



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE MINAS

**COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS PARA LA DETERMINACIÓN RECURSOS
MINERALES EN UN YACIMIENTO DE HIERRO CONSIDERANDO LA DENSIDAD DE
ROCA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL DE MINAS

CONSTANZA KARINA PAMIEZ CARO

PROFESORA GUÍA:
NADIA MERY GUERRERO

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
XAVIER EMERY
FABIÁN SOTO FERNÁNDEZ

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto ANID PIA AFB230001 (AMTC)

SANTIAGO DE CHILE

2024

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR
AL TÍTULO DE INGENIERA CIVIL DE MINAS
POR: CONSTANZA KARINA PAMIEZ CARO
FECHA: 2024
PROF. GUÍA: NADIA MERY GUERRERO

COMPARACIÓN DE METODOLOGÍAS PARA LA DETERMINACIÓN RECURSOS MINERALES EN UN YACIMIENTO DE HIERRO CONSIDERANDO LA DENSIDAD DE ROCA

En la minería es crucial la determinación de recursos y reservas minerales. En el caso particular de los depósitos ferríferos, la densidad de la roca juega un rol crucial en la cuantificación de recursos minerales dado que ésta posee una fuerte correlación con la ley de hierro. Sin embargo, la densidad es una variable que suele ser calculada mediante ecuaciones o no es considerada en la cuantificación de recursos. Estas decisiones no toman en cuenta la variabilidad real de éstos. Esto puede traer impactos negativos en etapas aguas abajo, la toma de decisiones estratégicas y la sostenibilidad de las operaciones.

La motivación de este trabajo radica en evaluar el impacto y validez del uso de ecuaciones para determinar la densidad en la estimación de recursos minerales de un yacimiento de hierro. Para esto, se usa como caso de estudio el depósito de óxido de hierro-fosfato (IOA) Chah-Gaz ubicado en Irán.

La metodología se basó en la revisión bibliográfica realizada, y por ende, se decide comparar métodos tradicionales y no tradicionales: kriging de ley de hierro, cokriging de variables aditivas (densidad y contenido de hierro), simulación de bandas rotantes de ley de hierro y machine learning (SVM).

Los resultados indicaron que no existe un método que sea consistentemente superior. La variación de resultados en la cuantificación de recursos no supera el 10% entre enfoques, para los recursos y reservas recuperables. El kriging de Fe (Enfoque 1) fue la metodología que presentó el peor desempeño, y se explica porque no considera la aditividad. En general, se demostró a través de los resultados y matemáticamente que el cokriging presenta mejores resultados que el kriging para la estimación de recursos. Por su parte, el machine learning mostró un desempeño comparable al cokriging, capturando patrones complejos en los datos de forma eficiente.

Como principal conclusión es que no existe una metodología que sea tajantemente superior. Adicionalmente, la incorporación de la densidad sí supone una cuantificación más precisa de los recursos y reservas, a diferencia de no hacerlo. En trabajos futuros se recomienda evaluar la posibilidad de una cuantificación de recursos multi-enfoque.

Agradecimientos

Primero, quiero agradecer a la persona más importante en mi vida, a mi mamá; gracias por hacerme quien soy hoy, y por ser la mejor mamá que podría haber pedido. Agradezco también a mi familia, mi abuela, mi abuelo, mi tío y mis primos Caro, Diego y Cata, quienes han estado a mi lado en esta etapa. También agradezco al amor de mi vida, Pascal, quien me ha visto en las buenas, en las malas y en las peores. Definitivamente ha sido la mejor experiencia que me pudo haber regalado la universidad. Gracias a mis amigas y amigos que me han acompañado, a Tamara y Valeria, quienes han sido un pilar fundamental en todo este tiempo; a Belén, Catalina, María Ignacia, Roberto, Samur y Sebastián, quienes han sido mis amigos de la carrera y la hicieron más entretenida. Gracias Nala, Pucca, Rocco, Canito y Aragorn, por ser la mejor compañía que pude haber pedido; sé que no pueden leer esto, pero, han sido parte importante de mi vida y los amaré por siempre. Asimismo dedico esta memoria a todos los perritos del mundo, ojalá todos pudieran tener hogar. También agradezco a la profesora Nadia, por siempre confiar en mí. No puedo olvidar también a Gloria, quien ha sido un apoyo fundamental en la carrera; sin ella el departamento se cae. Finalmente, agradezco a Carabineros de Chile por (literalmente) salvar este trabajo.



Figura 1: Nala en la playa

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Objetivos	1
General	1
Específicos	1
1.3. Alcances	2
1.4. Brecha o vacío en el conocimiento	2
1.5. Estructura del Trabajo de Título	2
2. Marco teórico	4
2.1. Antecedentes de Estudio	5
2.1.1. Densidad	5
2.1.2. Variograma	6
2.1.3. Kriging	6
2.1.3.1. Vecindad	8
2.1.3.2. Validación cruzada	8
2.1.4. Cokriging	8
2.1.5. Simulación	9
2.1.5.1. Modelo multigaussiano	9
2.1.5.1.1 Nubes de correlación diferida	9
2.1.5.1.2 Variogramas de indicadores	10
2.1.5.1.3 Comparación de variograma con madograma	10
2.1.5.2. Simulación de Bandas Rotantes	10
2.1.6. Machine Learning	10
2.1.7. Desigualdad de Jensen	11
2.2. Análisis del Estado del Arte	11
2.3. Contexto del caso de estudio	13
2.3.1. Chah-Gaz, Irán	14
3. Materiales y métodos	16
3.1. Metodología	16
3.1.1. Revisión de bases de datos	16

3.1.2.	Aplicación de metodologías	16
	Enfoque 1: Kriging de Fe a soporte de grilla fina	16
	Enfoque 2: Cokriging usando variables aditivas	17
	Enfoque 3: Simulación de Fe a soporte de grilla fina	17
	Enfoque 4: Machine Learning	17
3.1.3.	Comparación de resultados	18
3.1.4.	Análisis y discusiones	18
3.2.	Recursos	18
4.	Resultados y análisis	19
4.1.	EDA	19
4.2.	Enfoque 1: Kriging de Fe	23
4.3.	Enfoque 2: Cokriging de variables aditivas	29
4.4.	Enfoque 3: Simulación de Fe	36
4.5.	Enfoque 4: Machine Learning	46
4.6.	Comparación	50
5.	Discusión	53
5.1.	Enfoque 1: Kriging de Fe	54
5.2.	Enfoque 2: Cokriging de variables aditivas	55
5.3.	Enfoque 3: Simulación de Fe a soporte puntual	56
5.4.	Enfoque 4: Machine Learning	57
5.5.	Desigualdad de Jensen	57
5.6.	Resumen	58
6.	Conclusiones	60
6.1.	Recomendaciones	61
	Glosario	63
	Bibliografía	66
	Anexos	68
	Anexo A. Resultados adicionales EDA	68
	Anexo B. Resultados adicionales Enfoque 1	69
	Anexo C. Resultados adicionales Enfoque 2	71
	Anexo D. Resultados adicionales Enfoque 3	74
	Anexo E. Resultados adicionales Enfoque 4	76

Índice de Tablas

4.1.	Estadística descriptiva de la Base de Datos limpios.	20
4.2.	Estadística descriptiva de la Base de Datos desagrupados	22
4.3.	Parámetros del variograma omnidireccional de Fe [%]	23
4.4.	Parámetros del variograma modelado de Fe [%]	24
4.5.	Estadística descriptiva para la predicción de Fe en bloques, Enfoque 1.	27
4.6.	Parámetros de los variogramas omnidireccionales directos y cruzados de Densidad y Metal	29
4.7.	Parámetros de los variogramas modelado de Densidad y Metal.	30
4.8.	Valores efectos pepita y meseta de los variogramas directos y cruzados	30
4.9.	Estadística descriptiva de variables aditivas para la predicción de Fe, Enfoque 2	34
4.10.	Parámetros de lo variograma modelado de Fe gaussiano	39
4.11.	Estadística descriptiva para la predicción de Fe (E-Type), Enfoque 3	43
4.12.	Estadística descriptiva de los recursos obtenidos mediante Enfoque 3.	44
4.13.	Estadística descriptiva E-type de las simulaciones, Enfoque 3	44
4.14.	Estadística descriptiva para la predicción de Fe (en el conjunto de datos), Enfoque 4	48
4.15.	Reporte de recursos de todos los enfoques	51
4.16.	Tabla comparativa de los tonelajes a distintas leyes de corte	52
4.17.	Tabla comparativa de las leyes medias a distintas leyes de corte	52
4.18.	Tabla comparativa del contenido de metal a distintas leyes de corte	52
A.1.	Estadística descriptiva de la Base de Datos sin limpiar	68
A.2.	Promedio de mediciones en los ejes X e Y	68
B.1.	Tabla comparativa parámetros de validación cruzada Enfoque 1	70
C.1.	Tabla comparativa parámetros de validación cruzada Enfoque 2	71

Índice de Ilustraciones

1.	Nala en la playa	ii
2.1.	Esquema de revisión bibliográfica	4
2.2.	a) Ubicación de la microplaca central iraní, los principales bloques y fallas; b) Mapa geológico simplificado de el distrito de Bafq, muestra la distribución de los depósitos de óxido de hierro y apatita. KBF: Falla de Kuhbanan, KF: Falla de Kalmard, PF: Falla de Posht-e-Badam, CF: Falla de Chapedonia, NF: Falla de Naein [25]	14
2.3.	Mapa geológico del depósito Chah-Gaz [25]	15
3.1.	Diagrama de flujo de trabajo.	18
4.1.	Histograma de Fe [%]	20
4.2.	Vista isométrica 3D	21
4.3.	Vistas en 2D. A la izquierda, vista en planta (XY); al centro, vista en perfil (XZ); a la derecha, vista en perfil (YZ).	21
4.4.	Gráficos de derivas	22
4.5.	Histograma de Fe [%] de datos desagrupados.	23
4.6.	Variograma experimental de Fe [%]	24
4.7.	Variograma modelado de Fe [%]	24
4.8.	Gráfico de dispersión de Valor Real de Fe [%] versus Valor Estimado de Fe [%]	25
4.9.	Vista en Planta (XY) de la estimación de Hierro [%]	26
4.10.	Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 1.	27
4.11.	Visualización en 3D de leyes de Hierro predichas mediante kriging de Fe (Enfoque 1).	28
4.12.	Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 1	29
4.13.	Variogramas experimentales de las variables aditivas	30
4.14.	Variogramas modelados de las variables aditivas	31
4.15.	Gráficos de dispersión de Densidad y Metal	32
4.16.	Vista en planta de Leyes de Hierro predichas	33
4.17.	Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 2	34
4.18.	Visualización en 3D de leyes de Hierro predichas mediante cokriging de Densidad y Metal (Enfoque 2).	35
4.19.	Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 2	36
4.20.	Anamorfosis de Fe.	37
4.21.	Nubes de correlación diferida.	37
4.22.	Variogramas de distinto orden.	38
4.23.	Variograma de indicador de Fe.	38

4.24.	Comparación variogramas de distinto orden y variograma de indicador	39
4.25.	Variograma experimental modelado de Fe gaussiano	39
4.26.	Validación cruzada simulación de bandas rotantes	40
4.27.	Procesamiento de las simulaciones	41
4.28.	Vista en planta del <i>E-Type</i>	42
4.29.	Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 3.	43
4.30.	Visualización en 3D del <i>e-type</i> de las simulaciones de leyes de Hierro mediante simulación de Fe (Enfoque 3).	45
4.31.	Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 3.	46
4.32.	Gráfico de dispersión de los valores predichos de Ley de Fe, Enfoque 4.	47
4.33.	Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 4.	48
4.34.	Visualización en 3D las de leyes de Hierro estimadas mediante SVM (Enfoque 4).	49
4.35.	Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 4.	50
4.36.	Curva de Tonelaje-Ley de todos los enfoques	51
5.1.	Cuadro resumen de los inconvenientes de las metodologías.	59
B.1.	Variogramas experimentales para identificar direcciones preferenciales	69
C.1.	Resultados cokriging de variables aditivas para el radio de búsqueda de 70 [m]	72
C.2.	Cokriging de variables aditivas	73
D.1.	Procesamiento de las simulaciones: QQ plot	74
D.2.	Visualización en planta de la realización n^o 5.	75
E.1.	Visualización en 3D las de leyes de Hierro estimadas mediante SVM en función de las coordenadas y la zona (Enfoque 4).	76
E.2.	Visualización en 3D las de leyes de Hierro estimadas mediante SVM en función de las coordenadas y la zona, utilizando un kernel (Enfoque 4).	77

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

En la industria minera, la determinación precisa de la densidad en yacimientos ferríferos desempeña un rol fundamental en la cuantificación de recursos minerales, los cuales comprenden el tonelaje total y el contenido de metal; esto sucede porque la densidad de la roca está fuertemente asociada al contenido de hierro. No obstante, en la actualidad, la densidad es un factor que a menudo se calcula mediante ecuaciones o derechamente se pasa por alto en las etapas de estimación de recursos [1] [2] [3]. En consecuencia, no se suele tomar muestras adecuadas de la densidad, se utiliza un valor constante o se utiliza la ley para calcular matemáticamente la densidad (representada como D); la expresión más comúnmente utilizada es $D = a + b \times \text{Ley de Hierro}$.

Estas decisiones tomadas a la hora de estimar la densidad, no reflejan la variabilidad real de la densidad presente en los depósitos ferríferos, más bien son una aproximación simplificada que no tiene en cuenta todas las complejidades inherentes a la variabilidad de la densidad [2] [4]. Esto puede traer consigo consecuencias significativas en la estimación de recursos, llegando incluso a afectar las etapas aguas abajo [2].

1.2. Objetivos

General

Evaluar el impacto y validez del uso de fórmulas para la determinación de la densidad en la estimación de recursos ferríferos.

Específicos

1. Realizar una revisión bibliográfica exhaustiva.
2. Probar diferentes enfoques para ver cómo varían los recursos minerales (tonelaje y contenido de metal).

3. Estudiar el impacto de la aditividad en la cuantificación de los recursos.

1.3. Alcances

1. Se considera que la fórmula para densidad $D = a + b \times Ley\ de\ Fe$ es válida para el soporte de compósito.
2. Se limita el estudio a yacimientos ferríferos.
3. Para el caso de estudio, por limitaciones de recursos computacionales, se considera una zona de sondajes, no toda la base de datos.

1.4. Brecha o vacío en el conocimiento

La falta de conocimiento radica en la ausencia de aplicación de técnicas avanzadas en la cuantificación de recursos ferríferos. La utilización de supuestos que, si bien, proporcionan estimaciones básicas, a menudo no logran capturar la verdadera complejidad del yacimiento.

Es por esto que, la novedad reside en la implementación de métodos avanzados y precisos para determinar la densidad. Esto contribuirá a una estimación más precisa de los recursos disponibles, lo que es esencial para la planificación minera, la toma de decisiones estratégicas y económicas, así como la sostenibilidad y sustentabilidad de las operaciones.

1.5. Estructura del Trabajo de Título

1. **Introducción:** esta sección busca otorgar una contextualización en la que se enmarca este trabajo.
2. **Marco teórico:** apartado que tiene por fin entender y comprender investigaciones relacionadas al tema, para así comprender lo que se está haciendo actualmente.
3. **Materiales y métodos:** este capítulo señala los recursos utilizados en la elaboración de este trabajo de título, así como la metodología a seguir.
4. **Resultados y análisis:** sección que contiene los resultados obtenidos tras seguir la metodología.
5. **Discusión:** esta sección se enfoca en estudiar, comprender y comparar los resultados obtenidos.
6. **Conclusiones:** esta parte se basa en obtener deducciones en base al estudio realizado. Se validará la metodología propuesta, así como los resultados obtenidos.
7. **Glosario:** capítulo en donde se definirán conceptos, siglas, abreviaciones, entre otros, para el correcto entendimiento del trabajo de título.

8. **Bibliografía:** apartado en donde se detallan los libros, artículos, trabajos e investigaciones utilizadas para la redacción y composición de esta memoria.
9. **Anexos:** sección en donde se adjuntan tablas y gráficos necesarios para la comprensión de este trabajo.

Capítulo 2

Marco teórico

A continuación, en esta sección se revisan catorce documentos relevantes para el trabajo de título. Estos abarcan desde la forma en la que se puede medir la densidad y cuál es la metodología más apropiada según el contexto, hasta estudios en donde la utilizan para explorar depósitos. En el esquema de la Figura 2.1, se muestra un resumen del capítulo. Cabe destacar que en estos catorce textos, la densidad aparece como un factor clave en la toma de decisiones.

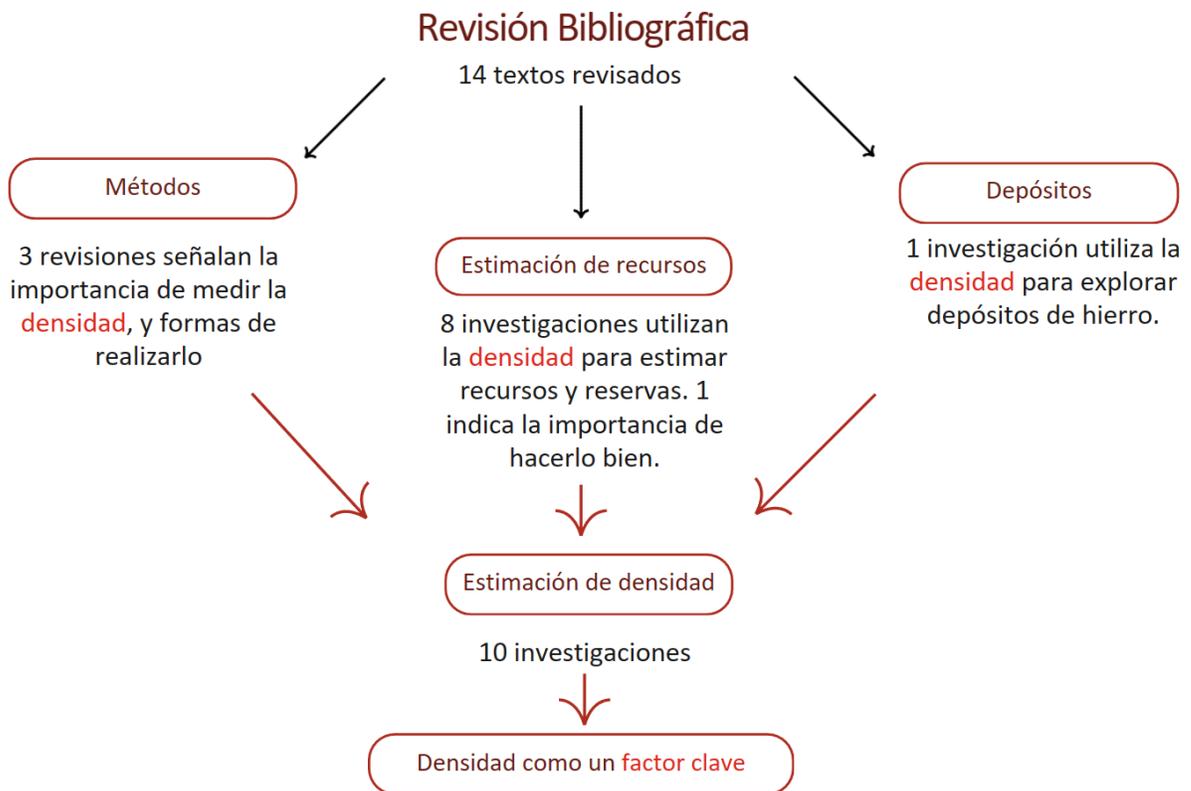


Figura 2.1: Esquema de revisión bibliográfica

2.1. Antecedentes de Estudio

2.1.1. Densidad

La densidad corresponde a una relación entre la masa y el volumen. En el caso de las rocas, existen distintos tipos, tales como: la densidad real, densidad aparente seca (*DBD* por sus siglas en inglés), densidad aparente húmeda y densidad *in-situ* [1]. La elección sobre cuál densidad medir, dependerá de la mineralización, el tipo de muestras disponibles, los equipos utilizables y el estado de avance del proyecto [3]. Además, se debe considerar que las muestras sean representativas y que la calidad de los datos sea óptima, para así tener un modelo preciso de la densidad de roca en el yacimiento [1]. Por ende, son diversos los métodos para medirla; y la forma depende de la competencia de la roca y su clasificación [1] ¹.

Dentro de las densidades más utilizadas, están la *Dry Bulk Density* y la densidad *in-situ*. La *DBD* se determina como la masa seca de una muestra de roca dividida por su volumen, incluyendo la porosidad [1] y está exenta de la presencia de agua. La densidad *in-situ* es la cual es medida directamente del macizo, en otras palabras, “como venga”, e incluye los poros, vacíos, alteraciones, oxidaciones, intrusiones, entre otros [3].

Existen distintos métodos para medir la densidad aparente de las rocas, los cuales son: el método del calibre, de inmersión instantánea en agua, de inmersión en cera y de inmersión en cera- envoltura retráctil. De estos, el método más universalmente preciso para determinar la densidad es el de inmersión en cera- envoltura retráctil [5], ya que, esta agrega otra capa que permite que los poros sean impermeables al agua, y así, el volumen interno de los espacios vacíos es incluido a la hora de medir el volumen total requerido para determinar la densidad aparente.

Actualmente, no hay mucha información sobre cómo utilizar métodos avanzados para la cuantificación de recursos utilizando la densidad. En particular, la densidad es una variable que ha sido estudiada e ignorada. Es más, investigaciones indican que, en particular, la densidad aparente se considera poco o nada al preparar las estimaciones de recursos, y, que la mayoría prefiere utilizar un valor promedio simple o la ignoran [2]. No obstante, hay atisbos recientes de que esto está cambiando.

Es sabido que la densidad es una variable que afecta al tonelaje y a la ley de los recursos minerales [1]. [3] [6] y su deficiente medición genera la posibilidad de provocar errores graves en las estimaciones de tonelaje y una cuantificación insuficiente del contenido de metal [2] [4]. Adicionalmente, se encontró que al no considerar la incertidumbre de la densidad, hay impactos en etapas aguas abajo, como puede ser, en el diseño y planificación de la mina, el LOM y el VAN [4].

Cabe destacar que, para medir la densidad, un estudio halló que la estimación de los errores de

¹ roca competente y no porosa, roca meteorizada y porosas, y, sedimentos blandos no consolidados

la densidad de rocas es consistentemente menor que los estimados para el contenido de metal [6]. En la misma línea, demuestra que una valoración precisa de la densidad de roca, requiere de menos muestras con respecto a las muestras necesitadas para medir las leyes de metal; todo esto dentro de un mismo depósito [6]. Finalmente, mediante un modelo de análisis geoestadístico, es posible definir las mallas de muestreo ideales para obtener la DBD.

2.1.2. Variograma

Esta herramienta se utiliza para medir la continuidad espacial de una variable regionalizada [7]. En particular, el variograma experimental mide la desviación cuadrada promedio entre dos datos, dada su separación [8] [9] [7], y se calcula experimentalmente solo para algunos valores de dicha separación [7]. Así, se expresa mediante la ecuación 2.1.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [z(x_\alpha) - z(x_\beta)]^2 \quad (2.1)$$

En donde:

- $x_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$ son los sitios de muestreo.
- $z(x)$ es la variable regionalizada.
- $N(h) = (\alpha, \beta)$ tales que $x_\alpha - x_\beta = h$.
- $|N(h)|$ es el cardinal de $N(h)$.

Además, este se puede calcular en más de una dirección. Así, es necesario definir parámetros para calcularlo, los cuales son dirección (acimut e inclinación), distancia (paso y número de pasos), tolerancia de dirección y de distancias citechiles-2012 [9] [7].

2.1.3. Kriging

El kriging es un método de interpolación espacial basado en la representación de una variable regionalizada mediante una función aleatoria (Z), que pondera los datos en función de: la distancia al sitio de estimación, continuidad espacial de la variable regionalizada y los agrupamientos de los datos. Además, permite cuantificar la precisión de la estimación (varianza del error). Este estimador permite predecir información en sitios donde no existen datos. Este se sustenta en base a 3 restricciones:

1. El valor estimado se obtiene mediante una combinación lineal:

$$Z^*(x_0) = a + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z(x_\alpha) \quad (2.2)$$

En donde:

- $Z^*(x_0)$ es el valor de la variable a estimar.
- x_0 es la posición en donde se busca realizar la predicción.
- a es una constante.
- α son las posiciones donde se conoce el valor de la variable.
- $Z(x_\alpha)$ son los datos cuyo valor, para la posición α , son conocidos.
- λ son los ponderadores.

2. El estimador es insesgado:

$$\mathbb{E}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] = 0 \quad (2.3)$$

En donde:

- \mathbb{E} es la esperanza.
- $Z^*(x_0)$ es el estimador en el punto x_0 de interés.
- $Z(x_0)$ es el valor real de esta variable.

3. La varianza del kriging debe ser mínima:

$$\sigma_K^2(x_0) = \min \text{var}[Z^*(x_0) - Z(x_0)] \quad (2.4)$$

En donde:

- $\sigma_K^2(x_0)$ es la varianza del kriging.
- var es la varianza.

Esto hace que, en construcción, sea un estimador de máxima precisión [7] [8] [9]. En particular, existen dos tipos comunes de kriging: simple y ordinario. El primero, se caracteriza porque la media es conocida, mientras que en el segundo esto no sucede. Al considerar la media como desconocida, el estimador es más generalizado, sobre todo cuando la media no es constante, haciendo que sea más robusto [8] [9].

El kriging se caracteriza por ser insesgado, generar una interpolación exacta, ser aditivo, poseer poco o nulo sesgo condicional y tener un efecto de suavizamiento. En primer lugar, el insesgo se refiere a que la media del error es cercana a cero, en grandes extensiones. En segundo lugar, la interpolación exacta hace referencia a que, al estimar un sitio con dato devuelve el valor medido en este sitio, mientras que la varianza de kriging en ese sitio es nula [8] [9]. En tercer lugar, la aditividad se refiere a que el valor promedio del kriging es el promedio de las estimaciones puntuales de la zona [8] [9]. En cuarto lugar, el sesgo condicional se vincula a que, en zonas estimadas que superan cierta ley de corte, el promedio de los errores, en algunas ocasiones, puede ser distinto de cero. Finalmente, el efecto del suavizamiento es que la dispersión de los valores reales es mayor que la de los valores predichos.

2.1.3.1. Vecindad

Esta es la zona circundante al sitio que se debe estimar, en donde se realiza la búsqueda de los datos que serán utilizados para la estimación. Existen dos tipos de vecindad: única y móvil. La primera utiliza todos los datos disponibles y la segunda, solo una parte de ellos [8] [9]. Por lo general, se prefiere trabajar con la vecindad móvil, ya que la vecindad única aumenta los tiempos de cálculo y no mejora la calidad de la estimación [8] [9]. Para utilizar la vecindad móvil, es menester especificar la forma, tamaño y división en sectores angulares [8] [9].

Adicionalmente, en el caso de la vecindad móvil, idealmente ésta debe cumplir con una serie de requisitos. Uno de estos es de forma, la cual debe elegirse de tal manera que considere la anisotropía de los datos. El otro aspecto es el tamaño, en donde debe incorporar el alcance del variograma y la malla de muestreo. Finalmente, la vecindad puede poseer una partición en sectores angulares, para mejorar la distribución de los datos a estimar [8] [9].

2.1.3.2. Validación cruzada

Esta es una técnica que, como su nombre indica, permite validar el modelo teórico del variograma y la vecindad de búsqueda [8] [9], y así, corroborar que la variabilidad espacial de los datos se ve correctamente descrita. Esta metodología es iterativa y consiste en estimar cada uno de los datos mediante kriging, a partir de los datos restantes. Tras esto, se calcula el error de estimación en cada ubicación de los datos, utilizando la diferencia entre el valor estimado y el valor real. Para finalizar, se evalúa la calidad de los errores de estimación [8] [9]. Así, se valida que el predictor sea insesgado, preciso, que el variograma es capaz de cuantificar la incertidumbre y, que hay insesgo condicional [8] [9]. En resumen, se debe cumplir que:

- La media de los errores debe ser cero.
- La varianza de los errores debe ser lo más baja posible.
- La varianza de los errores estandarizados debe ser cercana a 1.
- La nube de dispersión debe ser cercana a la identidad.
- La estimación de bloques debe conservar la media y disminuir la varianza.
- Se debe evitar el sesgo condicional.

2.1.4. Cokriging

El cokriging sirve para estimar de manera conjunta y local más de una variable considerando la dependencia espacial de ellas. Es una generalización del kriging: el estimador es una ponderación dada la combinación lineal de los datos, insesgado y con una varianza del error mínima [8] [9]. Existen dos variantes principales : simple y ordinario. Al igual que en el kriging, la primera corresponde a cuando las medias son conocidas y, la segunda, cuando sucede el caso contrario.

