen con exactitud la operación en faena. Este fenómeno se refleja en la ineficacia del proceso de conminución, tal como lo plantean Zhang et al. (2022), donde se estima que entre el 75 y el 90% de la energía se disipa ineficientemente como ondas de calor. Como respuesta, han surgido modelos más complejos que dividen el proceso en etapas para mejorar su exactitud y optimizar la eficiencia energética.

2.1.3. Modelos Iterativos

Los modelos iterativos son herramientas fundamentales en el análisis y optimización de procesos de conminución, ya que permiten representar de manera precisa la fragmentación y el chancado de materiales en múltiples etapas. Estos modelos consideran la repetición de eventos de ruptura, emulando el comportamiento de las partículas a través de la cámara de chancado de modo de predecir la distribución de tamaños resultante. En particular, Evertsson, M. (2000) propone un modelo que considera que el proceso de chancado se produce en N etapas ($N > 10$) consecutivas de ruptura por compresión interpartícula y compresión de

partícula aislada. En particular, postula que la fragmentación ocurre de la siguiente manera:

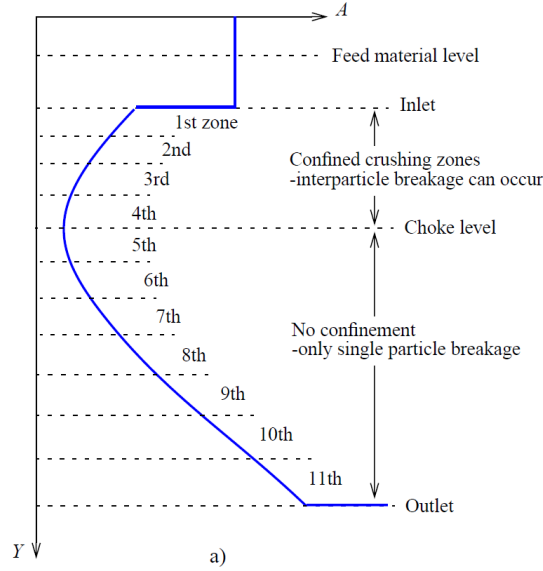


Figura 2.3: Aspecto general del área de la sección transversal horizontal de un Chancado (Extracto, Evertsson, M., 2000)

Donde de la Figura 2.3, se observa el proceso iterativo de fragmentación. Por otro lado, el circuito de chancado postulado por Evertsson, M. (2000) es:

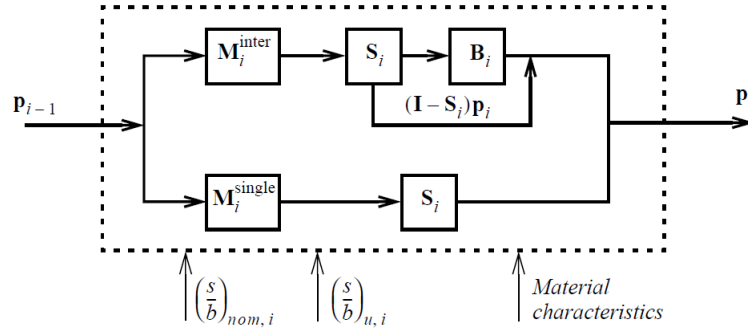


Figura 2.4: Evento de chancado según el modelo de Evertsson (Extracto, Evertsson, M., 2000)

Debido a un balance de masa de la Figura 2.4, Evertsson, M. (2000) postula el siguiente modelo:

$$p_i = [[B_i^{inter} S_i + (I - S_i)] M_i^{inter} + B_i^{single} M_i^{single}] p_{i-1} \quad (2.16)$$

$$M_i^{inter} + M_i^{single} = 1 \quad (2.17)$$

En las ecuaciones, p_i representa la proporción de partículas en la i -ésima etapa de chancado, con B_i^{inter} y B_i^{single} denotando los coeficientes de ruptura interpartícula y de partícula aislada, respectivamente. S_i indica la proporción de la superficie de ruptura que es interpartícula,

mientras que M_i^{inter} y M_i^{single} representan las masas relativas de las partículas involucradas en cada tipo de ruptura. Este modelo ofrece una visión detallada y matemáticamente rigurosa del proceso de chancado, contribuyendo significativamente a la comprensión y optimización de esta fase en el procesamiento de minerales.

Por otro lado, varios autores han propuesto funciones de selección empíricas específicas para distintos procesos de conminución. Estas funciones buscan modelar con precisión las probabilidades de selección de partículas de diferentes tamaños durante el proceso de chancado. En particular, Saeidi et al. (2017) proponen una función de selección empírica para el caso de un Drop Weight Test (DWT), un proceso donde predomina el impacto:

$$S_i^n = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{d_i}{2^{\frac{n-1}{4}} k d_1}\right)^\delta\right\} \quad (2.18)$$

Con n el evento de impacto y k, δ parámetros del modelo. Tras analizar el comportamiento iterativo de los materiales durante el chancado, resulta fundamental explorar cómo estos modelos interactúan con la variabilidad mineralógica. A continuación, se aborda la caracterización de los materiales y su relación con la variabilidad mineralógica, proporcionando una visión más amplia de los factores que influyen en la eficiencia del proceso de conminución.

2.1.4. Caracterización y su Relación con la Variabilidad Mineralógica

La caracterización de minerales en la conminución es un paso crucial en la minería para maximizar la eficiencia operativa y reducir los costos energéticos asociados a la conminución. El objetivo principal de esta etapa es determinar la dureza del mineral y su respuesta frente a los distintos mecanismos de fractura, lo que permite diseñar y simular los circuitos de chancado y molienda.

De los ensayos más completos para la caracterización en la conminución es el JK Drop-Weight Test. Según Verret, F.O. et al. (2011), la prueba mide la resistencia a la ruptura por impacto de partículas gruesas en el rango de 63 a 13,2 mm (cinco fracciones). Luego, evalúa la resistencia a la ruptura por abrasión de partículas de 53 por 37,5 mm. Finalmente, se mide la densidad de 30 partículas para evaluar la densidad promedio del mineral y su dispersión. La prueba genera la función de ruptura del mineral bajo una gama de condiciones de ruptura por impacto y abrasión, que se reducen a tres parámetros: A , b (impacto) y t_a (abrasión).

Uno de los métodos más utilizados es el SMC Test (SAG Mill Comminution), que de acuerdo con Morrel, S. (2004) se centra en evaluar la resistencia del material frente a un evento de impacto de molienda semiautógena (SAG). Este test entrega los parámetros A , b y t_a que se utilizan en el modelo de molienda SAG desarrollado por Morrell y Morrison. Además entrega una serie de parámetros (M_{ia} , M_{ic} , M_{ih}) que permiten estimar el consumo específico de energía en las etapas de chancado, molienda gruesa y la densidad aparente. Según Verret, F.O. et al. (2011), es una prueba de impacto abreviada, que puede realizarse a bajo costo en rocas pequeñas. La prueba se lleva a cabo de manera similar al procedimiento estándar del JK Drop-Weight Test, excepto que se prueba una única fracción de tamaño. La prueba puede realizarse en varios tamaños de roca, siendo el tamaño superior mínimo aceptable de

16 mm. Este test es esencial en el diseño de plantas de procesamiento de minerales, ya que optimiza el consumo de energía y el rendimiento del circuito de conminución.

Por otro lado, el Bond Work Index (BWI) creado por Bond, F.C. (1961) es un test clásico que determina la cantidad de energía necesaria para reducir un mineral desde un tamaño de partícula inicial a un tamaño final de 100 micrones utilizando un molino de bolas. Este índice se utiliza para calcular el consumo de energía y estimar la potencia requerida para las operaciones de molienda en seco y en húmedo. El BWI proporciona una medida de la resistencia a la molienda, donde un valor mayor indica que el material es más difícil de moler. Este test sigue siendo uno de los métodos estándar más empleados en la industria, ya que ofrece un enfoque simplificado pero robusto para caracterizar la dureza de los materiales.

Ambos tests, el SMC y el BWI, son herramientas complementarias que permiten abordar la mineralógica presente en los depósitos. Estos tests permiten predecir el comportamiento de los minerales en un circuito de conminución, optimizando la eficiencia energética y diseñando el proceso apropiado para el proceso a las distintas características del material, lo que resulta en una mayor consistencia y recuperación de minerales valiosos a lo largo de las operaciones.

La composición mineralógica de un yacimiento puede experimentar variaciones considerables, incluso dentro de una misma veta o depósito. En otras palabras, según la afirmación de Betzhold, J. y Roth, C. (2010), los depósitos minerales se componen de diversas litologías, dominios de alteración, o conjuntos mineralógicos, cada uno con propiedades metalúrgicas distintas. Esta diversidad mineralógica implica que, incluso en un área geográfica relativamente pequeña, pueden coexistir diferentes tipos de minerales con características únicas, lo que añade complejidad a los procesos de extracción y procesamiento de minerales. La comprensión detallada de esta variabilidad se vuelve crucial para adaptar estrategias eficaces de conminución y procesamiento que maximicen la recuperación de metales valiosos de manera eficiente.

Esta variabilidad mineralógica, con su potencial impacto en la eficiencia y viabilidad económica de las operaciones mineras debido a las notables variaciones en dureza, fragilidad y comportamiento de los diferentes materiales alimentados a los procesos de conminución, también se manifiesta en la etapa de chancado. Como sugieren las investigaciones de Selepe y Amandi-Echelu (2023), la variabilidad del mineral de interés tiene una repercusión sustancial en el consumo de energía durante la etapa de chancado como se ilustra en la Figura 2.5.

Estas consideraciones sobre la variabilidad mineralógica refuerzan la necesidad de comprender y gestionar este fenómeno para optimizar tanto la eficiencia del chancado como la evaluación económica global de las operaciones mineras. Del mismo modo, Jackson, J. et al. (2018) destacan la importancia de modelos que predican el comportamiento de los minerales durante la vida útil de la mina (LOM) basados en la variabilidad en la alimentación del mineral a la planta, subrayando su capacidad para prever de manera más precisa y detallada las propiedades clave de la roca y sus características asociadas. Este enfoque, al permitir una previsión más exacta de la variabilidad espacial y temporal, repercute directamente en la evaluación económica de las operaciones mineras, consolidando así la conexión entre variabilidad mineralógica, eficiencia operativa y sostenibilidad económica en la industria minera.

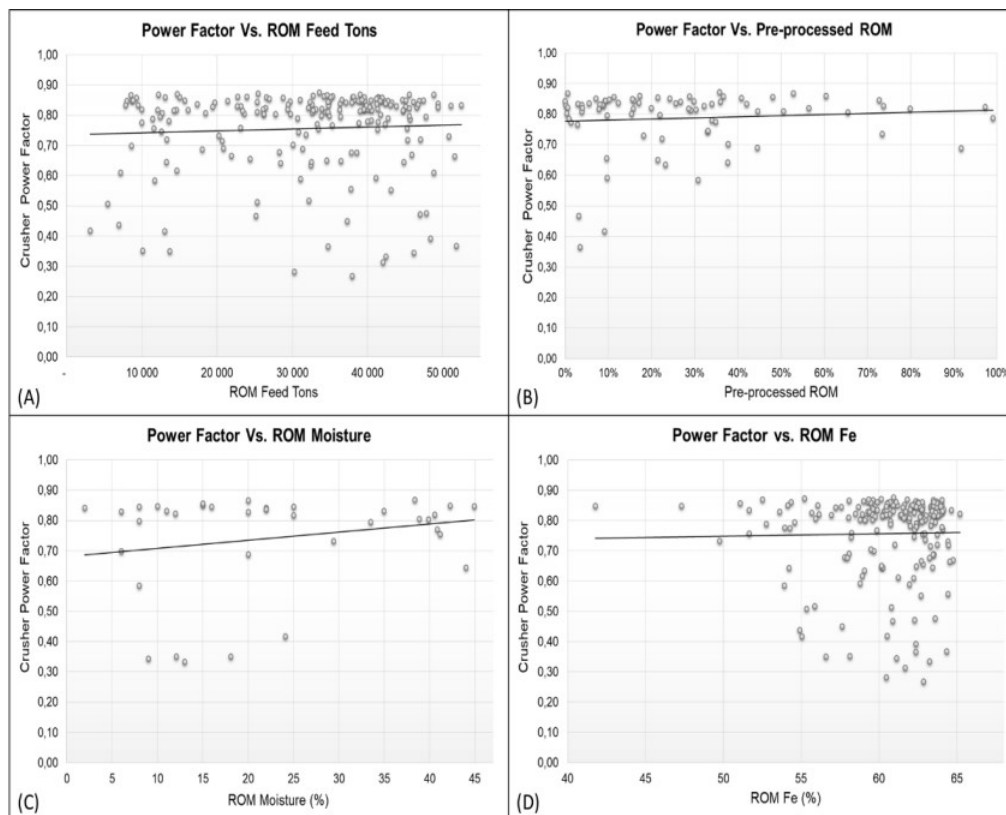


Figura 2.5: Efecto de la granulometría Run-of-Mine (ROM) en Función de la Potencia del Chancador (Extracto, Selepe y Amandi-Echelu, 2023)

La Figura 2.5 muestra una alta variabilidad en el factor de potencia del chancador al variar el mineral proveniente de la mina. Se analizan el efecto de la humedad, el contenido de hierro y las toneladas por hora en la potencia consumida por el chancador, entregando una alta dispersión. La variabilidad mineralógica se traduce en implicancias importantes en los procesos de fractura, como sostiene Powell et al. (2007), quienes advierten que, en el desarrollo de pruebas más sofisticadas, no se debe perder de vista la necesidad de realizar pruebas sencillas y pruebas de indicadores de variabilidad mineralógica. Este enfoque multifacético es esencial para relacionar la complejidad de la composición mineralógica con los procesos de conminución.

Según Faramarzi et al. (2018), es crucial reconocer que las propiedades y características geológicas únicas de los minerales introducen una variación intrínseca que inevitablemente impacta el desempeño de los procesos de reducción de tamaño. Esta variabilidad se manifiesta en diferentes escalas y sus implicaciones son diversificadas. En esencia, la composición geológica singular de cada mineral genera diferencias notables en su comportamiento a lo largo de las distintas fases del procesamiento del mineral. Esta complejidad inherente subraya la importancia de comprender a fondo la variación en las propiedades minerales, ya que esta diversidad no solo incide en el rendimiento general del proceso, sino que también influye en la eficiencia y la eficacia de las operaciones mineras. Abordar y gestionar esta variación se vuelve esencial para optimizar los procesos de conminución y asegurar un rendimiento óptimo en la extracción y procesamiento de minerales. Esto constituye la base de la disciplina conocida como geometalurgia.

Enfoques holísticos para la comprensión del proceso de fragmentación y optimización minera han ganado terreno en la industria, destacando conceptos como Mine to Mill y la geometalurgia. El enfoque Mine to Mill (Hunt et al., 2017) se centra en la mejora de la fragmentación y la optimización de los procesos mineros, abordando de manera integral la relación entre las operaciones de mina y la planta de procesamiento. Por su parte, la geometalurgia también ha cobrado relevancia, ya que combina información geológica y metalúrgica en modelos tridimensionales o incluso en cuatro dimensiones, cuando se incorpora una variable temporal (Lamberg, 2011), permitiendo predecir el rendimiento de las plantas de procesamiento al integrar la variabilidad mineralógica.

Según Bueno et al. (2015), los enfoques no holísticos no consideran la inherente variabilidad del yacimiento, a diferencia de la geometalurgia, por lo tanto, al utilizar los enfoques tradicionales pueden conducir a resultados que no son representativos de la operación. Bueno et al. (2015) realizan un benchmark con la variable DWI (resistencia al impacto en kWh/m^3) en varios depósitos alrededor del mundo:

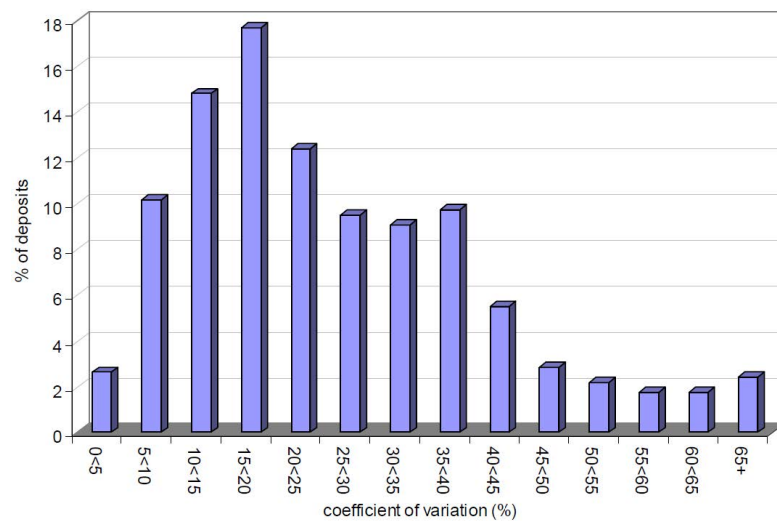


Figura 2.6: Histograma de los coeficientes de variación de los valores de DWI (basado en valores de 650 depósitos) (Extracto, Bueno et al., 2015)

De la Figura 2.6, se observa una variabilidad abundante en la energía requerida para fragmentar un mineral proveniente de distintos depósitos. Este amplio espectro de variación en los requisitos energéticos subraya la diversidad intrínseca en las propiedades de los minerales y sus respuestas a los procesos de conminución. La variabilidad en la energía necesaria para la fragmentación evidencia que cada depósito mineral posee características únicas que afectan directamente a la eficiencia de los procesos de conminución. Comprender y cuantificar esta variabilidad se vuelve esencial para adaptar estratégicamente las operaciones y maximizar la eficiencia en la extracción y procesamiento de minerales, contribuyendo así a una gestión más eficaz y sostenible de los recursos minerales. Por lo tanto, caracterizar la variabilidad geológica es relevante para comprender los procesos de fractura de roca, mediante la geometalurgia es posible caracterizar la variabilidad de la operación minera.

De igual manera, hay enfoques con una visión más física de los procesos de conminución

y el consumo de energía. Es así lo que postula Radziszewski (2013) utilizando las leyes de la termodinámica, proponiendo que se genera mucho calor en la conminución capturado en la suspensión de mineral en los chancadores. Mientras que Waples (2004), encuentra que la capacidad calorífica para los distintos tipos de minerales es variable. Resultando en que al existir distinta mineralogía hay más variabilidad en el calor generado en el chancador traducido en pérdida de energía en el sistema.

Debido a los cuestionamientos hacia las metodologías convencionales, han surgido modelos fenomenológicos que adoptan un enfoque más fundamental. En particular, el Modelo de Quiebre de Partículas Singulares se basa en el estudio individual de cada partícula y su relación con las propiedades primarias de ruptura.

2.2. Modelos Fenomenológicos de Quiebre de Partículas Singulares

Los modelos fenomenológicos en el contexto de la conminución buscan entender y predecir el comportamiento de los procesos de reducción de tamaño de las partículas minerales mediante la observación y descripción de los fenómenos físicos involucrados. Estos modelos se centran en los mecanismos fundamentales que gobiernan la ruptura y fractura de las partículas, considerando variables como la energía aplicada, las propiedades del material y las condiciones operativas. A diferencia de los enfoques empíricos, que se basan en datos históricos y correlaciones, los modelos fenomenológicos ofrecen una comprensión más profunda y generalizable de los procesos de conminución. Debido a ello, surgen los denominados modelos de partículas singulares.

Los modelos de partículas en conminución permiten comprender el comportamiento de las partículas durante el proceso de reducción de tamaño. Estos modelos tienen una amplia variedad de aplicaciones en la industria minera, desde modelar procesos de fractura aislados hasta analizar la operación de un molino SAG.

El enfoque propuesto por Tavares (2022) a través de un modelo probabilístico ofrece una perspectiva más avanzada para predecir las rupturas ocasionadas por impactos repetidos. Este modelo, fundamentado en principios de la mecánica de daño, va más allá de las aproximaciones convencionales al considerar la variabilidad inherente en los procesos de conminución. La revisión crítica realizada destaca la capacidad del modelo para ofrecer predicciones precisas y detalladas, proporcionando así una herramienta para comprender y gestionar eficazmente los impactos repetidos en los materiales durante los procesos de conminución.

También existe en la literatura trabajos de comparación de varios modelos de partículas y cual predice mejor ciertos aspectos. Así lo hacen Jimenez-Herrera et al. (2018) comparando el bonded particle model (BPM), fast breakage model (FBM) y particle replacement method (PRM). En el cual encuentran que el modelo BPM es capaz de describir varios aspectos de la ruptura de partículas pero menor eficiencia.

La aplicación de los modelos de partículas ha permitido a los científicos comprender los procesos de fractura en un molino SAG. Cleary (2009) realiza una simulación a escala de

partículas utilizando el Discrete Element Method (DEM). En esta simulación, se modela un sistema de partículas bidimensional compuesto por partículas elipsoidales con diferentes relaciones de aspecto. Definiendo las propiedades de las partículas, como su tamaño, forma, densidad y coeficiente de fricción. Sujeto a condiciones de borde físicas tales como la inclinación del canal y la velocidad del flujo de partículas en la entrada del canal.

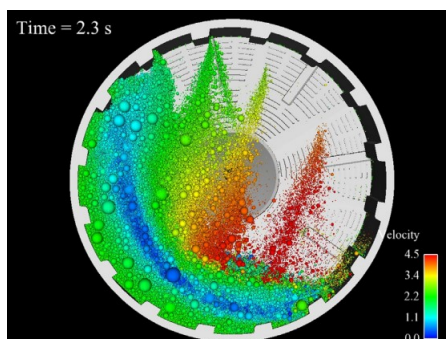


Figura 2.7: Predicción del comportamiento de carga de partículas y bolas en un molino piloto Hardinge usando DEM con partículas esféricas que se colorean según la velocidad, siendo el rojo la alta velocidad y azul siendo baja velocidad (Extracto, Cleary, 2009)

La representación visual proporcionada por la Figura 2.7 ofrece una visión detallada del comportamiento de las partículas en un molino, destacando la formación de perfiles de velocidad distintos durante el proceso de conminución. Además, la simulación de procesos de conminución mediante modelos de partículas ha demostrado ser una herramienta valiosa en la investigación y validación de equipos específicos. Por ejemplo, en el estudio de Rodriguez et al. (2022), se implementó un modelo de partículas esféricas de Método de Elementos Discretos (DEM) para simular la operación de un High Pressure Grinding Rolls (HPGR), y se validó con pruebas piloto. Los resultados indican que el modelo no solo predice con precisión la potencia utilizada en el HPGR, sino también su rendimiento, como se muestra en la Figura 2.8. Esta concordancia entre la simulación y los datos experimentales respalda la utilidad y la fiabilidad de los modelos de partículas en la predicción y optimización de procesos de conminución a escala piloto.

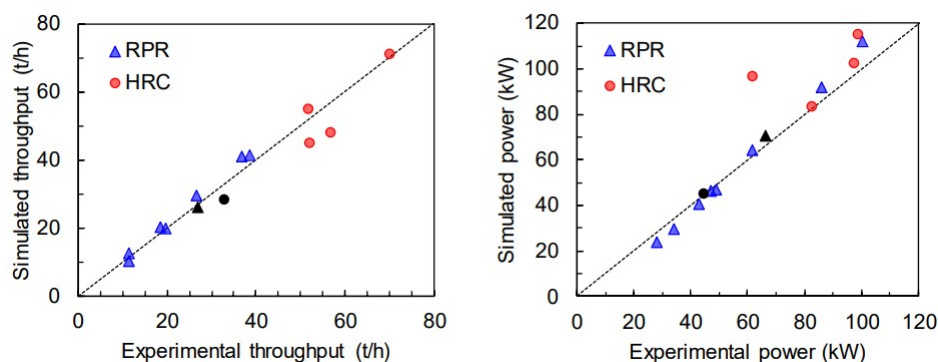


Figura 2.8: Comparación de valores de potencia y rendimiento simulados y experimentales para los HPGR a escala piloto (RPR y HRC) (Extracto, Rodriguez et al., 2022)

El método de elementos discretos, enfocado en la interacción entre partículas, emerge como una herramienta poderosa y precisa para prever la potencia de los molinos en procesos de conminución. Es así como Oliveira et al. (2020) han demostrado que este enfoque de modelado no solo es capaz de ofrecer predicciones confiables, sino que también exhibe un nivel de exactitud confiable, con desviaciones menores al 3,5 % entre las predicciones del método y las mediciones reales de la potencia del molino. Estos resultados destacan la utilidad y la robustez de los modelos de elementos discretos al proporcionar una comprensión detallada y cuantitativa de los fenómenos de conminución, permitiendo así mejoras sustanciales en la eficiencia y el rendimiento de los procesos de molienda en la industria minera.

Los modelos de partículas en conminución son herramientas que permiten a científicos e ingenieros simular y comprender el comportamiento de las partículas durante el proceso de reducción de tamaño. Estos modelos encuentran aplicaciones variadas en la industria minera, desde la predicción de potencia en molinos hasta la simulación de operaciones de equipos como los HPGR .

La precisión y efectividad de los modelos de partículas en conminución, como se ha destacado a través de diversos estudios, subrayan la importancia de la calidad y especificidad de los datos de entrada. Estos datos no solo definen los parámetros iniciales para la simulación, sino que también influyen significativamente en la exactitud y relevancia de las predicciones obtenidas. Por lo tanto, al avanzar hacia la discusión sobre los datos de entrada para los modelos de partícula individual, es esencial comprender cómo la selección y el tratamiento de estos datos pueden optimizar el rendimiento del modelo y mejorar la interpretación de los resultados de simulación, garantizando así la fiabilidad y la aplicabilidad de estos modelos en la práctica ingenieril y científica.