2.1.5. Simulación

La simulación estocástica es un proceso que permite generar múltiples realizaciones posibles de la función aleatoria que representa la variable regionalizada de interés (como en el caso de estudio, la ley de Fe). Este método se utiliza para modelar la incertidumbre y variabilidad espacial de los datos. Esto es especialmente útil para capturar las heterogeneidades y evitar el efecto de suavizamiento característico del kriging [10]. Asimismo, facilitan la cuantificación de la incertidumbre derivada del desconocimiento de los valores exactos de una variable regionalizada, mediante la creación de varios escenarios equiprobables de dicha variable [11].

Dependiendo del tipo de variable a estudiar, se define el tipo de simulación. En el caso de las leyes, al ser una variable continua, el modelo que se utiliza es el multigaussiano [11].

2.1.5.1. Modelo multigaussiano

Para poder aplicar correctamente este modelo, se requiere que los datos posean una distribución multigaussiana, la cual se caracteriza con que todas las combinaciones lineales de sus elementos son gaussianos, o equivalentemente, la densidad de probabilidad de un conjunto de valores ubicados en los sitios $\{x_1, \dots, x_n\}$ es multigaussiana, como se define en la Ecuación 2.5 [11] [12].

$$g(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\sqrt{\det(C)})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^t C^{-1} y \right\} \quad (2.5)$$

Donde:

- $y = (y_1, \dots, y_n)^n$
- $C_{i,j} = cov\{Y(x_i), Y(x_j)\}$
- g es la densidad de probabilidad del vector aleatorio $(Y(x_1), \dots, Y(x_n))$ evaluada en (y_1, \dots, y_n) , donde $Y(x)$ representa a la función aleatoria multigaussiana.

Dado que el supuesto para utilizar este modelo, dependiendo de la variable, es necesario aplicar una transformación gaussiana, la cual se conoce como anamorfosis [11]. Es por esto que, es necesario realizar pruebas que corroboren que esta se haya realizado correctamente y se trate de una distribución multigaussiana. Estos tests pueden ser nubes de correlación diferida, variogramas de indicadores y la comparación de variograma con madograma.

2.1.5.1.1. Nubes de correlación diferida

Las curvas de isodensidad de la distribución bivariable del par $Y(x+h), Y(x)$ adoptan la forma de elipses concéntricas. En consecuencia, la nube de correlación diferida, definida como $\{(y(x_a), y(x_b)) \text{ tal que } x_b - x_a = h\}$, debe presentar una configuración elíptica. A medida que $|h|$ tiende a infinito, esta nube de correlación se asemeja a una forma circular, mientras que, cuando $|h|$ se aproxima a 0, la nube se concentra alrededor de la diagonal de 45° [12].

2.1.5.1.2. Variogramas de indicadores

En primer lugar, se determina un indicador, el cual es una función binaria definida con respecto a un umbral. Esto se puede ver en la Ecuación 2.6.

$$I_Y(x; y) \begin{cases} 1 & \text{si } Y(x) < y, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.6)$$

Entonces, suponiendo bigaussianidad, existe una relación entre el variograma de los datos Gaussianos $\gamma(h)$ y el variograma del indicador $\gamma_{I,Y}(h)$ [12].

2.1.5.1.3. Comparación de variograma con madograma

También conocido como “variograma de orden 1” se define según lo descrito en la Ecuación 2.7.

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} \mathbb{E} |Y(x+h) - Y(x)| \quad (2.7)$$

Si $Y(x+h), Y(x)$ posee una distribución gaussiana, entonces se cumple lo expuesto en la Ecuación 2.8, independientemente del valor de h . Esto quiere decir que, el madograma es proporcional a la raíz cuadrada del variograma [12].

$$\frac{\sqrt{\gamma(h)}}{\gamma_1(h)} = \sqrt{\pi} \quad (2.8)$$

2.1.5.2. Simulación de Bandas Rotantes

Este método tiene como objetivo simplificar el problema de simulación en espacios multidimensionales, utilizando simulaciones en una dimensión [13]. En otras palabras, consiste en realizar simulaciones de la variable de interés a lo largo de líneas que dividen el espacio en segmentos discretos [11]. Su expresión univariable se aprecia en la Ecuación 2.9 adjunta a continuación.

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i^{(1)}(\langle x|u_i \rangle) \quad (2.9)$$

Donde:

- $i = 1, \dots, N$
- $Y^{(1)}$ son simulaciones unidimensionales independientes.
- u_i son vectores de \mathbb{R}^d , es decir, de direcciones en el espacio.
- $(\langle x|u \rangle)$ son las proyecciones del sitio x en la recta orientada en u_i .

2.1.6. Machine Learning

También conocido como aprendizaje automático, corresponde a una rama de estudio de la inteligencia artificial en donde se busca crear algoritmos que permitan que los computadores imiten

la forma en la que los humanos aprenden, pudiendo realizar predicciones o decisiones basadas en datos sin ser explícitamente programados para ello [14].

Para entrenar estos modelos, estos pueden tener tres distintos tipos de aprendizaje [8] [9]:

- Supervisado: los datos utilizados para entrenar el modelo contienen *inputs* y sus respectivos *outputs* correctos.
- No supervisado: el modelo es entrenado solo usando inputs, generando clases con ellos; tratan de buscar patrones o estructuras.
- Por refuerzo: el sistema se entrena para que tome acciones secuenciales la mejor acción en una situación específica para maximizar el beneficio total. El modelo aprende a tomar decisiones secuenciales mediante la interacción con un entorno y la maximización de una función de recompensa.

Dentro de los algoritmos que se pueden utilizar está el de Support Vector Machine (SVM), el cual se conoce en español como máquinas de vectores de soporte. Este es un algoritmo de aprendizaje supervisado asociado a problemas de clasificación y regresión. Esta técnica se fundamenta en el *Maximal Margin Classifier*, que a su vez, se basa en el concepto de hiperplano [15]. El hiperplano, el cual en un espacio p -dimensional, es un subespacio de dimensiones $p - 1$ que divide el espacio en dos mitades [15]. En el contexto de SVM, el hiperplano se utiliza para separar las diferentes clases de datos, y así, se busca “el” hiperplano que maximiza la distancia (margen) entre las clases más cercanas [16]. De esta manera, se mejora la precisión de la clasificación. En consecuencia, al vector compuesto por los puntos más cercanos al hiperplano se le conoce como vector de soporte.

2.1.7. Desigualdad de Jensen

La desigualdad de Jensen indica que si φ es una función convexa y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ un conjunto de ponderadores positivos cuya suma es igual a 1, entonces [17]:

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i) \quad (2.10)$$

Lo cual implica lo expresado en la Ecuación 2.11:

$$\varphi(\mathbb{E}\{X\}) \leq \mathbb{E}\{\varphi(X)\} \quad (2.11)$$

Donde X representa a una variable aleatoria cualquiera.

2.2. Análisis del Estado del Arte

Como se mencionó previamente, no hay muchos estudios que incorporen la densidad de la roca para la estimación de recursos, que usualmente se centra en la estimación de leyes. Sin embargo,

hay algunas investigaciones que han decidido estudiar sus impactos, o incorporar esta variable para estimar los recursos. El estudio revisado más antiguo, corresponde a una investigación en 2003, acá se estudió el efecto de la distribución espacial de la densidad en la estimación de recursos, utilizando como caso de estudio un yacimiento de minerales del grupo del platino con presencia de níquel [18]. Para aquello, el investigador realizó un kriging para estimar la densidad de la roca y el contenido de níquel. Luego, realiza una comparación entre los bloques calculados con densidad promedio y los bloques cuya densidad fue predicha mediante kriging. De esta comparación, encontró que al usar densidad media, puede conducir a sobre o subestimaciones de los contenidos de níquel y que el efecto del modelo de la densidad en la estimación de recursos dependerá de la ley de corte y los precios del metal de interés [18].

Otro trabajo, en 2012, estimó los recursos de un yacimiento ferrífero ocupando la densidad como una de las variables clave [7]. Esta densidad fue calculada a partir de la ley de hierro y se utilizaron ponderadores para su estimación. La expresión resultante se expresa en la Ecuación 2.12.

$$Densidad = 0.032 \times Ley\ de\ Fierro + 2.4753 \quad (2.12)$$

La principal conclusión de este trabajo, es que existen ventajas considerables de estimar recursos con variables aditivas (como $ley \times densidad$ en vez de ley) [7] ya que pudo obtener mayor cantidad de recursos estimados que antes no habían sido considerados, siguiendo estimaciones tradicionales; al usar cokriging tradicional, encontró 50 [Mt] de mineral y 100 [Mt] de hierro magnético extras [7].

En la misma línea, una investigación realizada en 2019, presentó una nueva metodología para evaluar de forma indirecta la densidad y la mineralogía de un yacimiento de hierro, basándose en el cálculo de la norma mineralógica (MNC) [19]. Esta metodología logró conciliar los datos de producción real con la masa estimada en el modelo de bloques, logrando mejores resultados que la forma tradicional de evaluar la densidad. También, al incorporar la información de la densidad, incrementaron las reservas minerales [19]. Otra investigación realizada en 2019 señala que, la densidad aparente (de las principales unidades litológicas) no tiene una influencia significativa en la precisión de estimación de recursos a nivel global pero sí a nivel local [20]. Sin embargo, señala que es importante considerar la densidad aparente del mineral, ya que juega un rol clave en la planificación minera.

Paralelamente, en 2022 se llevó a cabo una investigación de la importancia de la densidad para evaluar el método gravimétrico para detectar depósitos de hierro ocultos en la provincia de Hamersley, al noroeste de Australia Occidental [21]. El principal resultado obtenido es que, para el caso de esa provincia, los estudios de gravedad (*gravity surveys*) pueden ser más efectivos para explorar depósitos de hierro ocultos que el método magnético [21].

En investigaciones más recientes, y que ocupan métodos avanzados, como el *machine learning (ML)*, lo utilizan para estimar la densidad de las rocas a partir de datos de geoquímica multielemental. El método utilizado es el algoritmo XGBoost, que construye un modelo aditivo basado en

árboles de regresión [22]. El principal resultado es que este modelo es capaz de capturar con fidelidad la variabilidad espacial de la densidad. Y si bien, el ML fue útil para generar el modelo de densidad, posee limitantes como la sensibilidad a la calidad de datos y la incapacidad de representar densidades muy altas o muy bajas [22].

Otra investigación realizada en 2023, analizó un yacimiento pórfido cuprífero asociado a un sistema de skarn, y estimó la densidad (D) usando el cokriging de medias relacionadas [23]. Este incorpora restricciones lineales entre las medias de las variables a estimar, dado que la densidad presenta una fuerte correlación con la ley de hierro. Por ende, para la estimación de recursos se utiliza la relación existente. Luego, para dichas variables proponen las siguientes relaciones entre medias:

$$m_D = 2.649 + 0.031 \cdot m_{Fe} \quad (2.13)$$

$$m_{Fe} = 4.2 + 8.11 \cdot m_{Indicador} \quad (2.14)$$

En donde m corresponde a la ley media de la variable de interés (D, ley de hierro Fe o un indicador de tipo de roca). Los investigadores observaron que el cokriging de medias relacionadas presenta mejores resultados tanto para hierro como para densidad. [23].

Finalmente, investigadores en 2004, encontraron que la incertidumbre y errores en la estimación de recursos son una fuente mayor de problemas económicos en la industria minera. Es por esto que, la cuantificación de la incertidumbre es crítica para una planificación realista en los proyectos [24]. Además, la ley es una de las principales fuentes de error en la estimación de recursos dadas sus limitaciones físicas [24].

Algo que todas las investigaciones revisadas tienen en común, es la necesidad de poseer bases de datos robustas, y que la densidad de la roca es una variable que debería considerarse en la estimación de recursos. Teniendo en cuenta lo anterior, sumado al contexto particular para yacimientos ferríferos, esto se vuelve crucial y necesario. Es menester mencionar que este enfoque es más bien moderno, ya que la mayoría de las investigaciones revisadas son de los últimos 10 años. Es así, como a lo largo de los estudios revisados, se evidencia una tendencia hacia la integración de la densidad como factor determinante en la estimación de recursos, aumentando la calidad de ésta.

Es en este contexto que esta memoria de título busca cerrar esta brecha en el conocimiento, contribuyendo así a la tendencia global de querer precisar la estimación de recursos. Así, proporciona un marco de trabajo sólido para evaluar recursos minerales, impactando etapas aguas abajo. Finalmente, la aplicación práctica de este enfoque en yacimientos de hierro es de especial importancia dadas sus características distintivas mencionadas anteriormente.

2.3. Contexto del caso de estudio

2.3.1. Chah-Gaz, Irán

El caso de estudio corresponde al depósito de óxido de hierro-fosfato (IOA) de Chah-Gaz, ubicada en la provincia metalogénica de Bafq, en el centro de Irán, también se le conoce como Anomalía XIVA y se encuentra a 43 kilómetros al norte del depósito Choghart [25] (ver Figura 2.2 a,b). En particular, se halla en el cinturón volcánico-plutónico Kashmar-Kerman [26]. El yacimiento se encuentra enclavado en rocas ígneas tanto calco-alcalinas como alcalinas, que abarcan una variedad desde granito hasta diorita, riolita y riodacita. Adicionalmente, se observan rocas gabro-dioríticas alcalinas que presentan un grado de alteración creciente en las cercanías de los cuerpos minerales ricos en magnetita, evidenciando texturas de remplazo [25] [26]. Además, sus características son concordantes con un depósito tipo Kiruna, en donde posee (i) varios tipos de alteración hidrotermal (sodio, calcio, potasio, entre otros), (ii) afinidades calco-alcalinas de rocas ígneas asociadas a la mineralización, (iii) composición química de la magnetita, y (iv) baja cantidad de sulfuro contenido en el mineral [25] [26]. Esta clase de yacimientos se caracteriza por ser ricos en hierro.

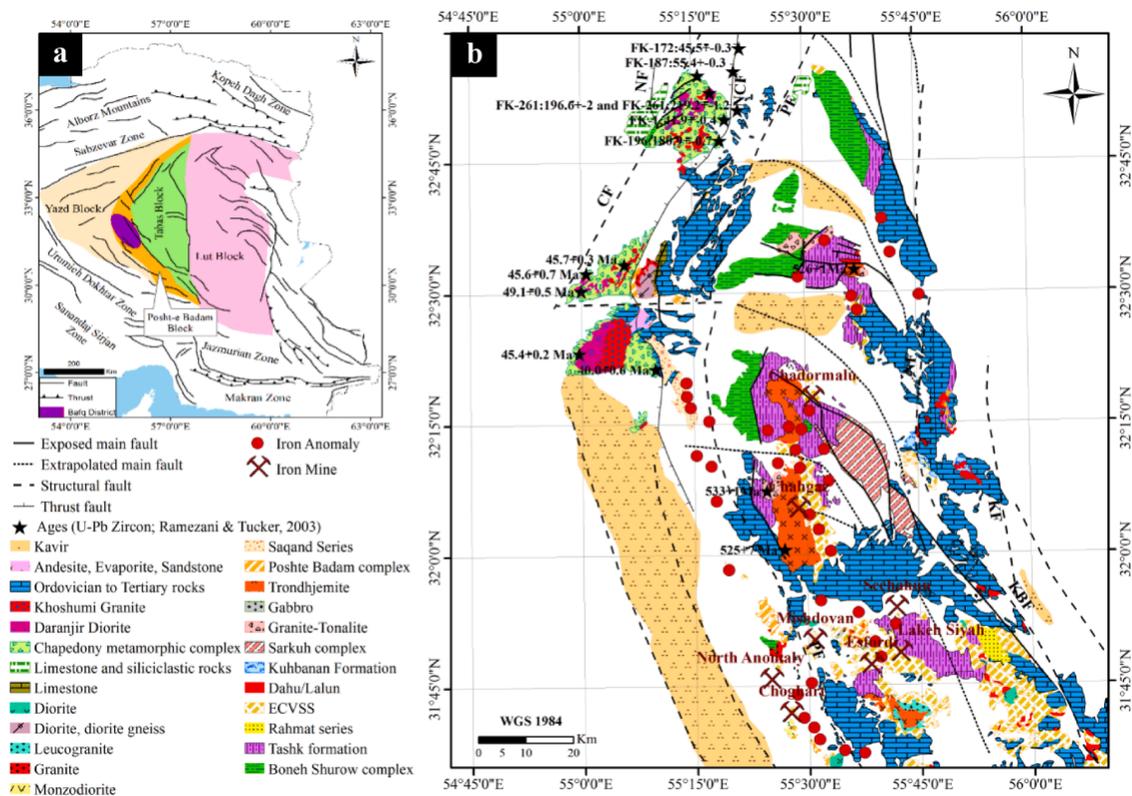


Figura 2.2: a) Ubicación de la microplaca central iraní, los principales bloques y fallas; b) Mapa geológico simplificado del distrito de Bafq, muestra la distribución de los depósitos de óxido de hierro y apatita. KBF: Falla de Kuhbanan, KF: Falla de Kalmard, PF: Falla de Posht-e-Badam, CF: Falla de Chapedonia, NF: Falla de Naein [25]

Cabe destacar que el depósito Chah-Gaz se compone por dos yacimientos masivos separados en forma de tubería vertical, cuya profundidad es de ≈ 690 [m], y se les conoce como los cuerpos minerales este y oeste [25]. La zona de mineralización es controlada por dos fallas: la NE-SO y la

NO-SE [25]. Esto se puede apreciar en la Figura 2.3.

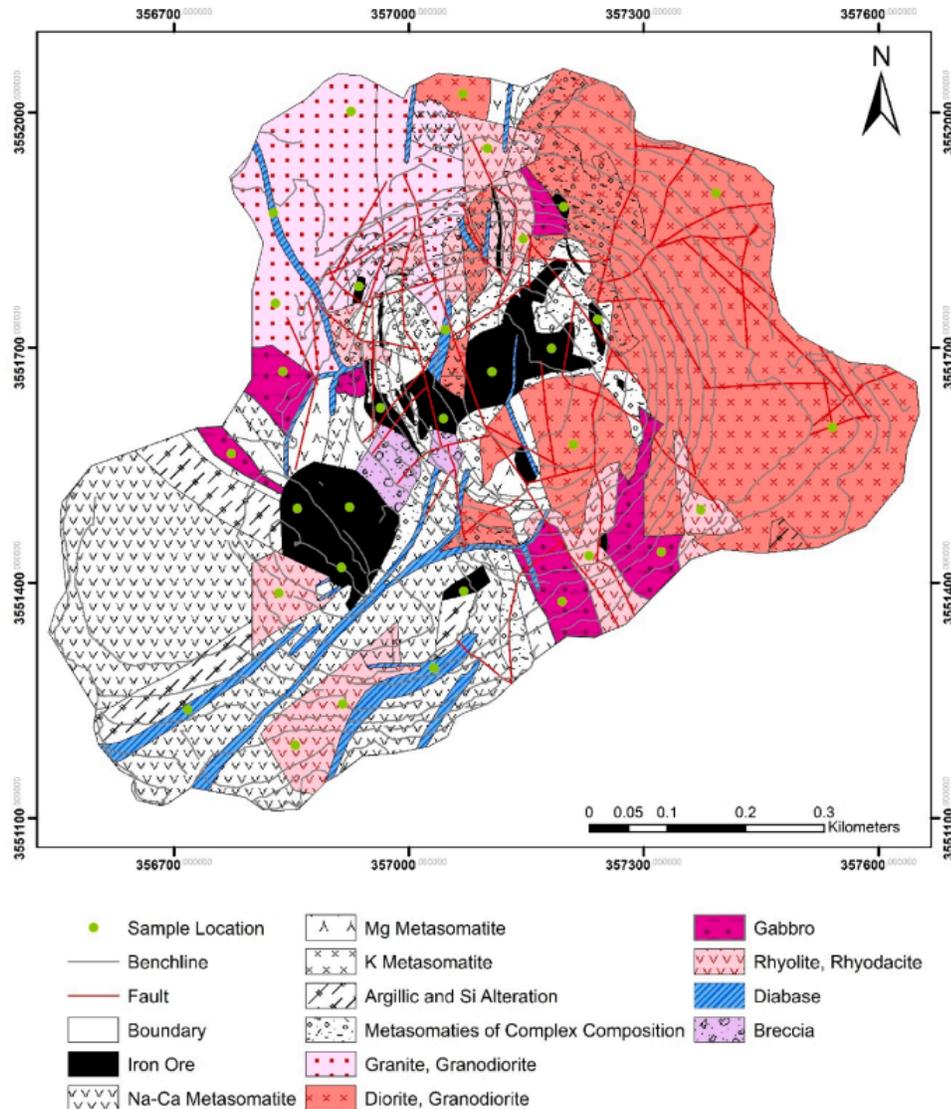


Figura 2.3: Mapa geológico del depósito Chah-Gaz [25]

Con respecto a la base de datos de este depósito, hay presencia de azufre y potasio como contaminantes, los cuales poseen una restricción que deben ser menores a 1%; y, los datos están compositados a 4 [m]. Además, la relación entre la densidad y la ley de hierro, se ve expresada por la ecuación 2.15; ésta fue determinada experimentalmente a partir de muestras de densidad y ley.

$$Densidad \left[\frac{t}{m^3} \right] = 2.13 + 0.0368 \times Fe [\%] \quad (2.15)$$

Cabe destacar que, la grilla que contiene los datos está codificada por Zonas, cuyos valores pueden ser 1 o -99; los primeros corresponden a sitios donde si debe haber estimación, y el caso contrario, respectivamente. Finalmente, la unidad básica de explotación (UBE o SMU) es de 10 [m] × 10 [m] × 12 [m]. En la actualidad, este depósito considera una ley de corte del 20%.

Capítulo 3

Materiales y métodos

3.1. Metodología

En función de la revisión bibliográfica realizada, se propone la siguiente metodología con el fin de alcanzar los objetivos propuestos:

3.1.1. Revisión de bases de datos

Se realizará un Análisis Exploratorio de Datos (*EDA*), para así generar una base de datos confiable.

3.1.2. Aplicación de metodologías

Enfoque 1: Kriging de Fe a soporte de grilla fina

A continuación, se detallan los pasos a seguir para el enfoque propuesto:

1. Kriging de Fe a soporte de grilla fina ²(Fe^* ³)
2. Cálculo de densidad a soporte de grilla fina, se utiliza la ecuación:

$$D^* = a + b \times Fe^* \quad (3.1)$$

3. Cálculo de contenido metálico, utilizando la expresión:

$$Q_{Fe^*} = Fe^* \times D^* \quad (3.2)$$

4. Rebloqueo de contenido metálico Q_{Fe^*} y de densidad D^*
5. Cálculo de recursos y reservas recuperables (tonelaje, metal y leyes medias)

² De tamaño pequeño. Se escoge porque la ley de Fe no es una variable aditiva

³ De aquí en adelante, a todos los elementos que presentan asterisco (*) se referirán a variables que fueron estimadas o simuladas

Enfoque 2: Cokriging usando variables aditivas

A continuación, se detallan los pasos a seguir para el enfoque propuesto:

1. Cálculo de contenido metálico a soporte puntual ⁴, utilizando la expresión:

$$Q_{Fe} = Fe \times D \quad (3.3)$$

2. Cokriging de Q_{Fe} y D a soporte de bloques, ya que son variables aditivas.
3. Cálculo de recursos y reservas recuperables (tonelaje, metal y leyes medias)

Enfoque 3: Simulación de Fe a soporte de grilla fina

A continuación, se detallan los pasos a seguir para el enfoque propuesto:

1. Simulación de Fe a soporte puntual
2. Cálculo de densidad a soporte puntual, se utiliza la ecuación

$$D^* = a + b \times Fe^* \quad (3.4)$$

3. Cálculo de metal, en función de la expresión:

$$Q_{Fe}^* = Fe^* \times D^* \quad (3.5)$$

4. Rebloqueo de metal Q_{Fe}^* y de densidad D^*
5. Cálculo de recursos y reservas recuperables (tonelaje, metal y leyes medias) en un conjunto de realizaciones.

Enfoque 4: Machine Learning

En este enfoque, se utiliza el algoritmo de *Support Vector Machines* (SVM) con el fin de estimar los recursos del yacimiento, reemplazando el kriging y cokriging de los enfoques 1 y 2. Las variables de entrada (*features*) seleccionadas son las coordenadas espaciales X, Y, Z. La variable de respuesta (*target*) es la concentración de Fe [%].

Antes de entrenar el modelo, es necesario escalar las variables predictoras debido a la sensibilidad del algoritmo SVM a la escala de las variables. Para ello, se aplicó el escalado estándar (*StandardScaler*), que ajusta las variables a una media de 0 y una desviación estándar de 1, asegurando que todas las variables contribuyan de manera equitativa al modelo.

El conjunto de datos se dividió en un 80 % para entrenamiento y un 20 % para prueba, utilizando un valor de $random_state = 42$ para garantizar la reproducibilidad. Finalmente, se realizó una búsqueda aleatoria de hiperparámetros mediante *RandomizedSearchCV*, explorando posibles valores

⁴ Dado que las variables densidad y cantidad de metal son aditivas

para el parámetro de penalización C , el margen de error ϵ , el coeficiente del kernel γ , y el tipo de función de kernel a utilizar. Esto permitió ajustar el rendimiento del modelo de manera óptima.

3.1.3. Comparación de resultados

En esta sección, en base a los textos e investigaciones revisados en la sección anterior, se contrastan y analizan con respecto a los hallazgos de este trabajo. Esto permitirá evaluar la validez de lo encontrado.

3.1.4. Análisis y discusiones

En esta etapa, se estudian las comparaciones realizadas y se responden los alcances realizados en la investigación. Además, en base a los resultados, se realizan sugerencias y recomendaciones para trabajos futuros.

En el diagrama de la Figura 3.1 se aprecia el flujo de trabajo a seguir para la realización de esta memoria. Cabe destacar que los Enfoques 1, 2, 3 y 4 se desarrollan en paralelo y son independientes entre sí.

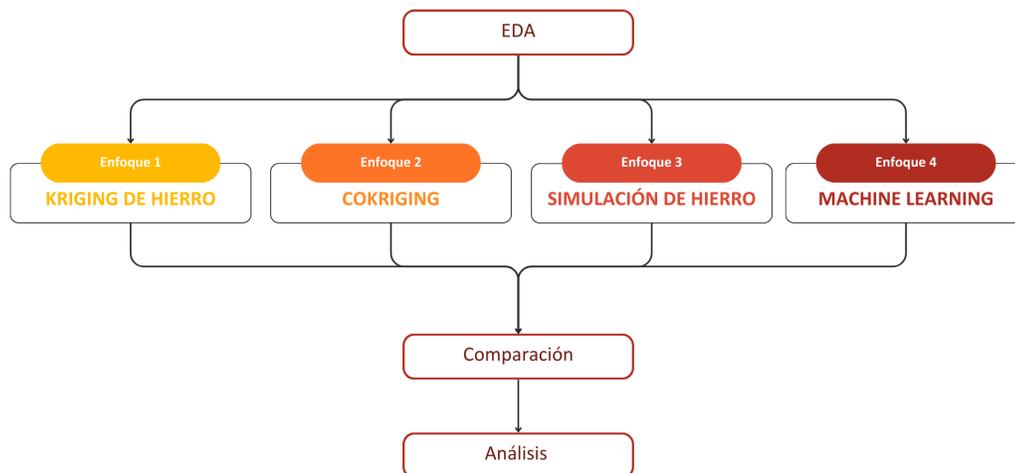


Figura 3.1: Diagrama de flujo de trabajo.

3.2. Recursos

Para la correcta realización de esta memoria, son necesarios los siguientes recursos:

- **Bases de datos:** compósitos de sondajes con variables Este, Norte, Elevación y Fe. En el caso de estudio también hay presencia de FeO, P y S.
- **Softwares computacionales:** Python, XLib y Excel.

Capítulo 4

Resultados y análisis

Dado lo expresado en el capítulo anterior, aquí se siguen paso a paso las metodologías propuestas.

4.1. EDA

Para efectos de entendimiento, se asume que la coordenada X es Este, Y es Norte y Z es Elevación⁵. En este estudio no se consideran variables geológicas como litología y zona mineral. Para el análisis exploratorio de datos, se realiza la estadística descriptiva de los sondajes, previo estudio (Tabla A.1); en esta tabla destaca la presencia de datos ausentes para el óxido de Hierro y el azufre. Para efectos de estudio, se realiza la búsqueda de datos duplicados, ausentes y faltantes. Se encuentra que hay:

- Cero datos duplicados.
- Se encontraron 2 datos con valores ausentes (-99):
 - 1 corresponde a FeO.
 - 1 corresponde a S.
- No hay datos inconsistentes, es decir, todos cumplen que $Fe \geq FeO$.
- No hay datos outliers.

En consecuencia, al filtrar los valores ausentes, se tiene la Tabla 4.1, la cual contiene la estadística descriptiva de los datos limpios, sin desagrupamiento.

⁵ En algunos resultados se reconoce a Este como *Easting*, Norte como *Northing* y Elevación como *Elevation*

Tabla 4.1: Estadística descriptiva de la Base de Datos limpios.

	Este [m]	Norte [m]	Elevación [m]	Fe [%]	FeO [%]	P [%]	S [%]
Cuenta	707	707	707	707	706	707	706.0
Media	179.63	330.769	488.416	46.925	17.619	0.568	0.3
Desv. Estándar	70.835	109.022	129.093	19.65	7.487	0.628	0.544
Mínimo	36.55	98.47	176.76	4	1.39	0.05	0.01
25 %	114.59	256.145	387.56	32.18	11.605	0.17	0.05
50 %	198.18	358.07	498.66	56.49	18.75	0.36	0.13
75 %	237.35	422.905	588.115	61.7	24.008	0.705	0.378
Máximo	287.3	497.58	755.41	69.71	29.24	4.38	4

Se destaca que se tienen 707 datos en todas las coordenadas, a excepción de los datos ausentes FeO y uno para S. En consecuencia, se observa una disminución en la desviación estándar y la varianza de estas variables, así como nuevos valores mínimos. No se aprecian mayores diferencias en los demás valores.

Continuando, se realizan histogramas para todas las variables, sin embargo, se focaliza el estudio en la variable de interés. En consecuencia, la Figura 4.1 muestra el histograma para el Hierro.

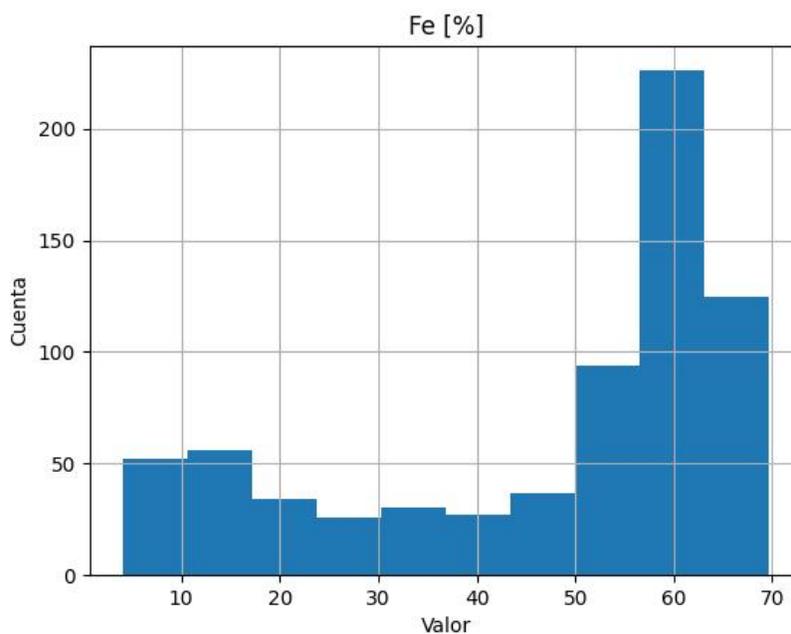


Figura 4.1: Histograma de Fe [%]

De este gráfico, se puede ver que el Hierro posee una distribución de asimetría negativa. Además se aprecia la presencia de dos grupos: uno de leyes bajas (en torno al 10%) y otro de leyes altas (cercasas al 60%), evidenciando bimodalidad.

En consecuencia, se realiza una visualización isométrica (3D), en planta (XY) y de perfil (XZ e

YZ) de los sondajes. Esto se aprecia en las figuras 4.2 y 4.3, respectivamente.

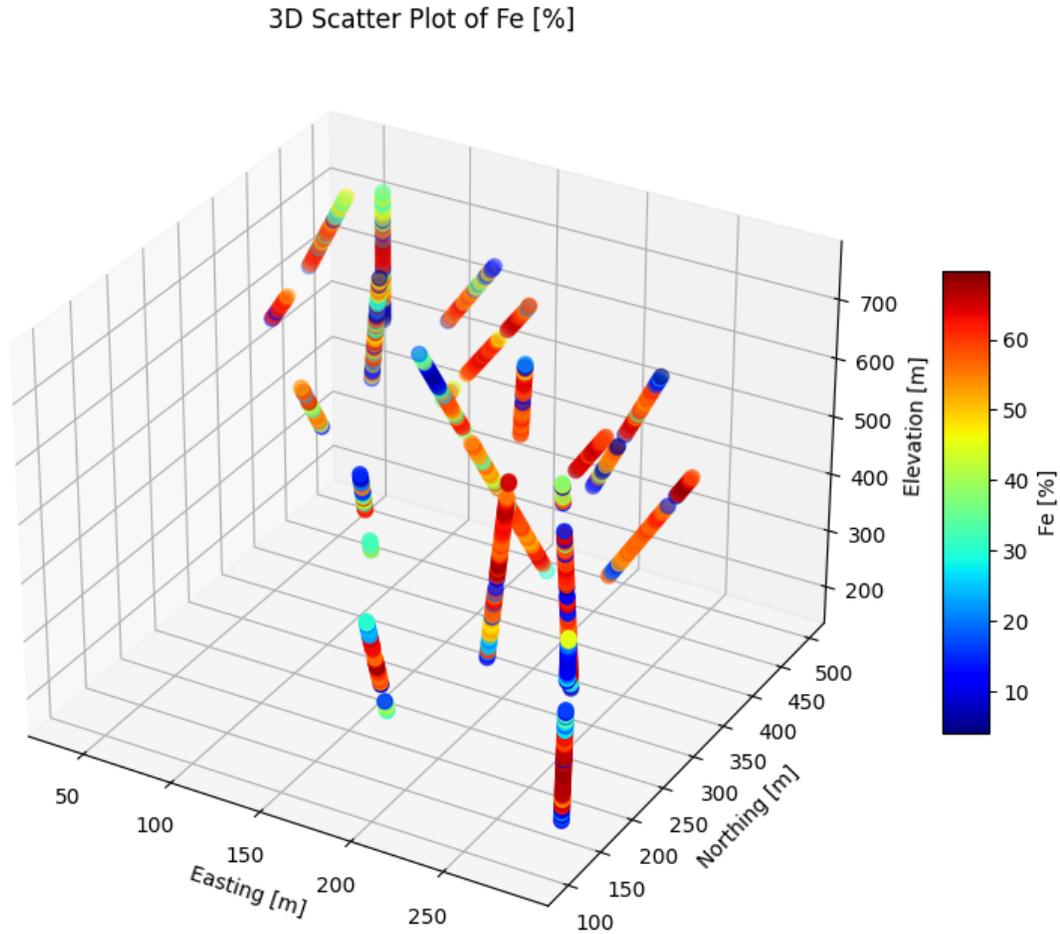


Figura 4.2: Vista isométrica 3D

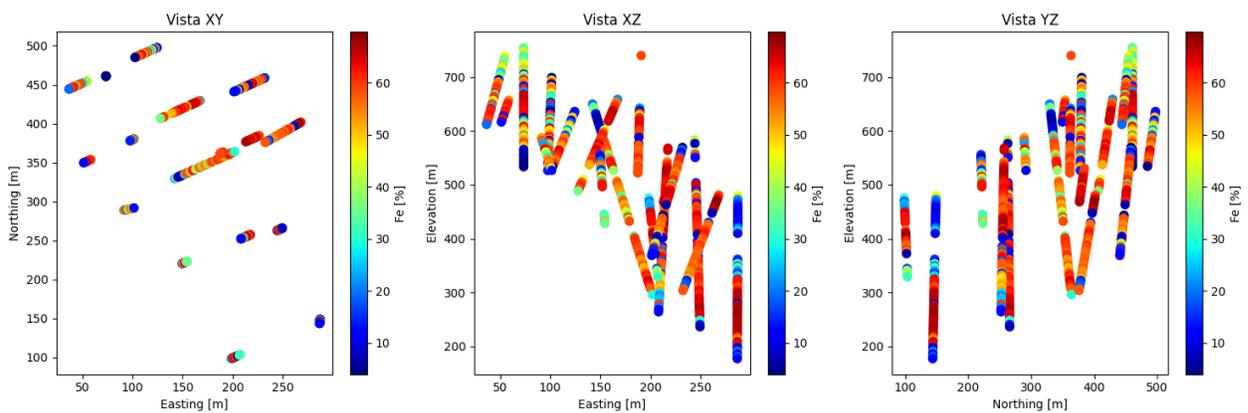
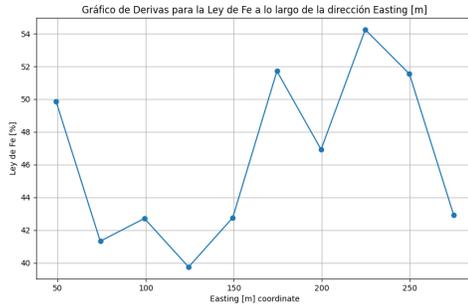


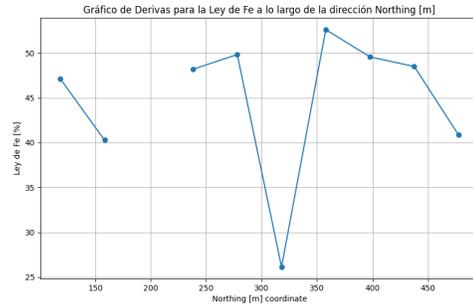
Figura 4.3: Vistas en 2D. A la izquierda, vista en planta (XY); al centro, vista en perfil (XZ); a la derecha, vista en perfil (YZ).

Sumado a la visualización en 3D, se realizan gráficos de derivas para las 3 coordenadas, expresados en la figura 4.4. De esto, se observa que las leyes más altas se encuentran más al centro de

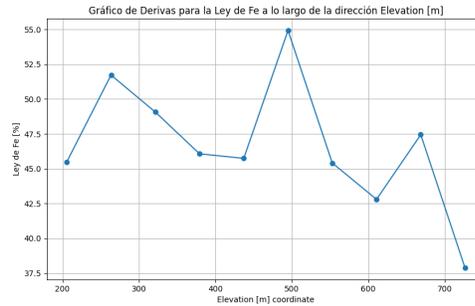
los sondajes, con leve inclinación hacia el este.



(a) Deriva en X



(b) Deriva en Y



(c) Deriva en Z

Figura 4.4: Gráficos de derivas

Luego, se realiza el desagrupamiento de los datos. Para aquello, se escoge que el desagrupamiento se realizará en celdas de $70 [m] \times 70 [m] \times 4 [m]$, dado que es el tamaño de la malla de sondaje (en X e Y) y soporte del compuesto. Cabe destacar que la malla es irregular, por ende se tomó un promedio de las distancias en cada eje; esto se pueden ver en la Tabla A.2. En consecuencia, se obtiene la Tabla 4.2. Se observa una ligera disminución en la ley media de Hierro, que desciende del 46.93% al 44.67%. Esto sugiere que había un muestreo preferencial en las zonas de alta ley. No obstante, debido a la densidad de la información disponible, este fenómeno no era evidente.

Tabla 4.2: Estadística descriptiva de la Base de Datos desagrupados

	Este [m]	Norte [m]	Elevación [m]	Fe [%]	FeO [%]	P [%]	S [%]
Cuenta	707	707	707	707	706	707	706
Media	190.03	313.25	473.79	44.67	16.79	0.56	0.34
Desviación Estándar	70.95	118.77	135.14	20.62	7.81	0.62	0.66
Varianza	5033.92	14105.85	18261.75	425.17	61.05	0.39	0.43
Mínimo	36.55	98.47	176.76	4	1.39	0.05	0.01
25 %	143.46	252.68	371.96	25.64	9.41	0.17	0.05
50 %	206.71	347.17	472.55	54.98	17.84	0.36	0.12
75 %	246.15	416.76	569.75	61.38	23.78	0.68	0.38
Máximo	287.30	497.58	755.41	69.71	29.24	4.38	4

Luego, se tiene el histograma de los variable de interés desagrupada, expresado en la Figura 4.5. Se aprecia que se sigue manteniendo el comportamiento de bimodalidad.

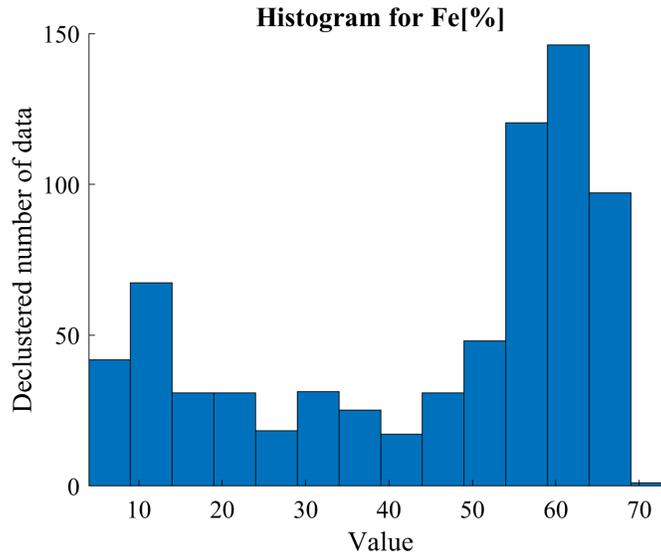


Figura 4.5: Histograma de Fe [%] de datos desagrupados.

4.2. Enfoque 1: Kriging de Fe

Teniendo en cuenta la base de datos limpia, se procede a realizar el variograma experimental. Dada la realización de los variogramas en XY, con los acimuts 0, 45, 90 y 135, los cuales se encuentran en la Figura B.1 de la sección Anexos; se aprecia que no existe dirección de anisotropía, por ende se decide realizar un variograma omnidireccional, dado que no se encontró una dirección preferencial de máxima continuidad. Por este motivo, para la creación del variograma, se utilizan los parámetros expresados en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Parámetros del variograma omnidireccional de Fe [%]

Dirección	azm [°]	atol [°]	dip [°]	dtol [°]	lag [m]	nlag [m]	lagtol [m]
Omnidireccional	0	90	0	90	12	20	6

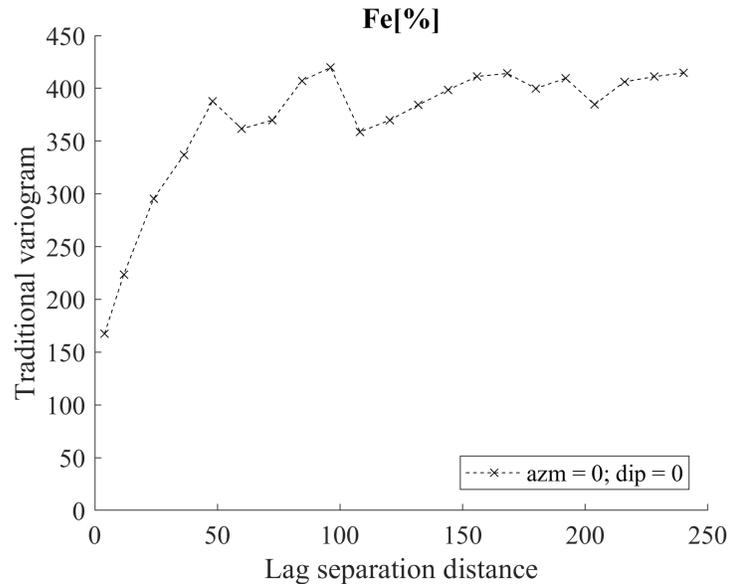


Figura 4.6: Variograma experimental de Fe [%]

Una vez realizado el variograma experimental, se busca crear su respectivo variograma modelado. Por lo general, para el hierro se utiliza el modelo esférico para realizar el ajuste. La Tabla 4.4 contiene los parámetros utilizados. Además, este variograma modelado presenta una pepita de 173.526 [m] y una meseta de 223.966 [m].

Tabla 4.4: Parámetros del variograma modelado de Fe [%]

Parámetro	Modelo	a1 [m]	a2 [m]	a3 [m]	ang1 [°]	ang2 [°]	ang3 [°]
	Esférico	70	70	70	0	0	0

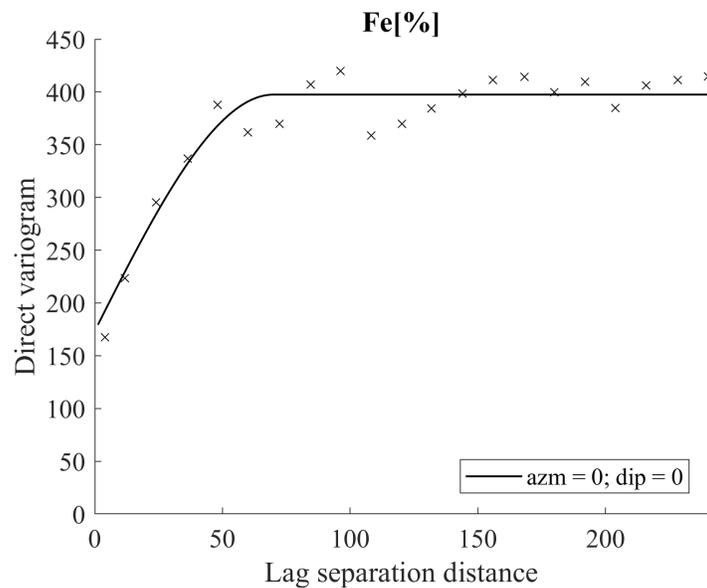


Figura 4.7: Variograma modelado de Fe [%]

Una vez creado el variograma modelado, se procede a realizar la validación cruzada con distintos radios de búsqueda y octantes. Para ello, se evalúan radios de 70, 100 y 130 [m] y datos por octante desde 4 a 10, es decir, se utilizan entre 32 a 80 datos para realizar la estimación. Los resultados se expresan en la Tabla B.1, en donde mediante una escala de color se caracterizan los valores; en verde, los datos más bajos, en amarillo los intermedios y en rojo los más altos. Además, se elabora un gráfico de dispersión con los valores reales vs valores predichos, obteniéndose el gráfico de la Figura 4.8; se distingue que la regresión condicional de los datos sigue, en gran medida, una identidad; en particular, para valores predichos bajos (debajo de 30% de Fe), hay una dispersión notable, y algunos valores reales son mucho mayores o mucho menores que los valores predichos. A partir de predicciones de Fe cercanas a 40%, la línea roja se estabiliza, lo que indica que el kriging comienza a hacer predicciones más acertadas a medida aumenta.

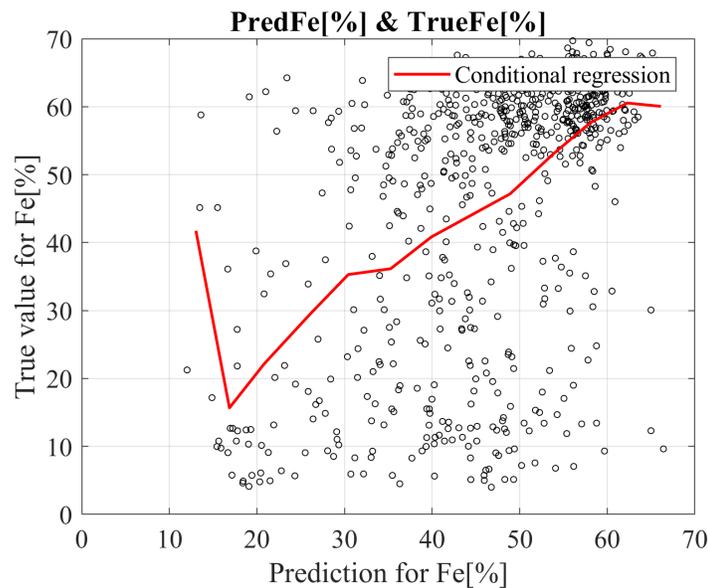
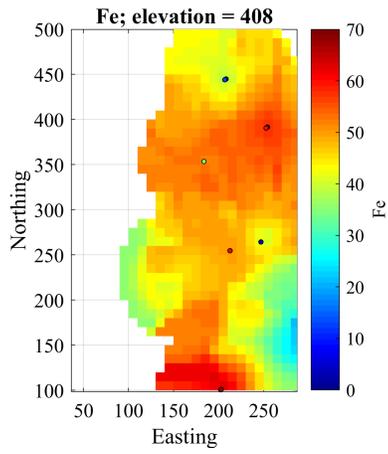
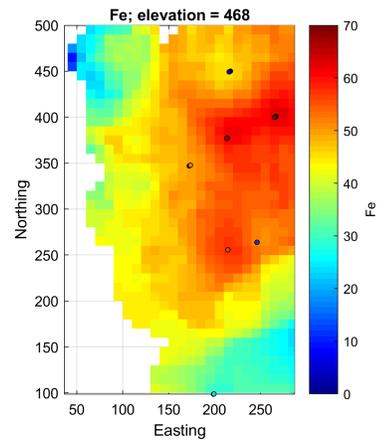


Figura 4.8: Gráfico de dispersión de Valor Real de Fe [%] versus Valor Estimado de Fe [%]

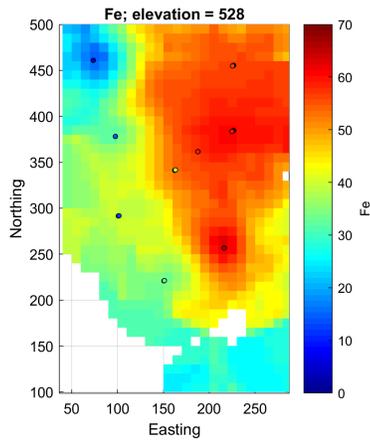
Como se observa, la combinación de radio de búsqueda 100 [m] y 7 datos por octantes, fue la que arrojó los mejores resultados. Pero, es menester mencionar que esta validación cruzada no se ajusta por completo a lo visto en secciones anteriores, sin embargo, al ser el mejor ajuste, se estima válido de utilizar. Cabe destacar que la alta variabilidad del Hierro puede estar incidiendo directamente en el resultado de esta validación cruzada. Consiguientemente, con estos parámetros se realiza la estimación de Fe, cuyos resultados se visualizan en la Figura 4.9.



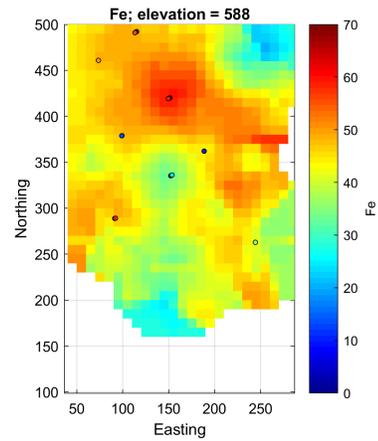
(a) Elevación de 408 metros.



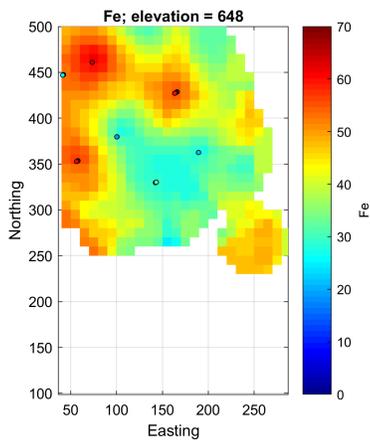
(b) Elevación de 468 metros.



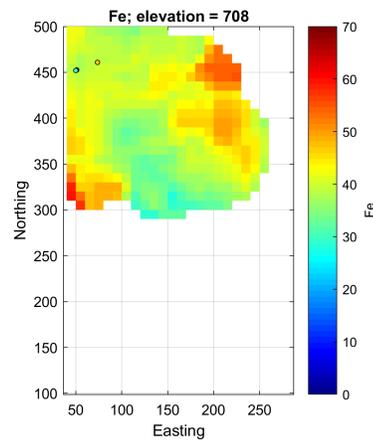
(c) Elevación de 528 metros.



(d) Elevación de 588 metros.



(e) Elevación de 648 metros.



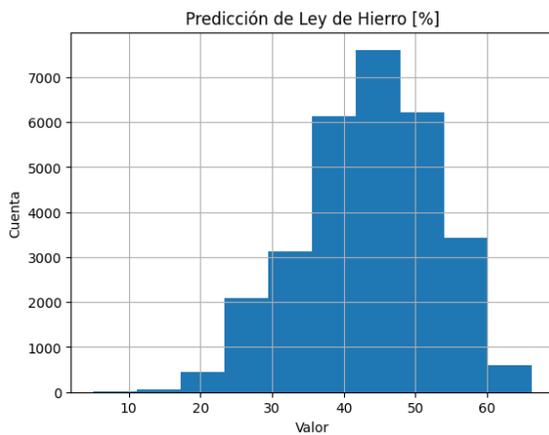
(f) Elevación de 708 metros.

Figura 4.9: Vista en Planta (XY) de la estimación de Hierro [%]

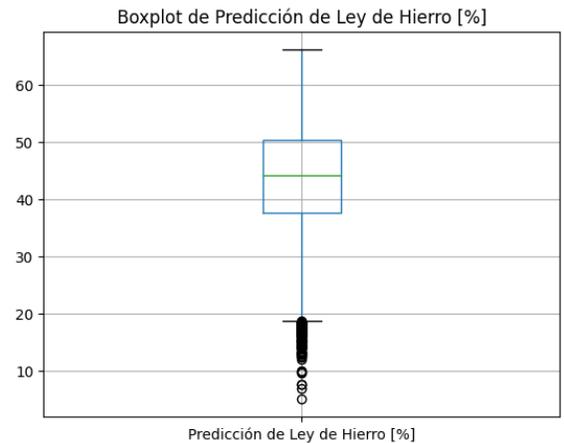
Cabe destacar que, de forma adicional, se elabora la estadística descriptiva de la ley de Hierro predicha, estos valores se aprecian en la Tabla 4.5. La distribución de los datos predichos se puede ver en la Figura 4.10.

Tabla 4.5: Estadística descriptiva para la predicción de Fe en bloques, Enfoque 1.

	<i>Predicción de Ley de Hierro [%]</i>	<i>Varianza de Predicción de Hierro [%]</i>
Cuenta	29756	29756
Media	43.601	428.097
Desv. Estándar	6.603	20.691
Mínimo	5.007	224.938
25 %	37.697	377.080
Mediana	44.154	432.061
75 %	50.426	472.853
Máximo	66.252	794.985



(a) Histograma de la predicción de ley de Hierro (Enfoque 1).



(b) Diagrama de cajas y bigotes de la predicción de ley de Hierro (Enfoque 1).

Figura 4.10: Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 1.

Además, se elabora una visualización en 3D de la predicción de Fe mediante kriging, la cual se expresa en la figura 4.11.

Enfoque 1

Predicción de Leyes de Hierro en bloques

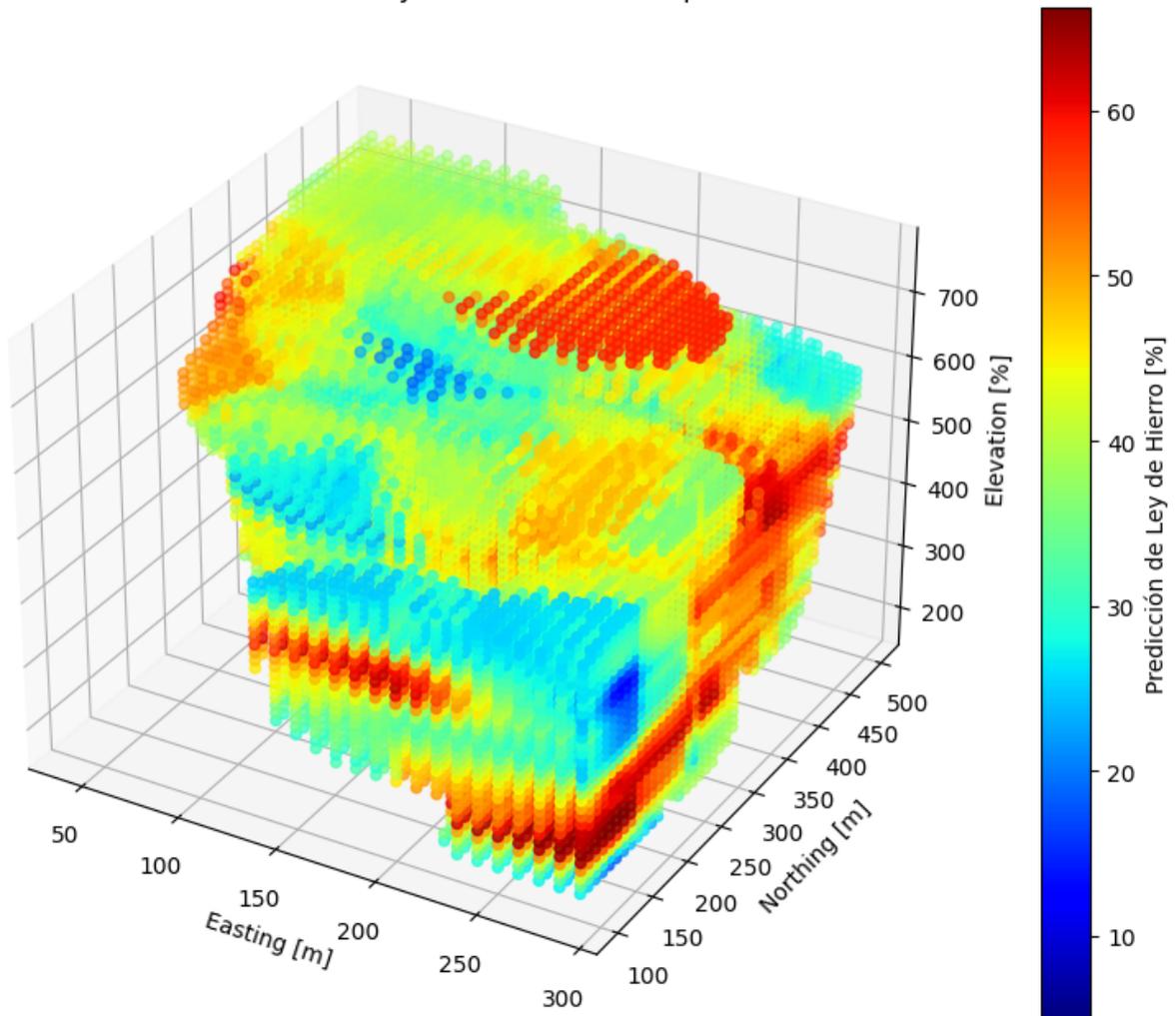


Figura 4.11: Visualización en 3D de leyes de Hierro predichas mediante kriging de Fe (Enfoque 1).