El Single Particle Breakage Model incorpora variables de caracterización que lo diferencian de los enfoques más tradicionales. Una de estas variables es la energía específica mínima de fractura, que se define como la cantidad de energía absorbida por una partícula justo antes de fracturarse. En este contexto, Lois-Morales et al. (2018) investigaron la energía específica de fractura (E_{cs}), examinando su interacción con diferentes parámetros geomecánicos:

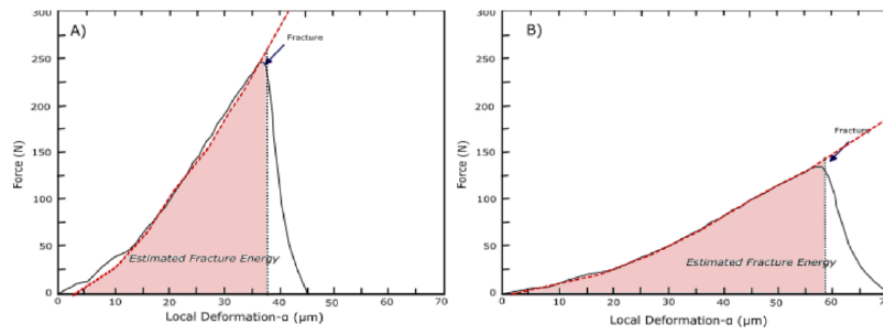


Figura 2.9: Energía específica de Fractura en función de la curva de esfuerzo-deformación (Extracto, Lois-Morales et al., 2018)

La Figura 2.9 establece una correlación entre la energía específica de fractura y el área bajo la curva esfuerzo-deformación hasta el punto de la ruptura. Dicha área está demarcada

por una línea roja. Por lo tanto, Tavares y King. (1998) plantean la siguiente relación :

$$E_{cs} = \frac{1}{m_p} \int_0^{\epsilon_{rupture}} F(\epsilon) \cdot d\epsilon \quad (2.19)$$

Siendo m_p la masa de la partícula, $\epsilon_{rupture}$ la deformación en el momento de la fractura, F es la carga y $d\epsilon$ el diferencial de deformación.

La energía específica de fractura puede conceptualizarse como un aspecto derivado de la probabilidad de fractura. Esta última se caracteriza por la relación existente entre la cantidad de energía de estrés que se aplica y la fracción de partículas que, como consecuencia, experimentan una fractura. Los resultados de los ensayos que miden la energía específica de fractura suelen exhibir una considerable dispersión, como señalan Tavares y King (1998). Por ello, es esencial llevar a cabo un análisis meticuloso. Los citados autores propusieron un procedimiento para examinar esta variabilidad: clasificar los datos obtenidos en una secuencia ascendente y asignarles un orden numérico. Bajo este esquema, la función de distribución acumulativa estimada para la energía específica de fractura de las partículas es de la siguiente manera:

$$P(E_{cs}^k) = \frac{k - 0.5}{N} \quad (2.20)$$

Con k el factor de orden ascendente de los resultados y N el número de resultados obtenidos. La ecuación 2.20 subraya la complejidad y la variabilidad inherente a los procesos de fractura.

La energía específica de fractura, similar a la resistencia a la compresión, se reconoce como un indicador clave del desempeño mecánico de un material. Por ello, es crucial entender cómo esta variable se asocia con los parámetros microtexturales. Dentro de estos parámetros, aspectos como las condiciones de estrés, la forma y la composición de las partículas son relevantes. Lois-Morales et al. (2020) realizaron un estudio sobre la forma de las partículas, encontrando que la presencia de partículas cilíndricas frente a irregulares afecta significativamente la variabilidad en la energía específica de fractura para un mismo material, como se muestra en la siguiente imagen:

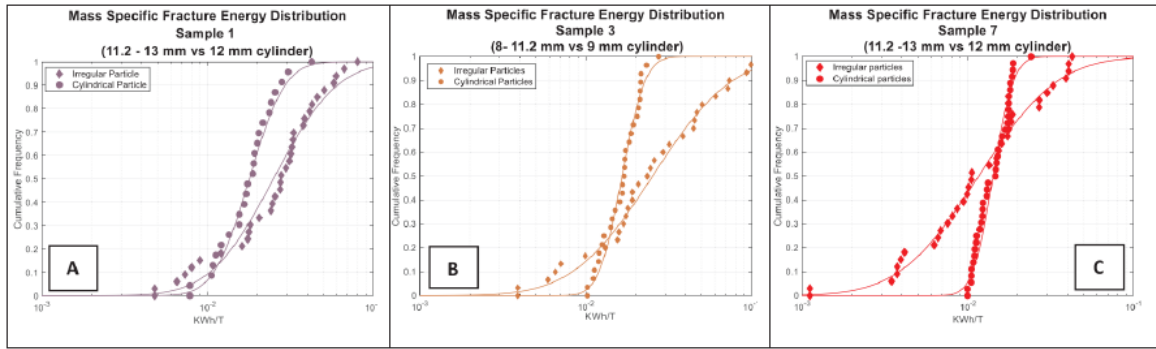


Figura 2.10: Distribución de la energía específica de fractura para: (a) Muestras irregulares (11.2-13mm) y cilíndricas (12mm) de un basalto de grano fino (0.3mm), (b) Muestras irregulares (8-11.2mm) y cilíndricas (9mm) de un Cuarzo-Monzonita (alteración filica) de grano mediano (1.4mm) y (c) Muestras irregulares (11.2-13mm) y cilíndricas (12mm) de un Cuarzo-Monzonita (Alteración potásica) de grano grueso (1.6mm) (Extracto, Lois et al., 2020)

El análisis detallado del Single Particle Breakage Model y la energía específica de fractura, tal como lo exploran Lois-Morales et al. (2018), nos lleva a profundizar en la geomecánica a nivel de partícula. Esta transición de un enfoque macroscópico tradicional a una perspectiva más microscópica es crucial para entender la complejidad del comportamiento de las rocas bajo diferentes condiciones. Abordando este reto, nos adentramos en el estudio de cómo la microescala de las rocas, incluyendo tamaño, forma y composición de partículas individuales, influye en su interacción y resistencia. Este enfoque microscópico proporciona una base sólida para comprender no solo la energía específica de fractura, sino también cómo las características intrínsecas de cada partícula se traducen en el comportamiento macroscópico de los materiales geológicos, un aspecto esencial en la optimización del proceso de conminución.

La geomecánica a nivel de partículas se sumerge en el análisis detallado de la microescala de las rocas, tomando en cuenta elementos como el tamaño, forma, composición y distribución de cada partícula individual. Este enfoque profundiza en el estudio de las interacciones de estas partículas bajo una variedad de condiciones, incluyendo la respuesta a cargas aplicadas, variaciones de humedad y tensiones internas. Este análisis de las características de las partículas individuales es fundamental para predecir el comportamiento a gran escala de los minerales, lo cual es clave en la definición y optimización de procesos de conminución.

Investigaciones recientes, como la de Lois-Morales (2020), destacan que aspectos como la distribución mineralógica, la porosidad y el factor de forma tienen una influencia significativa en la resistencia de las partículas. Estos hallazgos han demostrado ser particularmente eficaces en la predicción de la resistencia de partículas con un tamaño de hasta 5 mm, marcando un avance significativo en la comprensión de la resistencia de las partículas y su comportamiento bajo estrés.

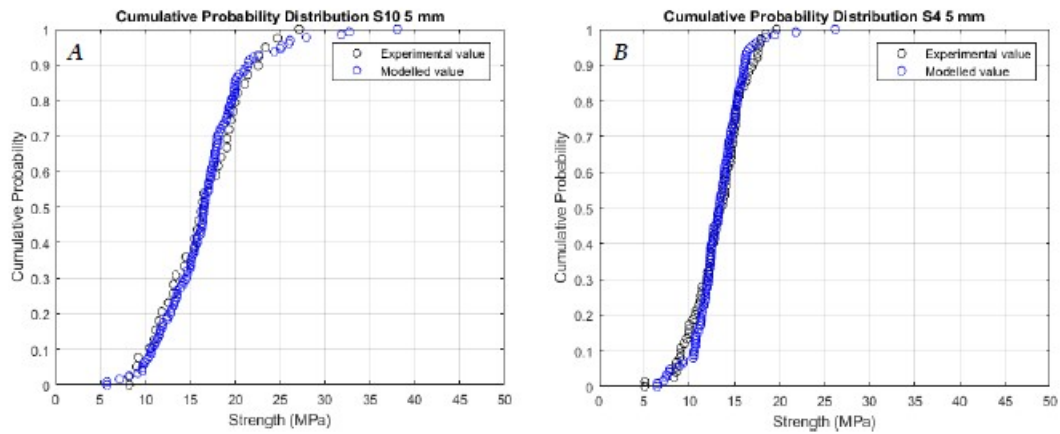


Figura 2.11: Comparación de la resistencia prevista de partículas de 5 [mm] versus valores experimentales reales y muestra de monzonita Qz con ligera alteración filica (Extracto, Lois-Morales, 2020)

El análisis de la Figura 2.11 revela que, al integrar factores como el tamaño y la textura de las partículas, se puede lograr una predicción más precisa de su resistencia. En una línea similar, Tavares (2021) identifica una relación compleja e intrigante entre la energía específica de fractura, el tamaño de las partículas y su composición mineralógica, como se muestra en la Figura 2.12. Esta representación gráfica confirma la relación descubierta por Kick, Rittinger y Bond: a medida que el tamaño de las partículas se reduce, la energía necesaria para fracturarlas incrementa. Esta tendencia sugiere que las partículas más pequeñas requieren proporcionalmente más energía para su fractura. Además, se observa que la diversidad en la mineralogía de los materiales seleccionados conduce a variaciones significativas en los niveles de energía específica de fractura. Este descubrimiento subraya la importancia de las propiedades mecánicas y mineralógicas de las partículas en los procesos de fractura, influenciando directamente la eficiencia del proceso de conminución. La comprensión de estas relaciones es vital predecir el comportamiento de los materiales y optimizar los procesos de fragmentación.

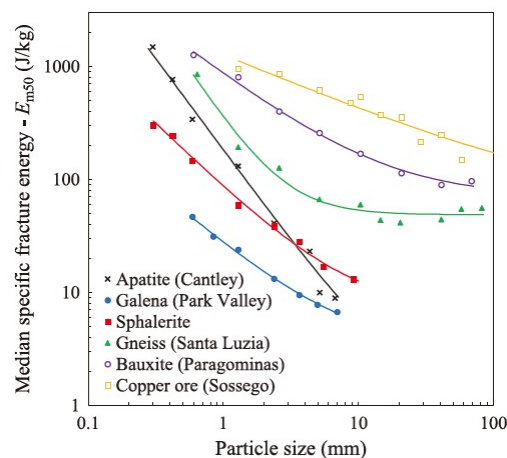


Figura 2.12: Variación de las energías medias de fractura de partículas de materiales seleccionados en función del tamaño de partícula representativo (Extracto, Tavares, 2021)

Lois et al. (2023) proporcionan evidencia contundente al destacar que las propiedades primarias del material, como la resistencia y la fragilidad, están estrechamente vinculadas a las características individuales de cada partícula, tales como su tipo de mineralización e irregularidades estructurales. Este enfoque centrado en las partículas permite una comprensión más precisa de cómo las propiedades específicas de cada componente contribuyen a las propiedades macroscópicas del material. En un contexto similar, Tavares et al. (1998), al explorar los procesos de fractura de partículas, identifican una relación directa entre la resistencia individual de las partículas y la energía específica de fractura. Este hallazgo subraya la importancia de considerar las características mecánicas a nivel de partícula para entender y modelar adecuadamente los fenómenos de conminución. En contexto, Tavares (2007) expone cómo la energía del impacto afecta significativamente la distribución del tamaño de las partículas resultantes en una muestra de un mineral de cobre:

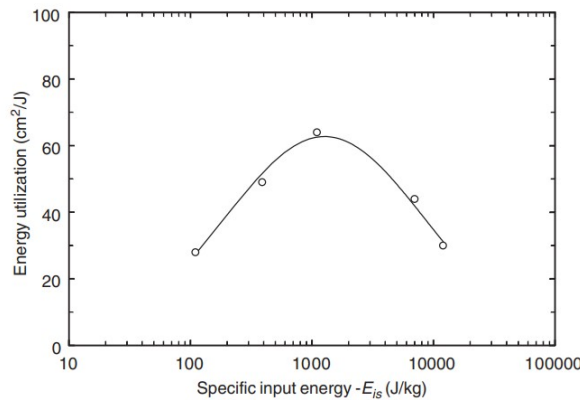


Figura 2.13: Relación entre la energía de fractura de partícula específica y la resistencia de la partícula para esferas de vidrio de diferentes tamaños (Extracto, Tavares, 2007)

La Figura 2.13 revela un fenómeno clave en el proceso de conminución: la existencia de un punto crítico donde la energía específica alcanza su máximo. Más allá de este punto, se observa una disminución notable en la eficiencia de la utilización de energía, indicando que incrementos adicionales en la energía aplicada no necesariamente resultan en una mayor efectividad en la fractura de partículas. Este patrón sugiere la posibilidad de que se produzcan cambios en las propiedades mecánicas de las partículas o la formación de estructuras internas que ofrecen resistencia a una fragmentación adicional. La identificación de este punto crítico es crucial para la optimización de los procesos de conminución, ya que resalta la importancia de un equilibrio cuidadoso en la aplicación de energía. Así, se busca alcanzar la máxima eficiencia en la fragmentación de partículas, evitando el uso excesivo de energía que no contribuye a la mejora del proceso y podría incluso resultar contraproducente.

Otra herramienta de caracterización es el SILC (Short Impact Load Cell) que es esencial para la caracterización de la mineralogía en procesos de conminución. Este dispositivo mide la respuesta de materiales, como minerales, a impactos de corta duración, proporcionando datos precisos sobre su resistencia y comportamiento bajo condiciones de choque. El SILC consta de un elemento sensible, hecho de materiales piezoeléctricos o galgas extensométricas, que convierte las fuerzas mecánicas en señales eléctricas, un acondicionador de señal que amplifica y filtra las señales generadas, y un sistema de adquisición de datos que captura y

almacena las señales para su posterior análisis. Según Tavares et al. (1998) la energía media de fractura puede ser relacionada con el tamaño de partícula mediante la siguiente ecuación:

$$E_{m,50} = E_{m,\infty} \cdot \left[1 + \left(\frac{d_p}{d_i}\right)^\phi\right] \quad (2.21)$$

Con $E_{m,\infty}$ la meseta de energía media, d_p un tamaño de partícula característico y ϕ la pendiente de la curva. El parámetro $E_{m,\infty}$, es interpretado como la máxima energía media que puede alcanzar un material, d_p un tamaño que normaliza la distribución y ϕ la pendiente de la curva que determina la velocidad que decrece la energía media al aumentar el tamaño. El modelo propuesto por Tavares et al. (1998) se ajusta de manera satisfactoria a los estudios realizados:

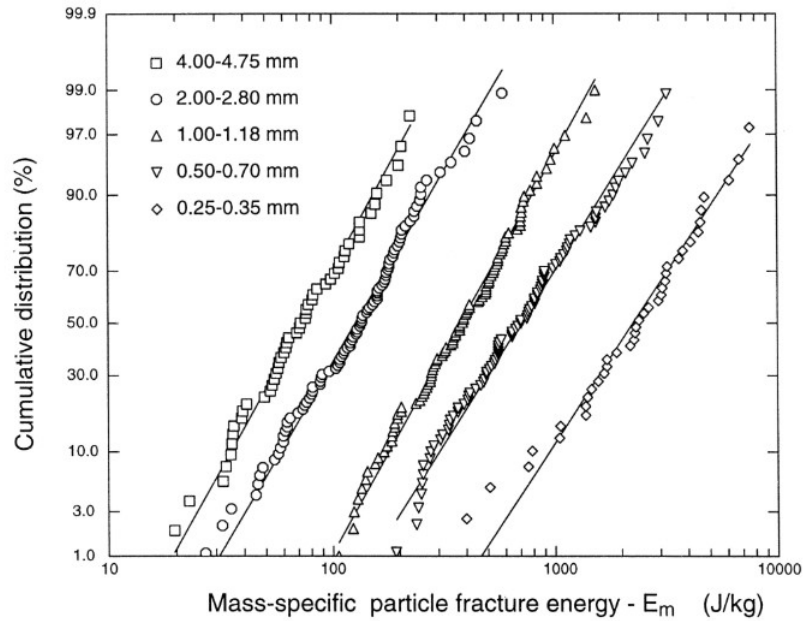


Figura 2.14: Distribuciones de energía de fractura de partículas para partículas de cuarzo de varios tamaños (Extracto, Tavares et al. ,1998)

En la Figura 2.14, se observa cómo el modelo de energía específica se ajusta a los distintos tamaños. A medida que la distribución acumulada disminuye, se evidencia una variación significativa entre los valores predichos por el modelo y los valores reales.

Por lo tanto, la caracterización geológica emerge como un elemento esencial en la interconexión entre los procesos de conminución y la mecánica de rocas, especialmente al considerar los avances recientes en la modelización y simulación de estos procesos. Los estudios y modelos mencionados, como los de Tavares (2022), Jimenez-Herrera et al. (2018), Cleary (2009) y Rodriguez et al. (2022), resaltan la importancia de comprender las características geológicas para optimizar y predecir el comportamiento de las rocas y minerales durante la conminución.

2.2.1. Geología como medio entre conminución y mecánica de rocas

La geología, en este contexto, se posiciona como el mediador esencial, proporcionando una comprensión detallada y holística que es imprescindible para la eficacia y optimización de estos procesos. La interacción de la geología con la mecánica de rocas y la conminución revela una sinergia donde cada disciplina complementa y enriquece a la otra, permitiendo avances significativos en la minería y el procesamiento de minerales. Según Lois-Morales et al. (2020) existe un nuevo enfoque que considera capturar las propiedades primarias de ruptura de los minerales y vincularlas con la caracterización geológica cuantitativa del mineral. Las principales propiedades de ruptura son las resistencias a la compresión y la tracción y los módulos elásticos de las rocas que se pueden utilizar para predecir la energía mínima de ruptura de una roca.

2.2.2. Propiedades Primarias de Ruptura

Según Lois-Morales et al. (2021), el estudio de las propiedades de ruptura primaria en la industria minera se han centrado principalmente en la caracterización del macizo rocoso para controlar su estabilidad y apenas se han descrito en un contexto de conminución. Sin embargo, la iniciación y propagación de fracturas en las diferentes escalas está controlado por los principios de la mecánica de fractura.

En el desarrollo de nuevos modelos de conminución, las propiedades primarias de las partículas están emergiendo como herramientas clave para predecir y optimizar los procesos. Investigaciones recientes han demostrado que estas propiedades primarias de fractura pueden ser eficazmente empleadas para anticipar parámetros críticos en la conminución, como el Bond Work Index (BWI), que es ampliamente utilizado en la modelización de estos procesos. Un ejemplo notable de esta aplicación es el trabajo de Saeidi (2017), quien explora el uso de propiedades primarias para prever las familias t_{10} y el BWI. En su estudio, Saeidi (2017) presenta un enfoque innovador para la predicción de índices de conminución tradicionales, basándose en las propiedades de rotura primaria y una función de conminución de rotura específica. La Figura muestra dos aspectos clave de su investigación:

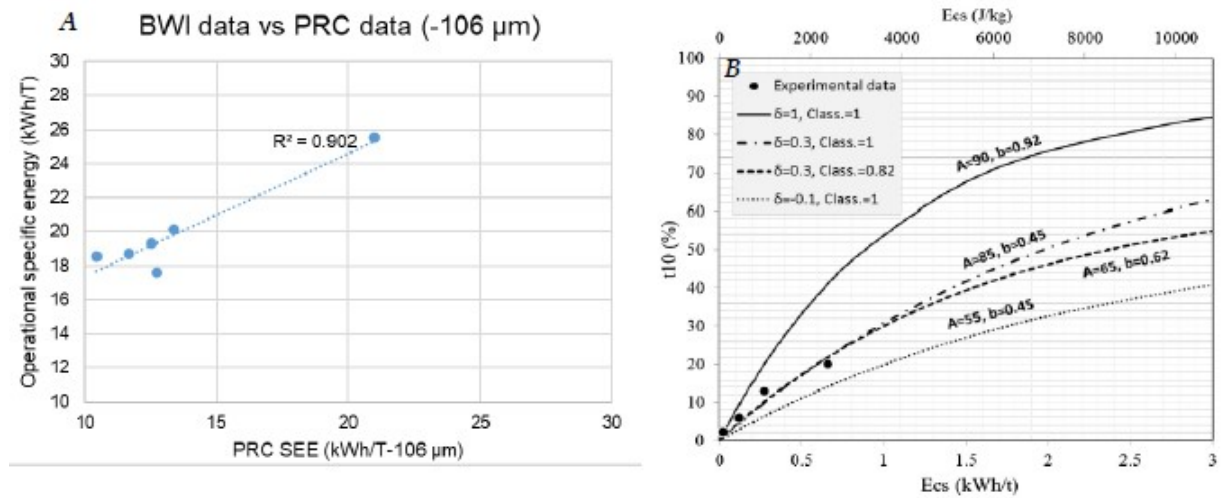


Figura 2.15: Predicción de índices de conminución tradicionales utilizando propiedades de rotura primaria y función de conminución de rotura. A) Correlación entre los resultados de energía específica del tamaño calculados usando PRC y la energía calculada para moler material por debajo de 106 μm usando la prueba de enlace para seis minerales. B) Comparación de los valores de Axb calculados utilizando la prueba de peso de caída estándar versus el Axb calculado utilizando los datos del SILC (Extracto, 2017, Seidi)

De la Figura 2.15 se establece una correlación entre los resultados de energía específica del tamaño calculados usando el método Particle Rolls Crusher (PRC) y la energía requerida para moler material hasta un tamaño inferior a 106 μm , medida mediante el test de Bond y se compara los valores de Axb mediante un ensayo Short Impact Load Cell (SILC). Se obtiene una buena relación entre las variables y una estimación aceptable para las propiedades empíricas de los modelos de conminución.

En conjunto, estos estudios proporcionan una perspectiva integral que destaca la interconexión crucial entre las características individuales de las partículas y las propiedades primarias del material en el contexto de los procesos de fractura y conminución.

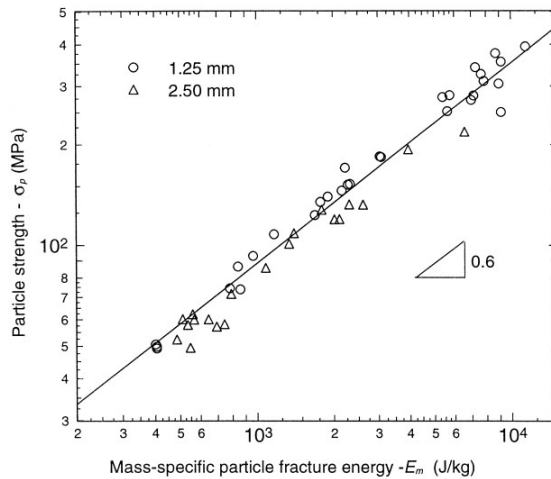


Figura 2.16: Relación entre la energía de fractura de partícula específica y la resistencia de la partícula para esferas de vidrio de diferentes tamaños (Extracto, Tavares et al., 1998)

El análisis de la Figura 2.16 proporciona una visión esclarecedora sobre la relación entre la resistencia de las partículas y la energía específica de fractura. Se observa que, conforme aumenta la resistencia de una partícula, también lo hace la cantidad de energía necesaria para fracturarla. Este patrón resalta una correlación directa entre la resistencia de la partícula y la energía requerida para su ruptura.

La interacción entre las propiedades geológicas y las dinámicas de fractura y conminución en el ámbito minero es de vital importancia. Investigaciones recientes han revelado que las características geológicas de las rocas, como su resistencia y composición, tienen un impacto directo en su comportamiento durante los procesos de conminución. La correlación entre la resistencia de las partículas y la energía necesaria para fracturarlas es un ejemplo clave de esta relación. Estos hallazgos apuntan a la necesidad de una mayor comprensión de cómo las propiedades geológicas afectan las operaciones mineras y los procesos de tratamiento de minerales.

2.2.3. Efecto de las Variables Geológicas en Propiedades de la Roca

La influencia de la geología en las propiedades intrínsecas de las rocas ha capturado significativamente la atención de la comunidad científica. Esta investigación se centra en identificar y detallar las propiedades más relevantes de las rocas que afectan directamente a la conminución y la geomecánica. La relevancia de estas propiedades se destaca debido a su papel crucial en los procesos geológicos y su impacto en diversas aplicaciones prácticas.

2.2.3.1. Efecto de la Mineralogía

Undul et al. (2015) han identificado que las muestras de roca con un alto contenido de carbonatos tienden a exhibir una menor Resistencia a la Compresión Uniaxial (UCS) debido a su menor dureza y a una mayor propensión a la formación de fracturas, lo cual facilita la fracturación de dichas muestras. Complementariamente, Quiñonez et al. (2017) han demostrado que las muestras de roca sin alteración presentan una mayor UCS en comparación con

aquellas que han sufrido algún tipo de alteración. Estos hallazgos resaltan la influencia significativa de la composición mineralógica y del estado de alteración de la roca en su resistencia mecánica.

Yildirim (2016) ha observado una correlación lineal entre la resistencia media de las partículas y la presencia de cuarzo, así como con la adición y el reemplazo absoluto de plagioclasa. Estos dos factores son utilizados para calcular el Índice de Alteración del Procesamiento (PAI), el cual proporciona una medida cuantificable que se relaciona con la resistencia de la roca. Los resultados obtenidos por el autor se presentan en la siguiente figura:

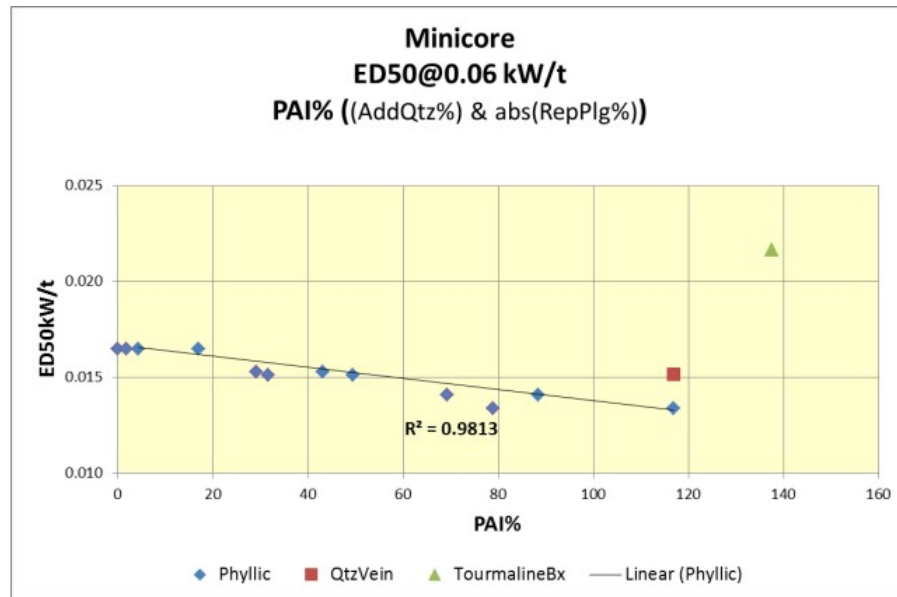


Figura 2.17: Resultados SILC de partículas con forma controlada (mininúcleo) frente a PAI (calculado utilizando los resultados de QXRD) (Extracto, Tildirim, 2016)

De la Figura 2.17, se deduce una correlación negativa entre la energía específica de fractura y el aumento de las plagioclasas, lo que sugiere que a medida que aumenta la proporción de plagioclasas en una muestra de roca, disminuye la energía requerida para fracturarla.

En resumen, los estudios revisados subrayan la influencia significativa de la composición mineralógica y el estado de alteración en la resistencia mecánica de las rocas. Se destaca la importancia de comprender cómo estos factores afectan la resistencia a la compresión y la molienda de las rocas. A continuación, se explorará el efecto de la textura en las propiedades mecánicas de las rocas, un aspecto crucial para entender cómo las características físicas internas influyen en el comportamiento de las rocas bajo diferentes condiciones.

2.2.3.2. Efecto de la Textura

En el ámbito de la geología, la textura de las rocas ejerce una influencia significativa en sus propiedades de fractura primarias. Esta influencia, aunque compleja, es susceptible de caracterización cuantitativa, considerando la amplia gama de variables geológicas que inciden en la disposición y distribución de la matriz de la muestra. Las investigaciones especializadas han proporcionado una comprensión detallada en esta materia. Por ejemplo, Parapari et

al. (2020) identificaron que los granos de cuarzo presentan una mayor deformación plástica, mientras que las granulometrías más gruesas del mismo mineral tienden a exhibir una deformación más elástica. Por otro lado, Garrido et al. (2019) observaron que un aumento en la cantidad de fenocristales conduce a una disminución en el Bond Work Index de la roca. En consecuencia, se puede afirmar que la textura de las rocas tiene un efecto cuantificable en los procesos de fragmentación, siendo especialmente relevante en las escalas asociadas a los procesos de conminución.

De manera similar, la textura ejerce una influencia significativa en las propiedades fundamentales asociadas a la ruptura de las rocas. Parapari et al. (2022) realizaron un estudio enfocado en cómo el clivaje afecta la energía específica de fractura de una muestra, encontrando que esto puede alterar su comportamiento mecánico. Por otra parte, Krolop (2022) analizó cómo en las menas de hierro, la martitización de la magnetita durante los procesos de oxidación, y su transformación en hematita, modifica el hábito cristalino y reduce la molienabilidad en los procesos de conminución. En consecuencia, se destaca que la textura impacta directamente en la resistencia de la muestra y en sus propiedades primarias de fractura.

2.2.3.3. Procesamiento de Minerales, Geología y Mecánica de Rocas

La revisión bibliográfica exhaustiva sobre los procesos de conminución y los modelos de fractura de partículas revela una evolución significativa en el campo de los procesos de conminución. A partir de modelos clásicos basados en la energía específica de fractura y la relación de tamaño de partículas, se ha avanzado hacia enfoques más detallados y matemáticamente rigurosos. Estos modelos modernos, como el Single Particle Breakage Model y las metodologías de elementos discretos, incorporan una comprensión más profunda de las propiedades primarias de fractura y las características individuales de las partículas.

En este contexto, la caracterización geológica se establece como una base fundamental para el procesamiento de minerales, dado que la geología es crucial para predecir el comportamiento de los minerales de una planta de procesamiento.

En los últimos años, los modelos de inteligencia artificial (IA) han comenzado a tener más protagonismo en el campo de la conminución. Estos modelos utilizan técnicas avanzadas de machine learning y análisis de datos para mejorar la precisión y eficiencia del proceso de molienda. A diferencia de los métodos tradicionales, que se basan en modelos empíricos y fenomenológicos, los modelos de IA pueden procesar grandes volúmenes de datos en tiempo real, identificar patrones complejos y optimizar las operaciones de manera autónoma.

2.3. Modelos de IA aplicados a conminución

En el sector minero, se dispone de vastas cantidades de datos conocidos como big data, los cuales pueden proporcionar información crítica sobre la eficiencia de los procesos. Según Estay, H. et al. (2023), solo un 2% a 3% de estos datos son utilizados en la toma de decisiones tanto a corto como a largo plazo. Esta subutilización se debe a la complejidad y gran magnitud de los datos, que hace impráctico su procesamiento.

Para abordar este desafío, se recurre a técnicas de procesamiento y análisis a nivel macro, Según Solar et al. (2020) estas técnicas corresponden a ciencia de datos. Estas técnicas

permiten analizar grandes volúmenes de datos de manera efectiva, extrayendo información valiosa que puede mejorar la eficiencia operativa y la toma de decisiones estratégicas.

En la industria actual, se emplean diversos métodos y tecnologías que facilitan el acceso y análisis de datos de los procesos. Esta capacidad no solo permite evaluar la eficiencia con la que se llevan a cabo los procesos, sino que también proporciona conocimientos esenciales sobre su desempeño, identificando áreas que funcionan bien y aquellas que requieren mejoras.

2.3.1. Fundamentos de IA

La IA es un campo de estudio dentro de la ciencia de datos que busca desarrollar sistemas capaces de realizar tareas que, cuando son llevadas a cabo por seres humanos, requieren inteligencia. Dentro de la jerarquía de la IA, encontramos el aprendizaje automático o Machine Learning (ML), una subdisciplina que utiliza algoritmos para analizar datos, aprender de ellos y realizar predicciones o decisiones sin ser explícitamente programada para realizar esas tareas. A su vez, el aprendizaje profundo o Deep Learning (DL) es una subcategoría del aprendizaje automático que emplea redes neuronales artificiales con múltiples capas para modelar y entender patrones complejos en grandes conjuntos de datos.

La IA ha evolucionado significativamente desde sus inicios. Turing (1950) introdujo las primeras ideas sobre máquinas capaces de simular aspectos del pensamiento humano. Con el avance de la tecnología y el incremento en la capacidad de procesamiento, el aprendizaje automático emergió como una metodología dominante para el desarrollo de sistemas inteligentes. Según Mitchell (1997), el aprendizaje automático se define como el estudio de algoritmos que mejoran automáticamente a través de la experiencia.

En la parte inferior de esta jerarquía se encuentra el deep learning, una técnica revolucionaria que ha permitido grandes avances en áreas como el reconocimiento de imágenes y el procesamiento del lenguaje natural. Hinton et al. (2006) demostraron que las redes neuronales profundas pueden superar significativamente a los métodos tradicionales en diversas tareas, gracias a su capacidad para aprender representaciones jerárquicas de los datos.

El ML es un campo de la IA que se centra en el desarrollo de algoritmos y técnicas que permiten a las computadoras aprender a partir de datos. Los modelos de ML pueden clasificarse en tres categorías principales: aprendizaje supervisado, aprendizaje no supervisado y aprendizaje por refuerzo, cada uno con sus propios métodos y aplicaciones distintivas.

2.3.2. Modelos de Machine Learning

El aprendizaje supervisado es quizás la forma más común de ML. En este enfoque, el algoritmo se entrena utilizando un conjunto de datos etiquetados, donde las entradas están asociadas con las salidas deseadas. Los modelos de aprendizaje supervisado buscan aprender una función que mapee las entradas a las salidas correctas. Según Bishop (2006), la clave del aprendizaje supervisado es que el modelo recibe una guía directa en forma de ejemplos etiquetados. Ejemplos de algoritmos supervisados incluyen la regresión lineal, la regresión logística, y los árboles de decisión.

Por otro lado, el aprendizaje no supervisado trabaja con datos que no están etiquetados.

El objetivo es descubrir patrones ocultos o estructuras en los datos. Como mencionan Hastie et al. (2009), el aprendizaje no supervisado es utilizado principalmente para exploración de datos y reducción de dimensionalidad. Los métodos comunes en esta categoría incluyen el análisis de componentes principales (PCA) y el clustering, como el algoritmo K-Means.

El aprendizaje por refuerzo, a diferencia de los anteriores, se centra en cómo los agentes deben tomar acciones en un entorno para maximizar alguna noción de recompensa acumulada. En este paradigma, el agente aprende mediante la interacción con el entorno y la recepción de retroalimentación en forma de recompensas o castigos. Sutton et al. (2005) definen el aprendizaje por refuerzo como un enfoque basado en la prueba y error para resolver problemas de decisión secuencial. Un ejemplo notable de este tipo de aprendizaje es el algoritmo Q-learning. El algoritmo Q-learning es un método dentro del aprendizaje por refuerzo que se destaca por su capacidad para permitir que un agente aprenda qué acciones tomar en un entorno sin necesidad de un modelo del entorno mismo. A diferencia de otros enfoques, el agente no necesita conocer las dinámicas del sistema en el que opera, lo que hace que Q-learning sea aplicable a una amplia variedad de problemas, especialmente aquellos donde las transiciones entre estados no son claramente conocidas.

Los modelos de ML ofrecen un conjunto diverso de herramientas y técnicas que permiten a las computadoras aprender y mejorar a partir de la experiencia. Desde la predicción precisa de resultados en el aprendizaje supervisado, pasando por el descubrimiento de patrones ocultos en el aprendizaje no supervisado, hasta la optimización de decisiones en entornos dinámicos mediante el aprendizaje por refuerzo, cada metodología aporta soluciones innovadoras a problemas complejos. Con estos fundamentos establecidos, es interesante profundizar en la técnica de las redes neuronales, que ha demostrado un potencial revolucionario en diversas aplicaciones. Las redes neuronales, especialmente las redes neuronales profundas, han transformado campos de la ingeniería.

2.3.3. Redes Neuronales en Procesamiento de Minerales

Las redes neuronales se han aplicado en múltiples aspectos del proceso de conminución, desde la predicción del desgaste de componentes hasta la optimización de los parámetros operativos de equipos de trituración. Estas aplicaciones se basan en la capacidad de las redes neuronales para aprender patrones a partir de grandes volúmenes de datos históricos y operacionales. Una aplicación significativa de las redes neuronales es en la predicción del desgaste de equipos de conminución. Rodríguez Q. (2018) entrenó una red neuronal artificial para predecir el desgaste de levantadores de pulpa y el nivel de llenado en molinos SAG a partir de datos de proceso. Esta predicción precisa permite una mejor planificación del mantenimiento y reduce el tiempo de inactividad del equipo. Las redes neuronales también se han utilizado para optimizar los parámetros operativos de los equipos de trituración. Fernandez, B. (2023) desarrolló un modelo de red neuronal para optimizar la operación de una planta de producción de agregados pétreos. Este modelo ayudó a ajustar los parámetros de la trituradora cónica para maximizar la eficiencia de conminución. En la siguiente imagen se compara los resultados reales con los predecidos por la red neuronal:

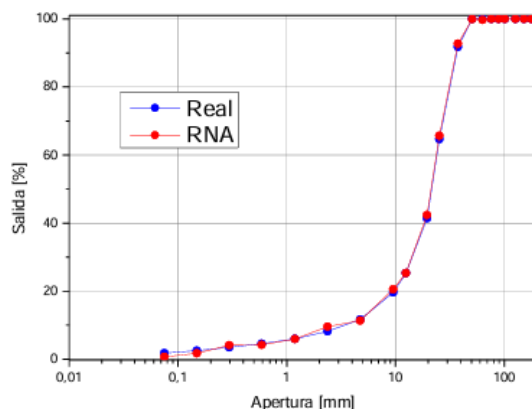


Figura 2.18: Comparación de Granulometría en la salida del Chancador para los datos reales y la red neuronal (Extracto, Fernandez, B. , 2023)

De la Figura 2.18, se observa que el modelo predice de manera precisa la distribución granulométrica en la salida del chancador. Por otro lado, Cabrera, S. (2016) implementó una librería neuronal en el software Control Builder 5.1 para controlar el nivel de mineral dentro de un molino de bolas. El uso de redes neuronales en el control adaptativo permite ajustar dinámicamente los parámetros del molino en respuesta a las condiciones de operación cambiantes, mejorando así la eficiencia del proceso de conminución.

El uso de redes neuronales en conminución presenta varias ventajas. Estas incluyen una mejor precisión en la predicción de resultados operativos, la capacidad de manejar grandes volúmenes de datos y la mejora en la eficiencia del proceso. Además, las redes neuronales pueden adaptarse a cambios en las condiciones operativas, lo que las hace altamente flexibles y robustas según Annicchiarico et al. (2016). Sin embargo, existen desafíos asociados con su implementación. La recopilación y preprocesamiento de datos de alta calidad es crucial para el éxito de los modelos neuronales. Según Mu et al. (2022) el entrenamiento de redes neuronales puede ser computacionalmente intensivo y requiere experiencia en la selección y ajuste de hiperparámetros lo que representa una limitante para este tipo de modelos.

Por ello, existen algoritmos innovadores que han sido exitosos en diversas aplicaciones en el ámbito minero y fuera de este mismo.

2.3.4. Bag Of Words (BoW)

La técnica Bag of Words (BoW) se emplea comúnmente en el procesamiento y clasificación de imágenes y otros tipos de archivos mediante el uso de descriptores densos o calculados en áreas específicas del contenido. Según el tipo de descriptor utilizado, este puede contabilizar elementos distintivos (como palabras en un contexto de procesamiento de texto) o agrupar características vectoriales cuando se trata de descriptores numéricos. De esta forma, cada imagen o archivo de entrada puede ser representado como un histograma de los descriptores presentes, lo cual facilita su clasificación en distintas categorías con etiquetas conocidas. Así, BoW abarca tanto el procesamiento de datos (etapas de cálculo de descriptores y generación del histograma), como el aprendizaje no supervisado (etapas de agrupamiento de descriptores) y supervisado (clasificación en función de etiquetas).

Existen varios modelos utilizados para el análisis de documentos de texto, entre los cuales destaca el modelo Bag of Words (BoW). De acuerdo con Qader et al. (2019), el BoW es un modelo versátil que se puede aplicar tanto en la selección de características como en la clasificación de documentos e imágenes. En el caso de la clasificación de imágenes, el BoW crea "bolsas" para cada característica de la imagen, mientras que para los documentos, genera un vector que representa la frecuencia de aparición de cada palabra, conocido también como el histograma del documento. En este enfoque, las imágenes se tratan de manera similar a los documentos, donde las características visuales se equiparan a las palabras en el análisis textual. Según el modelo Bag-of-Words representa un documento mediante un histograma, asignando a cada término del documento un peso que depende del número de veces que ese término aparece en el texto. En la siguiente imagen, Teva, M. (2015) ejemplifica la metodología de BOW:

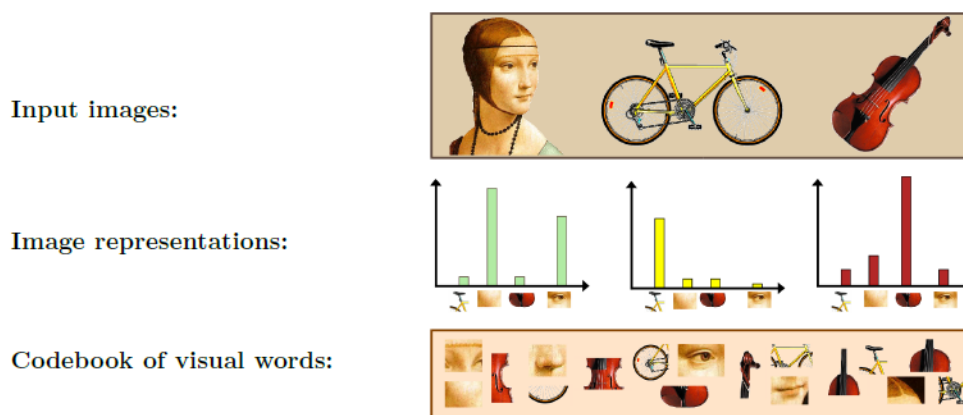


Figura 2.19: Una ilustración de la representación visual de Bag-of-Words (BoW) para tres imágenes de entrada: la presencia de palabras visuales de un código (fila inferior) en las imágenes de entrada (fila superior) se cuantifica en un histograma. El histograma de conteo de palabras (fila central) se utiliza para representar la imagen (Extracto, Teva, M., 2015)

En la Figura 2.19, se puede observar cómo el algoritmo transforma una imagen con ciertas características en un histograma. Por otro lado, el análisis de características toma relevancia en el algoritmo de BOW. Según Pardo, S. (2009) la metodología más común para el uso de BoW consiste en emplear una cuadrícula rectangular, como se ilustra en la Figura 2.20:

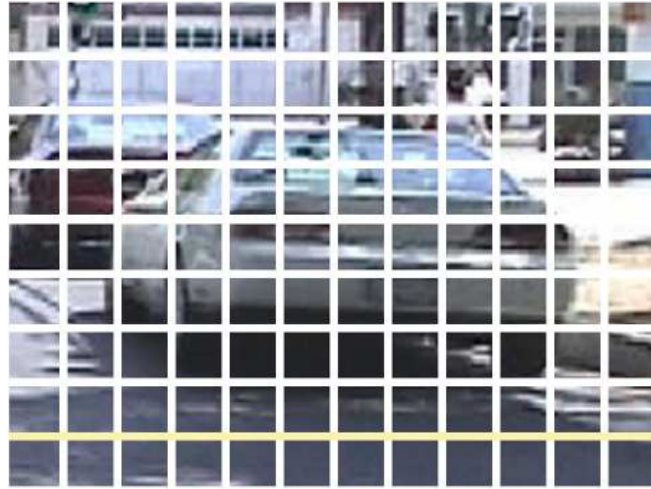


Figura 2.20: Imagen a la que se le aplica una cuadrícula regular (Extracto, Pardo, S. (2009))

Dentro del procesamiento de minerales, el modelo Bag of Words (BoW) puede ser útil en situaciones donde es necesario clasificar y caracterizar datos que provienen de análisis textuales o numéricos. Un ejemplo claro es la asignación de etiquetas durante el proceso de caracterización mineralógica, donde se podrían identificar patrones y asociar términos clave con minerales específicos o etapas del procesamiento.

Por ejemplo, en el contexto de la caracterización de minerales, podríamos aplicar el BoW para analizar grandes volúmenes de datos descriptivos sobre las características geológicas o químicas de los minerales, generando un histograma que cuantifique la frecuencia de ciertos descriptores o características en los datos. Esto permitiría asignar etiquetas de manera eficiente, como la clasificación automática de tipos de minerales según sus propiedades texturales, composicionales, o de procesamiento. Además, este modelo podría usarse para el análisis de informes o resultados de laboratorio, identificando automáticamente palabras clave relevantes en cada reporte para facilitar su organización y búsqueda.

Por lo tanto, el algoritmo BOW podría ser aplicado a imágenes de caracterización mineralógica, como imágenes de microscopía óptica y QEMSCAN, identificando características geológicas.

2.4. Gaps en el Conocimiento

En la revisión bibliográfica, se establece la relevancia de los procesos de conminución en la industria minera, destacando el principal desafío de alto consumo energético e ineficiencia. Estudios como los de Radziszewski (2013) y Ballantine Powell (2014) demuestran que gran parte de la energía se disipa en forma de calor, subrayando la necesidad de optimizar la eficiencia operativa. Sin embargo, a pesar de los avances, persisten brechas en la reducción del consumo energético. Este trabajo se propone abordar estas brechas a través de la caracterización avanzada de variables críticas en los procesos de conminución.

La variabilidad mineralógica emerge como un factor que impacta directamente la eficien-

cia en la conminución, debido a las variaciones en la dureza y el consumo energético incluso dentro de una misma veta. Modelos como los de Jackson et al. (2018) han permitido avanzar en la previsión de la vida útil de la mina (LOM) considerando esta variabilidad; no obstante, falta profundizar en cómo estas variaciones específicas afectan la eficiencia energética a nivel operativo. La investigación propuesta aquí contribuirá al desarrollo de métodos para prever mejor estas fluctuaciones y ajustar los parámetros de proceso de manera más precisa.

Respecto a los modelos de conminución, se presentan clasificaciones en modelos empíricos, semi-empíricos y fenomenológicos. Los modelos empíricos, como los de Rittinger, Kick y Bond, relacionan el consumo energético con el tamaño de partícula, mientras que los semi-empíricos, como los de balance poblacional, utilizan funciones de ruptura para predecir la granulometría. Los modelos fenomenológicos, por su parte, abordan propiedades de fractura primarias. Aunque se ha avanzado en cada tipo de modelo, todavía es necesario evaluar la efectividad de estos enfoques en escenarios de variabilidad mineralógica significativa, aspecto en el que este trabajo también pretende contribuir mediante un análisis más robusto de los datos de conminución.

La geología, al conectar los procesos de conminución con la mecánica de rocas, aporta información clave sobre propiedades como la resistencia a la compresión y la tracción, influenciadas por la mineralogía y textura de las rocas. Trabajos como los de Lois-Morales et al. (2020) han resaltado la importancia de estos parámetros para optimizar la conminución. Sin embargo, se observa una falta de metodologías que integren esta caracterización en modelos predictivos operativos; este estudio pretende reducir esta brecha mediante una caracterización geológica avanzada que permita mejorar la precisión en la simulación de estos procesos.

La caracterización mineralógica es relevante en la predicción del comportamiento mecánico de los minerales. Herramientas como el Short Impact Load Cell (SILC), Drop Weight Test (DWT) y el Test de Bond generan datos esenciales para los modelos de conminución. No obstante, se identifica la necesidad de métodos más integradores que permitan un análisis sistemático de estos datos para aplicarlos en el diseño operativo. La investigación aquí propuesta considera el uso de estos datos en algoritmos de Machine Learning para mejorar la capacidad predictiva del modelo en procesos de conminución.

La aplicación de inteligencia artificial (IA) y aprendizaje automático en la optimización de procesos de conminución ha ganado relevancia, permitiendo la predicción y ajuste de parámetros operativos en tiempo real. Estudios de Rodríguez Q. (2018) y Fernandez B. (2023) muestran que el aprendizaje automático puede mejorar la eficiencia y reducir el desgaste en los equipos de conminución, pero aún existen desafíos en la aplicación de estos modelos a escalas operativas completas. Este trabajo plantea el uso de algoritmos como Bag of Words (BoW) y Machine Learning para reducir estas limitaciones mediante un enfoque que optimice el uso de datos y mejore la precisión en la predicción de los parámetros operativos.

Así, la hipótesis de este trabajo sugiere que la caracterización geológica avanzada puede proporcionar propiedades de ruptura esenciales para la simulación de una planta de procesamiento. Para ello, el algoritmo BoW se utilizará para convertir imágenes y características geológicas complejas en vectores numéricos, permitiendo una representación cuantitativa que

facilite la identificación de texturas y minerales relevantes. Además, el uso de Machine Learning contribuirá a la predicción de propiedades mecánicas, permitiendo optimizar los procesos de conminución y apoyar la toma de decisiones a nivel operativo, ayudando así a cerrar las brechas identificadas en la literatura actual.

Capítulo 3

Metodología

En este proyecto de tesis, se aborda la tarea de modelar propiedades primarias de ruptura a través de la caracterización geológica. Para lograr una representación precisa y detallada del modelo, se utilizan métodos de inteligencia artificial que permiten capturar la variabilidad intrínseca de los datos. En esta sección, se detalla el tratamiento aplicado a cada conjunto de datos para asegurar su correcta integración y análisis.

La metodología presentada busca mejorar la predicción de la energía específica media, $E_{m,50}$, en procesos de conminución. Para ello, la metodología se enfoca en aprovechar la información detallada proporcionada por el análisis QEMSCAN, que ofrece datos sobre las texturas y tamaños característicos de las partículas minerales. A partir de esta información, el objetivo es desarrollar un modelo predictivo que permita estimar $E_{m,50}$ con mayor precisión bajo distintas condiciones texturales y de tamaño. En primer lugar, se revisan los antecedentes de los datos a modelar.

3.1. Antecedentes

En este proyecto de tesis, se recibieron varias fuentes de datos, las cuales fueron analizadas mediante diversos tipos de análisis de imágenes y ensayadas a través de diferentes pruebas mecánicas. El objetivo de la presente sección es describir los datos recibidos y detallar cómo fueron generados.

3.1.1. Datos Provenientes de Imágenes QEMSCAN

Según Pirrie, D. & Rollinson, G. (2011), QEMSCAN (Quantitative Evaluation Minerals by Scanning electron microscopy) es una técnica analítica configurada para medir variaciones mineralógicas basado en la geoquímica a escala microscópica. Esta técnica realiza mediciones de dos señales: backscattered electron (BSE) y Energy Dispersive Spectra (EDS). La primera es usada para localizar partículas y la segunda para identificar minerales. Posteriormente, la señal EDS de cada análisis es clasificada mediante la comparación con una base de datos de minerales conocida. La resolución de esta metodología de caracterización avanzada es de hasta 5 (μm).

En este proyecto de tesis, se han utilizado datos provenientes del trabajo de investigación de Lois-Morales (2021), cuyo objetivo general fue estudiar la relación entre la información mineralógica y textural cuantitativa de las rocas y la distribución de las propiedades de frag-

mentación primaria a medida que el tamaño de las partículas se aproxima al tamaño del grano mineral.