Como resultado, tomando en cuenta tanto la ley predicha como la densidad definida a partir de la ley, se tienen en total 133.349 [Mt], donde 59.267 [Mt] son de metal de Hierro, cuya ley media es de 44.445 %. Así, se elabora la curva de tonelaje-ley correspondiente, expresada en la Figura 4.12.

Curva Tonelaje-Ley Enfoque 4

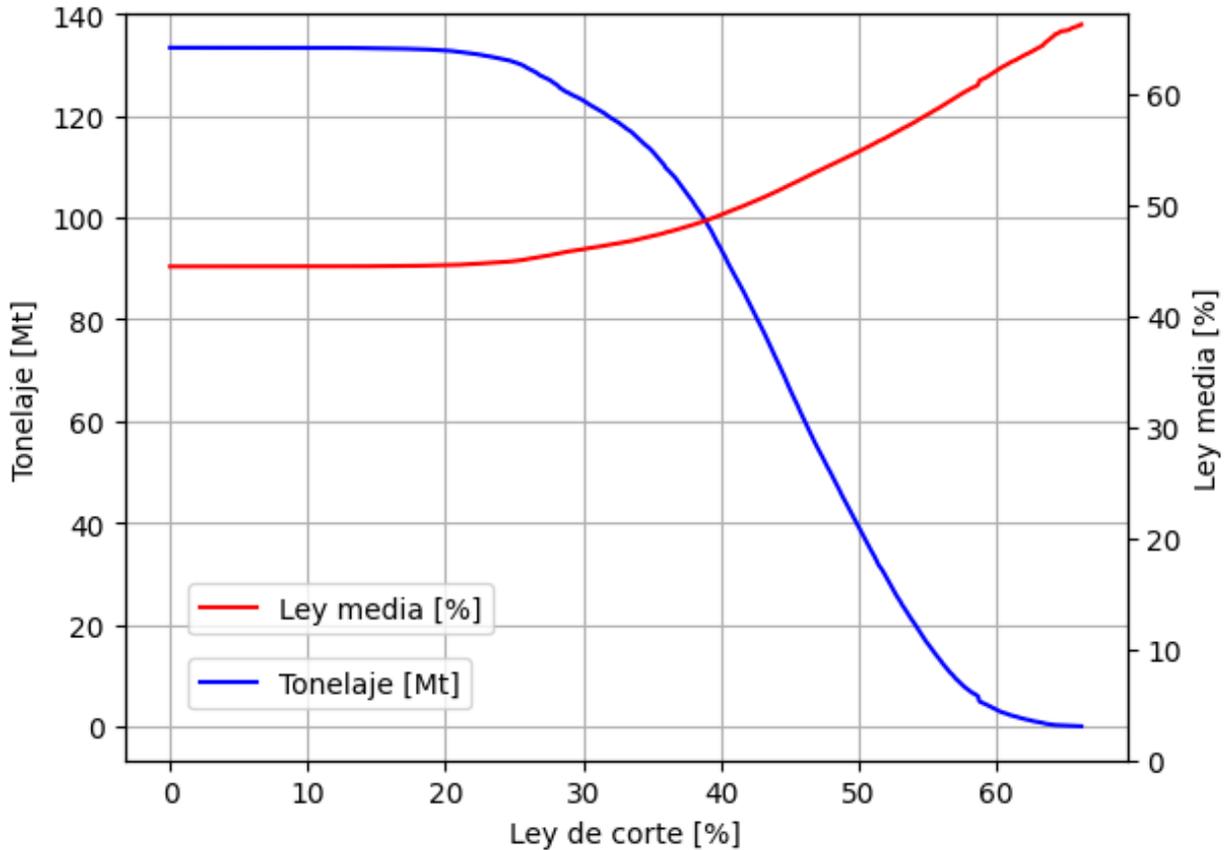


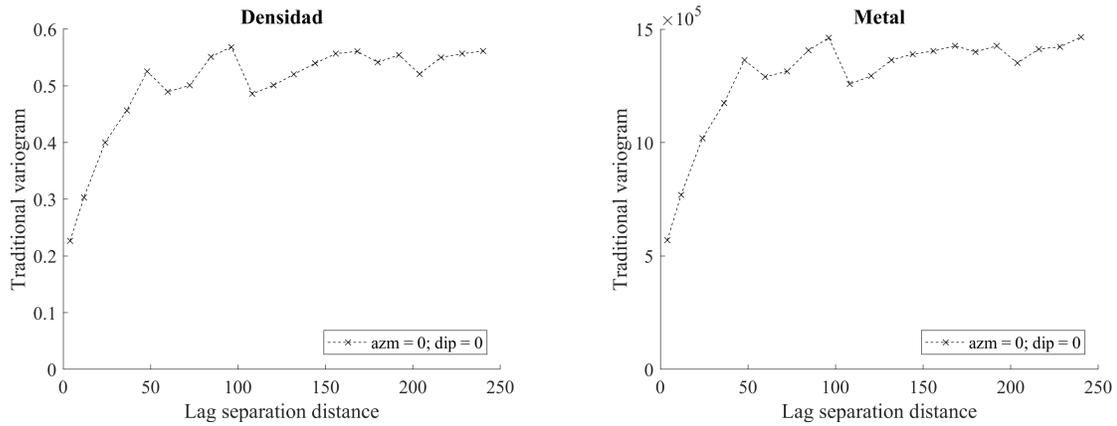
Figura 4.12: Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 1

4.3. Enfoque 2: Cokriging de variables aditivas

Ahora, lo primero que se hace es calcular, en cada sondaje, las variables aditivas consideradas para este enfoque: la Densidad y el Metal. Esto se hace siguiendo las ecuaciones 2.15 y 3.3, respectivamente. Al igual que en el Enfoque 1, se decide realizar un variograma experimental omnidireccional, ya que no se encontró dirección de máxima continuidad, pero esta vez se realiza con respecto a las nuevas variables definidas. Así, se crean los variogramas experimentales de las variables aditivas; estas se pueden ver en la Figura 4.13, en donde las Figuras 4.13.a, 4.13.b y 4.13.c representan los variogramas experimentales directos y cruzados de la Densidad y el Metal, respectivamente. Los parámetros utilizados se encuentran en la Tabla 4.6

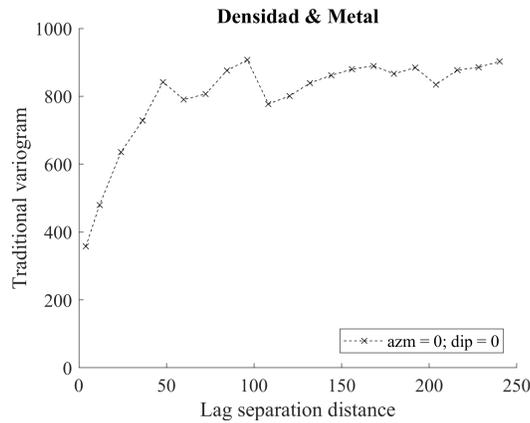
Tabla 4.6: Parámetros de los variogramas omnidireccionales directos y cruzados de Densidad y Metal

Parámetro	azm [°]	atol [°]	dip [°]	dtol [°]	lag [m]	nlag [m]	lagtol [m]
Omnidireccional	0	90	0	90	12	20	6



(a) Variograma experimental directo de Densidad

(b) Variograma experimental directo de Metal



(c) Variograma experimental cruzado de Densidad y Metal

Figura 4.13: Variogramas experimentales de las variables aditivas

En consecuencia, se crean los variogramas modelados. Estos se pueden ver en la Figura 4.14, en donde la Figura 4.14.a muestra el variograma directo de la Densidad, la Figura 4.14.b muestra el variograma directo del Metal y la Figura 4.14.c muestra el variograma cruzado de ambas variables. De forma análoga, los parámetros utilizados se encuentran en la Tabla 4.7. Las mesetas y efectos pepita se encuentran expresados en la Tabla 4.8.

Tabla 4.7: Parámetros de los variogramas modelado de Densidad y Metal.

Parámetro	Modelo	a1 [m]	a2 [m]	a3 [m]	ang1 [°]	ang2 [°]	ang3 [°]
Omnidireccional	Esférico	70	70	70	0	0	0

Tabla 4.8: Valores efectos pepita y meseta de los variogramas directos y cruzados

Parámetro	Variograma		
	Densidad	Metal	Cruzado
Pepita [m]	0.205	511356.803	321.944
Meseta [m]	0.336	888672.902	543.261

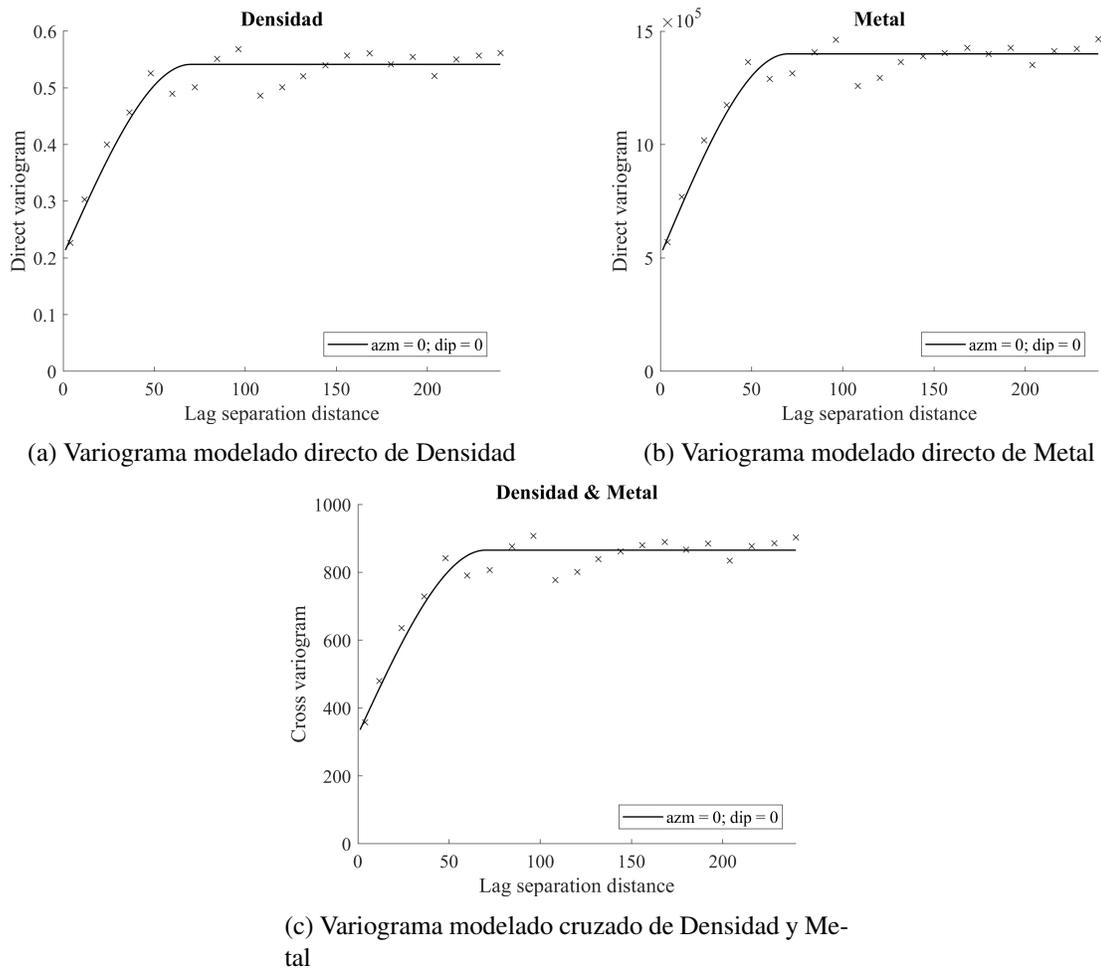


Figura 4.14: Variogramas modelados de las variables aditivas

Habiendo creado los variogramas modelados, se procede a realizar la validación cruzada para distintos radios de búsqueda y octantes, los cuales son los mismos del enfoque anterior (de 70 a 130 [m], con paso de 30 [m]; y 4 a 10 datos por octante). Los resultados se expresan en la Tabla C.1, en donde mediante una escala de color se caracterizan los valores; en verde, los datos más bajos, en amarillo los intermedios y en rojo los más altos. Analizando los resultados, el que presenta mejores resultados de validación cruzada es el radio de búsqueda de 70 [m] y 7 datos por octantes, sin embargo, al ser un radio pequeño, no se va a poder predecir en todos los sitios, y esto puede llevar a que la predicción esté marcada por el radio de búsqueda, conllevando a la presencia de artefactos; esto se aprecia en la Figura C.1 (en Anexos). Además, la validación cruzada de la combinación radio de búsqueda de 100 [m] y 7 datos por octantes también es aceptable. Es por esto que, se escoge el radio 100 [m] con 7 datos por octante para realizar la predicción. Asimismo, en la Figura 4.15 están los dispersiones para ambas variables, junto con su regresión condicional.

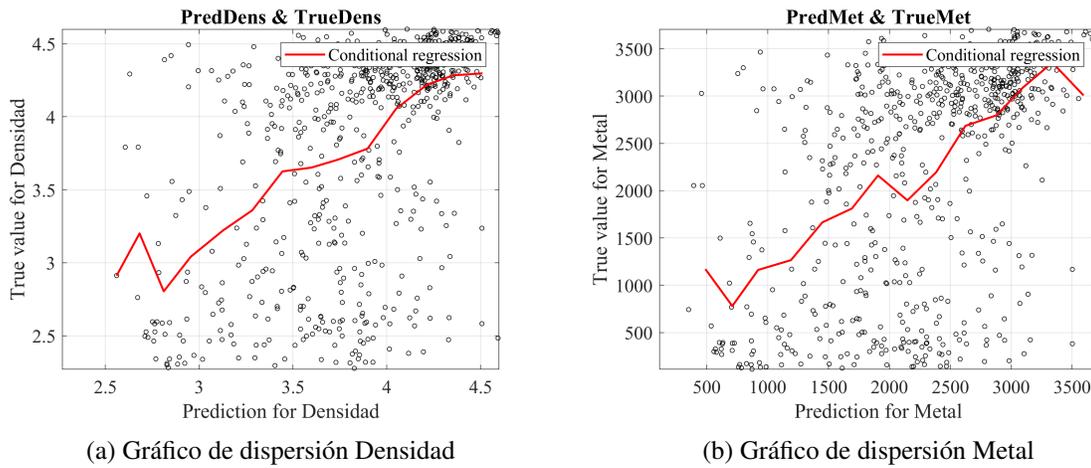


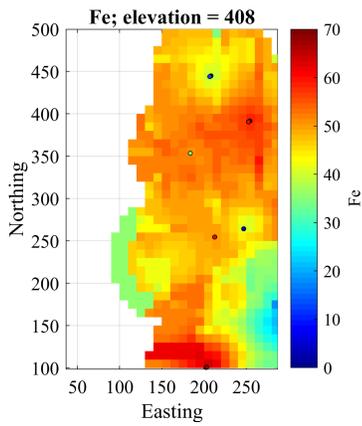
Figura 4.15: Gráficos de dispersión de Densidad y Metal

Analizando estos gráficos, en el caso de la Densidad (Figura 4.15.a) para valores bajos de densidad predicha (menores a $3 \left[\frac{t}{m^3} \right]$), el cokriging parece tener dificultades para predecir con precisión, lo que se refleja en la alta dispersión de los puntos y el comportamiento errático de la regresión condicional en esta zona. A partir de este umbral, es decir, valores mayores a $3 \left[\frac{t}{m^3} \right]$, la precisión mejora considerablemente, con una tendencia más evidente y una menor dispersión de los puntos de datos, aunque todavía hay alguna variabilidad hacia los extremos.

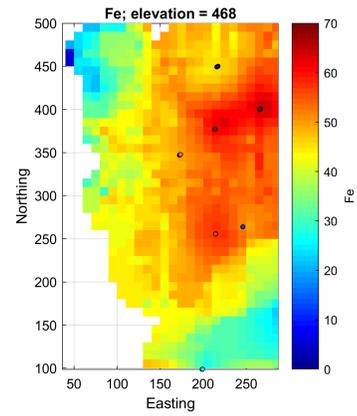
En el caso del Metal (Figura 4.15.b) ocurre un comportamiento similar que el caso de la Densidad. Se aprecia que para valores bajos de metal predicho ($< 1500 [Mt]$) la dispersión es mayor, lo que indica que el enfoque tiene dificultades para predecir correctamente en estos valores y los datos reales tienden a variar considerablemente. A medida que aumenta el valor de predicción de metal, el enfoque evidencia un mejor desempeño, con una tendencia más clara y estable. En resumen, se observa que la regresión condicional sigue una tendencia ascendente a medida que las predicciones de metal aumentan, pero hay una ligera caída al final, lo que podría indicar que el modelo no está capturando perfectamente los valores más altos.

Sin embargo, cabe destacar que esta validación cruzada no es el resultado más idóneo, y al igual que en el Enfoque 1, esto se puede deber a la alta variabilidad del Hierro que, en consecuencia, incide en las variables aditivas Densidad y Metal; sin embargo, se decide que es aceptable este resultado. Por ende, se continúa con estos parámetros para la estimación.

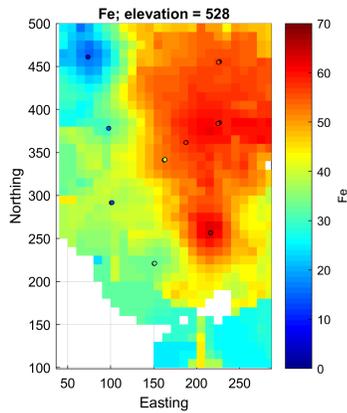
A continuación, se realiza el cokriging de ambas variables. Los resultados se aprecian en la Figura C.2. Con esto, se procede a calcular la ley de Hierro, mediante el despeje de la ecuación 2.15. Una vez realizado esto, se visualizan las leyes de Hierro predichas mediante el cokriging de variables aditivas. Esta visualización se expresa en la Figura 4.16.



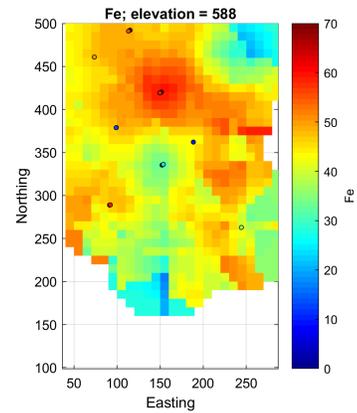
(a) Fe, elevación a 408 metros.



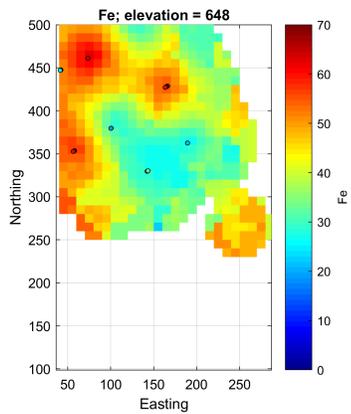
(b) Fe, elevación a 468 metros.



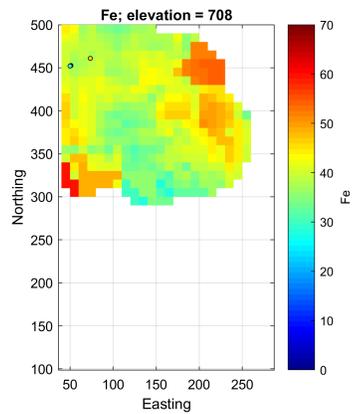
(c) Fe, elevación a 528 metros.



(d) Fe, elevación a 588 metros.



(e) Fe, elevación a 648 metros.



(f) Fe, elevación a 708 metros.

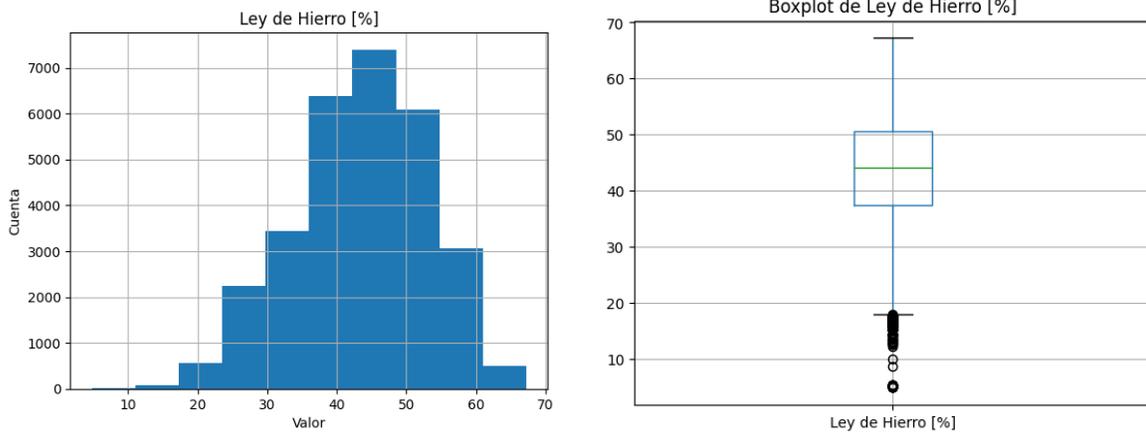
Figura 4.16: Vista en planta de Leyes de Hierro predichas

Para entender un poco más los datos predichos mediante este enfoque, se computa su estadística descriptiva. Esta se puede ver en la Tabla 4.9.

Tabla 4.9: Estadística descriptiva de variables aditivas para la predicción de Fe, Enfoque 2

	<i>Predicción de Densidad</i> $\left[\frac{t}{m^3}\right]$	<i>Predicción de Metal</i> [t]	<i>Varianza de la predicción de Densidad</i> $\left[\frac{t}{m^3}\right]$	<i>Varianza de la predicción de Metal</i> [t]
Cuenta	29756	29756	29756	29756
Media	3.73	2134.93	0.34	889033.13
Desv. Estándar	0.35	567.28	0.12	316187.19
Mínimo	2.31	137.9	0.04	91628.12
25 %	3.51	1751.87	0.26	692442.68
50 %	3.76	2158.06	0.34	908893.09
75 %	3.99	2549.75	0.4	1063056.01
Máximo	4.6	3709.05	0.84	2180614.25

Asimismo, se decide examinar su distribución. Para aquello, se elabora el histograma de la Ley de Hierro, así como su diagrama de cajas y bigotes. Ambos se encuentran adjuntos en la Figura 4.17.



(a) Histograma de la predicción de ley de Hierro.

(b) Diagrama de cajas y bigotes de la predicción de ley de Hierro.

Figura 4.17: Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 2

Además, se elabora una visualización en 3D de las leyes de Hierro predichas, esto se ve en la Figura 4.18.

Enfoque 2

Predicción de Leyes de Hierro en bloques

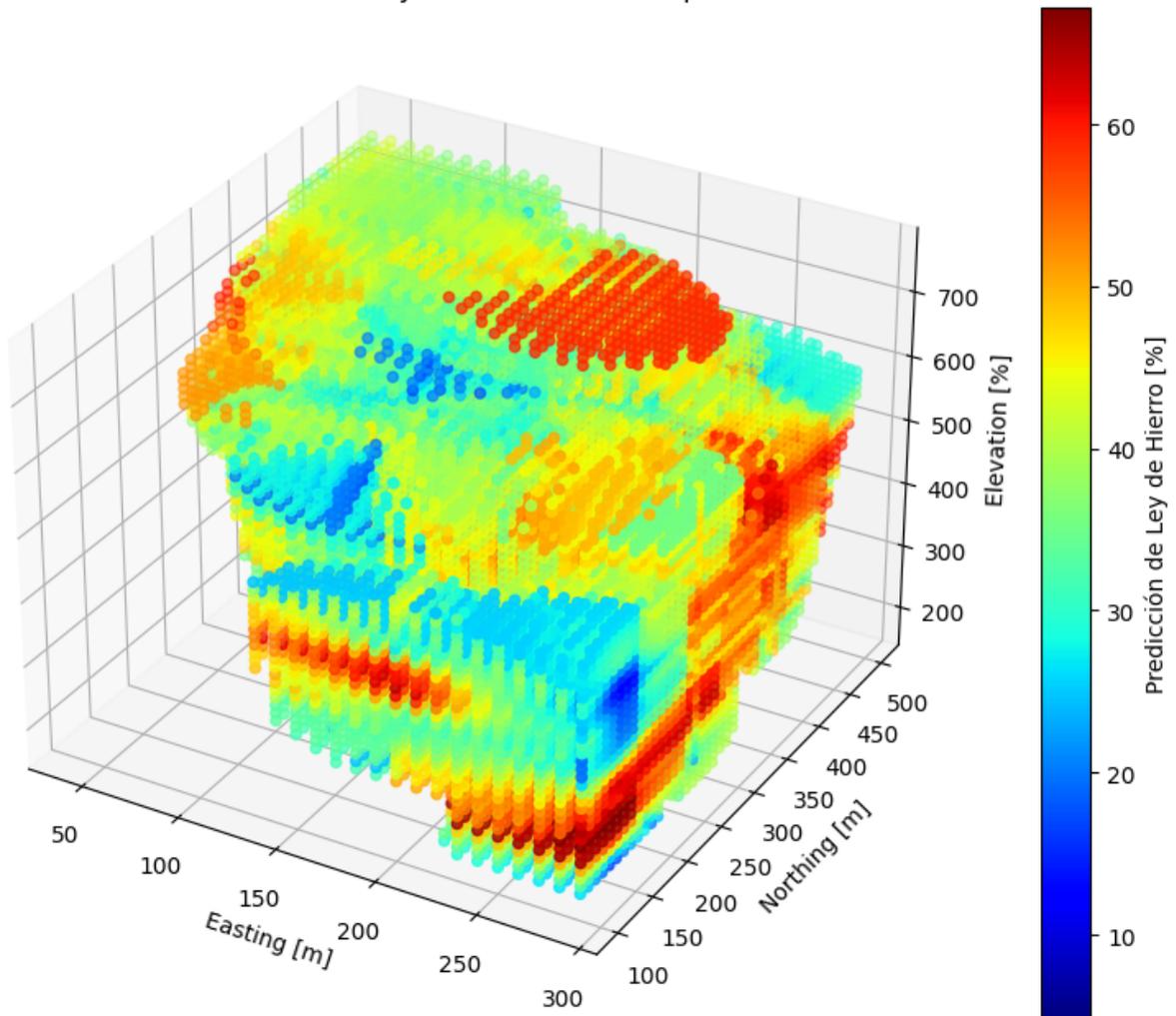


Figura 4.18: Visualización en 3D de leyes de Hierro predichas mediante cokriging de Densidad y Metal (Enfoque 2).

Finalmente, se calculan los recursos. Mediante este enfoque, se obtienen $133.251 [Mt]$ en total, en donde $63.527 [Mt]$ corresponden a metal de Hierro, cuya ley media es 47.674% . Así, esto se puede ver en la curva de tonelaje-ley de la Figura 4.19.