En la tesis doctoral de Lois-Morales (2019), se utilizaron imágenes clasificadas provenientes de SEM-EDS automatizado tipo QEMSCAN y mineralogía óptica automatizada. Estas se utilizaron para caracterizar diferentes tipos de texturas y tamaños de partículas. Las imágenes se segmentan según el tipo de textura y luego se procesan mediante un software de análisis de imágenes, obteniendo variables geológicas.

Por otro lado, a las imágenes de QEMSCAN se les aplica un algoritmo de segmentación para generar partículas simuladas como lo describe Lois-Morales (2022). Estas partículas simuladas corresponden a una sección rectangular de un corte de la imagen QEMSCAN con el atributo correspondiente a esa sección. El algoritmo empleado se puede visualizar en la siguiente imagen:

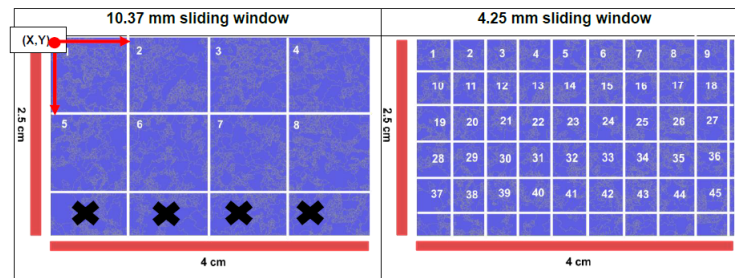


Figura 3.1: Aplicación de ventanas móviles en la misma sección delgada. La flecha indica la dirección del remuestreo, (X) indica una parte de la sección que no se considera para el análisis (Extracto, Lois-Morales, 2022)

Al aplicar el algoritmo, Lois-Morales (2023) calculó siete indicadores diferentes para cada imagen QEMSCAN y para cada partícula simulada de forma individual y adicionalmente, se agrega un octavo indicador a esta base de datos. Los indicadores se describen a continuación:

1. **Rigidez Ponderada:** La rigidez ponderada se calcula como:

$$k = \sum_{i=1}^N X_i \cdot k_i \quad (3.1)$$

Con k_i la rigidez para cada mineral y X_i la proporción de cada mineral. Según Jaeger et al. (2007), un aumento en la cantidad de minerales con mayor rigidez aumentará la resistencia del material.

2. **Índice de Borde (BI):** Es un parámetro que compara la longitud de cada límite de grano contenido en una sección con el perímetro del borde de un rectángulo circundante.
3. **Relación de Aspecto:** Se calcula como la relación entre el eje más corto y más largo de cada grano. Este parámetro representa el alargamiento de cada grano.
4. **Índice de Contraste:** Se calcula como la diferencia absoluta de propiedades físicas

entre un par de minerales. La formula general es:

$$CI_{AB} = \Delta k_{AB} = \frac{|k_A - k_B|}{\max(k_A, k_B)} \quad (3.2)$$

5. **Tamaño Máximo de Grano:** es la medida principal del tamaño de grano en cada sección estudiada a partir de los análisis QEMSCAN.
6. **Porcentaje de Vacios:** Es la medida principal de porosidad de la muestra.
7. **Densidad Fractal de Empaquetamiento (FPI):** corresponde a la proporción entre fenocristales y masa fundamental en cada sección creada. Se calcula de la siguiente manera:

$$FPI = \frac{\%retained(C1)}{\%passing(C1)} \quad (3.3)$$

C1 es el punto en una gráfica log-log del tamaño de grano frente al porcentaje de área pasante donde cambia la pendiente de la curva.

8. **Tamaño:** El tamaño de cada partícula se asigna en función de un sufijo específico que corresponde a un valor numérico. Este es el tamaño medido como diámetro equivalente a la base de una partícula cilíndrica cuya base redonda tiene la misma área. Esas corresponden con los tamaños de las poblaciones testeadas en el SILC. La relación entre el sufijo y el tamaño es la siguiente:

- S0: 2.66 (mm)
- S1: 10.32 (mm)
- S2: 7.75 (mm)
- S3: 4.25 (mm)
- S4: 14 (mm)
- S5: 28 (mm)

Las poblaciones de datos correspondientes a las imágenes de QEMSCAN presentan las siguientes características:

Tabla 3.1: Poblaciones de Datos

Poblaciones	Numero de Particulas Simuladas
S0	2960
S3	930
S2	390
S1	181
S4	64
S5	2

En la Tabla 3.1 se presenta el número de partículas correspondientes a cada tamaño. Los tamaños de partículas están asociados a distintos tipos de litologías, descritos a continuación:

- **BA:** Roca basáltica proveniente de un depósito en Australia.
- **K2 y K4:** Rocas de un depósito ubicado en Estados Unidos.
- **SA:** Roca proveniente de la mina Saucito en México.
- **T1 a T8:** Rocas de la zona de alteración de la Mina Los Bronces en Chile.

En particular, el tamaño S5 esta asociado a la litología Basáltica.

Además, se cuenta con una base de datos que incluye ensayos mecánicos relacionados con los tamaños y texturas caracterizados mediante QEMSCAN. Para evaluar las propiedades mecánicas de las partículas, se realizaron ensayos utilizando la célula de carga de impacto corto (Short Impact Load Cell, SILC). Estos ensayos permitieron determinar características clave como la resistencia y dureza de las partículas, aportando información valiosa que complementa el análisis textural y de tamaño obtenido a través del QEMSCAN.

La base de datos presentada corresponde a ensayos SILC, diseñados para analizar el comportamiento mecánico de las partículas bajo diferentes condiciones. A continuación, se describen los principales componentes de la base de datos:

- **Características de la muestra:**

- **Texture(adim):** Indica el tipo de textura del material ensayado.
- **Size (mm):** Representa el tamaño de las partículas en la muestra.
- **IDROCKTYPE (adim):** Identifica el tipo de roca utilizada durante el ensayo.

- **Variables energéticas y mecánicas:**

- **e (adim) y dEde (adim) :** Coeficientes que describen la energía específica aplicada a las partículas.
- **Particle Stiffness (MPa) :** Representa la rigidez de la partícula durante el ensayo.
- **d (adim):** Parámetro calculado que refleja la deformación o desplazamiento en las partículas.

- **Energía y correcciones:**

- **Energy 1 (kWh/t) y Energy 2 (kWh/t):** Energías registradas en diferentes etapas del proceso.
- **Factor of correction (adim):** Factor aplicado para corregir las energías obtenidas.
- **Corrected Energy (kWh/t):** Energía corregida que refleja los valores ajustados al finalizar el ensayo. Esta es la energía utilizada para caracterizar el output.

La base de datos presentada permite analizar el comportamiento de las partículas bajo distintas condiciones. A continuación, se muestra el número de partículas ensayadas para cada tamaño:

Esta estructura de datos permite el análisis detallado de las propiedades mecánicas y energéticas de las partículas, proporcionando información relevante para el estudio de su

Tabla 3.2: Número de partículas ensayadas para cada tamaño.

Poblaciones	Número de partículas ensayadas
S0	660
S1	566
S2	854
S3	804
S4	257
S5	33

fragmentación bajo distintas condiciones experimentales.

Los datos obtenidos de los ensayos mecánicos se integran con las variables geológicas extraídas de las imágenes QEMSCAN, permitiendo una comprensión más completa de las propiedades de las partículas estudiadas. Esta combinación de análisis textural y mecánico proporciona una base sólida para la caracterización de materiales en estudios geológicos y mineros, facilitando la toma de decisiones informadas en la gestión y optimización de procesos.

Por lo tanto, la metodología empleada por Lois-Morales (2023) no solo aborda la caracterización textural y de tamaño de las partículas, sino que también incorpora un análisis detallado de sus propiedades mecánicas, lo cual es crucial para aplicaciones prácticas en la industria.

Para los datos obtenidos de la tesis doctoral de Lois-Morales (2020), se propone una metodología diferente. Dado que no existe una correspondencia uno a uno en los datos, no es posible aplicar un modelo de aprendizaje supervisado de machine learning. Por lo tanto, se sugiere un modelamiento poblacional como alternativa. Se propone el siguiente diagrama de flujo para las muestras provenientes de QEMSCAN:

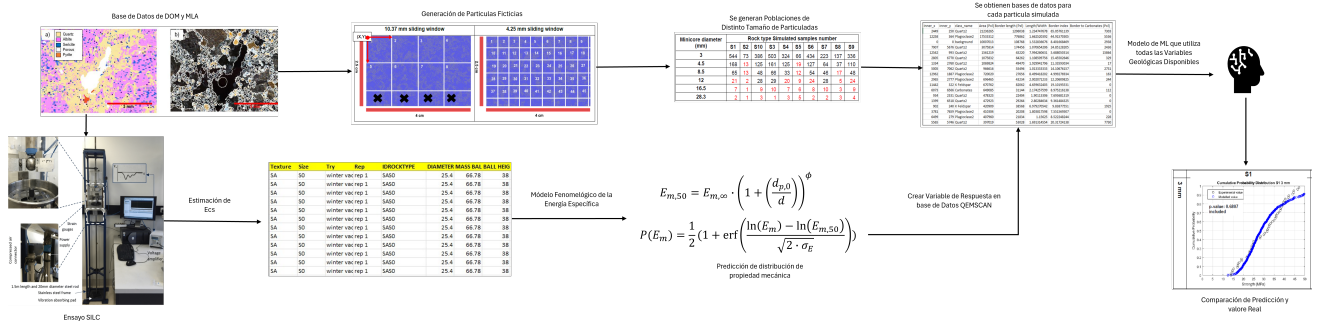


Figura 3.2: Metodología para Imágenes Provenientes de QEMSCAN

En la Figura 3.2, se muestra el esquema de los pasos necesarios para modelar la propiedad mecánica utilizando la información disponible. La metodología se divide en la caracterización del input y del output. El output se refiere a la energía específica media obtenida experimentalmente y el input son las variables utilizadas para predecir la energía específica media.

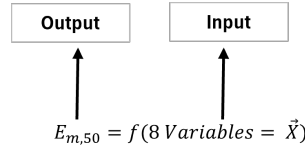


Figura 3.3: Caracterización del Modelo

3.2. Procesamiento de los Datos de Respuesta

El output de un modelo, se caracteriza como la variable dependiente o resultado que el modelo predice o estima a partir de las variables independientes. En modelos de aprendizaje supervisado, el output puede ser continuo (en regresión) o discreto (en clasificación), y su precisión depende de la relación entre el output y el input. Los pasos para caracterizar el output son:

- **Cargar Base de Datos con Variable Mecánica:** Se carga la base de datos con las variables mecánicas para todas las texturas y todos los tamaños disponibles. La base de datos se visualiza de la siguiente manera:

Texture	Size	Try	Rep	IDROCKTYPE	DIAMETER	MASS	BAL	BALL	HEIG
SA	S0	winter vac rep 1	1	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	2	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	3	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	4	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	5	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	6	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	7	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	8	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	9	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	10	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	11	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	12	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	13	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	14	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	15	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	16	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	17	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	18	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	19	SASO	25.4	66.78	38		
SA	S0	winter vac rep 1	20	SASO	25.4	66.78	38		

Figura 3.4: Base de Datos Con Variable de Respuesta Mecánica

- **Ajustar Modelo Fenomenológico:** Se utilizan los modelos de Tavares et al. (1998) para la energía específica. Los modelos son:

$$E_{m,50} = E_{m,\infty} \cdot \left(1 + \frac{d_p}{d}\right)^\phi \quad (3.4)$$

$$P(E_m) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\ln(E_m) - \ln(E_{m,50})}{\sqrt{2} \cdot \sigma_E}\right)\right) \quad (3.5)$$

Con erf la denominada función error. Los modelos son ajustados mediante mínimos cuadrados. El problema a resolver es:

$$\min \sum_{i=1}^N (E_m^{\text{Medido}} - E_m^{\text{Estimado}})^2 \quad (3.6)$$

El objetivo de resolver el problema de optimización es ajustar los datos experimentales a los modelos de Tavares et al. (1998).

- **Análisis de Parámetros de Modelos Fenomenológicos:** Se analiza la distribución de los parámetros ajustados por mínimos cuadrados y cómo se distribuyen para cada

tipo de textura. Se calculan estadísticas descriptivas como media, desviación estándar, mínimo, máximo, etc.

Para caracterizar el resultado, se describe en función de las variables independientes del modelo. Esta descripción permite identificar la relación entre las entradas del modelo y el comportamiento del output, proporcionando una comprensión más clara de los factores que influyen en el resultado. Con ello, se facilita el análisis y la interpretación de los efectos individuales de cada variable, mejorando la capacidad de ajustar o refinar el modelo según sea necesario.

3.3. Procesamiento de las Variables de Entrada

La caracterización del input de un modelo, representado por las variables, es un proceso clave en la construcción de modelos predictivos. Este análisis implica identificar, describir y comprender las características de las variables de entrada que influirán en el output. Un análisis detallado de los inputs permite mejorar la precisión del modelo y su capacidad para generalizar a nuevos datos. Los pasos para caracterizar el input son:

- **Análisis de Distribuciones de Datos y Outliers:** Se utilizarán QQ-Plots (gráficos de cuantiles-cuantiles) para evaluar la conformidad de los datos con una distribución teórica, comúnmente la distribución normal. Este gráfico permite comparar los cuantiles observados de los datos con los cuantiles teóricos de la distribución seleccionada. Una alineación cercana de los puntos a la línea diagonal indica que los datos siguen la distribución esperada. Cualquier desviación significativa de esta línea sugiere la presencia de outliers o una distribución diferente a la teórica, lo que permite identificar posibles anomalías en los datos y ajustar el análisis en consecuencia. Los gráficos QQ-Plot se realizan para las 8 variables las partículas simuladas. De igual manera, para utilizar el algoritmo de BoW no es necesario que las variables sigan una distribución en particular.
- **Aplicar algoritmo de BoW:** Se utiliza el algoritmo de BoW para generar clusters con partículas simuladas de características similares y resumir cada imagen en un histograma con la proporción de cada cluster.
 - **Aplicar algoritmo de clusterización:** Se utiliza el algoritmo de K-Means para realizar una clusterización de las 8 variables utilizadas.
 - **Optimización del número de clusters:** Se realiza una iteración del algoritmo K-Means variando el número de clusters entre 3 y 10. Para cada configuración, se aplican varios modelos de Machine Learning y se calcula la métrica de R^2 . El número óptimo de clusters se selecciona en función del modelo que obtenga el mayor valor de R^2 . Los modelos a utilizar son:
 - Linear Regression
 - Support Vector Machine
 - Random Forest
 - K-Nearest Neighbors
 - Decision Tree
 - Gradient Boosting

- AdaBoost
- Neural Network
- Gaussian Process
- XGBoost

De igual manera se utiliza el *método del codo* para validar la selección del número de clusters. Según Humaira, H. (2018), es una técnica utilizada para determinar el número óptimo de *clusters* en algoritmos de agrupamiento, como K-Means. Este método se basa en la evaluación de la suma de los errores al cuadrado dentro del cluster (WCSS, por sus siglas en inglés) en función del número de clusters. Conforme se incrementa el número de clusters, el WCSS disminuye debido a que los datos se ajustan mejor a los centroides de los clusters. Matemáticamente, el WCSS se define como:

$$WCSS = \sum_{i=1}^K \sum_{x \in C_i} \|x - \mu_i\|^2 \quad (3.7)$$

donde K es el número de clusters, C_i es el conjunto de puntos asignados al i -ésimo cluster, x es un punto de datos, y μ_i es el centroide del cluster C_i .

El método del codo implica graficar el WCSS frente al número de clusters. Al aumentar el número de clusters, el WCSS disminuye, pero en algún punto, la reducción se vuelve marginal. Este punto, que forma una curva de codo en el gráfico, se interpreta como el número óptimo de clusters, ya que es donde se logra un balance entre simplicidad del modelo y una adecuada partición de los datos. En la siguiente imagen se tiene un gráfico de ejemplo para el método del codo.

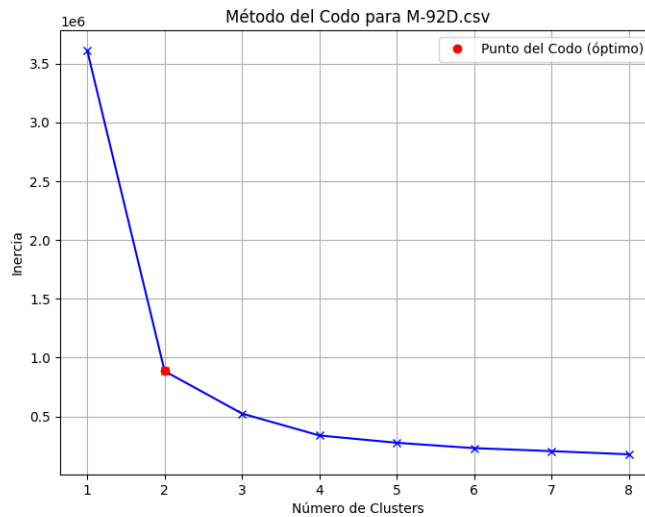


Figura 3.5: Ejemplo del Método del Codo

- **Análisis de Clusters** Se realiza un análisis de los cluster que fueron encontrados por el algoritmo K-Means. El análisis de los clusters se complementó con un Análisis de Componentes Principales (PCA), cuyo objetivo fue reducir la dimensionalidad de los datos

y visualizar la estructura generada por el algoritmo K-Means. El PCA permite transformar las variables originales en un conjunto de componentes principales que capturan la mayor parte de la varianza en los datos.

- **Aplicar Modelo de ML:** Al tener definido el número de clusters en el modelo y el modelo de machine learning a utilizar se realiza una optimización de hiperparámetros con el objetivo de mejorar la predicción del modelo. Para la optimización se utiliza la *optimización bayesiana* de hiperparámetros. Esta es una técnica avanzada utilizada para ajustar los hiperparámetros de los modelos de Machine Learning de manera eficiente. A diferencia de enfoques como la búsqueda aleatoria o la búsqueda en cuadrícula, que exploran el espacio de hiperparámetros de manera exhaustiva o al azar, la optimización bayesiana emplea un enfoque probabilístico para encontrar la configuración óptima.

Este método construye un modelo probabilístico de la función objetivo, generalmente basado en procesos gaussianos, y utiliza la información obtenida de las evaluaciones previas para guiar la búsqueda de nuevos conjuntos de hiperparámetros que probablemente mejoren el rendimiento del modelo. A medida que se explora el espacio de hiperparámetros, el algoritmo actualiza el modelo probabilístico, mejorando la predicción sobre qué combinaciones pueden ofrecer mejores resultados.

- **Estadística de Predicciones:** Se utilizan métricas estadísticas para determinar si el modelo predice los valores de la propiedad mecánica. Las métricas a utilizar son:

- Coeficiente R^2
- Error Absoluto Promedio de Estimación. La formula es:

$$\text{Error (\%)} = \text{avg}\left(\left|\frac{y_{\text{true}}^i - y_{\text{pred}}^i}{y_{\text{true}}^i}\right|\right) \times 100 \quad (3.8)$$

- Gráfico de Dispersión

Capítulo 4

Resultados

4.1. Procesamiento de los Datos de Respuesta

El objetivo de esta sección es caracterizar la energía específica media a partir de los ensayos SILC realizados por Lois-Morales (2022).

Para los datos provenientes del trabajo de Lois-Morales (2022), se utiliza el modelo de Tavares et al. (1998) para la energía específica media, correspondiente a la Ecuación 4.3 para encontrar los parámetros que mejor se ajustan al modelo. Se obtuvieron los siguientes resultados:

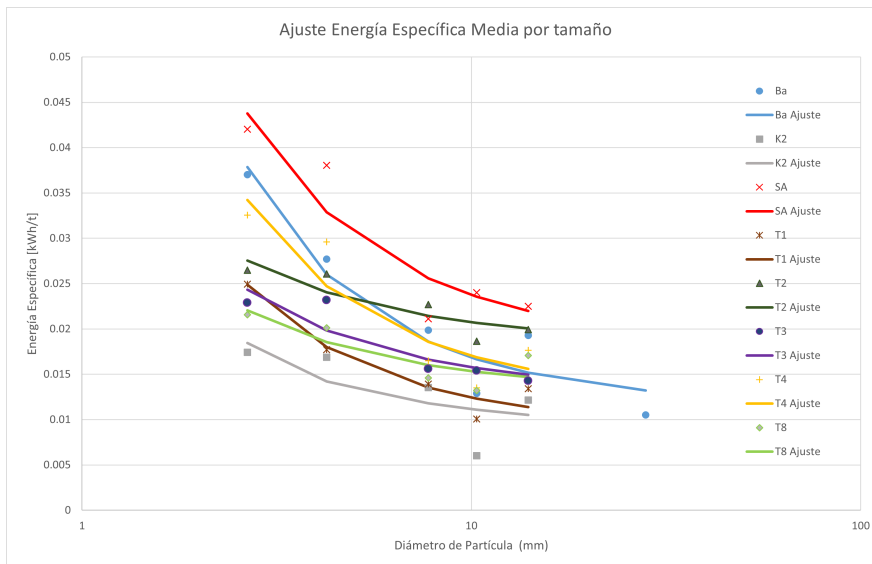


Figura 4.1: Resultados para cada textura y ajuste del modelo de Tavares et al. (1998)

Al realizar los ajuste para cada textura de la Figura 4.1, se obtienen parámetros distintos para cada población de datos. Los resultados para cada parámetro son los siguientes:

Tabla 4.1: Parámetros para el Modelo de Energía Específica Media de Tavares et al. (1998)

Parámetros	Texturas								
	Ba	K2	K4	SA	T1	T2	T3	T4	T8
$E_{m,\infty}$	0.011	0.007	0.008	0.018	0.009	0.018	0.013	0.012	0.013
ϕ	2.167	1.405	1.768	1.832	1.982	1.154	1.488	1.984	1.341
d_{po}	1.966	1.073	1.654	1.676	1.791	1.121	1.398	1.802	1.268
Coefficiente R^2	0.868	0.477	0.637	0.926	0.926	0.774	0.805	0.822	0.682

De la Tabla 5.3, se obtienen los parámetros para el modelo de energía específica media. Por otro lado, se obtiene las estadística descriptiva para los parámetros en la siguiente tabla:

Tabla 4.2: Estadística Descriptiva de Parámetros del Modelo de Tavares et al. (1998)

Parámetro	Media	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo	Número de Datos
$E_{m,\infty}$	0.012	0.0039	0.007	0.018	9
ϕ	1.680	0.324	1.154	2.167	9
d_{po}	1.528	0.292	1.073	1.966	9

De este modo, al caracterizar el output del modelo, se obtienen los valores medios de energía específica que se desean predecir en función del tamaño y la textura. A continuación, se caracteriza el input del modelo para obtener una visión completa del mismo.

Al aplicar el modelo probabilístico para determinar las distribuciones acumuladas y capturar la variabilidad de la energía específica, se utilizó la Ecuación 4.4, ajustando los parámetros mediante mínimos cuadrados y diferenciando según la textura. Los parámetros obtenidos para cada textura se muestran en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Parámetros del Modelo Probabilístico por Textura

Textura	S0	S1	S2	S3	S4	S5
BA	$E_{m,50} = 0.041$ $\sigma_E = 0.193$	$E_{m,50} = 0.013$ $\sigma_E = 0.181$	$E_{m,50} = 0.023$ $\sigma_E = 0.044$	$E_{m,50} = 0.035$ $\sigma_E = 0.301$	$E_{m,50} = 0.019$ $\sigma_E = 0.018$	$E_{m,50} = 0.011$ $\sigma_E = 0.007$
K2	$E_{m,50} = 0.019$ $\sigma_E = 0.140$	$E_{m,50} = 0.006$ $\sigma_E = 0.175$	$E_{m,50} = 0.015$ $\sigma_E = 0.288$	$E_{m,50} = 0.017$ $\sigma_E = 0.072$	$E_{m,50} = 0.013$ $\sigma_E = 0.053$	- -
K4	$E_{m,50} = 0.019$ $\sigma_E = 0.193$	$E_{m,50} = 0.008$ $\sigma_E = 0.036$	$E_{m,50} = 0.014$ $\sigma_E = 0.137$	$E_{m,50} = 0.020$ $\sigma_E = 0.080$	$E_{m,50} = 0.011$ $\sigma_E = 0.061$	- -
SA	$E_{m,50} = 0.045$ $\sigma_E = 0.199$	$E_{m,50} = 0.026$ $\sigma_E = 0.079$	$E_{m,50} = 0.023$ $\sigma_E = 0.153$	$E_{m,50} = 0.044$ $\sigma_E = 0.216$	$E_{m,50} = 0.024$ $\sigma_E = 0.069$	- -
T1	$E_{m,50} = 0.027$ $\sigma_E = 0.158$	$E_{m,50} = 0.015$ $\sigma_E = 0.064$	$E_{m,50} = 0.015$ $\sigma_E = 0.098$	$E_{m,50} = 0.022$ $\sigma_E = 0.261$	$E_{m,50} = 0.014$ $\sigma_E = 0.129$	- -
T2	$E_{m,50} = 0.027$ $\sigma_E = 0.107$	$E_{m,50} = 0.020$ $\sigma_E = 0.137$	$E_{m,50} = 0.024$ $\sigma_E = 0.072$	$E_{m,50} = 0.027$ $\sigma_E = 0.095$	$E_{m,50} = 0.021$ $\sigma_E = 0.041$	- -
T3	$E_{m,50} = 0.026$ $\sigma_E = 0.204$	$E_{m,50} = 0.016$ $\sigma_E = 0.096$	$E_{m,50} = 0.017$ $\sigma_E = 0.072$	$E_{m,50} = 0.027$ $\sigma_E = 0.140$	$E_{m,50} = 0.015$ $\sigma_E = 0.123$	- -
T4	$E_{m,50} = 0.035$ $\sigma_E = 0.195$	$E_{m,50} = 0.015$ $\sigma_E = 0.175$	$E_{m,50} = 0.017$ $\sigma_E = 0.060$	$E_{m,50} = 0.031$ $\sigma_E = 0.107$	$E_{m,50} = 0.018$ $\sigma_E = 0.126$	- -
T8	$E_{m,50} = 0.022$ $\sigma_E = 0.092$	$E_{m,50} = 0.014$ $\sigma_E = 0.106$	$E_{m,50} = 0.016$ $\sigma_E = 0.086$	$E_{m,50} = 0.021$ $\sigma_E = 0.084$	$E_{m,50} = 0.017$ $\sigma_E = 0.033$	- -

En las Figura 4.2 y 4.3, se muestran las distribuciones acumuladas de la energía específica por tamaño para cada textura.

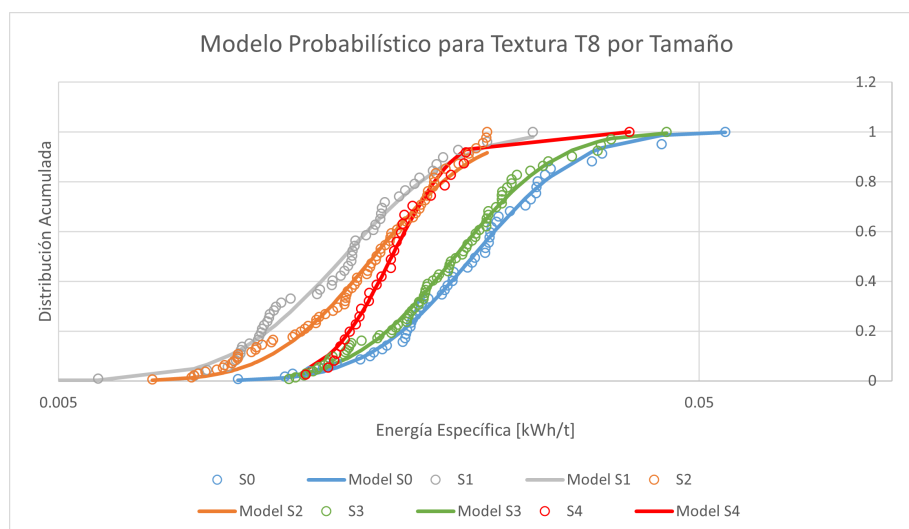
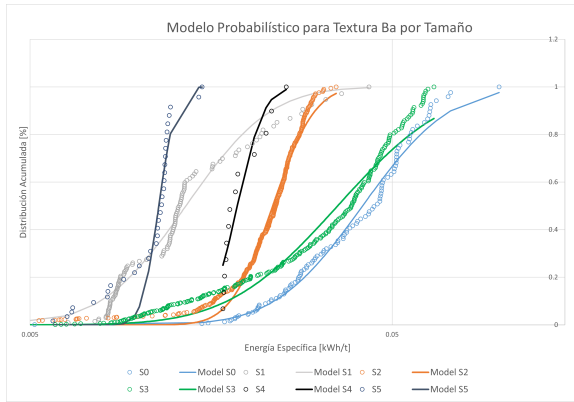
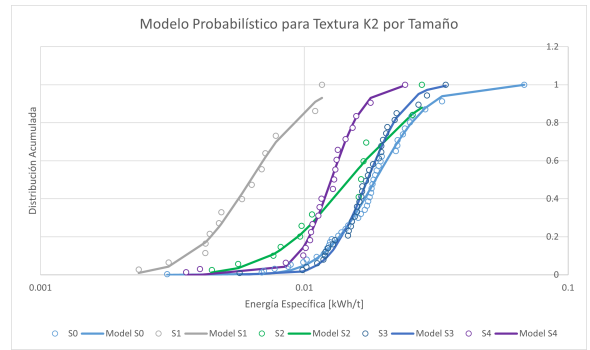


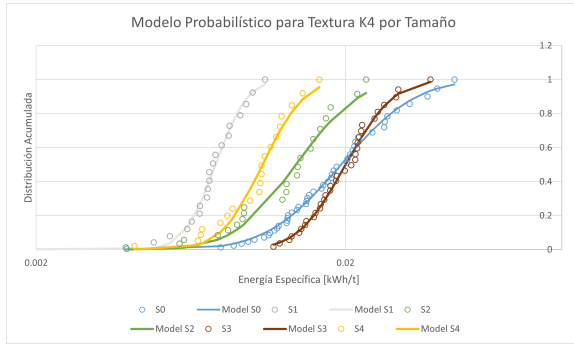
Figura 4.3: Distribución Acumulada de la Energía Específica para la Textura T8



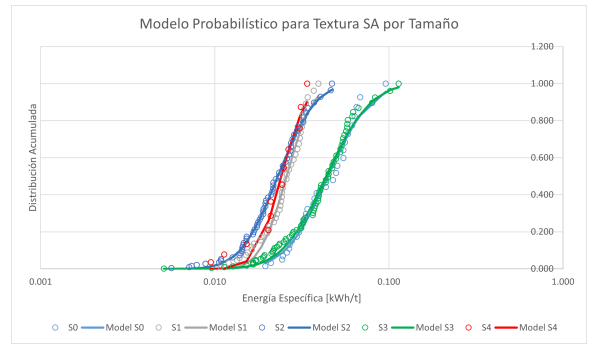
(a) Textura BA



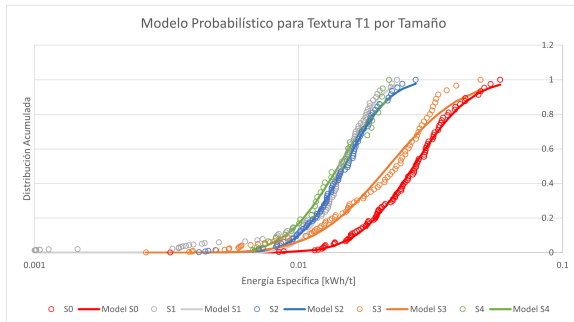
(b) Textura K2



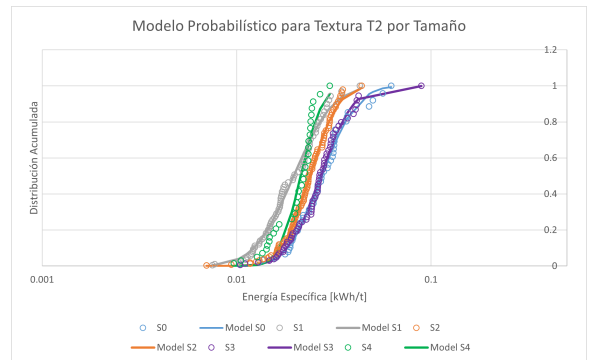
(c) Textura K4



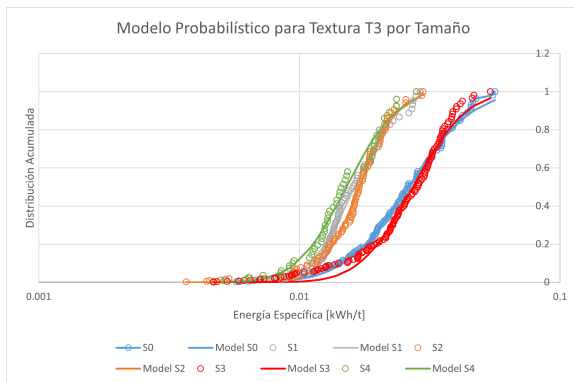
(d) Textura SA



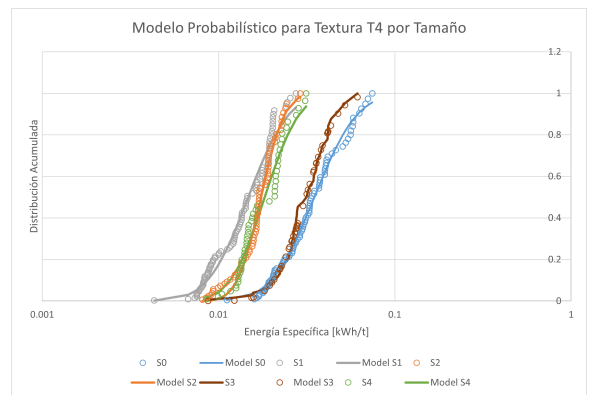
(e) Textura T1



(f) Textura T2



(g) Textura T3



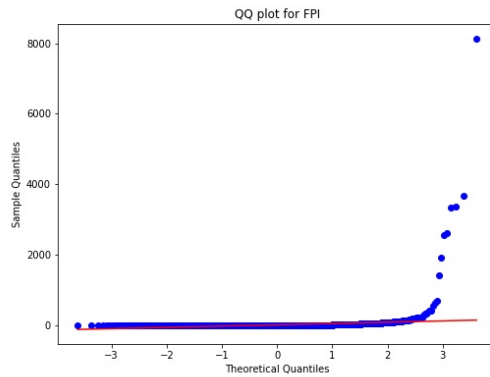
(h) Textura T4

Figura 4.2: Distribuciones acumuladas de la energía específica por tamaño para cada textura.

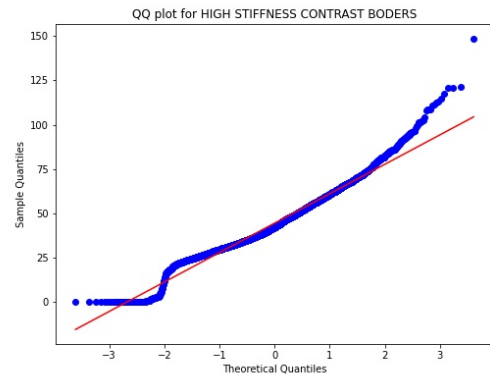
4.2. Procesamiento de las Variables de Entrada

El objetivo de esta sección es caracterizar mediante el algoritmo de Bag of Words (BOW), los 7 indicadores provenientes de imágenes QEMSCAN.

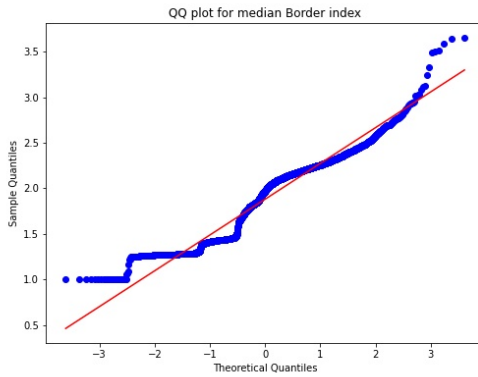
Primero, se lleva a cabo un análisis de las distribuciones de las 7 variables recibidas, comparándolas con una distribución normal. Las variables que siguen una distribución normal son las siguientes:



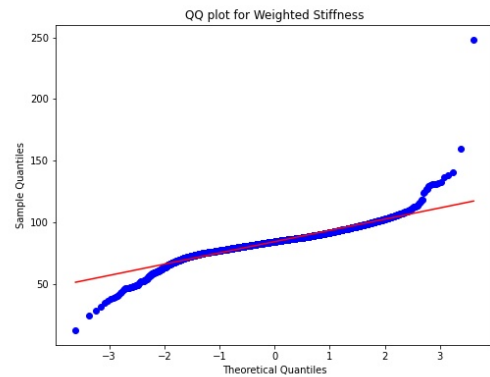
(a) QQ-Plot para la variable Densidad Fractal de Empaquetamiento (FPI)



(b) QQ-Plot para la variable Tamaño Máximo de Grano



(c) QQ-Plot para la variable Índice de Borde

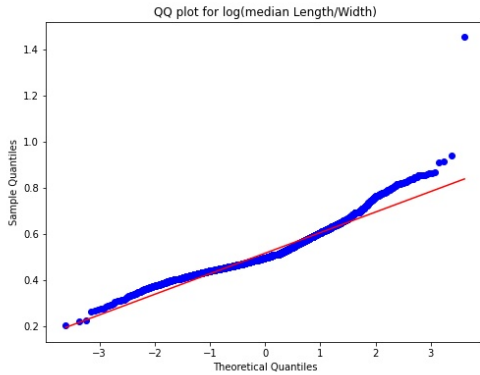


(d) QQ-Plot para la variable Rigidez Ponderada

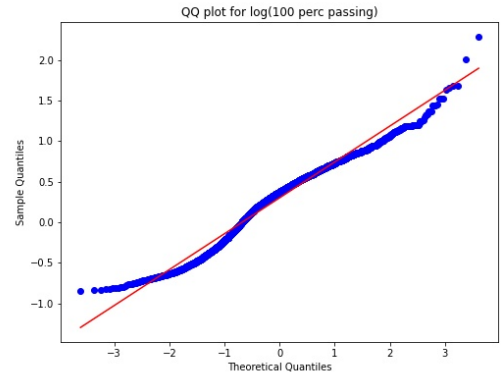
Figura 4.4: Variables que siguen una distribución normal

Los valores de FPI extremadamente altos fueron eliminados del análisis debido a su comportamiento como outliers, tal como se evidencia en el gráfico QQ plot. Estos valores se alejan significativamente de la tendencia esperada para una distribución normal, lo que sugiere que podrían ser producto de ruido experimental o representaciones atípicas del comportamiento de las partículas.

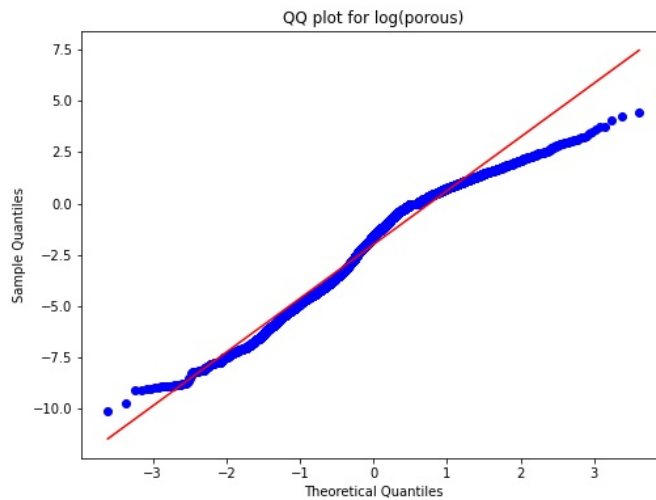
Por otro lado, algunas variables siguen una distribución log-normal. Estas variables son las siguientes:



(a) QQ-Plot para la variable Relación de Aspecto



(b) QQ-Plot para la variable Índice de Contraste



(c) QQ-Plot para la variable Porcentaje de Vacíos

Figura 4.5: Variables que siguen una distribución log-normal

De la Figura 4.5, se identifican tres variables que presentan una distribución log-normal. En consecuencia, se aplica una transformación logarítmica a los datos correspondientes.

Después de transformar las variables, se implementa el algoritmo Bag of Words (BOW). A partir de los datos, se genera una base con las características de todos los granos, con el fin de aplicar un algoritmo de clustering como K-Means. Para determinar el número óptimo de clusters, se prueba con diferentes cantidades de clusters y se selecciona el mejor modelo para cada caso, utilizando el R^2 como criterio de evaluación. El coeficiente R^2 se calcula después

de utilizar la metodología leave-one-out. El resumen de los resultados se presenta en la Tabla 4.4:

Tabla 4.4: Variabilidad del número de cluster y el mejor modelo para cada caso

Cluster	Mejor Modelo $E_{m,50}$	R^2
3	Linear Regression	-0.16
4	XGBoost	0.14
5	XGBoost	-0.06
6	XGBoost	0.71
7	AdaBoost	0.59
8	Gradient Boosting	0.46
9	Random Forest	0.38
10	Random Forest	0.35

Por lo tanto, el número óptimo de cluster es 6 y el modelo a utilizar es XGBoost. De igual manera, se emplea el método del codo, que consiste en calcular la suma de los errores cuadráticos dentro de los clusters (WCSS) para diferentes cantidades de clusters. A medida que el número de clusters aumenta, la WCSS disminuye, pero llega un punto en el que la reducción se vuelve menos significativa, formando un codo en el gráfico. Este punto indica el número adecuado de clusters a utilizar. Se obtienen los siguientes errores cuadráticos para la base de datos conjunta:

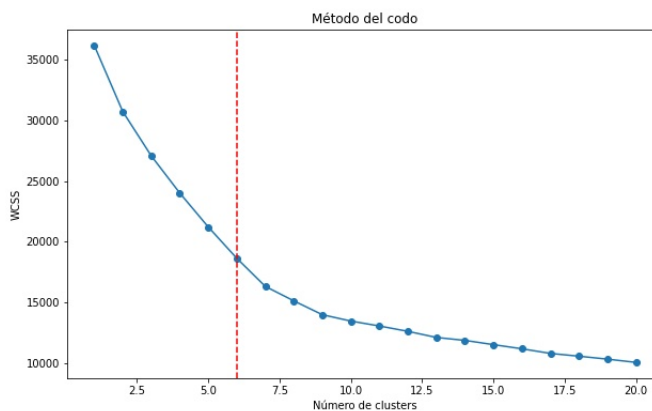


Figura 4.6: Método del Codo para el algoritmo de K-Means

En la Figura 4.6, se observa la suma de errores cuadráticos para el cluster óptimo. Por lo tanto, este será el valor utilizado para la clusterización.

Además, se realizó un análisis de componentes principales (PCA) con el objetivo de visualizar la clusterización generada por el algoritmo K-Means. A continuación, se muestra la varianza explicada por cada componente en la base de datos de los clusters:

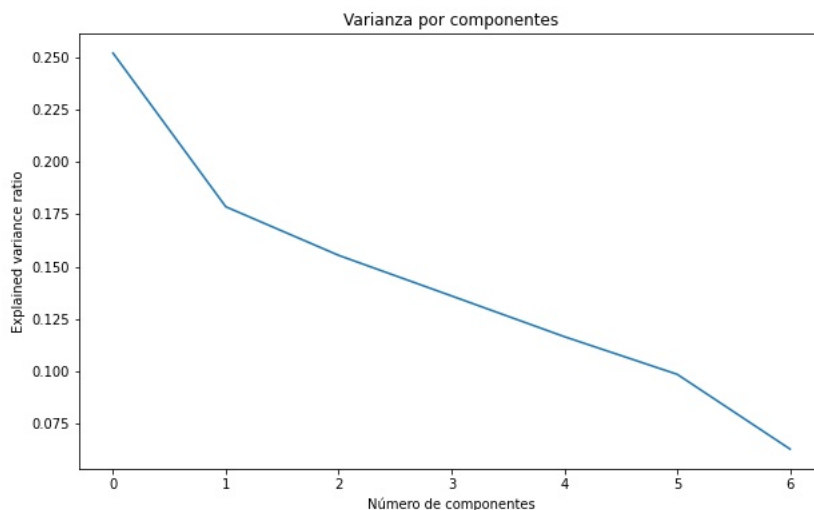


Figura 4.7: Varianza por Componentes del PCA

De la Figura 4.7, se observa que la primera componente principal del PCA explica únicamente el 25% de la variabilidad de los datos. Debido a ello, se realiza un scatter plot con las 2 principales componentes encontradas por el PCA que en conjunto explican el 43% de la variabilidad. Se obtuvo lo siguiente:

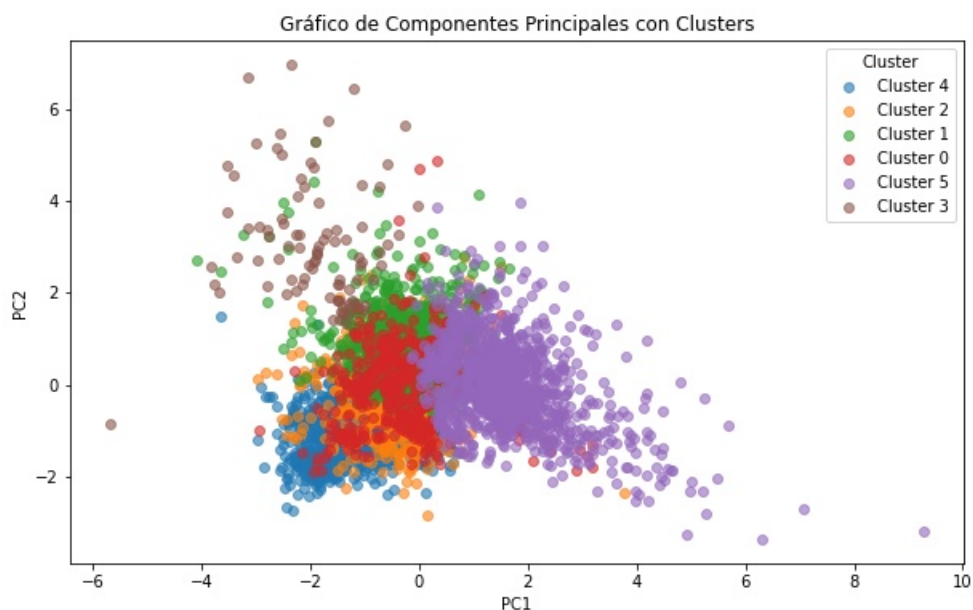
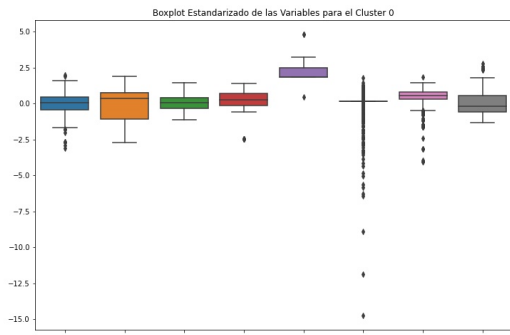
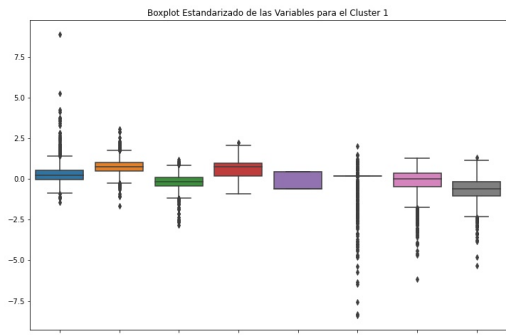


Figura 4.8: Gráfico de Primera y Segunda Componente Principal

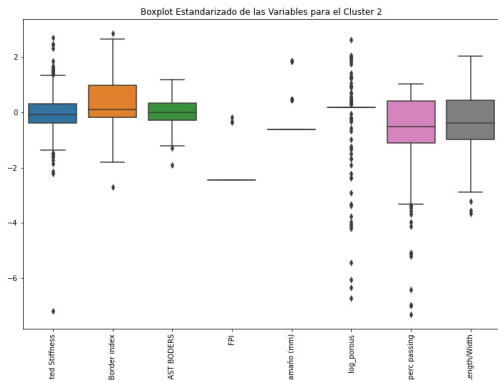
En la Figura 4.8, se observa una superposición entre los clusters, lo que indica posibles interacciones o solapamientos entre los grupos. Además, se han generado gráficos de tipo boxplot para cada cluster, utilizando las 8 variables empleadas en el proceso de clusterización. Los resultados son los siguientes:



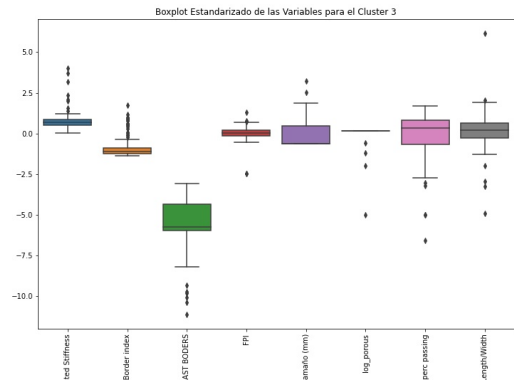
(a) Cluster 0



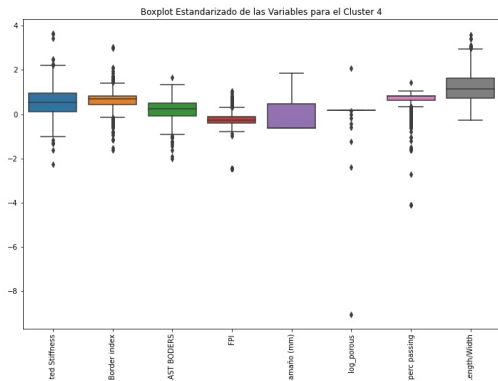
(b) Cluster 1



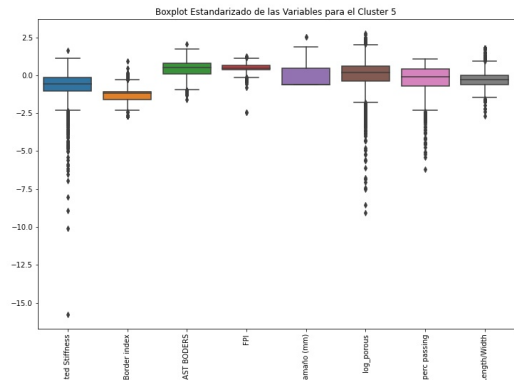
(c) Cluster 2



(d) Cluster 3



(e) Cluster 4



(f) Cluster 5

Figura 4.9: Boxplots para los diferentes clusters.

En los boxplots, se observa que algunas variables tienen una mayor variabilidad dentro de ciertos clusters. Por ejemplo, variables como Rigidez Ponderada o Densidad Fractal de Empaquetamiento pueden presentar distribuciones diferentes en cada cluster. Si una variable muestra una gran diferencia entre clusters, esa variable puede ser clave para definir las características distintivas de cada cluster.