Curva Tonelaje-Ley Enfoque 2

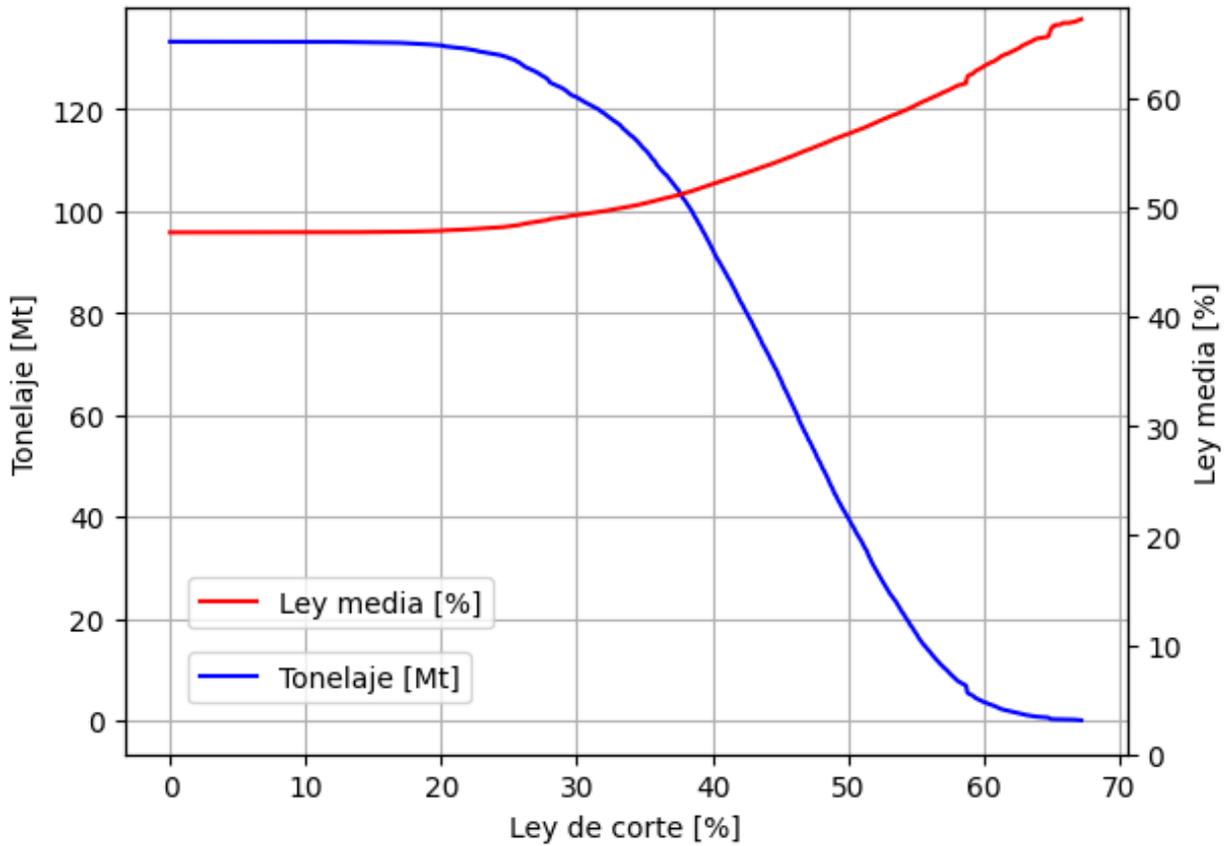


Figura 4.19: Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 2

4.4. Enfoque 3: Simulación de Fe

Como se vio en el EDA, el Hierro no sigue una distribución gaussiana, por ende, es necesario realizar la transformación a valores gaussianos. Una vez realizada la transformación gaussiana, se modela la anamorfosis obtenida. Esto se puede ver en la Figura 4.20.

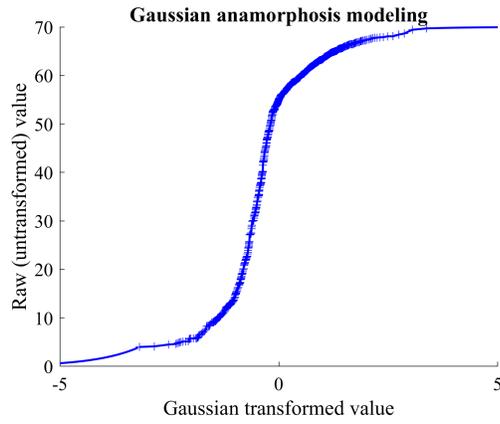


Figura 4.20: Anamorfosis de Fe.

Posteriormente, se realiza la validación de la hipótesis de bigaussianidad mediante nubes de correlación diferida. Estas se aprecian en la Figura 4.21.

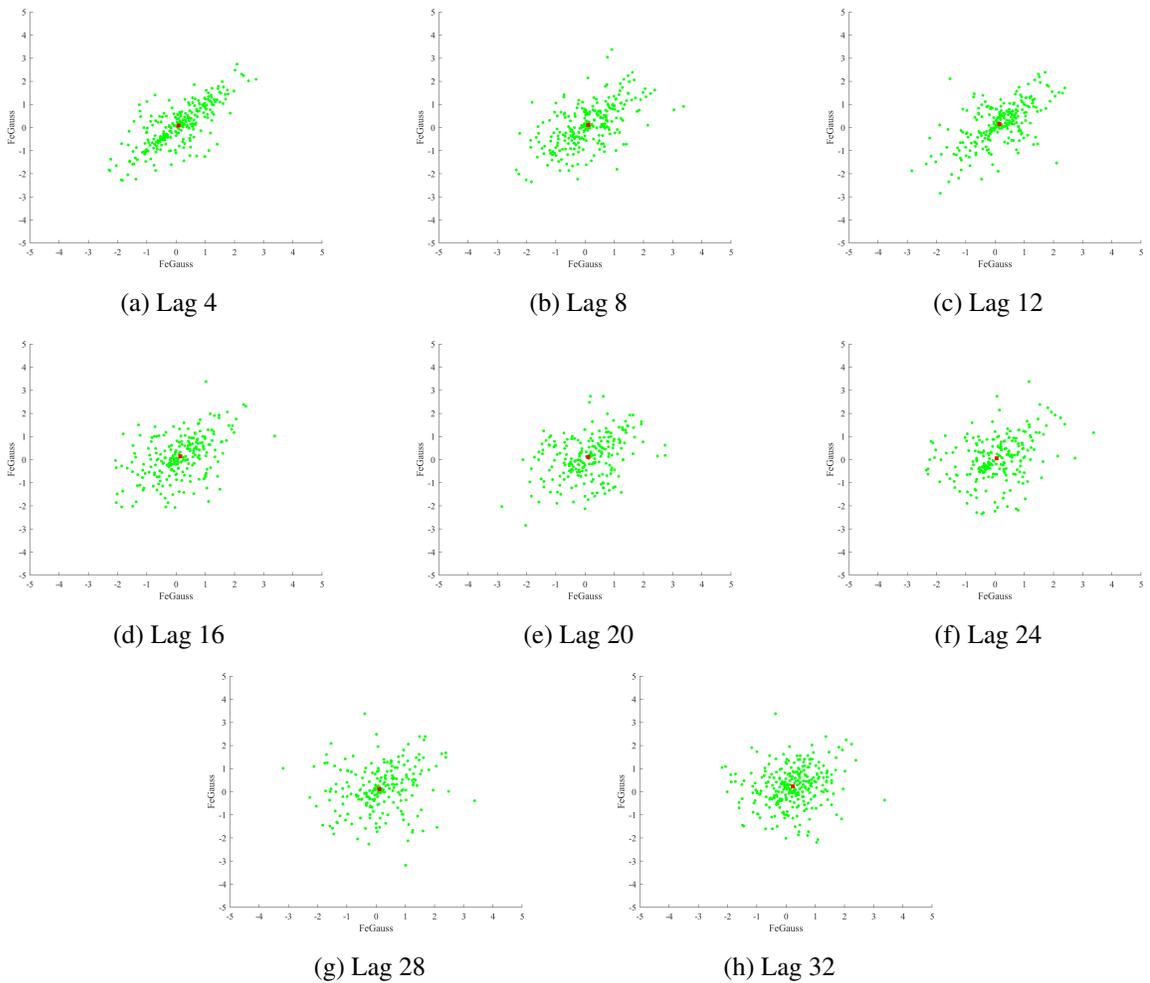
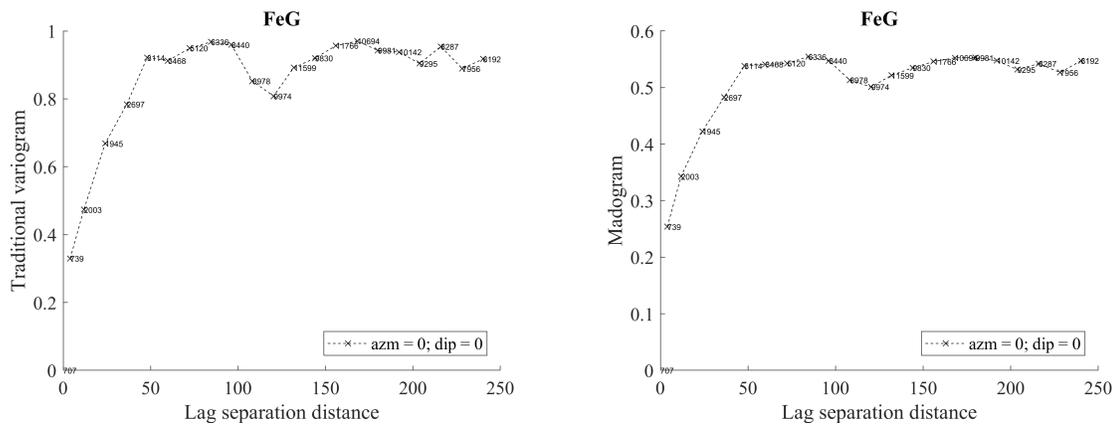


Figura 4.21: Nubes de correlación diferida.

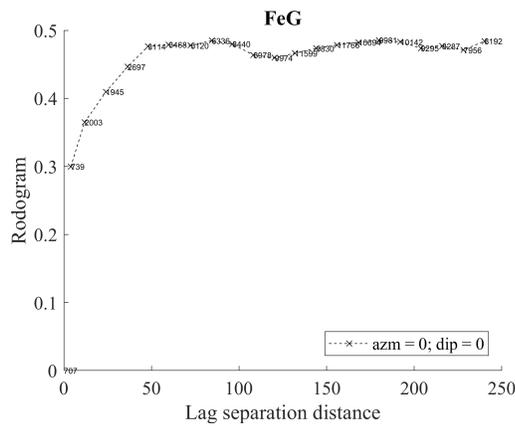
Se aprecia que a medida que aumenta el lag, la nube se asemeja a una esfera; entre más pequeño el lag, más se parece a la identidad. A primera instancia, esto valida la hipótesis de bigaussiania-

idad. No obstante, se decide realizar una comparación de variograma, madograma y rodograma experimentales omnidireccionales, así como analizar el variograma de indicador de la mediana. La comparación se expresa en la Figura 4.22.



(a) Variograma de Hierro gaussiano.

(b) Madograma de Hierro gaussiano.



(c) Rodograma de Hierro gaussiano.

Figura 4.22: Variogramas de distinto orden.

Consecuentemente, se elabora el variograma del indicador, expresado en la Figura 4.23.

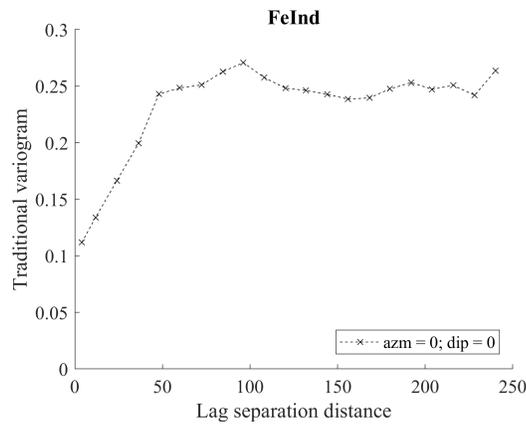


Figura 4.23: Variograma de indicador de Fe.

Además, se elabora la comparación entre los variogramas de distinto orden. Esto se expresa en la Figura 4.24.

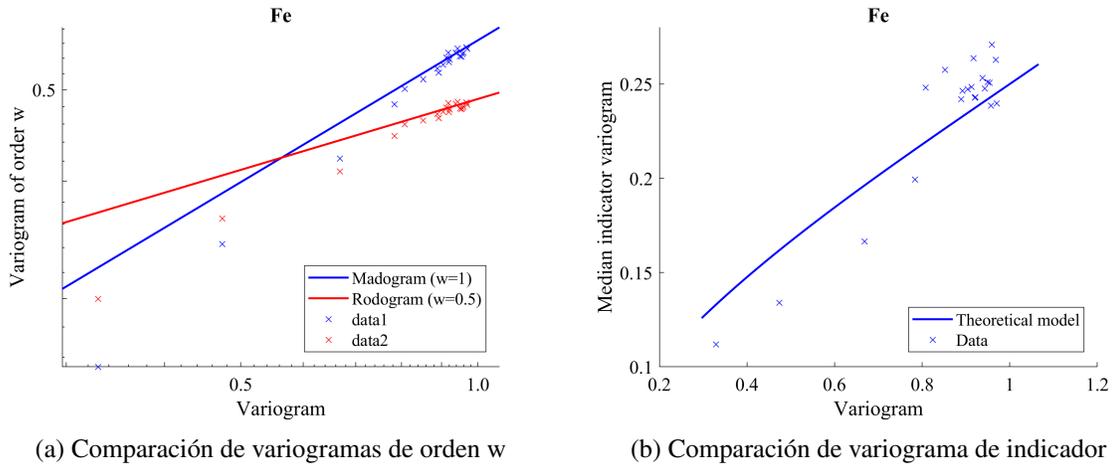


Figura 4.24: Comparación variogramas de distinto orden y variograma de indicador

Puesto que los variogramas de distinto orden y de indicador se ajustan a los datos, estos son válidos. Por tal motivo, se estima como válida esta prueba.

Para concluir, dados los resultados de los tres tests son concluyentes, se tiene que la anamorfosis se realizó correctamente, y ahora corresponden a variables gaussianas. A continuación, se continúa con la variografía experimental gaussiana. Esto se visualiza mediante la Figura 4.25. El ajuste realizado se expresa en la Tabla 4.10, cabe destacar que este ajuste es omnidireccional, como en los enfoques anteriores.

Tabla 4.10: Parámetros de lo variograma modelado de Fe gaussiano

Parámetro	Modelo	a1 [m]	a2 [m]	a3 [m]	ang1 [°]	ang2 [°]	ang3 [°]
Omnidireccional	Esférico	70	70	70	0	0	0

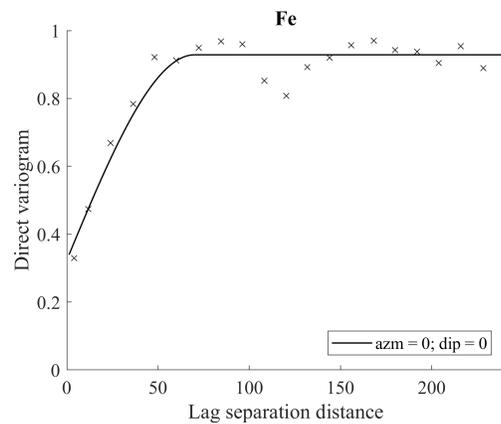
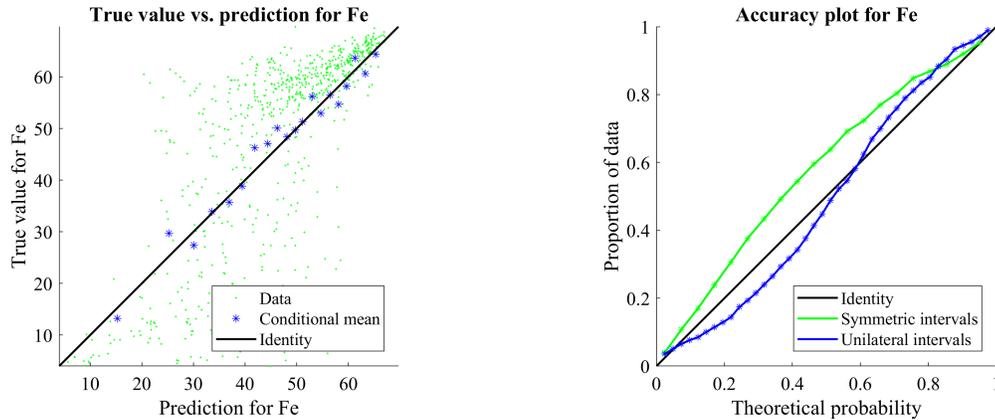


Figura 4.25: Variograma experimental modelado de Fe gaussiano

Esto da pie a la realización de la simulación de Hierro mediante el algoritmo de bandas rotantes (espectral). Cabe destacar que se estima conveniente realizar la simulación con 40 realizaciones. En primer lugar, se elabora la validación cruzada correspondiente a la nube de dispersión entre valores reales y el promedio de los valores simulados y el *accuracy plot* para el Fe, considerando el radio de búsqueda de 100 [m] y 7 datos por octante. Esto se expresa en la Figura 4.26



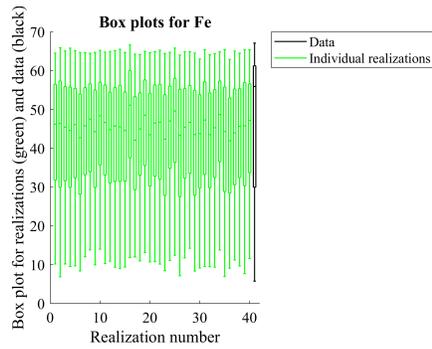
(a) Nube de dispersión entre valores reales y promedio de valores estimados.

(b) Accuracy plot de Hierro

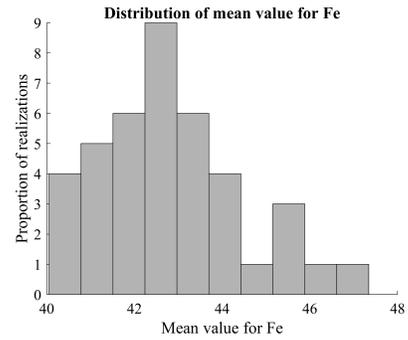
Figura 4.26: Validación cruzada simulación de bandas rotantes

Dada la validación cruzada, se estima aceptable la utilización de estos parámetros para la simulación. Da la nube de dispersión (Figura 4.26.a) se aprecia que la medias condicionales siguen la identidad. Del *accuracy plot* (Figura 4.26.b) se destaca que es un modelo conservador, ya que los intervalos simétricos se encuentran por sobre la identidad. Por lo anterior, se generan las realizaciones y se procesan. Este procesamiento se aprecia en la Figura 4.27.

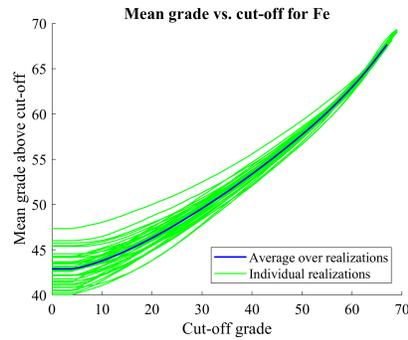
En particular, el gráfico de la Figura 4.27.a muestra que los diagramas de cajas y bigotes para las 40 realizaciones son bastante similares en forma; sin embargo, hay variaciones en los valores extremos. La diferencia de distribuciones entre los valores simulados y los datos de sondajes puede deberse a la distribución irregular de estos últimos, que entrega una imagen distorsionada de la distribución real (aún con desagrupamiento). Las proporciones de los cuartiles están más acotados en las realizaciones que en el conjunto de datos original, esto tiene sentido puesto que el *accuracy plot* señala que la simulación tiende a ser conservadora. De este análisis, se desprende que la mayoría de las simulaciones poseen una la ley media de Hierro centrada en valores entre 42 a 43 %, considerando su distribución es semejante a la lognormal (Figura 4.27.b y Figura D.1.b).



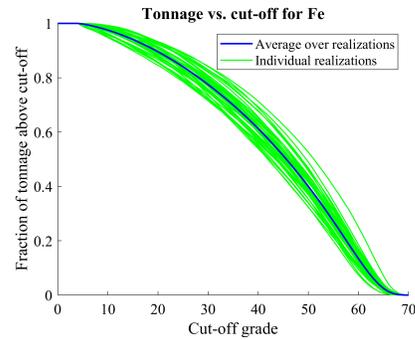
(a) Diagrama de cajas y bigotes de las simulaciones de Fe



(b) Distribución del promedio de Fe de las simulaciones



(c) Ley media de las realizaciones vs ley de corte para el Hierro



(d) Fracción de tonelaje sobre ley de corte para el Hierro

Figura 4.27: Procesamiento de las simulaciones

Asimismo, solamente se visualiza los resultados de la realización n^o 5 de la simulación. Esta se encuentra en la Figura D.2, adjunta en la sección Anexos. De esta visualización, se aprecia que el efecto de suavizamiento es casi inexistente. A continuación, se realiza el cálculo del promedio de las realizaciones (también conocido como *e-type*). Esto se puede ver en la Figura 4.28.

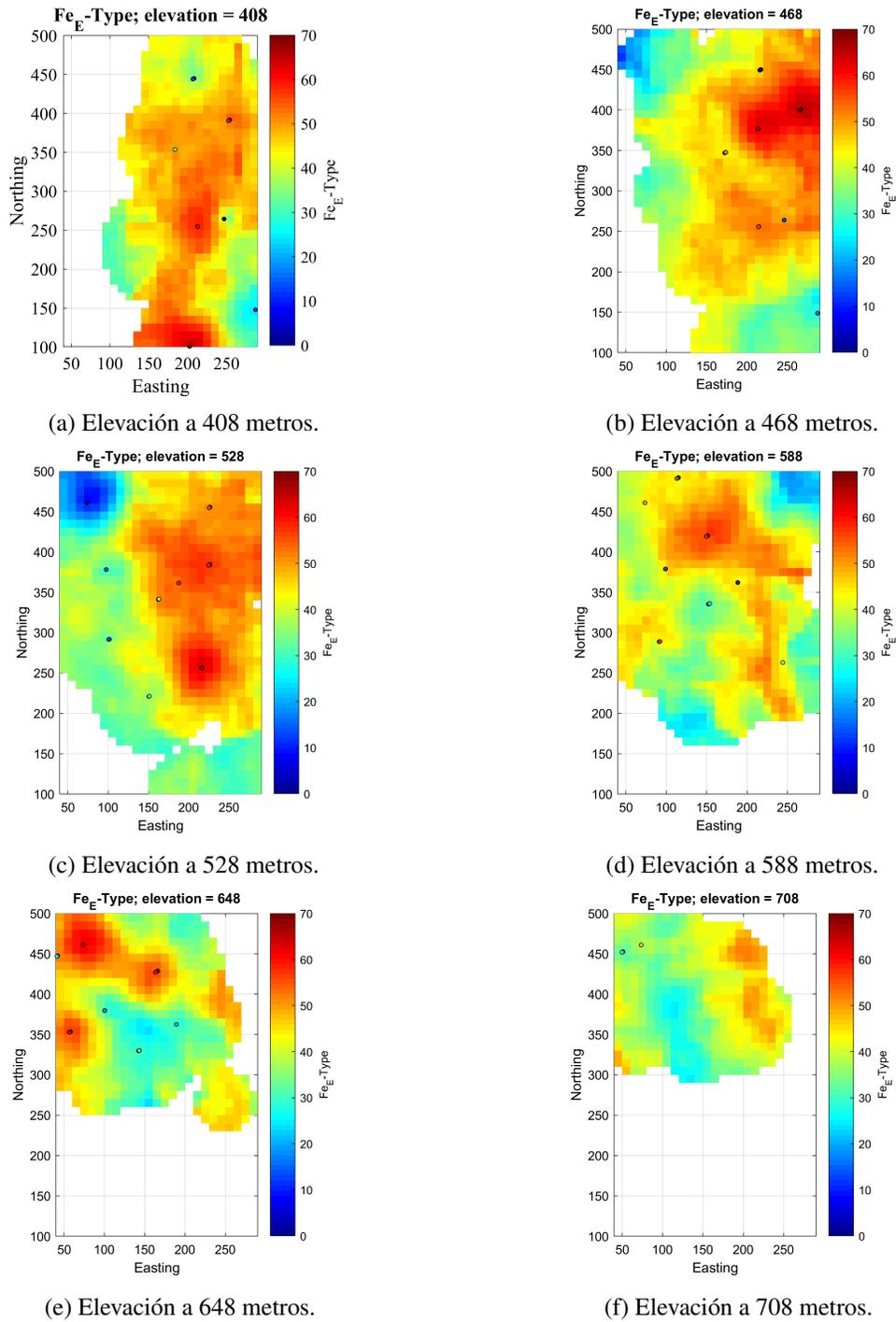


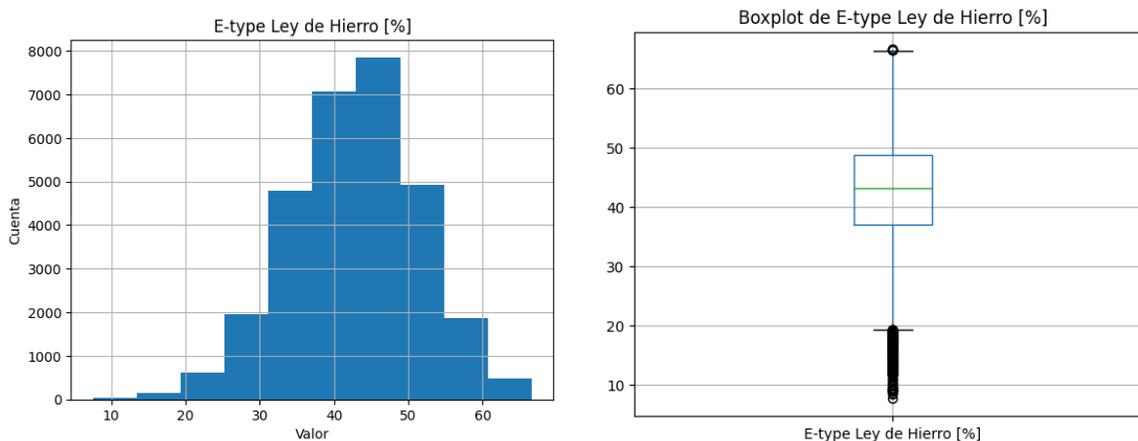
Figura 4.28: Vista en planta del E -Type.

A este resultado se le calcula su estadística descriptiva, dichos valores se ven expresados en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11: Estadística descriptiva para la predicción de Fe (E-Type), Enfoque 3

	<i>E-type Ley de Hierro [%]</i>
Cuenta	29756
Media	42.759
Desv. Estándar	8.726
Mínimo	7.564
25 %	36.958
50 %	43.174
75 %	48.763
Máximo	66.598

De manera similar se estudia su distribución. Esto se expresa en la Figura 4.29, la cual muestra el histograma y el boxplot del *e-type* de la Ley de Hierro de las simulaciones.



(a) Histograma del e-type de la predicción de ley de Hierro.

(b) Diagrama de cajas y bigotes del e-type de la predicción de ley de Hierro.

Figura 4.29: Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 3.

Para finalizar, se realiza el cálculo de recursos. Para aquello, en cada sitio simulado a nivel puntual y para cada realización, se calcularán la densidad y el contenido de Fe, utilizando las ecuaciones descritas en secciones anteriores. Posteriormente, los valores de densidad y contenido de Fe se rebloquearán en unidades de bloque. Con estos datos, para cada realización se calculan los recursos, obteniendo el metal como el contenido total de Fe, la ley como la relación entre contenido de Fe y densidad, y el tonelaje. Dado lo anterior, se tiene la siguiente Tabla 4.12 que muestra los recursos totales obtenidos mediante las 40 simulaciones. De ello se desprende que, la mayoría de los recursos resultantes presentan valores altos, mientras que la cantidad de valores bajos es menor. Además, la desviación estándar de los parámetros indica variabilidad en los recursos.

Tabla 4.12: Estadística descriptiva de los recursos obtenidos mediante Enfoque 3.