Una vez definidos los clusters, se procede a utilizar el algoritmo Bag of Words. Al aplicar K-Means, es posible transformar cada combinación de textura y tamaño en un histograma que muestra la proporción de datos en cada cluster. Para la textura Ba, se obtuvieron los siguientes resultados:

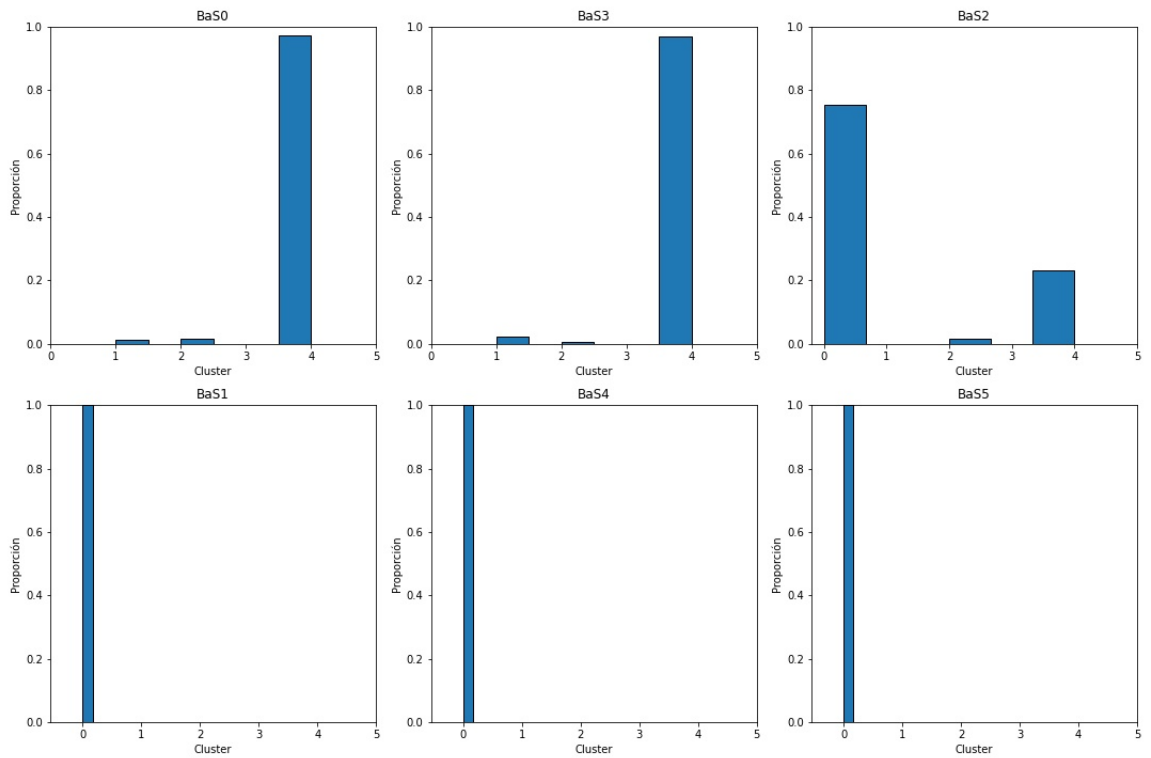


Figura 4.10: Histogramas para la Textura Ba en función del Tamaño

Para la textura K2, se obtuvieron los siguientes resultados:

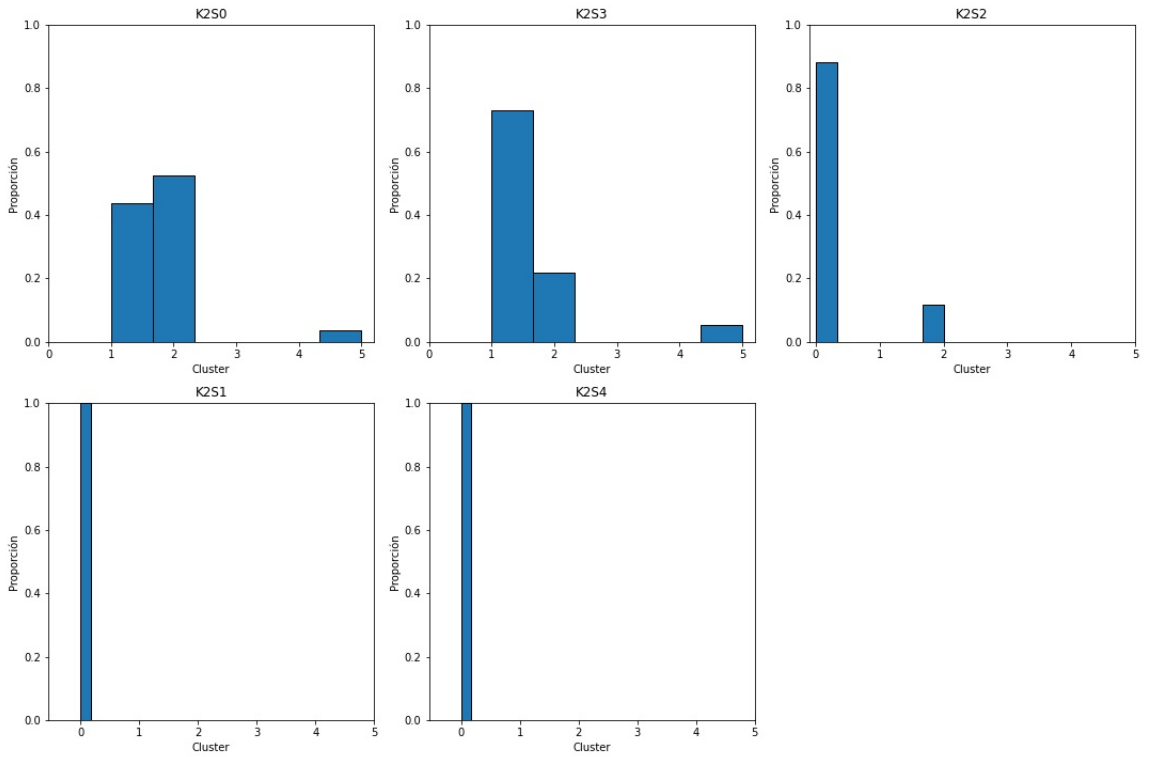


Figura 4.11: Histogramas para la Textura K2 en función del Tamaño

Para la textura K4, se obtuvieron los siguientes resultados:

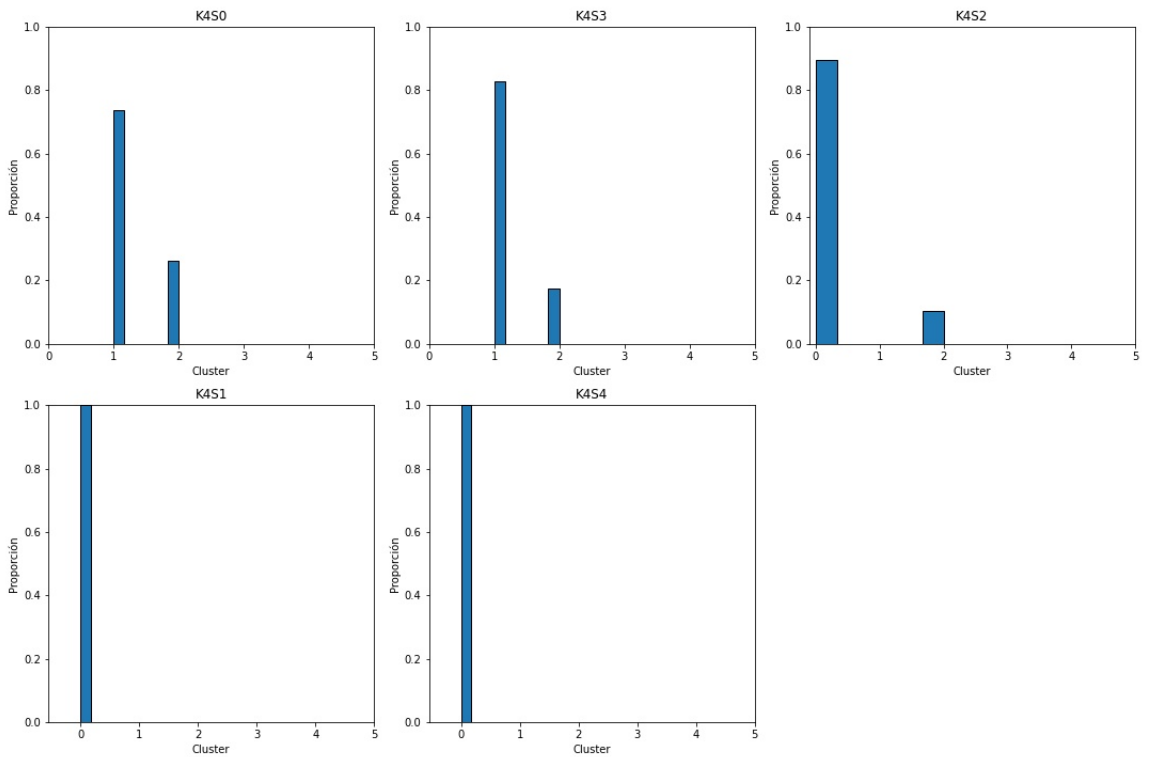


Figura 4.12: Histogramas para la Textura K4 en función del Tamaño

Para la textura SA, se obtuvieron los siguientes resultados:

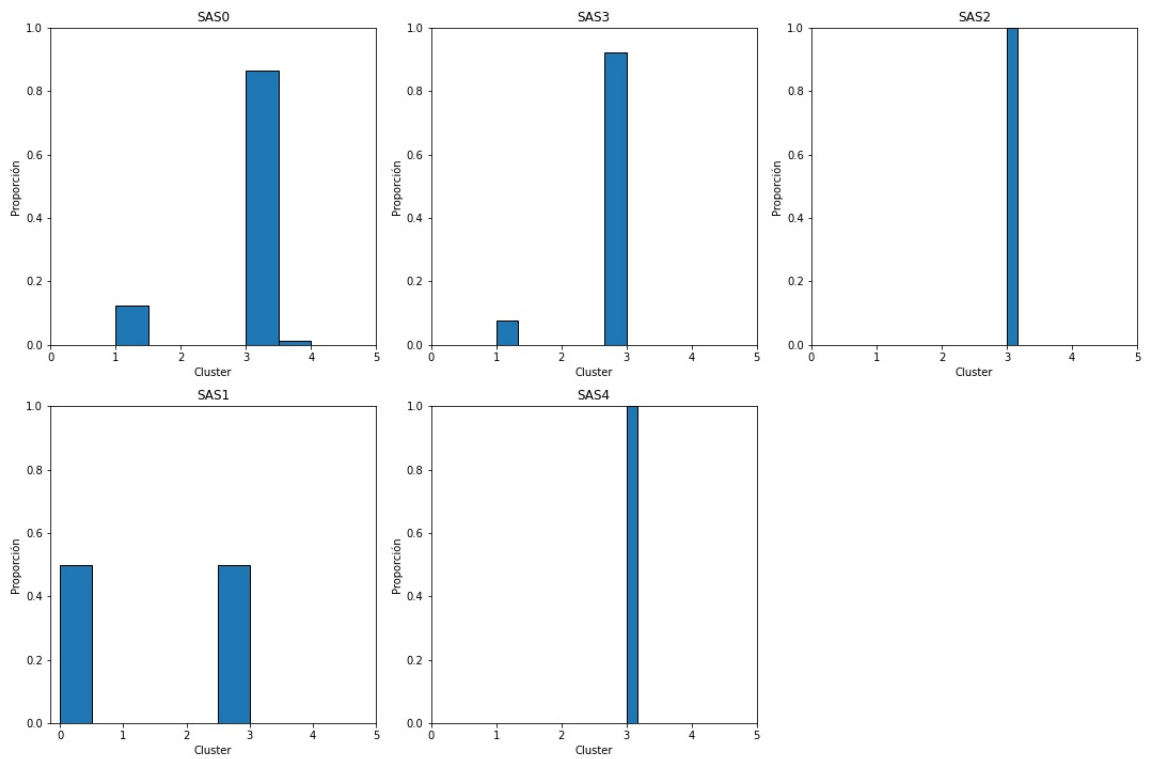


Figura 4.13: Histogramas para la Textura SA en función del Tamaño

Para la textura T1, se obtuvieron los siguientes resultados:

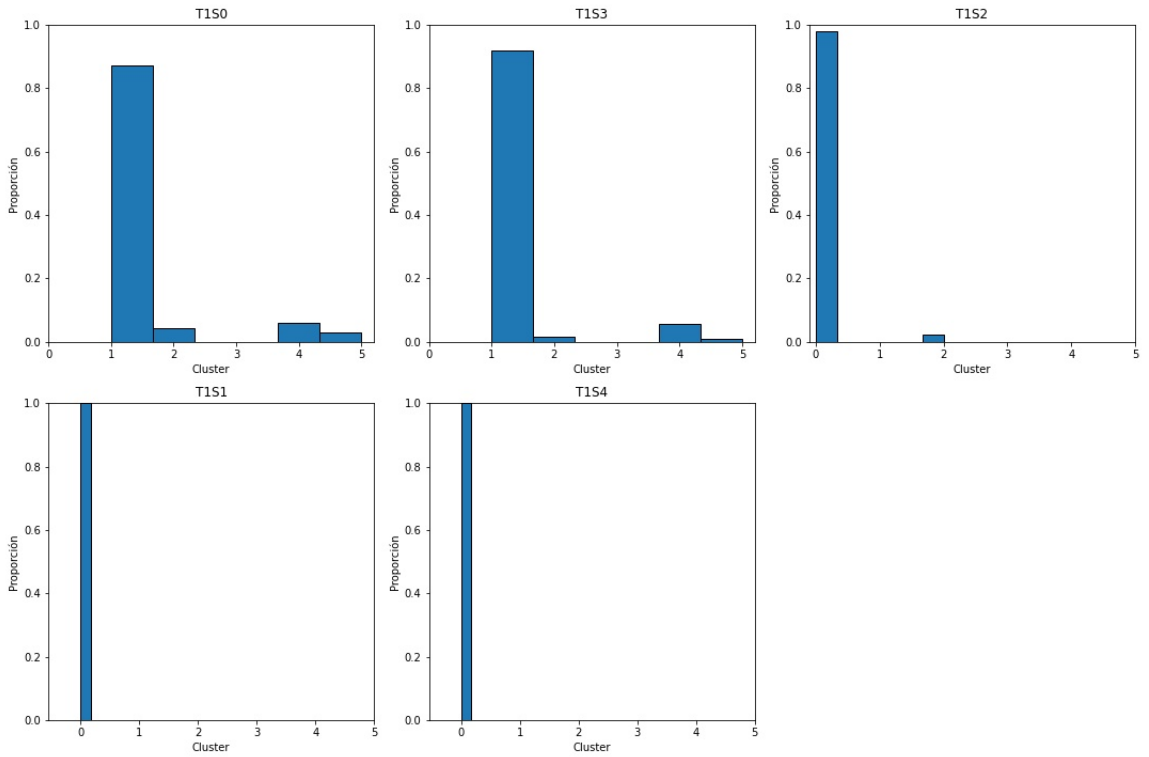


Figura 4.14: Histogramas para la Textura T1 en función del Tamaño

Para la textura T2, se obtuvieron los siguientes resultados:

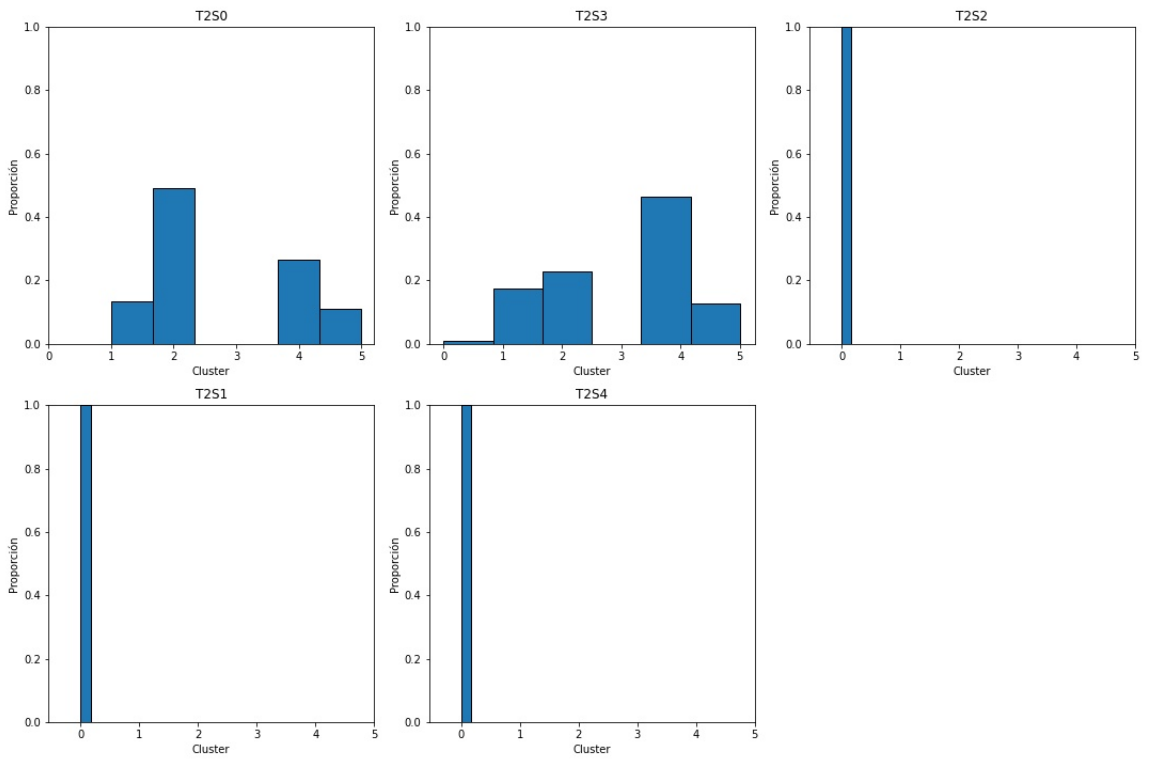


Figura 4.15: Histogramas para la Textura T2 en función del Tamaño

Para la textura T3, se obtuvieron los siguientes resultados:

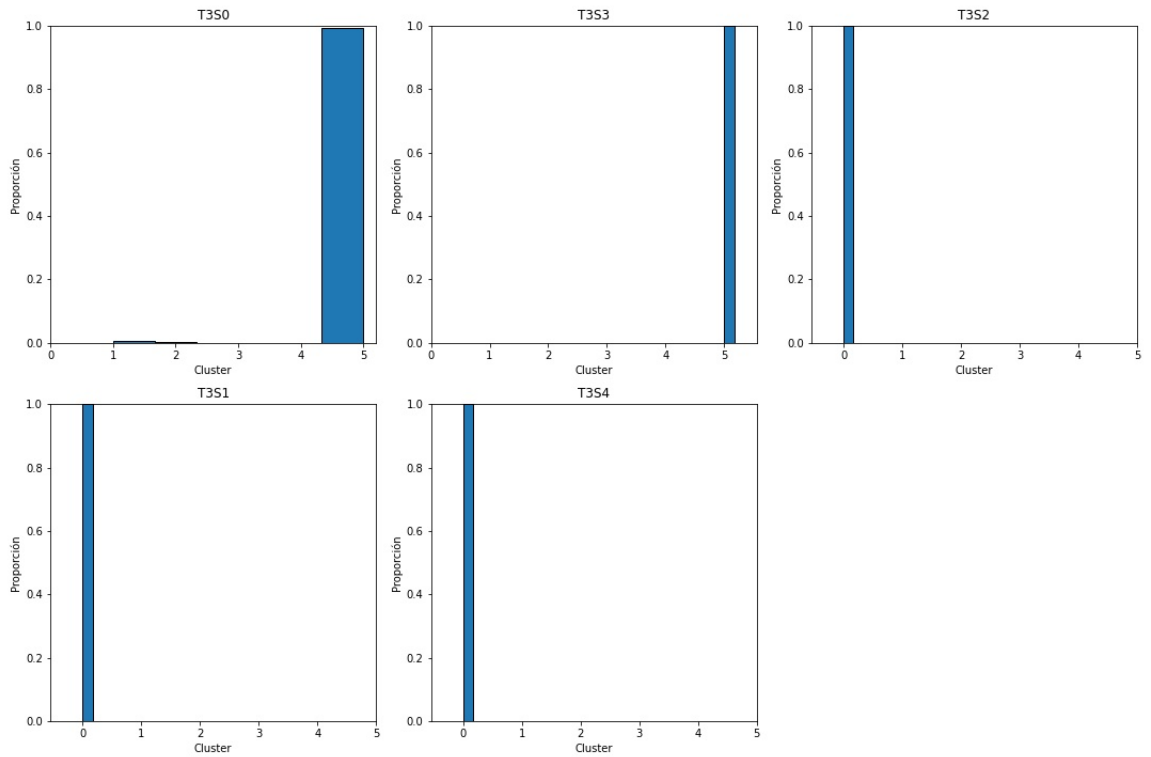


Figura 4.16: Histogramas para la Textura T3 en función del Tamaño

Para la textura T4, se obtuvieron los siguientes resultados:

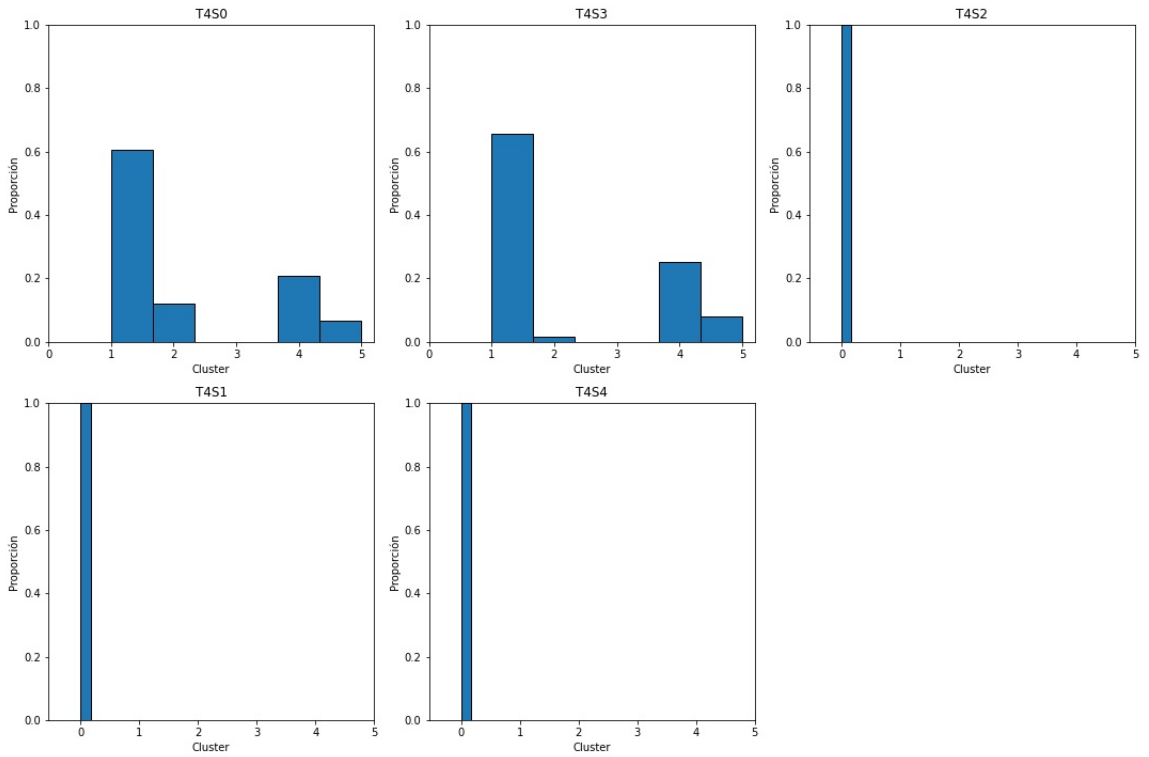


Figura 4.17: Histogramas para la Textura T4 en función del Tamaño

Para la textura T8, se obtuvieron los siguientes resultados:

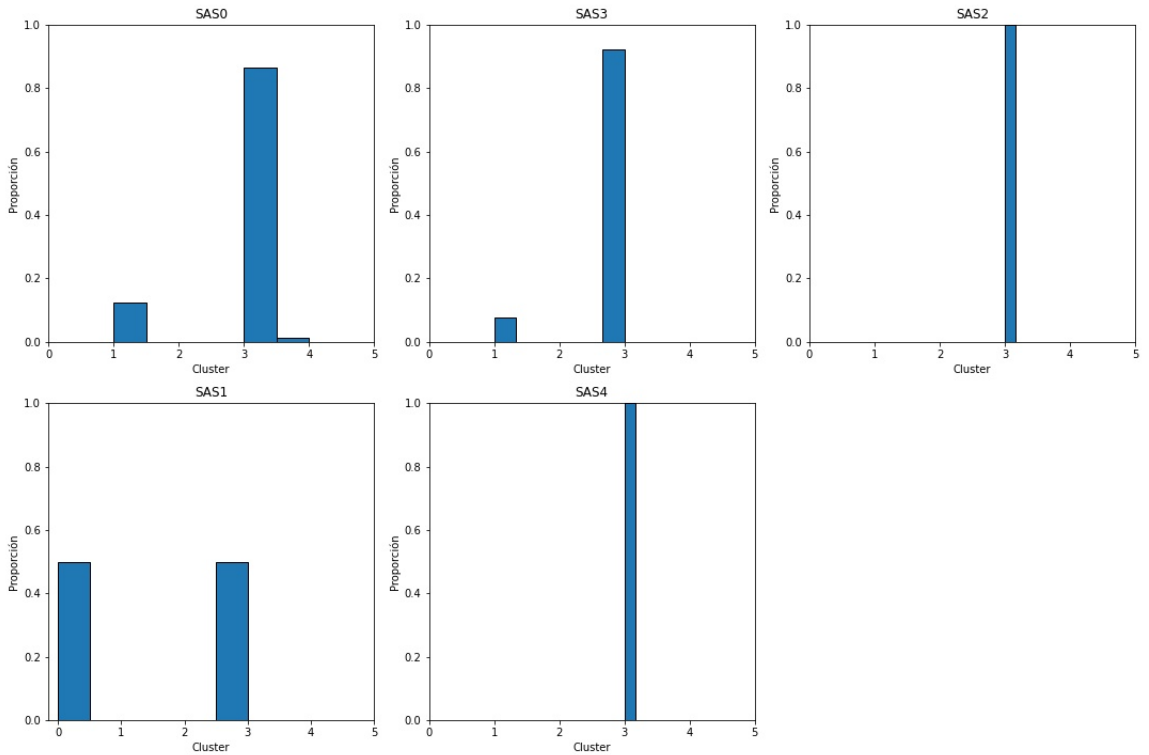


Figura 4.18: Histogramas para la Textura T8 en función del Tamaño

Como resultado del análisis, se genera una base de datos donde cada imagen se representa como un vector de 6 dimensiones, correspondiendo cada dimensión a la proporción de un cluster en dicha imagen. Así, el input del modelo se resume en la siguiente figura:

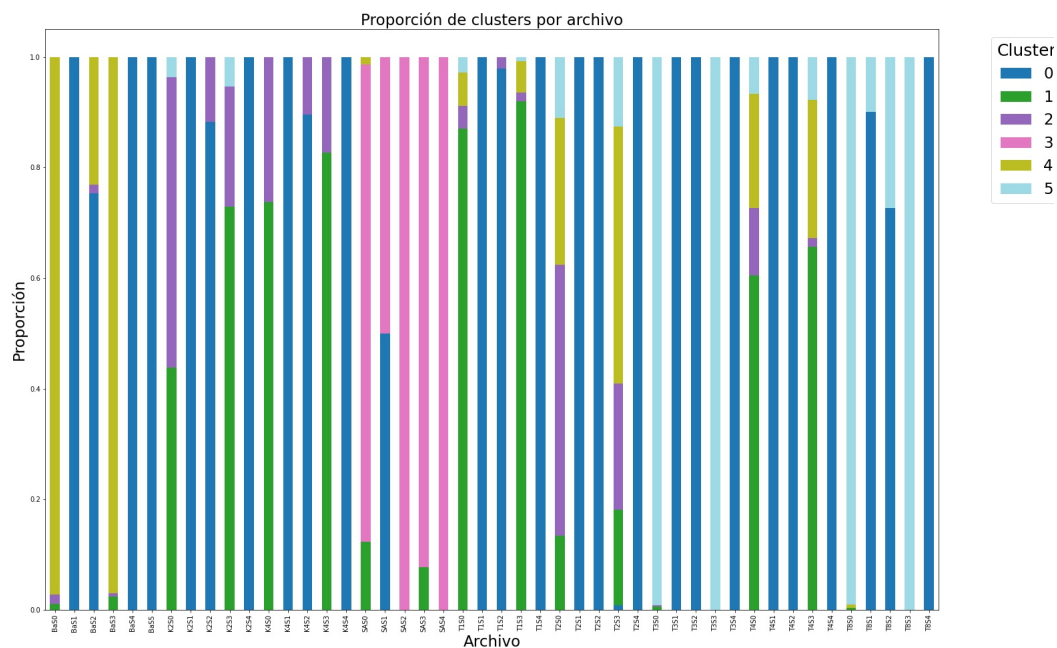


Figura 4.19: Proporción de Cluster por cada Imagen

En la Figura 4.19, se presenta el resumen de las proporciones de clusters para cada imagen, que servirán como input para el modelo de machine learning. En este gráfico, se puede observar una distribución variada de clusters a través de los archivos, lo cual sugiere heterogeneidad en la composición de los datos. En algunos archivos, como los que tienen nombres como BaS0, BaS1, y K2S0, predomina un solo cluster (principalmente el cluster 0, representado en azul oscuro), con poca o ninguna presencia de otros clusters. Esto indica que estos archivos contienen datos que se agrupan principalmente en una sola categoría, lo que podría reflejar una homogeneidad de dicho archivo relativa a las características de la población de todos los granos.

Por otro lado, en archivos como SAS0, SAS2, y algunos de la serie T, se observa una mayor diversidad en la distribución de los clusters, con varios clusters representados en proporciones más equilibradas. Este fenómeno sugiere una mayor variabilidad interna en los datos de esos archivos, lo que podría estar relacionado con la presencia de diferentes patrones o características que no son homogéneas dentro del archivo. A partir de esto, se procede a entrenar y validar el modelo utilizando técnicas de machine learning.

4.3. Modelo Planteado para la Energía Específica Media

El objetivo del modelo es predecir la energía específica media ($E_{m,50}$) en función de los clusters definidos por el BOW. Para ello, se emplea el algoritmo **XGBoost**, conocido por su capacidad de manejo eficiente de datos tabulares, su robustez frente a ruido en los datos y su alto rendimiento en tareas de regresión y clasificación.

La base de datos con los clusters se transforma para incluir términos de interacción polinómica de hasta cuarto grado, lo que permite capturar posibles relaciones no lineales entre las variables independientes. Posteriormente, estas características transformadas se normalizan mediante la técnica `StandardScaler`, asegurando que todas las variables tengan una escala uniforme y mejorando la estabilidad del modelo durante el entrenamiento.

Para la optimización de los hiperparámetros del modelo, se empleó un enfoque de búsqueda bayesiana utilizando `BayesSearchCV`, el cual permite explorar de manera eficiente un espacio de hiperparámetros previamente definido según Kirchnoff et al. (2024). Los hiperparámetros optimizados incluyen el número de estimadores, la tasa de aprendizaje y la profundidad máxima de los árboles, entre otros. La búsqueda se llevó a cabo mediante validación cruzada con una separación del 30% del set de datos para el set de prueba. El objetivo es maximizar el coeficiente de determinación (R^2), que evalúa la calidad del ajuste del modelo.

Para la optimización del modelo `XGBRegressor`, que según Chen et al. (2016) es una implementación del algoritmo de gradient boosting ampliamente utilizado en tareas de regresión, se aprovecharon sus características para mejorar el rendimiento. `XGBoost` construye árboles de decisión secuenciales, donde cada árbol trata de corregir los errores del anterior minimizando una función de pérdida mediante optimización por descenso de gradiente. Con base en estas propiedades, la búsqueda bayesiana se dirigió hacia el siguiente espacio de hiperparámetros:

Tabla 4.5: Espacio de búsqueda de hiperparámetros para la optimización bayesiana.

Hiperparámetro	Rango de Búsqueda
<code>n_estimators</code>	<code>Integer(50, 2000)</code>
<code>learning_rate</code>	<code>Real(0.0001, 0.5, prior='log-uniform')</code>
<code>max_depth</code>	<code>Integer(3, 10)</code>
<code>min_child_weight</code>	<code>Integer(1, 10)</code>
<code>subsample</code>	<code>Real(0.5, 1.0, prior='uniform')</code>
<code>colsample_bytree</code>	<code>Real(0.3, 1.0, prior='log-uniform')</code>
<code>gamma</code>	<code>Real(0, 10)</code>
<code>reg_alpha</code>	<code>Real(0, 1)</code>
<code>reg_lambda</code>	<code>Real(0, 1)</code>

Se utilizó el modelo `XGBoost` como base, y se implementó `BayesSearchCV` para realizar la

optimización bayesiana, con un total de 30 iteraciones y validación cruzada con 2 particiones ($cv=2$). Los mejores hiperparámetros encontrados son:

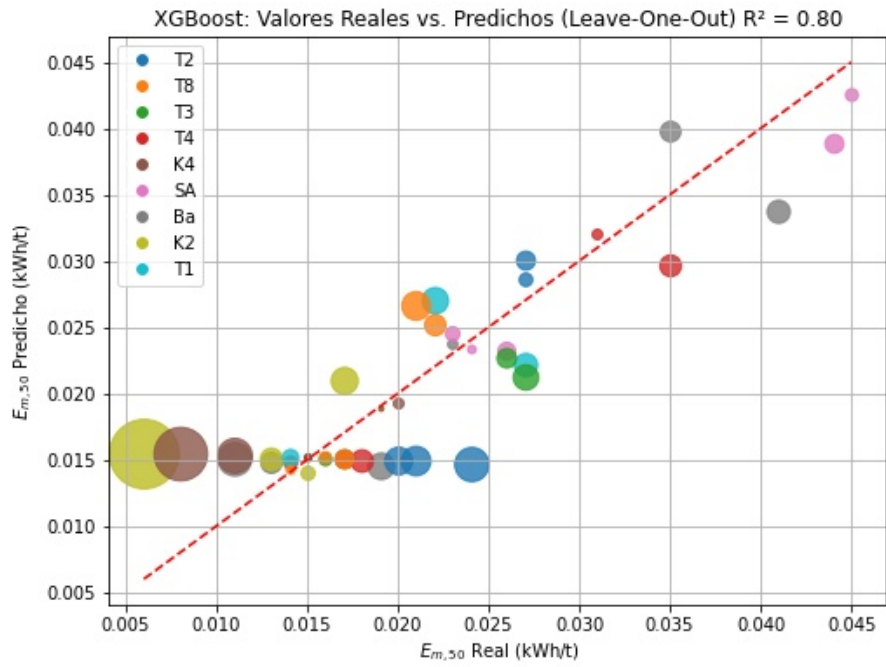
Tabla 4.6: Valores óptimos de los hiperparámetros obtenidos

Hiperparámetro	Valor Óptimo
colsample_bytree	1.0
gamma	0.0
learning_rate	0.0257
max_depth	4
min_child_weight	1
n_estimators	2050
reg_alpha	0.0
reg_lambda	1.0
subsample	0.42

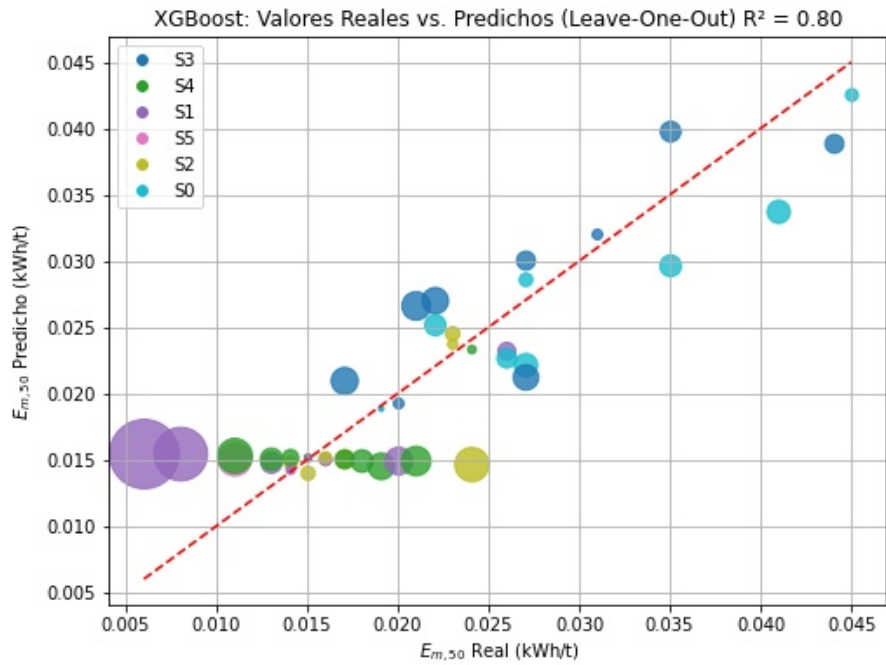
Una vez obtenidos los mejores hiperparámetros de la Tabla 4.6, el modelo final es entrenado y validado mediante la técnica Leave-One-Out Cross-Validation (LOO), que según Vehtari, A. et al. (2017) consiste en dejar una muestra fuera para pruebas en cada iteración, utilizando el resto del conjunto para entrenamiento. Este enfoque garantiza que el modelo sea evaluado de manera exhaustiva, dado el tamaño reducido del conjunto de datos. Con todas estas consideraciones, se obtuvieron los siguientes resultados:

De la Figura 4.20, se obtiene que el modelo obtiene un $R^2 = 0.8$. El tamaño de los puntos en el gráfico se incrementa a medida que aumenta el error en la predicción de la energía específica media, lo que ofrece una representación visual efectiva de la magnitud de los errores en cada caso. Además, el error promedio de las predicciones del modelo se sitúa en un 17 %.

El modelo final, optimizado con los hiperparámetros indicados en la Tabla 4.6 y validado mediante la técnica Leave-One-Out Cross-Validation (LOO), logró un R^2 de 0.8, lo que indica un ajuste sólido a los datos. Los gráficos en la Figura 4.20 ofrecen una representación visual clara de los errores de predicción, mostrando un tamaño más grande del punto cuando se tiene un error mayor. Se obtiene un error promedio del 17 %, el modelo presenta un buen desempeño en la predicción de la energía específica media, a pesar del tamaño reducido del conjunto de datos. Por lo tanto, se procede a analizar los resultados obtenidos.



(a) Modelo XGBoost diferenciado por Texturas



(b) Modelo XGBoost diferenciado por Tamaño

Figura 4.20: Resultados para la Energía Específica Media

Capítulo 5

Discusiones

El análisis de los datos provenientes de QEMSCAN utilizando el modelo de Tavares et al. (1998) proporciona una visión detallada sobre la energía específica de diferentes texturas de roca. Los parámetros obtenidos para cada textura, como se muestra en la Tabla 5.3, indican variaciones significativas en la energía específica media, la eficiencia de fractura y el tamaño de las partículas. Estos resultados son fundamentales para comprender cómo diferentes texturas de roca responden a los procesos de conminución.

La estadística descriptiva de los parámetros del modelo, presentada en la Tabla 4.1, resalta la variabilidad intrínseca en los datos. Por ejemplo, el parámetro $E_{m,\infty}$ muestra una media de 0.012 [kWh/t] con una desviación estándar de 0.0039, lo que indica una dispersión moderada alrededor de la media. Esto sugiere que, aunque hay una tendencia general, existen diferencias notables en la energía específica media entre las diferentes texturas. El parámetro ϕ , que representa la eficiencia de fractura, tiene una media de 1.680 y una desviación estándar de 0.324. La alta variabilidad en ϕ indica que la eficiencia de fractura varía considerablemente entre las texturas. Esto podría estar relacionado con la heterogeneidad de las propiedades físicas y mecánicas de las rocas, que afecta cómo se rompen bajo ciertos mecanismos. El parámetro d_{po} , que describe el tamaño característico de las partículas después de la fractura, tiene una media de 1.528 y una desviación estándar de 0.292. La variabilidad en d_{po} sugiere diferencias significativas en la distribución del tamaño de las partículas post-fractura entre las texturas.

El modelo probabilístico, ajustado mediante mínimos cuadrados, proporciona distribuciones acumuladas de energía específica que capturan la variabilidad de los datos experimentales. La Figura 4.2 demuestran que los ajustes del modelo son capaces de representar adecuadamente la distribución de la energía específica para diferentes texturas de roca. En particular, el modelo probabilístico no logra capturar toda la variabilidad de la textura K2. Lo que podría dar un indicio de falta de representatividad en las partículas ensayadas mediante el SILC. Por otro lado, las diferencias en los parámetros $E_{m,50}$ y σ_E entre texturas como BA, K2 y K4 sugieren que cada textura tiene características únicas que deben ser consideradas al modelar su comportamiento energético.

El ajuste de parámetros mediante el modelo probabilístico revela información crítica sobre la heterogeneidad de las rocas. Por ejemplo, la textura BA tiene un $E_{m,50}$ significativamente más alto en comparación con otras texturas, lo que indica que requiere más energía para

alcanzar un estado de conminución equivalente. Por otro lado, la textura K2 muestra una mayor dispersión en los valores de energía específica, como se refleja en su σ_E , lo que puede implicar una variabilidad mayor en sus propiedades físicas y mecánicas. La textura K4, en comparación, presenta un $E_{m,50}$ moderado con una dispersión relativamente controlada, lo que podría indicar una estructura más homogénea.

Asimismo, las texturas SA, T1, T2, T3, T4 y T8 muestran comportamientos distintos. En la Figura 4.2, la textura SA presenta un $E_{m,50}$ relativamente alto y una σ_E que indica una variabilidad considerable, lo cual puede reflejar una mayor heterogeneidad en las propiedades de la roca. La Figura 4.2 muestran que las texturas T1 y T2 tienen $E_{m,50}$ y σ_E que sugieren una respuesta energética moderada, con cierta variabilidad que puede ser relevante en procesos específicos de conminución.

Las texturas T3 y T4, representadas en la Figura 4.2, tienen $E_{m,50}$ y σ_E que indican comportamientos energéticos particulares, con T3 mostrando una mayor dispersión en comparación con T4, lo que podría implicar diferencias en la eficiencia de fractura y en la distribución del tamaño de partículas post-fractura. Finalmente, la textura T8, como se muestra en la Figura 4.2, presenta un $E_{m,50}$ y una σ_E que reflejan una energía específica moderada con una variabilidad controlada, sugiriendo una estructura relativamente homogénea en comparación con otras texturas.

En la caracterización del input al modelo de ML se realiza un análisis exhaustivo de los resultados de Lois-Morales (2020). Inicialmente, en las Figuras 4.4 y 4.5 se presenta el análisis de las distribuciones de las variables. Se observa que algunas variables, como la Densidad de Empaquetamiento y Índice de Contraste, siguen una distribución normal, lo cual es verificado mediante los gráficos QQ-Plot. Este comportamiento indica que dichas variables tienen una distribución simétrica alrededor de la media, lo que permite aplicar métodos estadísticos tradicionales para su análisis. En contraste, otras variables, como Relación de Aspecto y Tamaño Máximo de Grano, presentan una distribución log-normal, lo que sugiere una alta concentración de valores bajos con una cola hacia la derecha. Este patrón puede deberse a las características intrínsecas de los materiales evaluados, donde algunas propiedades físicas tienden a seguir este tipo de distribuciones.

Luego de aplicar la transformación logarítmica a las variables con distribución log-normal, se procede a la implementación del algoritmo de clusterización K-Means. En la Figura 4.6, el Método del Codo sugiere que el número óptimo de clusters es 6, lo que es coherente con las características heterogéneas de los materiales analizados. La elección de este número de clusters es crucial para capturar adecuadamente la variabilidad entre las diferentes texturas y tamaños. Los histogramas de las Figuras 4.10 a 4.18 muestran la proporción de cada cluster en función de la textura y el tamaño. Un comportamiento destacado es la variación significativa en la distribución de los clusters entre diferentes texturas. Por ejemplo, en la textura Ba (4.10), se observa una mayor proporción de un cluster dominante, mientras que en la textura K4 (4.12), los clusters están más equilibrados. Este patrón sugiere que las características mecánicas de cada textura tienen una influencia marcada en la distribución de los clusters, lo que podría estar relacionado con la composición mineralógica y el tamaño de grano de las muestras.

El análisis de componentes principales (PCA) se utilizó para visualizar la clusterización generada. En la Figura 4.7, se muestra que la primera componente principal explica solo el 25 % de la variabilidad de los datos, lo que indica que la variabilidad está distribuida entre múltiples dimensiones. El gráfico de la Figura 4.8, que representa las dos primeras componentes principales, revela una superposición entre los clusters. Este solapamiento puede ser un indicio de la existencia de interacciones complejas entre las diferentes propiedades mecánicas y las texturas, lo que sugiere que las fronteras entre los clusters no son claramente definidas y que existe una transición continua entre las propiedades de los diferentes materiales.

Para los clusters generados por el algoritmo de K-Means, se observa en la Figura 4.9 que el Cluster 0 presenta una distribución homogénea en la mayoría de las variables, lo que sugiere que agrupa puntos con características bastante similares. Esto podría indicar que los datos en este cluster provienen de una textura y tamaño específicos que comparten propiedades similares. El análisis de los boxplots muestra una dispersión baja en las variables clave, como la energía específica, lo que sugiere que este grupo está compuesto por granos con un comportamiento predecible y controlado. Por otro lado, el Cluster 1 muestra una mayor variabilidad en comparación con el Cluster 0. Las variables como la textura y el tamaño presentan una dispersión más amplia, lo que indica que este cluster agrupa datos con una mayor diversidad en términos de sus características físicas. Esto puede sugerir que el Cluster 1 incluye muestras con texturas mixtas o con una mayor variabilidad en los tamaños de los granos, lo cual podría llevar a comportamientos menos uniformes en términos de la energía específica. Se espera tener una mayor variabilidad en tamaños más pequeños ya que el mecanismo de impacto se vuelve ineficiente y la repetibilidad de los resultados resulta complicada.

En la Figura 4.9, el Cluster 2 está caracterizado por una mayor concentración de valores extremos en ciertas variables, como el índice de bordes. Esto sugiere que los granos en este cluster podrían estar asociados con características geológicas o texturales únicas que los diferencian del resto de los clusters. Aunque algunos valores extremos podrían representar ruido, este cluster parece contener datos que se desvían de las tendencias generales observadas en otros clusters, lo que podría requerir un análisis más detallado para comprender su origen. Por otro lado, el Cluster 3 presenta una distribución intermedia entre los clusters homogéneos y aquellos con mayor variabilidad. Las variables como el tamaño y la textura muestran una dispersión moderada, lo que indica que este cluster agrupa datos con características mixtas pero no tan extremas como el Cluster 2. Este comportamiento sugiere que el Cluster 3 podría representar una transición entre grupos más homogéneos y grupos más variados.

En la Figura 4.9, el Cluster 4 muestra un comportamiento similar al Cluster 1, con una notable dispersión en variables clave como el índice de bordes y la energía específica. Este cluster podría estar compuesto por granos que tienen una mayor variabilidad textural o geológica. La dispersión observada sugiere que las muestras en este grupo podrían estar influenciadas por condiciones externas, lo que conduce a una mayor heterogeneidad en sus propiedades físicas. Por otro lado, el Cluster 5 es uno de los clusters más dispersos, lo que indica que agrupa puntos con una amplia gama de características. En particular, variables como el tamaño y el índice de bordes presentan una alta variabilidad, lo que sugiere que este cluster contiene datos que no encajan fácilmente en patrones definidos. Esto podría reflejar la presencia de muestras con características atípicas o raras dentro del conjunto de datos, lo que podría hacer que este cluster sea de interés para investigaciones adicionales.

El modelo desarrollado para predecir la energía específica media ($E_{m,50}$) muestra un desempeño sólido, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.8$, lo que indica una buena capacidad predictiva. La introducción de interacciones polinómicas de hasta cuarto grado y la posterior normalización de las variables permitieron capturar relaciones no lineales complejas entre las variables independientes, lo cual contribuyó a mejorar la precisión del modelo.

La optimización de los hiperparámetros mediante la búsqueda bayesiana, utilizando Bayes-SearchCV, fue clave para encontrar los mejores valores que maximizan el ajuste del modelo. Entre los hiperparámetros optimizados, los que más influyeron en el rendimiento fueron el número de estimadores y la tasa de aprendizaje, lo que sugiere que la capacidad de generalización del modelo se vio favorecida por una combinación adecuada de profundidad del árbol y regularización.

Además, la implementación de la validación cruzada Leave-One-Out (LOO) fue esencial, dado el tamaño reducido del conjunto de datos, asegurando que cada punto de datos fuera utilizado tanto para entrenamiento como para validación, lo que garantiza una evaluación robusta. Este enfoque exhaustivo permite evaluar el modelo de manera más precisa en comparación con técnicas de validación menos rigurosas, aunque también aumenta el tiempo computacional.

En cuanto a la interpretación de los resultados, los gráficos en la Figura 4.20 ofrecen una visión clara del comportamiento del modelo. La visualización muestra que a medida que el error en la predicción de la energía específica media aumenta, el tamaño de los puntos en el gráfico también lo hace, lo que proporciona una representación efectiva de la magnitud de los errores en cada predicción. El error promedio del 17% indica que, aunque el modelo tiene una alta precisión, aún existe un margen de mejora, especialmente en aquellos casos donde el error es mayor.

Los resultados obtenidos en los gráficos permiten concluir que las técnicas de aprendizaje automático, como el XGBoost, combinadas con métodos de clusterización y análisis de componentes principales, son herramientas valiosas para modelar las propiedades mecánicas críticas en la conminución en función de la caracterización avanzada. Las distribuciones de las variables y los patrones observados en los histogramas por textura y tamaño confirman la relevancia de los clusters en la descripción de las propiedades del material. A pesar de la superposición observada en los clusters, el modelo logró captar las relaciones subyacentes entre las variables, lo que se refleja en el alto valor del R^2 .

Esto es de gran relevancia, ya que permite predecir variables clave utilizadas en simuladores de planta. Estas predicciones no solo ayudan a estudiar la variabilidad del proceso, sino que también son esenciales para diseñar nuevas plantas y optimizar las existentes. Las variables clave, como el A y el b , proporcionadas por el SMC, ya que al contar con la energía específica y el tamaño de la partícula, se puede realizar un ajuste del modelo para el t_{10} , permitiendo mejorar la precisión de las simulaciones. La capacidad de modelar con exactitud las propiedades del material mediante estas simulaciones, basadas en los resultados obtenidos, facilita una mejor planificación y control de las operaciones. Esto ayuda a reducir los costos operativos y aumentar la eficiencia del proceso, especialmente en plantas de procesamiento de minerales, donde la variabilidad de los materiales es relevante para la estabilidad del proceso.

Capítulo 6

Conclusiones

Las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos mediante el modelo de Tavares et al. (1998) proporcionan una visión clara sobre la energía específica requerida por diferentes texturas de roca en procesos de conminución. Los parámetros obtenidos muestran una variabilidad significativa en términos de energía específica media, eficiencia de fractura y tamaño de partículas post-fractura. La variabilidad de estos parámetros entre las distintas texturas resalta la importancia de considerar las características específicas de cada tipo de roca al modelar su comportamiento en procesos industriales. La textura BA, que requiere una mayor energía específica para conminución, contrasta con otras texturas como K2, que muestran una mayor dispersión en los datos. Esto indica la relevancia de adaptar los procesos según las propiedades particulares de cada textura.

El modelo probabilístico ajustado con mínimos cuadrados capturó adecuadamente la distribución de la energía específica para las diferentes texturas, aunque algunas texturas como BA, K2 y K4 presentan diferencias notables en los parámetros $E_{m,50}$ y σ_E . Estas diferencias reflejan la heterogeneidad en las propiedades físicas y mecánicas de las rocas, que deben ser tenidas en cuenta para optimizar los procesos de conminución. Las texturas T1, T2, T3 y T4 también presentan variaciones significativas en términos de eficiencia de fractura y distribución del tamaño de partículas post-fractura, lo que refuerza la necesidad de un análisis detallado para cada caso.