	<i>Ley de Fe [%]</i>	<i>Contenido metálico [t]</i>	<i>Tonelaje [t]</i>
Cuenta	1190240	1190240	1190240.0
Media	44.84	2111.06	4444.22
Desv. Estándar	16.03	978.61	738.45
Mínimo	4.0	109.3	2732.4
25 %	34.05	1324.01	3888.0
50 %	48.67	2230.67	4584.0
75 %	58.03	2945.19	5074.8
Máximo	69.87	3942.55	5642.4

Así, se obtienen las siguientes estadísticas para los promedio sobre las simulaciones (también conocido como e-type) de densidad y contenidos de hierro, los cuales se expresan en la Tabla 4.13.

Tabla 4.13: Estadística descriptiva E-type de las simulaciones, Enfoque 3

	<i>E-type Densidad</i>	<i>E-type Metal</i>
Cuenta	29756.0	29756.0
Media	3.704	2111.063
Desv. Estándar	0.103	513.119
Mínimo	2.408	236.217
25 %	3.490	1760.230
50 %	3.719	2122.809
75 %	3.925	2455.789
Máximo	4.581	3663.339

A partir de estos valores promedio, se determinarán los recursos, obteniendo el metal como el contenido de Fe e-type, la ley como el cociente entre el contenido de Fe e-type y la densidad e-type, y el tonelaje como el resultado de dividir el contenido de Fe e-type por la ley de Fe e-type.

Enfoque 3

Predicción de Leyes de Hierro en bloques

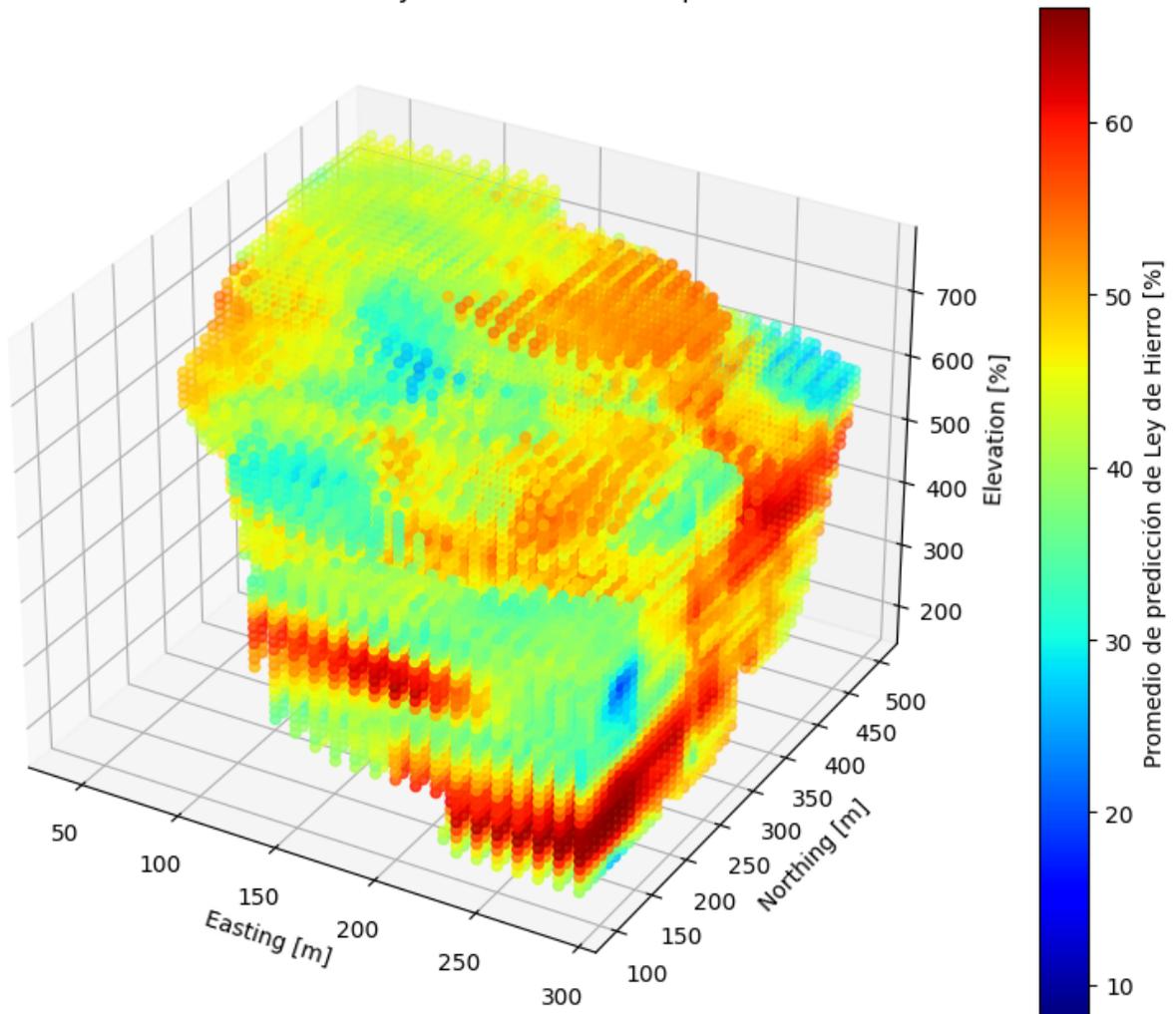


Figura 4.30: Visualización en 3D del *e-type* de las simulaciones de leyes de Hierro mediante simulación de Fe (Enfoque 3).

Al utilizar este enfoque, se obtienen 132.242 [Mt], con 62.817 [Mt] de metal de Hierro, con una ley media de 47.501 %. Esto se puede ver en la curva de tonelaje-ley de la Figura 4.31.

Curva Tonelaje-Ley Enfoque 3

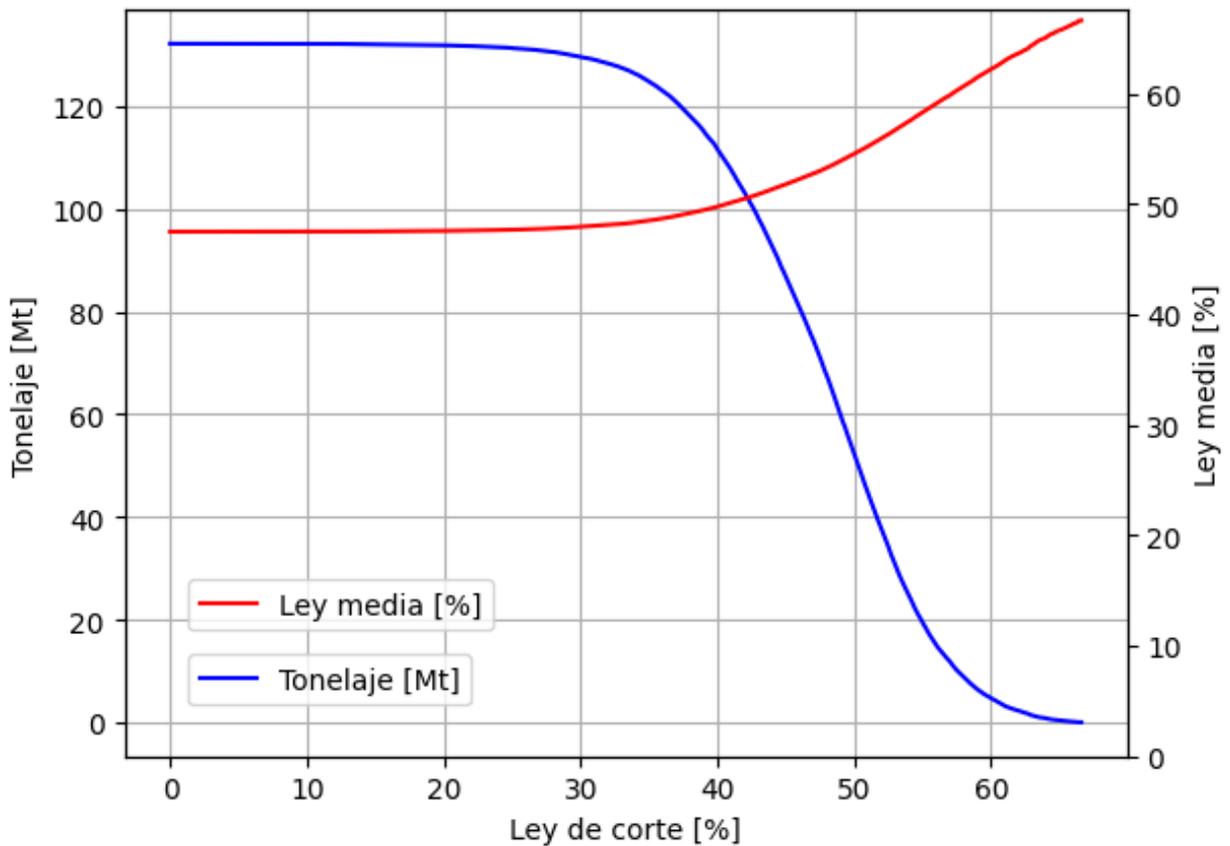


Figura 4.31: Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 3.

4.5. Enfoque 4: Machine Learning

Para este enfoque se utiliza el algoritmo de Máquina de Soporte Vectorial (SVM) para la estimación de la ley de hierro, considerando las coordenadas espaciales como variables predictoras; también se realizan 2 variantes más: la primera es considerando zonas para la predicción (las que fueron determinadas como -99 y 1) y la segunda es teniendo en cuenta 1 kernel y la zona a realizar la predicción, pero estos últimos fueron descartados por sus resultados.

El proceso de búsqueda aleatoria exploró 50 combinaciones de hiperparámetros diferentes en 4 validaciones cruzadas. Los mejores hiperparámetros encontrados fueron:

- C igual a 88.338,
- ϵ de 0.334,
- γ equivalente a $scale$, y,
- Kernel de rbf .

Tras ajustar el algoritmo con estos hiperparámetros óptimos, se evaluó su desempeño en el conjunto de prueba, obteniéndose un coeficiente de determinación R^2 igual a 0.149. Posteriormente, se aplicó el modelo ajustado para predecir las leyes de Hierro en la grilla, cuyas coordenadas también fueron escaladas antes de ser procesadas. Las predicciones obtenidas fueron filtradas y ajustadas para eliminar valores negativos, asignando 0 a aquellos valores predichos que resultaron ser menores a este umbral; en total, se reasignaron 2461 datos.

Se realiza un gráfico de dispersión para analizar los resultados de la predicción. Estos se pueden ver en la Figura 4.32. De este, se puede ver que el algoritmo realiza buenas predicciones en los valores más altos, aunque este no sucede en los valores bajos, ya que hay cierta variabilidad y menor precisión en los datos menores a 40%. No obstante, en general, la regresión condicional es consistente, sobre todo en valores altos.

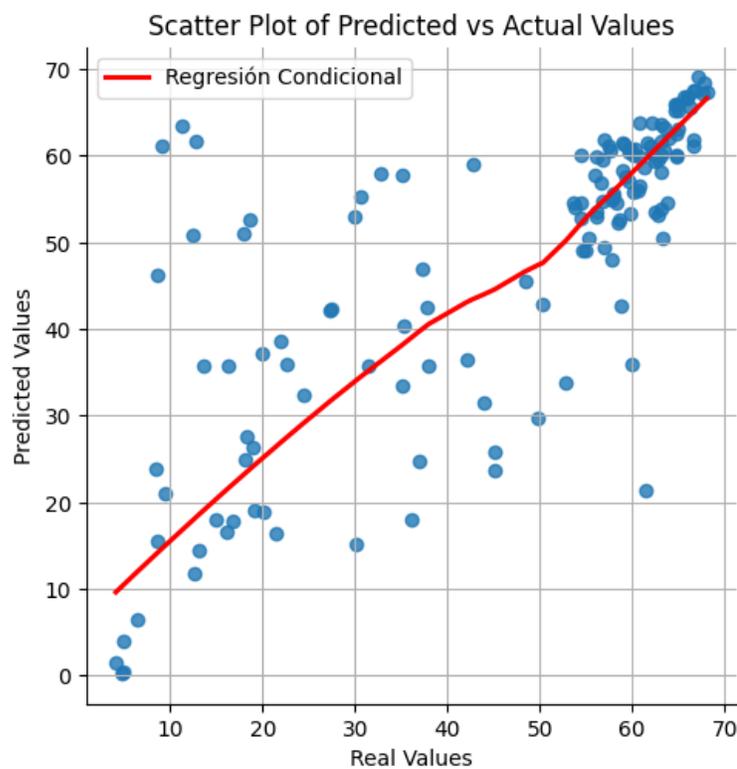


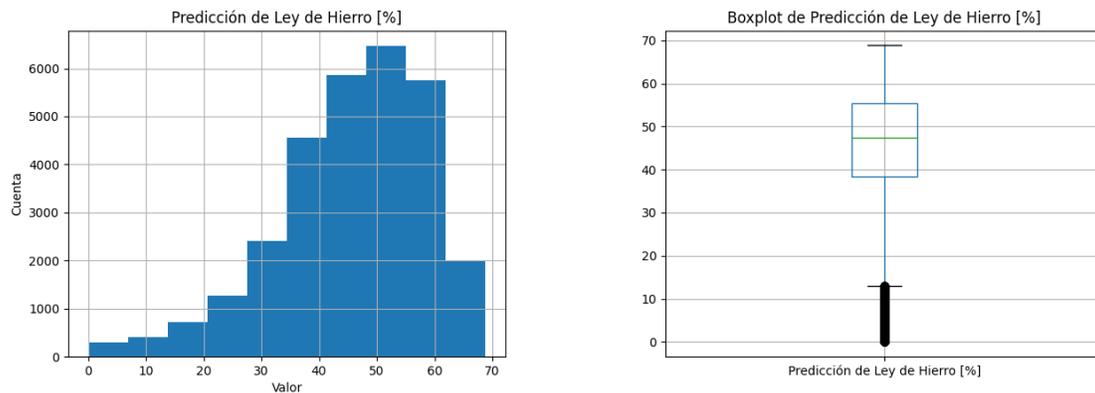
Figura 4.32: Gráfico de dispersión de los valores predichos de Ley de Fe, Enfoque 4.

Para analizar su comportamiento, se realiza la estadística descriptiva de los valores resultantes, que se pueden ver en la Tabla 4.14 y Figura 4.33, respectivamente.

Tabla 4.14: Estadística descriptiva para la predicción de Fe (en el conjunto de datos), Enfoque 4

	<i>Predicción Ley de Hierro [%]</i>
Cuenta	29756
Media	45.647
Desv. Estándar	12.793
Mínimo	0
25 %	38.458
50 %	47.49
75 %	55.376
Máximo	68.842

De manera análoga, se realiza un estudio visual de los resultados, mediante histograma y box-plot, para estudiar su comportamiento. Esto se puede apreciar en la Figura 4.33.



(a) Histograma de la predicción de ley de Hierro. (b) Diagrama de cajas y bigotes de la predicción de ley de Hierro.

Figura 4.33: Histograma y boxplot para la predicción de Hierro, Enfoque 4.

Como resultado final, también se obtiene la visualización espacial de los valores predichos para la ley de Hierro, lo cual se expresa en la Figura 4.34. También se elabora la visualización de los modelos descartados, los que se aprecian en las Figuras E.1 y E.2, adjuntas en Anexos.

Enfoque 4

Predicción de Leyes de Hierro en bloques

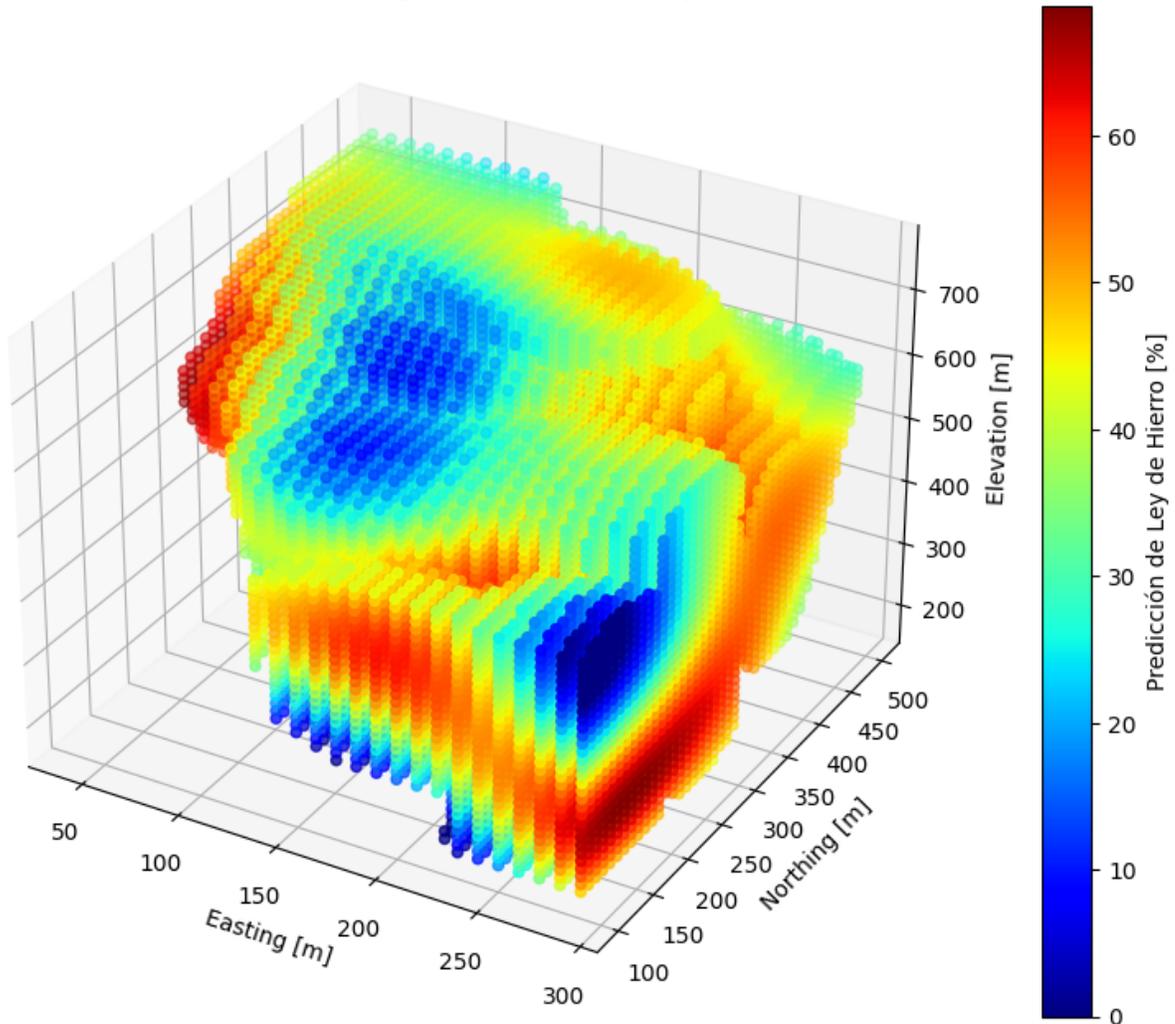


Figura 4.34: Visualización en 3D las de leyes de Hierro estimadas mediante SVM (Enfoque 4).

En consecuencia, mediante la aplicación de este enfoque se obtiene la curva de tonelaje-ley descrita en la Figura 4.35. De esta, se aprecia que en total el yacimiento cuenta con 136.04 [Mt], en donde 64.25 [Mt] corresponden a metal de Hierro, con una ley media de 47.23 %.

Curva Tonelaje-Ley Enfoque 4

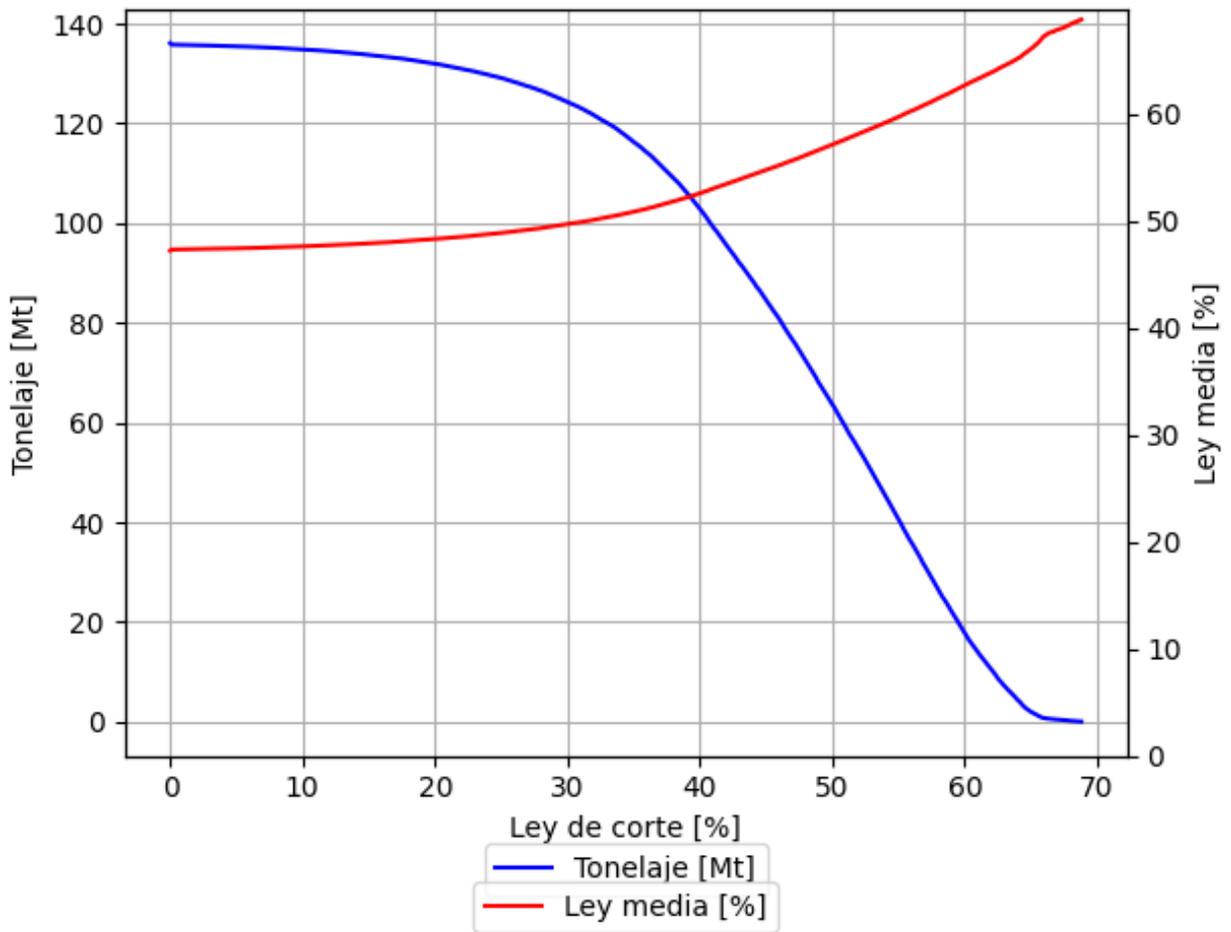


Figura 4.35: Curva de Tonelaje-Ley para el Enfoque 4.

4.6. Comparación

Una vez teniendo todos los resultados para los cuatro enfoques propuestos, se elabora una curva de tonelaje-ley que contiene, en resumen, todos los resultados alcanzados. Esto se aprecia en la Figura 4.36.

Curva Tonelaje-Ley para Múltiples Enfoques

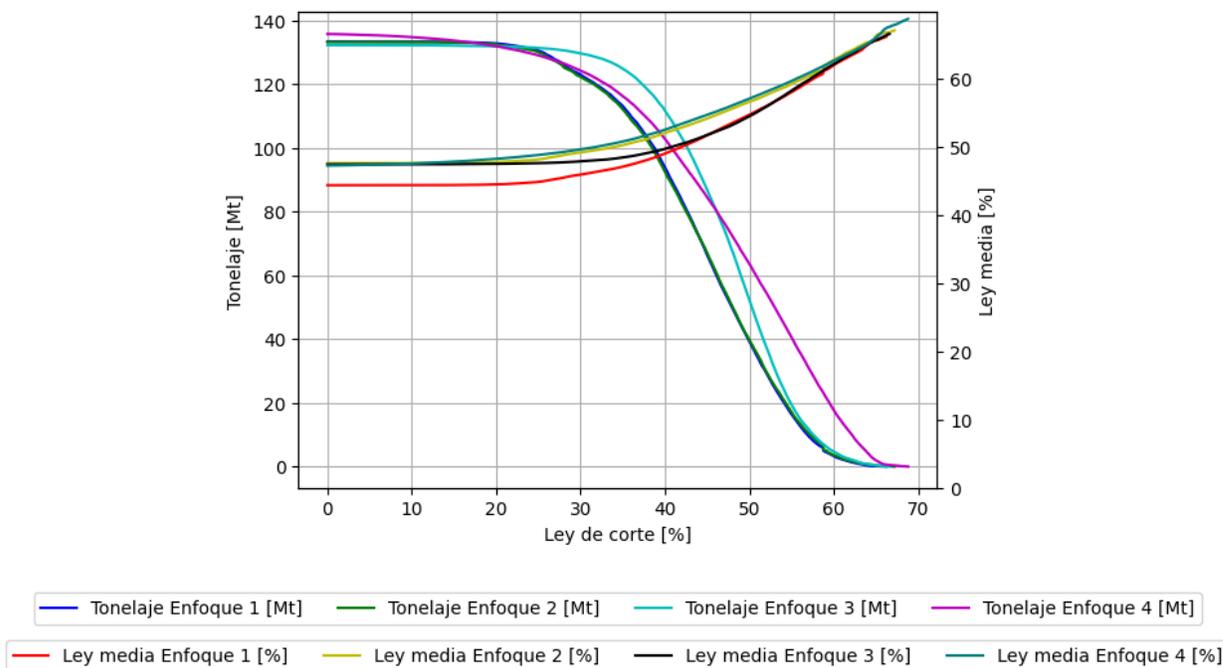


Figura 4.36: Curva de Tonelaje-Ley de todos los enfoques

De la misma manera, la Tabla 4.15 contiene los resultados principales de los cuatro enfoques.

Tabla 4.15: Reporte de recursos de todos los enfoques

<i>Enfoque</i>	<i>Tonelaje Total [Mt]</i>	<i>Metal Total [Mt]</i>	<i>Ley Media [%]</i>
1	133.349	59.266	44.445
2	133.251	63.527	47.674
3	132.242	62.817	47.501
4	136.038	64.248	47.228

De los resultados anteriores se destaca que el Enfoque 4 es el que pudo predecir mayores cantidades de tonelaje total y de finos de Hierro; no obstante, el Enfoque 2 fue el que obtuvo una mayor ley media de Fe. De forma contraria, el Enfoque 3 es el que predijo menor tonelaje total, y el Enfoque 1 predijo menor cantidad de metal de hierro y ley media. Para visualizar de forma resumida estos resultados, se crean las Tablas 4.16, 4.17 y 4.18, en donde se compara el tonelaje total, la ley media y el contenido de metal, respectivamente.

Tabla 4.16: Tabla comparativa de los tonelajes a distintas leyes de corte

Ley de corte [%]	Tonelaje			
	Enfoque 1 [Mt]	Enfoque 2 [Mt]	Enfoque 3 [Mt]	Enfoque 4 [Mt]
0	133.349	133.251	132.242	135.764
10	133.328	133.212	132.23	134.814
20	132.813	132.534	131.915	131.947
30	123.002	122.325	129.686	124.23
40	93.917	92.507	111.69	102.811
50	39.246	39.806	52.304	63.59
60	3.304	3.603	4.714	17.752

Tabla 4.17: Tabla comparativa de las leyes medias a distintas leyes de corte

Ley de corte [%]	Ley Media			
	Enfoque 1 [%]	Enfoque 2 [%]	Enfoque 3 [%]	Enfoque 4 [%]
0	44.445	47.674	47.501	47.323
10	44.451	47.687	47.505	47.615
20	44.555	47.824	47.579	48.307
30	45.995	49.253	47.937	49.703
40	49.083	52.092	49.773	52.584
50	54.775	56.666	54.545	57.132
60	62.033	62.841	62.216	62.684

Tabla 4.18: Tabla comparativa del contenido de metal a distintas leyes de corte

Ley de corte [%]	Metal			
	Enfoque 1 [Mt]	Enfoque 2 [Mt]	Enfoque 3 [Mt]	Enfoque 4 [Mt]
0	59.267	63.527	62.817	64.248
10	59.265	63.524	62.816	64.192
20	59.176	63.383	62.764	63.74
30	56.575	60.249	62.167	61.747
40	46.097	48.189	55.592	54.063
50	21.497	22.557	28.529	36.33
60	2.049	2.264	2.933	11.128

Considerando que el yacimiento posee una ley de corte de 20%, mediante el Enfoque 1 es donde se obtiene el mayor tonelaje (132.813 [Mt]); sin embargo, es el Enfoque 4 quien alcanza la mejor ley media (48.3%) y mayor cantidad de metal (63.74 [Mt]). A su vez, al igual que en la ley de corte 0%, el Enfoque 3 presenta el menor tonelaje total (131.915 [Mt]) y el Enfoque 1 presenta la menor ley media (44.56%) y cantidad de metal (59.18 [Mt]).

Capítulo 5

Discusión

Realizando un análisis en general de los resultados obtenidos mediante la aplicación de kriging, cokriging, simulación y machine learning, equivalentes a los Enfoques 1, 2, 3 y 4, respectivamente; es menester mencionar que en todos los enfoques propuestos, los histogramas y boxplots del Hierro son similares entre sí (Figuras 4.10, 4.17, 4.29 y 4.33), en donde la mayoría de las predicciones se concentran en valores altos (por sobre el 40% de Ley de Hierro) y con valores “atípicos” para leyes menores al 20%. Sin embargo, en el caso del Enfoque 4 parece haber una sobreestimación del tonelaje, ya que en el gráfico de tonelaje-ley, su curva se aleja de las demás, como se puede ver en la Figura 4.36. Con respecto a los datos originales, ninguno de los modelos replicó el fenómeno de bimodalidad observado en el histograma de los datos originales. Esto se puede deber a que en los enfoques 1, 2 y 4 se produce un efecto de suavizamiento en los valores extremos, pero que no se ve reflejado en los valores altos dado que hay mayor cantidad de datos, y por ende, mayor información; en el Enfoque 3, la explicación puede ser que la simulación arrojó escenarios más conservadores que los datos reales. Cabe destacar que los Enfoques 1 y 4 presentan comportamientos casi idénticos para sus predicciones de Hierro.

De forma similar, al comparar los resultados obtenidos en términos de Tonelaje total, Metal total y Ley media, se tiene que la curva de tonelaje-ley que resume estos resultados (Figura 4.36) muestra un comportamiento estandarizado, donde todas las curvas están posicionadas similarmente; a excepción de el Tonelaje calculado mediante el Enfoque 4, donde para valores sobre el 50% de ley de corte presenta mayor tonelaje que el resto de los enfoques, alejándose de ellos. Con respecto al comportamiento de la Ley media, se aprecian dos tendencias, una en donde los Enfoques 2 y 4 presentan comportamientos superpuestos, y otra en donde el Enfoque 1 representa menores leyes medias, hasta alcanzar la ley de corte de 40%, en donde se solapa con el Enfoque 3.

En términos de resultados (Tabla 4.15), el enfoque que presenta el menor inventario de recursos es el 1, el cual fue realizado mediante un kriging de hierro; a excepción del tonelaje total, en donde el menor valor lo presenta el Enfoque 3. Así, existen desemejanzas en los resultados; el caso del Metal total, las diferencias oscilan entre el 5.9% – 8.4%, lo cual es equivalente en una variación de 3.55 – 4.98 [Mt]. En el caso de la Ley media, la disparidad fluctúa entre 6.47% al 7.26%. Fi-

nalmente, para el tonelaje, las diferencias van desde el 0.76% hasta el 2.66%, lo que se traduce a un rango de 1.01 – 3.52 [Mt].

La situación varía levemente considerando la ley de corte del 20%. En este caso, nuevamente el Enfoque 1 es el que tiene el peor desempeño, pero presenta mayor tonelaje, y el Enfoque 4 evidencia mayor Ley media y cantidad de Metal, pero las disimilitudes por variable son distintas. En el caso del Tonelaje total, las fluctuaciones son menores al 1.5%. Al considerar el Metal, la variación es entre 3.6 a 5.54 [Mt], lo que representa una fluctuación entre el 6.05% al 7.7%. Para la Ley media la diferencia va desde el 6.8% al 8.44%.

La principal característica que distingue a los enfoques es la distribución de los valores simulados dentro del espacio de estimación (grilla). Todos muestran mineralización por zona, presentando zonas bien marcadas de alta y baja ley, así, los cuatro enfoques logran predecir espacialmente de forma similar estas zonas (Figuras 4.11, 4.18, 4.30 y 4.34), las diferencias se encuentran en los valores medios. El Enfoque que muestra mayor variabilidad espacial en las estimaciones, y por ende, menos suavizado, es el Enfoque 2; sin embargo, los Enfoques 1 y 3 también muestran zonas de baja y alta ley bien definidas, y con zonas de leyes medias entremedio de estas. El Enfoque 4 presenta una zonificación no muy bien definida y bastante “suavizada” con respecto a los otros enfoques; a medida que se alejan de las zonas de alta y baja ley, las leyes varían de forma gradual, y no de manera abrupta, a diferencia de los resultados de los otros enfoques.

En síntesis, esto quiere decir que todas las metodologías alcanzan valores similares en la estimación, por ende, son equivalentes entre sí para alcanzar resultados semejantes; sin embargo, las disparidades entre resultados no son menores, pero también hay que considerar las características del método y en las necesidades del usuario.

5.1. Enfoque 1: Kriging de Fe

Su desempeño se puede explicar dado que no considera la aditividad a la hora de realizar las estimaciones. A continuación, se hace un análisis cualitativo de sus ventajas e inconvenientes intrínsecos de utilizar este método:

- *Ventajas:*
 - *Simplicidad y robustez.* El kriging es un método bien establecido, relativamente fácil de implementar y ampliamente utilizado en la minería. Además, por más que no considere otras variables, logra entregar resultados fiables y similares a otras metodologías.
 - *Estimación directa de la ley de Fe.* Trabajar directamente con la variable de interés permite una interpretación clara de los resultados, facilitando su análisis y aplicación en la toma de decisiones.
 - *Minimización del error cuadrático medio.* El kriging está diseñado para minimizar el

error cuadrático medio, lo que asegura que la estimación sea la mejor posible en términos de promedio de errores.

- *Inconvenientes:*

- *Producto de estimaciones.* Para obtener Q_{Fe} se realiza un cálculo basado en la estimación de dos variables (Fe y densidad), lo que introduce errores adicionales (posibles sesgos) al combinar dos estimaciones independientes.
- *Suavizamiento.* El kriging tiende a suavizar los valores extremos, lo que afecta negativamente la estimación de recursos recuperables, subestimando los valores altos de ley y sobreestimando los bajos.
- *Confía en la regresión de densidad.* La densidad de la roca se calcula a partir de la ley de Fe predicha, mediante una regresión lineal (Ecuación 2.15). En consecuencia, la capacidad de la estimación de poder representar las verdaderas reservas y recursos del depósito depende directamente de la calidad de la relación entre la densidad y el Hierro, y esto conlleva a imprecisiones dentro de la estimación.

5.2. Enfoque 2: Cokriging de variables aditivas

En comparación al Enfoque 1, se encuentra que al incluir la densidad en la estimación sí se logra una mayor cuantificación de los recursos. No en el caso del tonelaje total, si no que en el contenido de Hierro, siendo esta diferencia de 7.19 %, equivalente a 4.26 [Mt] de contenido metálico extras que están siendo estimadas. Como se mencionó previamente, esta es la metodología que obtiene la mayor ley media de Hierro, dentro de los recursos totales.

Este enfoque, aunque mejora la estimación al considerar conjuntamente la densidad y el metal, también presenta características que lo distinguen de los demás, así como inconvenientes:

- *Ventajas:*

- *Incorporación de variables aditivas.* Este enfoque permite estimar conjuntamente la densidad y la cantidad de metal, lo que mejora la precisión en la estimación de la ley de Hierro al tener en cuenta la relación entre estas variables. Si bien, es un poco contraintuitivo utilizar variables “adicionales”, utilizar variables aditivas permite mejorar la precisión de la estimación.
- *Mejor estimación del metal.* Al predecir la ley de hierro a través de la densidad y el metal, elimina los sesgos en el cálculo del metal, lo que reduce los errores de subestimación o sobreestimación.
- *Flexibilidad.* Este método es más flexible que el kriging tradicional ya que permite integrar la correlación entre variables en la estimación, lo que mejora la calidad del modelo.

- *Inconvenientes:*

- *Suavizamiento*. De igual manera que el kriging, el cokriging tiende a suavizar los datos, lo que afecta la estimación de recursos recuperables.
- *Confianza en la regresión de densidad*. De manera semejante al Enfoque 1, este método también depende de la relación entre la ley de Fe y la densidad, lo que puede introducir errores si la regresión no es precisa.
- *Más intensivo en tiempo de estimación que el kriging* y aún así se obtienen resultados similares.

5.3. Enfoque 3: Simulación de Fe a soporte puntual

Este enfoque busca capturar, de manera detallada, la variabilidad espacial de la ley de Fe. Así, se caracteriza por poseer las siguientes ventajas e inconvenientes.

- *Ventajas:*

- *Captura de la incertidumbre*. La simulación permite obtener realizaciones múltiples del modelo, lo que proporciona una visión más completa de la incertidumbre espacial de las variables, dado que cada realización representa un escenario posible. Dicho de otro modo, cada realización entrega una respuesta insesgada posible. Esto es particularmente útil para evaluar riesgos en la planificación minera.
- *Posibilidad de análisis probabilístico*. Dado que se generan múltiples realizaciones, este enfoque permite elaborar análisis de sensibilidad y riesgo en distintos escenarios, proporcionando los cimientos para la toma de decisiones.

- *Inconvenientes:*

- *Confianza en la regresión de densidad*. Al igual que los enfoques anteriores, este método depende de la regresión de densidad.
- *Inconsistencia en las estimaciones esperadas*. Las estimaciones de recursos esperados, como la ley media, el tonelaje y el metal, no son siempre consistentes entre simulaciones. Es decir, no se garantiza que el metal esperado sea igual al producto de la ley media esperada por el tonelaje esperado, lo que introduce problemas en la evaluación global de los recursos. Además, al ser varias realizaciones lo que se considera es un promedio de éstas.
- *Intensivo en uso de recursos computacionales*.
- *Intensivo en tiempo de estimación*.

Estudiando sus resultados, el desempeño de esta metodología se puede deber a que, dentro de la validación cruzada, se encontró que la simulación es más conservadora que los datos originales.

5.4. Enfoque 4: Machine Learning

Aunque este enfoque en teoría comparte los mismos inconvenientes que los anteriores, presenta ventajas significativas. Esto se estudia a continuación:

- *Ventajas:*
 - *Automatización.* A diferencia de los métodos geoestadísticos tradicionales, este enfoque requiere menos intervención del usuario para definir parámetros, lo que simplifica el proceso de estimación y permite que cualquier persona sea capaz de utilizarlo, aumentando su accesibilidad.
 - *Capacidad de modelar relaciones complejas.* En general, los algoritmos de ML son capaces de identificar relaciones complejas no lineales entre las variables, lo que mejorara la precisión de la estimación.
 - *Es escalable a grandes cantidades de datos.* Si bien en este caso se estudió una zona del yacimiento, esta propiedad lo convierte en una alternativa plausible para yacimientos masivos y complejos, en donde las técnicas geoestadísticas tradicionales pueden ser difíciles de aplicar dado el volumen de datos. Es decir, este método no presentará problemas al estudiar todo el depósito.
 - *Adaptabilidad a diferentes tipos de datos.* Aparte de las variables estudiadas, se pueden incluir otros aspectos como variables geológicas, geometalúrgicas y geotécnicas, lo que lo convierte en una herramienta versátil.
- *Inconvenientes:*
 - *Confía en la regresión de densidad.*
 - *Suavizamiento.* Puede sufrir de los mismos problemas de suavizamiento en la estimación de recursos recuperables.
 - La estimación se calcula a partir de las coordenadas, pero no directamente a partir de los datos vecinos.
 - *Intensivo en uso de recursos computacionales.*

5.5. Desigualdad de Jensen

Otro aspecto a considerar dentro de este análisis, es que mediante la desigualdad de Jensen es posible probar que el Enfoque 2 es más preciso que el Enfoque 1. Como se menciona en capítulos anteriores, en el contexto de un depósito mineral, la densidad de la roca se modela como una función lineal de la ley de hierro, dada por la expresión 2.15. A partir de esta relación, el contenido de hierro metálico Q_{Fe} se puede expresar como una función cuadrática de Fe (Ecuación 5.1).

$$Q_{Fe} = a \cdot Fe + b \cdot Fe^2 = \varphi(Fe) \quad (5.1)$$

La función $\varphi(Fe)$ que describe el contenido metálico, es una función parabólica convexa en términos de la ley de Fe. Esta convexidad juega un papel fundamental en la comparación de ambos enfoques. Según la teoría de la estimación, la esperanza condicional es el mejor estimador posible en términos de minimizar el error cuadrático esperado. Aplicando este principio, el mejor estimador para el contenido metálico es Q_{Fe}^* , obtenido aproximadamente mediante cokriging de $Q_{Fe} = \varphi(Fe)$, lo que es equivalente al Enfoque 2.

En contraste, en el Enfoque 1 se realiza un kriging directo sobre la ley de Fe, lo que permite obtener un estimador Fe^* . Antes de continuar, es importante tener en consideración la desigualdad de Jensen (Ecuación 2.10), de esta se desprende que la esperanza del valor de Fe al aplicar la función convexa $\varphi(Fe)$ siempre será menor o igual que el valor obtenido al aplicar φ a la esperanza de Fe (Ecuación 2.11). Como la función φ es convexa, de acuerdo con esta desigualdad, la media de $\varphi(Fe^*)$, es decir, el Enfoque 1, siempre será menor que $\varphi(Fe)$, es decir, el estimador del metal que se obtiene directamente del kriging de contenidos (enfoque 2). Matemáticamente, se puede expresar como lo visto en la ecuación 5.2.

$$\varphi(Fe^*) \leq Q^* \quad (5.2)$$

Por lo anterior, el Enfoque 1, que se basa en la estimación de Fe^* subestima el contenido de metal en comparación con el Enfoque 2. En resumen, la construcción del cokriging permite una estimación más precisa del contenido metálico total, lo que lo hace preferible al kriging de la ley de hierro.

5.6. Resumen

Dado que algunos inconvenientes se repiten entre enfoques, se decide elaborar una tabla resumen que contenga estos problemas. Es así como se crea la Figura 5.1. Eso sí, no se elabora para las ventajas de las metodologías, ya que cada una presenta características únicas.

Inconvenientes	Enfoque 1 Kriging de Fe	Enfoque 2 Cokriging	Enfoque 3 Simulación de Fe	Enfoque 4 Machine Learning
Suavizamiento	X	X		X
Sesgo por el producto de estimaciones	X			
Confía en la regresión de densidad	X	X	X	X
Inconsistencia en las estimaciones			X	
Intensivo en recursos computacionales			X	X
Intensivo en tiempo de estimación			X	

Figura 5.1: Cuadro resumen de los inconvenientes de las metodologías.

Capítulo 6

Conclusiones

En primer lugar, se destaca que en este trabajo se cumplió a cabalidad los objetivos propuestos. Se evaluó la validez del uso de fórmulas para la determinación de la densidad en la estimación de recursos ferríferos, así como las consecuencias que esta decisión implica. Para aquello, se realizó una revisión de literatura que comprenden los conceptos clave, así como un análisis del Estado del Arte. También, se ejecutaron y compararon cuatro enfoques diferentes para ver cómo se expresa la variación de los recursos minerales. Y, finalmente, se estudió el impacto de utilizar variables aditivas en la cuantificación de los mismos.

Es así como a lo largo de esta memoria se ha evaluado, estudiado y comparado la aplicación de cuatro enfoques diferentes para la estimación de recursos en un yacimiento de hierro: kriging de ley de hierro, cokriging de variables aditivas, simulación de ley de hierro y machine learning con SVM. Cada uno de ellos mostró comportamientos parecidos en términos de la distribución espacial de las leyes de hierro, destacando zonas bien definidas de alta y baja ley. Sin embargo, existen diferencias clave que distinguen a cada enfoque en cuanto a la variabilidad espacial, suavizamiento de las estimaciones y el comportamiento de las curvas de tonelaje-ley. Estas pequeñas discordancias inciden directamente en el inventario de recursos resultante.

En segundo lugar, el análisis de los resultados evidencia que *no existe un enfoque claramente superior a los demás*. Todos los enfoques logran valores estimados semejantes, lo que quiere decir que son métodos válidos para realizar la estimación de recursos. Sin embargo, el Enfoque 4 fue el que entregó una curva más “disparada” hacia los valores altos de tonelaje. Las desemejanzas observadas, aunque menores, radican principalmente en las características intrínsecas de cada enfoque. Para ilustrar esto, algunos métodos lograron cuantificar recursos directamente sobre hierro (como el kriging y la simulación) pero uno de ellos sí considera la incertidumbre (la simulación) y el otro no. Por ejemplo, en todos los escenarios la simulación (Enfoque 3) registró el menor inventario de recursos, mientras que, el machine learning (Enfoque 4) destacó por presentar mayor proporción de tonelaje para leyes de corte superiores al 50%. No obstante, las discrepancias en sus inventarios de recursos (ya sean recursos totales o reservas) son significativas, y no se deben ignorar a la hora de tomar una decisión. Si bien, para este caso de estudio, las diferencias en todos los contextos no

superan el 10%, estas son significativas, y pueden definir la realización o no un proyecto. Por ejemplo, en el caso de la ley de corte 0%, el Enfoque 2 produce un 7.2% más de recurso que el Enfoque 1, que se puede explicar por la desigualdad de Jensen. En conclusión, las disimilitudes encontradas no son marginales, y son un punto de consideración a la hora de evaluar los yacimientos.

En tercer lugar, con respecto a la densidad, se puede concluir *que es fructuoso integrarla como variable aditiva para realizar la estimación*. Uno de los principales beneficios es que, al haber una relación directa con la concentración de hierro, esta variable captura las variaciones físicas del mineral, mejorando las predicciones de ley de Fe. En particular, su incorporación en el cokriging permitió mejorar la precisión de los resultados, y a su vez, también reflejar de mejor manera la distribución espacial del metal dentro del yacimiento. Por ende, se concluye que *la utilización de variables aditivas tiene un impacto positivo en la cuantificación de los recursos*.

Sin embargo, un desafío importante es la disponibilidad de datos confiables de densidad, ya que, como se discutió en secciones anteriores, es una variable que tiende a ser subestimada o ignorada. Adicionalmente, al depender directamente de la regresión con ley de hierro, los valores pueden variar significativamente. Por lo tanto, la calidad de las estimaciones finales dependerá en gran medida de la precisión de la densidad, y, en este caso, de la regresión utilizada para la estimación de esta. En este sentido, se concluye que al integrar la densidad de manera más efectiva ofrece ventajas sobre aquellos métodos que no consideran esta variable. Ahora, el haber considerado válida la regresión de densidad influye en el resultado final, y si se tienen mediciones en sondajes de esta variable, se debería esperar mejores resultados, ya que se estaría trabajando sobre datos reales.

Es importante señalar que, para lograr una comparación más sólida, sería necesario contar con datos suficientes para realizar una reconciliación de datos. Ya que esto permitirá perfeccionar el análisis y comprender mejor las ventajas y limitaciones de cada enfoque. Pero por ahora, la selección del método más adecuado dependerá de las prioridades del usuario en cuanto a recursos computacionales disponibles, precisión esperada, variabilidad y distribución espacial, y de las necesidades específicas del proyecto.

Finalmente, se destaca la utilización de machine learning para cuantificar los recursos. Si bien, no es concluyente cuál metodología es mejor, esta fue la que en general obtuvo mayores recursos totales y recuperables. Así, se suma como una alternativa novedosa para reemplazar y/o complementar métodos geoestadísticos tradicionales. Sumado a que, al ser más amigable con el usuario, permite que su accesibilidad y aplicabilidad sea mayor.

6.1. Recomendaciones

Como se dijo previamente, para obtener un mejor entendimiento de los resultados obtenidos mediante la aplicación de los distintos enfoques es recomendable realizar reconciliación de datos. Esto permitirá evaluar de forma más precisa las diferencias y similitudes entre las metodologías.

Para futuros trabajos en este caso de estudio, se recomienda evaluar y modelar la presencia de elementos contaminantes como el fósforo o el azufre. Incluirlos dentro del proceso de estimación ayudaría a obtener resultados más robustos, dado que estos elementos afectan tanto la calidad del recurso como el procesamiento metalúrgico, sobre todo considerando la restricción de los mismos. Además, integrarlos en el análisis puede brindar una visión más completa de los recursos minerales dada las restricciones de contaminantes, mejorando la cuantificación de los recursos.

Otra recomendación fehaciente es el uso de la densidad a la hora de estimar recursos, pero con datos reales. Si bien, el uso de una fórmula para la densidad es una buena aproximación inicial y arrojó resultados favorables, sería ideal contar con datos reales de muestreo, porque así se puede reflejar con precisión el comportamiento de esta propiedad a lo largo del depósito; por consiguiente permitiría mejorar la exactitud de las predicciones de tonelaje y metal. Además, así no se confía en la regresión para la estimación de recursos, lo cual eliminaría la desventaja presente en todos los enfoques.

Cabe destacar que este trabajo se limita exclusivamente a un yacimiento ferrífero. Para trabajos futuros, se sugiere investigar la incidencia de la densidad en otro tipo de depósitos que tengan una fuerte dependencia con esta propiedad. Si bien, ahora se estudió en el hierro que posee alta variabilidad, (y por ende, su densidad también) sería interesante estudiar para otros minerales cuya densidad de roca dependa de la ley de mineral, ya sea en menor, igual o mayor medida.

De forma adicional, una alternativa que surge de este trabajo es la posibilidad de implementar más de una metodología en la estimación de recursos, dadas sus ventajas y sus inconvenientes, ya que podría ofrecer una visión ventajosa y más completa de la mineralogía. Por ejemplo, los enfoques 2 y 4 arrojaron resultados similares (en términos del comportamiento de la curva de Ley Media); al combinarlos, se podría tener mejor conocimiento de la distribución espacial de esta variable en el depósito (dado por el resultado del cokriging), con mayor certeza de la cuantificación de los recursos (dado por el SVM). Así, se generaría un modelo de recursos más confiable.

De manera similar, se podrían acoplar enfoques con resultados distintos. Al combinarlos, se obtiene un rango más amplio de posibles resultados, lo que puede ser útil para análisis de riesgo y para la creación de una planificación minera más ajustada a la realidad. Una forma de lograr esta integración podría ser al considerar la zonificación de la mineralogía del yacimiento. Por ejemplo, en zonas cuya geología sea más homogénea, utilizar un enfoque tradicional como el cokriging, y en la zona cuya geología sea más heterogénea utilizar la simulación o SVM, para cuantificar la incertidumbre o las relaciones complejas entre variables. Pero esto quedaría pendiente a evaluación para trabajos futuros.

Glosario

A

a_i : alcance del variograma modelado. El índice i indica en cual dirección (1: Norte, 2: Este, 3: Z).

Acimut: ángulo de la orientación sobre la superficie.

ang_i : alcance angular del variograma modelado. El índice i indica en cual dirección (1: Norte, 2: Este, 3: Z).

Anisotropía: cualidad de que propiedades físicas varían de manera direccional. **Atol:** abreviación de “*tolerancia del acimut*”. Su unidad es en grados [°]

Azm: abreviación de acimut, proveniente de la palabra en inglés azimuth.

D

D: densidad.

Declustering: desagrupamiento en inglés.

Determinista: en las matemáticas, se le dice a cuando independientemente de los condiciones iniciales, se producirán los mismos resultados, es decir, no hay incertidumbre.

Dip: El ángulo al que una característica planar está inclinada con respecto al plano horizontal; se mide en un plano vertical perpendicular a la dirección de la característica[27]. Su unidad es en grados [°].

Dtol: abreviación de “*tolerancia del dip*”. Su unidad es en grados [°].

E

E-Type: valor promedio de realizaciones.

Estocástico/a: concepto utilizado en estadística; referente de una variable aleatoria, que posee una distribución de probabilidad con varianza finita [28].

EDA: siglas en inglés de *Exploratory Data Analysis*, en español se le conoce como análisis exploratorio de datos. Esta etapa busca limpiar las bases de datos, identificando patrones en los datos. Estos patrones pueden ser *outliers*, datos faltantes y/o datos aberrantes.

F

Fe: hierro.

FeG: hierro con transformación gaussiana.

FeO: óxido de hierro

I

IOA: siglas en inglés de *iron oxide-apatite* hace referencia a yacimientos de magnetita apatito.

L

Lag: en el contexto de generación de variogramas, significa paso. Su unidad es en metros [m].

Lagtol: abreviación de “*tolerancia del lag*”. Su unidad es en metros [m].

LOM: siglas en inglés de *Life of Mine* cuya traducción es “Vida de la Mina”. Este concepto hace referencia a los años de operación de un proyecto minero. No considera período de inversión.

M

M: magnetismo.

N

Nlag: abreviación de “*número de pasos*” considerados en el cálculo del variograma. Su unidad es en metros [m].

O

Outlier(s): palabra en inglés que significa “un hecho, cifra, dato, etc. que es muy diferente de todos los demás en un conjunto y no parece ajustarse al mismo patrón” [29].

P

P: fósforo.

PredDens: predicción de densidad.

PredFe: predicción de hierro.

PredMet: predicción de metal.

Q

Q: cantidad, viene de *quantity* en inglés.

S

S: azufre.

Skarn: es una zona metamórfica desarrollada en el área de contacto alrededor de intrusiones de roca ígnea cuando rocas sedimentarias carbonatadas son invadidas por grandes cantidades de silicio, aluminio, hierro y magnesio. Los minerales que comúnmente se encuentran en un skarn incluyen óxidos de hierro, calco-silicatos (wollastonita, diópsido, forsterita), granates de andradita y grosularia, epidota y calcita [30].

Soporte: tamaño o volumen de los datos. La diferencia en el soporte debe considerarse si es que se utilizan dos fuentes de información para construir el modelo de leyes [31].

SMU: siglas en inglés de *Selective Mining Unit*, en español se conoce como unidad básica de explotación. Es el volumen de bloque mínimo en el cual se hace la explotación.

SVM: siglas en inglés de *Support Vector Machine*, en español se conoce como *máquinas de vec-*

tores de soporte. Es un algoritmo de aprendizaje, asociado a problemas de clasificación y regresión.

T

TrueDens: valor real de densidad.

TrueFe: predicción de hierro.

TrueMet: valor real de metal.

U

UBE: siglas de Unidad Básica de Explotación.

V

VAN: siglas de *Valor Actual Neto*, corresponde a la medida de valor neto en el momento actual de los flujos de caja futuros [32]. También se le conoce como Valor Presente Neto (VPN).

Bibliografía

- [1] M. Abzalov, *Applied Mining Geology*. January 2016.
- [2] G. Arseneau, “Estimating bulk density for mineral resource reporting | SRK Consulting.”
- [3] K. Lomborg, “Density: bulk in-situ or SG?,” *Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, vol. 121, pp. 1–6, September 2021.
- [4] C. Reis, C. R. Arroyo, A. Curi, and M. Zangrandi, “Impact of bulk density estimation in mine planning,” *Mining technology*, vol. 130, pp. 60–65, January 2021.
- [5] K. M. Crawford, “Determination of bulk density of rock core using standard industry methods,” December 2020.
- [6] M. Abzalov, “Measuring and modelling of dry bulk rock density for mineral resource estimation,” *Transactions*, vol. 122, pp. 16–29, March 2013.
- [7] I. Salinas, “Estimación de recursos en un yacimiento de fierro.” [Tesis de pregrado], 2012.
- [8] J. P. Chilès and P. Delfiner, “J.-P. Chilès, P. Delfiner: Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty,” *Mathematical Geosciences*, vol. 45, pp. 377–380, 10 2012.
- [9] X. Emery and S. A. Séguret, *Geoestadística de Yacimientos de Cobre Chilenos – 35 Años de Investigación Aplicada*. Caligrama, Sevilla, 2020.
- [10] C. Deutsch and A. Journel, “GSLIB: Geostatistical Software Library and User’s Guide,” 1998.
- [11] N. Mery, “Modelamiento geoestadístico de la incertidumbre en leyes y tipos de roca en un yacimiento ferrífero.” [Tesis de Magíster], 2016.
- [12] X. Emery, *Lesson 2: local uncertainty models*. [Diapositivas de presentación], Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, 8 2023.
- [13] X. Emery, *Lesson 4: multigaussian simulation*. [Diapositivas de presentación], Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, 8 2023.
- [14] IBM, “What is machine learning (ML)? | IBM.”
- [15] J. Amat Rodrigo, “Máquinas de Vector Soporte (SVM) con Python,” 12 2020.
- [16] A. Kowalczyk, *Support vector machines succinctly*. Syncfusion, 10 2017.
- [17] X. Emery, *Lección 1: Fundamentos de estadística*. [Diapositivas de presentación], Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, 3 2022.