El modelo de aprendizaje automático basado en el algoritmo XGBoost demostró un desempeño sólido, alcanzando un R^2 de 0.8, lo que refleja una alta capacidad para predecir la energía específica media a partir de las características de los clusters. No obstante, se observó una dispersión significativa en algunos casos, lo que sugiere que futuras mejoras podrían enfocarse en capturar de manera más precisa las complejas relaciones no lineales entre las variables.

Es probable que los datos correspondientes a los niveles más bajos de energía específica media ($E_{m,50}$) presenten una baja variabilidad en sus características (como tamaño y textura), lo que implica que estas muestras son muy similares entre sí. Como resultado, el modelo podría estar generando predicciones muy cercanas para estos valores debido a la falta de diferenciación en las características de estas observaciones. Además, dado que el modelo utiliza clusters definidos por Bag of Words (BOW), es posible que algunos de estos clusters, especialmente aquellos que agrupan datos con valores bajos de energía específica, carezcan de

suficiente diferenciación interna. Esto puede llevar al modelo a aprender patrones de predicción homogéneos para todos los puntos dentro de dichos clusters, resultando en predicciones concentradas en un mismo valor. Es probable que falte una variable para explicar la variabilidad en energías específicas más pequeñas. La mineralogía modal de cada partícula podría dar un indicio y diferenciación de partículas similares.

Con base en los antecedentes presentados, es posible concluir que el modelo basado en el algoritmo XGBoost es eficaz para predecir la energía específica en procesos de conminución. El análisis muestra que, a pesar de la heterogeneidad en las propiedades mecánicas y físicas de las distintas texturas de roca, el modelo ha logrado captar las relaciones subyacentes entre las variables, como se refleja en el alto valor de R^2 (0.8). Esta capacidad predictiva es relevante, ya que permite estimar de manera precisa la energía específica media ($E_{m,50}$) requerida por diferentes tipos de roca, lo que facilita la optimización de los procesos industriales. Al obtener la energía específica media y posteriormente la desviación estándar, se podría tener toda la distribución de energía específica por tamaño, lo que permitiría asociarla a las familias de fractura tn. Esto no solo mejora la precisión de las estimaciones, sino que también proporciona una base sólida para el análisis detallado del comportamiento del material durante el proceso de conminución. De esta manera, se puede optimizar la fragmentación y el uso de energía en función del tipo de roca y sus características de fractura, lo que resulta en una mayor eficiencia operativa y reducción de costos.

Dada la complejidad y variabilidad de las texturas y tamaños de partículas en el contexto de procesos de conminución, asumir que todas las partículas pueden analizarse directamente mediante Bag of Words (BoW) combinado con clustering y regresión presenta desafíos metodológicos. Si bien el enfoque BoW permite agrupar características en clusters que representan palabras o patrones de características en el espacio vectorial, esta hipótesis supone una homogeneidad en las relaciones entre textura y tamaño que puede no ser precisa para todos los tipos de partículas.

La metodología BoW, aplicada aquí en combinación con clustering, asume que los clusters representan adecuadamente la distribución de las propiedades de textura y tamaño en función de la energía específica media requerida para la conminución. Sin embargo, debido a la variabilidad en la dureza y otras propiedades físicas entre texturas, podría resultar en una falta de diferenciación en clusters que agrupan partículas con bajos valores de energía específica. Esto puede llevar a un sesgo en la regresión, ya que los clusters generados podrían no capturar con precisión las relaciones entre las variables, particularmente en los niveles bajos de energía específica donde se ha observado menor variabilidad.

No obstante, se han identificado áreas de mejora en el modelo actual, entre las que destacan la dispersión observada en algunos clusters y la baja diferenciación en los niveles bajos de energía específica. Estas limitaciones sugieren que aumentar la cantidad de datos en estos niveles podría mejorar considerablemente la precisión del modelo, al permitir una caracterización más detallada de las variaciones en el consumo energético y una mayor capacidad de diferenciación entre los distintos tipos de mineral. Esto, a su vez, fortalecería el modelo como herramienta de diseño y análisis, proporcionando una base para futuras optimizaciones en el procesamiento de minerales.

Para un trabajo futuro de tesis, se puede ampliar el análisis incorporando la variable de mineralogía, la cual podría ofrecer una explicación para las energías específicas medias más bajas observadas en ciertos casos. La mineralogía, al influir en la dureza y las propiedades de fragmentación de los minerales, afecta directamente la cantidad de energía requerida en los procesos de chancado. Esta variable podría ser necesaria para desarrollar un modelo más preciso y robusto que permita entender cómo las características intrínsecas del mineral determinan el consumo energético, lo que en última instancia podría contribuir a optimizar el diseño de los circuitos de chancado.

También, se podría hacer uso de la distribución acumulada de las energías específicas como herramienta de diseño. Con esta información, se podrían diseñar los circuitos de chancado tomando el percentil 95 de la energía específica media, lo que representaría el escenario de mayor consumo energético para el chancador. Esta metodología permitiría dimensionar los equipos y ajustar el diseño del circuito de manera que puedan manejar los casos de máxima demanda energética, optimizando así la eficiencia operativa y garantizando un desempeño más estable del sistema.

Además, se podría explorar la relación entre la generación de la curva t_{10} y la función de ruptura de Austin de la siguiente manera:

$$A \cdot (1 - \exp(-b \cdot E_{cs})) = \phi \cdot (0.1)^{n_1} + (1 - \phi) \cdot (0.1)^{n_2} \quad (6.1)$$

Al calibrar los parámetros correspondientes, sería posible simular el circuito de chancado con mayor precisión, lo que proporcionaría información valiosa para mejorar el rendimiento del proceso y reducir el consumo de energía a través de ajustes en la configuración del circuito.

Bibliografía

- [1] Zhang, Y., Shao, Z., Wei, W., y Qiao, R., “PFC simulation of crack evolution and energy conversion during basalt failure process,” *Journal of Geophysics and Engineering*, vol. 16, pp. 639–651, 2019, [doi:10.1093/jge/gxz036](https://doi.org/10.1093/jge/gxz036).
- [2] S., N. S., “Single particle breakage tests : a review of principles and application to comminution modeling,” *Bull. Proc. Austr. Inst. Min. Metall.*, vol. 291, pp. 49–58, 1986, <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571135651637954816>.
- [3] Rodriguez, Q., “Modelación neuro-difusa del desgaste de alzadores y nivel de llenado de molinos sag,” *Repositorio Académico Universidad de Concepción*, vol. 1, 2018, <http://repositorio.udec.cl/xmlui/handle/11594/2872>.
- [4] Fernandez, B., “Modelación de una trituradora cónica para la optimización de la operación de una planta de agregados pétreos.,” *Repositorio Académico Universidad de Colombia*, vol. 1, 2023, <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/83714>.
- [5] Annicchiarico, W. y Annicchiarico, W., “Desarrollo de un modelo numérico basado en computación evolutiva para evaluar la eficiencia del proceso de trituración de minerales,” null, 2018, [doi:null](https://doi.org/10.1093/jge/gxz036).
- [6] Ballantyne, G. R. y Powell, M., “Benchmarking comminution energy consumption for the processing of copper and gold ores,” *Minerals Engineering*, 2014, [doi:10.1016/j.mineng.2014.05.017](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2014.05.017).
- [7] Basarir, H., Karpuz, C., y Tutluoglu, L., “3d modeling of ripping process,” *International Journal of Geomechanics*, 2008, [doi:10.1061/\(asce\)1532-3641\(2008\)8:1\(11\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1532-3641(2008)8:1(11)).
- [8] Betzhold, C. y Roth, J., “Characterizing the mineralogical variability of a chilean copper deposit using plurigaussian simulations,” *Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, 2000, [doi:null](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2019.105927).
- [9] Bicak, O., “A technique to determine ore variability in a sulphide ore,” *Minerals Engineering*, 2019, [doi:10.1016/j.mineng.2019.105927](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2019.105927).
- [10] Bishop, C. M. y Bishop, C. M., “Pattern recognition and machine learning (information science and statistics),” null, 2006, [doi:null](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2116-9).
- [11] Brady, B. H. G. y Brown, E. T., “Rock mechanics for underground mining: Third edition,” null, 2006, [doi:10.1007/978-1-4020-2116-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-2116-9).
- [12] Bueno, M., Foggiatto, B., y Lane, G., “Geometallurgy applied in comminution to minimize design risks,” null, 2015, [doi:null](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2013.10.020).
- [13] Curry, J. A., Ismay, M. J., y Jameson, G. J., “Mine operating costs and the potential impacts of energy and grinding,” *Minerals Engineering*, vol. 56, pp. 70–80, 2014, [doi:https://doi.org/10.1016/j.mineng.2013.10.020](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2013.10.020).

- [14] Cabrera, S., Cabrera, S., Stefano, G., y Stefano, G., “Desarrollo de una librería neuronal en control builder 5.1 para controlar el nivel de mineral al interior de un molino de bolas,” null, 2016, [doi:null](#).
- [15] Campbell, C. S. y Campbell, C. S., “Granular material flows – an overview,” Powder Technology, 2006, [doi:10.1016/j.powtec.2005.12.008](#).
- [16] Cleary, P. W., “Industrial particle flow modelling using discrete element method,” Engineering Computations, 2009, [doi:10.1108/02644400910975487](#).
- [17] Delaney, G., Inagaki, S., Aste, T., y Aste, T., “Fine tuning dem simulations to perform virtual experiments with three-dimensional granular packings,” null, 2007, [doi:10.1142/9789812771995_0009](#).
- [18] Dini, D. y O’Sullivan, C., “Particle-based discrete element modeling: Geomechanics perspective,” International Journal of Geomechanics, 2011, [doi:10.1061/\(asce\)gm.1943-5622.0000024](#).
- [19] Evans, T. M., Zhang, N., y Zhang, N., “Three-dimensional simulations of plate anchor pullout in granular materials,” International Journal of Geomechanics, 2019, [doi:10.1061/\(asce\)gm.1943-5622.0001367](#).
- [20] Faramarzi, F., Morrison, R., y Kanchibotla, S. S., “From average-based ore impact breakage characterisation to quantifying breakage variability,” null, 2019, [doi:null](#).
- [21] Feijoo, S. P., “Aplicación del modelo bag-of-words al reconocimiento de imágenes,” null, 2009, [doi:null](#).
- [22] Garrido, M., Ortiz, J., Sepúlveda, E., Farfan, L., y Townley, B., “An overview of good practices in the use of geometallurgy to support mining reserves in copper sulfides deposits,” null, 2019, [doi:null](#).
- [23] Ömürden Genç, Ömürden Genc, Ergün, L., Ergun, L., Benzer, H., y Benzer, H., “Single particle impact breakage characterization on of materials by drop weight testing,” Physicochemical Problems of Mineral Processing, 2004, [doi:null](#).
- [24] Hastie, T., Tibshirani, R., y Friedman, J., “The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction, 2nd edition,” Springer Series in Statistics, 2001, [doi:null](#).
- [25] Herbst, J. A., Herbst, J., Fuerstenau, D., y Fuerstenau, D. W., “Scale-up procedure for continuous grinding mill design using population balance models,” International Journal of Mineral Processing, 1980, [doi:10.1016/0301-7516\(80\)90034-4](#).
- [26] Hinton, G. E., Hinton, G. E., Osindero, S., Osindero, S., Teh, Y.-W., y Teh, Y. W., “A fast learning algorithm for deep belief nets,” Neural Computation, 2006, [doi:10.1162/neco.2006.18.7.1527](#).
- [27] Holling, C. S., “Adaptive environmental assessment and management,” null, 2005, [doi:10.1093/forestsience/26.3.435](#).
- [28] Hunt, J. y Berry, R., “Economic geology models 3. geological contributions to geometallurgy: A review,” null, 2017, [doi:10.12789/geocanj.2017.44.121](#).
- [29] Höhner, D., Wirtz, S., y Scherer, V., “A study on the influence of particle shape and shape approximation on particle mechanics in a rotating drum using the discrete element method,” Powder Technology, 2014, [doi:10.1016/j.powtec.2013.11.023](#).

- [30] Jackson, J., Gaunt, J., y Astorga, M., “Predicting mill ore feed variability using integrated geotechnical/geometallurgical models,” null, 2018, doi:[10.1007/978-3-319-69320-0_28](https://doi.org/10.1007/978-3-319-69320-0_28).
- [31] Jiménez-Herrera, N., Barrios, G. K., y Tavares, L. M., “Comparison of breakage models in dem in simulating impact on particle beds,” *Advanced Powder Technology*, 2017, doi:[10.1016/j.appt.2017.12.006](https://doi.org/10.1016/j.appt.2017.12.006).
- [32] King, R., King, R., King, R. P., y King, R. P., “Modeling and simulation of mineral processing systems,” null, 2001, doi:[10.1243/09544080360563007](https://doi.org/10.1243/09544080360563007).
- [33] Krolop, P., Krolop, P., Niiranen, K., Gilbricht, S., Gilbricht, S., Seifert, T., y Seifert, T., “Process mineralogical assessment of the grinding products of the per geijer iron oxide-apatite deposits,” *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review*, 2022, doi:[10.1080/08827508.2021.2023519](https://doi.org/10.1080/08827508.2021.2023519).
- [34] Lamberg, P., “Particles - the bridge between geology and metallurgy,” null, 2011, doi:[null](https://doi.org/).
- [35] Law, M. T. y Law, M. T., “Distance metric learning for image and webpage comparison,” null, 2015, doi:[null](https://doi.org/).
- [36] Lois-Morales, P., Evans, C., y Weatherley, D., “Quantifying the relationship between particles’ strength and their mineralogical and textural characteristics,” *Minerals Engineering*, 2023, doi:[10.1016/j.mineng.2023.108113](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2023.108113).
- [37] Mitchell, T. M., *Machine Learning*. McGraw Hill, 1997,
- [38] Lois-Morales, “Development of a geometallurgical approach for comminution using primary breakage properties of ores,” null, 2020, doi:[10.14264/uql.2020.933](https://doi.org/10.14264/uql.2020.933).
- [39] Lois-Morales, P., Evans, C. L., Evans, C. L., Weatherley, D., y Weatherley, D., “Characterising tensile strength and elastic moduli of altered igneous rocks at comminution scale using the short impact load cell,” *Powder Technology*, 2021, doi:[10.1016/j.powtec.2021.04.091](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.04.091).
- [40] Napier-Munn, T. J., Napier-Munn, T. J., Morrell, S., Morrell, S., Morrison, R., Morrison, R., Kojovic, T., y Kojovic, T., “Mineral comminution circuits: their operation and optimisation,” null, 1996, doi:[null](https://doi.org/).
- [41] de Oliveira, A. L., Rodriguez, V. A., de Carvalho, R., Powell, M., y Tavares, L. M., “Mechanistic modeling and simulation of a batch vertical stirred mill,” *Minerals Engineering*, 2020, doi:[10.1016/j.mineng.2020.106487](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2020.106487).
- [42] Parapari, P. S., Parapari, P. S., Parian, M., Parian, M., Rosenkranz, J., y Rosenkranz, J., “Breakage process of mineral processing comminution machines – an approach to liberation,” null, 2020, doi:[10.1016/j.appt.2020.08.005](https://doi.org/10.1016/j.appt.2020.08.005).
- [43] Parapari, P. S., Parapari, P. S., Parian, M., Parian, M., Pålsson, B., Pålsson, B. I., Rosenkranz, J., y Rosenkranz, J., “Quantitative analysis of ore texture breakage characteristics affected by loading mechanism: Multivariate data analysis of particle texture parameters,” *Minerals Engineering*, 2022, doi:[10.1016/j.mineng.2022.107531](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2022.107531).
- [44] Powell, M. y Morrison, R., “The future of comminution modelling,” *International Journal of Mineral Processing*, 2007, doi:[10.1016/j.minpro.2006.08.003](https://doi.org/10.1016/j.minpro.2006.08.003).
- [45] Qader, W. A., Qader, W. A., Ameen, M. M., Ameen, M. M., Ahmed, B. I., y Ahmed, B.,

- “An overview of bag of words;importance, implementation, applications, and challenges,” International Enformatika Conference, 2019, [doi:10.1109/iec47844.2019.8950616](https://doi.org/10.1109/iec47844.2019.8950616).
- [46] Quiñones, J., Arzúa, J., Arzúa, J., Alejano, L. R., García-Bastante, F., García-Bastante, F., Ivars, D. M., Ivars, D. M., Ivars, D. M., Ivars, D. M., Walton, G., y Walton, G., “Analysis of size effects on the geomechanical parameters of intact granite samples under unconfined conditions,” *Acta Geotechnica*, 2017, [doi:10.1007/s11440-017-0531-7](https://doi.org/10.1007/s11440-017-0531-7).
- [47] Radziszewski, P., “Energy recovery potential in comminution processes,” *Minerals Engineering*, 2013, [doi:10.1016/j.mineng.2012.12.002](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2012.12.002).
- [48] Rodriguez, V. A., Barrios, G. K. P., Barrios, G. K., Bueno, G., y Tavares, L. M., “Coupled dem-mbd-prm simulations of high-pressure grinding rolls. part 1: Calibration and validation in pilot-scale,” *Minerals Engineering*, 2022, [doi:10.1016/j.mineng.2021.107389](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2021.107389).
- [49] Selepe, M. y Amadi-Echendu, J., “Analysis of ore variability influence on comminution energy efficiency,” *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, 2023, [doi:10.46254/an13.20230019](https://doi.org/10.46254/an13.20230019).
- [50] Starfield, A. y Cundall, P. A., “Towards a methodology for rock mechanics modelling,” *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences Geomechanics Abstracts*, 1988, [doi:10.1016/0148-9062\(88\)92292-9](https://doi.org/10.1016/0148-9062(88)92292-9).
- [51] Sutton, R. S., Sutton, R. S., Sutton, R. S., Barto, A. G., y Barto, A. G., “Reinforcement learning: An introduction,” *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1988, [doi:10.1109/tnn.1998.712192](https://doi.org/10.1109/tnn.1998.712192).
- [52] Tavares, L., Tavares, L. M., King, R., King, R., y King, R., “Single-particle fracture under impact loading,” *International Journal of Mineral Processing*, 1998, [doi:10.1016/s0301-7516\(98\)00005-2](https://doi.org/10.1016/s0301-7516(98)00005-2).
- [53] Tavares, L. M., “Chapter 1 breakage of single particles: Quasi-static,” *null*, 2007, [doi:10.1016/s0167-3785\(07\)12004-2](https://doi.org/10.1016/s0167-3785(07)12004-2).
- [54] Tavares, L. M., “Review and further validation of a practical single-particle breakage model,” *Kona Powder and Particle Journal*, 2022, [doi:10.14356/kona.2022012](https://doi.org/10.14356/kona.2022012).
- [55] Tiu, G., Ghorbani, Y., Jansson, N., Wanhainen, C., y Bolin, N.-J., “Quantifying the variability of a complex ore using geometallurgical domains,” *Minerals Engineering*, 2023, [doi:10.1016/j.mineng.2023.108323](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2023.108323).
- [56] Tromans, D., “Mineral comminution: Energy efficiency considerations,” *Minerals Engineering*, 2008, [doi:10.1016/j.mineng.2007.12.003](https://doi.org/10.1016/j.mineng.2007.12.003).
- [57] Turing, A. y Turing, A. M., “Computing machinery and intelligence,” *The Philosophy of Artificial Intelligence*, 1950, [doi:10.1093/mind/lix.236.433](https://doi.org/10.1093/mind/lix.236.433).
- [58] Vallejos, J., “Introducción al modelamiento numérico.” 8, 2023. *Modelamiento Numérico en Mecánica de Rocas*. Universidad de Chile.
- [59] Waples, D. W. y Waples, J. S., “A review and evaluation of specific heat capacities of rocks, minerals, and subsurface fluids. part 1: Minerals and nonporous rocks,” *Natural resources research*, *null*, [doi:10.1023/b:narr.0000032647.41046.e7](https://doi.org/10.1023/b:narr.0000032647.41046.e7).
- [60] Yildirim, B. G., “Development of a correlation between mineralogy, rock strength measures, and breakage of copper porphyries,” *null*, 2016, [doi:10.14264/uql.2017.34](https://doi.org/10.14264/uql.2017.34).
- [61] Morrell, S. y Morrison, R., “Ag and sag mill circuit selection and design by simulation,”

- SAG'96, vol. 2, pp. 769–790, 1996.
- [62] Bond, F., The Third Theory of Comminution . to be Presented at the Annual Meeting of the A.I.M.E., Feb. 18 -21, 1952. A.I.M.E., 1952, <https://books.google.cl/books?id=PTkojwEACAAJ>.
- [63] Rubilar, M. T., “Mi5022-análisis y simulación de procesos mineralúrgicos,” 2023. Curso tomado como electivo de Carrera.
- [64] Lois-Morales, B., Evans, C., y Weatherley, D., “Quantifying the effect of texture and mineralogy over the physical properties of rocks using the short impact load cell,” 2018.
- [65] Kick, F., Das Gesetz der proportionalen Widerstände und seine Anwendungen: Nebst Versuchen über das Verhalten verschiedener Materialien bei gleichen Formänderungen sowohl unter der Presse als dem Schlagwerk. A. Felix, 1885, <https://books.google.cl/books?id=cEEAAAAAQAAJ>.
- [66] J.E. Sepulveda, H. T. y. O. A., “Experimental determination of autogenous ore grindability,” Int. J. of Min. Processing, vol. 7, 1983.
- [67] Mular, A. y Bhappu, R., Mineral Processing Plant Design. Society of Mining Engineers of the American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, 1978, <https://books.google.cl/books?id=vfnmAAAAMAAJ>.
- [68] Rittinger, v., Lehrbuch der Aufbereitung-Kunde in ihrer neuesten Entwicklung und Ausbildung systematisch dargestellt. Ernst, 1867, <https://books.google.com.tr/books?id=c4f5oQEACAAJ>.
- [69] Ömer Ündül, Ömer Ündül, Amann, F., Aysal, N., y Plötze, M., “Micro-textural effects on crack initiation and crack propagation of andesitic rocks,” Engineering Geology, 2015, [doi:10.1016/j.enggeo.2015.04.024](https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2015.04.024).
- [70] Yahyaei, M., Hilden, M., Shi, F., Liu, L. X., Ballantyne, G., y Palaniandy, S., Comminution, pp. 157–199. Cham: Springer International Publishing, 2016, [doi:10.1007/978-3-319-20949-4_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-20949-4_6).
- [71] Torres, M., “Análisis y simulación de procesos mineralúrgicos.” Course, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM), 2023. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM).
- [72] Estay, H., Lois-Morales, P., Montes-Atenas, G., y Ruiz del Solar, J., “On the challenges of applying machine learning in mineral processing and extractive metallurgy,” Minerals, vol. 13, no. 6, p. 788, 2023, [doi:10.3390/min13060788](https://doi.org/10.3390/min13060788).
- [73] Morrell, S., “An alternative energy-size relationship to that proposed by bond for the design and optimization of grinding circuits,” Minerals Engineering, vol. 17, no. 11-12, pp. 1041–1053, 2004.
- [74] Bond, F., “Crushing and grinding calculations,” British Chemical Engineering, vol. 6, no. 6, pp. 378–385, 1961.
- [75] Jaeger, J., Cook, N., y Zimmerman, R., Fundamentals of Rock Mechanics. Malden, MA: Blackwell Pub, 4th ed., 2007.
- [76] Humaira, H. y Rasyidah, R., “Determining the appropriate cluster number using elbow method for k-means algorithm,” en Proceedings of the 2nd Workshop on Multidisciplinary and Applications (WMA) 2018, Padang, Indonesia, EAI, 2020, [doi:10.1109/WMA48177.2020.9388888](https://doi.org/10.1109/WMA48177.2020.9388888).

- [77] Lois-Morales, P., Evans, C., y Weatherley, D., “Methodology for quantitative rock characterisation using multiple imaging systems and random particles generation,” *MethodsX*, vol. 9, p. 101807, 2022, doi:10.1016/j.mex.2022.101807.
- [78] Kirchoff, M., Humaidan, D., y Ziemann, U., “Closed-loop bayesian optimization for phase selection in eeg-tms,” *arXiv*, 2024, <https://arxiv.org/abs/2012.09177>. Este estudio utiliza la optimización bayesiana en experimentos EEG-TMS para seleccionar la fase óptima vinculada a la excitabilidad corticospinal, comparando distintos métodos de regresión bayesiana.
- [79] Chen, T. y Guestrin, C., “Xgboost: A scalable tree boosting system,” en *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pp. 785–794, ACM, 2016, <https://arxiv.org/abs/1603.02754>. Este artículo detalla los fundamentos y la implementación eficiente del algoritmo XGBoost.
- [80] Vehtari, A., Gelman, A., y Gabry, J., “Practical bayesian model evaluation using leave-one-out cross-validation and waic,” *Statistics and Computing*, vol. 27, no. 5, pp. 1413–1432, 2017, <https://link.springer.com/article/10.1007/s11222-016-9649-y>. Desarrolla herramientas para evaluar modelos bayesianos usando LOO-CV y WAIC, y compara métodos de estimación eficiente.
- [81] Rowland, C. y Kjos, D. M., “Rod and ball mills,” *Mineral Processing Plant Design* (ed. AIME), vol. 1978, pp. 239–278, 1978.
- [82] Narayanan, S. S. y Whiten, W. J., “Breakage characteristics for ores for ball mill modeling,” en *Proceeding of the Australasian Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 286, pp. 31–39, 1983.
- [83] Verret, F., Chiasson, G., y McKen, A., “Sag mill testing - test procedures to characterize ore grindability,” rep. tec., SGS Minerals Services, 2011. Technical Paper 2011-08.
- [84] Pirrie, D. y Rollinson, G. K., “Unlocking the applications of automated,” *Geology Today*, vol. 27, 2011.