- [18] E. Laine, *Kriging estimation of block densities in Ahmavaara PGE deposit*. 2003.
- [19] E. Motta, I. Moraes, P. Apolônio, and E. Cunha, “Incorporating mineralogical and density parameters in ferrous resource evaluation using Mineralogical Norm,” *Conference: 24th WORLD MINING CONGRESS*, November 2019.
- [20] M. Wasilewska-Błaszczuk and J. Mucha, “The accuracy of the local assessment of the bulk density of copper-silver deposits in the Legnica-Głogów Copper District and its impact on the valuation of ore resource and mining production,” *Gospodarka Surowcami Mineralnymi-mineral Resources Management*, July 2019.
- [21] W. Guo, “Density investigation and implications for exploring iron-ore deposits using gravity method in the Hamersley province, Western Australia,” *AIMS geosciences*, vol. 9, pp. 34–48, January 2022.
- [22] S. D. Goodfellow, N. Wu, C. Drielsma, V. Gerrie, and L. Petrie, “Downhole density estimation using multielement geochemistry and machine learning,” *The leading edge*, vol. 41, pp. 400–410, June 2022.
- [23] F. Mamani and X. Emery, “Evaluación de la gravedad específica basada en métodos geoestadísticos multivariados,” *GEOMIN*, 2023.
- [24] S. C. Dominy, M. A. Noppé, and A. E. Annels, “Errors and uncertainty in mineral resource and ore reserve estimation: the importance of getting it right,” *Exploration and Mining Geology*, vol. 11, pp. 77–98, January 2002.
- [25] S. Ziapour, D. Esmaeily, K. Khoshnoodi, S. Niroomand, and A. C. Simon, “Mineralogy, geochemistry, and genesis of the Chahgaz (XIVA Anomaly) Kiruna-type iron oxide-apatite (IOA) deposit, Bafq district, Central Iran,” *Ore Geology Reviews*, vol. 128, p. 103924, 1 2021.
- [26] F. Sepidbar, G. Ghorbani, A. C. Simon, J. Ma, R. M. Palin, and S. M. Homam, “Formation of the Chah-Gaz iron oxide-apatite ore (IOA) deposit, Bafq District, Iran: Constraints from halogens, trace element concentrations, and Sr-Nd isotopes of fluorapatite,” *Ore Geology Reviews*, vol. 140, p. 104599, 1 2022.
- [27] T. E. of Encyclopaedia Britannica, “Strike | Fault, folding & Earthquakes,” 7 1998.
- [28] Collins, *Definition of 'stochastic'*. Collins Dictionary, s.f.
- [29] C. Dictionary, *Definition for Outlier*. Cambridge University Press & Assessment, December 2023.
- [30] T. E. of Encyclopaedia Britannica, “Skarn | Metamorphic rocks, igneous intrusions & Mineral Deposits,” 7 1998.
- [31] M. A. A. Bassani and J. F. C. L. Costa, *Geostatistics with Data of Different Support Applied to Mining Engineering*. Springer Cham, 1 2022.
- [32] I. Álvarez, *Costo de oportunidad, tasa de descuento y matemáticas financieras*. [Diapositivas de presentación], Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile, 2022.

Anexo A

Resultados adicionales EDA

Tabla A.1: Estadística descriptiva de la Base de Datos sin limpiar

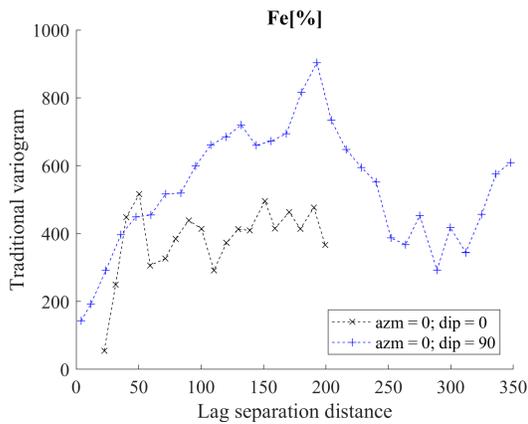
	Este [m]	Norte [m]	Elevación [m]	Fe [%]	FeO [%]	P [%]	S [%]
Cuenta	707	707	707	707	707	707	707
Media	179.63	330.77	488.42	46.92	17.45	0.57	0.16
Moda	73.58	460.84	391.73	10.79	27.06	0.05	0.05
Desviación Estándar	70.83	109.02	129.09	19.65	8.67	0.63	3.77
Varianza	5010.47	11869.06	16641.48	385.56	75.11	0.39	14.22
Mínimo	36.55	98.47	176.76	4.0	-99.0	0.05	-99.0
25 %	114.59	256.14	387.56	32.18	11.6	0.17	0.05
50 %	198.18	358.07	498.66	56.49	18.75	0.36	0.13
75 %	237.35	422.9	588.12	61.7	24.01	0.7	0.38
Máximo	287.3	497.58	755.41	69.71	29.24	4.38	4.0

Tabla A.2: Promedio de mediciones en los ejes X e Y

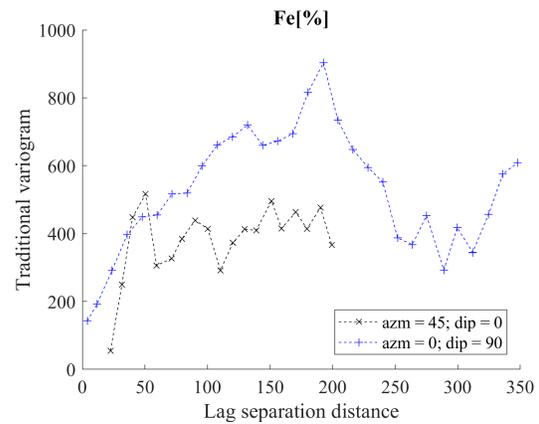
	Distancias	
	X [m]	Y [m]
	19.987	163.13
	64.968	86.29
	114.194	70.65
	79.203	27.32
	58.461	42.69
	56.008	
	57.816	
	85.476	
	29.903	
	77.747	
	108.823	
Promedio	68.4169	78.016
Rendoneo	68	78

Anexo B

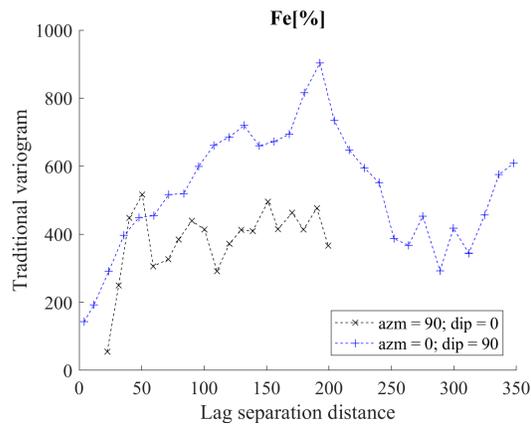
Resultados adicionales Enfoque 1



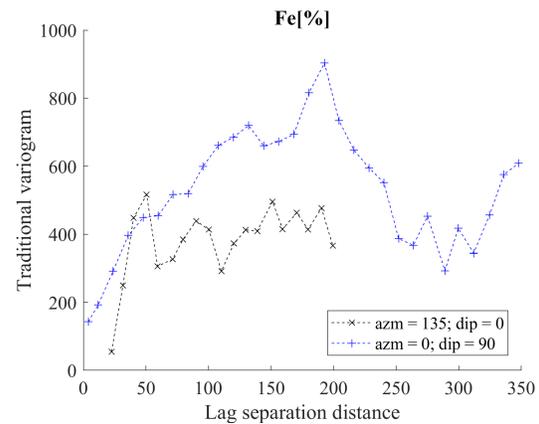
(a) Variograma experimental omnihorizontal con azimuth 0



(b) Variograma experimental omnihorizontal con azimuth 45



(c) Variograma experimental omnihorizontal con azimuth 90



(d) Variograma experimental omnihorizontal con azimuth 135

Figura B.1: Variogramas experimentales para identificar direcciones preferenciales

Tabla B.1: Tabla comparativa parámetros de validación cruzada Enfoque 1

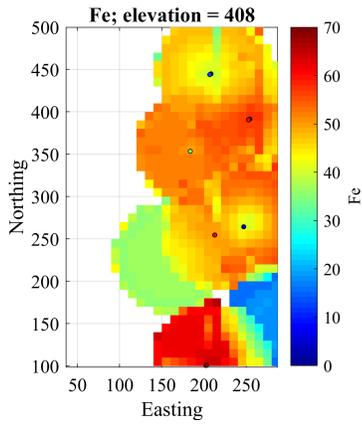
Radio [m]	Octante	Media del Error	Varianza del Error	Varianza del Error Estandarizado
70	4	-0.297	244.878	0.946
	5	-0.29	242.481	0.939
	6	-0.27	241.957	0.937
	7	-0.264	241.749	0.937
	8	-0.282	241.988	0.938
	9	-0.303	242.093	0.938
	10	-0.311	241.846	0.938
100	4	0.162	274.798	1.014
	5	0.162	272.113	1.008
	6	0.084	275.099	1.007
	7	0.086	273.737	1.003
	8	0.072	273.852	1.004
	9	0.01	276.795	1.005
	10	-0.075	279.137	1.003
130	4	0.591	296.241	1.051
	5	0.468	298.084	1.048
	6	0.371	300.196	1.045
	7	0.354	298.143	1.04
	8	0.335	298.305	1.042
	9	0.403	293.885	1.04
	10	0.247	299.165	1.037

Anexo C

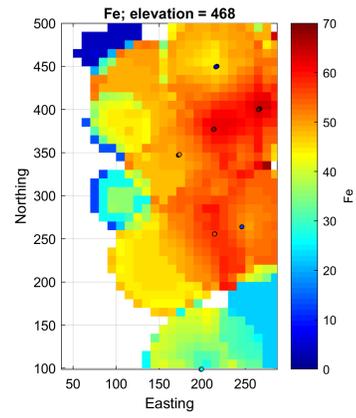
Resultados adicionales Enfoque 2

Tabla C.1: Tabla comparativa parámetros de validación cruzada Enfoque 2

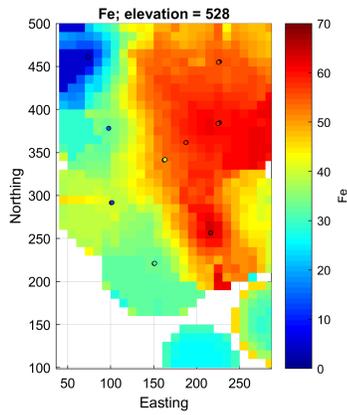
Radio [m]	Octante	Densidad			Metal		
		Media del Error	Varianza del Error	Varianza del Error Estandarizado	Media del Error	Varianza del Error	Varianza del Error Estandarizado
70	4	-0.012	0.334	1.012	555.089	223,905	1.011
	5	-0.012	0.332	1.005	553.601	218,511	1.005
	6	-0.011	0.331	1.004	548.991	218,490	1.004
	7	-0.011	0.331	1.004	549.148	218,848	1.003
	8	-0.012	0.331	1.004	548.035	218,582	1.004
	9	-0.013	0.331	1.005	551.141	217,777	1.004
	10	-0.013	0.331	1.004	546.282	219,055	1.003
100	4	-0.003	0.391	1.077	616.857	242,083	1.077
	5	-0.002	0.388	1.072	618.472	238,299	1.071
	6	-0.003	0.387	1.072	620.052	236,870	1.071
	7	-0.003	0.385	1.067	615.306	236,669	1.066
	8	-0.004	0.385	1.068	612.673	236,259	1.067
	9	-0.003	0.385	1.068	610.525	237,594	1.067
	10	-0.004	0.383	1.066	611.559	237,024	1.065
130	4	0.007	0.431	1.106	669.303	233,845	1.101
	5	0.006	0.429	1.105	668.367	232,759	1.1
	6	0.005	0.428	1.102	672.342	229,164	1.098
	7	0.004	0.425	1.096	670.445	226,950	1.092
	8	0.003	0.425	1.097	659.111	229,372	1.094
	9	0.003	0.423	1.095	661.144	228,466	1.091
	10	0.003	0.421	1.092	664.44	227,408	1.089



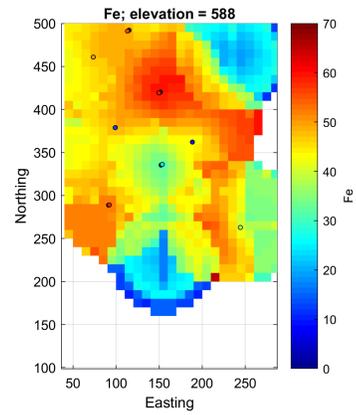
(a) Fe, elevación de 408 metros.



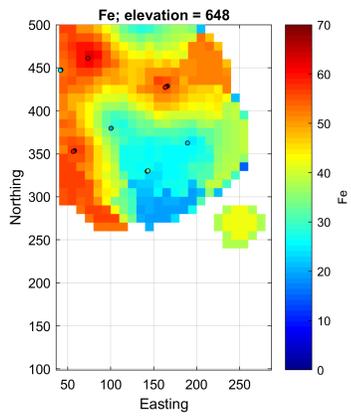
(b) Fe, elevación de 468 metros.



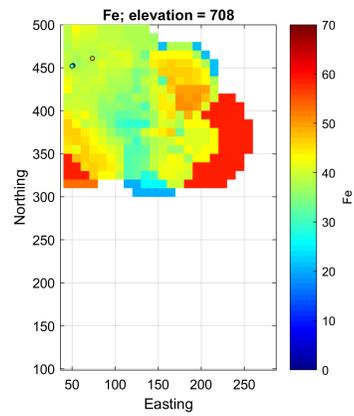
(c) Fe, elevación de 528 metros.



(d) Fe, elevación de 568 metros.

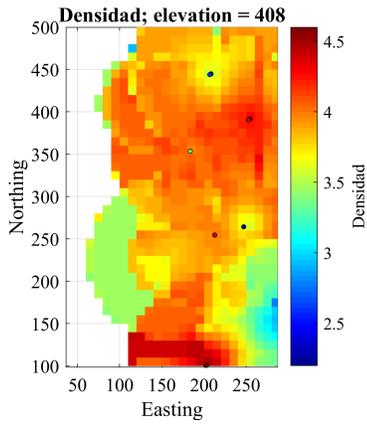


(e) Fe, elevación de 648 metros.

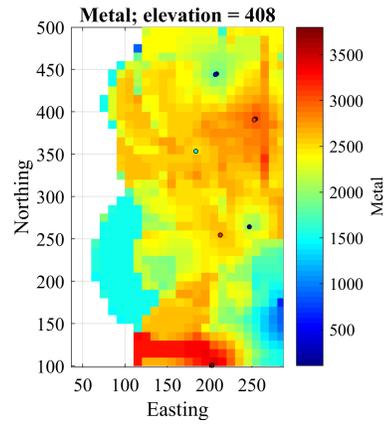


(f) Fe, elevación de 708 metros.

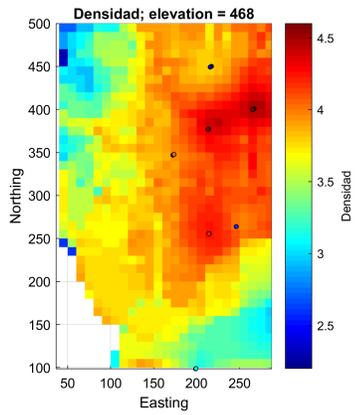
Figura C.1: Resultados cokriging de variables aditivas para el radio de búsqueda de 70 [m]



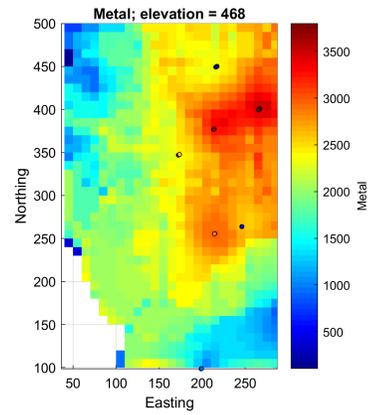
(a) Densidad, elevación de 408 metros.



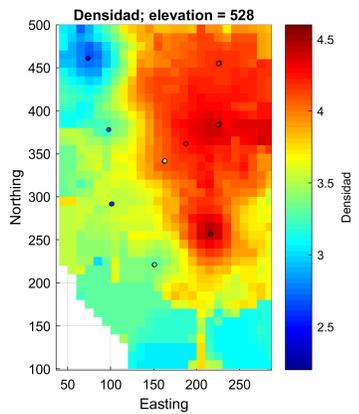
(b) Metal, elevación de 408 metros.



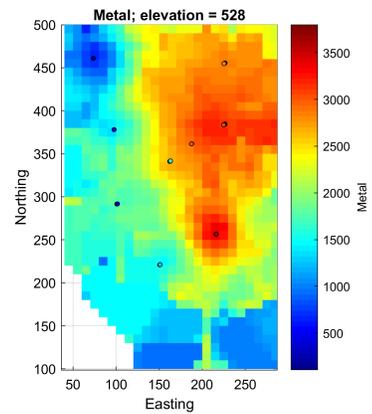
(c) Densidad, elevación de 468 metros.



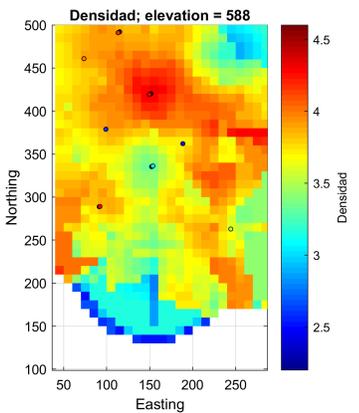
(d) Metal, elevación de 468 metros.



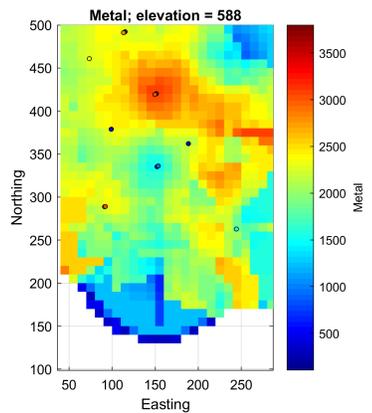
(e) Densidad, elevación de 528 metros.



(f) Metal, elevación de 528 metros.



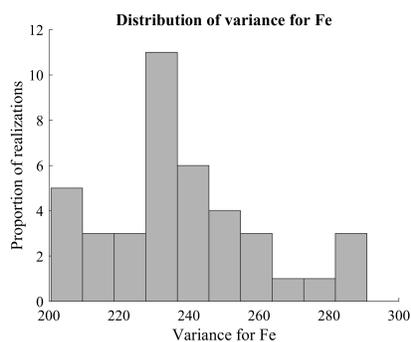
(g) Densidad, elevación de 588 metros.



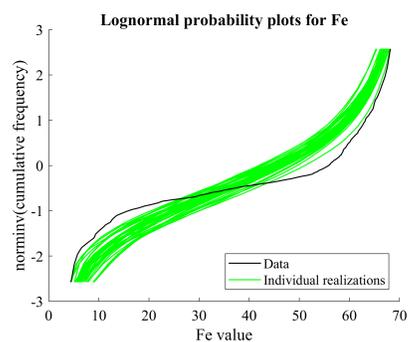
(h) Metal, elevación de 588 metros.

Anexo D

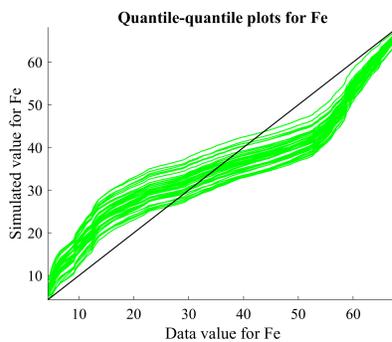
Resultados adicionales Enfoque 3



(a) Distribución de la varianza de las realia-
zaciones

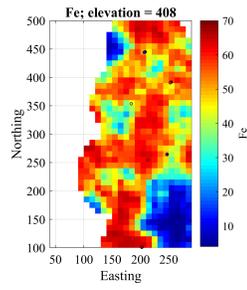


(b) Gráficos de probabilidad lognormal

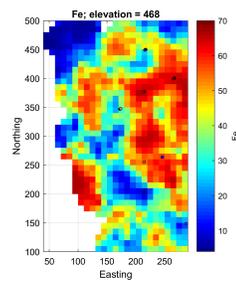


(c) Gráficos de cuartil-cuartil (QQ)

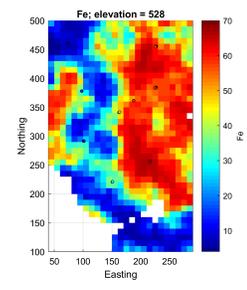
Figura D.1: Procesamiento de las simulaciones: QQ plot



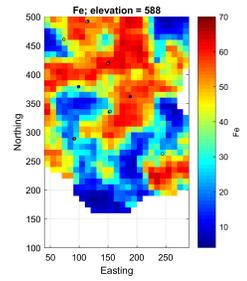
(a) Elevación de 408 metros.



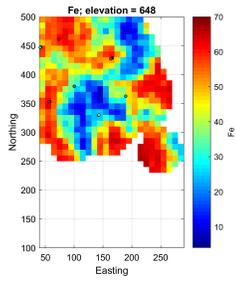
(b) Elevación de 468 metros.



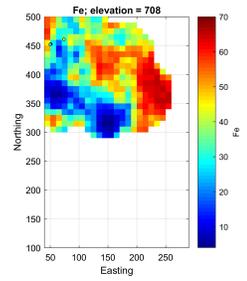
(c) Elevación de 528 metros.



(d) Elevación de 588 metros.



(e) Elevación de 648 metros.



(f) Elevación de 708 metros.

Figura D.2: Visualización en planta de la realización n^o 5.

Anexo E

Resultados adicionales Enfoque 4

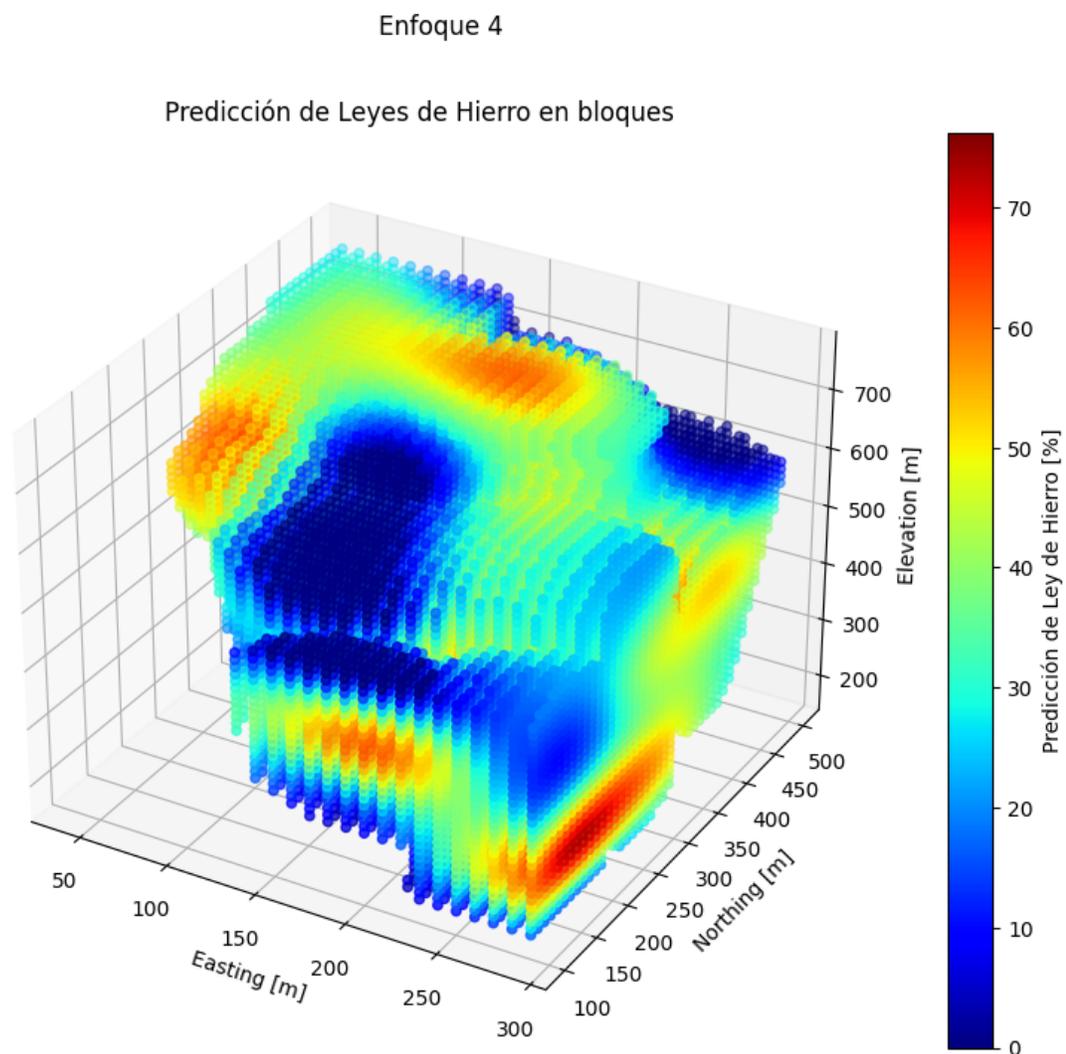


Figura E.1: Visualización en 3D las de leyes de Hierro estimadas mediante SVM en función de las coordenadas y la zona (Enfoque 4).

Enfoque 4

Predicción de Leyes de Hierro en bloques

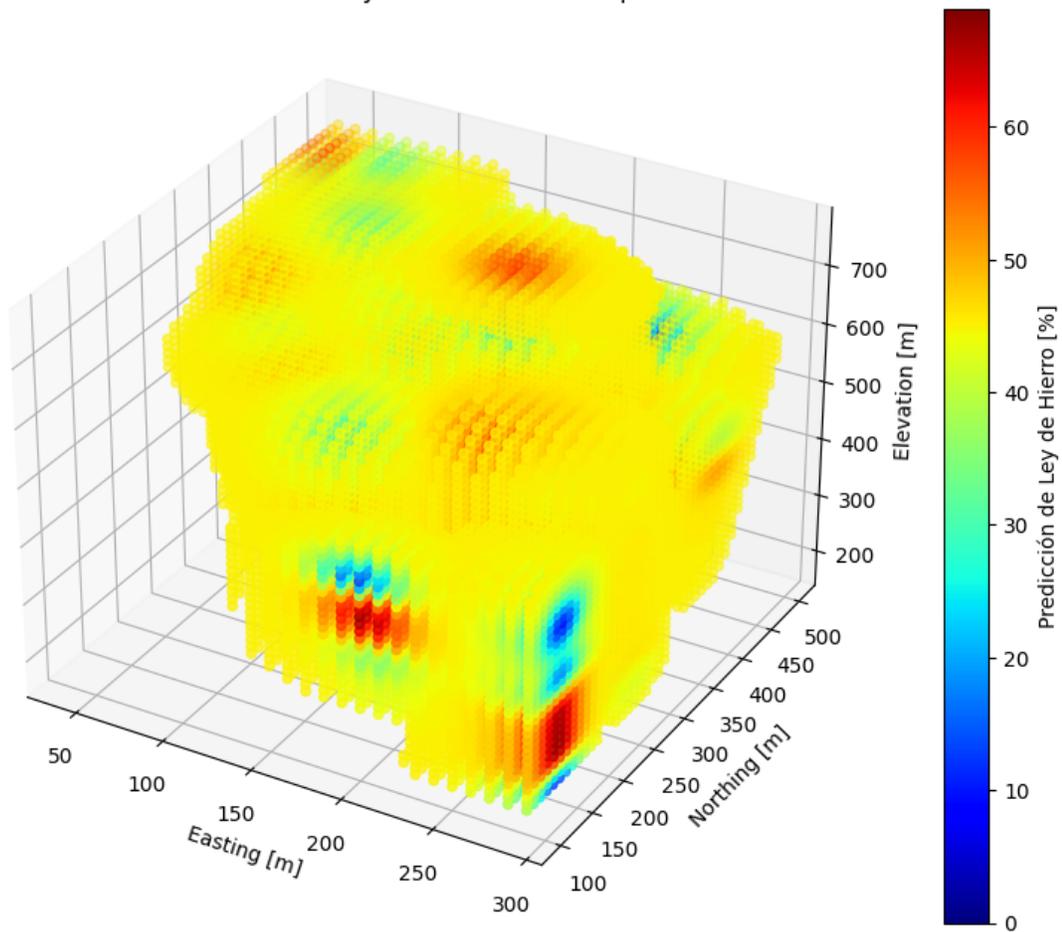


Figura E.2: Visualización en 3D las de leyes de Hierro estimadas mediante SVM en función de las coordenadas y la zona, utilizando un kernel (Enfoque 4).